**T.C.**

**KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİN GEOMETRİSİNE YENİ BİR YAKLAŞIM


**Halil İbrahim ARICI**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**


**DOKTORA TEZİ**


**DANIŞMAN**
**Prof. Dr. Kazım İLARSLAN**


**KIRIKKALE-2024**

T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİN GEOMETRİSİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

Halil İbrahim ARICI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

KIRIKKALE-2024

Halil İbrahim ARICI tarafından hazırlanan "3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİN GEOMETRİSİNE YENİ BİR YAKLAŞIM" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. İsmail GÖK İmza
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Çetin CAMCI İmza
Matematik Anabilim Dalı, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.
Tez Savunma Tarihi: 21.02.2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

şehit çocuklara...

# ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Halil İbrahim ARICI

21.02.2024

## ÖZET

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİN GEOMETRİSİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

ARICI, Halil İbrahim
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman:Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Şubat 2024, 67 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde Minkowski 3-uzayında yeni bir yaklaşım kullanılarak sırasıyla spacelike, timelike ve Cartan null ile pseudo null eğrilerin Mannheim eğri olma şartları elde edilmiştir. Bu eğrilerin ve Mannheim eşlenik eğrilerin Frenet vektörleri ile eğrilik fonksiyonları arasındaki bağıntılar ifade edilmiştir. Bu tip Mannheim eğriler için örnekler inşa edilmiş ve grafikleriyle birlikte verilmiştir. Altıncı bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Öklid uzayı, Minkowski 3-uzay, Cartan null eğri, pseudo null eğri, spacelike, timelike ve null eğri, Mannheim eğri, Mannheim eşlenik eğri.

**ABSTRACT**

A NEW APPROACH TO THE GEOMETRY OF MANNHEIM CURVES IN MINKOWSKI 3-SPACE


ARICI, Halil İbrahim
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Doctorate Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

February 2024, 67 pages

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. In the third, fourth and fifth sections, using a new approach in Minkowski 3-space, the Mannheim curve conditions of spacelike, timelike and Cartan null and pseudo null curves are obtained, respectively. The relations between Frenet vectors and curvature functions of these curves and Mannheim mate curves are expressed. Examples for this type of Mannheim curves are constructed and given with their graphs. The sixth chapter is devoted to the discussion and conclusion.

**Key Words:** Euclidean space, Minkowski 3-space, Cartan null curves, pseudo null curves, spacelike, timelike and null curves, Mannheim curves, Mannheim mate curves.

## TEŞEKKÜR

Lisans ve lisansüstü eğitimim boyunca gösterdiği yakın ilgi, harcadığı zaman ve emek, akademik ve bireysel gelişimim için sağladığı imkanlar, öğretmenliğin yanında babalık şefkatini, vatan sevgisini ve dürüstlüğü de öğrettiği için çok sevdiğim değerli Hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a,

Değerli görüşleri ve yapıcı eleştirileriyle tezimin şekillenmesinde büyük rolleri olan Sayın Doç. Dr. Çetin CAMCI(Çanakkale 18 Mart Üniversitesi) ve Sayın Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU'na(Kırıkkale Üniversitesi), ayrıca tezimin yazım aşamasında teknik desteğini esirgemeyen, tez yazımını kolaylaştıracak değerli bilgilerini bize aktaran Sayın Dr. İlker GENÇTÜRK'e(Kırıkkale Üniversitesi),

Lisans ve Lisansüstü eğitimim boyunca kendilerinden hem akademik hem de karakter olarak çok değerli şeyler öğrendiğim başta derslerini de aldığım merhum Prof. Dr. Recep ŞAHİN ve merhum Prof. Dr. İlker AKKUŞ Hocalarıma ve tek tek bütün Matematik bölümü Hocalarıma,

Hayatıma girdiği andan itibaren bana her zaman güvenen, yokluğumda çocuklarımıza hem annelik hem babalık yapan, sabırla hem manevi hem maddi bütün desteğini esirgemeyen, Rabbim'in iyiki nasip ettiği sevgili eşim Zehra ARICI'ya,

Çalışmalarımı yapabilmek için beraber geçirmemiz gereken zamanları ellerinden aldığım, ayrı kaldığım Rabbim'in emanetleri sevgili kızım Esil ARICI ve sevgili oğlum Enis ARICI'ya,

Hayatım boyunca beni destekleyen, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili annem Nuray ARICI, babam Zekai ARICI ve kardeşim Ceyda ARICI'ya,

Doktora çalışmalarım için üniversitede olduğum zamanlar çocuklarımı okullarından amca sevgisiyle alan, çalışmalarım sırasında gözümün arkada kalmamasını sağlayan, desteğini yardımını hiçbir zaman esirgemeyen, kendilerinden cömertliği, kardeşliği öğrendiğim, can kardeşlerim Emrah KARCI ve Şenol AYDIN'a teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}_0$ | Sıfırdan farklı reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}^+$ | Pozitif reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{E}^3$ | 3-boyutlu Öklid uzayı |
| $\mathbb{E}_1^3$ | 3-boyutlu Minkowski uzayı |
| $g$ | Simetrik bilineer form |
| $\|\|,\|\|$ | Norm fonksiyonu |
| $\langle\ ,\ \rangle$ | İç çarpım fonksiyonu |
| $T$ | Eğrinin teğet vektörü |
| $N$ | Eğrinin asli normal vektörü |
| $B$ | Eğrinin binormal vektörü |
| $\kappa_i$ | Ana eğrinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu |
| $T^*$ | Eşlenik eğrisinin teğet vektörü |
| $N^*$ | Eşlenik eğrisinin asli normal vektörü |
| $B^*$ | Eşlenik eğrisinin binormal vektörü |
| $\kappa_i^*$ | Eşlenik eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

# 1 . GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin önemli bir çalışma alanı olan eğriler teorisinin tarihi Huygens (1629-1695), Leibniz (1646-1716) ve Newton (1643-1727) un düzlemsel eğriler üzerine yaptıkları araştırmalara kadar dayanmaktadır. Bir düzlemsel veya uzay eğrisinin diferensiyel geometrisinin çalışılmasında önemli bir aşama Frenet-Serret denklemlerinin inşa edilmesidir. Bu denklemler Frenet (1847) ve Serret (1851) tarafından ayrı ayrı tanımlanmıştır (Bununla birlikte bu denklemlerin aslında ilk olarak Karl E. Senff(1810-1917) tarafından verildiği bilinmektedir.). Günümüzde genellikle Frenet denklemleri olarak bilinmektedir. $T$ (teğet), $N$ (asli normal), $B$ (binormal) ile gösterdiğimiz ve Frenet vektörleri olarak bilinen bu vektörler yardımıyla eğrinin birçok geometrik özelliği incelenebilmektedir. Bunların başında da eğrinin eğrilik fonksiyonlarının elde edilmesi gelmektedir. Bir eğrinin eğrilik fonksiyonlarının eğriyi temsil eden fonksiyonun türevleri yardımıyla bulunması 1671 yılında Newton (1643-1727) tarafından verilmiştir. 1775 yılında Monge (1746-1818), üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin birinci ve ikinci eğriliğini tanımlamış ve birinci eğrilik fonksiyonunun analitik ifadesini elde etmiştir. Fakat torsiyon (burulma) eğriliğinin analitik ifadesini verememiştir. Torsiyon (burulma) eğriliğinin analitik ifadesi 1806 yılında Lancret (1774-1807) tarafından verilmiştir. Sonrasında 1826 yılında Cauchy (1789-1857) ilk olarak bir uzay eğrisini sistematik olarak ardışık türevler yardımıyla çalışmıştır ( [1–4]). Eğri üzerinde hareketli çatı kavramını, günümüzde kullanıldığı gibi, tanımlayan kişi de G. Darboux(1824-1917) dır. Günümüzde birim hızlı bir uzay eğrisinin birinci ve ikinci eğriliklerini Frenet vektörleri ve bunların türevleri yardımıyla kolayca ifade edilebilmektedir.

Diferensiyel geometride, çok çalışılan konulardan biri de eğriler teorisidir. Eğriler teorisinde karşımıza çıkan ana problemlerden birisi, eğrinin karakterizasyonu problemidir. Bu problemin çözümünde eğrinin eğrilik fonksiyonları olan $\kappa_1$ (eğrinin eğriliği) ve $\kappa_2$ (eğrinin burulması)'nin önemli bir rolü vardır.

Eğrilerin eğrilikleri ve torsiyonlarından arasındaki ilişkilerden faydalanarak bazı özel eğriler belirlenebilir. Örneğin; $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ise eğri bir geodeziktir. Eğer $\kappa_1$ sıfırdan farklı bir sabit ve $\kappa_2 = 0$ ise eğri bir çemberdir. Eğrilik ve torsiyonun her ikisi de sıfırdan farklı sabit ise eğri bir dairesel helistir. Eğer $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ eğrilikleri sabit değil fakat $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ oranı sabit ise eğri bir genel helistir. Eğer $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = as + b$ şeklinde yay parametresine bağlı lineer bir fonksiyon şeklinde yazılabiliyorsa eğri bir rektifiyan eğridir. Ayrıca $\kappa_1$ eğriliği sabit ve $\kappa_2$ torsiyonu değişken olan eğriye Salkowski, $\kappa_1$ eğriliği değişken ve $\kappa_2$ torsiyonu sabit olan eğriye ise anti-Salkowski eğri adı verilir. Bu şekilde 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik ve burulma fonksiyonları yardımıyla bazı özel eğrilerin karakterizasyonları mevcuttur. Eğrilerin karakterizasyonunda rol alan diğer aktör eğrinin Frenet vektörleri ve eğrinin Frenet vektörleri tarafından belirlenen oskülatör düzlemleridir. Uzay eğrilerinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiler de eğri çiftlerinin karakterizasyonunda önemli bir etkendir ( [5]). Uzay eğrilerinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiler sonucunda diferansiyel geometrinin çok iyi bilinen eğri çiftleri ortaya çıkmaktadır. Bu eğri çiftleri arasında Bertrand eğrileri ( [6, 7]), involüt-evolüt eğri çiftleri ( [8, 9]) ifade edilebilir. Tezimizin konusunu oluşturan Mannheim eğrileri de bu sınıfta yer almaktadır.

3-boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri kavramı Mannheim (1831-1906) tarafından çalışılmış ve bu eğrilere "Mannheim eğri" adı Wöllffing (1899) tarafından verilmiştir. Mannheim eğriler şu şekilde tanımlanmıştır. $\mathbb{E}^3$, $<,>$ standart iç çarpımı ile verilen üç boyutlu Öklid uzayı olsun. Bu uzayda bulunan bir $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ uzay eğrisinin asli normal vektör alanı ile $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin binormal vektör alanı lineer bağımlı ise $\varphi$ eğrisi bir Mannheim eğrisi, $\varphi^*$ eğrisi de $\varphi$ eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi ve $(\varphi, \varphi^*)$ da Mannheim eğri çiftidir. 1878 yılında Mannheim eğrilerinin karakterizasyonu olarak, herhangi bir eğrinin Mannheim eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\kappa_1 = \lambda \left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right), \qquad \lambda \neq 0 \quad (sabit)$$

olduğu gösterilmiştir. Mannheim eğrilerinin bilinen en meşhur örneği Bertrand eğrilerinde olduğu gibi dairesel helis eğrileridir. Mannheim eğri örneğinin ilk parametrik ifadesi 1960 yılında Eisenheart ( [10]) tarafından verilmiştir. Genel bir denklem ifade edilen bu çalışmanın özel hallerinden birisi olarak helis eğrileri karşımıza çıkmaktadır.

Mannheim eğriler üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Öklid uzayında yapılan çalışmalara benzer çalışmalar Minkowski 3-uzayında, 4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayında ve uzay formlarda yapılmıştır. Ayrıca yüksek boyutlu Öklid uzayındada çalışmaların varlığını bilmekteyiz. 2008 yılında Liu ve Wang ( [11]), Mannheim eğri çiftlerini üç boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ ve üç boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de çalışmışlar ve $\mathbb{E}^3$ uzayında şu önemli karakterizasyonu elde etmişlerdir. Bir $\varphi^*$ eğrisinin $\varphi$ nın Mannheim eşleniği olması için gerek ve yeter şart $\varphi^*$ eğrisinin eğriliği $\kappa_1^*$, burulması $\kappa_2^*$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_0$ olmak üzere aşağıdaki denklemi sağlamasıdır.

$$\kappa_2' = \frac{\kappa_1^*}{\lambda}\left(1+\lambda^2\kappa_2^{*2}\right). \tag{1.1}$$

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında null Mannheim eğriler 2014 yılında Grbovic, İlarslan ve Nesovic tarafından çalışılmış ve bu uzayda null Mannheim eğrilerin olmadığını, sadece pseudo null Mannheim eğrilerin varlığından söz edilebileceğini ortaya koymuşlardır ( [12]). Ayrıca pseudo null Mannheim eğrilerin, eğri çifti pseudo null doğru olan, pseudo null doğru ve pseudo null çember olduğunu göstermişlerdir.

4-boyutlu Öklid uzayında yapılan çalışmalarda, 3-boyutlu uzayda olduğu gibi klasik anlamda bir Mannheim eğrinin olamayacağı Matsuda ve Yorozu tarafından 2009 yılında ispatlanmış ve genelleştirilmiş Mannheim eğri kavramı 4-boyutlu Öklid uzayında yine bu yazarlar tarafından şu şekilde tanımlanmıştır. $\varphi$, $\mathbb{E}^4$ de özel bir Frenet eğrisi olsun. $\varphi$ eğrisinin her noktasındaki asli normal doğruları aynı uzayda bulunan başka bir özel Frenet eğrisi olan $\varphi^*$ eğrisinin $f$ dönüşümü altında karşılık gelen noktalarındaki birinci ve ikinci binormallerin gerdiği düzlemde yatıyorsa $\varphi$ eğrisine genelleştirilmiş Mannheim eğrisi adı verilir. Burada $f : I \to I^*$ bir diffeomorfizmdir. $\varphi^*$ eğrisine $\varphi$ eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eşleniği adı verilir ( [13]).

Minkowski uzay-zamanda ise ilk çalışma 2010 yılında Ersoy, Tosun ve Matsuda tarafından yapılmıştır ( [14]). Bu uzayda genelleştirilmiş spacelike Mannheim eğriler, sadece null olmayan vektörler içeren Frenet çatısı ile karakterize edilmiştir. Devamında spacelike, timelike, null ve pseudo null ve partially null Mannheim eğrileri Minkowski uzay-zamanda farklı yazarlar tarafından çalışılmıştır ( [15–18]). 4-boyutlu ve 2-indeksli yarı-Öklidyen uzaylarda Manhheim eğriler İlarslan, Kılıç Aslan tarafından çalışılmıştır ( [19, 20]). Bu eğriler günümüzde Bishop çatılı eğriler ve Framed çatılı eğriler için de çalışılmaktadır ( [21,22]).

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir Mannheim eğri ve $\varphi(s)$ nin Mannheim eğri çifti $\varphi^*(s^*)$ eğrisi olsun. $f : I \to I^*$ bir diffeomorfizm ve $\varphi(s)$ eğrisinin asli normal vektörü $N(s)$ olmak üzere literatürde $\varphi^*(s)$ eğrisi,

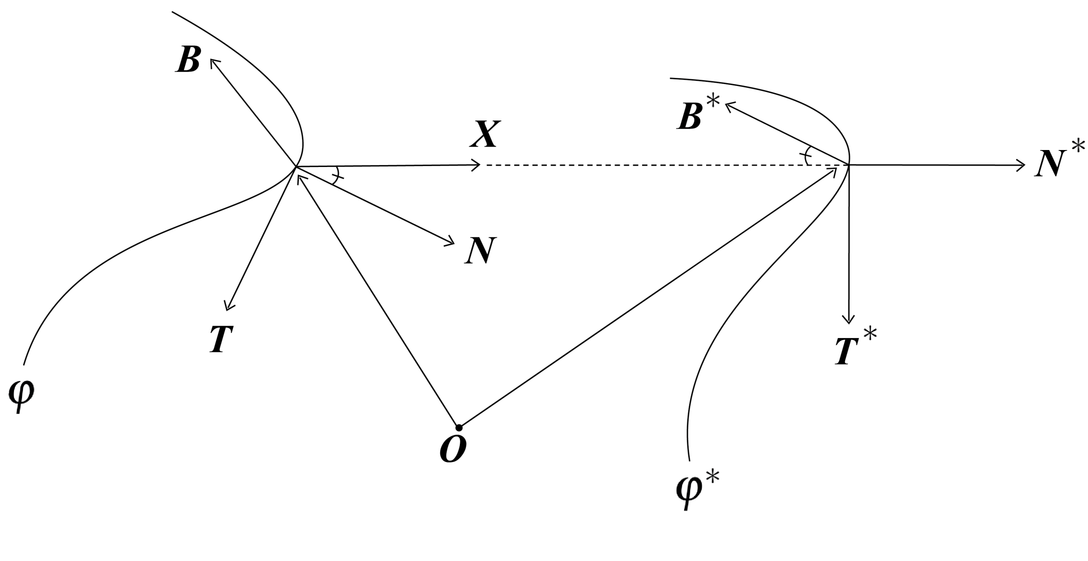
$$\varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \lambda(s)N(s) \tag{1.2}$$

olarak ifade edilir. (1.2)'e göre, $\overrightarrow{\varphi^*\varphi}$ vektörü N'ye paralel olmalıdır. (1.2)'ifadesini bundan sonra Mannheim eğrilerinin klasik yaklaşımı olarak adlandıracağız.

Ç. Camcı, A. Uçum ve K.İlarslan tarafından yapılan çalışmada ( [23]) $\overrightarrow{\varphi^*\varphi}$ vektörü ile $N(s)$ asli normal vektörünün paralel olması gerekmediği, bu durumun bir özel durum olduğu ifade edilmiş ve Mannheim eğrilerine yeni bir yaklaşım getirilmiştir. Bu yaklaşıma göre: $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin Frenet çatısı olmak üzere $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ Mannheim eşlenik eğrisinin

$$\varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \tag{1.3}$$

şeklinde verileceği ifade edilmiştir. Burada $v_1(s), v_2(s)$ ve $v_3(s)$, $\varphi$ ve $\varphi^*$'ın causal karakterlerine bağlı olarak belirli şartları sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.




Şekil 1.1: Mannheim $\varphi$ eğrisi ve Mannheim eşleniği $\varphi^*$ eğrisinin birlikte yer aldığı grafik. Burada $X(s) = v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s)$ dir.

Buna göre Mannheim eğri olma karakterizasyonları elde edilmiştir. Bu yaklaşım sayesinde de birçok Mannheim eğri örneği elde edilmiştir.

Eğer $v_1(s) = v_3(s) = 0$ alınırsa $(1.2)$ de ifade edilen klasik yaklaşım elde edileceği aşikardir. Bu tez çalışmasında yukarıda ifade edilen yeni yaklaşım kullanılarak Minkowski 3-uzayında spacelike, timelike, Cartan null ve pseudo null eğrilerin Mannheim eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiş ve bu eğriler için örnekler inşa edilmiştir. Elde edilen sonuçlar çeşitli bilimsel dergilerde yayınlanmıştır [24–26].

## 1.1. Kaynak Özetleri

Bu tez çalışmasında temel kavramlar için başlıca O'Neill (1983), Kuhnel (1999), Duggal ve Bejancu (1996), Montiel ve Ros (1998), Eisenheart (1960) kitapları ile Camcı ve diğerleri (2020, 2023) makaleleri ve Walrave (1995) doktora tezinin yanı sıra Mannheim eğriler ve bu eğrilerin eşlenik eğrileri için referans listesinde adı geçen makaleler ve kitaplardan yararlanılmıştır.

## 2 . TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

**Tanım 2.1 (Simetrik Bilineer Form)** Bir reel vektör uzayı $V$ için

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

**(i)** $g(u,v) = g(v,u)$

**(ii)** $g(au+bv,w) = ag(u,w) + bg(v,w)$

$g(u,av+bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

şartları sağlanıyorsa $g$ dönüşümüne $V$ reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir [3, 27, 28].

**Tanım 2.2** $V$ reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $g$ olsun.

**(i)** $0 \neq v \in V$ olmak üzere $\forall u \in V$ için

$$g(u,v) = 0$$

ise $g$ ye $V$ üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda $g$ ye non-dejeneredir denir. Bu tanıma göre $g$ nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$g(u,v) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır.

**(ii) (Skalar çarpım)** Non-dejenere simetrik bilineer form, skalar çarpım olarak adlandırılır.

**(iii)** Eğer her $0 \neq v \in V$ için $g(v,v) > 0$ ise $g$ simetrik bilineer formu pozitif tanımlı, eğer her $0 \neq v \in V$ için $g(v,v) < 0$ ise $g$ simetrik bilineer formu negatif tanımlıdır [28, 29].

**Tanım 2.3 (İndeks)** $V$ reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $g$ olsun.

Bu durumda,

$$g_{|W} : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu $W$ alt uzayının boyutuna $g$' nin indeksi denir ve $q$ ile gösterilir [29].

**Tanım 2.4** $n$-boyutlu $q$-indeksli yarı-Öklidyen uzay $\mathbb{E}^n_q$ uzayının bir dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ olmak üzere

$$ds^2 = -\sum_{i=1}^{q} dx_i^2 + \sum_{i=q+1}^{n} dx_i^2$$

olarak tanımlanan non-dejenere metrik ile donatılmış $n$ boyutlu Öklid uzayıdır. $\mathbb{E}^n_q$ uzayının skalar çarpımını $g$ ile gösterelim. Özel olarak $n = 3$ ve $q = 1$ alınırsa 3-boyutlu Minkowski uzayı elde edilir. Bu uzay Lorentz-Minkowski uzayı olarak da adlandırılır ve genellikle $\mathbb{E}^3_1$ ile gösterilir [28, 29].

**Tanım 2.5** $v \in \mathbb{E}^3_1 \backslash \{0\}$ olmak üzere, eğer

**(i)** $g(v, v) > 0$ ise, $v$ spacelike (uzaysı) vektör

**(ii)** $g(v, v) < 0$ ise, $v$ timelike (zamansı) vektör

**(iii)** $g(v, v) = 0$ ise, $v$ null veya lightlike (ışıksı) vektör
olarak adlandırılır [27–29].

**Tanım 2.6** $u \in \mathbb{E}^3_1 \backslash \{0\}$ olmak üzere, $\mathbb{E}^3_1$ uzayında $u$ vektörünün normu

$$||u|| = \sqrt{|g(u, u)|}$$

olarak tanımlanır. $||u|| = 1$ ise $u$ vektörüne birim vektör denir [29].

**Tanım 2.7** $u$, $v \in \mathbb{E}^3_1$ olmak üzere, $u$ ve $v$ vektörlerinin dik olması için gerek ve yeter şart $g(u, v) = 0$ olmasıdır [3–7, 13, 23, 29, 31–33].

**Tanım 2.8** $\mathbb{E}^3_1$'de herhangi iki vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere,

$$u \wedge v = (u_3 v_2 - u_2 v_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

vektörüne $u$ ve $v$ vektörlerinin vektörel çarpımı denir [29].

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

ve $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ olmak üzere,

$$u \wedge v = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$e_1 \wedge e_2 = e_3,\ e_2 \wedge e_3 = -e_1,\ e_3 \wedge e_1 = e_2$$

**Tanım 2.9** $I$, $\mathbb{R}$'nin bir açık aralığı olmak üzere, $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir bir dönüşüm ise $\varphi$'ye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir eğri denir [3, 30].

**Tanım 2.10** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ bir eğri olsun. Eğer $\varphi$ eğrisinin $\forall s \in I$ için hız vektörü $\varphi'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise $\varphi$ eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır [30].

**Tanım 2.11** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ bir eğri olsun.

**(i)** $\varphi$ null bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \varphi''(s), \varphi''(s) \rangle = 1$ şartı sağlanıyorsa $\varphi$ eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir. Bu durumda $\varphi$ null eğrisi Cartan null eğri olarak adlandırılır.

**(ii)** $\varphi$ null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \varphi'(s), \varphi'(s) \rangle = \pm 1$ şartı sağlanıyorsa $\varphi$ eğrisine yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir [27, 28, 30].

Aşağıdaki tanımlar, örnekler kısmında ihtiyaç duyulduğundan verilmiştir.

**Tanım 2.12** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\varphi$ eğrisinin konum vektörü her zaman kendi rektifiyen düzleminde kalıyorsa, $\varphi$ eğrisine Minkowski 3-uzayında bir rektifiyen eğri adı verilir [34].

**Tanım 2.13** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer sıfırdan farklı sabit bir vektör alanı $U$ için $g(N(s),U)$ fonksiyonu sabit ise $\varphi$ eğrisine slant helis adı verilir. Burada $N(s)$ eğrinin asli normal vektör alanıdır. [49].

Tezimizin ana konusu olan Minkowski 3-uzayında Mannheim eğrilerinin genel tanımını şu şekilde verebiliriz:

**Tanım 2.14** Minkowski 3-uzayında sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin asli normal vektör alanı ile $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin binormal vektör alanı lineer bağımlı ve $s \in I$ , $s^* \in I^*$ noktalarında $s^* = f(s)$ olacak şekilde bir $f : I \to I^*$ diffeomorfizmi varsa $\varphi$ eğrisine Mannheim eğrisi denir. Bu durumda, $\varphi^*$ eğrisi, $\varphi$ eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi olarak adlandırılır. Ayrıca $(\varphi, \varphi^*)$ eğri çiftine Mannheim eğri çifti adı verilir.

$\{T,N,B\}$ kümesi, teğet vektör $T$, asli normal vektör $N$ ve binormal vektör $B$'den oluşur ve $\mathbb{E}_1^3$'deki bir $\varphi$ eğrisi boyunca hareketli Frenet çatısı olarak adlandırılır. Verilen eğrinin causal karakterine göre, Frenet vektörlerinin türevlerini, bu vektörler ve eğrilik fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilen denklemlerine Frenet denklemleri denir [28, 34, 36]. Bu denklemleri şu şekilde verebiliriz:

**Durum 2.1** Eğer $\varphi$ spacelike ya da timelike bir eğri ise, Frenet denklemleri, $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2\kappa_1 & 0 \\ -\varepsilon_1\kappa_1 & 0 & \varepsilon_3\kappa_2 \\ 0 & -\varepsilon_2\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

olarak verilir. Ayrıca, $g(T,T) = \varepsilon_1 = \pm 1, g(N,N) = \varepsilon_2 = \pm 1, g(B,B) = \varepsilon_3 = \pm 1$ ve $g(T,N) = g(T,B) = g(N,B) = 0$ koşulları da sağlanır.

**Durum 2.2** Eğer $\varphi$ null (lightlike) bir eğri ise, $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere, eğer $\varphi$ bir doğru ise birinci eğriliği $\kappa_1 = 0$ dır. Diğer tüm durumlar için $\kappa_1 = 1$ dir. Bu durumda Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

olarak verilir. Ayrıca, $g(T,T) = g(B,B) = g(T,N) = g(N,B) = 0, g(N,N) = g(T,B) = 1$ koşulları da sağlanır.

**Durum 2.3** Eğer $\varphi$ pseudo null bir eğri ise, $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere, eğer $\varphi$ bir doğru ise birinci eğriliği $\kappa_1 = 0$ dır. Diğer tüm durumlar için $\kappa_1 = 1$ dir. Bu durumda Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

olarak verilir. Ayrıca, $g(N,N) = g(B,B) = g(T,N) = g(T,B) = 0, g(T,T) = g(N,B) = 1$ koşulları da sağlanır.

## 3 . MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACELIKE MANNHEIM EĞRİLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3−uzayında, bir spacelike eğri için Camcı ve arkadaşları tarafından verilen yeni yaklaşım kullanılarak bu eğrinin bir Mannheim eğri olma karakterizasyonlarını veren teorem ve sonuçlar ifade edilip örnekler grafikleriyle birlikte verilecektir.

Kabul edelim ki $\mathbb{E}_1^3$'de $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$ olan bir spacelike Mannheim eğrisi ve $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^*(s^*), N^*(s^*), B^*(s^*)\}$ ve $\kappa_1^*(s^*), \kappa_2^*(s^*)$ eğriliklerine sahip $\varphi$ eğrisinin bir Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu yeni yaklaşıma göre $\nu_1(s), \nu_2(s)$ ve $\nu_3(s)$, $\varphi$ ve $\varphi^*$'ın causal karakterlerine bağlı olarak belirli şartları sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, $\varphi^*$ eğrisi,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \nu_1(s)T(s) + \nu_2(s)N(s) + \nu_3(s)B(s)$$

olarak yazılabilir. Bu spacelike $\varphi$ eğrisinin asli normal vektörü $N$ spacelike ya da timelike olduğunda $\varphi$ eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^*$ için aşağıdaki durumlardan birisi mümkündür:

**(i)** $\varphi$ eğrisinin asli normal vektörü $N$ spacelike ise $\varphi^*$ timelike asli normal vektöre sahip bir spacelike eğridir,

**(ii)** $\varphi$ eğrisinin asli normal vektörü $N$ spacelike ise $\varphi^*$ spacelike asli normal vektöre sahip bir timelike eğridir,

**(iii)** $\varphi$ eğrisinin asli normal vektörü $N$ timelike ise $\varphi^*$ spacelike asli normal vektöre sahip bir spacelike eğridir.

Aşağıdaki teoremlerde olabilecek tüm bu durumlar ayrı ayrı ele alınmıştır.

**Teorem 3.1.** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_1$, $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan ve birbirinden farklı asli normal vektörü $N$ spacelike olan birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $\varphi$, Minkowski 3-uzayında yeni yaklaşıma göre bir Mannheim eğrisidir ancak ve ancak aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır:

(i) $|\kappa_1| < |\kappa_2|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_1\kappa_1 + v_2' &= v_3\kappa_2, & (3.1)\\ v_3' - v_2\kappa_2 &\neq 0, & (3.2)\\ \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)\kappa_2 & (3.3) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu durumda $\varphi$'nın Mannheim eşleniği olan $\varphi^*$ eğrisi de asli normali $N^*$ timelike olan spacelike Mannheim eğridir.

(ii) $|\kappa_2| < |\kappa_1|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_1\kappa_1 + v_2' &= v_3\kappa_2, & (3.4)\\ v_3' - v_2\kappa_2 &\neq 0, & (3.5)\\ \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)\kappa_2 & (3.6) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu durumda $\varphi$'nın Mannheim eşleniği olan $\varphi^*$ eğrisi de asli normali $N^*$ spacelike olan timelike Mannheim eğridir.

**İspat.** (i) $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $|\kappa_1| < |\kappa_2|$ olacak şekilde $\kappa_1, \kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan ve birbirinden farklı birim hızlı bir spacelike Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$ da $\varphi$'nın spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \tag{3.7}$$

olarak yazılabilir. Burada $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(3.7) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^*f' = \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)T + \left(v_1\kappa_1 + v_2' - v_3\kappa_2\right)N + \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)B \tag{3.8}$$

elde edilir. Elde edilen bu (3.8) denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$\nu_1\kappa_1 + \nu_2' - \nu_3\kappa_2 = 0 \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9), (3.8) de yerine yazılırsa,

$$T^* f' = \left(1 + \nu_1' - \nu_2\kappa_1\right) T + \left(\nu_3' - \nu_2\kappa_2\right) B \tag{3.10}$$

bulunur. (3.10) denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$\left(f'\right)^2 = (1 + \nu_1' - \nu_2\kappa_1)^2 - \left(\nu_3' - \nu_2\kappa_2\right)^2 \tag{3.11}$$

elde edilir. Her taraf $\left(f'\right)^2$'ne bölünürse,

$$1 = \left(\frac{1 + \nu_1' - \nu_2\kappa_1}{f'}\right)^2 - \left(\frac{\nu_3' - \nu_2\kappa_2}{f'}\right)^2 \tag{3.12}$$

bulunur. Eğer

$$\delta = \frac{1 + \nu_1' - \nu_2\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{\nu_3' - \nu_2\kappa_2}{f'} \tag{3.13}$$

olarak gösterirsek (3.10) eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{3.14}$$

buluruz. Bu (3.14) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp (2.1) deki Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$-f'\kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2) N + \gamma' B \tag{3.15}$$

buluruz. (3.15) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2 = 0 \tag{3.16}$$

buluruz. $\delta$ ve $\gamma$'yı yerine yazarsak

$$\left(1 + \nu_1' - \nu_2\kappa_1\right)\kappa_1 = \left(\nu_3' - \nu_2\kappa_2\right)\kappa_2 \tag{3.17}$$

elde ederiz. Burada $v_3' - v_2\kappa_2 \neq 0$ dır. Aksi halde (3.10)'ten $T^*$ ile $T$ lineer bağımlı olur. $T^*$ ile $T$ lineer bağımlı ise eğriler denk eğrilerdir ve paralel çatı vardır. Yani $N^*$ ile $N$ ve $B^*$ ile $B$ paralel olur. Bu durumda $N = B^*$ ile çelişir. Yani eğri Mannheim olamaz.

(3.17) eşitliğini (3.11) de kullanırsak $|\kappa_1| < |\kappa_2|$ olduğu kolayca görülebilir.

Tersine, $\varphi$, $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı, yay uzunluğu $s$ ile parametrize edilen birim hızlı bir spacelike eğri ve

$$\begin{aligned}
v_1\kappa_1 + v_2' &= v_3\kappa_2, && (3.18)\\
v_3' - v_2\kappa_2 &\neq 0, && (3.19)\\
\left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)\kappa_2 && (3.20)\\
|\kappa_1| &< |\kappa_2| && (3.21)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Öyleyse

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \qquad (3.22)$$

şeklinde bir $\varphi^*$ eğrisi tanımlayabiliriz.

(3.22)'un $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\varphi^*}{ds} = \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)T + \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)B \qquad (3.23)$$

buluruz. Bu eşitlik yardımıyla

$$f' = \sqrt{\left\langle \frac{d\varphi^*}{ds}, \frac{d\varphi^*}{ds} \right\rangle} = \frac{m_1\left(v_3' - v_2\kappa_2\right)\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}{\kappa_1} \qquad (3.24)$$

buluruz. Burada $m_1 = sgn\left(v_3' - v_2\kappa_2\right)$ dir.

(3.23)'u tekrar yazarsak,

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}\left(\kappa_2 T + \kappa_1 B\right), \quad g\left(T^*, T^*\right) = 1 \qquad (3.25)$$

buluruz.

$$\lambda_1 = \frac{m_1\kappa_2}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{m_1\kappa_1}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}} \tag{3.26}$$

alırsak (3.25)'yi

$$T^* = \lambda_1 T + \lambda_2 B \tag{3.27}$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.27)'ün $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\lambda_1'}{f'}T + \frac{\lambda_2'}{f'}B \tag{3.28}$$

buluruz ki bu da,

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{\left(\lambda_1'\right)^2 - \left(\lambda_2'\right)^2}}{f'} = \frac{m_2\left(\kappa_2\kappa_1' - \kappa_1\kappa_2'\right)}{f'\left(\kappa_2^2 - \kappa_1^2\right)} = \frac{-m_2\kappa_1^2\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}{f'\left(\kappa_2^2 - \kappa_1^2\right)} \tag{3.29}$$

olduğunu gösterir. Burada $m_2 = sgn\left(\frac{\kappa_2\kappa_1' - \kappa_1\kappa_2'}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}\right)$'dir. Şimdi $N^*$'ı

$$N^* = \frac{-m_1 m_2}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}\left(\kappa_1 T + \kappa_2 B\right), \quad g\left(N^*, N^*\right) = -1 \tag{3.30}$$

bulabiliriz. Buradan

$$B^* = T^* \times N^* = m_2 N, \quad g\left(B^*, B^*\right) = 1 \tag{3.31}$$

dir. Son olarak

$$\kappa_2^* = -g\left(\frac{dB^*}{ds}, N^*\right) = \frac{m_1\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}{f'} \neq 0 \tag{3.32}$$

dır. Bu durumda $\varphi^*$, $\varphi$'nın Mannheim eşlenik eğrisidir. Bu yüzden $\varphi$, bir Mannheim eğrisidir. Eğer Teorem (3.1) (i)'de $v_1 = v_3 = 0$ alınırsa $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisinin literatürdeki klasik Mannheim eğrisi sonucunu elde ederiz.

(ii) $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $|\kappa_2| < |\kappa_1|$ olacak şekilde $\kappa_1, \kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan ve birbirinden farklı birim hızlı bir spacelike Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$

da $\varphi$'nın timelike Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \tag{3.33}$$

olarak yazılabilir. Burada $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(3.33) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)T + \left(v_1\kappa_1 + v_2' - v_3\kappa_2\right)N + \left(v_3' - v\kappa_2\right)B \tag{3.34}$$

elde edilir. Elde edilen bu (3.34) denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$v_1\kappa_1 + v_2' - v_3\kappa_2 = 0 \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.35), (3.34) de yerine yazılırsa,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)T + \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)B \tag{3.36}$$

bulunur. (3.36) denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$-\left(f'\right)^2 = (1 + v_1' - v\kappa_1)^2 - \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)^2 \tag{3.37}$$

elde edilir. Her taraf $(f')^2$'ne bölünürse,

$$-1 = \left(\frac{1 + v_1' - v_2\kappa_1}{f'}\right)^2 - \left(\frac{v_3' - v_2\kappa_2}{f'}\right)^2 \tag{3.38}$$

bulunur. Eğer

$$\delta = \frac{1 + v_1' - v_2\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{v_3' - v_2\kappa_2}{f'} \tag{3.39}$$

olarak gösterirsek (3.36) eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{3.40}$$

buluruz. Bu (3.40) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet denklemlerini kullanırsak,

$$f'\kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2)N + \gamma' B \tag{3.41}$$

buluruz. (3.41) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2 = 0 \tag{3.42}$$

buluruz. $\delta$ ve $\gamma$'yı yerine yazarsak

$$\left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)\kappa_1 = \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)\kappa_2 \tag{3.43}$$

elde ederiz. Burada $v_3' - v_2\kappa_2 \neq 0$ dır. Aksi halde (3.36)'ten $T^*$ ile $T$ lineer bağımlı olur. $T^*$ ile $T$ lineer bağımlı ise eğriler denk eğrilerdir ve paralel çatı vardır. Yani $N^*$ ile $N$ ve $B^*$ ile $B$ paralel olur. Bu durumda $N = B^*$ ile çelişir. Yani eğri Mannheim olamaz. (3.43) eşitliğini (3.37) de kullanırsak $|\kappa_2| < |\kappa_1|$ olduğu kolayca görülebilir.

Tersine, $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı, yay uzunluğu $s$ ile parametrize edilen birim hızlı bir spacelike eğri ve

$$\begin{aligned}
v_1\kappa_1 + v_2' &= v_3\kappa_2, && (3.44)\\
v_3' - v_2\kappa_2 &\neq 0, && (3.45)\\
\left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)\kappa_2 && (3.46)\\
|\kappa_2| &< |\kappa_1| && (3.47)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Öyleyse

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \tag{3.48}$$

şeklinde bir $\varphi^*$ eğrisi tanımlayabiliriz.

(3.48)'un $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\varphi^*}{ds} = \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)T + \left(v_3' - v_2\kappa_2\right)B \tag{3.49}$$

buluruz. Bu eşitlik yardımıyla

$$f' = \sqrt{\left\langle \frac{d\varphi^*}{ds}, \frac{d\varphi^*}{ds} \right\rangle} = \frac{m_1\left(v_3' - v_2\kappa_2\right)\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}{\kappa_1} \tag{3.50}$$

buluruz. Burada $m_1 = sgn\left(\nu_3' - \nu_2\kappa_2\right)$ dir.

(3.49)'u tekrar yazarsak,

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}\left(\kappa_2 T + \kappa_1 B\right), \quad g\left(T^*, T^*\right) = -1 \tag{3.51}$$

buluruz.

$$\lambda_1 = \frac{m_1\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{m_1\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \tag{3.52}$$

alırsak (3.51)'yi

$$T^* = \lambda_1 T + \lambda_2 B \tag{3.53}$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.53)'ün $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\lambda_1'}{f'}T + \frac{\lambda_2'}{f'}B \tag{3.54}$$

buluruz ki bu da,

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{\left(\lambda_1'\right)^2 - \left(\lambda_2'\right)^2}}{f'} = \frac{m_2\left(\kappa_2'\kappa_1 - \kappa_2\kappa_1'\right)}{f'\left(\kappa_1^2 - \kappa_2^2\right)} = \frac{m_2\kappa_1^2\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}{f'\left(\kappa_1^2 - \kappa_2^2\right)} \tag{3.55}$$

olduğunu gösterir. Burada $m_2 = sgn\left(\frac{\kappa_2'\kappa_1 - \kappa_2\kappa_1'}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}\right)$'dir. Şimdi $N^*$'ı

$$N^* = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}\left(\kappa_1 T + \kappa_2 B\right), \quad g\left(N^*, N^*\right) = 1 \tag{3.56}$$

bulabiliriz. Buradan

$$B^* = T^* \times N^* = m_2 N, \quad g\left(B^*, B^*\right) = 1 \tag{3.57}$$

dir. Son olarak

$$\kappa_2^* = -g\left(\frac{dB^*}{ds}, N^*\right) = \frac{m_1\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}{f'} \neq 0 \tag{3.58}$$

dır. Bu durumda $\varphi^*$, $\varphi$'nın Mannheim eşlenik eğrisidir. Bu yüzden $\varphi$, bir Mannheim eğrisidir. Eğer Teorem (3.1) (ii)'de $\nu_1 = \nu_3 = 0$ alınırsa $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisinin literatürdeki klasik Mannheim eğrisi sonucunu elde ederiz. □

**Teorem 3.2.** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_1$, $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı asli normal vektörü $N$ timelike olan birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda $\varphi$, Minkowski 3-uzayında yeni yaklaşıma göre bir Mannheim eğrisidir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} v_1\kappa_1 - v_2' &= v_3\kappa_2, && (3.59) \\ v_3' + v_2\kappa_2 &\neq 0, && (3.60) \\ \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(v_3' + v_2\kappa_2\right)\kappa_2 && (3.61) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu durumda $\varphi$'nın Mannheim eşleniği olan $\varphi^*$ eğrisi de asli normali $N^*$ spacelike olan spacelike Mannheim eğridir.

**İspat.** $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_1, \kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı asli normali timelike olan birim hızlı bir spacelike Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$ da $\varphi$'nın asli normali spacelike olan spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \qquad (3.62)$$

olarak yazılabilir. Burada $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(3.62) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp (2.1) deki Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^*f' = \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)T + \left(-v_1\kappa_1 + v_2' + v_3\kappa_2\right)N + \left(v_3' + v_2\kappa_2\right)B \qquad (3.63)$$

elde edilir. Elde edilen bu (3.63) denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$v_1\kappa_1 - v_2' - v_3\kappa_2 = 0 \qquad (3.64)$$

elde edilir. (3.64) , (3.63) de yerine yazılırsa,

$$T^*f' = \left(1 + v_1' - v_2\kappa_1\right)T + \left(v_3' + v_2\kappa_2\right)B \qquad (3.65)$$

bulunur. (3.65) denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$\left(f'\right)^2 = (1+v_1'-v_2\kappa_1)^2 + \left(v_3'+v_2\kappa_2\right)^2 \tag{3.66}$$

elde edilir. Her taraf $(f')^2$'ne bölünürse,

$$1 = \left(\frac{1+v_1'-v_2\kappa_1}{f'}\right)^2 + \left(\frac{v_3'+v_2\kappa_2}{f'}\right)^2 \tag{3.67}$$

bulunur. Eğer

$$\delta = \frac{1+v_1'-v_2\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{v_3'+v_2\kappa_2}{f'} \tag{3.68}$$

olarak gösterirsek (3.65) eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{3.69}$$

buluruz. Bu (3.69) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$f'\kappa_1^* N^* = \delta' T + (-\delta\kappa_1 + \gamma\kappa_2) N + \gamma' B \tag{3.70}$$

buluruz. (3.70) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$-\delta\kappa_1 + \gamma\kappa_2 = 0 \tag{3.71}$$

buluruz. $\delta$ ve $\gamma$'yı yerine yazarsak

$$\left(1+v_1'-v_2\kappa_1\right)\kappa_1 = \left(v_3'+v_2\kappa_2\right)\kappa_2 \tag{3.72}$$

elde ederiz. Burada $v_3'+v_2\kappa_2 \neq 0$ dır. Aksi halde (3.65)'ten $T^*$ ile $T$ lineer bağımlı olur. $T^*$ ile $T$ lineer bağımlı ise eğriler denk eğrilerdir ve paralel çatı vardır. Yani $N^*$ ile $N$ ve $B^*$ ile $B$ paralel olur. Bu durumda $N = B^*$ ile çelişir. Yani eğri Mannheim olamaz. Tersine, $\varphi$, $\kappa_1$ve $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı, yay uzunluğu $s$ ile parametrize edilen birim hızlı bir spacelike eğri ve

$$\begin{aligned} \nu_1\kappa_1 - \nu_2' &= \nu_3\kappa_2, && (3.73)\\ \nu_3' + \nu_2\kappa_2 &\neq 0, && (3.74)\\ \left(1+\nu_1' - \nu_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)\kappa_2 && (3.75) \end{aligned}$$

olacak şekilde $\nu_1(s), \nu_2(s), \nu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Öyleyse

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \nu_1(s)T(s) + \nu_2(s)N(s) + \nu_3(s)B(s) \tag{3.76}$$

şeklinde bir $\varphi^*$ eğrisi tanımlayabiliriz.

(3.76)'un $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\varphi^*}{ds} = \left(1+\nu_1' - \nu_2\kappa_1\right)T + \left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)B \tag{3.77}$$

buluruz. Bu eşitlik yardımıyla

$$f' = \sqrt{\left\langle \frac{d\varphi^*}{ds}, \frac{d\varphi^*}{ds} \right\rangle} = \frac{m_1\left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)\sqrt{\kappa_2^2+\kappa_1^2}}{\kappa_1} \tag{3.78}$$

buluruz. Burada $m_1 = sgn\left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)$ dir.

(3.77)'u tekrar yazarsak,

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{\kappa_2^2+\kappa_1^2}}\left(\kappa_2 T + \kappa_1 B\right), \quad g\left(T^*, T^*\right) = 1 \tag{3.79}$$

buluruz.

$$\lambda_1 = \frac{m_1\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{m_1\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}} \tag{3.80}$$

alırsak (3.79)'yi

$$T^* = \lambda_1 T + \lambda_2 B \tag{3.81}$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.81)'ün $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\lambda_1'}{f'}T + \frac{\lambda_2'}{f'}B \tag{3.82}$$

buluruz ki bu da,

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{(\lambda_1')^2 + (\lambda_2')^2}}{f'} = \frac{m_2 (\kappa_2' \kappa_1 - \kappa_2 \kappa_1')}{f' (\kappa_2^2 + \kappa_1^2)} = \frac{m_2 \kappa_1^2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}{f' (\kappa_2^2 + \kappa_1^2)} \tag{3.83}$$

olduğunu gösterir. Burada $m_2 = sgn(\kappa_2' \kappa_1 - \kappa_2 \kappa_1')$'dir. Şimdi $N^*$'ı

$$N^* = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}} (\kappa_1 T - \kappa_2 B), \quad g(N^*, N^*) = 1 \tag{3.84}$$

bulabiliriz. Buradan

$$B^* = T^* \times N^* = -m_2 N, \quad g(B^*, B^*) = -1 \tag{3.85}$$

dir. Son olarak

$$\kappa_2^* = -g\left(\frac{dB^*}{ds}, N^*\right) = \frac{-m_1 \sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}}{f'} \neq 0 \tag{3.86}$$

dır. Bu durumda $\varphi^*$, $\varphi$'nın Mannheim eşlenik eğrisidir. Bu yüzden $\varphi$, bir Mannheim eğrisidir. Eğer Teorem (3.2)'de $\nu_1 = \nu_3 = 0$ alınırsa $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisinin literatürdeki klasik Mannheim eğrisi sonucunu elde ederiz. □

**Sonuç 3.1** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, asli normal vektörü timelike olan bir spacelike Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olan $\varphi$ eğrisinin spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olsun. O halde $\varphi^*$ bir genel helistir ancak ve ancak $\varphi$ bir slant helistir.

**İspat.**$\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, asli normal vektörü timelike olan bir spacelike Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olan $\varphi$ eğrisinin spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Eğer $\varphi$ eğrisinin asli normal vektörü spacelike ise (3.29) ve (3.32)'den

$$\frac{\kappa_1^*}{\kappa_2^*} = -m_1 m_2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)' \frac{\kappa_1^2}{(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)^{3/2}}$$

(3.55) ve (3.58)'den

$$\frac{\kappa_1^*}{\kappa_2^*} = -m_1 m_2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)' \frac{\kappa_1^2}{\left(\kappa_1^2 - \kappa_2^2\right)^{3/2}}$$

dir. Eğer $\varphi$ eğrisinin asli normal vektörü timelike ise (3.83) ve (3.86)'dan

$$\frac{\kappa_1^*}{\kappa_2^*} = -m_1 m_2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)' \frac{\kappa_1^2}{\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)^{3/2}}$$

dir. Bu durumda ( [35])'den $\varphi^*$ bir genel helistir ancak ve ancak $\varphi$ bir slant helistir.

## 3.1. Örnekler

Bu bölümde, yukarıda açıklanan yeni yaklaşıma göre Mannheim eğrileri ve bu eğrilerin Mannheim eşlenik eğrileri için örnekler oluşturulmuştur. Spacelike rektifiyen eğri örnekleri [38] makalesinden alınmıştır.

**Örnek 3.1** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_1$, $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan ve birbirinden farklı asli normal vektörü $N$ timelike olan birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda Teorem (3.2)'in koşulları sağlanır. Kabul edelim ki $v_2 = v_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} v_1 \kappa_1 &= v_3 \kappa_2, && (3.87) \\ v_3' + v_0 \kappa_2 &\neq 0, && (3.88) \\ \left(1 + v_1' - v_0 \kappa_1\right) \kappa_1 &= \left(v_3' + v_0 \kappa_2\right) \kappa_2, && (3.89) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$v_3 = \frac{v_0\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right) - \kappa_1}{\kappa_1 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'} \quad \text{ve} \quad v_1 = \frac{\kappa_2\left(v_0\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right) - \kappa_1\right)}{\kappa_1^2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisi

$$\varphi^* = \varphi + \frac{\kappa_2\left(v_0\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right) - \kappa_1\right)}{\kappa_1^2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'} T + v_0 N + \frac{v_0\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right) - \kappa_1}{\kappa_1 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'} B$$

olarak elde edilir.

**Örnek 3.2** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında eğrilikleri

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\left(-1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \kappa_2 &= \frac{\sqrt{3}s}{\left(-1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ve Frenet vektörleri

$$T(s) = \left(-\frac{1}{\left(-1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{\sqrt{3}s}{2\left(-1+s^2\right)^{\frac{1}{2}}}, -\frac{s\left(-3+s^2\right)}{2\left(-1+s^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$N(s) = \left(\frac{\sqrt{3}s}{-1+s^2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}\left(1+s^2\right)}{2\left(-1+s^2\right)}\right),$$

$$B(s) = \left(\frac{s^3}{\left(-1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\sqrt{3}}{2\left(-1+s^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1-3s^2}{2\left(-1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

olarak verilen asli normal vektörü $N$ spacelike olan

$$\varphi(s) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{-1+s^2}\sinh(2arccoth(s)), -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1+s^2}, -\frac{1}{2}\sqrt{-1+s^2}\cosh(2arccoth(s))\right)$$

spacelike rektifyen slant helis eğrisini ele alalım. Eğer Teorem (3.1) (i)'de

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-1-4s^2+2s^4-s\sqrt{-1+s^2}}{\sqrt{-1+s^2}}, \\ v_2 &= \sqrt{3}s, \\ v_3 &= -\frac{6s-3s^3+\sqrt{-1+s^2}}{\sqrt{-1+s^2}} \end{aligned}$$

olarak alınırsa $\varphi^*$ eğrisini

$$\varphi^*(s^*) = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2\left(-1+s^2\right)}\left(-2-4s^2+6s^4-2s\sqrt{-1+s^2}+\left(-1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}\sinh(2arccoth(s))\right), \\ -\sqrt{3}s\left(-1+s^2\right), \\ \frac{1}{2\left(-1+s^2\right)}\left(\begin{array}{c} -6s-4s^3-2s^5+\sqrt{-1+s^2}+s^2\sqrt{-1+s^2} \\ -\left(-1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}\cosh(2arccoth(s)) \end{array}\right) \end{array}\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan eğriliklerini

$$\begin{aligned}\kappa_1^* &= \frac{1}{6\left(-1+s^2\right)^2},\\ \kappa_2^* &= \frac{1}{2\sqrt{3}\left(-1+s^2\right)^2}\end{aligned}$$

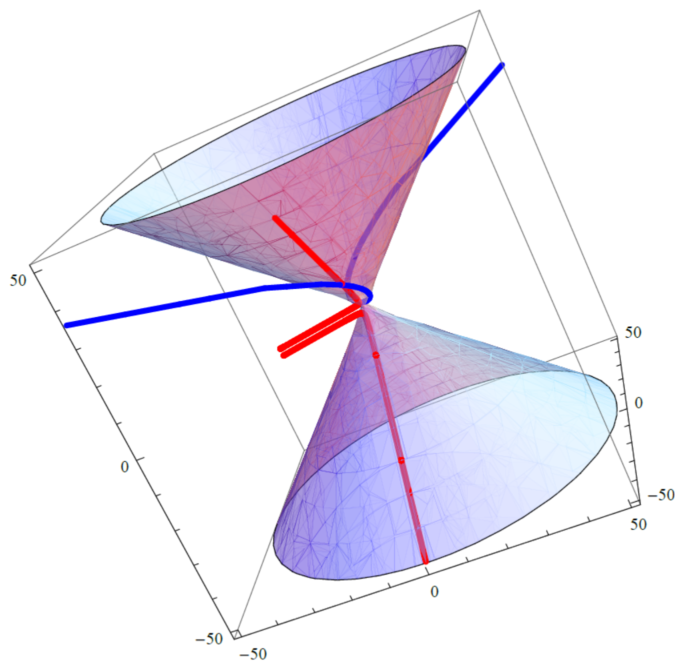
ve Frenet vektörlerini de

$$T^*(s^*) = \left(\frac{s}{-1+s^2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1+s^2}{-2-2s^2}\right),$$

$$N^*(s^*) = \left(\frac{1+s^2}{-1+s^2}, 0, -\frac{2s}{-1+s^2}\right),$$

$$B^*(s^*) = \left(-\frac{\sqrt{3}s}{-1+s^2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}\left(1+s^2\right)}{2\left(-1+s^2\right)}\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan $N = -B^*$ olduğu kolayca görülür. Bu da $\varphi$'nin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^*$ olan bir Mannheim eğrisi olduğunu gösterir. Burada $\varphi^*$ asli normal vektörü timelike olan spacelike bir genel helistir.




Şekil 3.1: Örnek 3.2'de verilen $\varphi$ eğrisi ve bu eğriye ait olan Mannheim eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik $\varphi$ spacelike eğrisi, mavi grafik asli normal vektörü timelike olan spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

**Örnek 3.3** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında eğrilikleri

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{1+e}{(-1+e)(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\kappa_2 &= \frac{(1+e)s}{(-1+e)(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

ve Frenet vektörleri

$$T(s) = \begin{pmatrix} -\frac{s\cosh(\frac{1}{2})}{\sqrt{1-s^2}}, \\ \frac{\sin(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))+s\cos(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sinh(\frac{1}{2})}{\sqrt{1-s^2}}, \\ \frac{-\cos(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))+s\sin(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sinh(\frac{1}{2})}{\sqrt{1-s^2}} \end{pmatrix},$$

$$N(s) = \begin{pmatrix} -\frac{-1+e}{2\sqrt{e}}, \\ \frac{1}{1+e}(-1+e)\cos(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))(\csc h(\frac{1}{2})+\sin h(\frac{1}{2})), \\ \frac{1}{1+e}(-1+e)\sin(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))(\csc h(\frac{1}{2})+\sin h(\frac{1}{2})) \end{pmatrix},$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} \frac{\cos h(\frac{1}{2})}{\sqrt{1-s^2}}, \\ \left(-(-1+e)\cos\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)-2\sqrt{e}s\sin\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)\right)/2\sqrt{e-es^2}, \\ \frac{1}{s\sqrt{1-s^2}}((-1+s^2)\cos\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right) \\ +\cos(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2})) \\ -s\sin(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sin h(\frac{1}{2})) \end{pmatrix}$$

olarak verilen asli normal vektörü $N$ spacelike olan

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2}\cosh(\frac{1}{2}), \\ -\sqrt{1-s^2}\cos(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sinh\left(\frac{1}{2}\right), \\ -\sqrt{1-s^2}\sin(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sinh\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

spacelike rektifyen slant helis eğrisini ele alalım. Eğer Teorem (3.1) (ii)'de

$$\begin{aligned}
v_1 &= -s+\frac{(1+e^2)s^2}{(-1+e)^2\sqrt{1-s^2}}-3s^2\sqrt{1-s^2}-(1-s^2)^{\frac{3}{2}}, \\
v_2 &= \frac{(1+e)s}{-1+e}, \\
v_3 &= -1+\frac{(1+e)^2 s}{(-1+e)^2\sqrt{1-s^2}}-3s\sqrt{1-s^2}
\end{aligned}$$

olarak alınırsa $\varphi^*$ eğrisini

$$\varphi^*(s^*) = \left( \begin{array}{c} (1+e)s\left(-1+s^2-2e\left(-2+s^2\right)+e^2\left(-1+s^2\right)\right)/((-1+e)^2\sqrt{e}), \\ -\frac{1}{\sqrt{e}}\left(-1+s^2\right)\left((-1+e)s\cos\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)+\sqrt{e}\sin\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{1-e}\right)\right), \\ -\frac{1}{\sqrt{e}}\left(-1+s^2\right)\left((-1+e)s\sin\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)+\sqrt{e}\cos\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)\right) \end{array} \right)$$

olarak elde ederiz. Buradan eğriliklerini

$$\begin{aligned} \kappa_1^* &= \frac{(-1+e)^2}{2(-1+s^2)(1-3s^2+e^2(1-3s^2)+e(-4+6s^2))}, \\ \kappa_2^* &= \frac{\left(-1+e^4\right)}{2(-1+s^2)(1+3s^2+e^4(1+3s^2)+e^2(4+6s^2))} \end{aligned}$$

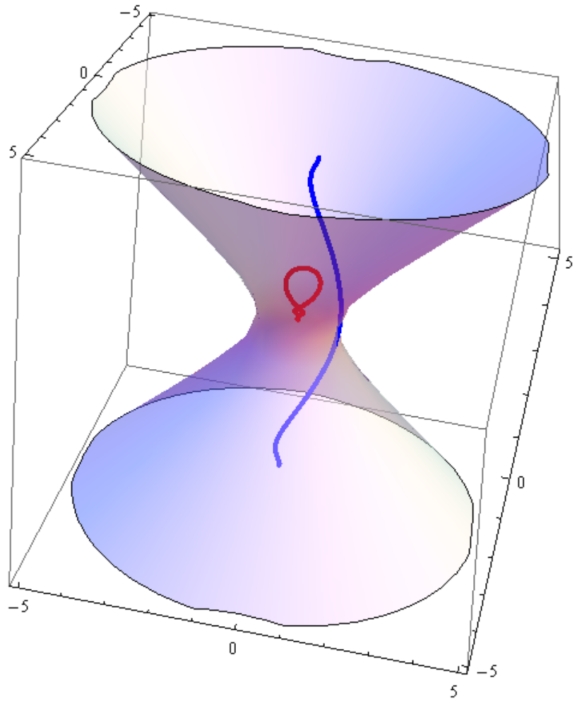
ve Frenet vektörlerini de

$$T^*(s^*) = \left(\frac{-1-e}{2\sqrt{e}}, \frac{-1+e}{2\sqrt{e}}\cos\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right), \frac{-1+e}{2\sqrt{e}}\sin\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)\right),$$

$$N^*(s^*) = \left(0, \sin\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right), -\cos\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)\right),$$

$$B^*(s^*) = \left(-\sinh\left(\frac{1}{2}\right), \cos\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\right), \sin\left(\frac{2\sqrt{e}\arctan(s)}{-1+e}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan $N = B^*$ olduğu görülebilir. Bu da $\varphi$'nin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^*$ olan bir Mannheim eğrisi olduğunu gösterir. Burada $\varphi^*$ asli normal vektörü spacelike olan timelike bir genel helistir.




Şekil 3.2: Örnek 3.3'te verilen $\varphi$ eğrisi ve bu eğriye ait olan Mannheim eşlenik eğrisinin grafikleri; kırmızı grafik $\varphi$ spacelike eğrisi, mavi grafik spacelike asli normal vektöre sahip timelike Mannheim eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

**Örnek 3.4** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında eğrilikleri

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{-1+e^2}{(1+e^2)(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\kappa_2 &= \frac{\left(-1+e^2\right)s}{(1+e^2)(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

ve Frenet vektörleri

$$T(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\left(-1+e^2\right)s}{2e\sqrt{1+s^2}}, \\ \frac{\left(1+e^2\right)s\cos\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)-2e\sin\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)}{2e\sqrt{1+s^2}}, \\ \frac{\left(1+e^2\right)s\sin\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)+2e\cos\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)}{2e\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix},$$

$$N(s) = \left(\frac{1+e^2}{2e}, -\frac{\left(-1+e^2\right)\cos\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)}{2e}, -\frac{\left(-1+e^2\right)\sin\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)}{2e}\right),$$

$$B(s)=\begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{e}-e}{2\sqrt{1+s^2}}, \\ \left(\left(1+e^2\right)\cos\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)+2es\sin\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)\right)/2e\sqrt{1+s^2}, \\ \left(\left(1+e^2\right)\sin\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)-2e\cos\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)\right)/2e\sqrt{1+s^2} \end{pmatrix}$$

olarak verilen asli normal vektörü $N$ timelike olan

$$\varphi(s)=\begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2}\cosh(\frac{1}{2}), \\ -\sqrt{1-s^2}\cos(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sinh\left(\frac{1}{2}\right), \\ -\sqrt{1-s^2}\sin(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sinh\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

spacelike rektifyen slant helis eğrisini ele alalım. Eğer Teorem (3.2)'de

$$\begin{aligned} v_1 &= -s+\frac{\left(-1+e^2\right)^2 s^2}{\left(1+e^2\right)^2\sqrt{1+s^2}}-3s^2\sqrt{1+s^2}+\left(1+s^2\right)^{\frac{3}{2}}, \\ v_2 &= \frac{\left(-1+e^2\right)s}{1+e^2}, \\ v_3 &= -1+\frac{\left(-1+e^2\right)^2 s}{\left(1+e^2\right)^2\sqrt{1+s^2}}-3s\sqrt{1+s^2} \end{aligned}$$

olarak alınırsa $\varphi^*$ eğrisini

$$\varphi^*(s^*)=\begin{pmatrix} \frac{1}{e\left(1+e^2\right)^2}\left(-1+e^2\right)s\left(1+s^2+e^4\left(1+s^2\right)+2e^2\left(2+s^2\right)\right), \\ -\frac{1}{e}\left(1+s^2\right)\left(\left(1+e^2\right)s\cos\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)+e\sin\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)\right), \\ -\frac{1}{e}\left(1+s^2\right)\left(\left(1+e^2\right)s\sin\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)-e\cos\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)\right) \end{pmatrix}$$

olarak elde ederiz. Buradan eğriliklerini

$$\begin{aligned} \kappa_1^* &= \frac{\left(1+e^2\right)^2}{2\left(1+s^2\right)\left(1+3s^2+e^4\left(1+3s^2\right)+e^2\left(4+6s^2\right)\right)}, \\ \kappa_2^* &= \frac{\left(-1+e^4\right)}{2\left(1+s^2\right)\left(1+3s^2+e^4\left(1+3s^2\right)+e^2\left(4+6s^2\right)\right)} \end{aligned}$$

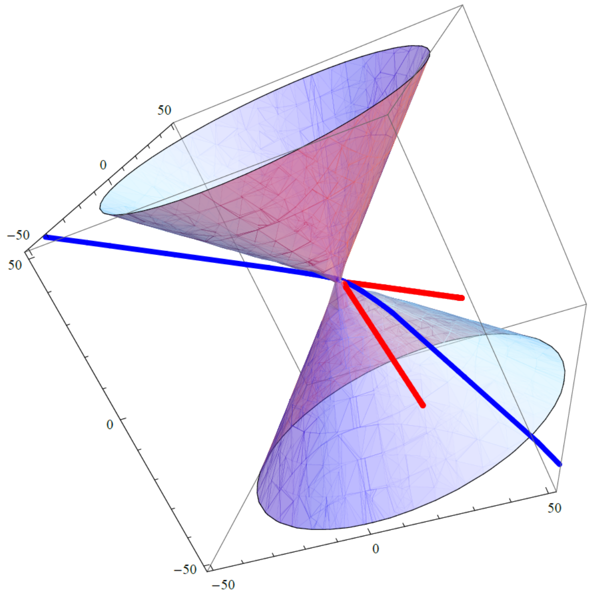
ve Frenet vektörlerini de

$$T^*(s^*)=\left(\frac{\left(-1+e^2\right)}{2e},-\frac{\left(1+e^2\right)\cos\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)}{2e},-\frac{\left(1+e^2\right)\sin\left(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^2}\right)}{2e}\right),$$

$$N^{*}(s^{*})=\left(0,\sin(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^{2}}),-\cos(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^{2}})\right),$$

$$B^{*}(s^{*})=\left(-\frac{1+e^{2}}{2e},\frac{(-1+e^{2})\cos(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^{2}})}{2e},\frac{(-1+e^{2})\sin(\frac{2e\arctan(s)}{1+e^{2}})}{2e}\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan $N=-B^{*}$ olduğu görülebilir. Bu da $\varphi$'nin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^{*}$ olan bir Mannheim eğrisi olduğunu gösterir. Burada $\varphi^{*}$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir genel helistir.




Şekil 3.3: Örnek 3.4'te verilen $\varphi$ eğrisi ve bu eğriye ait olan Mannheim eşlenik eğrisinin grafikleri; kırmızı grafik asli normal vektörü timelike olan $\varphi$ spacelike eğrisi, mavi grafik spacelike asli normal vektöre sahip spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

# 4 . MINKOWSKI 3-UZAYINDA TIMELIKE MANNHEIM EĞRİLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir timelike eğri için literatürde yapılan işlemlerden farklı olan önceki bölümde anlatılan yeni yaklaşım kullanılarak Mannheim eğri olma karakterizasyonlarını veren teorem ve sonuçlar ifade edilip örnekler grafikleriyle birlikte verilecektir.

Kabul edelim ki $\mathbb{E}_1^3$'de $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$ olan bir timelike Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^*(s^*), N^*(s^*), B^*(s^*)\}$ ve $\kappa_1^*(s^*), \kappa_2^*(s^*)$ eğriliklerine sahip $\varphi$ eğrisinin bir Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu yeni yaklaşıma göre $\nu_1(s), \nu_2(s)$ ve $\nu_3(s)$, $\varphi$ ve $\varphi^*$'ın causal karakterlerine bağlı olarak belirli şartları sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, $\varphi^*$ eğrisi,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \nu_1(s)T(s) + \nu_2(s)N(s) + \nu_3(s)B(s)$$

olarak yazılabilir. Bu timelike $\varphi$ eğrisinin asli normal vektörü $N$ spacelike olduğunda $\varphi$ eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^*$ için aşağıdaki durumlardan birisi mümkündür:

**(i)** $\varphi^*$ timelike asli normal vektöre sahip bir spacelike eğridir,

**(ii)** $\varphi^*$ spacelike asli normal vektöre sahip bir timelike eğridir,

Aşağıdaki teoremde olabilecek tüm bu durumlar ayrı ayrı ele alınmıştır.

**Teorem 4.1.** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_1$, $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan ve birbirinden farklı asli normal vektörü $N$ spacelike olan birim hızlı bir timelike eğri olsun. Bu durumda $\varphi$, Minkowski 3-uzayında yeni yaklaşıma göre bir Mannheim eğrisidir ancak ve ancak aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır:

(i) $|\kappa_2| < |\kappa_1|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_1\kappa_1 + v_2' &= v_3\kappa_2, && (4.1)\\ v_3' + v_2\kappa_2 &\neq 0, && (4.2)\\ \left(1 + v_1' + v_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(v_3' + v_2\kappa_2\right)\kappa_2 && (4.3) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu durumda $\varphi$'nın Mannheim eşleniği olan $\varphi^*$ eğrisi de asli normali $N^*$ timelike olan spacelike Mannheim eğridir.

(ii) $|\kappa_1| < |\kappa_2|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_1\kappa_1 + v_2' &= v_3\kappa_2, && (4.4)\\ v_3' + v_2\kappa_2 &\neq 0, && (4.5)\\ \left(1 + v_1' + v_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(v_3' + v_2\kappa_2\right)\kappa_2 && (4.6) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu durumda $\varphi$'nın Mannheim eşleniği olan $\varphi^*$ eğrisi de asli normali $N^*$ spacelike olan timelike Mannheim eğridir.

**İspat.** (i) $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $|\kappa_2| < |\kappa_1|$ olacak şekilde $\kappa_1, \kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı birim hızlı bir spacelike Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$'nin spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \qquad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Burada $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(4.7) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^*f' = \left(1 + v_1' + v_2\kappa_1\right)T + \left(v_1\kappa_1 + v_2' - v_3\kappa_2\right)N + \left(v_3' + v_2\kappa_2\right)B \qquad (4.8)$$

elde edilir. Elde edilen bu (4.8) denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$v_1\kappa_1 + v_2' - v_3\kappa_2 = 0 \qquad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) , (4.8) de yerine yazılırsa,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' + v_2\kappa_1\right) T + \left(v_3' + v_2\kappa_2\right) B \tag{4.10}$$

bulunur. (4.10) denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$\left(f'\right)^2 = -(1 + v_1' + v_2\kappa_1)^2 + \left(v_3' + v_2\kappa_2\right)^2 \tag{4.11}$$

elde edilir. Her taraf $(f')^2$'ne bölünürse,

$$1 = -\left(\frac{1 + v_1' + v_2\kappa_1}{f'}\right)^2 + \left(\frac{v_3' + v_2\kappa_2}{f'}\right)^2 \tag{4.12}$$

bulunur. Eğer

$$\delta = \frac{1 + v_1' + v_2\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{v_3' + v_2\kappa_2}{f'} \tag{4.13}$$

olarak gösterirsek (4.10) eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{4.14}$$

buluruz. Bu (4.14) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$-f'\kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2) N + \gamma' B \tag{4.15}$$

buluruz. (4.15) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2 = 0 \tag{4.16}$$

buluruz. $\delta$ ve $\gamma$'yı yerine yazarsak

$$\left(1 + v_1' + v_2\kappa_1\right)\kappa_1 = \left(v_3' + v_2\kappa_2\right)\kappa_2 \tag{4.17}$$

elde ederiz. Burada $v_3' - v_2\kappa_2 \neq 0$ dır. Aksi halde (4.10)'ten $T^*$ile $T$ lineer bağımlı olur. $T^*$ile $T$ lineer bağımlı ise eğriler denk eğrilerdir ve paralel çatı vardır. Yani $N^*$ile $N$ ve $B^*$ile $B$ paralel olur. Bu durumda $N = B^*$ ile çelişir. Yani eğri Mannheim olamaz.

(4.17) eşitliğini (4.11) de kullanırsak $|\kappa_2| < |\kappa_1|$ olduğu kolayca görülebilir.

Tersine, $\varphi$, $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı, yay uzunluğu $s$ ile parametrize edilen birim hızlı bir spacelike eğri ve

$$\begin{aligned} \nu_1\kappa_1 + \nu_2' &= \nu_3\kappa_2, & (4.18)\\ \nu_3' + \nu_2\kappa_2 &\neq 0, & (4.19)\\ \left(1+\nu_1'+\nu_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(\nu_3'+\nu_2\kappa_2\right)\kappa_{2,} & (4.20)\\ |\kappa_2| &< |\kappa_1| & (4.21) \end{aligned}$$

olacak şekilde $\nu_1(s), \nu_2(s), \nu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Öyleyse

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \nu_1(s)T(s) + \nu_2(s)N(s) + \nu_3(s)B(s) \tag{4.22}$$

şeklinde bir $\varphi^*$ eğrisi tanımlayabiliriz.

(4.22)'un $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\varphi^*}{ds} = \left(1+\nu_1'+\nu_2\kappa_1\right)T + \left(\nu_3'+\nu_2\kappa_2\right)B \tag{4.23}$$

buluruz. Bu eşitlik yardımıyla

$$f' = \sqrt{\left\langle \frac{d\varphi^*}{ds}, \frac{d\varphi^*}{ds} \right\rangle} = \frac{m_1\left(\nu_3'+\nu_2\kappa_2\right)\sqrt{\kappa_1^2-\kappa_2^2}}{\kappa_1} \tag{4.24}$$

buluruz. Burada $m_1 = sgn\left(\nu_3'+\nu_2\kappa_2\right)$ dir.

(4.23)'u tekrar yazarsak,

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{\kappa_1^2-\kappa_2^2}}\left(\kappa_2 T + \kappa_1 B\right), \quad g\left(T^*, T^*\right) = 1 \tag{4.25}$$

buluruz.

$$\lambda_1 = \frac{m_1\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2-\kappa_2^2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{m_1\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2-\kappa_2^2}} \tag{4.26}$$

alırsak (4.25)'yi

$$T^* = \lambda_1 T + \lambda_2 B \tag{4.27}$$

şeklinde yazabiliriz.

(4.27)'ün $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\lambda_1'}{f'}T + \frac{\lambda_2'}{f'}B \tag{4.28}$$

buluruz ki bu da,

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{\left(\lambda_1'\right)^2 - \left(\lambda_2'\right)^2}}{f'} = \frac{m_2\left(\kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1'\right)}{f'\left(\kappa_1^2 - \kappa_2^2\right)} = \frac{m_2\kappa_1^2\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}{f'\left(\kappa_1^2 - \kappa_2^2\right)} \tag{4.29}$$

olduğunu gösterir. Burada $m_2 = sgn\left(\kappa_2\kappa_1' - \kappa_1\kappa_2'\right)$'dir. Şimdi $N^*$'ı

$$N^* = \frac{-m_1m_2}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}\left(\kappa_1 T + \kappa_2 B\right), \quad g\left(N^*, N^*\right) = -1 \tag{4.30}$$

bulabiliriz. Buradan

$$B^* = T^* \times N^* = -m_2 N, \quad g\left(B^*, B^*\right) = 1 \tag{4.31}$$

dir. Son olarak

$$\kappa_2^* = -g\left(\frac{dB^*}{ds}, N^*\right) = \frac{m_1\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}{f'} \neq 0 \tag{4.32}$$

dır. Bu durumda $\varphi^*$, $\varphi$'nın Mannheim eşlenik eğrisidir. Bu yüzden $\varphi$, bir Mannheim eğrisidir. Eğer Teorem (4.1) (i)'de $\nu_1 = \nu_3 = 0$ alınırsa $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisinin literatürdeki klasik Mannheim eğrisi sonucunu elde ederiz.

(ii) $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $|\kappa_1| < |\kappa_2|$ olacak şekilde $\kappa_1, \kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı birim hızlı bir spacelike Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$'nın spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \nu_1(s)T(s) + \nu_2(s)N(s) + \nu_3(s)B(s) \tag{4.33}$$

olarak yazılabilir. Burada $\nu_1(s), \nu_2(s), \nu_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(4.33) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^* f' = \left(1 + \nu_1' + \nu_2\kappa_1\right)T + \left(\nu_1\kappa_1 + \nu_2' - \nu_3\kappa_2\right)N + \left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)B \tag{4.34}$$

elde edilir. Elde edilen bu (4.34) denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$\nu_1\kappa_1 + \nu_2' - \nu_3\kappa_2 = 0 \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35), (4.34) de yerine yazılırsa,

$$T^* f' = \left(1 + \nu_1' + \nu_2\kappa_1\right) T + \left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right) B \tag{4.36}$$

bulunur. (4.36) denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$-\left(f'\right)^2 = -(1 + \nu_1' + \nu_2\kappa_1)^2 + \left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)^2 \tag{4.37}$$

elde edilir. Her taraf $(f')^2$'ne bölünürse,

$$-1 = \left(\frac{1 + \nu_1' + \nu_2\kappa_1}{f'}\right)^2 - \left(\frac{\nu_3' + \nu_2\kappa_2}{f'}\right)^2 \tag{4.38}$$

bulunur. Eğer

$$\delta = \frac{1 + \nu_1' + \nu_2\kappa_1}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{\nu_3' + \nu\kappa_2}{f'} \tag{4.39}$$

olarak gösterirsek (4.36) eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{4.40}$$

buluruz. Bu (4.40) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet denklemlerini kullanırsak,

$$f'\kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2) N + \gamma' B \tag{4.41}$$

buluruz. (4.41) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2 = 0 \tag{4.42}$$

buluruz. $\delta$ ve $\gamma$'yı yerine yazarsak

$$\left(1 + \nu_1' + \nu_2\kappa_1\right)\kappa_1 = \left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)\kappa_2 \tag{4.43}$$

elde ederiz. Burada $\nu_3' + \nu_2\kappa_2 \neq 0$ dır. Aksi halde (4.36)'ten $T^*$ ile $T$ lineer bağımlı olur. $T^*$ ile $T$ lineer bağımlı ise eğriler denk eğrilerdir ve paralel çatı vardır. Yani $N^*$ ile $N$ ve $B^*$ ile $B$ paralel olur. Bu durumda $N = B^*$ ile çelişir. Yani eğri Mannheim olamaz. (4.43) eşitliğini (4.37) de kullanırsak $|\kappa_1| < |\kappa_2|$ olduğu kolayca görülebilir.

Tersine, $\varphi$, $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı, yay uzunluğu $s$ ile parametrize edilen birim hızlı bir spacelike eğri ve

$$
\begin{aligned}
\nu_1\kappa_1 + \nu_2' &= \nu_3\kappa_2, && (4.44)\\
\nu_3' + \nu_2\kappa_2 &\neq 0, && (4.45)\\
\left(1 + \nu_1' + \nu_2\kappa_1\right)\kappa_1 &= \left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)\kappa_{2,} && (4.46)\\
|\kappa_1| &< |\kappa_2| && (4.47)
\end{aligned}
$$

olacak şekilde $\nu_1(s), \nu_2(s), \nu_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Öyleyse

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \nu_1(s)T(s) + \nu_2(s)N(s) + \nu_3(s)B(s) \qquad (4.48)$$

şeklinde bir $\varphi^*$ eğrisi tanımlayabiliriz.

(4.48)'un $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\varphi^*}{ds} = \left(1 + \nu_1' + \nu_2\kappa_1\right)T + \left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)B \qquad (4.49)$$

buluruz. Bu eşitlik yardımıyla

$$f' = \sqrt{\left\langle \frac{d\varphi^*}{ds}, \frac{d\varphi^*}{ds} \right\rangle} = \frac{m_1\left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}{\kappa_1} \qquad (4.50)$$

buluruz. Burada $m_1 = sgn\left(\nu_3' + \nu_2\kappa_2\right)$ dir.

(4.49)'u tekrar yazarsak,

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}\left(\kappa_2 T + \kappa_1 B\right), \quad g\left(T^*, T^*\right) = -1 \qquad (4.51)$$

buluruz.

$$\lambda_1 = \frac{m_1 \kappa_2}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{m_1 \kappa_1}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}} \tag{4.52}$$

alırsak (4.51)'yi

$$T^* = \lambda_1 T + \lambda_2 B \tag{4.53}$$

şeklinde yazabiliriz.

(4.53)'ün $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\lambda_1'}{f'} T + \frac{\lambda_2'}{f'} B \tag{4.54}$$

buluruz ki bu da,

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{\left(\lambda_1'\right)^2 - \left(\lambda_2'\right)^2}}{f'} = \frac{-m_2 \left(\kappa_2' \kappa_1 - \kappa_2 \kappa_1'\right)}{f' \left(\kappa_2^2 - \kappa_1^2\right)} = \frac{-m_2 \kappa_1^2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}{f' \left(\kappa_2^2 - \kappa_1^2\right)} \tag{4.55}$$

olduğunu gösterir. Burada $m_2 = sgn\left(\frac{\kappa_2' \kappa_1 - \kappa_2 \kappa_1'}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}\right)$'dir. Şimdi $N^*$'ı

$$N^* = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}} \left(\kappa_1 T + \kappa_2 B\right), \quad g\left(N^*, N^*\right) = 1 \tag{4.56}$$

bulabiliriz. Buradan

$$B^* = T^* \times N^* = -m_2 N, \quad g\left(B^*, B^*\right) = 1 \tag{4.57}$$

dir. Son olarak

$$\kappa_2^* = -g\left(\frac{dB^*}{ds}, N^*\right) = \frac{m_1 \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}{f'} \neq 0 \tag{4.58}$$

dır. Bu durumda $\varphi^*$, $\varphi$'nın Mannheim eşlenik eğrisidir. Bu yüzden $\varphi$, bir Mannheim eğrisidir. Eğer Teorem (4.1) (i)'de $\nu_1 = \nu_3 = 0$ alınırsa $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisinin literatürdeki klasik Mannheim eğrisi sonucunu elde ederiz. □

**Sonuç 4.1** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, $\kappa_1$, $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı bir null olmayan genel helis olsun. O halde $\varphi$, $\mathbb{E}_1^3$'de bir Mannheim eşlenik eğrisine sahip değildir.

**İspat.** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, $\kappa_1$, $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı bir genel helis olsun. O halde $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ oranı sabittir. Bu da (3.29), (3.55), (3.83), (4.29) ve (4.55)'deki $\kappa_1^* = 0$ olduğunu ifade eder. O halde $\varphi^*$ bir doğrudur.

## 4.1. Örnekler

**Örnek 4.1.** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_1$, $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan ve birbirinden farklı asli normal vektörü $N$ spacelike olan birim hızlı bir timelike eğri olsun. Bu durumda Teorem (4.1)'in koşulları sağlanır. Kabul edelim ki $\nu_2 = \nu_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\nu_1\kappa_1 = \nu_3\kappa_2, \tag{4.59}$$

$$\nu_3' + \nu_0\kappa_2 \neq 0, \tag{4.60}$$

$$\left(1+\nu_1'+\nu_0\kappa_1\right)\kappa_1 = \left(\nu_3'+\nu_0\kappa_2\right)\kappa_2 \tag{4.61}$$

yazılabilir. Böylece

$$\nu_3 = \frac{\nu_0\left(\kappa_2^2-\kappa_1^2\right)-\kappa_1}{\kappa_1\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'} \quad \text{ve} \quad \nu_1 = \frac{\kappa_2\left(\nu_0\left(\kappa_2^2-\kappa_1^2\right)-\kappa_1\right)}{\kappa_1^2\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisi

$$\varphi^* = \varphi + \frac{\kappa_2\left(\nu_0\left(\kappa_2^2-\kappa_1^2\right)-\kappa_1\right)}{\kappa_1^2\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}T + \nu_0 N + \frac{\nu_0\left(\kappa_2^2-\kappa_1^2\right)-\kappa_1}{\kappa_1\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'}B$$

olarak elde edilir. Burada $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisi, $|\kappa_1| < |\kappa_2|$ veya $|\kappa_1| > |\kappa_2|$ olması durumunda sırasıyla timelike veya spacelike eğridir.

**Örnek 4.2.** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında eğrilikleri

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{3}}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\kappa_2 = \frac{\sqrt{3}s}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ve Frenet vektörleri

$$T(s) = \left(\frac{1}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\sqrt{3}}{2(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{3\left(1+s^2\right)}{2(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$N(s)=\left(\frac{\sqrt{3}}{1-s^2},\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}\left(1+s^2\right)}{2\left(-1+s^2\right)}\right),$$

$$B(s)=\left(\frac{-s^3}{\left(1-s^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{-3}{2\sqrt{3-3s^2}},\frac{1-3s^2}{2\left(1-s^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

olarak verilen asli normal vektörü $N$ spacelike olan

$$\varphi(s)=\begin{pmatrix}\sqrt{1-s^2}\cosh(\frac{1}{2}),\\ -\sqrt{1-s^2}\cos(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sinh\left(\frac{1}{2}\right),\\ -\sqrt{1-s^2}\sin(\arctan h(s)\csc h(\frac{1}{2}))\sinh\left(\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}$$

timelike rektifyen slant helis eğrisini ele alalım. Eğer Teorem (4.1) (i)'de

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{-1-4s^2+2s^4-s\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{1-s^2}},\\ v_2 &= \sqrt{3}s,\\ v_3 &= -\frac{6s-3s^3+\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{1-s^2}}\end{aligned}$$

olarak alınırsa $\varphi^*$ eğrisini

$$\varphi^*(s^*)=\left(-1-3s^2,-\sqrt{3}s(-3+s^2),-s(3+s^2)\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan eğriliklerini

$$\begin{aligned}\kappa_1^* &= \frac{1}{6\left(-1+s^2\right)^2},\\ \kappa_2^* &= \frac{1}{2\sqrt{3}\left(-1+s^2\right)^2}\end{aligned}$$

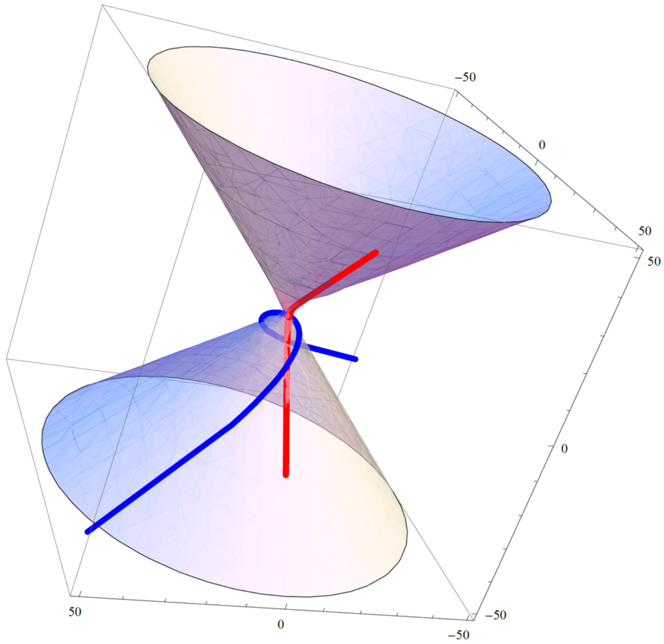
ve Frenet vektörlerini de

$$T^*(s^*)=\left(\frac{-s}{-1+s^2},\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1+s^2}{2-2s^2}\right),$$

$$N^*(s^*)=\left(\frac{1+s^2}{1-s^2},0,-\frac{2s}{-1+s^2}\right),$$

$$B^*(s^*)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{1-s^2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}\left(1+s^2\right)}{2\left(-1+s^2\right)}\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan $N = -B^*$ olduğu görülebilir. Bu da $\varphi$'nin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^*$ olan bir Mannheim eğrisi olduğunu gösterir. Burada $\varphi^*$ asli normal vektörü timelike olan spacelike bir genel helistir.




Şekil 4.1: Örnek 4.2'de verilen $\varphi$ eğrisi ve bu eğriye ait olan Mannheim eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik asli normal vektörü spacelike olan $\varphi$ timelike eğrisi, mavi grafik asli normal vektörü timelike olan spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

**Örnek 4.3.** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında eğrilikleri

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 15\sinh(17s), \\ \kappa_2 &= 15\cosh(17s) \end{aligned}$$

ve Frenet vektörleri

$$T(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(25\cosh(9s) + 9\cosh(25s)), \\ \frac{1}{16}(-25\sinh(9s) + 9\sinh(25s)), \\ \frac{15}{8}\cosh(17s) \end{pmatrix},$$

$$N(s) = \begin{pmatrix} \frac{15}{8}\cosh(8s), \\ \frac{15}{4}(\cosh(s) + \cosh(3s) + \cosh(5s) + \cosh(7s))\sinh(s), \\ \frac{17}{8} \end{pmatrix},$$

$$B(s)=\begin{pmatrix} \frac{1}{16}(-25\sinh(9s)-9\sinh(25s), \\ \frac{1}{16}(25\cosh(9s)-9\cosh(25s)), \\ -\frac{15}{8}\sinh(17s) \end{pmatrix}$$

olarak verilen asli normal vektörü $N$ spacelike olan

$$\varphi(s)=\begin{pmatrix} \frac{25}{144}\sinh(9s)+\frac{9}{400}\sinh(25s), \\ -\frac{25}{144}\cosh(9s)+\frac{9}{400}\cosh(25s), \\ \frac{15}{136}\sinh(17s) \end{pmatrix}$$

timelike slant helis eğrisini ele alalım. Eğer Teorem (4.1) (ii)'de

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{17}\cosh(17s)(-15+\sinh(17s)) \\ v_2 &= 1 \\ v_3 &= \frac{1}{17}\sinh(17s)(-15+\sinh(17s)) \end{aligned}$$

olarak alınırsa $\varphi^*$ eğrisini

$$\varphi^*(s^*)=\begin{pmatrix} \frac{17}{1800}(25\sinh(9s)+9\sinh(25s)), \\ \frac{17}{225}\cosh^3(s)(-226+444\cosh(2s)-420\cosh(4s) \\ +380\cosh(6s)-324\cosh(8s)+252\cosh(10s) \\ -189\cosh(12s)+135\cosh(14s)-90\cosh(16s) \\ +54\cosh(18s)-27\cosh(20s)+9\cosh(22s)), \\ \frac{1}{68}(32+15\sinh(17s)) \end{pmatrix}$$

olarak elde ederiz. Buradan eğriliklerini

$$\begin{aligned} \kappa_1^* &= 17\sec h(17s) \\ \kappa_2^* &= \frac{15}{2}\sec h(17s) \end{aligned}$$

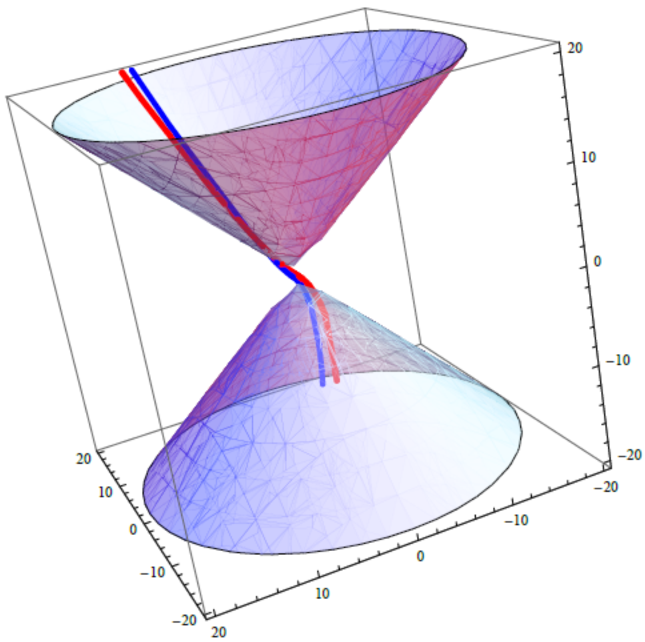
ve Frenet vektörlerini de

$$T^*(s^*) = \begin{pmatrix} \frac{17}{8}\cosh(8s), \\ \frac{17}{4}(-\sinh(s)+\sinh(3s)-\sinh(5s)+\sinh(7s))\cosh(s), \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix},$$

$$N^*(s^*) = (\sinh(8s), \cosh(8s), 0),$$

$$B^*(s^*) = \left(-\frac{15}{8}\cosh(8s), -\frac{15}{8}\sinh(8s), -\frac{17}{8}\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan $N = -B^*$ olduğu görülebilir. Bu da $\varphi$'nin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^*$ olan bir Mannheim eğrisi olduğunu gösterir. Burada $\varphi^*$ asli normal vektörü spacelike olan timelike bir genel helistir.




Şekil 4.2: Örnek 4.3'te verilen $\varphi$ eğrisi ve bu eğriye ait olan Mannheim eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik asli normal vektörü spacelike olan $\varphi$ eğrisi, mavi grafik asli normal vektörü spacelike olan timelike Mannheim eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

# 5 . MINKOWSKI 3-UZAYINDA CARTAN NULL VE PSEUDO NULL MANNHEIM EĞRİLER

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında null Mannheim eğriler 2014 yılında Grbovic, İlarslan ve Nesovic tarafından çalışılmış ve bu uzayda null Mannheim eğrilerin olmadığını, sadece pseudo null Mannheim eğrilerin varlığından söz edilebileceğini ortaya koymuşlardır ([12]). Ayrıca pseudo null Mannheim eğrilerin, eğri çifti pseudo null doğru olan, pseudo null doğru ve pseudo null çember olduğunu göstermişlerdir.
Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında Cartan null ve pseudo null eğriler için önceki bölümlerde uygulanan yeni yaklaşım kullanılarak Mannheim eğri olma karakterizasyonlarını veren teorem ve sonuçlar ifade edilip literatürde olmayan yeni örnekler grafikleriyle birlikte verilecektir.

## 5.1. Cartan Null Mannheim Eğri

Kabul edelim ki, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı$\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\kappa_1(s) = 1, \kappa_2(s)$ sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir Cartan null Mannheim eğrisi ve $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^*(s^*), N^*(s^*), B^*(s^*)\}$ ve $\kappa_1^*(s^*), \kappa_2^*(s^*)$ eğriliklerine sahip $\varphi$ eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu yeni yaklaşıma göre $v_1(s), v_2(s)$ ve $v_3(s)$, $\varphi$ ve $\varphi^*$'ın causal karakterlerine bağlı olarak belirli şartları sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, $\varphi^*$ eğrisi,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s).$$

Bu Cartan null $\varphi$ eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi, $\varphi^*$ için aşağıdaki durumlardan birisi mümkündür:

**(i)** $\varphi^*$ timelike asli normal vektöre sahip bir spacelike eğridir,

**(ii)** $\varphi^*$ spacelike asli normal vektöre sahip bir timelike eğridir.

Aşağıdaki teoremde olabilecek tüm bu durumlar ayrı ayrı incelenecektir.

**Teorem 5.1.** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_2$ eğriliği sıfırdan farklı birim hızlı bir Cartan-null eğri olsun. Bu durumda $\varphi$, Minkowski 3-uzayında yeni yaklaşıma göre bir Mannheim eğrisidir ancak ve ancak aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır:

(i) $0 < \kappa_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_1 + v_2' &= v_3\kappa_2, && (5.1)\\ 1 + v_1' + v_2\kappa_2 &= \left(v_3' - v_2\right)\kappa_2, && (5.2)\\ 1 + v_1' + v_2\kappa_2 &\neq 0, && (5.3)\\ v_3' - v_2 &\neq 0 && (5.4) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu durumda $\varphi$'nın Mannheim eşleniği olan $\varphi^*$ eğrisi de asli normali $N^*$ timelike olan spacelike Mannheim eğridir.

(ii) $\kappa_2 < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_1 + v_2' &= v_3\kappa_2, && (5.5)\\ 1 + v_1' + v_2\kappa_2 &= \left(v_3' - v_2\right)\kappa_2, && (5.6)\\ 1 + v_1' + v_2\kappa_2 &\neq 0, && (5.7)\\ v_3' - v_2 &\neq 0 && (5.8) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu durumda $\varphi$'nın Mannheim eşleniği olan $\varphi^*$ eğrisi de asli normali $N^*$ spacelike olan timelike Mannheim eğridir.

**İspat.** (i) $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $0 < \kappa_2$ olacak şekilde birim hızlı bir Cartan-null Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$'nın asli normali $N^*$ timelike olan spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \qquad (5.9)$$

olarak yazılabilir. Burada $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(5.9) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' + v_2\kappa_2\right) T + \left(v_1 + v_2' - v_3\kappa_2\right) N + \left(v_3' - v_2\right) B \tag{5.10}$$

elde edilir. Elde edilen bu (5.10) denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$v_1 + v_2' - v_3\kappa_2 = 0 \tag{5.11}$$

elde edilir. (5.11), (5.10) de yerine yazılırsa,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' + v_2\kappa_2\right) T + \left(v_3' - v_2\right) B \tag{5.12}$$

bulunur. (5.12) denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$\left(f'\right)^2 = 2(1 + v_1' + v_2\kappa_2)\left(v_3' - v_2\right) \tag{5.13}$$

elde edilir. Her taraf $(f')^2$'ne bölünürse,

$$1 = 2\left(\frac{1 + v_1' + v_2\kappa_2}{f'}\right)\left(\frac{v_3' - v_2}{f'}\right) \tag{5.14}$$

bulunur. Eğer

$$\delta = \frac{1 + v_1' + v_2\kappa_2}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{v_3' - v_2}{f'} \tag{5.15}$$

olarak gösterirsek (5.12) eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{5.16}$$

buluruz. Bu (5.16) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$-f'\kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta - \gamma\kappa_2) N + \gamma' B \tag{5.17}$$

buluruz. (5.17) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$\delta - \gamma\kappa_2 = 0 \tag{5.18}$$

buluruz. $\delta$ ve $\gamma$'yı yerine yazarsak

$$1+v_1'+v_2\kappa_2=\left(v_3'-v_2\right)\kappa_2 \tag{5.19}$$

elde ederiz. Burada $v_3'-v_2\neq 0$ dır. Aksi halde (5.12)'ten $T^*$ile $T$ lineer bağımlı olur. $T^*$ile $T$ lineer bağımlı ise eğriler denk eğrilerdir ve paralel çatı vardır. Yani $N^*$ile $N$ ve $B^*$ile $B$ paralel olur. Bu durumda $N=B^*$ ile çelişir. Yani eğri Mannheim olamaz. Ayrıca $1+v_1'+v_2\kappa_2\neq 0$ dır. Aksi halde (5.12)'den $T^*=\left(\frac{v_3'-v_2}{f'}\right)B$ olur. Her tarafı $N$ ile çarparsak $1=0$ çıkar. Bu da bir çelişkidir.

Tersine, $\varphi$, $\kappa_2$ eğriliği sıfırdan farklı, yay uzunluğu $s$ ile parametrize edilen birim hızlı bir Cartan-null eğri ve

$$\begin{aligned} v_1+v_2' &= v_3\kappa_2, && (5.20)\\ 1+v_1'+v_2\kappa_2 &= \left(v_3'-v_2\right)\kappa_2, && (5.21)\\ 1+v_1'+v_2\kappa_2 &\neq 0, && (5.22)\\ v_3'-v_2 &\neq 0 && (5.23) \end{aligned}$$

olacak şekilde $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Öyleyse

$$\varphi^*(s^*)=\varphi^*(f(s))=\varphi(s)+v_1(s)T(s)+v_2(s)N(s)+v_3(s)B(s) \tag{5.24}$$

şeklinde bir $\varphi^*$ eğrisi tanımlayabiliriz.

(5.24)'ün $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\varphi^*}{ds}=\left(1+v_1'+v_1\kappa_2\right)T+\left(v_3'-v_2\right)B \tag{5.25}$$

buluruz. Bu eşitlik yardımıyla

$$f'=\sqrt{\left\langle\frac{d\varphi^*}{ds},\frac{d\varphi^*}{ds}\right\rangle}=m_1\left(v_3'-v_2\right)\sqrt{2\kappa_2} \tag{5.26}$$

buluruz. Burada $m_1=sgn\left(v_3'-v_2\right)$ dir.

(5.25)'i tekrar yazarsak,

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{2\kappa_2}}\left(\kappa_2 T + B\right), \quad g\left(T^*, T^*\right) = 1 \tag{5.27}$$

buluruz.

$$\lambda_1 = \frac{m_1 \kappa_2}{\sqrt{2\kappa_2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{m_1}{\sqrt{2\kappa_2}} \tag{5.28}$$

alırsak (5.27)'yi

$$T^* = \lambda_1 T + \lambda_2 B \tag{5.29}$$

şeklinde yazabiliriz.

(5.29)'ün $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\lambda_1'}{f'}T + \frac{\lambda_2'}{f'}B \tag{5.30}$$

buluruz ki bu da,

$$\kappa_1^* = \left\|\frac{dT^*}{ds^*}\right\| = \frac{\sqrt{2\lambda_1'\lambda_2'}}{f'} = \frac{m_2\kappa_2'}{f'2\kappa_2} \neq 0 \tag{5.31}$$

olduğunu gösterir. Burada $m_2 = sgn\left(\frac{\kappa_2'}{\kappa_2}\right)$'dir. Şimdi $N^*$'ı

$$N^* = \frac{-m_1 m_2}{\sqrt{2\kappa_2}}\left(\kappa_2 T - B\right), \quad g\left(N^*, N^*\right) = -1 \tag{5.32}$$

bulabiliriz. Buradan

$$B^* = T^* \times N^* = -m_2 N, \quad g\left(B^*, B^*\right) = 1 \tag{5.33}$$

dir. Son olarak

$$\kappa_2^* = -g\left(\frac{dB^*}{ds}, N^*\right) = \frac{m_1\sqrt{2\kappa_2}}{f'} \neq 0 \tag{5.34}$$

dır. Burada $0 < \kappa_2$ dır. Bu durumda $\varphi^*$, $\varphi$'nın Mannheim eşlenik eğrisidir. Bu yüzden $\varphi$, bir Mannheim eğrisidir. Eğer Teorem (5.1) (i)'de $\nu_1 = \nu_3 = 0$ alınırsa $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisinin literatürdeki klasik Mannheim eğrisi sonucunu elde ederiz.

(ii) $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_2 < 0$ olacak şekilde birim hızlı bir Cartan-null Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$'nın asli normali $N^*$ spacelike olan timelike

Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \tag{5.35}$$

olarak yazılabilir. Burada $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(5.61) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' + v_2\kappa_2\right) T + \left(v_1 + v_2' - v_3\kappa_2\right) N + \left(v_3' - v_2\right) B \tag{5.36}$$

elde edilir. Elde edilen bu (5.62) denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$v_1 + v_2' - v_3\kappa_2 = 0 \tag{5.37}$$

elde edilir. (5.72) , (5.62) de yerine yazılırsa,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' + v_2\kappa_2\right) T + \left(v_3' - v_2\right) B \tag{5.38}$$

bulunur. (5.64) denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$-\left(f'\right)^2 = 2(1 + v_1' + v_2\kappa_2)\left(v_3' - v_2\right) \tag{5.39}$$

elde edilir. Her taraf $(f')^2$'ne bölünürse,

$$-1 = 2\left(\frac{1 + v_1' + v_2\kappa_2}{f'}\right)\left(\frac{v_3' - v_2}{f'}\right) \tag{5.40}$$

bulunur. Eğer

$$\delta = \frac{1 + v_1' + v_2\kappa_2}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{v_3' - v_2}{f'} \tag{5.41}$$

olarak gösterirsek (5.64) eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{5.42}$$

buluruz. Bu (5.67) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet denklemlerini kullanırsak,

$$f'\kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta\kappa_1 - \gamma\kappa_2) N + \gamma' B \tag{5.43}$$

bulunuz. (5.68) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$\delta - \gamma \kappa_2 = 0 \tag{5.44}$$

buluruz. $\delta$ ve $\gamma$'yı yerine yazarsak

$$1 + v_1' + v_2 \kappa_2 = \left(v_3' - v_2\right) \kappa_2 \tag{5.45}$$

elde ederiz. $v_3' - v_2 \neq 0$ dır. Aksi halde (5.64)'ten $T^*$ile $T$ lineer bağımlı olur. $T^*$ile $T$ lineer bağımlı ise eğriler denk eğrilerdir ve paralel çatı vardır. Yani $N^*$ile $N$ ve $B^*$ile $B$ paralel olur. Bu durumda $N = B^*$ ile çelişir. Yani eğri Mannheim olamaz. Ayrıca $1 + v_1' + v_2\kappa_2 \neq 0$ dır. Aksi halde (5.64) den $T^* = \left(\frac{v_3' - v_2}{f'}\right) B$ olur. Her tarafı $N$ ile çarparsak $1 = 0$ çıkar. Bu da bir çelişkidir.

Tersine, $\varphi$, $\kappa_2$ eğriliği sıfırdan farklı, yay uzunluğu $s$ ile parametrize edilen birim hızlı bir Cartan-null eğri ve

$$\begin{aligned} v_1 + v_2' &= v_3 \kappa_2, && (5.46)\\ 1 + v_1' + v_2 \kappa_2 &= \left(v_3' - v_2\right) \kappa_2, && (5.47)\\ 1 + v_1' + v_2 \kappa_2 &\neq 0, && (5.48)\\ v_3' - v_2 &\neq 0 && (5.49) \end{aligned}$$

olacak şekilde $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Öyleyse

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \tag{5.50}$$

şeklinde bir $\varphi^*$ eğrisi tanımlayabiliriz.

(5.50)'un $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\varphi^*}{ds} = \left(1 + v_1' + v_2 \kappa_2\right) T + \left(v_3' - v_2\right) B \tag{5.51}$$

buluruz. Bu eşitlik yardımıyla

$$f' = \sqrt{\left\langle \frac{d\varphi^*}{ds}, \frac{d\varphi^*}{ds} \right\rangle} = m_1 \left(v_3' - v_2\right) \sqrt{-2\kappa_2} \tag{5.52}$$

buluruz. Burada $m_1 = sgn\left(\nu_3' - \nu_2\right)$ dir.

(5.51)'u tekrar yazarsak,

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{-2\kappa_2}}\left(\kappa_2 T + B\right), \quad g\left(T^*, T^*\right) = -1 \tag{5.53}$$

buluruz.

$$\lambda_1 = \frac{m_1\kappa_2}{\sqrt{-2\kappa_2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{m_1}{\sqrt{-2\kappa_2}} \tag{5.54}$$

alırsak (5.53)'yi

$$T^* = \lambda_1 T + \lambda_2 B \tag{5.55}$$

şeklinde yazabiliriz.

(5.55)'ün $s$'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{\lambda_1'}{f'}T + \frac{\lambda_2'}{f'}B \tag{5.56}$$

buluruz ki bu da,

$$\kappa_1^* = \left\|\frac{dT^*}{ds^*}\right\| = \frac{\sqrt{2\lambda_1'\lambda_2'}}{f'} = \frac{m_2\kappa_2'}{f'\left(-2\kappa_2\right)} \neq 0 \tag{5.57}$$

olduğunu gösterir. Burada $m_2 = sgn\left(\frac{\kappa_2'}{\kappa_2}\right)$'dir. Şimdi $N^*$'ı

$$N^* = \frac{-m_1 m_2}{\sqrt{-2\kappa_2}}\left(\kappa_2 T - B\right), \quad g\left(N^*, N^*\right) = 1 \tag{5.58}$$

bulabiliriz. Buradan

$$B^* = T^* \times N^* = m_2 N, \quad g\left(B^*, B^*\right) = 1 \tag{5.59}$$

dir. Son olarak

$$\kappa_2^* = -g\left(\frac{dB^*}{ds}, N^*\right) = \frac{m_1\sqrt{-2\kappa_2}}{f'} \neq 0 \tag{5.60}$$

dır. Burada $0 > \kappa_2$ dır. Bu durumda $\varphi^*$, $\varphi$'nın Mannheim eşlenik eğrisidir. Bu yüzden $\varphi$, bir Mannheim eğrisidir. Eğer Teorem (5.1) (ii)'de $\nu_1 = \nu_3 = 0$ alınırsa $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisinin literatürdeki klasik Mannheim eğrisi sonucunu elde ederiz. □

**Sonuç 5.1** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan bir Cartan null Mannheim eğri olsun. Eğer $\varphi$ eğrisinin $\kappa_2$ eğriliği $\frac{c_1}{\sqrt{c_2 s+c_3}}$ şeklinde ise $\varphi^*$ spacelike Mannheim eşlenik eğrisi bir genel helis eğrisidir. Burada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_0$ ve $c_3 \in \mathbb{R}$.

**Sonuç 5.2** $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan bir Cartan null Mannheim eğri olsun. Eğer $\varphi$ eğrisinin 2. eğriliği $\kappa_2$ sabit ise $\varphi^*$ spacelike Mannheim eşlenik eğrisi bir doğrudur.

### 5.2. Pseudo Null Mannheim Eğri

Kabul edelim ki, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı$\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\kappa_1(s) = 1, \kappa_2(s)$ sıfırdan farklı eğrilikleri olan bir pseudo null Mannheim eğrisi ve $\varphi^* : I^* \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$, Frenet çatısı $\{T^*(s^*), N^*(s^*), B^*(s^*)\}$ ve $\kappa_1^*(s^*), \kappa_2^*(s^*)$ eğriliklerine sahip $\varphi$ eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu yeni yaklaşıma göre $\nu_1(s), \nu_2(s)$ ve $\nu_3(s)$, $\varphi$ ve $\varphi^*$'ın causal karakterlerine bağlı olarak belirli şartları sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, $\varphi^*$ eğrisi,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \nu_1(s)T(s) + \nu_2(s)N(s) + \nu_3(s)B(s).$$

Bu pseudo null $\varphi$ eğrisinin Mannheim eşlenik eğrisi, $\varphi^*$ için aşağıdaki durumlardan birisi mümkündür:

**(i)** $\varphi^*$ bir pseudo null eğridir,

**(ii)** $\varphi^*$ bir Cartan null eğridir.

Aşağıdaki teoremde olabilecek tüm bu durumlar ayrı ayrı incelenecektir.

**Teorem 5.2.** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_2$ eğriliği sıfırdan farklı birim hızlı bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda $\varphi$ eğrisinin Minkowski 3-uzayında yeni yaklaşıma göre pseudo null Mannheim eşlenik eğrisi yoktur.

**İspat.** $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında pseudo null Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$'nın psuedo null Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + \nu_1(s)T(s) + \nu_2(s)N(s) + \nu_3(s)B(s) \tag{5.61}$$

olarak yazılabilir. Burada $\nu_1(s), \nu_2(s), \nu_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(5.61) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' - v_3\right) T + \left(v_1 + v_2' + v_2 \kappa_2\right) N + \left(v_3' - v_3 \kappa_2\right) B \tag{5.62}$$

elde edilir. Elde edilen bu (5.62) denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$v_3' - v_3 \kappa_2 = 0 \tag{5.63}$$

elde edilir. (5.72), (5.62) de yerine yazılırsa,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' - v_3\right) T + \left(v_1 + v_2' + v_2 \kappa_2\right) N \tag{5.64}$$

bulunur. (5.64) denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$\left(f'\right)^2 = \left(1 + v_1' - v_3\right)^2 \tag{5.65}$$

elde edilir. Eğer

$$\delta = \frac{1 + v_1' - v_3}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{v_1 + v_2' + v_2 \kappa_2}{f'} \tag{5.66}$$

olarak gösterirsek (5.64) eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma B \tag{5.67}$$

buluruz. Burada (5.65)'den $\delta = -1$ veya $\delta = 1$ dir. (5.67) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet denklemlerini kullanırsak,

$$T^{*'} = \left(\frac{\delta + \gamma' + \gamma \kappa_2}{f'}\right) N \tag{5.68}$$

buluruz. (5.68) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$g(N,N) = 1 \tag{5.69}$$

buluruz. Bu durum $g(N,N) = 0$ ile çelişir. Yani $\varphi^*$ eğrisi pseudo null olamaz. □

**Teorem 5.3.** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_2$ eğriliği sıfırdan farklı birim hızlı bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda $\varphi$ eğrisinin Minkowski 3-uzayında yeni yaklaşıma göre Cartan null Mannheim eşlenik eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\kappa_2 = 0$ olmasıdır. Bu durumda Mannheim eşlenik eğrisi bir null kubik eğridir(Yani $\kappa_2^* = 0$ dır).

**İspat.** $\varphi : I \to \mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında pseudo null Mannheim eğri ve $\varphi^* : I^* \to \mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$'nın Cartan null Mannheim eşlenik eğrisi olsun. Bu durumda $\varphi^*$,

$$\varphi^*(s^*) = \varphi^*(f(s)) = \varphi(s) + v_1(s)T(s) + v_2(s)N(s) + v_3(s)B(s) \tag{5.70}$$

olarak yazılabilir. Burada $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ $I$'da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $(5.70)$ eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet eşitliklerini kullanırsak,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' - v_3\right) T + \left(v_1 + v_2' + v_2\kappa_2\right) N + \left(v_3' - v_3\kappa_2\right) B \tag{5.71}$$

elde edilir. Elde edilen bu $(5.62)$ denklemini $N$ ile skalar çarparsak

$$f' = v_3' - v_3\kappa_2 \tag{5.72}$$

elde edilir. $(5.72)$, $(5.71)$ de yerine yazılırsa,

$$T^* f' = \left(1 + v_1' - v_3\right) T + \left(v_1 + v_2' + v_2\kappa_2\right) N + f'B \tag{5.73}$$

bulunur. $(5.73)$ denklemini kendisiyle skalar çarparsak,

$$f' = -\frac{(1 + v_1' - v_3)^2}{2(v_1 + v_2' + v_2\kappa_2)} \tag{5.74}$$

elde edilir. Eğer

$$\delta = \frac{1 + v_1' - v_3}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{v_1 + v_2' + v_2\kappa_2}{f'} \tag{5.75}$$

olarak gösterirsek $(5.73)$ eşitliğinden

$$T^* = \delta T + \gamma N + B \tag{5.76}$$

buluruz. (5.76) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet denklemlerini kullanırsak,

$$T^{*'} f' = \left(\delta' - 1\right) T + \left(\delta + \gamma' + \gamma\kappa_2\right) N - \kappa_2 B \tag{5.77}$$

buluruz. (5.77) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$\kappa_2 = 0 \tag{5.78}$$

buluruz. (5.78) eşitliği, (5.72) ve (5.73)'de yerine yazılırsa,

$$T^* = \left(\frac{1 + \nu_1' - \nu_3}{\nu_3'}\right) T + \left(\frac{\nu_1 + \nu_2'}{\nu_3'}\right) N + B \tag{5.79}$$

dir. Her tarafın türevi alınırsa

$$N^* = \left(\frac{\delta' - 1}{\nu_3'}\right) T + \left(\frac{\delta + \gamma'}{\nu_3'}\right) N \tag{5.80}$$

buluruz. Eğer

$$\sigma = \frac{\delta' - 1}{\nu_3'} \quad \text{ve} \quad \psi = \frac{\delta + \gamma'}{\nu_3'} \tag{5.81}$$

olarak gösterip (5.80) eşitliğinin $s$'ye göre türevini alıp Frenet denklemlerini kullanırsak,

$$\kappa_2^* T^* f' - B^* f' = \sigma' T + \left(\sigma + \psi'\right) N \tag{5.82}$$

buluruz. (5.82) eşitliğini $N$ ile skalar çarparsak,

$$\kappa_2^* = 0 \tag{5.83}$$

buluruz. Bu durumda $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisi bir null kubik eğridir. □

### 5.3. Örnekler

Aşağıdaki Cartan null örnekleri literatürde olmayan yeni örneklerdir.

**Örnek 5.1.** $\varphi$, Minkowski 3-uzayında $\kappa_2$ eğrilikleri sıfırdan farklı birim hızlı bir Cartan-null eğri olsun. Bu durumda Teorem (5.1)'in koşulları sağlanır. Kabul edelim ki $\nu_2 =$

$v_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} v_1 &= v_3\kappa_2, && (5.84)\\ 1+v_1'+v_0\kappa_2 &= \left(v_3'-v_0\right)\kappa_2, && (5.85)\\ 1+v_1'+v_0\kappa_2 &\neq 0, && (5.86)\\ v_3'-v_0 &\neq 0 && (5.87)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$v_3 = \frac{-2v_0\kappa_2-1}{\kappa_2'} \quad \text{ve} \quad v_1 = \left(\frac{-2v_0\kappa_2-1}{\kappa_2'}\right)\kappa_2$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisi

$$\varphi^* = \varphi + \left(\frac{-2v_0\kappa_2-1}{\kappa_2'}\right)\kappa_2 T + v_0 N + \left(\frac{-2v_0\kappa_2-1}{\kappa_2'}\right)B$$

olarak elde edilir. Burada $\varphi^*$ Mannheim eşlenik eğrisi, $0<\kappa_2$ olması durumunda asli normal vektörü timelike olan spacelike bir eğri, $0>\kappa_2$ olması durumunda asli normal vektörü spacelike olan timelike bir eğridir.

**Örnek 5.2.** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında eğrilikleri

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= 1,\\ \kappa_2 &= \frac{3}{2s^2}\end{aligned}$$

ve Frenet vektörleri

$$T(s) = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}+s^3\right), \frac{s}{2}, \frac{-1+s^4}{4s}\right),$$

$$N(s) = \left(\frac{-1+3s^4}{4s}, \frac{1}{2}, \frac{1+3s^4}{4s}\right),$$

$$B(s) = \left(\frac{-1-9s^4}{8s^3}, \frac{3}{4s}, \frac{1-9s^4}{8s^3}\right)$$

olarak verilen

$$\varphi(s) = \left( \tfrac{1}{16}(s^4+4\log(s)), \tfrac{s^2}{4}, \tfrac{1}{16}(s^4-4\log(s)) \right)$$

Salkowski Cartan null eğrisini ele alalım. Eğer Teorem (5.1) (i)'de

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3+s^2}{2s} \\ v_2 &= 1 \\ v_3 &= s+\frac{s^3}{3} \end{aligned}$$

olarak alınırsa $\varphi^*$ eğrisini

$$\varphi^*(s^*) = \left(\frac{1}{48}(4-9s^4+12\log(s)), 2+\frac{3s^2}{4}, \frac{1}{48}(-4-9s^4-12\log(s))\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan eğriliklerini

$$\begin{aligned} \kappa_1^* &= \frac{1}{\sqrt{3}s^2} \\ \kappa_2^* &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

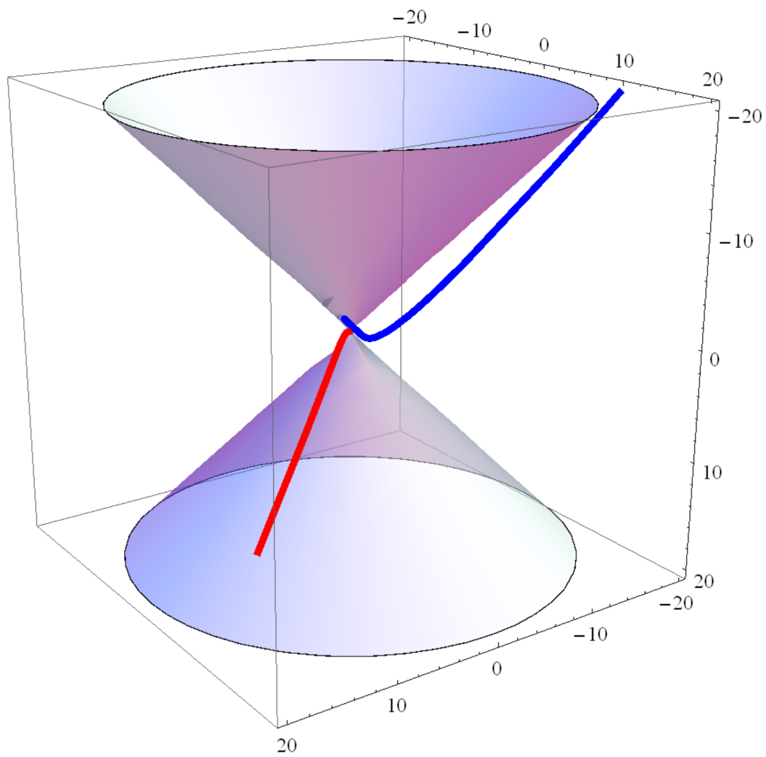
ve Frenet vektörlerini de

$$T^*(s^*) = \left(\frac{s\left(1-3s^4\right)}{4\sqrt{3}s^3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{s\left(1+3s^4\right)}{4\sqrt{3}s^3}\right),$$

$$N^*(s^*) = \left(\frac{1+3s^4}{2\sqrt{3}s^2}, 0, \frac{-1+3s^4}{2\sqrt{3}s^2}\right),$$

$$B^*(s^*) = \left(\frac{-1+3s^4}{4s^2}, \frac{1}{2}, \frac{1+3s^4}{4s^2}\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan $N = B^*$ olduğu görülebilir. Bu da $\varphi$'nin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^*$ olan bir Mannheim eğrisi olduğunu gösterir. Burada $\varphi^*$ asli normal vektörü timelike olan spacelike bir genel helistir.




Şekil 5.1: Örnek 5.2'de verilen $\varphi$ eğrisi ve bu eğriye ait olan Mannheim eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik $\varphi$ Cartan null eğrisi, mavi grafik asli normal vektörü timelike olan spacelike Mannheim eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

**Örnek 5.3.** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında eğrilikleri

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1, \\ \kappa_2 &= -\frac{3}{8s^2} \end{aligned}$$

ve Frenet vektörleri

$$T(s) = \left(-\sqrt{s}(1+s), -2s, -\sqrt{s}(-1+s)\right),$$

$$N(s) = \left(\frac{-1-3s}{2\sqrt{s}}, -2, \frac{1-3s}{2\sqrt{s}}\right),$$

$$B(s) = \left(\frac{1+9s}{8s^{\frac{3}{2}}}, \frac{3}{4s}, \frac{-1+9s}{8s^{\frac{3}{2}}}\right)$$

olarak verilen

$$\varphi(s) = \left( -\tfrac{2}{15}s^{\frac{3}{2}}(5+3s), -s^2, \tfrac{2}{15}s^{\frac{3}{2}}(5-3s) \right)$$

Salkowski Cartan null eğrisini ele alalım. Eğer Teorem (5.1) (ii)'de

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-3+4s^2}{8s}, \\ v_2 &= 1, \\ v_3 &= s-\frac{4s^3}{3} \end{aligned}$$

olarak alınırsa $\varphi^*$ eğrisini

$$\varphi^*(s^*) = \left(-\frac{4}{15}s^{\frac{3}{2}}(5+9s), -\frac{1}{2}-3s^2, \frac{4}{15}s^{\frac{3}{2}}(5-9s)\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan eğriliklerini

$$\begin{aligned} \kappa_1^* &= \frac{1}{2\sqrt{3s^2}}, \\ \kappa_2^* &= \frac{1}{4s^2} \end{aligned}$$

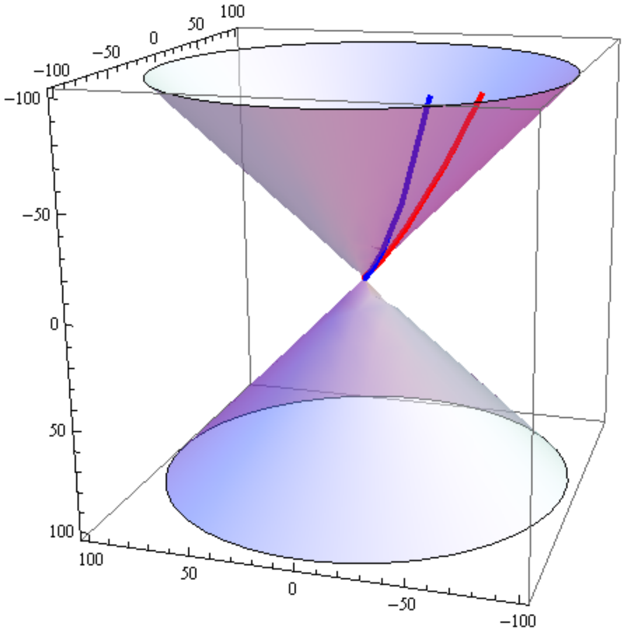
ve Frenet vektörlerini de

$$T^*(s^*) = \left(-\frac{1+3s}{\sqrt{3s}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{s}}, \frac{1-3s}{\sqrt{3s}}\right),$$

$$N^*(s^*) = \left(\frac{1-3s}{2\sqrt{3s}}, 0, -\frac{1-3s}{2\sqrt{3s}}\right),$$

$$B^*(s^*) = \left(\frac{1+3s}{2\sqrt{s}}, 2, \frac{-1+3s}{2\sqrt{s}}\right)$$

olarak elde ederiz. Buradan $N=-B^*$ olduğu görülebilir. Bu da $\varphi$'nin Mannheim eşlenik eğrisi $\varphi^*$ olan bir Mannheim eğrisi olduğunu gösterir. Burada $\varphi^*$ asli normal vektörü spacelike olan timelike bir genel helistir.




Şekil 5.2: Örnek 5.3'de verilen $\varphi$ eğrisi ve bu eğriye ait olan Mannheim eşlenik eğrilerinin grafikleri; kırmızı grafik $\varphi$ Cartan null eğrisi, mavi grafik asli normal vektörü spacelike olan timelike Mannheim eşlenik eğrisi olarak gösterilmiştir.

# 6 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Minkowski 3-uzayında sırasıyla spacelike, timelike, Cartan null ve Pseudo null eğriler için yeni bir yaklaşım kullanılıp bu eğrilerin Mannheim eğrisi olma karakterizasyonları verilerek yeni Mannheim eğri örnekleri inşa edilmiştir. Örneğin klasik yaklaşımda genel helis eğrileri Mannheim eğrisi olamazken, ele aldığımız yeni yaklaşıma göre bu eğriler Mannheim eğri olabilmektedir.

Tezimizin ilgili bölümlerinde Minkowski 3-uzayında, eğriler causal karakterlerine göre ayrılıp Mannheim eğri olma karakterizasyonları ifade edildikten sonra ilgili örnekler ve grafikleri verilmiştir. Bu tez çalışmasıyla, literatürde çok sınırlı olan Mannheim eğri örneklerine yeni örnekler eklenmiştir.

Bu tezde kullanılan yeni yaklaşım yardımıyla Mannheim eğrileri farklı uzaylarda, farklı boyutlarda tekrar ele alınabileceği gibi Mannheim offset yüzeyleri de yeniden çalışarak yüzeyler teoresine katkılar sağlayacağına inanıyoruz.

## KAYNAKLAR

[1] Struik, D. J., Lectures on Classical Differential Geometry, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge 42, Mass., 1950.

[2] Carmo, M. P., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[3] Kuhnel, W., Differential geometry: curves-surfaces-manifolds. Braunschweig, Wiesbaden, 1999.

[4] Montiel, S., Ros, A., Curves and surfaces. Real Sociedad Matematica Espanola Madrid, Spain, 1998.

[5] Miller, J., Note on Tortuous Curves, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Soc. 24(1905), 51-55.

[6] Bertrand, J. M., Mémoire sur la théorie des courbes á double courbure, Comptes Rendus, 36, (1850).

[7] Saint Venant, B., Mémoire sur les lignes courbes non planes, Journal de l'Ecole Polytechnique, vol. 18, pp.1-76, (1845).

[8] Fuchs, D. Evolutes and Involutes of Spatial Curves. Amer. Math. Mon. 2013, 120, 217–231.

[9] Lopez, R., Milin Sipus, Z., Primorac Gajcic, L. and Protrka, I., Involutes of Pseudo-Null Curves in Lorentz-Minkowski 3-space, Mathematics 2021, 9, 1256.

[10] Eisenheart, L. P., A Traise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover, New York, 1960.

[11] Liu, H. and Wang, F., Mannheim partner curves in 3-space, J. Geom., 88(2008), 120–126.

[12] Grbovic, M., İlarslan, K., Nesovic, E., On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space, J. Geom. 105 (2014), 177-183

[13] Matsuda, H., Yorozu, S., Notes on Bertrand curves. Yokohama Math. J., 50 (1-2) (2003), 41-58.

[14] Ersoy, S., Tosun, M., Matsuda, H., Generalized Mannheim curves in Minkowski space-time $\mathbb{E}_1^4$,, Hokkaido Mathematical Journal Vol. 41 (2012) p. 441-461

[15] Uçum, A., Nesovic, E. İlarslan, K., On generalized timelike Mannheim curves in Minkowski space-time, J. Dyn. Syst. Geom. Theore. 13 (2015), No. 1, 71-94.

[16] İlarslan, K., Uçum, A., Nesovic, E., On generalized spacelike Mannheim curves in Minkowski space-time, Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A 86 (2016), no. 2, 249-258.

[17] Grbovic, M., İlarslan, K., Nesovic, E., On generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time, Publ. Inst. Math.(Beograd)(N.S.), 99 (113)(2016),77-98.

[18] Grbovic, M., Nesovic, E., On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time,Novi Sad J. Math., 46(2016),No. 1,159-170.

[19] İlarslan, K., Kılıç Aslan, N., On generalized null Mannheim curves in $\mathbb{E}_2^4$, Math. Methods Appl. Sci., 44 (2021),7588-7600.

[20] Kılıç Aslan, N., İlarslan, K., Some characterizations of generalized null Mannheim curves in semi-Euclidean space,J. Geom. Symmetry Phys., 55 (2020),1-20.

[21] İlarslan, K., Uçum, A., Nesovic, E., Kılıç Aslan, N., Mannheim B-curve couples in Minkowski 3-space, Tamkang J. Math., 51 (2020), No.3, 1-20.

[22] Honda, S., Takahashi, M., Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space, Turkish J. Math. 44 (2020), no. 3, 883-889.

[23] Camcı, Ç., Uçum, A., İlarslan, K., A New Approach to Bertrand Curves in Euclidean 3-Space, J. Geom. (2020) 111:49.

[24] Arıcı, H. İ., İlarslan, K., Timelike Mannheim curves in Minkowski 3-space revisited, Euro-Tiblis Mathematical Journal 16, supplement issue 3, pp. 15-27, kabul edildi, (2023).

[25] Arıcı, H. İ., İlarslan, K., Spacelike Mannheim curves in Minkowski 3-space revisited, inceleme altında, (2023).

[26] Arıcı, H. İ., İlarslan, K., New results on Cartan null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space, inceleme altında, (2023).

[27] Duggal, K. L., Jin D. H.., Null curves and hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds. World Scientific, Singapore, 2007.

[28] Walrave, J., Curves and surfaces in Minkowski space. Doctoral thesis. K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.

[29] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York, 1983.

[30] Lopez, R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, Int. Electron. J. Geom., 7 (1) 2014, 44-107.

[31] Inoguchi, J., Lee, S., Null curves in Minkowski 3-space, Int. Electron. J. Geom., 2 (2008), 40-83.

[32] Huang, J., Chen, L., Izumiya, S., Pei, D., Geometry of special curves and surfaces in 3-space form. J. Geom. Phys., 136 (2019), 31–38.

[33] Liu, H., Curves in Three Dimensional Riemannian Space Forms. Results. Math., 66 (2014), 469–480.

[34] İlarslan, K., Nesovic, E., Petrovic-Torgasev, M., Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space. Novi Sad J. Math. 33(2): 23-32, 2003.

[35] Ali, T.A., Lopez, R., Slant helices in Minkowski 3-space. J. Korean Math Soc., 48 (2011), 159-167.

[36] Bonnor, W. B., Curves with null normals in Minkowski space-time. A random walk in relativity and cosmology, Wiley Easten Limited (1985), 33-47.

[37] Kula, L., Yaylı, Y., On slant helix and its spherical indicatrix. Appl. Math. Comput. 169: 600–607, 2005.

[38] Altunkaya, B., Kula, L., On spacelike rectifying slant helices in Minkowski 3-space. Turkish J. Math., 42(3) (2018), 1098–1110.

[39] Chen, B. Y., When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?. Amer. Math. Montly. 110: 147-152, 2003.

[40] Chen, B.Y., Dillen, F., Rectifying curves as centrodes and extremal curves. Bull Ins Math Aca Sinica, 33 (2005),77-90.

[41] Olszak, Z., A note about the torsion of null curves in the 3-dimensional Minkowski spacetime and the Schwarzian derivative. Filomat 29 (2015), no. 3, 553–561.

[42] Monterde, J., Salkowski curves revisted: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion, Comput. Aided Geomet. Design, 26(2009), 271–278.

[43] Jan Struik, D., Lectures on classical differential geometry, Dover publications, New York, 1961.

[44] Tigano, O., Sulla determinazione delle curve di Mannheim, Matematiche Catania, 3 (1948), 25–29.

[45] Uçum, A., Camcı, Ç. and İlarslan, K., A New Approach to Mannheim Curve in Euclidean 3-Space, Tamkang Journal Of Mathematics Volume 54, Number 2, 93-106, 2023

[46] Camcı, Ç., Uçum, A., İlarslan, K.: Space curves related by a transformation of Combescure. J. Dyn. Syst. Geom. Theor. 19(2), 271-287 (2021).

[47] Boyer, C. B., Merzbach, U.C. A History of Mathematics, 3rd ed.; John Wiley and Sons, Inc.: Hoboken, NJ, USA, 2010.

[48] Ho Choi, J., Ho Kang, T. and Ho Kim, Y., Mannheim Curves in 3-Dimensional Space Forms, Bull. Korean Math. Soc. 50 (2013), No. 4, pp. 1099-1108.

[49] Izumiya S. and Takeuchi N., New special curves and developable surfaces, Turk. J. Math. 28 (2004), 531-537.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Halil İbrahim ARICI

**Doğum Tarihi/Yeri**

**Yabancı Dil**

**Eğitim Durumu**

**Lise** **:** Kurtuluş Lisesi, Haziran 2006

**Lisans** **:** Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2012

**Yüksek Lisans** **:** Kırıkkale Üniversitesi, FBE, Haziran 2015

**Çalıştığı Kurum ve Yıllar :**

Milli Eğitim Bakanlığı (2014 - )

**Yayınları :**

**1.)** Arıcı, H. İ., İlarslan, K., Timelike Mannheim curves in Minkowski 3-space revisited, Euro-Tiblis Mathematical Journal 16, supplement issue 3, pp. 15-27, (2023).

**2.)** Arıcı, H. İ., İlarslan, K., Spacelike Mannheim curves in Minkowski 3-space revisited, inceleme altında, (2024).

**3.)** Arıcı, H. İ., İlarslan, K., New results on Cartan null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space, inceleme altında, (2024).

**Araştırma Alanları :** Minkowski 3-uzayı, Mannheim eğrileri, Eğrilerin causal karakterleri.