ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖR, RIESZ POTANSİYELİ VE ONLARIN KOMÜTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Merve Fadime GÜNER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖR, RIESZ POTANSİYELİ VE ONLARIN KOMÜTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Merve Fadime GÜNER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde çalışmamızla ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise $M_{p,\psi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında M_α kesirli maksimal operatörleri ve I_α Riesz potansiyeli için sınırlılık koşulları verilmiştir. Dördüncü bölümde $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ durumunda $M_{b,\alpha}$ ve $[b, I_\alpha]$ komütatör operatörlerinin M_{p,ψ_1} den M_{q,ψ_2} ye (Spanne tipi) sınırlı olduğu; ayrıca $M_{b,\alpha}$ ve $[b, I_\alpha]$ nin $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ den $M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ye (Adams tipi) sınırlı olduğu gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise komütatörler ve sıfırlayan Morrey uzayları bir araya getirilerek (V_∞) ve (V^*) özelliklerinin maksimal komütatörlerin ve BMO katsayılı kesirli integral operatörlerin komütatörlerinin etkisi altında korunduğu gösterilmiştir. Son olarak kesirli maksimal komütatörler ve Riesz potansiyelinin komütatör operatörlerine göre Morrey normunda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kapanışının değişmezliği gösterilmiştir.

Şubat 2024, 43 sayfa

Anahtar Kelimeler: Morrey uzayları, Genelleştirilmiş Morrey uzayları, Kesirli Maksimal operatörler, Riesz potansiyeli, Sıfırlayan Morrey uzayları, Maksimal komütatörler, Kesirli maksimal komütatörler.

ABSTRACT

Master Thesis

THE BOUNDEDNESS OF FRACTIONAL MAXIMAL OPERATOR, RIESZ POTENTIAL AND THEIR COMMUTATORS IN GENERALIZED MORREY SPACES

Merve Fadime GÜNER

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

This thesis consists of five chapters. The first section is devoted to the introduction. In the second chapter, some definitions and theorems related to our study are given. In the third chapter, boundedness conditions for M_α fractional maximal operators and I_α Riesz potential on $M_{p,\psi}$ generalized Morrey spaces are given. In the fourth chapter, in the case of $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, it is shown that the commutator operators $M_{b,\alpha}$ and $[b, I_\alpha]$ are bounded from M_{p,ψ_1} to M_{q,ψ_2} (Spanne type) and also $M_{b,\alpha}$ and $[b, I_\alpha]$ are bounded from $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ to $M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ (Adams type). In the fifth chapter, commutators and vanishing Morrey spaces are brought together and it is shown that the vanishing properties (V_∞) and (V^*) are preserved under the action of maximal commutators and also of commutators of fractional integral operators with BMO coefficients. Finally, the invariance of the closure $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in the Morrey norm according to fractional maximal commutators and commutator operators of the Riesz potential is shown.

February 2024, 43 pages

Key Words: Morrey spaces, Generalized Morrey spaces, Fractional maximal operators, Riesz potential, Vanishing Morrey spaces, Maximal commutators, Fractional maximal commutators.

TEŞEKKÜR

Yaşam uzun bir yol, yüksek lisans dönemim bu yolda karşıma çıkan önemli bir dönemeç. Saygıdeğer danışman hocam Prof.Dr. Ayhan Şerbetçi'ye engin bilgileri ve desteği ile bu süreçte bana rehberlik ettiği için sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım. Bu yolda daima yanımda olan sevgili ailem ve dostlarıma destekleri için teşekkür ederim.

Merve Fadime GÜNER
Ankara, Şubat 2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\|E\|$	$E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue Ölçüsü
$B(x,r)$	$\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
I_α	Riesz potansiyeli
M	Maksimal operatör
M_b	Maksimal komütatör
$M_{b,\alpha}$	Kesirli maksimal komütatör
$[b, I_\alpha]$	b fonksiyonu ile Riesz potansiyelinin komütatörü
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$M_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$V_0M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Sıfırlayan Morrey uzayı

1. GİRİŞ

$M_{p,\lambda}$ Morrey uzayları Morrey (1938) tarafından eliptik kısmi diferensiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışması ve kesin ön eşitsizliklerin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Özellikle Riesz potansiyelleri ve singüler integrallerin özellikleri yardımıyla eliptik ve hipoeliptik (quazieliptik) kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için ön eşitsizlikler elde edilebilmektedir. Daha sonra bu uzayların Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik diferensiyel denklemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır. Morrey uzaylarının uygulamalarda oynadığı rol hakkında daha fazla ayrıntı ve referanslar için (Kato 2003, Softova 2011, Triebel 2013, 2015, Lemarie-Rieusset 2016) çalışmalarına bakılabilir. Bu uzayların temel özellikleri ve tarihsel açıklamaları (Giaquinta 1983, Taylor 2000, Triebel 2013, Pick vd. 2013, Adams 2015) kitaplarında ve (Rafeiro and Samko 2013) deki genel bakışta bulunabilir.

$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları, $1 \le p < \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olması şartıyla

$$\|h\|_{M_{p,\lambda}} = \sup_{\varkappa \in \mathbb{R}^n, \tau > 0} \tau^{-\frac{\lambda}{p}} \|h\|_{L_p(B(\varkappa,\tau))}$$

sonlu olacak biçimdeki bütün fonksiyonların sınıflarının uzayıdır, burada $B(\varkappa,\tau)$, $\varkappa$ merkezli τ yarıçaplı yuvarı belirtmektedir. Ayrıca ${}^cB(\varkappa,\tau)$ ile bu yuvarın tümleyenini, $|B(\varkappa,\tau)|$ ile lebesgue ölçüsü ifade edilir. $M_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları, $1 \le p < \infty$ ve $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|h\|_{M_{p,\psi}} = \sup_{\varkappa \in \mathbb{R}^n, \tau > 0} \psi(\varkappa,\tau)^{-1} |B(\varkappa,\tau)|^{-\frac{1}{p}} \|h\|_{L_p(B(\varkappa,\tau))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır, burada $\psi(\varkappa,\tau)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ da negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonları belirtmektedir.

Maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Maksimal fonksiyon $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy-Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından $n-$ boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir.

$h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 \leq \alpha < n$ olması şartıyla M_α kesirli maksimal operatörü

$$(M_\alpha h)(\varkappa) = \sup_{\tau>0} |B(\varkappa,\tau)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(\varkappa,\tau)} |h(y)|\, dy$$

şeklindedir. $\alpha = 0$ alındığında

$$Mh(\varkappa) = \sup_{\tau>0} \frac{1}{|B(\varkappa,\tau)|} \int_{B(\varkappa,\tau)} |h(y)|\, dy$$

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu elde edilir.

$I_\alpha h$ Riesz potansiyeli de, $0 < \alpha < n$ olmak üzere

$$(I_\alpha h)(\varkappa) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(y)}{|\varkappa - y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır. Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ve Riesz potansiyelinin varlık ve sınırlılık koşulları, Morrey (1938), Peetre (1969), Fefferman and Stein (1971), Adams (1975), Chiarenza and Frasca (1987), Fazio and Ragusa (1993), Guliyev (2009), Guliyev and Shukurov (2013) ve birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

T bir lineer operatör ve b ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, T ile b nin komütatörü $[b,T]\,h = bT(h) - T(bh)$ ile tanımlanır. Komütatör teorisi ilk olarak Coifman vd. (1976) tarafından incelenmiştir. Komütatörler süreksiz katsayılı birçok diverjans olmayan eliptik denklemlerde oldukça kullanışlıdır. Komütatör kestirimlerinin harmonik analiz ve kısmi diferensiyel denklemlerdeki bir çok uygulamada önemli bir rol oynadığı bilinmektedir (Li 1993, Coifman vd. 1993, Rochberg 2007, Grafakos 2009).

Bu tez çalışmasının 3. bölümünde $M_{p,\psi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında $0 < \alpha < n$ olmak üzere, M_α kesirli maksimal operatörleri ve I_α Riesz potansiyeli için sınırlılık koşulları verilmiştir. Şöyle ki M_α ve I_α operatörlerinin M_{p,ψ_1} genelleştirilmiş Morrey uzaylarından bir diğer M_{q,ψ_2} ye $1 < p < q < \infty$, ve M_{1,ψ_1} den WM_{q,ψ_2} uzayına $1 < q < \infty$, Spanne tipi sınırlılığı, ayrıca bu operatörlerin $1 < p < q < \infty$ için $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ den $M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ya ve $1 < q < \infty$ için $M_{1,\psi}$ den $WM_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ya Adams tipi sınırlılığı ispatlandı.

4. bölümde $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olması durumunda

$$M_{b,\alpha}h(\varkappa) = \sup_{t>0} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(\varkappa,t)} |b(\varkappa) - b(y)|\, |h(y)|\, dy, 0 < \alpha < n$$

olmak üzere $M_{b,\alpha}$ komütatör operatörünün ve $[b, I_\alpha]\, h(\varkappa) = b(\varkappa) I_\alpha h(\varkappa) - I_\alpha(bh)(\varkappa)$ olmak üzere $[b, I_\alpha]$ komütatörünün

i) Spanne tipi sınırlılık: $M_{b,\alpha}$ ve $[b, I_\alpha]$ operatörlerinin M_{p,ψ_1} den M_{q,ψ_2} ye sınırlı olduğunu gösterip (ψ_1, ψ_2) çifti üzerinde $M_{b,\alpha}$ ve $[b, I_\alpha]$ nın sınırlılığını sağlayan yeter koşullar verildi.

ii) Adams tipi sınırlılık: $M_{b,\alpha}$ ve $[b, I_\alpha]$ operatörlerinin $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ den $M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ya sınırlı olduğu gösterilip ψ üzerinde $M_{b,\alpha}$ ve $[b, I_\alpha]$ nin sınırlılığını sağlayan yeter koşullar verildi.

Beşinci bölümde komütatörler ve $V_0 M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlayan Morrey uzaylarını bir araya getirerek (V_∞) ve (V^*) özelliklerinin maksimal komütatörlerinin ve BMO katsayılı kesirli integral operatörlerinin komütatörlerinin etkisi altında korunduğu gösterildi. $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı üzerinde böyle operatörler için norm eşitsizliklerinin ve $V_0 M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ alt uzayında sınırlılıklarının bilindiğine dikkat ederiz (Ragusa 2008, Deringoz vd. 2015, Guliyev vd. 2019). $V^{(*)} M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayının maksimal komütatöre göre değişmezliğini elde etmek özellikle zordur. Son olarak kesirli maksimal komütatörler ve Riesz potansiyelinin komütatör operatörlerine göre Morrey normunda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbb{R}^n$ üzerinde kompakt destekli, sonsuz diferensiyellenebilir tüm kompleks değerli fonksiyonların sınıfı) kapanışının değişmezliği gösterildi.

Tez boyunca $B(\varkappa, \tau)$ yuvarı $\mathbb{R}^n$ içinde $\varkappa \in \mathbb{R}^n$ merkezli ve $\tau > 0$ yarıçaplı açık yuvarı gösterecektir. Ölçülebilir bir $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin (Lebesgue) ölçüsü $|E|$ ile gösterilir ve $\varkappa_E$ de E nin karakteristik fonksiyonunu belirtir. C pozitif bir sabit olarak alalım öyle ki bu her görünüşte farklı değerde olabilir. $A \lesssim B$ ifadesi bir $C > 0$ sabiti için $A \leq CB$ ve $A \approx B$ ifadesi $A \lesssim B \lesssim A$ anlamına gelir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Lebesgue Uzayları

"$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \int\limits_{\mathbb{R}^n} |h(\varkappa)|^p \, d\varkappa < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerin p. kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir.
h fonksiyonunun L_p normu

$$\|h\|_p = \left\{ \begin{array}{c} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h(\varkappa)|^p \, d\varkappa \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ ess \sup\limits_{\varkappa \in \mathbb{R}^n} |h(\varkappa)|, p = \infty \end{array} \right\}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L_p ye Lebesgue uzayı denir, burada

$$ess \sup_{\varkappa \in \mathbb{R}^n} |h(\varkappa)| = \inf \{ \lambda : |\{ \varkappa \in \mathbb{R}^n : |h(\varkappa)| > \lambda \}| = 0 \}$$

dir.
L_p uzaylarının ara kesiti boş değildir. Yani her $p, q \geq 1$ için $L_P \cap L_q \neq \varnothing$ dır."

2.2 Morrey Uzayları

"$M_{p,\lambda}$ klasik Morrey uzayları, 2. mertebeden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını çalışırken Morrey tarafından bulunmuştur.
$1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere $M_{p,\lambda} \equiv M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\|h\|_{M_{p,\lambda}} = \sup_{\varkappa \in \mathbb{R}^n, \tau > 0} \tau^{-\frac{\lambda}{p}} \|h\|_{L_p(B(\varkappa,\tau))}$$

sonlu qazinormlu tüm $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesidir.

Not edelim ki $M_{p,0} = L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $M_{p,n} = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ ya da $\lambda > n$ ise bu durumda Θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde sıfıra denk tüm fonksiyonların kümesi olmak üzere $M_{p,\lambda} = \Theta$ dır.

$WM_{p,\lambda} \equiv WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile de

$$\|h\|_{WM_{p,\lambda}} = \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, \tau > 0} \tau^{-\frac{\lambda}{p}} \|h\|_{WL_p(B(\varkappa,\tau))} < \infty$$

olacak biçimde tüm $h \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının zayıf Morrey uzayını gösteririz. Burada $WL_p(B(\varkappa,\tau))$,

$$\|h\|_{WL_p(B(\varkappa,\tau))} \equiv \left\|h\chi_{B(\varkappa,\tau)}\right\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} t \left|\{y \in B(\varkappa,\tau) : |h(y)| > t\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

olacak biçimde ölçülebilir h fonksiyonlarının zayıf L_p uzayını gösterir."

Teorem 2.1 " *i)* $1 \le p \le \infty$, $h \in M_{p,\lambda}$, için Mh, $\mathbb{R}^n$ de h.h.y. sonludur.
ii) $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\|Mh\|_{M_{p,\lambda}} \le C \|h\|_{M_{p,\lambda}}$$

gerçeklenir, burada C, h den bağımsız bir sabittir.
iii) $p = 1$ olsun. Bu durumda

$$t|\{Mh > t\} \cap B_\tau(\varkappa)| \le C\tau^\lambda \|h\|_{1,\lambda}$$

gerçeklenir, burada C sabiti $\varkappa$, τ, t ve h den bağımsızdır (Chiarenza and Frasca 1987)."

Hardy-Littlewood-Sobolev klasik sonucu belirtir ki $1 < p < q < \infty$ için I_α operatörün $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\alpha = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ dır ve $p = 1 < q < \infty$ için I_α operatörünün $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_q(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\alpha = n(1 - \frac{1}{q})$ dır. Spanne and Adams (1975)'de Morrey uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılığını çalışmıştır. Onların sonuçları aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Teorem 2.2 " $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için I_α operatörü $M_{p,\lambda}$ dan $M_{q,\mu}$ ye ve $p = 1$ için I_α $M_{1,\lambda}$ dan $WM_{q,\mu}$ ye sınırlıdır."

Teorem 2.3 "$0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olsun. Bundan dolayı $p > 1$ için I_α operatörü $M_{p,\lambda}$ dan $M_{q,\lambda}$ ya ve $p = 1$ için I_α $M_{1,\lambda}$ dan $WM_{q,\lambda}$ ya sınırlıdır.

Hatırlayalım ki $0 < \alpha < n$ olmak üzere $M_\alpha h(\varkappa) \leq \nu_n^{\frac{\alpha}{n}-1} I_\alpha(| h |)(\varkappa)$ dir, burada $\nu_n \mathbb{R}^n$ deki birim yuvarın hacmidir. Buradan Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 M_α kesirli maksimal operatörünün sınırlılığını da gerektirir."

Genelleştirilmiş Morrey uzayları Guliyev tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 2.1 "$\psi(\varkappa,\tau)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $M_{p,\psi} \equiv M_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\| h \|_{M_{p,\psi}} = \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, \tau > 0} \psi(\varkappa,\tau)^{-1} \left|B(\varkappa,\tau)\right|^{-\frac{1}{p}} \|h\|_{L_p(B(\varkappa,\tau))}$$

sonlu quasinormlu tüm $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının genelleştirilmiş Morrey uzayını gösteririz.

$WM_{p,\psi} \equiv WM_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\| h \|_{WM_{p,\psi}} = \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, \tau > 0} \psi(\varkappa,\tau)^{-1} \left|B(\varkappa,\tau)\right|^{-\frac{1}{p}} \|h\|_{WL_p(B(\varkappa,\tau))} < \infty$$

olacak biçimde tüm $h \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayını gösteririz.

Bu tanıma göre $\psi(\varkappa,\tau) = \tau^{\frac{\lambda-n}{p}}$ alındığında

$$M_{p,\lambda} = M_{p,\psi}\big|_{\psi(\varkappa,\tau)=\tau^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

ve

$$WM_{p,\lambda} \equiv WM_{p,\psi}\big|_{\psi(\varkappa,\tau)=\tau^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

elde edilir."

2.3 BMO Uzayları

Bir $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna eğer

$$\|h\|_{BMO} = \|h\|_* = \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, \tau>0} \frac{1}{|B(\varkappa,\tau)|} \int_{B(\varkappa,\tau)} \left|h(y) - h_{B(\varkappa,\tau)}\right| dy < \infty$$

oluyorsa sınırlı ortalama değerlidir denir burada,

$$h_B = \frac{1}{|B|} \int_B h(y)dy$$

h'nın B yuvarı üzerindeki ortalamasıdır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\|h\|_* < \infty$ olacak biçimde böyle tüm h fonksiyonlarının topluluğudur, bu uzay $\|.\|_{BMO}$ normuna göre bir Banach uzayıdır. Bir sonraki lemma BMO fonksiyonlarının daha sonra faydalı olacak bazı özelliklerini bir araya getirmektedir.

Lemma 2.1 i) John-Nirenberg eşitsizliği: $\forall h \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\beta > 0$ için

$$|\{\varkappa \in B : |h(\varkappa) - h_B| > \beta\}| \leq C_1 |B| e^{-C_2\beta\|h\|_*}, \forall B \subset \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde $C_1, C_2 > 0$ sabitleri vardır.

ii) $1 < p < \infty$ için John-Nirenberg eşitsizliği gerektirir ki

$$\|h\|_* \approx \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0} \left(\frac{1}{|B(\varkappa,\tau)|} \int\limits_{B(\varkappa,\tau)} \left|h(y) - h_{B(\varkappa,\tau)}\right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1}$$

iii) $h \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\left|h_{B(\varkappa,\tau)} - h_{B(\varkappa,t)}\right| \leq C \|h\|_* \ln \frac{t}{\tau}, \quad 0 < 2\tau < t$$

dır, burada C $h, \varkappa, \tau$ ve t den bağımsızdır.

Daha fazla ayrıntı ve ispat (Grafakos 2009, Bölüm 7) de bulunur.

2.4 Maksimal Operatörler, Riesz Potansiyeli ve Komütatörleri

Bir $b \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ile lineer olmayan bir T operatörünün komütatörü $[b,T]\,h = bT(h) - T(bh)$ şeklinde tanımlanır. Komütatörlerin kısmi diferensiyel denklemler ve Jacobiyenlerinin incelenmesi de dahil olmak üzere bazı uygulamalarda önemli araçlar olduğu bilinmektedir (Coifman vd. 1993, Grafakos 2009). Literatürde çeşitli fonksiyon uzaylarında klasik operatörlerin komütatörleri ile ilgilenen bir çok makale bulunmaktadır. Komütatörler BMO normu için de karakterizasyonlar sağlar. Bu tezde inceleyeceğimiz operatörler şunlardır:

$h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 \leq \alpha < n$ olması şartıyla

$$(M_\alpha h)(\varkappa) = \sup_{\tau>0} |B(\varkappa,\tau)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(\varkappa,\tau)} |h(y)|\, dy$$

M_α kesirli maksimal operatörü, $\alpha = 0$ alındığında

$$Mh(\varkappa) = \sup_{\tau>0} \frac{1}{|B(\varkappa,\tau)|} \int_{B(\varkappa,\tau)} |h(y)|\, dy$$

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu olur. Bazı uygun b fonksiyonları için

$$M_b h(\varkappa) = \sup_{t>0} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|} \int_{B(\varkappa,t)} |b(\varkappa) - b(y)|\, |h(y)|\, dy$$

maksimal komütatörü ve

$$M_{b,\alpha} h(\varkappa) = \sup_{t>0} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(\varkappa,t)} |b(\varkappa) - b(y)|\, |h(y)|\, dy, 0 < \alpha < n$$

kesirli maksimal komütatörünü ele alacağız. Maksimal komütatörler Garcia-Cuerva, Harboure, Segovia and Torre (1991) de belirli singüler integrallerin komütatörlerini kontrol etmek için de kullanılmıştır. Eğer $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda M_b nin $L^p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olduğu bilinmektedir (Segovia 1989, Garcia-Cuerva vd. 1991). Ayrıca M_b Morrey uzayları üzerinde de sınırlıdır (Guliyev vd. 2011, Guliyev and Shukurov 2013). Sırasıyla $[b, M]$ ve $[b, M_\alpha]$ komütatörlerinin her ikisi de karşılıklı gelen maksimal komütatörleri tarafından kontrol edilebilir. Gerçekten eğer b negatif olmayan bir fonksiyon ise her $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[b, M]\, h(\varkappa)| \leq M_b h(\varkappa) \text{ ve } |[b, M_\alpha]\, h(\varkappa)| \leq M_{b,\alpha} h(\varkappa) \tag{2.2}$$

dir.

Ayrıca,

$$I_\alpha h(\varkappa) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{h(y)}{|\varkappa - y|^{n-\alpha}} dy$$

Riesz potansiyel operatörünün $[b, I_\alpha]\, h(\varkappa) = b(\varkappa) I_\alpha h(\varkappa) - I_\alpha(bh)(\varkappa)$ komütatörünü gözönüne alacağız.

Aşikar olarak, M_b ve $[b, M]$ komütatörleri esaslı olarak birbirinden farklıdır. M_b pozitiftir ve alt lineerdir fakat $[b, M]$ ne pozitiftir ne de alt lineerdir. $[b, M]$ operatöründe H^1 Hardy uzayındaki bir fonksiyon ile bir BMO fonksiyonunun çarpımı olan çalışmalarda kullanılır.

Tanım 2.2 "(Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık) $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere

$$T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer $\forall h \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Th\|_q \leq A \|h\|_p$$

olacak biçimde h den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne kuvvetli (p, q) tipindedir denir.

μ bir ölçü olmak üzere $\forall \alpha > 0$ için

$$\mu \{\varkappa : |Th(\varkappa)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A \|h\|_p}{\alpha} \right)^q, q < \infty$$

olacak şekilde α ve h den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir (Sadosky 1979)."

Teorem 2.4 "(Riesz-Thorin) $1 \leq p_0$, $1 \leq p_1$, $q_0 \leq \infty$ ve $q_1 \leq \infty$ olmak üzere T, (p_0, q_0) ve (p_1, q_1) tipli bir operatör olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

olmak üzere T, kuvvetli (p, q) tipli bir operatördür."

Teorem 2.5 "(Marcinkiewicz Ara Değer Teoremi) $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olmak üzere T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun. Ayrıca p ve q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür."

Tanım 2.3 "X bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. Eğer $X \times X$ ve $\mathbb{C} \times X$ topolojik çarpım uzaylarından X uzayının içine olan

$$(x, y) \to x + y \quad \text{ve} \quad (c, x) \to cx$$

dönüşümleri sürekli ise bu durumda X uzayına bir topolojik vektör uzayıdır denir. Burada $\mathbb{C}$, Öklidyen metriği tarafından belirlenmiş olan alışılmış topolojiye sahiptir (Adams and Fournier 2003)."

Tanım 2.4 "Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlanan skaler-değerli bir fonksiyona fonksiyonel adı verilir. Eğer x, $y \in X$ ve a, $b \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

ise f lineerdir denir. X bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer bir fonksiyonel X uzayından $\mathbb{C}$ içine sürekli ise X üzerinde süreklidir denir."

Tanım 2.5 "Bir X topolojik vektör uzayı üzerindeki bütün sürekli, lineer fonksiyonellerin kümesi X in duali olarak adlandırılır ve X' ile gösterilir. Noktasal toplam ve skalerle çarpma altında X' bir vektör uzayıdır: f, $h \in X'$, $x \in X$, $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(f + h)(x) = f(x) + h(x), \qquad (cf)(x) = cf(x)$$

ile tanımlanır."

Tanım 2.6 "X normlu bir uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer her bir $x \in X$ noktası S nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise S ye X te yoğundur denir."

Tanım 2.7 "Eğer bir X normlu uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip ise ayrılabilirdir denir."

3. $M_{P,\psi}(\mathbb{R}^N)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖRLER VE RIESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI

3.1 $M_{p,\psi}$ Uzaylarında Kesirli Maksimal Operatörler

$M_{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında M ve M_α nın sınırlılığı için ψ üzerindeki yeterli koşullar (Mizuhara 1991, Nakai 1994, Burenkov and Guliyev 2004, 2006, Guliyev 2009, Akbulut vd. 2010, Burenkov and Guliyev 2010, Guliyev vd. 2010, Burenkov vd. 2010) çalışmalarında elde edilmiştir.
Spanne Tipi Sonuç

Lemma 3.1 " $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. $\mathbb{R}^n$ deki herhangi $B = B(\varkappa, \tau)$ açık yuvarı ve $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha h\|_{Lq(B(\varkappa,\tau))} \lesssim \| h \|_{Lp(B(\varkappa,2\tau))} + \tau^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2\tau} t^{-n+\alpha} \| h \|_{L_1(B(\varkappa,t))} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik her $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha h\|_{WLq(B(\varkappa,\tau))} \lesssim \| h \|_{L_1(B(\varkappa,2\tau))} + \tau^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2\tau} t^{-n+\alpha} \| h \|_{L_1(B(\varkappa,t))} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $1 < p < q < \infty$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun. Keyfi bir $B = B(\varkappa, \tau)$ yuvarı için $h_1 = h_{\chi_{2B}}$ ve $h_2 = h_{\chi_{c(2B)}}$ olmak üzere $h = h_1 + h_2$ alalım. Bu durumda

$$\|M_\alpha h\|_{Lq(B)} \le \|M_\alpha h_1\|_{L_q(B)} + \|M_\alpha h_2\|_{L_q(B)}$$

dir. $M_\alpha : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ operatörünün sürekliliğinden $\|M_\alpha h_1\|_{L_q(B)} \lesssim \| h \|_{L_p(2B)}$elde ederiz. $y \in B$ olmak üzere eğer $B(y,t) \cap^c (2B) \ne \varnothing$ ise bu durumda $t > \tau$ dir. Gerçekten, eğer $z \in B(y,t) \cap^c (2B))$ ise bu durumdan $t > |y - z| \ge |\varkappa - z| - |\varkappa - y| > 2\tau - \tau = \tau$ olur.
Diğer taraftan $B(y,t) \cap^c (2B) \subset B(\varkappa, 2t)$ dir. Eğer $z \in B(y,t) \cap^c (2B)$ ise $|\varkappa - z| \le$

$|y-z|+|\varkappa-y|<t+\tau<2t$ elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned} M_\alpha h_2 &= \sup_{t>0} \tfrac{1}{|B(y,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(y,t)\cap^c(2B)} |h(z)|\,dz \\ &\leq 2^{n-\alpha} \sup_{t>\tau} \tfrac{1}{|B(\varkappa,2t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(\varkappa,2t)} |h(z)|\,dz \\ &= 2^{n-\alpha} \sup_{t>2\tau} \tfrac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(\varkappa,t)} |h(z)|\,dz \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\forall y \in B$ için

$$M_\alpha h_2(y) \leq 2^{n-\alpha} \sup_{t>2\tau} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(\varkappa,t)} |h(z)|\,dz \tag{3.3}$$

elde ederiz. Böylece

$$\|M_\alpha h\|_{L_q(B)} \lesssim \| h \|_{L_p(2B)} + |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2\tau} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(\varkappa,t)} |h(z)|\,dz \right)$$

olur. $p=1$ olsun. Herhangi bir $B=B(\varkappa,\tau)$ için

$$\|M_\alpha h\|_{WL_q(B)} \lesssim \|M_\alpha h_1\|_{WL_q(B)} + \|M_\alpha h_2\|_{WL_q(B)}$$

olduğu aşikardır.

$M_\alpha : L_1(\mathbb{R}^n) \to WL_q(\mathbb{R}^n)$ bu operatörün sürekliliğinden

$$\|M_\alpha h_1\|_{WL_q(B)} \lesssim \| h \|_{L_1(2B)}$$

elde edilir. O halde (3.3) den (3.2) eşitsizliği sağlanır." ■

Lemma 3.2 "$1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. O halde $\mathbb{R}^n$ deki herhangi bir $B=B(\varkappa,\tau)$ yuvarı ve her $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha h\|_{L_q(B)} \lesssim \tau^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2\tau} t^{-\frac{n}{q}} \| h \|_{L_p(B(\varkappa,t))} \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik, her $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha h\|_{WL_q(B)} \lesssim \tau^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2\tau} t^{-\frac{n}{q}} \| h \|_{L_p(B(\varkappa,t))} \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty, 0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

$$\begin{aligned} M_1 &:= |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2\tau} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(\varkappa,t)} |h(z)|\, dz \right) \\ M_2 &: \quad \| h \|_{L_p(2B)} \end{aligned}$$

diyelim. Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$M_1 \lesssim |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2\tau} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_{B(\varkappa,t)} |h(z)|^p\, dz \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2\tau} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_{B(\varkappa,t)} |h(z)|^p\, dz \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ \gtrsim \; & |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2\tau} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{\frac{1}{q}}} \right) \| h \|_{L_p(2B)} \qquad \approx M_2 \end{aligned}$$

dir. Lemma 3.1 den

$$\|M_\alpha h\|_{Lq(B)} \le M_1 + M_2$$

olduğundan (3.4) eşitsizliğini elde ederiz."

$p = 1$ durumunda (3.2) den direkt olarak (3.5) eşitsizliğini buluruz. ■

Teorem 3.1 " $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun ve $(\psi_{1,}\ \psi_2)$

$$\sup_{\tau<t<\infty} t^\alpha \psi_1(\varkappa,t) \le C\psi_2(\varkappa,\tau) \tag{3.6}$$

koşulunu sağlasın, burada C, $\varkappa$ ve τ dan bağımsızdır. Bu durumda M_α operatörü $p > 1$ için M_{p,ψ_1} den M_{q,ψ_2} ye ve $p = 1$ için M_{1,ψ_1} den WM_{q,ψ_2} ye sınırlıdır.

İspat. Lemma 3.2 den dolayı eğer $p \in (1,\infty)$ ise

$$\begin{aligned} \|M_\alpha h\|_{M_{q,\psi_2}(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0} \psi_2(\varkappa,\tau)^{-1} \left(\sup_{t>\tau} t^{-\frac{n}{q}} \| h \|_{L_p(B(\varkappa,t))} \right) \\ &\lesssim \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0} \psi_2(\varkappa,\tau)^{-1} \sup_{t>\tau} t^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \psi_1(\varkappa,t) \left(\psi_1(\varkappa,\tau)^{-1} t^{-\frac{n}{q}} \| h \|_{L_p(B(\varkappa,t))} \right) \\ &\lesssim \|h\|_{M_{p,\psi_1}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0} \psi_2(\varkappa,\tau)^{-1} \sup_{t>\tau} t^\alpha \psi_1(\varkappa,t) \\ &\lesssim \|h\|_{M_{p,\psi_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

ve $p = 1$ise

$$\begin{aligned} \|M_\alpha h\|_{WM_{q,\psi_2}(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0} \psi_2(\varkappa,\tau)^{-1} \left(\sup_{t>\tau} t^{-\frac{n}{q}} \| h \|_{L_1(B(\varkappa,t))} \right) \\ &\lesssim \|h\|_{M_{1,\psi_1}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0} \psi_2(\varkappa,\tau)^{-1} \sup_{t>\tau} t^\alpha \psi_1(\varkappa,t) \\ &\lesssim \|h\|_{M_{1,\psi_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde ederiz." ■

Sonuç 3.1 "$1 \leq p < \infty$ olsun ve $\left(\psi_{1,}\ \psi_2\right)$

$$\sup_{\tau<t<\infty} t^{\alpha}\psi_1\left(\varkappa,t\right) \leq C\psi_2\left(\varkappa,\tau\right)$$

koşulunu sağlasın, burada C, $\varkappa$ ve τ den bağımsızdır. Bu durumda M operatörü $p>1$ için M_{p,ψ_1} den M_{q,ψ_2} ye ve $p=1$ için M_{1,ψ_1} den WM_{q,ψ_2} ye sınırlıdır."

Adams Tipi Sonuç

Teorem 3.2 " $1 \leq p < q < \infty$, $0<\alpha<\frac{n}{p}$ olsun ve $\psi\left(\varkappa,t\right)$

$$\sup_{\tau<t<\infty} \psi\left(\varkappa,t\right) \leq C\psi\left(\varkappa,\tau\right) \tag{3.7}$$

ve

$$\sup_{\tau<t<\infty} t^{\alpha}\psi\left(\varkappa,t\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\tau^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \tag{3.8}$$

koşullarını sağlasın, burada C $\varkappa\in\mathbb{R}^n$ ve $\tau>0$ a bağlı değildir. Bu durumda M_α operatörü $p>1$ için $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ den $M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ya ve $p=1$ için M_{1,ψ_1} den $WM_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ya sınırlıdır.

İspat. $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<\frac{n}{p}$ ve $h\in M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ olsun. $h=h_1+h_2$ alalım, burada $B=B(\varkappa,\tau)$, $h_1=h_{\chi_{2B}}$ ve $h_2=h_{\chi_{c_{(2B)}}}$ dir. $M_\alpha h_2(\varkappa)$ için ve $\forall y\in B$ için (3.3) den

$$\begin{aligned} M_\alpha(h_2)(y) &\leq 2^{n-\alpha}\sup_{t>2\tau}\frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\alpha/n}}\int_{B(\varkappa,t)}|h(z)|\,dz \\ &\lesssim \sup_{t>2\tau} t^{-\frac{n}{q}}\parallel h\parallel_{L_p(B(\varkappa,t))} \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde ederiz. (3.8) ve (3.9) koşullarından

$$\begin{aligned} M_\alpha h(\varkappa) &\lesssim \tau^{\alpha}Mh\left(\varkappa\right)+\sup_{t>2\tau}t^{\alpha-\frac{n}{p}}\parallel h\parallel_{L_p(B(\varkappa,t))} \\ &\leq \tau^{\alpha}Mh\left(\varkappa\right)+\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}\sup_{t>2\tau}t^{\alpha}\psi\left(\varkappa,t\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \tau^{\alpha}Mh\left(\varkappa\right)+\tau^{-\frac{\alpha p}{q-p}}\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak $\forall\varkappa\in\mathbb{R}^n$ için

$$\tau=\left(\frac{\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}}{Mh\left(\varkappa\right)}\right)^{\frac{q-p}{\alpha q}}$$

seçtiğimizde

$$|M_\alpha h(\varkappa)| \lesssim \left(Mh\left(\varkappa\right)\right)^{\frac{p}{q}}\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}}$$

elde ederiz. Buradan teoremin ifadesi (3.7) koşulu ışığında Sonuç 3.1 den M maksimal operatörünün $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ deki sınırlılığından görülür.

Eğer $1 < p < q < \infty$ ise

$$\begin{aligned}
\|M_\alpha h\|_{M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, t>0} \psi(\varkappa,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|M_\alpha h\|_{L_q(B(\varkappa,t))} \\
&\lesssim \|h\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, t>0} \psi(\varkappa,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mh\|^{\frac{p}{q}}_{L_p(B(\varkappa,t))} \\
&= \|h\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} \left(\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, t>0} \psi(\varkappa,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mh\|_{L_p(B(\varkappa,t))}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \|h\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} \|Mh\|^{\frac{p}{q}}_{M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}} \\
&\lesssim \|h\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}
\end{aligned}$$

ve $1 < q < \infty$ ise

$$\begin{aligned}
\|M_\alpha h\|_{WM_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, t>0} \psi(\varkappa,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|M_\alpha h\|_{WL_q(B(\varkappa,t))} \\
&\lesssim \|h\|^{1-\frac{1}{q}}_{M_{1,\psi}} \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, t>0} \psi(\varkappa,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mh\|^{\frac{1}{q}}_{WL_{1(B(\varkappa,t))}} \\
&= \|h\|^{1-\frac{1}{q}}_{M_{1,\psi}} \left(\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n, t>0} \psi(\varkappa,t)^{-1} t^{-n} \|Mh\|_{WL_{1(B(\varkappa,t))}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|h\|^{1-\frac{1}{q}}_{M_{1,\psi}} \|Mh\|^{\frac{1}{q}}_{WM_{1,\psi}} \\
&\lesssim \|h\|_{M_{1,\psi}}
\end{aligned}$$

elde edilir." ■

$\psi(\varkappa,t) = t^{\lambda-n}$, $0 < \lambda < n$ durumunda Teorem 3.2 den kesirli maksimal operatör için Adams tipi aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.2 "$0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için M_α operatörü $M_{p,\lambda}$ dan $M_{q,\lambda}$ ya ve $p = 1$ için M_α $M_{1,\lambda}$ dan $WM_{q,\lambda}$ ya sınırlıdır."

3.2 $M_{p,\psi}$ Uzaylarında Riesz Potansiyeli

Spanne Tipi Sonuç

Teorem 3.3 "$1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun ve $(\psi_{1,}\ \psi_2)$

$$\int_t^\infty \tau^\alpha \psi_1(\varkappa,\tau)\frac{d\tau}{\tau} \leq C\psi_2(\varkappa,t) \tag{3.10}$$

koşulunu sağlasın, burada C $\varkappa$ ve t den bağımsızdır. Bu durumda M_α ve I_α operatörleri $p > 1$ için M_{p,ψ_1} den M_{q,ψ_2} ye ve $p = 1$ için M_{1,ψ_1} den WM_{q,ψ_2} ye sınırlıdır. (Guliyev 2009)"

Adams Tipi Sonuç

Teorem 3.4 " $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $q > p$ olsun ve $\psi(\varkappa, t)$

$$\sup_{\tau < t < \infty} \psi(\varkappa, t) \leq C\psi(\varkappa, \tau) \tag{3.11}$$

ve

$$\int_\tau^\infty t^\alpha \psi(\varkappa, t)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \leq C\tau^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \tag{3.12}$$

koşullarını sağlasın, burada C, $\varkappa \in \mathbb{R}^n$ ve $\tau > 0$ a bağlı değildir. Bu durumda I_α operatörü $p > 1$ için $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ den $M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ya ve $p = 1$ için $M_{1,\psi}$ den $WM_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ya sınırlıdır. (Guliyev and Shukurov 2013)

İspat. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $q > p$ ve $h \in M_{p,\psi^{\frac{1}{P}}}$ olsun. $h = h_1 + h_2$ yazalım, burada $B = B(\varkappa, \tau)$, $h_1 = h_{\chi_{2B}}$ $h_2 = h_{\chi_{c(2B)}}$ dir. $I_\alpha h_2(\varkappa)$ için

$$\begin{aligned}
| \; I_\alpha \; h_2(\varkappa) \; | &\leq \int_{c_{B(\varkappa,2\tau)}} | \; \varkappa - y \; |^{\alpha-n} | \; h(y) \; | \; dy \\
&\lesssim \int_{c_{B(\varkappa,2\tau)}} | \; h(y) \; | \; dy \int_{|\varkappa-y|}^\infty t^{\alpha-n-1} \; dt \\
&\lesssim \int_{2\tau}^\infty \left(\int_{2\tau < |\varkappa-y| < t} | \; h(y) \; | \; dy \right) t^{\alpha-n-1} \; dt \\
&\lesssim \int_\tau^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \parallel h \parallel_{L_p(B(\varkappa,t))} dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

dir. (3.12) koşulu ve (3.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
| \; I_\alpha \; h(\varkappa) \; | &\lesssim \tau^\alpha Mh(\varkappa) + \tau^\alpha Mh(\varkappa) + \int_\tau^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \parallel h \parallel_{L_p(B(\varkappa,t))} dt \\
&\leq \tau^\alpha Mh(\varkappa) + \parallel h \parallel_{Mp,\psi} \int_\tau^\infty t^\alpha \psi(\varkappa, t)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \tau^\alpha Mh(\varkappa) + \tau^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \parallel h \parallel_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. Buradan $\forall \varkappa \in \mathbb{R}^n$ için $\tau = \left(\frac{\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}}{Mh(\varkappa)} \right)^{\frac{q-p}{\alpha q}}$ seçtiğimizde

$$| \; I_\alpha \; h(\varkappa) \; | \lesssim (Mh(\varkappa))^{\frac{p}{q}} \parallel h \parallel_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}}$$

bulunur. Sonuç olarak teoremin ifadesi (3.11) koşulu ışığında

$$\sup_{\tau < t < \infty} \psi_1(\varkappa, t) \leq C\psi_2(\varkappa, \tau)$$

den elde edilen M maksimal operatörünün $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ deki sınırlılığından görülür.
Eğer $1 < p < q < \infty$ ise

$$\begin{aligned}
\| I_\alpha h \|_{M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ t>0} \psi(\varkappa, t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \| I_\alpha h \|_{L_q(B(\varkappa,t))} \\
&\lesssim \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ t>0} \psi(\varkappa, t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \| Mh \|_{L_p(B(\varkappa,t))}^{\frac{p}{q}} \\
&= \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}} \Big(\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ t>0} \psi(\varkappa, t)^{-\frac{1}{p}} t^{-\frac{n}{p}} \| Mh \|_{L_p(B(\varkappa,t))}\Big)^{\frac{p}{q}} \\
&\lesssim \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} \| Mh \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{\frac{p}{q}} \lesssim \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}
\end{aligned}$$

eğer $1 < q < \infty$ ise

$$\begin{aligned}
\| I_\alpha h \|_{WMq,\psi^{\frac{1}{q}}} &= \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ t>0} \psi(\varkappa, t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \| I_\alpha h \|_{WL_q(B(\varkappa,t))} \\
&\lesssim \| h \|_{M_{1,\psi}^{1-\frac{1}{q}}} \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ t>0} \psi(\varkappa, t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \| Mh \|_{WL_1(B(\varkappa,t))}^{\frac{1}{q}} \\
&= \| h \|_{M_{1,\psi}^{1-\frac{1}{q}}} \left(\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ t>0} \psi(\varkappa, t)^{-1} t^{-n} \| Mh \|_{WL_1(B(\varkappa,t))}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \| h \|_{M_{1,\psi}^{1-\frac{1}{q}}} \| Mh \|_{WM_{1,\psi}}^{\frac{1}{q}} \lesssim \| h \|_{M_{1,\psi}}
\end{aligned}$$

olur böylece ispat tamamlanır." ■

4. $M_{P,\psi}(\mathbb{R}^N)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA RIESZ POTANSİYELİ VE KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖRLERİN KOMÜTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

4.1 $M_{p,\psi}$ Uzaylarında Kesirli Maksimal Operatörlerin Komütatörleri

Spanne Tipi Sonuç

Teorem 4.1 "$1 < p < \infty$, $0 < \lambda < \frac{n}{p}$,$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun ve herhangi bir $B(\varkappa_0, \tau)$ yuvarı ve her $h \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_{b,\alpha}h\|_{L_q(B(\varkappa_0,\tau))} \lesssim \|b\|_* \tau^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2\tau}(1 + \ln \frac{t}{\tau})t^{\frac{-n}{q}} \|h\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}$$

eşitsizliği sağlanır (Guliyev and Shukurov 2013).

İspat. $1 < p < \infty, 0 < \alpha < \frac{n}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$,olsun. $h_1 = h_{\chi_{2B}}$ ve $h_2 = h_{\chi^c_{(2B)}}$ $B = B(\varkappa_0, \tau)$ olan $h = h_1 + h_2$ yazalım.
Buradan

$$\|M_{b,\alpha}h\|_{L_q(B)} \leq \|M_{b,\alpha}h_1\|_{L_q(B)} + \|M_{b,\alpha}h_2\|_{L_q(B)}$$

dır. $M_{b,\alpha}$ nın sınırlılığından, $L_q(\mathbb{R}^n)$ den $L_p(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır ve aşağıdaki sonucu elde ederiz :

$$\begin{aligned} \|M_{b,\alpha}h_1\|_{L_q(B)} &\leq \|M_{b,\alpha}h_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|b\|_* \|h_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|b\|_* \|h\|_{L_p(2B)} . \end{aligned}$$

$\varkappa \in B$ için

$$\begin{aligned} M_{b,\alpha}h_2(\varkappa) &\lesssim \sup_{t>0} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int\limits_{B(\varkappa,t)} |b(y) - b(\varkappa)| \, h_2(y)dy \\ &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int\limits_{B(\varkappa,t)\cap^c(2B)} |b(y) - b(\varkappa)| \, h(y)dy \end{aligned}$$

dır. $\varkappa, B$ noktasından keyfi bir nokta olsun. Eğer $B(\varkappa, t) \cap^c \{^c(2B)\} = \varnothing$ ise, o halde $t > \tau$ dir. Gerçekten eğer $y \in B(\varkappa, t) \cap^c \{^c(2B)\}$ ise o halde

$$t > |\varkappa - y| \geq |\varkappa_0 - y| - |\varkappa_0 - \varkappa| > 2\tau - \tau = \tau$$

dır. Öte yandan $B(\varkappa,t)\cap^c(2B)\subset B(\varkappa_0,2t)$ dır. $y\in B(\varkappa,t)\cap^c(2B)$ o halde

$$|\varkappa_0-y|\le|\varkappa-y|+|\varkappa_0-\varkappa|<t+\tau<2t$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
M_{b,\alpha}h_2(\varkappa) &= \sup_{t>0}\frac{1}{|B(\varkappa,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int\limits_{B(\varkappa,t)\cap^c(2B)}|b(y)-b(\varkappa)|\,h(y)dy\\
&\le 2^{n-\alpha}\sup_{t>\tau}\frac{1}{|B(\varkappa_0,2t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|b(y)-b(\varkappa)|\,h(y)dy\\
&\le 2^{n-\alpha}\sup_{t>2\tau}\frac{1}{|B(\varkappa_0,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|b(y)-b(\varkappa)|\,h(y)dy
\end{aligned}$$

dır. Bu nedenle tüm $\varkappa\in B$ için

$$M_{b,\alpha}h_2(\varkappa)\le 2^{n-\alpha}\sup_{t>2\tau}\frac{1}{|B(\varkappa_0,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|b(y)-b(\varkappa)|\,h(y)dy \tag{4.1}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned}
\|M_{b,\alpha}h_2\|_{L_{q(B)}} &\lesssim \left(\int\limits_B\left(\sup_{t>2\tau}\frac{1}{|B(\varkappa_0,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|b(y)-b(\varkappa)|\,|h(y)|\,dy\right)^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le \left(\int\limits_B\left(\sup_{t>2\tau}\frac{1}{|B(\varkappa_0,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|b(y)-b_B|\,|h(y)|\,dy\right)^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+ \left(\int\limits_B\left(\sup_{t>2\tau}\frac{1}{|B(\varkappa_0,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|b(\varkappa)-b_B|\,|h(y)|\,dy\right)^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= J_1+J_2
\end{aligned}$$

dir. J_1 i değerlendirelim

$$\begin{aligned}
J_1 &= \tau^{\frac{n}{q}}\sup_{t>2\tau}\frac{1}{|B(\varkappa_0,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|b(y)-b_B|\,|h(y)|\,dy\\
&\approx \sup_{t>2\tau}t^{\alpha-n}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|b(y)-b_B|\,|h(y)|\,dy
\end{aligned}$$

dir. Hölder eşitsizliği ve

$$\|h\|_*\approx\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0}\left(\frac{1}{|B(\varkappa,\tau)|}\int\limits_{B(\varkappa,\tau)}\left|h(y)-h_{B(\varkappa,\tau)}\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$\left|h_{B(\varkappa,\tau)}-h_{B(\varkappa,t)}\right|\leq C\left\|h\right\|_{*}\ln\frac{t}{\tau},\quad C>0,0<2\tau<t$$

uygulanırsa

$$\begin{aligned}J_1 &\lesssim \sup_{t>2\tau} t^{\alpha-n}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}\left|b(y)-b_{B(\varkappa_0,t)}\right||h(y)|\,dy\\ &\quad+\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-n}\left|b_{B(\varkappa_0,\tau)}-b_{B(\varkappa_0,t)}\right|\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|h(y)|\,dy\\ &\lesssim \tau^{\frac{n}{q}}\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-\frac{n}{p}}\left(\frac{1}{|B(\varkappa_0,t)|}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}\left|b(y)-b_{B(\varkappa_0,t)}\right|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\|h\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\\ &\quad+\tau^{\frac{n}{q}}\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-\frac{n}{p}}\left|b_{B(\varkappa_0,\tau)}-b_{B(\varkappa_0,t)}\right|\|h\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\\ &\lesssim \|b\|_{*}\,\tau^{\frac{n}{q}}\left(1+\ln\tfrac{t}{\tau}\right)\|h\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\end{aligned}$$

elde edilir. J_2 i değerlendirelim

$$\begin{aligned}J_2 &= \left(\int\limits_{B}|b(\varkappa)-b_B|^q\,d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-n}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}|h(y)|\,dy\\ &\lesssim \|b\|_{*}\,\tau^{\frac{n}{q}}\sup_{t>2\tau} t^{\frac{n}{q}}\|h\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\end{aligned}$$

dır. J_1 ve J_2 tüm $p\in(1,\infty)$ için

$$\|M_{b,\alpha}h_2\|_{L_q(B)}\lesssim\|b\|_{*}\,\tau^{\frac{n}{q}}\sup_{t>2\tau} t^{\frac{n}{q}}\left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right)\|h\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\tag{4.2}$$

elde ederiz. Sonuç

$$\begin{aligned}\|M_{b,\alpha}h\|_{L_q(B)} &\lesssim \|b\|_{*}\|h\|_{L_p(2B)}+\|b\|_{*}\,\tau^{\frac{n}{q}}\sup_{t>2\tau} t^{\frac{n}{q}}\left(1+\ln\tfrac{t}{\tau}\right)\|h\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\\ &\lesssim \|b\|_{*}\,\tau^{\frac{n}{q}}\sup_{t>2\tau} t^{\frac{n}{q}}\left(1+\ln\tfrac{t}{\tau}\right)\|h\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\end{aligned}$$

dır." ■

Teorem 4.2 "$1<p<\infty$, $0\leq\alpha<\frac{n}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun ve (ψ_1,ψ_2)

$$\sup_{\tau<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right)t^{\alpha}\psi_1(\varkappa,t)\leq C\psi_2(\varkappa,\tau)\tag{4.3}$$

koşulunu sağlasın, burada C $\varkappa$ ve τ ye bağlı değildir. Bu durumda $M_{b,\alpha}$ operatörü M_{p,ψ_1} den M_{q,ψ_2} ye sınırlıdır. Üstelik

$$\|M_{b,\alpha}h\|_{M_{q,\psi_2}}\lesssim\| b\|_{\star}\|h\|_{M_{p,\psi_1}}$$

dir (Guliyev and Shukurov 2013)."

$\alpha = 0$ ve $p = q$ durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun ve (ψ_1, ψ_2)

$$\sup_{\tau < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{\tau}\right) \psi_1(\varkappa, t) \leq C\psi_2(\varkappa, \tau) \tag{4.4}$$

olmak üzere, burada C $\varkappa$ ve τ ye bağlı değildir. Böylece M_b operatörü M_{p,ψ_1} den M_{p,ψ_2} ye sınırlıdır. Üstelik,

$$\|M_b h\|_{M_{p,\psi_2}} \lesssim \| b \|_\star \|h\|_{M_{p,\psi_1}}$$

dir.

Adams Tipi Sonuç

Teorem 4.3 $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun ve $\psi(\varkappa, t)$

$$\sup_{\tau < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{\tau}\right)^p \psi(\varkappa, t) \leq C\psi(\varkappa, \tau) \tag{4.5}$$

ve

$$\sup_{\tau < t < \infty} \left(1 + \ln \frac{t}{\tau}\right)^p t^\alpha \psi(\varkappa, t)^{\frac{1}{p}} \leq C\tau^{\frac{-\alpha p}{q-p}} \tag{4.6}$$

koşullarını sağlasın, C $\varkappa \in \mathbb{R}^n$ den bağımsız ve $\tau > 0$ dır. Bu durumda $M_{b,\alpha}$, $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ den $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ ya sınırlıdır.

İspat. $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ olsun. $\varkappa_0 \in \mathbb{R}^n$ keyfi noktası için merkezi $\varkappa_0$ yarıçapı τ olan $B = B(\varkappa_0, \tau)$ alalım. $h_1 = h_{\chi_{2B}}$, $h_2 = h_{\chi^c_{(2B)}}$ ve $h = h_1 + h_2$ olarak yazalım. $\varkappa \in B$ için

$$\begin{aligned} |M_{b,\alpha} h_2(\varkappa)| &\lesssim \sup_{t>0} t^{\alpha-n} \int_{B(\varkappa,t)} |b(y) - b(\varkappa)| \, |h_2(y)| \, dy \\ &\approx \sup_{t>2\tau} t^{\alpha-n} \int_{B(\varkappa,t)} |b(y) - b(\varkappa)| \, |h_2(y)| \, dy \end{aligned}$$

dir. Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}
\|h\|_* &\approx \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0}\left(\frac{1}{|B(\varkappa,\tau)|}\int\limits_{B(\varkappa,\tau)}\left|h(y)-h_{B(\varkappa,\tau)}\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
\left|h_{B(\varkappa,\tau)}-h_{B(\varkappa,t)}\right| &\leq C\|h\|_*\ln\tfrac{t}{\tau} \qquad 0<2\tau<t \\
|M_{b,\alpha}h_2(\varkappa)| &\lesssim \sup_{t>2\tau} t^{\alpha-n}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}\left|b(y)-b_{B(\varkappa_0,t)}\right||h(y)|\,dy \\
&\quad+\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-n}\left|b_{B(\varkappa_0,\tau)}-b_{B(\varkappa_0,t)}\right||h(y)|\,dy \\
&\lesssim \sup_{t>2\tau} t^{\alpha-n}\left(\frac{1}{|B(\varkappa_0,t)|}\int\limits_{B(\varkappa_0,t)}\left|b(y)-b_{B(\varkappa_0,t)}\right|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}}\|h\|_{L_{p(B(\varkappa_0,t))}} \\
&\quad+\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-\frac{n}{p}}\left|b_{B(\varkappa_0,\tau)}-b_{B(\varkappa_0,t)}\right|\|h\|_{L_{p(B(\varkappa_0,t))}} \\
&\lesssim \|b\|_*\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-\frac{n}{p}}\left(1+\ln\tfrac{t}{\tau}\right)\|h\|_{L_{p(B(\varkappa_0,t))}}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç olarak tüm $p\in(1,\infty)$ ve $\varkappa\in B$ için

$$|M_{b,\alpha}h_2(\varkappa)|\lesssim\|b\|_*\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-\frac{n}{p}}\left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right)\|h\|_{L_{p(B(\varkappa_0,t))}} \tag{4.7}$$

dır.

Bu durumda (4.6) ve (4.7) koşullarından

$$\begin{aligned}
M_{b,\alpha}h(\varkappa) &\lesssim \|b\|_*\tau^\alpha M_bh(\varkappa)+\|b\|_*\sup_{t>2\tau} t^{\alpha-\frac{n}{p}}\left(1+\ln\tfrac{t}{\tau}\right)\|h\|_{L_{p(B(\varkappa_0,t))}} \\
&\leq \|b\|_*\tau^\alpha M_bh(\varkappa)+\|b\|_*\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}\sup_{t>\tau}\left(1+\ln\tfrac{t}{\tau}\right)t^\alpha\psi(\varkappa,t)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.8)\\
&\lesssim \|b\|_*\tau^\alpha M_bh(\varkappa)+\tau^{-\frac{\alpha p}{q-p}}\|b\|_*\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$\left(\frac{\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}}{M_bh(\varkappa)}\right)^{\frac{q-p}{\alpha q}}$$

her $\varkappa\in B$ seçersek

$$|M_{b,\alpha}h(\varkappa)|\lesssim\|b\|_*\left(M_bh(\varkappa)\right)^{\frac{p}{q}}\|h\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}$$

elde edilir.

Buradan teoremin ifadesi (4.5) koşulu sayesinde

$$\sup_{\tau<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right)\psi_1(\varkappa,t)<C\psi(\varkappa,\tau)$$

$$\|M_{b,\alpha}h\|_{M_{p,\psi_2}}\lesssim\|b\|_*\|h\|_{M_{p,\psi_1}}$$

olduğundan M_b operatörü M_{p,ψ_1} den M_{p,ψ_2} ye sınırlıdır, tarafından sağlanan $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ de ki maksimal M_b operatörünün komütatörünün sınırlılığı gözönüne alındığında elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|M_{b,\alpha}h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} &= \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0}\psi(\varkappa,\tau)^{-\frac{1}{q}}\tau^{-\frac{n}{q}}\|M_{b,\alpha}h\|_{L_{q(B(\varkappa,\tau))}}\\
&\lesssim \|b\|_*\|h\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0}\psi(\varkappa,\tau)^{-\frac{1}{q}}\tau^{-\frac{n}{q}}\|M_bh\|^{\frac{p}{q}}_{L_{p(B(\varkappa,\tau))}}\\
&= \|b\|_*\|h\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}\left(\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n,\tau>0}\psi(\varkappa,\tau)^{-\frac{1}{q}}\tau^{-\frac{n}{q}}\|M_bh\|_{L_{p(B(\varkappa,\tau))}}\right)^{\frac{p}{q}}\\
&= \|b\|_*\|h\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}\|M_bh\|^{\frac{p}{q}}_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}\\
&\lesssim \|b\|_*\|h\|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}
\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.2 "$0<\alpha<n,\ 1<p<\frac{n}{\alpha}, 0<\lambda<n-\alpha p,\ \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n-\lambda},\ b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $M_{b,\alpha}$ operatörü $M_{p,\lambda}$ dan $M_{q,\lambda}$ ya sınırlıdır."

4.2 $M_{p,\psi}$ Uzaylarında Riesz Potansiyelinin Komütatörleri

Spanne Tipi Sonuç

Lemma 4.1 (Guliyev Eşitsizliği) :$1<p<\infty$, $0<\alpha<\frac{n}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $B(\varkappa_0,\tau)$ yuvarı ve $\forall h\in L_p^{loc}(\mathbb{R})$ için

$$\|\,[b,I_\alpha]\,h\,\|_{L_q(B(\varkappa_0,\tau))}\lesssim\|\,b\,\|_\star\,\tau^{\frac{n}{q}}\int_{2\tau}^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right)t^{-\frac{n}{q}-1}\,\|\,h\,\|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\,dt$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $1<p<\infty$, $0<\alpha<\frac{n}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ olsun. $h=h_1+h_2$ yazalım, burada $B=B(\varkappa_0,\tau)$, $h_1=h_{\chi_{2B}}$ ve $h_2=h_{\chi c_{(2B)}}$ dir. Buradan

$$\|\,[b,I_\alpha]\,h\,\|_{L_q(B)}\leq\|\,[b,I_\alpha]\,h_1\,\|_{L_q(B)}+\|\,[b,I_\alpha]\,h_2\,\|_{L_q(B)}$$

dır. $[b, I_\alpha]$ nın $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlılığından

$$\begin{aligned}\| [b, I_\alpha]\, h_1 \|_{L_q(B)} &\lesssim \| [b, I_\alpha]\, h_1 \|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \| b \|_\star \| h_1 \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \| b \|_\star \| h \|_{L_p(2B)}\end{aligned}$$

elde edilir. $\varkappa \in B$ için

$$\begin{aligned}| [b, I_\alpha]\, h_2(\varkappa) | &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{|b(y)-b(\varkappa)|}{|\varkappa-y|^{n-\alpha}} \mid h(y) \mid dy \\ &\approx \int_{\complement_{(2B)}} \tfrac{|b(y)-b(\varkappa)|}{|\varkappa_0-y|^{n-\alpha}} \mid h(y) \mid dy\end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\| [b, I_\alpha]\, h_2 \|_{L_q(B)} &\lesssim \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} \tfrac{|b(y)-b(\varkappa)|}{|\varkappa_0-y|^{n-\alpha}} \mid h(y) \mid dy\right)^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} \tfrac{|b(y)-b_B|}{|\varkappa_0-y|^{n-\alpha}} \mid h(y) \mid dy\right)^q d\varkappa)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} \tfrac{|b(y)-b_B|}{|\varkappa_0-y|^{n-\alpha}} \mid h(y) \mid dy\right)^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= J_1 + J_2\end{aligned}$$

dır.

J_1 i değerlendirelim

$$\begin{aligned}J_1 &= \tau^{\frac{n}{q}} \int_{\complement_{(2B)}} \frac{\mid b(y) - b_B \mid}{\mid \varkappa_0 - y \mid^{n-\alpha}} \mid h(y) \mid dy \\ &\approx \tau^{\frac{n}{q}} \int_{\complement_{(2B)}} \mid b(y) - b_B \| h(y) \mid \int_{|\varkappa_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} dy \\ &\approx \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \int_{2\tau \,\leq\, |\varkappa_0-y| \,\leq\, t} \mid b(y) - b_B \| h(y) \mid dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\ &\lesssim \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \int_{B(\varkappa_0,t)} \mid b(y) - b_B \| h(y) \mid dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}}\end{aligned}$$

dır. Hölder eşitsizliğinin uygulaması ve

$$\| h \|_\star \approx \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n \ \tau > 0} \left(\frac{1}{\mid B(\varkappa,\tau) \mid} \int_{B(\varkappa,t)} \mid h(y) - h_{B(\varkappa,\tau)} \mid^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.9}$$

$h \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$\mid h_{B(\varkappa,\tau)} - h_{B(\varkappa,\tau)} \mid \leq C \parallel h \parallel_\star \ln \frac{t}{\tau}$ için $0 < 2\tau < t$ (4.9) bu koşullardan dolayı

$$\begin{aligned}J_1 &\lesssim \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \int_{B(\varkappa_0,t)} \mid b(y) - b_{B(\varkappa_0,t)} \| h(y) \mid dy \ \tfrac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\ &\quad + \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \mid b_{B(\varkappa_0,\tau)} - b_{B(\varkappa_0,t)} \mid \tfrac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \int_{B(\varkappa_0,t)} \mid h(y) \mid dy \\ &\lesssim \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \left(\int_{B(\varkappa_0,t)} \mid b(y) - b_{B(\varkappa_0,t)} \mid^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \ \tfrac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\ &\quad + \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \mid b_{B(\varkappa_0,\tau)} - b_{B(\varkappa_0,t)} \| \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \ \tfrac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1-\alpha}} \\ &\lesssim \| b \|_\star \ \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \left(1 + \ln \tfrac{t}{\tau}\right) \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \ \tfrac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1-\alpha}}\end{aligned}$$

elde edilir.

J_2 yi değerlendirmek için not edelim ki

$$J_2 = \int_B (| b(\varkappa) - b_B |^q \, d\varkappa)^{\frac{1}{q}} \int_{c_{(2B)}} \frac{| h(y) |}{| \varkappa_0 - y |^{n-\alpha}} dy$$

dir. (4.9) dan

$$J_2 \lesssim \| b \|_\star \, \tau^{\frac{n}{q}} \int_{c_{(2B)}} \frac{| h(y) |}{| \varkappa_0 - y |^{n-\alpha}} dy$$

elde edilir.

Fubini teoreminden dolayı

$$\begin{aligned}
\int_{c_{(2B)}} \frac{| h(y) |}{| \varkappa_0 - y |^{n-\alpha}} dy &\approx \int_{c_{(2B)}} | h(y) | \int_{|\varkappa_0 - y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} dy \\
&\approx \int_{2\tau}^{\infty} \int_{2\tau \, \leq \, |\varkappa_0 - y| \, \leq \, t} | h(y) | \, dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\
&\lesssim \int_{2\tau}^{\infty} \int_{B(\varkappa_0, t)} | h(y) | \, dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}}
\end{aligned}$$

sağlanır. Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\int_{c_{(2B)}} \frac{| h(y) |}{| \varkappa_0 - y |^{n-\alpha}} dy \lesssim \int_{2\tau}^{\infty} \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \tag{4.10}$$

elde ederiz. Böylece (4.10) dan

$$J_2 \lesssim \| b \|_\star \, \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}$$

olur. J_1 ve J_2 yi toplandığında $\forall p \in (1, \infty)$ için

$$\| \, [b, I_\alpha] \, h_2 \, \|_{L_q(B)} \lesssim \| b \|_\star \, \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{\tau}\right) \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \tag{4.11}$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned}
\| \, [b, I_\alpha] \, \|_{L_q(B)} &\lesssim \| b \|_\star \| h \|_{L_p(2B)} + \| b \|_\star \, \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \left(1 + \ln \tfrac{t}{\tau}\right) \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \tfrac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \\
&\lesssim \| b \|_\star \, \tau^{\frac{n}{q}} \int_{2\tau}^{\infty} \left(1 + \ln \tfrac{t}{\tau}\right) \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \tfrac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}.
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.4 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ $\;b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun ve (ψ_1, ψ_2)

$$\int_{\tau}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{\tau}\right) t^\alpha \psi_1(\varkappa, t) \frac{dt}{t} \leq C \psi_2(\varkappa, \tau) \tag{4.12}$$

koşulunu sağlasın, burada C $\varkappa$ ve τ ye bağlı değildir. Bu durumda $[b, I_\alpha]$ operatörü M_{p,ψ_1} den M_{q,ψ_2} ye sınırlıdır.
Üstelik,

$$\|[b, I_\alpha]\, h\|_{M_{q,\psi_2}} \lesssim \| b \|_\star \| h \|_{M_{p,\psi_1}}$$

dir (Guliyev and Shukurov 2013).

İspat. Lemma 4.1 den

$$\begin{aligned}
\|[b, I_\alpha]\, h\|_{M_{q,\psi_2}} &= \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ \tau>0} \psi_2(\varkappa,\tau)^{-1}\tau^{-\frac{n}{q}} \| [b, I_\alpha]\, h \|_{L_q(B(\varkappa,\tau))} \\
&\lesssim \| b \|_\star \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ \tau>0} \psi_2(\varkappa,\tau)^{-1} \int_{2\tau}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right) \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \\
&\lesssim \| b \|_\star \| h \|_{M_{p,\psi_1}} \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ \tau>0} \psi_2(\varkappa,\tau)^{-1} \int_{2\tau}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right) t^\alpha \psi_2(\varkappa,t)\frac{dt}{t} \\
&\lesssim \| b \|_\star \| h \|_{M_{p,\psi_1}} .
\end{aligned}$$

■

Adams Tipi Sonuç

Teorem 4.5 $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun ve $\psi(\varkappa, t)$

$$\sup_{\tau<t<\infty} \left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right)^p \psi(\varkappa,t) \le C\psi(\varkappa,\tau)$$

ve

$$\int_{\tau}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right) t^\alpha \psi(\varkappa,t)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \le C\tau^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \tag{4.13}$$

koşulları sağlasın, burada C $\varkappa \in \mathbb{R}^n$ ve $\tau > 0$ bağlı değildir. Bu durumda $[b, I_\alpha]$ operatörü $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ den $M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}$ ye sınırlıdır (Guliyev and Shukurov 2013).

İspat. $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ve $h \in M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ olsun. Keyfi $\varkappa_0 \in \mathbb{R}^n$ için $\varkappa_0$ merkezli τ yarıçaplı yuvar, $B = B(\varkappa_0, \tau)$ ile gösterelim. $h_1 = h_{\chi_{2B}}$ ve $h_2 = h_{\chi_{\complement(2B)}}$ olmak üzere $h = h_1 + h_2$ alalım. $\varkappa \in B$ için

$$\begin{aligned}
| [b, I_\alpha]\, h_2(\varkappa) | &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{|b(y)-b(\varkappa)|}{|\varkappa_0-y|^{n-\alpha}} \mid h_2(y) \mid dy \\
&\approx \int_{\complement(2B)} \tfrac{|b(y)-b(\varkappa)|}{|\varkappa_0-y|^{n-\alpha}} \mid h(y) \mid dy
\end{aligned}$$

elde ederiz. Spanne tipi sonuçta olduğu gibi $\forall p \in (1, \infty)$ ve $\varkappa \in B$ için

$$| [b, I_\alpha]\, h_2(\varkappa) | \lesssim \| b \|_\star \int_{2\tau}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right) t^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \| h \|_{L_p(B(\varkappa_0,t))}\, dt \tag{4.14}$$

dır. (4.13) ve (4.14) koşullarından

$$\begin{aligned} |\,[b,I_\alpha]\,h(\varkappa)\,| &\lesssim \; \| b \|_\star \, \tau^\alpha M_b h(\varkappa) + \| b \|_\star \int_\tau^\infty \left(1+\ln\tfrac{t}{\tau}\right) t^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \| h \|_{L_p(B(\varkappa,t))}\, dt \\ &\leq \; \| b \|_\star \, \tau^\alpha M_b h(\varkappa) + \| b \|_\star \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} \int_\tau^\infty \left(1+\ln\tfrac{t}{\tau}\right) t^{\alpha} \psi(\varkappa,t) \tfrac{dt}{t} \\ &\lesssim \; \| b \|_\star \, \tau^\alpha M_b h(\varkappa) + \| b \|_\star \, \tau^{-\frac{\alpha p}{q-p}} \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} \end{aligned} \tag{4.15}$$

elde ederiz. Buradan $\forall \varkappa \in B$ için

$$\tau = \left(\frac{\| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}}{M_b h(\varkappa)} \right)^{\frac{q-p}{\alpha q}}$$

seçersek

$$|\,[b,I_\alpha]\,h(\varkappa)\,| \lesssim \| b \|_\star \, (M_b h(\varkappa))\frac{p}{q} \, \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}}$$

elde ederiz. Teorem ifadesi

$$\sup_{\tau\, <\, t\, <\, \infty} \left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right)^p \psi(\varkappa,t) \leq C\psi(\varkappa,\tau)$$

koşulu ve

$$\sup_{\tau\, <\, t\, <\, \infty} \left(1+\ln\frac{t}{\tau}\right) \psi_1(\varkappa,t) \leq C\psi_2(\varkappa,\tau)$$

sonucundan elde edilen M_b maksimal operatörünün komütatörünün $M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}$ deki sınırlılığından görülür:

$$\begin{aligned} \| [b,I_\alpha]\, h \|_{M_{q,\psi^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ \tau\, >\, 0} \psi(\varkappa,\tau)^{-\frac{1}{q}} \tau^{-\frac{n}{q}} \, \| [b,I_\alpha]\, h \|_{L_q(B(\varkappa,\tau))} \\ &\lesssim \| b \|_\star \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ \tau\, >0} \psi(\varkappa,\tau)^{-\frac{1}{q}} \tau^{-\frac{n}{q}} \, \| M_b h \|_{L_q(B(\varkappa,\tau))}^{\frac{p}{q}} \\ &= \| b \|_\star \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}} \left(\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n\ \tau\, >\, 0} \psi(\varkappa,\tau)^{-\frac{1}{q}} \tau^{-\frac{n}{q}} \, \| M_b h \|_{L_q(B(\varkappa,\tau))} \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \| b \|_\star \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{1-\frac{p}{q}} \| M_b h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}}^{\frac{p}{q}} \\ &\lesssim \| b \|_\star \| h \|_{M_{p,\psi^{\frac{1}{p}}}} . \end{aligned}$$

■

5. $V_0M_{P,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ SIFIRLAYAN MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL KOMÜTATÖRLER VE RIESZ POTANSİYELİNİN KOMÜTATÖRLERİ

$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları ile çalışmadaki esas zorluklardan biri, $\lambda > 0$ olduğunda bu uzayların ayrılabilir olmamasıdır. Bu bağlamda uygun fonksiyonlarla yaklaşım problemi, uygun alt uzayların ortaya çıkmasına neden olmuştur (Zorko 1986, Vitanza 1990, 1993, Almeida and Samko 2017). Bu tezin son bölümü olan 5. bölümde $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ nin aşağıdaki alt uzaylarını ele alıyoruz:

Tanım 5.1 $V_0M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlayan Morrey uzayı tüm $h \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarından oluşur, öyle ki

$$\lim_{\tau\to 0}\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n} M_{p,\lambda}\,(h;\varkappa,\tau) = 0 \qquad (V_0)$$

dır, burada

$$M_{p,\lambda}\,(h;\varkappa,\tau) := \frac{1}{\tau^\lambda}\int\limits_{B(\varkappa,\tau)} |\,h(y)\,|^p\;dy, \qquad \varkappa\in\mathbb{R}^n\;,\;\tau>0$$

dır. Benzer şekilde $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ tüm $h \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ kümesidir öyle ki

$$\lim_{\tau\to\infty}\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n} M_{p,\lambda}\,(h;\varkappa,\tau) = 0 \qquad (V_\infty)$$

dır. Ayrıca, $V^{(*)}M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ kümesi de

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} A_{N,p}(h) := \lim_{N\to\infty}\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{B(\varkappa,1)} |\,h(y)\,|^p\,\chi_{N(y)}dy = 0 \qquad (V^*)$$

sıfırlayan özelliğine sahip tüm $h \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarından oluşur, burada

$$\chi_N := \chi_{\mathbb{R}^n}\backslash B(0,N), \quad N\in\mathbb{N}$$

dir.

Yukarıda tanımladığımız üç sıfırlayan sınıflar $h \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ nin normuna göre kapalı kümelerdir. $V_0M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlayan Morrey uzayı aşikar olmayan bir uzaydır çünkü kompakt destekli sınırlı fonksiyonlar bu uzaya aittir. $V_0M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayı, eliptik denklemlerin düzgünlük sonuçları ile ilgili olarak Vitanza 1990, 1993, Chiarenza and

Franciosi 1992'de tanıtılmıştır. $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ alt uzayları yakın zamanda Almeida and Samko 2017 da uygun fonksiyonların Morrey fonksiyonlarının yaklaşımı ile ilgili problemin çalışılmasında tanıtıldı.

$V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ nin Yuan vd. (2015)'de interpolasyon problemleri çalışmalarında bağımsız olarak ele alındığını hatırlatalım. $V_{0,\infty}^{(*)}M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ alt uzayı Morrey fonksiyonlarının bir topluluğudur öyle ki tüm $(V_0), (V_\infty)$ ve (V^*) sıfırlayan özelliklerine sahip ve Morrey normunda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nin kapanışının kesin bir tanımını sağlar (Almeida and Samko 2017, Almeida 2020).

Literatürde klasik Morrey uzaylarında harmonik analizin klasik operatörlerin davranışı üzerine birçok makale bulunmaktadır. Bunlardan çok azı genelleştirilmiş parametreler durumu da dahil olmak üzere $V_0M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ de ki operatörlerin sınırlılığına ayrılmıştır, (Ragusa 2008, Persson vd. 2012, Samko 2013a,b, Lukkassen 2015, Deringoz vd. 2015, Long 2016, Guliyev vd. 2019). $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlayan Morrey uzaylarındaki klasik operatörlerin incelenmesi sadece yakın zamanda Alabalik vd. (2019) makalesinde gerçekleştirilmiştir.

5.1 $V_0M_{p,\lambda}$ Sıfırlayan Morrey Uzaylarında Maksimal Komütatörler

Bu kesimde M_b maksimal komütatörünün farklı $V_0M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $V^{(*)}M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sıfırlayan Morrey uzayları üzerinde sınırlılığını çalışacağız ve genel olarak Almeida 2020 çalışmasını takip edilecektir.

Lemma 5.1 $1 < p < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $h \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $B(\varkappa_0, \tau)$ yuvarı için

$$\|M_b h\|_{Lp(B(\varkappa_0,\tau))} \lesssim \|b\|_* \, \tau^{\frac{n}{p}} \sup_{t>\tau}(1+\ln\frac{t}{\tau})t^{-\frac{n}{p}} \, \|h\|_{Lp(B(\varkappa_0,t))}$$

dir.

Bu lemmanın ispatını Sonuç 4.1 de verdik, bu lemma $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ nin M_b a göre değişmezliğini belirlememizi sağlar.

Teorem 5.1 $1 < p < \infty$ ve $0 \le \lambda < n$ olsun. Eğer $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda M_b operatör $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den kendi içine sınırlıdır.

İspat. M_b için Morrey norm eşitsizlikleri zaten bilindiğinden geriye $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ın M_b ye göre değişmez olduğunu göstermek kalır:

$$\lim_{\tau\to 0}\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n} M_{p,\lambda}(h;\varkappa,\tau)=0 \Longrightarrow \lim_{\tau\to\infty}\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n} M_{p,\lambda}(M_b;\varkappa,\tau)=0.$$

Eğer $h\in V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ise herhangi bir $\varepsilon>0$ için $\tau=\tau(\varepsilon)>0$ vardır öyle ki her bir $t\geqslant\tau$ için

$$\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n} M_{p,\lambda}(h;\varkappa,t)<\varepsilon$$

olur. Modüler formdaki (5.1) eşitsizliğini kullanarak ve $s\rightarrowtail\frac{(1+\ln s)^p}{s^{n-\lambda}}$ fonksiyonunun $(1,\infty)$ daki sınırlılığını dikkate alarak herhangi bir $\varkappa\in\mathbb{R}^n$ ve her $\tau\geqslant R$ için ($\varkappa,\tau$ den bağımsız sabitlerle)

$$M_{p,\lambda}(M_bh;\varkappa,\tau)\lesssim\|b\|_*^p\sup_{t>\tau}(1+\ln\frac{t}{\tau})^p(\frac{t}{\tau})^{\lambda-n}M_{p,\lambda}(h;\varkappa,t)\lesssim\varepsilon\,\|b\|_{BMO}^p$$

elde ederiz. Bu nedenle

$$\lim_{\tau\longrightarrow\infty}\sup_{\varkappa\in\mathbb{R}^n} M_{p,\lambda}(M_bh;\varkappa,\tau)=0$$

ve dolayısıyla $M_bh\in V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ dir. ■

Buradan maksimal operatörün komütatörü için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.1 $1<p<\infty$ ve $0\leq\lambda<n$ olsun. Eğer $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ negatif olmayan ise bu durumda $[b,M]$, $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır.

Aşağıda görebileceğimiz gibi (V^*) nın korunumunun ispatı çok daha zordur.

Teorem 5.2 $1<p<\infty$ ve $0\leq\lambda<n$ olsun. Eğer $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda M_b operatörü $V^*M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ dan kendi içine sınırlıdır;

İspat. M_b nin $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki sınırlılığını hatırlayarak şimdi şunu göstermeliyiz;

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}A_{N,p}(h)=0\Longrightarrow\lim_{N\longrightarrow\infty}A_{N,p}(M_bh)=0.$$

Adım 1: $\varkappa\in\mathbb{R}^n$ ve $N\in\mathbb{N}$ için h yi $h=h_1+h_2$ öyle ki $h_1=h_{\chi_{\Omega_\varkappa,N/2}}$ ve $h_2=h_{\chi_{\mathbb{R}^n/\Omega_\varkappa,N/2}}$

$$\Omega_{\varkappa,M}:=B(\varkappa,2)\cap(\mathbb{R}^n\backslash B(0,M)),\quad M>0$$

gösterimini kullanarak iki parçaya ayıralım. M_b altlineer olduğundan şu sonuca varırız:

$$A_{N,p}(M_b h) \lesssim A_{N,p}(M_b(h_1)) + A_{N,p}(M_b(h_2)) \tag{5.1}$$

Daha sonra (5.2) nin sağ tarafındaki her iki niceliğin de $N \longrightarrow \infty$ iken sıfıra gittiğini göstereceğiz M_b nin $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki sınırlılığından:

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\varkappa,1)} (M_b(h_1)(y))^p \chi_N(y)dy &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} (M_b(h_1)(y))^p dy \\ &\lesssim \int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_1(y))|^p \, dy \\ &= \int\limits_{\Omega_{\varkappa,N/2}} |h(y))|^p \, dy\end{aligned}$$

elde edilir, burada sabitler $\varkappa, N$ ve h den bağımsızdır. $h \in V^{(*)}L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan yukarıdaki sağ taraf $N \longrightarrow \infty$ iken $\varkappa$ üzerinde düzgün olarak sıfıra yaklaşır (hatırlatalım ki (V^*) özelliği alınan $\varkappa$ merkezli yuvarların yarıçaplarının özel değerine bağlı değildir. Dolayısıyla $\lim_{N\longrightarrow\infty} A_{N,p}(M_b(h_1)) = 0$ dır.

Adım 2: Şimdi (5.2) deki toplamın ikinci terimiyle ilgileneceğiz:

$$\int\limits_{B(\varkappa,1)} (M_b(h_2)(y))^p \chi_N(y)dy \lesssim I(\varkappa, N, t_0) + II(\varkappa, N, t_0)$$

elde ederiz öyle ki

$$I(\varkappa, N, t_0) := \int\limits_{B(\varkappa,\infty)} \chi_N(y) \sup_{0<t<t_0} \left[\frac{1}{|B(y,t)|} \int\limits_{B(y,t)} |b(y) - b(z)| \, |h(z)| \, \chi_{\mathbb{R}^n} \backslash \Omega_{\varkappa,N\backslash 2}(z)dz\right]^p dy$$

ve

$$II(\varkappa, N, t_0) := \int\limits_{B(\varkappa,\infty)} \chi N(y) \sup_{t\geq t_0} \left[\frac{1}{|B(y,t)|} \int\limits_{B(y,t)} |b(y) - b(z)| \, |h(z)| \, \chi_{\mathbb{R}^n} \backslash \Omega_{\varkappa,N\backslash 2}(z)dz\right]^p dy$$

dir, burada $t_0 > 0$ belirili bir sabit sayıdır.

Adım 3: $II(\varkappa, N, t_0)$ için kestirim bulacağız. $\varepsilon > 0$ keyfi olsun

$$II(\varkappa, N, t_0) \leq II_1(\varkappa, N, t_0) + II_2(\varkappa, N, t_0)$$

dır, öyle ki

$$II_1(\varkappa, N, t_0) := \int\limits_{B(\varkappa,1)} \chi_N(y) \sup_{t \geq t_0} \left[\frac{1}{|B(y,t)|} \int\limits_{B(y,t)} \left| b(y) - b_{B(y,t)} \right| |h(z)| \, \chi_{\mathbb{R}^n} \backslash \Omega_{\varkappa,N\backslash 2}(z) dz \right]^p dy$$

ve

$$II_2(\varkappa, N, t_0) := \int\limits_{B(\varkappa,\infty)} \chi_N(y) \sup_{t \geq t_0} \left[\frac{1}{|B(y,t)|} \int\limits_{B(y,t)} \left| b(z) - b_{B(y,t)} \right| |h(z)| \, \chi_{\mathbb{R}^n} \backslash \Omega_{\varkappa,N\backslash 2}(z) dz \right]^p dy$$

dır. Hölder eşitsizliği ve (2.3) karakterizasyonundan her $t \geq t_0$ için $t^{\lambda-n} < \varepsilon$ olacak şekilde yeterince büyük $t_0 > 1$ seçtikten sonra

$$II_2(\varkappa, N, t_0) \leq \|b\|_*^p \int\limits_{B(\varkappa,1)} \chi N(y) \sup_{t \geq t_0} \frac{1}{|B(y,t)|} \int\limits_{B(y,t)} |h(z)|^p \, dz \lesssim \|b\|_*^p \, \|h\|_{p,\lambda}^p \, \varepsilon \tag{5.2}$$

elde ederiz ($\lambda < n$ olduğunu hatırlayalım). Şimdi $II_1(\varkappa, N, t_0)$ niceliği ile ilgileneceğiz. $II_1(\varkappa, N, t_0)$ daki integrali

$$\left| b(y) - b_{B(y,t)} \right| \leq \left| b(y) - b_{B(\varkappa,1)} \right| + \left| b_{B(\varkappa,1)} - b_{B(y,2)} \right| + \left| b_{B(y,2)} - b_{B(y,t)} \right|$$

biçiminde parçalayarak yukarıda olduğu gibi

$$II_1(\varkappa, N, t_0) \lesssim \|b\|_*^p \, \|h\|_{p,\lambda}^p \, \varepsilon + \|h\|_{p,\lambda}^p \int\limits_{B(\varkappa,1)} \sup_{t \geq t_0} \left| b_{B(y,2)} - b_{B(y,t)} \right|^p t^{\lambda-n} dy$$

elde ederiz. Her $t \geq t_0 \geq 2$ için $B(y,2) \subset B(y,t)$ olduğundan son integralde eğer ek olarak her $t \geq t_0$ için $\log^p(1 + \frac{t}{2}) t^{\lambda-n} \leq \varepsilon$ olacak şekilde yeteri kadar büyük t_0 alırsak

$$\left| b_{B(y,2)} - b_{B(y,t)} \right|^p t^{\lambda-n} \lesssim \log^p(1 + \frac{t}{2}) \, \|b\|_*^p \, t^{\lambda-n} \leq \|b\|_*^p \, \varepsilon$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$II_1(\varkappa, N, t_0) \lesssim \|b\|_*^p \, \|h\|_{p,\lambda}^p \, \varepsilon$$

elde edilir. Bunu (5.3) ile birleştirerek görürüz ki t_0 ın bir uygun seçimi için $\varkappa \in \mathbb{R}^n$(ve N) üzerinde düzgün olarak

$$II(\varkappa, N, t_0) \lesssim \|b\|_*^p \, \|h\|_{p,\lambda}^p \, \varepsilon$$

dır.

Adım 4: Bu adımda $I(\varkappa, N, t_0)$ ile ilgileniyoruz. $z \notin \Omega_{\varkappa,N/2}$(ve $z \in B(y,t)$) olduğunda dikkate alınması gereken iki farklı durum vardır. Eğer $z \in B(0, N/2)$ ise bu durumda $t > |z-y| \geq |y| - |z| > N/2$ olur. Böylece $N \geq 2t_0$ için $t \in (0, t_0)$ üzerinde supremuma hiçbir katkısı yoktur. Eğer $z \notin B(\varkappa, 2)$ ise bu durumda $t > |z-y| \geq |z-\varkappa| - |y-\varkappa| \geq 1$ olur. Buradan supremum her $t \in (1, t_0)$ üzerinden alındığından $I(\varkappa, N, t_0)$ ele almak kalır.

O halde

$$
\begin{aligned}
I_1(\varkappa, N, t_0) &\lesssim \int\limits_{B(\varkappa,1)} \chi N(y) \left[\int\limits_{B(y,t_0)} |b(y) - b(z)|\, |h(z)|\, dz \right]^p dy \\
&= : I_1(\varkappa, N, t_0) + I_2(\varkappa, N, t_0) + I_3(\varkappa, N, t_0)
\end{aligned}
$$

dir, burada

$$
\begin{aligned}
I_1(\varkappa, N, t_0) &:= \int\limits_{B(\varkappa,1)} \chi N(y) \left[\int\limits_{B(y,t_0)} \left|b(y) - b_{B(\varkappa,1)}\right| |h(z)|\, dz \right]^p dy \\
I_2(\varkappa, N, t_0) &:= \int\limits_{B(\varkappa,1)} \chi N(y) \left[\int\limits_{B(y,t_0)} \left|b_{B(\varkappa,1)} - b_{B(y,t_0)}\right| |h(z)|\, dz \right]^p dy \\
I_3(\varkappa, N, t_0) &:= \int\limits_{B(\varkappa,1)} \chi N(y) \left[\int\limits_{B(y,t_0)} \left|b_{B(y,t_0)} - b(z)\right| |h(z)|\, dz \right]^p dy
\end{aligned}
$$

ile verilir. $I_3(\varkappa, N, t_0)$ da $s \in (1, p)$ üssüne Hölder eşitsizliğini uygularız ve

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B(y,t_0)} \left|b_{B(y,t_0)} - b(z)\right| |h(z)|\, dz &\leq \left\| b_{B(y,t_0)} - b(.) \right\|_{L^{s'}(B(y,t_0))} \|h\|_{L^s(B(y,t_0))} \\
&\lesssim \|b\|_* \, t_0^{n/s'} \|h\|_{L^s(B(y,t_0))} \\
&\approx \|b\|_* \|h\|_{L^s(B(y,t_0))}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bir değişken değişimi ve $\frac{p}{s}$ üssünün Minkowski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} I_3(\varkappa, N, t_0) &\lesssim \|b\|_*^p \int\limits_{B(\varkappa,1)} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi N(y) \chi B(0,t_0)(z) \left| h(y-z) \right|^s dz \right]^{\frac{p}{s}} dy \\ &\leq \|b\|_*^p \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{B(\varkappa,1)} \chi N(y) \chi B(0,t_0)(z) \left| h(y-z) \right|^p dy \right]^{\frac{s}{p}} dz \right\}^{\frac{p}{s}} \\ &\leq \|b\|_*^p \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi B(0,t_0)(z) \left[\sup_{v \in \mathbb{R}^n} \int\limits_{B(v,1)} \chi N - |z|\,(u) \left| h(u) \right|^p du \right]^{\frac{s}{p}} dz \right\}^{\frac{p}{s}} \end{aligned}$$

elde edilir öyle ki burada eğer $a \leq 0$ ise

$$\chi_a = 1 \text{ ve eğer } a > 0 \text{ ise } \chi_a = \chi_{\mathbb{R} \setminus B(0,a)} \tag{5.3}$$

dır. Dolayısıyla $h \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olduğunuda dikkate alarak Lebesgue yakınsaklık teoreminden $N \longrightarrow \infty$ iken ($\varkappa \in \mathbb{R}^n$ üzerinde düzgün olarak) $I_3(\varkappa, N, t_0) \longrightarrow 0$ elde ederiz.

$N \longrightarrow \infty$ iken ($\varkappa \in \mathbb{R}^n$ üzerinde düzgün olarak) $I_2(\varkappa, N, t_0) \longrightarrow 0$ olduğunu göstermek için öncelikle belirtelim ki $y \in B(\varkappa, 1)$ ve $t_0 \geq 2$ için $B(\varkappa, 1) \subset B(y, t_0)$ olduğundan $\left| b_{B(\varkappa,1)} - b_{B(y,t_0)} \right| \leq t_0^n \|b\|_{BMO}$ dır, sonra değişkenleri değiştirip Minkowski eşitsizliğini (şimdi p üssü ile) $I_3(\varkappa, N, t_0)$ daki gibi uygularız.

Son olarak $I_1(\varkappa, N, t_0)$ ile ilgileniyoruz. Bu durumda $|y| > N$ olmak üzere her $z \in B(y, t_0)$ için $\chi_N(y) \leq \chi_{N-t_0}(z)$ dir. Üstelik $y \in B(\varkappa, 1)$ için $B(y, t_0) \subset B(\varkappa, 2t_0)$ dır. Dolayısıyla Hölder eşitsizliğini de uygulayarak

$$\begin{aligned} I_1(\varkappa, N, t_0) &\leq \int\limits_{B(\varkappa,1)} \left| b(y) - b_{B(\varkappa,1)} \right|^p \left[\int\limits_{B(y,t_0)} \chi N - t_0(z) \left| h(z) \right| dz \right]^p dy \\ &\leq \int\limits_{B(\varkappa,1)} \left\| b(.) - b_{B(\varkappa,1)} \right\|_{L^p(B(\varkappa,1))}^p \int\limits_{B(\varkappa,2t_0)} \chi N - t_0(z) \left| h(z) \right|^p dz \\ &\approx \|b\|_*^p \int\limits_{B(\varkappa,2t_0)} \chi N - t_0(z) \left| h(z) \right|^p dz \end{aligned}$$

elde ederiz. (V^*) sıfırlayan özelliği belirlediğimiz $\varkappa$ merkezli yuvarın yarıçapının ölçüsüne bağlı olmadığından

$$I_1(\varkappa, N, t_0) \lesssim \|b\|_*^p A_{N-t_0, p(h)}$$

olur (t_0 ın sabit olduğunu hatırlayın), buradan şunu elde ederiz: $N \longrightarrow \infty$ iken ($\varkappa \in \mathbb{R}^n$ üzerinde düzgün olarak) $I_1(\varkappa, N, t_0) \longrightarrow 0$ dır. 2-4 adımlarından elde edilen tüm tahminleri birleştirdiğimizde $N \longrightarrow \infty$ olarak $A_{N,p}(M_b(h_2)) \to 0$ olduğunu görürüz. Şimdi bunu Adım 1 deki sonuçla birleştirerek (5.2) ile görürüz ki $N \longrightarrow \infty$ iken $A_{N,p}(M_b(h_2)) \to 0$ dır. İspat tamamlanmıştır. ■

Buradan aşağıdaki sonuca elde ederiz:

Sonuç 5.2 $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ olsun. Eğer $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ negatif olmayan ise bu durumda $[b, M]$, $V^*M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır.

5.2 $V_0M_{p,\lambda}$ Sıfırlayan Morrey Uzaylarında Kesirli Maksimal Komütatörler ve Riesz Potansiyelinin Komütatörleri

Aşağıdaki teoremi Sonuç 4.2 de ispatladık.

Teorem 5.3 $0 < \alpha < n$, $0 \leq \lambda < n$, $1 < p < (n-\lambda)/\alpha$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{(n-\lambda)}$ olsun. O halde $M_{b,\alpha}$ $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

Lemma 5.2 α, λ, p, q yukarıdaki teoremdeki gibi olsun.Herhangi bir $h \in L^{p.\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $\tau > 0$ ve $\varkappa \in \mathbb{R}^n$ için

$$|M_{b,\alpha}h(\varkappa)| \lesssim \|b\|_{BMO} \left(M_b h(\varkappa)\right)^{\frac{p}{q}} \|h\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \tag{5.4}$$

dır.

Aşağıdaki teorem $M_{b,\alpha}$ komütatörünün $(V_0), (V_\infty)$ ve (V^*) sıfırlayan özelliklerinin tümünü koruduğunu göstermektedir.

Teorem 5.4 $0 < \alpha < n$, $0 \leq \lambda < n$, $1 < p < (n-\lambda)/\alpha$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{(n-\lambda)}$ olsun. Eğer $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $M_{b,\alpha}$ komütatörü $V_0M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $V_0M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye , $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $V_\infty M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye ve $V^*M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $V^*M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

İspat. Norm eşitsizlikleri Teorem 5.3 den açıkça anlaşılmaktadır. Sıfırlayan özelliklerinin korunduğunu göstermek için (5.5) özelliğini kullanacağız.O zaman $\tau > 0$ ve $\varkappa \in \mathbb{R}^n$ için şunu elde ederiz:

$$M_{q,\lambda}(M_{b,\alpha}h; \varkappa, \tau) \lesssim \|b\|_*^q \|h\|_{p,\lambda}^{q-p} M_{p,\lambda}(M_b h; \varkappa, \tau).$$

Buradan eğer $h \in V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ise Teorem 5.1 den dolayı $M_b h \in V_\infty M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olur. Sonuç olarak $M_{b,\alpha} h \in V_\infty M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olur. $V_0 M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde karşılık gelen sınırlılık, $M_b h$ nin (V_0) ı koruduğuna dikkat edilerek benzer argümanlar kullanılarak elde edilebilir, (Deringoz 2015, Teorem 5.7, Corollary 58).(V^*) sıfırlayan özelliği ile ilgili olarak (5.5) den dolayı

$$A_{N,q}(M_b^\alpha h) \lesssim \|b\|_*^q \|h\|_{p,\lambda}^{q-p} A_{N,q}(M_b h)$$

elde ederiz, buradaki sabit h ve $N \in \mathbb{N}$ den bağımsızdır. Eğer $h \in V^{(*)} M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda Teorem 5.2 den dolayı $M_b h \in V^{(*)} M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olur. Sonuç olarak $M_{b,\alpha} h \in V^{(*)} M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olur. ■

Şimdi de Riesz potansiyelinin komütatörlerinin sıfırlayan Morrey uzayları üzerindeki etkisini tartışacağız. [Guliyev and Shukurov 2013, s.193-194] de gösterildiği gibi, Morrey fonksiyonlarının Riesz potansiyellerinin komütatörü (5.5) deki kesirli maksimal komütatör gibi kesirli maksimal komütatör tarafından kontrol edilebilir:

$$|[b, I_\alpha] h(\varkappa)| \lesssim \|b\|_* (M_b h(\varkappa))^{\frac{p}{q}} \|h\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}}, \tag{5.5}$$

buradaki sabit $h \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\tau > 0$ ve $\varkappa \in \mathbb{R}^n$ den bağımsızdır. Buradan $M_{b,\alpha}$ operatörünün durumunda olduğu gibi aşağıdaki ifadeyi formüle edebiliriz :

Teorem 5.5 $0 < \alpha < n, 0 \leq \lambda < n, 1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olsun. Eğer $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $[b, I_\alpha]$ komütatörü $V_0 M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $V_0 M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye $V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $V_\infty M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye ve $V^* M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $V^* M_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

5.3 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nin Kapanışı Üzerinde Komütatörler

$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ nin $0 \leq \lambda < n$ olduğunda ayrılabilir olmadığı bilinmektedir (açık bir ispat Rosenthal 2015 de bulunabilir.) $M_{o,p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nin $\|.\|_{p,\lambda}$ normundaki kapanışını gösterelim. Almeida and Samko 2017 de böyle bir kapanışının üç sıfırlayan alt uzayın kesişimi ile açıkça tanımlanabileceği gösterilmiştir:

$$M_{o,p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = V_{0,\infty}^{(*)} M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := V_0 M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap V^* M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

(ayrıca, Yuan vd. 2015). Bu kapanış harmonik analizde Morrey uzayları üzerinde önemli bir rol oynar çünkü $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(M_{o,p,\lambda}(\mathbb{R}^n))'$ içinde yoğundur ve üstelik onun duali Morrey uzayları için bir ön uzay sağlar :

$$(M_{o,p,\lambda}(\mathbb{R}^n))'' = (M_{o,p,\lambda}(\mathbb{R}^n)')' = M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

Ayrıca

$$V_{0,\infty}^{(*)} M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq V_0 M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap V_\infty M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq V_0 M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

tam gömmelerin de sağlandığını not edelim. Önceki sonuçları ve yine sıfırlayan uzaylar üzerinde bilinen sınırlılık sonuçlarını kullanarak $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ un kapanışı üzerinde maksimal komütatörlerin kapanış üzerindeki etkisine ilişkin aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 5.3 $1 < p < \infty$ ve $0 \le \lambda < n$ olsun. Eğer $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda M_b maksimal komütatörü $M_{o,p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den kendi içine sınırlıdır.

Sonuç 5.4 $1 < p < \infty$, $0 \le \lambda < n$, $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olsun. Eğer $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durmda $M_{b,\alpha}$ operatörü $M_{o,p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $M_{o,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

KAYNAKLAR

Adams, D.R. 2015. Morrey Spaces in Lecture Notes in Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhauser.

Adams, D.R. 1975. A Note on Riesz Potentials. Duke. Math. J., 42; 765 - 778.

Adams, D. R. and Xiao J. 2012. Morrey Spaces in Harmonic Analysis. Ark. Mat., 50; 201 - 230.

Adams, D. R. and Xiao J. 2012. Regularity of Morrey Commutators. Trans. Amer. Math. Soc., 364; 4801 - 4818.

Alabalik, A., Almeida, A. and Samko, S. 2020. On the Invariance of Certain Vanishing Subspaces of Morrey Spaces with Respect to Some Classical Operators. Banach J. Math. Anal., 14(3); 987–1000.

Almeida, A. and Samko, S. 2017. Approximation in Morrey Spaces. J. Funct. Anal., 272; 2392 - 2411.

Almeida, Alexandre, A. 2020. Maximal commutators and commutators of potential operators in new vanishing Morrey spaces. Nonlinear Anal., 192; 111684, 12 pp.

Akbulut, A., Guliyev, V.S. and Mustafayev, R. 2011. On the Boundedness of the Maximal Operator and Singular Integral Operators in Generalized Morrey Spaces, Math. Bohem.,137(1); 27–43.

Burenkov, V.I. and Guliyev, H.V. 2004. Necessary and Sufficient Conditions for Boundedness of the Maximal Operator in the Local Morrey-Type Spaces, Studia Mathematica, 163(2); 157–176.

Burenkov, V.I. Guliyev, H.V. and Guliyev, V.S. 2006. Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Fractional Maximal Operator in the Local Morrey-Type Spaces, Dokl. Akad. Nauk, 74(1); 540–544.

Burenkov,V.I., Guliyev, H.V. and Guliyev,V.S., 2007. Necessary and Sufficient Conditions for Boundedness of the Fractional Maximal Operators in the Local Morrey-Type Spaces, J. Comput. Appl. Math., 208(1); 280–301.

Burenkov, V., Gogatishvili, A., Guliyev, V.S. and Mustafayev, R. 2010. Boundedness of the Fractional Maximal Operator in Local Morrey-Type Spaces, Complex Var. Elliptic Equ., 55(8-10); 739–758.

Burenkov, V A., Gogatishvili, Guliyev, V.S. and Mustafayev, R. 2011. Boundedness of the Frac Tional Maximal Operator in Local Morrey-Type Spaces, Potential Anal., 35(1); 67–87.

Chanillo, S. 1982. A Note on Commutators. Indiana Univ. Math. J., 31; 7 - 16.

Chiarenza, F. and Franciosi, M. 1992. A Generalization of a Theorem by C. Miranda. Ann. Mat. Pura Appl., IV 161; 285 - 297.

Coifman, R., Lions, P.L., Meyer, Y. and Semmes, S. 1993. Compensated Compactness ans Hardy Spaces. J. Math. Pures Appl., 72(9); 247–286.

Coifman, R. Rochberg, R. and Weiss, G. 1976. Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables. Ann. of Math., 103; 611–635.

Deringoz, F., Guliyev, V.S. and Samko, S. 2015. Boundedness of the Maximal Operator and its Commutators on Vanishing Generalized Orlicz-Morrey spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 40; 535–549.

Di Fazio, G. and Ragusa, A. 1991. Commutators and Morrey Spaces, Boll. Unione Mat. Ital., 7 (5-A); 323–332.

Ding, Y., Yang, D. and Zhou, Z. 1998. Boundedness of Sublinear Operators and Commutators on $L^{p,w}(\mathbb{R}^n)$, Yokohama Math. J., 46; 15–27.

Garcia-Cuerva, J., Harboure, E., Segovia C. and Torrea, J.L. 1991. Weighted Norm Inequalities for Commutators of Strongly Singular Integrals. Indiana Math. J., 40; 1397–1420.

Giaquinta, M. 1983. Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Non-linear Elliptic Systems. Princeton Univ. Press, Princeton.

Grafakos, L. 2009. Modern Fourier Analysis. Second ed., Springer, New York, NY.

Guliyev,V.S. 1994. Integral Operators on Function Spaces on the Homogeneous Groups and on Domains in $\mathbb{R}^n$. Doctoral Degree Dissertation, Mat. Inst. Steklov, Moscow, 329 pp. (in Russian).

Guliyev, V.S.1999. Function Spaces, Integral Operators and Two Weighted Inequalities on Homogeneous Groups. Some Applications, Casioglu, Baku, 332 pp. (in Russian).

Guliyev,V.S. 2009. Boundedness of the Maximal, Potential and Singular Operators in the Generalized Morrey Spaces, J. Inequal. Appl., Art. ID 503948, 20 pp.

Guliyev, V.S. Hasanov, J. and Samko, S. 2010. Boundedness of the Maximal, Potential and Singular Operators in the Generalized Variable Exponent Morrey Spaces, Math. Scand., 197(2); 285–304.

Guliyev, V.S., Aliyev, S.S., Karaman, T. and Shukurov, P.S. 2011. Boundedness of Sublinear Operators and Commutators on Generalized Morrey Space. Integral Equations Operator Theory., 71(3); 327–355.

Guliyev, V.S., Hasanov, J. and Badalov, X. 2019. Commutators of Riesz Potential in the Vanishing Generalized Weighted Morrey Spaces with Variable Exponent. Math. Inequal. Appl., 22; 331–351.

Guliyev, V.S. and Shukurov, P.S. 2013. On the Boundedness of the Fractional Maximal Operator, Riesz Potential and Their Commutators in Generalized Morrey

Spaces, in: Almeida, A., Castro, L., Speck F.O., (Eds.). Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory, in: Operator Theory, Advances and Applications, vol. 229, Birkhauser, Basel. pp. 175–199.

Janson, S. 1978. Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. Ark. Mat., 16; 263–270.

Kato, T. 2003. Strong Solutions of the Navier–Stokes Equation in Morrey Spaces. Bol. Soc. Bras. Mat., 22; 127–155.

Komori, Y. and Mizuhara, T. 2003. Notes on Commutators and Morrey Spaces. Hokkaido Math. J., 32; 345–353.

Lemarie-Rieusset, P.G. 2016. The Navier–Stokes Problem in the 21st Century. CRC Press, Boca Raton, FL.

Li, C. 1993. Compensated Compactness, Commutators and Hardy Spaces, in: G. Martin, et al. (Eds.), Proceedings of the Miniconference on Analysis and Applications, Held at the University of Queensland, Brisbane, Australia, September 20-23, 1993, in: Canberra. Proc. Cent. Math. Appl. Aust. Natl. Univ., vol. 33, 1994, pp. 121–132.

Long, P.H. 2016. Han, Characterizations of Some Operators on the Vanishing Generalized Morrey Spaces With Variable Exponent, J. Math. Anal. Appl., 437; 419–430.

Lukkassen, D., Persson, L.-E. and Samko N. 2015. Hardy type Operators in Local Vanishing Morrey Spaces on Fractal Sets, Fract. Calc. Appl. Anal., 18; 1252–1276.

Lu, S., Ding, Y. and Yan, D. 2006. Singular Integrals and Related Topics, World Scientific Pub lishing, Singapore.

Morrey, C.B. 1938. On the Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations, Trans. Amer. Math. Soc., 43; 126–166.

Mizuhara, T. 1991. Boundedness of Some Classical Operators on Generalized Morrey Spaces, Harmonic Analysis (S. Igari, editor), ICM 90 Satellite Proceedings, 183–189, Springer-Verlag, Tokyo.

Nakai, E. 1994. Hardy–Littlewood Maximal Operator, Singular Integral Operators and Riesz Potentials on Generalized Morrey Spaces, Math. Nachr., 166; 95–103.

Peetre, J. 1969. On the theory of $M_{p,\lambda}$ J. Funct. Anal., 4; 71–87.

Persson, L.E., Ragusa, M.A., Samko N. and Wall P. 2012. Commutators of Hardy Operators in Vanishing Morrey Spaces, AIP Conf. Proc. 1493; 859–866.

Pick, L., Kufner, A., John, O. and Fucik, S. 2013. Function Spaces, Vol. 1, Second ed., De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 14, Berlin.

Ragusa, M.A. 2008. Commutators of Fractional Integral Operators on Vanishing Morrey Spaces, J. Global Optim., 40; 361–368.

Rafeiro, H.N. and Samko, S. 2013. Morrey–Campanato Spaces: an Overview, in: Y.i. Karlovich, L. Rodino, B. Silbermann, I.M. Spitkovsky (Eds.), Operator Theory, Pseudo-Differential Equations and Mathematical Physics, in: Advances and Applications, vol. 228, Springer, Basel, pp. 293–323.

Rochberg, R. 2007. Uses of Commutator Theorems in Analysis. Contemp. Math., 445; 277–295.

Rosenthal, M. and Triebel, H. 2014. Calder´on-Zygmund Operators in Morrey Spaces. Rev. Mat. Complut., 27; 1–11.

Rosenthal, M. Triebel, H. 2015 Morrey Spaces, their Duals and Preduals. Rev. Mat. Complut., 28; 1–30.

Samko, N. 2013. Maximal, Potential and Singular Operators in Vanishing Generalized Morrey spaces. J. Global Optim., 57; 1385–1399.

Samko, N. 2013. Weighted Hardy Operators in the Local Generalized Vanishing Morrey Spaces. Positivity, 17; 683–706.

Segovia, C. 1989. J.L. Torrea, Vector-Valued Commutators and Applications. Indiana Math. J., 38; 959–971.

Shirai, S. 2006. Necessary and Sufficient Conditions for Boundedness of Commutators of Fractional Integral Operators on Classical Morrey Spaces. Hokkaido Math. J., 35(3); 683–696.

Softova, L.G. 2011. Morrey-Type Regularity of Solution to Parabolic Problems with Discontinuous data. Manuscr. Math., 136; 365–382.

Stein, E.M. 1970. Singular Integrals and Differentiability of Functions, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Stein, E.M. 1993. Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton NJ.

Taylor, M.E. 2000. Tools for PDE: Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators and Layer Potentials, in: Math. Surveys and Monogr., vol. 81, AMS, Providence.

Triebel, H. 2013. Local Function Spaces, Heat and Navier–Stokes Equations, in: EMS Tracts in Mathematics, vol. 20.

Triebel, H. 2015. Hybrid Function Spaces, Heat and Navier–Stokes Equations, in: EMS Tracts in Mathematics, vol. 24.

Vitanza, C. 1990. Functions with Vanishing Morrey Norm and Elliptic Partial Differential Equations, in: Proceedings of Methods of Real Analysis and Partial Differential Equations, Springer, Capri, pp. 147–150.

Vitanza, C. 1993. Regularity Results for a Class of Elliptic Equations with Coefficients in Morrey Spaces, Ric. Mat., 42(2); 265–281.

Yuan, W. Sickel,W. and Yang, D. 2015. Calder´on's First and Second Complex Interpolations of Closed Subspaces of Morrey spaces, Sci. China Math., 58; 1835–1908.

Zorko, C. 1986. Morrey Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 98; 586-592.