ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Zeynep ÇAKIR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2016

TEZ ONAYI

Zeynep ÇAKIR tarafından hazırlanan " **Grand Lebesgue Uzaylarında Maksimal, Potansiyel ve Singüler İntegral Operatörlerin Sınırlılığı"** adlı tez çalışması 21/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Canay AYKOL YÜCE
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

21/06/2016

Zeynep ÇAKIR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Zeynep ÇAKIR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde maksimal operatör, Calderón-Zygmund operatörü ve Riesz potansiyeli tanımlanmış ve bu operatörlerin Lebesgue uzayındaki sınırlılıklarının ispatları verilmiştir.

Dördüncü bölümde grand Lebesgue uzayları tanıtılmış ve bu uzayların temel özellikleri incelenmiştir. Bu bölümün birinci kesiminde Banach fonksiyon uzayları tanıtılarak bazı temel özellikleri verilmiştir. İkinci kesimde grand Lebesgue uzaylarının tanımı verilmiş ve bu uzayların Banach fonksiyon uzayları olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu uzayların çeşitli topolojik özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümün son kesiminde grand Lebesgue uzaylarının ilişik uzayları (small Lebesgue uzayları) tanımlanmış ve bu uzayların bazı özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde maksimal operatör, Calderón-Zygmund operatörü ve Riesz potansiyelinin grand Lebesgue uzaylarında sınırlılığı ispatlanmıştır.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Haziran 2016, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler: Maksimal operatör, Calderón-Zygmund singüler integral operatörler, Riesz potansiyeli, grand Lebesgue uzayları.

ABSTRACT

Master Thesis

THE BOUNDEDNESS OF MAXIMAL, POTENTIAL AND SINGULAR INTEGRAL OPERATORS IN GRAND LEBESGUE SPACES

Zeynep ÇAKIR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and theorems are given.

In the third chapter, maximal operator, Calderón-Zygmund operator and Riesz potential are defined and the proofs of the boundedness of these operators in Lebesgue spaces are given.

In the fourth chapter, grand Lebesgue spaces are defined and basic properties of these spaces are investigeted. In the first section of this chapter, Banach function spaces are defined and basic properties of these spaces are given. In the second section, definition of the grand Lebesgue spaces is given and it is shown that these spaces are Banach function spaces. Then various topological properties of the grand Lebesgue spaces are investigeted. At the end of the fourth chapter, associate spaces of the grand Lebesgue spaces (small Lebesgue spaces) are defined and some basic properties of small Lebesgue spaces are given.

In the fifth chapter, the boundedness of maximal operator, Calderón-Zygmund operator and Riesz potential in the grand Lebesgue spaces is proved.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the obtained results.

June 2016, 60 pages

Key Words: Maximal operator, Calderón-Zygmund singular integral operators, Riesz potential, grand Lebesgue spaces.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan, engin fikirleriyle gelişmeme katkıda bulunan sayın hocam Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışmalarım sırasında destek ve anlayışını esirgemeyen sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Zeynep ÇAKIR
Ankara, Haziran 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$B(x,r)$	$\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı yuvar
$d(E)$	E nin çapı
X'	X uzayının ilişik uzayı
C_0^∞	Kompakt destekli ve sonsuz kez diferensiyellenebilen fonksiyonların uzayı
L^p	Lebesgue uzayı
$L^{p)}$	Grand Lebesgue uzayı
$L^{p),\varphi(.)}$	Genelleştirilmiş grand Lebesgue uzayı
$L^{(p'}$	Yardımcı Banach uzayı
$L^{p)'}$	Small Lebesgue uzayı
M	Maksimal operatör
I_α	Riesz potansiyeli
T	Calderón-Zygmund operatörü
f^*	f nin azalan yeniden düzenlemesi

1. GİRİŞ

Fonksiyon uzaylarının modern teorisi S.L. Sobolev, A. Zygmund, S.M. Nikolskii, A. Calderon, V. Maz'ya, L.D. Kudryavtsev, N. Aronszayn, E.M. Stein, O.V. Besov, P.I. Lizorkin, H. Triebel, V.I. Burenkov ve diğerleri gibi dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmiştir. Bu teori reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna ve diğer matematiksel disiplinler içinde kısmi diferensiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi bir çok alanlara başarıyla uygulanmıştır. Ayrıca ortaya çıkan yeni problemlerin çözülebilmesi ve fonksiyon uzaylarındaki bazı boşlukların giderilebilmesi için yeni tip fonksiyon uzaylarının tanımlanması ve araştırılması gerekmektedir. İntegral ve diferensiyel operatörlerin farklı norm eşitsizlikleri fonksiyon uzaylarının teorisinde ve onların uygulamalarında esaslı öneme sahiptir. Özellikle diferensiyellenebilir fonksiyonların klasik uzayları teorisi (Sobolev uzayları, Besov uzayları, ağırlıklı Besov tipi uzaylar, vb.) bu eşitsizlikler üzerine esaslı olarak inşa edilirler. Yakın zamanlarda integral ve diferensiyel operatörler için norm eşitsizlikleri ile ilgili birçok zor problemler çözülmüştür. Bu sonuçlar fonksiyonel analizin özellikle geniş olarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulamaları için temel araçlar olmuştur.

$L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayları, $n \geq 2$ için $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçüsü sonlu bir küme ve $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

olacak biçimde $f \in \mathcal{M}_0$ fonksiyonlarının sınıfından oluşur, burada $\mathcal{M}_0$, Ω üzerinde tanımlı reel değerli ve sonlu ölçülü fonksiyonların kümesidir. $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayları T. Iwaniec ve C. Sbordone tarafından 1992 yılında Jacobian'in integrallenebilme özelliklerini çalışırken ortaya çıkarılmıştır. $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzaylarının yapısal özelliklerini C. Capone ve A. Fiorenza incelemiştir. $L^{p)}(\Omega)$ uzayının ilişik uzayı olan $L^{p)'}(\Omega)$ small Lebesgue uzayları A. Fiorenza (Fiorenza 2000) tarafından ortaya konulmuştur. $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayları teorisi çeşitli uygulamalarından dolayı son yıllarda yoğun olarak çalışılmaktadır.

$L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayları kısmi türevli denklemler teorisinde (Iwaniec ve Sbordone 1994, Iwaniec ve Sbordone 1998, Sbordone 1994, Sbordone 1998), maksimal operatörlerin çalışılmasında ve daha genel olarak quasilineer operatörler ve interpolasyon teorisinde önemli uygulamalara sahip olan rearrangement invariant (yeniden düzenleme altında değişmeyen) Banach uzaylarıdır. Özel olarak, kısmi türevli denklemler teorisinde bazı lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin araştırılmasında grand Lebesgue uzayları uygun uzaylar olmaktadır.

$L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzaylarının genelleştirmesi olan $L^{p),\varphi(.)}(\Omega)$ uzayı $\varphi(x) = x^\theta$ özel durumu L. Greco, T. Iwaniec, C. Sbordone tarafından verilmiştir. $L^{p),\varphi(.)}(\Omega)$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzayları kısmi türevli denklemler teorisinde çeşitli lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği ve düzgünlük problemlerinin çalışmalarında kullanışlıdır.

Harmonik analizin klasik operatörleri olan maksimal fonksiyon, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörleri de Fourier dönüşümü teorisinde, kısmi türevli denklemler teorisinde, olasılık teorisinde (Markov süreçleri için potansiyel fonksiyonlar ve durağan rasgele süreçlerin spektral yoğunluk fonksiyonları çalışmasında), fonksiyonel analizde özel olarak operatörlerin interpolasyonu teorisinde geniş uygulamalara sahiptir.

Bu çalışmada grand Lebesgue uzaylarının temel özellikleri incelenecek ve daha sonra bu uzaylarda maksimal operatör, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerinin sınırlılığı incelenecektir.

Tezin ikinci bölümünde temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde harmonik analizin klasik integral operatörleri olan maksimal operatör, Calderón-Zygmund operatörü ve Riesz potansiyeli tanımlanmış ve bu operatörlerin $L^p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayındaki sınırlılıklarının ispatları verilmiştir. Dördüncü bölümde grand Lebesgue uzayları tanıtılmış ve bu uzayların temel özellikleri incelenmiştir. Bu bölümün birinci kesiminde Banach fonksiyon uzayları tanıtılarak bazı temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümün ikinci kesiminde grand Lebesgue uzaylarının tanımı verilmiş ve bu uzayların Banach fonksiyon uzayları olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu uzayların çeşitli topolojik özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümün son kesiminde grand Lebesgue uzaylarının ilişik uzayları olan small Lebesgue uzaylarının tanımı yapılarak bu uzayların bazı özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde maksimal operatör, Calderón-Zygmund operatörü ve Riesz potansiyelinin grand Lebesgue uzaylarında sınırlılığı ispatlanmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 X bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}, \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in F$ için
$(N1)$ $\|x\| \geq 0 \;\; ve \;\; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
$(N2)$ $\|ax\| = |a| \, \|x\|$
$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|.\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.2 X ve Y iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda T fonksiyonuna operatör denir. Burada D_T, T nin tanım kümesi ve $T(D_T) \subset Y$ de T nin görüntü kümesidir. Eğer D_T, X in bir alt uzayı ve her x, $y \in D_T$ ve her α, $\beta \in \mathbb{R}$ $(veya\ \mathbb{C})$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

ise T ye lineer dönüşüm denir.

Tanım 2.3 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A \|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir.
Bir T operatörünün normu $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ ile tanımlanır.

Tanım 2.4 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.5 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.6 (**Cebir ve σ- Cebir**) X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) şartı yerine

$$\text{"Her } n \in N \text{ için } E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}\text{"}$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma-$ cebiri adı verilir.

Tanım 2.7 (**Borel Cebiri**) Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ-cebiri denir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir. X bir lokal kompakt Hausdorf uzayı ve $B(x)$, X in açık kümelerini içeren en küçük σ-cebir olsun.Bu durumda $B(x)$ Borel kümesinin σ-cebiri olarak ve Borel kümesinde tanımlı herhangi bir μ ölçüsü ise Borel ölçüsü olarak adlandırılır.

Tanım 2.8 (**Ölçü**) $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.9 $\big($**Dış Ölçü**$\big)$ X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$
şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 2.10 $\big($**Ölçü Uzayı**$\big)$ Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.11 $\big($**Ölçülebir Fonksiyon**$\big)$ $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\alpha \in R$ için

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ile.gösterilir.

Tanım 2.12 **(Ölçüde Yakınsaklık)** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve f reel değerli ve $\mu-$ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa bu durumda $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna ölçüde yakınsaktır denir.

Tanım 2.13 $\big($**Lebesgue Dış Ölçüsü**$\big)$ (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir. $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E))$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.
$\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü, her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

Tanım 2.14 Eğer bir X topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, bu durumda X 'e "kompakttır" denir. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının kapalı ve sınırlı bir alt kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Yani, $\mathbb{R}^n$ de kapalı ve sınırlı her alt küme kompakttır.

Tanım 2.15 Bir f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının oluşturduğu kümenin kapanışıdır ve $\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer $\text{supp} f$ sınırlı bir küme ise f kompakt desteğe sahiptir denir.

Tanım 2.16 (X, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme (veya özellik) ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise o önerme (veya özellik) hemen her yerde doğrudur denir.

Tanım 2.17 (**Lebesgue Uzayı**) (X, μ) bir ölçü uzayı ve $\mathcal{M}$, $f : X \to \mathbb{C}$ tanımlı $\mu-$ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p(X) = \left\{ f \in \mathcal{M} : \int\limits_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir. f fonksiyonunun L^p normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ ess \sup\limits_{x \in X} |f(x)| \,, \; p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L^p ye Lebesgue uzayı denir, burada

$$ess \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf \{ \lambda : \mu (\{ x \in X : |f(x)| > \lambda \}) = 0 \}$$

dir.

Bir $E \subset X$ ölçülebilir kümesinin ölçüsü $\mu(E) = \int\limits_E d\mu$ ile tanımlanır. Özel olarak $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesgue ölçüsü $|E| = \int\limits_E dx$ dir.

$E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $L^p(E)$ uzayındaki norm tanımını değiştirerek benzer Lebesgue uzayları tanımlayabiliriz. Eğer $|E| < \infty$ ise $L^p(E)$ uzayındaki klasik norm yerine

$$A_p [f] = \left(\frac{1}{|E|} \int\limits_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ortalamasını alırsak $L^p(E)$ uzayı yukarıda tanımladığımız Lebesgue uzayı ile aynı özellikleri sağlar.

Teorem 2.1 Eğer $1 \leq p < \infty$ ise L_p deki basit fonksiyonların kümesi L_p de yoğundur.

Tanım 2.18 (**Karakteristik Fonksiyon**) $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu A nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.19 Bir s fonksiyonunun görüntü kümesi sonlu elemandan meydana geliyorsa s ye bir basit fonksiyondur denir.

$$\begin{aligned} s \quad &: \quad X \to \{a_1, a_{2,\dots,} a_n\} \subset \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad s(x) = a_k, \qquad 1 \le k \le n \end{aligned}$$

Tanım 2.20 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt $K \subset X$ alt kümesi üzerinde

$$\int_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal (yerel) integrallenebilirdir denir. X üzerinde lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı $L_{loc}(X)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2 (**Hölder eşitsizliği**) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L^p$, $g \in L^q$ olsun. Bu durumda $f \ g \in L^1$ ve

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

sağlanır (Neri 1971).

Teorem 2.3 (**Minkowski eşitsizliği**) $p \ge 1$ için eğer $f, \ g \in L^p$ ise $(f + g) \in L^p$ ve

$$\|f + g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

dir (Neri 1971).

Teorem 2.4 **(Fubini)** $\mu \ge 0$, $\upsilon \ge 0$ olmak üzere (X, μ) ve (Y, υ) ölçü uzayları ve $\mu \otimes \upsilon$, $X \times Y$ üzerinde tanımlı çarpım ölçüsü olsun. Bu durumda $F(x, y)$, $\mu \otimes \upsilon$-integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} \iint_{X \times Y} F(x, y) d\mu \otimes \upsilon &= \int_X \left(\int_Y F(x, y) d\mu \right) d\upsilon \\ &= \int_Y \left(\int_X F(x, y) d\upsilon \right) d\mu \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada $X = Y = \mathbb{R}$ ise $\mu = \upsilon$ Lebesgue ölçüsüdür. Bu durumda $\mathbb{R}^2$ de $\mu \otimes \upsilon = dx_1 dx_2$ dir (Sadosky 1979).

Tanım 2.21 **(Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık)** $1 \leq p,\ q \leq \infty$ olmak üzere (X, μ), (Y, υ) ölçü uzayları ve $T : L^p(X, \mu) \to L^q(Y, \upsilon)$ bir operatör olsun. Eğer $\forall\ f \in L^p(X, \mu)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \leq A \|f\|_{L^p}$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne kuvvetli (p, q) tipindedir denir.

Eğer $\forall\ \lambda > 0$ için

$$\upsilon\left(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{A \|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^q, q < \infty$$

olacak şekilde λ ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir (Duandikoetxea 2001).

Teorem 2.5 **(Riesz-Thorin)** $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ olmak üzere T, (p_0, q_0) ve (p_1, q_1) tipli bir operatör olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \qquad (0 < \theta < 1),$$

olmak üzere T, kuvvetli (p, q) tipli bir operatördür.

Teorem 2.6 **(Marcinkiewicz Ara Değer Teoremi)** $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olmak üzere T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun. Ayrıca p ve q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür.

Lemma 2.1 **(Vitali Örtü Lemması)** E, sınırlı çaplı olan $\{B_j\}$ küreler ailesinin birleşimi tarafından örtülen $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir alt kümesi olsun.

O halde, $B_{1,}$ B_2, ..., B_k, ... (sonlu veya sonsuz) ayrık dizilerini seçtikten sonra öyle ki

$$\sum_k m(B_k) \geq Cm(E_\alpha)$$

sağlanır.
Buradaki C sadece n ye bağlı olan pozitif bir sabittir. $C = 5^{-n}$ olacaktır
(Stein 1970).

Tanım 2.22 (X, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}\,(veya\ \mathbb{C})$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu denir.

Tanım 2.23 (f^* Azalan Yeniden Düzenleme)
f fonksiyonunun $f^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$ yeniden düzenlemesi

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0 : \alpha_f(\lambda) \leq t\}$$

şeklinde tanımlanır (Kristiansson 2002).

Tanım 2.24 (Eş Ölçülebilir Fonksiyon) $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, $g \in \mathcal{M}_0(S, \upsilon)$ olmak üzere f ve g aynı dağılım fonksiyonuna sahip ise, yani $\forall t \geq 0$ için $\alpha_f(t) = \alpha_g(t)$ eşitliği sağlanıyorsa f ve g ye eş ölçülebilir fonksiyonlar denir
(Bennett ve Sharpley 1988).

Tanım 2.25 (Yeniden Düzenleme Altında Değişmeyen (Rearrengement-Invariant) Uzaylar) ρ (X, Σ, μ) σ- sonlu bir ölçü uzayı üzerinde bir norm olsun. f ve g eş ölçülebilir fonksiyonlar ve $f, g \in \mathcal{M}_0^+(X, \mu)$ olmak üzere $\rho(f) = \rho(g)$ sağlanıyorsa $X = X(\rho)$ uzayına yeniden düzenleme altında değişmeyen (rearrengement-invariant) uzay denir (Bennett ve Sharpley 1988).

3. MAKSİMAL OPERATÖR, CALDERÓN-ZYGMUND OPERATÖRÜ VE RIESZ POTANSİYELİ

Bu bölümde harmonik analizin klasik integral operatörleri olan maksimal operatör, Calderón-Zygmund operatörü ve Riesz potansiyeli tanımlanacak ve bu operatörlerin $L^p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzaylarındaki sınırlılıklarının ispatları verilecektir.

3.1 Maksimal Operatör

Tanım 3.1 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $Mf : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty]$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| \, dy$$

biçiminde tanımlanır (Stein 1970).

Teorem 3.1 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için
(i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.
(ii) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$m\{x : Mf(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.
(iii) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir (Stein 1970).

İspat. Öncelikle teoremin (ii) ifadesini ispatlayalım. $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ olsun. $\forall x \in E_\alpha$ için $B_x = B(x,r)$, x merkezli yuvarı E_α da bulunsun. Bu durumda

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_x)} \int\limits_{B_x} |f(y)| \, dy$$

olduğundan

$$Mf(x) > \alpha \Rightarrow \int\limits_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha m(B_x) \tag{3.1}$$

elde edilir. Buradan $m(B_x) < \frac{1}{\alpha}\|f\|_1$ elde ederiz. $\{B_k\}$, E_α da bulunan ayrık yuvarların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(B_k) \geq cm(E_\alpha) \tag{3.2}$$

olur. (3.1) eşitsizliğinde B_x yerine $\bigcup\limits_k B_k$ alınırsa bu durumda

$$\int\limits_{\bigcup\limits_k B_k} |f(y)|\, dy > \alpha \sum_k m(B_k) \geq \alpha cm(E_\alpha)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy > \alpha cm(E_\alpha)$$

elde edilir ki buradan $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ yerine yazılırsa

$$m\{x : Mf(x) > \alpha\} < \frac{1}{\alpha c} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy$$

olduğu görülür. Burada $A = 1/c$ seçilirse (ii) ispatlanır.
Şimdi $1 \leq p \leq \infty$ için (i) ve (iii) ifadelerini ispatlayalım. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Mf|^p\, dx$ in sonlu olduğunu gösterelim. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir $g(x)$ fonksiyonunun dağılım fonksiyonu

$$g_*(\alpha) = m\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \alpha\}$$

ile tanımlanır. $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ iken

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, dy = -\int\limits_0^{\infty} \alpha^p dg_*(\alpha)$$

dır. Şimdi

$$m(E_\alpha) = m\{x : |Mf(x)| > \alpha\} = g_*(\alpha)$$

alınırsa

$$\|Mf\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p\, dx = p\int\limits_0^{\infty} \alpha^{p-1} m(E_\alpha)\, d\alpha \tag{3.3}$$

elde edilir. Bu integrali hesaplayabilmek için $m\left(E_{\alpha}\right)$ için bir eşitsizlik elde edelim. Bunun için f_1 fonksiyonunu

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & , \quad |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow Mf(x) \leq Mf_1(x) + \frac{\alpha}{2}$$

sağlanır. Buradan

$$m\left(E_{\alpha}\right) = m\left\{x : |Mf(x)| > \alpha\right\} \subset m\left\{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$m\left(E_{\alpha}\right) \leq m\left\{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{2A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(x)\, dx$$

duğu görülür. Sonuç olarak

$$m\left(E_{\alpha}\right) \leq \frac{2A}{\alpha} \int\limits_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği sağlanır. Bu son eşitsizliği (3.3) de yerine yazarsak

$$\|Mf\|_p^p = p \int\limits_0^{\infty} \alpha^{p-1} m\left(E_{\alpha}\right) d\alpha \leq p \int\limits_0^{\infty} \alpha^{p-1} \left(\int\limits_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)|\, dx \right) d\alpha$$

elde edilir. Bu iki integralin değerini hesaplamak için integrasyon sırasını değiştirelim. İlk integrali α ya göre alırız. İçteki integral $p > 1$ olduğundan

$$\int\limits_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha = \frac{1}{p-1} |2f(x)|^{p-1}$$

olur. Katlı integralin değeri

$$\frac{2A_p}{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|\, |2f|^{p-1}\, dx = (A_p)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, dx$$

olarak elde edilir. Böylece teoremin (iii) ifadesi ispatlanmış olur. Burada A_p;

$$A_p = 2\left(\frac{5^p p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 < p < \infty$$

ile verilir. ■

3.2 Calderón-Zygmund Operatörü

Tanım 3.2

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{supp} f$$

Calderón-Zygmund operatörü $T : C_0^\infty \to L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatördür ve $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır, burada $K(x,y)$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$ dışında sürekli bir fonksiyondur ve $c_1 > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ için aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

(i) Her $x,\, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ için

$$|K(x,y)| \leq c_1 |x-y|^{-n}.$$

(ii) $2|x-x'| \leq |x-y|$ için

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq c_1 \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|} \right)^{\varepsilon} |x-y|^{-n}$$

(Burenkov vd. 2008).

T Calderón-Zygmund operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır ve zayıf $(1,1)$ tiplidir (Dyn'kin 1991).

Teorem 3.2 $\big($**Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi**$\big)$
(X,μ) ve (Y,v) ölçü uzayı, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, T $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ den Y ye zayıf (p_0,p_0) ve zayıf (p_1,p_1) tipli ve alt lineer operatör olsun. O halde $p_0 < p < p_1$ için T kuvvetli (p,p) tiplidir (Duandikoetxea 2001).

İspat. $f \in L^p$ olsun. $\forall \lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} f_0 &= f\chi_{\{x:\, |f(x)| > c\lambda\}} \\ f_1 &= f\chi_{\{x:\, |f(x)| \leq c\lambda\}} \end{aligned}$$

olmak üzere $f = f_0 + f_1$ şeklinde yazılabilir. O halde $f_0 \in L^{p_0}(\mu)$ ve $f_1 \in L^{p_1}(\mu)$ olur. Ayrıca

$$|Tf(x)| = |T(f_0+f_1)(x)| \leq |Tf_0(x) + Tf_1(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|$$

sağlanır. Böylece

$$\alpha_{Tf}(\lambda) \leq \alpha_{Tf_0}(\lambda/2) + \alpha_{Tf_1}(\lambda/2)$$

gerçeklenir.

1. Durum: $p_1 = \infty$ olsun. $A_1 \|Tg\|_\infty \leq A_1 \|g\|_\infty$ olmak üzere $c = \frac{1}{2A_1}$ seçelim. O halde $\alpha_{Tf_1}(\lambda/2) = 0$ olur. Zayıf (p_0, p_0) eşitsizliğinden

$$\alpha_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_0}{\lambda} \|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\alpha_{Tf_0}(\lambda/2)\, d\lambda \\
&\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0}{\lambda}\right)^{p_0} \int_{\{x:\, |f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}\, d\mu d\lambda \\
&= p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0} \int_{\{x:\, |f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}\, d\mu d\lambda \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{f(x)/c} \lambda^{p-1-p_0} d\lambda d\mu \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\left.\frac{\lambda^{p-p_0}}{p-p_0}\right|_0^{f(x)(2A_1)}\right) d\mu \\
&= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. Durum: $p_1 < \infty$ olsun.

$$\alpha_{Tf_i}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_i}{\lambda}\|f_i\|_{p_i}\right)^{p_i}, \quad i = 0, 1$$

olur, buradan

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0} \int_{\{x:\, |f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}\, d\mu d\lambda \\
&\quad + p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_1)^{p_1} \int_{\{x:\, |f(x)|\leq c\lambda\}} |f(x)|^{p_1}\, d\mu d\lambda \\
&= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0}\frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}}\right)\|f\|_p^p
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.3 T Calderón-Zygmund operatörü olsun. Bu durumda p ye bağlı olmayan $c>0$ sabiti için

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq c\left(\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2-p}\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1<p<2,\\ \|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq c\left(p+\frac{p}{p-2}\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad p>2\end{aligned}$$

gerçeklenir (Meskhi 2011).

İspat. T zayıf $(1,1)$ ve kuvvetli $(2,2)$ tipli olduğundan Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi (Teorem 3.2) gereğince

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{2p}{p-1}\frac{A_0}{c^{p-1}}+\frac{4p}{2-p}\frac{A_1^2}{c^{p-2}}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<2$$

sağlanır, burada A_0 ve A_1 sırasıyla T operatörünün zayıf $(1,1)$ ve kuvvetli $(2,2)$ tipli eşitsizliklerinden ortaya çıkan sabitlerdir.

$$\begin{aligned}\left[\frac{2p}{p-1}\frac{A_0}{c^{p-1}}+\frac{4p}{2-p}\frac{A_1^2}{c^{p-2}}\right]^{1/p} &\leq 2^{1/p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}\frac{A_0^{1/p}}{c^{(p-1)/p}}+4^{1/p}\left(\frac{p}{2-p}\right)^{1/p}\frac{A_1^{2/p}}{c^{(p-2)/p}}\\ &\leq c\left(\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2-p}\right),\end{aligned}$$

burada c pozitif sabiti p ye bağlı değildir.

Şimdi $p>2$ olsun. $K'(x,y):=K(y,x)$ in Calderón–Zygmund çekirdeği olduğunu göz önüne alınıp yukarıda bahsedilen düşünce kullanılırsa

$$\|T\|_{L^p\to L^p}=\|T\|_{L^{p'}\to L^{p'}}\leq\left(\frac{p'}{p'-1}+\frac{p'}{2-p'}\right)=c\left(p+\frac{p}{p-2}\right)$$

olduğu görülür. ■

3.3 Riesz Potansiyeli

Tanım 3.3 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0<\alpha<n$ olmak üzere I_α Riesz potansiyeli

$$(I_\alpha f)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$$

olarak tanımlanır (Stein 1970).

Teorem 3.4 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $d =$çap$(\Omega) = \sup\{|x-y|\,;\ x,y \in \Omega\}$ $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\Omega)} \leq \bar{c}\,(p,\alpha,n)\,\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

gerçeklenir, burada $\bar{c}\,(p,\alpha,n)$ pozitif sabiti

$$\bar{c}\,(p,\alpha,n) = c\frac{n}{\alpha\,[n-\alpha p]}\,(p')^{1/q}$$

şeklindedir ve $c > 0$ sabiti p ve α ya bağlı değildir (Meskhi 2011).

İspat. $1 < p < q < \infty$ olsun. Hedberg's tipi eşitsizliğinden (Hedberg 1972)

$$|I_\alpha f\,(x)| \leq c_{p,n,\alpha}\,(Mf)^{1-\frac{p\alpha}{n}}\,(x)\,\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}} \tag{3.4}$$

sağlanır, burada $c_{p,n,\alpha} = \frac{2\left(1+b^{1/p'}\right)n}{\alpha(n-\alpha p)}$ ve b sabiti $|B\,(x,r)| \leq br^n$ eşitsizliğini sağlar. (3.4) ü ispatlamak için

$$f_r\,(x) := \frac{1}{r^n}\int\limits_{B(x,r)} |f\,(y)|\,dy$$

olsun.

$$|x-y| \leq 2\int\limits_{|x-y|}^{2|x-y|} t^{\alpha-n-1}dt, \qquad 0 < |x-y| < d \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.5) i kullanarak

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f\,(x)| &= \left|\int\limits_\Omega f\,(y)\,|x-y|^{\alpha-n}\,dy\right| \leq \int\limits_\Omega |f\,(y)|\,|x-y|^{\alpha-n}\,dy \\
&\leq 2\int\limits_\Omega |f\,(y)|\int\limits_{|x-y|}^{2|x-y|} t^{\alpha-n-1}dt \\
&= 2\int\limits_0^{2d} t^{\alpha-\gamma-1}\left(\int\limits_{\frac{t}{2}<|x-y|<t} |f\,(y)|\,d\mu\,(y)\right)dt \leq 2\int\limits_0^{2d} t^{\alpha-1}f_t\,(x)\,dt.
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$|I_\alpha f\,(x)| \leq 2\left[\int\limits_0^\varepsilon t^{\alpha-1}f_t\,(x)\,dt + \int\limits_\varepsilon^{2d} t^{\alpha-1}f_t\,(x)\,dt\right] =: 2\left[J_1^{(\varepsilon)}\,(x) + J_2^{(\varepsilon)}\,(x)\right]$$

gerçeklenir.

$$J_1^{(\varepsilon)}(x) \le (Mf)(x)\int_0^{\varepsilon} t^{\alpha-1}dt = \frac{(Mf)(x)}{\alpha}\varepsilon^{\alpha}$$

olduğu açıktır. Hölder eşitsizliğinden ve $|B(x,r)| \le br^n$ koşulundan

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{1}{t^n}\int_{B(x,t)} |f(y)|\,dy \le \frac{1}{t^n}\left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B(x,t)} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\le \frac{1}{t^n}\left(\int_{\Omega} |f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}(bt^n)^{\frac{1}{p'}} \\ &= b^{\frac{1}{p'}}t^{\frac{pn}{p-1}-n}\,\|f\|_{L^p(\Omega)} \\ &= b^{\frac{1}{p'}}t^{\frac{-n}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} J_2^{(\varepsilon)}(x) &= \int_{\varepsilon}^{2d} t^{\alpha-1}f_t(x)\,dt \\ &\le b^{\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{L^p(\Omega)}\int_{\varepsilon}^{2d} t^{-\frac{n}{p}+\alpha-1}dt \end{aligned}$$

olur. $-\frac{n}{p}+\alpha<0$ koşulundan

$$\begin{aligned} |I_\alpha f(x)| &\le 2\left[\frac{(Mf)(x)}{\alpha}\varepsilon^{\alpha} + b^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\varepsilon}^{2d} t^{-\frac{n}{p}+\alpha-1}dt\right)\|f\|_{L^p(\Omega)}\right] \\ &\le 2\left[\frac{(Mf)(x)}{\alpha}\varepsilon^{\alpha} - b^{1/p'}\frac{\varepsilon^{-\frac{n}{p}+\alpha}}{\alpha-\frac{n}{p}}\,\|f\|_{L^p(\Omega)}\right] \end{aligned}$$

gerçeklenir. $\varepsilon = \left[\frac{\|f\|_{L^p(\Omega)}}{(Mf)(x)}\right]^{\frac{p}{n}}$ seçelim. O halde

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f(x)| &\leq 2\left[\frac{(Mf)(x)}{\alpha}\frac{\left[\|f\|_{L^p(\Omega)}\right]^{\frac{\alpha p}{n}}}{[(Mf)(x)]^{\frac{\alpha p}{n}}} - \frac{b^{\frac{1}{p'}}}{\alpha - \frac{n}{p}}\left[\frac{\|f\|_{L^p(\Omega)}}{(Mf)(x)}\right]^{\frac{p}{n}\left(\alpha - \frac{n}{p}\right)}\|f\|_{L^p(\Omega)}\right] \\
&= 2\left[\frac{[(Mf)(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}}}{\alpha}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{p'}}}{\alpha - \frac{n}{p}}[(Mf)(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}}\right] \\
&= 2\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{pb^{1/p'}}{\alpha p - n}\right]\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}}[(Mf)(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}} \\
&= 2\left[\frac{\alpha p b^{1/p'} - \alpha p + n}{\alpha(n-\alpha p)}\right]\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}}[(Mf)(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}} \\
&\leq 2\left(1 + b^{1/p'}\right)\frac{n}{\alpha(n-\alpha p)}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}}[(Mf)(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ koşulu ve Teorem 3.1 den

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{t^n}\int_{B(x,t)}|(I_\alpha f)(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq t^{-\frac{n}{q}}\frac{2\left(1+b^{1/p'}\right)n}{\alpha(n-\alpha p)}\left[\int_{B(x,t)}(Mf(y))^{q\left[1-\frac{\alpha p}{n}\right]}\,dy\right]^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}} \\
&= \frac{2\left(1+b^{1/p'}\right)n}{\alpha(n-\alpha p)}\left[\frac{1}{t^n}\int_{B(x,t)}(Mf(y))^p\,d\mu(y)\right]^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}} \\
&\leq \frac{2\left(1+b^{1/p'}\right)n}{\alpha(n-\alpha p)}\|Mf\|_{L^p(\Omega)}^{p/q}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}} \\
&\leq \frac{2\left(1+b^{1/p'}\right)n}{\alpha(n-\alpha p)}\left(c_0(p')^{\frac{1}{p}}\right)^{p/q}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{p/q}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{n}} \\
&= \frac{2\left(1+b^{1/p'}\right)n}{\alpha(n-\alpha p)}\left(c_0(p')^{\frac{1}{p}}\right)^{p/q}\|f\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \frac{2\left(1+b^{1/p'}\right)n}{\alpha(n-\alpha p)}c_0^{p/q}(p')^{1/q}\|f\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq 2(1+b)\,c_0\frac{n}{\alpha(n-\alpha p)}(p')^{1/q}\|f\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

sağlanır. ■

4. GRAND LEBESGUE UZAYLARI

Bu bölümde grand Lebesgue uzayları tanıtılacak ve bu uzayların temel özellikleri incelenecektir. Bu bölümün birinci kesiminde Banach fonksiyon uzayları tanıtılarak bazı temel özellikleri verilecek, ikinci kesimde de grand Lebesgue uzaylarının tanımı verilip bu uzayların Banach fonksiyon uzayları olduğu gösterilecektir. Daha sonra bu uzayların çeşitli topolojik özellikleri incelenecektir. Son olarak üçüncü kesimde grand Lebesgue uzaylarının ilişik uzayları olan small Lebesgue uzaylarının tanımı yapılarak bu uzaylar ve grand Lebesgue uzaylarının bazı özellikleri incelenecektir.

4.1 Banach Fonksiyon Uzayları

Tanım 4.1 (Banach Fonksiyon Normu)
(R,μ) bir ölçü uzayı, $\mathcal{M}^+, f : R \to [0,\infty]$ tanımlı $\mu-$ölçülebilir fonksiyonların kümesi ve $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0,\infty]$ bir fonksiyon olsun. $\mathcal{M}^+$ daki f, g, f_n, $(n = 1, 2, 3, ...)$ fonksiyonları, $\forall a \geq 0$ sabiti ve $\mu-$ölçülebilir $E \subset R$ kümesi için
$(P1)\, \rho(f) = 0 \Leftrightarrow h.h.y. f = 0,$
$(P2)\, \rho(af) = a\rho(f),$
$(P3)\ \rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g),$
$(P4)\ h.h.y.\ 0 \leq g \leq f \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f),$
$(P5)\ h.h.y.\ 0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f),$
$(P6)\ \mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty,$
$(P7)\ \mu(E) < \infty \Rightarrow \int\limits_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$, (burada C_E, $0 < C_E < \infty$, E ve ρ ya bağlı fakat f ye bağlı değildir)
özellikleri sağlanıyorsa ρ ya Banach fonksiyon normu (fonksiyon normu) denir (Bennett ve Sharpley 1988).

Tanım 4.2 (Banach Fonksiyon Uzayları) (R,μ) bir ölçü uzayı, $\mathcal{M}$, R üzerinde tanımlı genişletilmiş skaler değerli (reel ya da kompleks) $\mu-$ölçülebilir fonksiyonların sınıfı ve ρ bir fonksiyon normu olsun. Bu durumda $\rho(|f|) < \infty$ olacak biçimde $\mathcal{M}$

deki f fonksiyonlarının $X = X(\rho)$ sınıfına Banach fonksiyon uzayı denir ve $\forall f \in X$ için

$$\|f\|_X = \rho(|f|)$$

dir (Bennett ve Sharpley 1988).

Örneğin; $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere L^p Lebesgue uzayı bir Banach fonksiyon uzayıdır.

Teorem 4.1 ρ bir fonksiyon normu, $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayı ve $\|.\|_X$ Tanım 4.2 deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda vektör uzay işlemleri altında $(X, \|.\|_X)$ normlu lineer uzaydır ve

$$S \subset X \hookrightarrow \mathcal{M}_0 \tag{4.1}$$

içermeleri sağlanır, burada S, R üzerinde tanımlı μ-basit fonksiyonların kümesidir. Özel olarak, X te $f_n \to f$ ise sonlu ölçülü kümeler üzerinde $f_n \to f$ ölçüde yakınsaktır ve f_n in bir alt dizisi $h.h.y.$ f ye μ-noktasal yakınsaktır (Bennett ve Sharpley 1988).

Lemma 4.1 $X = X(\rho)$ bir Banach fonksiyon uzayı ve $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ olsun.
(i) (Fatou Özelliği)$0 \leq f_n \uparrow f$ $(\mu\text{-}h.h.y.)$ ise ya $f \notin X$ ve $\|f_n\|_X \uparrow \infty$ ya da $f \in X$ ve $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$ dir.
(ii) (Fatou Lemması) $f_n \to f$ $(\mu\text{-}h.h.y.)$ ve $\liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$ ise

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$$

sağlanır (Bennett ve Sharpley 1988).

Teorem 4.2 X bir Banach fonksiyon uzayı, $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty \tag{4.2}$$

olsun. Bu durumda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ X te $f \in X$ e yakınsaktır ve

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X \tag{4.3}$$

gerçeklenir. Özel olarak X tamdır (Bennett ve Sharpley 1988).

İspat. $t = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, $t_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$ $(N = 1, 2, ...)$ olsun. Bu durumda $0 \leq t_N \uparrow t$ dir.

$$\|t_N\|_X \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} |f_n| \right\|_X \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

olduğu için (4.2) ve Lemma 4.1 (i) den $t \in X$ dir. (4.1) den $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $h.h.y.$ μ-noktasal yakınsaktır. Eğer

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \; s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n, \; (N = 1, 2, ...)$$

ise $h.h.y.$ μ-ölçüsüne göre $s_N \rightarrow f$ dir. Herhangi bir M için $N \rightarrow \infty$ iken $h.h.y.$ μ-ölçüsüne göre $s_N - s_M \rightarrow f - s_M$ dir.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|s_N - s_M\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=M+1}^{N} \|f_n\|_X = \sum_{n=M+1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

(4.2) den $M \rightarrow \infty$ iken $\sum_{n=M+1}^{\infty} \|f_n\|_X \rightarrow 0$. Fatou lemmasından (Lemma 4.1 (ii)) $f - s_M \in X \Rightarrow f \in X$ ve $M \rightarrow \infty$ iken $\|f - s_M\|_X \rightarrow 0$ dir. "Normlu bir uzayın Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul mutlak yakınsak her serinin yakınsak olmasıdır" önermesi gereğince X tamdır.

Her $M = 1, 2, ...$ için

$$\|f\|_X \leq \|f - s_M + s_M\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \|s_M\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \sum_{n=1}^{M} \|f_n\|_X$$

$M \rightarrow \infty$ iken $\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$ gerçeklenir. ■

Tanım 4.3 (Mutlak Sürekli Norm) X bir Banach fonksiyon uzayı, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ X in ölçülebilir altkümelerinin bir dizisi ve f X uzayında bir fonksiyon olsun. Eğer $\mu - h.h.y.$ $E_n \rightarrow \varnothing$ olacak biçimde her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\left\| f \chi_{E_n} \right\|_X \rightarrow 0$ oluyorsa bu durumda f fonksiyonuna mutlak sürekli norma sahiptir denir
(Bennett ve Sharpley 1988).

4.2 Grand Lebesgue Uzayları

Tanım 4.4 (Grand Lebesgue uzayı) $L^{p)}$ grand Lebesgue uzayı $n \geq 2$ için $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçüsü sonlu bir küme ve $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} \, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

olacak biçimde $f \in \mathcal{M}_0$ fonksiyonlarının sınıfından oluşur, burada $\mathcal{M}_0$, Ω üzerinde tanımlı reel değerli ve sonlu ölçülü fonksiyonların kümesidir (Capone vd. 2013).

Tanım 4.5 (Genelleştirilmiş grand Lebesgue uzayı) $1 < p < \infty$ olmak üzere φ, $(0, p-1)$ üzerinde tanımlı sürekli pozitif bir fonksiyon ve $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = 0$ olsun. $L^{p),\varphi(.)}$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L^{p),\varphi(.)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varphi(\varepsilon)}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} \, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

olacak biçimde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sınıfından oluşur.
Özel olarak, $\theta \geq 0$ olmak üzere $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^{\theta}$ alınırsa grand Lebesgue uzayının genelleştirmesi

$$\|f\|_{L^{p),\theta}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} \, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

olacak biçimde $f \in \mathcal{M}_0$ fonksiyonlarının sınıfıdır (Kokilashvili 2012).

Bu uzaya Riesz potansiyelinin sınırlılığının ispatında ihtiyaç duyacağız.

Teorem 4.3

$$\rho(f) = \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} \, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

olmak üzere $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayı bir Banach fonksiyon uzayıdır (Capone vd. 2013).

İspat. $(P1)$ $\rho(f)=0 \Leftrightarrow h.h.y.\ f=0$:

$(\Rightarrow:)$ $\rho(f)=0$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=0 \Rightarrow \left(\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=0$$

$\Rightarrow h.h.y.\ f=0$ dır.

$(\Leftarrow:)$ Karşıt olarak $h.h.y.\ f=0$ olsun. Bu durumda bir $A\subseteq\Omega$ vardır öyleki $|A|=0$ ve $\forall x\in\Omega\backslash A$ için $f(x)=0$ dır. Buradan

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega\backslash A}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx+\int_A |f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=0$$

elde edilir.

$(P2)$ $\rho(af)=a\rho(f)$:

$$\begin{aligned}
\rho(af) &= \|af\|_{L^{p)}(\Omega)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |af(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\\
&= a\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\\
&= a\|f\|_{L^{p)}(\Omega)}\\
&= a\rho(f)
\end{aligned}$$

olur.

$(P3)$ $\rho(f+g)\le\rho(f)+\rho(g)$:

$$\begin{aligned}
\rho(f+g) &= \|f+g\|_{L^{p)}(\Omega)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\\
&= \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f+g\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}\\
&\le \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}+\|g\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}\right)\\
&\le \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}+\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}+\|g\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}\\
&= \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}+\|g\|_{L^{p)}(\Omega)}\\
&= \rho(f)+\rho(g)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(P4)$ $h.h.y.$ $0 \leq g \leq f \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$:

$h.h.y.$ $0 \leq g \leq f \Rightarrow \int\limits_{\Omega} |g(x)|^{p-\varepsilon} dx \leq \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx$ ve buradan

$$\begin{aligned}
\rho(g) &= \|g\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \rho(f)
\end{aligned}$$

bulunur.

$(P5)$ $h.h.y.$ $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$:

$h.h.y.$ $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \|f_n\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \uparrow \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}$ ve buradan

$$\begin{aligned}
\rho(f_n) &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f_n(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon |\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f_n\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \uparrow \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon |\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&= \rho(f)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(P6)$ $|E| < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$:

$|E| < \infty$ ise açık olarak

$$\begin{aligned}
\rho(\chi_E) &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |\chi_E(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{E} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon |\Omega|^{-1} |E|\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$(P7)$ $|E| < \infty \Rightarrow \int\limits_E f dx \le C_E \rho(f)$:

$|E| < \infty$ olsun. Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int\limits_E f dx &= \int\limits_\Omega f \chi_E dx \\
&\le \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_\Omega |\chi_E(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&= \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_E dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&= |E|^{\frac{p-\varepsilon-1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\le \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\le \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega| \sup_{0<\sigma<p-1} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega |f(x)|^{p-\sigma} dx \right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \\
&= C_E \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \\
&= C_E \rho(f)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Örnek 4.1 $1 < p < \infty$ olmak üzere $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ olsun. $f \in L^{p)}_{(0,1)} \backslash L^p_{(0,1)}$ dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p_{(0,1)}} &= \int\limits_0^1 |f(x)|^p dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{t \to 0^+} \int\limits_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \to 0^+} \ln x|_t^1 \\
&= \lim_{t \to 0^+} (\ln 1 - \ln t) = \infty
\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p)}_{(0,1)}} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|(0,1)|} \int_0^1 |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^1 x^{-\frac{p-\varepsilon}{p}}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x^{-\frac{p-\varepsilon}{p}}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{p}{\varepsilon} \lim_{t\to 0^+} x^{\frac{\varepsilon}{p}} \Big|_t^1 \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{p}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{0<\varepsilon<p-1} p^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < p < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $f \in L^{p)}_{(0,1)} \backslash L^{p}_{(0,1)}$ dir.

Teorem 4.4 $1 < p < \infty$ ve $0 < \varepsilon \leq p-1$ olmak üzere

$$L^p(\Omega) \subset L^{p)}(\Omega) \subset L^{p-\varepsilon}(\Omega)$$

gerçeklenir.

İspat. (i) Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon |\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \quad ; q \to \frac{p}{p-\varepsilon}, q' \to \frac{p}{\varepsilon} \\
&\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon |\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_\Omega |f(x)|^{p}\, dx \right)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}} \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega)} \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}-\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq c_p \|f\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $L^p(\Omega) \subset L^{p)}(\Omega)$ olur.

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} &= \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \left(\varepsilon\,|\Omega|^{-1}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\varepsilon\,|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \left(\varepsilon\,|\Omega|^{-1}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \sup_{0<\sigma<p-1} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\sigma}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \\
&= c_p\,\|f\|_{L^{p)}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

olduğundan $L^{p)}(\Omega) \subset L^{p-\varepsilon}(\Omega)$ elde edilir. ■

Teorem 4.5 $1 < p < \infty$, $0 < \varepsilon \leq p-1$, ve $0 < \theta_1 < \theta_2$ olmak üzere

$$
L^{p}(\Omega) \subset L^{p),\theta_1}(\Omega) \subset L^{p),\theta_2}(\Omega) \subset L^{p-\varepsilon}(\Omega)
$$

bağıntıları gerçeklenir.

İspat. (i) Hölder eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p),\theta_1}(\Omega)} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon^{\theta_1}\,|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \quad ; q \to \frac{p}{p-\varepsilon}, q' \to \frac{p}{\varepsilon} \\
&\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon^{\theta_1}\,|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}} \\
&= \|f\|_{L^{p}(\Omega)} \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta_1}{p-\varepsilon}}\,|\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}-\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq c_p\,\|f\|_{L^{p}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $L^{p}(\Omega) \subset L^{p),\theta_1}(\Omega)$ olur.

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad \|f\|_{L^{p),\theta_2}(\Omega)} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon^{\theta_2}\,|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \quad ;\ \theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \varepsilon^{\theta_2} < \varepsilon^{\theta_1} \\
&\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon^{\theta_1}\,|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \|f\|_{L^{p),\theta_1}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $L^{p),\theta_1}(\Omega) \subset L^{p),\theta_2}(\Omega)$ olur.

$$\begin{aligned}
(iii)\quad \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \left(\varepsilon^{\theta_2}|\Omega|^{-1}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\varepsilon^{\theta_2}|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \left(\varepsilon^{\theta_2}|\Omega|^{-1}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\sup_{0<\sigma<p-1}\sigma^{\frac{\theta_2}{p-\sigma}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|^{p-\sigma}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \\
&= c_p\|f\|_{L^{p),\theta_2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

olduğundan $L^{p),\theta_2}(\Omega) \subset L^{p-\varepsilon}(\Omega)$ elde edilir. ■

Önerme 4.1 C_0^∞ uzayı $L^{p)}$ de yoğun değildir ve onun kapanışı olan $[L^p]_{p)}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}\,dx = 0 \tag{4.4}$$

olacak biçimde $f \in L^{p)}$ fonksiyonlarından oluşur.

İspat. İlk olarak $f \in [L^p]_{p)}$ ise (4.4) ün f için sağlandığını göstereceğiz.
$f \in [L^p]_{p)}$ olduğundan

$$\|f - f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} \to 0$$

olacak biçimde $f_n \in L^p$ fonksiyon dizisinin vardır. $\delta > 0$ olsun. $f_{n_0} \in L^p$ ve $\|f - f_{n_0}\|_{L^{p)}(\Omega)} < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde n_0 seçelim. Hölder eşitsizliğinden f_{n_0} için

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega |f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f_{n_0}(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

sağlanır. Dolayısıyla $\varepsilon_0 > 0$ vardır öyle ki $\varepsilon < \varepsilon_0$ olduğu zaman

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega |f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\delta}{2}$$

sağlanır.

Son olarak $\varepsilon < \varepsilon_0$ olduğu zaman

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} &\leq \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f(x)-f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &\quad+\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &\leq \|f-f_{n_0}\|_{L^{p)}(\Omega)}+\frac{\delta}{2} \\ &\leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta\end{aligned}$$

gerçeklenir.

$\Omega=(0,1)$ ve $f(t)=t^{-\frac{1}{p}}$ olsun O halde $f\in L^{p)}\setminus[L^p]_{p)}$ sağlanır. Gerçekten; Örnek 4.1 den $f\in L^{p)}$ olur. Diğer taraftan

$$\left(\varepsilon\int\limits_0^1|f(t)|^{p-\varepsilon}\,dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=\left(\varepsilon\int\limits_0^1 t^{-\frac{p-\varepsilon}{p}}\,dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=p^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\nrightarrow 0,\quad \varepsilon\to 0$$

gerçeklenir. ■

4.3 Grand Lebesgue Uzayının İlişik Uzayı (Small Lebesgue Uzayları)

4.3.1 $L^{(p'}$ yardımcı Banach uzayı

Bu kesimde A. Fiorenza (Fiorenza 2000) tarafından ortaya konan $L^{p)'}$ small Lebesgue uzaylarını tanıtacağız.

Lemma 4.2 $n \geq 1$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçüsü sonlu bir küme olsun. Eğer $f, g \in \mathcal{M}_0^+$ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k \geq 0$ olmak üzere $g \leq f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ ise bu durumda Ω da

$$h_k = \left[f_k - maks\left(g - \sum_{j=1}^{k-1} f_j, 0 \right) \right] \chi_{\left\{ \sum\limits_{j=1}^{k} f_j > g \right\}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan h_k fonksiyonları

$$0 \leq h_k \leq f_k \tag{4.5}$$

ve

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - h_k) \tag{4.6}$$

özelliklerini sağlar.

İspat. Hemen her $x \in \Omega$ için $g(x) = f(x)$ ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için $h_k(x) = 0$ olur ve böylece (4.5) ve (4.6) sağlanır.

Hemen her $x \in \Omega$ için $g(x) < f(x)$ ve

$$\hat{k} = \hat{k}_x = \min \left\{ k : \sum_{j=1}^{k} f_j(x) > g(x) \right\}$$

olsun.

Eğer $k < \hat{k}$ ise bu durumda $\sum\limits_{j=1}^{k} f_j(x) \leq g(x)$ olur. Dolayısıyla $h_k(x) = 0$ dır ve buradan (4.5) sağlanır.

Eğer $k = \hat{k}$ ise $\sum\limits_{j=1}^{\hat{k}-1} f_j(x) \leq g(x)$ ve $\sum\limits_{j=1}^{\hat{k}} f_j(x) > g(x)$ olur. Dolayısıyla

$$h_{\hat{k}}(x) = f_{\hat{k}}(x) - \left(g(x) - \sum_{j=1}^{\hat{k}-1} f_j(x) \right)$$

fonksiyonu (4.5) eşitsizliğini sağlar.

Eğer $k > \hat{k}$ ise $h_k(x) = f_k(x)$ olur ve dolayısıyla (4.5) sağlanır.

Böylece herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için (4.5) ispatlanmış olur.

Diğer taraftan (4.6) gerçeklenir çünkü hemen her $x \in \Omega$ için $g(x) < f(x)$ ise

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (f_k(x) - h_k(x)) &= \sum_{k<\hat{k}} (f_k(x) - h_k(x)) + f_{\hat{k}}(x) - h_{\hat{k}}(x) \\
&\quad + \sum_{k>\hat{k}} (f_k(x) - h_k(x)) \\
&= \sum_{k<\hat{k}} f_k(x) + f_{\hat{k}}(x) - \left(f_{\hat{k}}(x) - g(x) + \sum_{k<\hat{k}} f_k(x) \right) \\
&\quad + \sum_{k>\hat{k}} (f_k(x) - f_k(x)) \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

sağlanır. ■

$g \in \mathcal{M}_0^+$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ ve $g_k \in \mathcal{M}_0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) olmak üzere

$$\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)} = \inf_{g=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \right\}$$

diyelim.

Sonuç 4.1 Her bir $g \in \mathcal{M}_0^+$ için

$$\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)} = \inf_{\substack{g=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \\ g_k \geq 0}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (g_k(x))^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \right\}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\mathcal{M}_0$ daki herhangi bir (g_k) dizisi için

$$\mathcal{S}((g_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \tag{4.7}$$

olsun.

$g \in \mathcal{M}_0^+$ ve $g_k \in \mathcal{M}_0$ olmak üzere herhangi bir $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ ayrışımı için $\gamma_k \in \mathcal{M}_0^+$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ ve $\mathcal{S}((g_k)) \geq \mathcal{S}((\gamma_k))$ olacak biçimde $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ ayrışımının var olduğunu göstermeliyiz.

f_k yı her $k \in \mathbb{N}$ için $g_k^+ = maks\{g_k, 0\}$ alarak Lemma 4.2 yi uygulayalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\gamma_k = g_k^+ - h_k$ olsun. $g_k^- = \min\{g_k, 0\}$ olmak üzere $\left|g_k^+ + g_k^-\right| = \left|g_k^+ + \left(-g_k^-\right)\right|$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathcal{S}((g_k)) &= \mathcal{S}\left(\left(g_k^+ + g_k^-\right)\right) = \mathcal{S}\left(\left(g_k^+ + \left(-g_k^-\right)\right)\right) \\ &\geq \mathcal{S}\left(\left(g_k^+\right)\right) \geq \mathcal{S}\left(\left(g_k^+ - h_k\right)\right) = \mathcal{S}((\gamma_k)) \end{aligned}$$

sağlanır. ■

Teorem 4.6

$$L^{(p'}(\Omega) = \left\{g \in \mathcal{M}_0 : |||g|||_{L^{(p'}(\Omega)} < \infty\right\}$$

uzayı bir Banach fonksiyon uzayıdır.

İspat. $|||.|||_{L^{(p'}}$ normunun özelliklerinin birçoğu $L^{(p'}$ uzayının Banach fonksiyon uzayı olmasını gerektirir, bunların ispatı aşikar ya da kolaydır. Burada sadece $\mathcal{M}_0^+$ daki $f, g, g^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ için aşağıdaki özelliklerin sağlandığını göstereceğiz.

(i) $\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} g^{(n)}\right\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\|g^{(n)}\right\|_{L^{(p'}(\Omega)}$,

(ii) Ω da h.h.y. $g \leq f$ ise $\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{(p'}(\Omega)}$.

(i) nin ispatı: $g_k^{(n)} \in \mathcal{M}_0^+$ fonksiyonları için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|g^{(n)}\right\|_{L^{(p'}(\Omega)} < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

olsun aksi durumda iddia aşikardır.

$\varepsilon > 0$ ve $g_k^{(n)} \in \mathcal{M}_0^+$ olsun öyle ki Sonuç 4.1 den

$$g^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left| g_k^{(n)}(x) \right|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} < \left\| g^{(n)} \right\|_{L^{(p'}(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

gerçeklenir.

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} g^{(n)} \right\|_{L^{(p'}(\Omega)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(n)} \right\|_{L^{(p'}(\Omega)} = \left\| \sum_{n,k=1}^{\infty} g_k^{(n)} \right\|_{L^{(p'}(\Omega)} \\
&\leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left| g_k^{(n)}(x) \right|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left| g_k^{(n)}(x) \right|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left\| g^{(n)} \right\|_{L^{(p'}(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| g^{(n)} \right\|_{L^{(p'}(\Omega)} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\| g^{(n)} \right\|_{L^{(p'}(\Omega)} + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

(ii) nin ispatı: $f_k \in \mathcal{M}_0^+$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olmak üzere $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ ayrışımı için Lemma 4.2 den $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_k - h_k)$ olacak biçimde $h_k \in M_0^+$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ vardır. Sonuç 4.1 i kullanarak

$$\|f\|_{L^{(p'}(\Omega)} = \inf_{\substack{f=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \\ f_k \geq 0}} \mathcal{S}((f_k)) \geq \inf_{\substack{f=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \\ f_k \geq 0}} \mathcal{S}((f_k - h_k)) \geq \inf_{\substack{g=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \\ g_k \geq 0}} \mathcal{S}((g_k)) = \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.6 dan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $g_k \in \mathcal{M}_0$ olmak üzere

$$\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)} = \inf_{|g|=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \right\}$$

normu ile $L^{(p'}(\Omega)$ Banach uzayıdır. Sağ taraftaki $|g|$ yi g ile değiştirebiliriz.

Önerme 4.2 $g_k \in \mathcal{M}_0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ ve herhangi bir $g \in L^{(p'}(\Omega)$ için

$$\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)} = \inf_{g=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \right\}$$

gerçeklenir.

İspat. $|g| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$, $|g|$ nin $\mathcal{M}_0^+$ daki herhangi bir ayrışımı olsun.
$sgn = \chi_{]0,\infty[} - \chi_{]-\infty,0[}$ olmak üzere Ω da h.h.y. $g(x) = sgn(g(x))|g(x)|$ olur. Böylece Ω da h.h.y.

$$g(x) = sgn(g(x)) \sum_{k=1}^{\infty} h_k = \sum_{k=1}^{\infty} sgn(g(x)) h_k$$

ise $\mathcal{S}((g_k))$ (4.7) deki gibi olmak üzere

$$\inf_{\substack{g=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \\ g_k \in \mathcal{M}_0}} \mathcal{S}((g_k)) \leq \mathcal{S}((sgn(g) h_k)) = \mathcal{S}((h_k))$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\inf_{\substack{g=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \\ g_k \in \mathcal{M}_0}} \mathcal{S}((g_k)) \leq \inf_{\substack{|g|=\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \\ h_k \in \mathcal{M}_0^+}} \mathcal{S}((h_k)) = \inf_{\substack{|g|=\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \\ h_k \in \mathcal{M}_0}} \mathcal{S}((h_k))$$

olur.
Diğer taraftan $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ $\mathcal{M}_0$ da g nin herhangi bir ayrışımı ve

$$\gamma(g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$$

olsun. O halde $|g| \leq \gamma(g_k)$ olur. Dolayısıyla

$$\inf_{\substack{|g|=\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \\ h_k \in \mathcal{M}_0}} \mathcal{S}((h_k)) \leq \inf_{\substack{\gamma(g_k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \\ h_k \in \mathcal{M}_0}} \mathcal{S}((h_k)) \leq \mathcal{S}((g_k))$$

ise

$$\inf_{\substack{|g|=\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \\ h_k \in \mathcal{M}_0}} \mathcal{S}((h_k)) \leq \inf_{\substack{g=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \\ g_k \in \mathcal{M}_0}} \mathcal{S}((g_k))$$

sağlanır ve böylece ispat tamamlanır. ■

$\forall\varepsilon > 0$ için

$$L^{p'+\varepsilon}(\Omega) \subset L^{(p'}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$$

içerme bağıntıları sağlanır. Özel olarak $L^{\infty}(\Omega) \subset L^{(p'}(\Omega)$ gerçeklenir.

Teorem 4.7 Her $f \in L^{p)}(\Omega)$, $g \in L^{(p'}(\Omega)$ için aşağıdaki

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

Hölder tipi eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $g_k \geq 0$ olmak üzere $|g| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ herhangi bir ayrışım ve $f \in L^{p)}$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ ve her $0 < \varepsilon < p-1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)\, g_k(x)\, dx &\leq \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \\
&\quad \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&\leq \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)\, g_k(x)\, dx \leq \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx &\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} |f(x)| \left|\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\right| dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f(x)\, g_k(x)\, dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} |g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

gerçeklenir. ∎

Lemma 4.3 $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F_n \subset \Omega$ fonksiyonlarını Ω da h.h.y. $\chi_{F_n} \downarrow 0$ olacak biçimde seçelim ve $g \in L^{(p'}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\left\|g\chi_{F_n}\right\|_{L^{(p'}(\Omega)} \to 0$$

gerçeklenir.

İspat. Genelliği bozmadan g nin negatif olmayan bir fonksiyon olduğunu kabul edebiliriz. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $g_k \geq 0$ olmak üzere $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ olsun öyle ki

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} (g_k(x))^{(p-\varepsilon)'} dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} < \infty$$

sağlansın. Şimdi

$$\alpha_{k,n} = \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} (g_k(x))^{(p-\varepsilon)'} \chi_{F_n} dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$$

olsun. Bu durumda

$$\left\|g\chi_{F_n}\right\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,n} < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gerçeklenir. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,1} < \infty$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_{k,n} \downarrow 0$ olduğundan ispat tamamlanır. ∎

Sonuç 4.2 $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \subset \Omega$ fonksiyonlarını Ω da h.h.y. $\chi_{E_n} \uparrow \chi_\Omega$ olacak biçimde seçelim ve $g \in L^{(p'}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{(p'}$ de

$$g\chi_{E_n} \to g$$

gerçeklenir.

İspat. Lemma 4.3 te $F_n = \Omega - E_n$ alınırsa istenilen elde edilir. ∎

Sonuç 4.3 $g \geq 0$, $L^{(p'}(\Omega)$ da herhangi bir fonksiyon ve (g_n) Ω da h.h.y. g ye yakınsayan negatif olmayan fonksiyonların bir artan dizisi olsun. Bu durumda

$$\|g_n\|_{L^{(p'}(\Omega)} \uparrow \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

gerçeklenir.

İspat. $\|.\|_{L^{(p'}}$ normunun sıra koruma özelliğinden dolayı $\|g_n\|_{L^{(p'}(\Omega)}$ artan dizidir ve $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$ sağlanır.
Diğer taraftan Sonuç 4.2 den her $\varepsilon > 0$ için bir M vardır öyle ki

$$\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)} - \varepsilon \leq \|\min\{M, g\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

gerçeklenir.
Ω da h.h.y. $0 \leq \min\{M, g_n\} \uparrow \min\{M, g\}$ ve $\min\{M, g\} \in L^\infty(\Omega)$ olduğundan $L^{p'+1}(\Omega)$ da
$\min\{M, g_n\} \to \min\{M, g\}$ olur. Böylece $L^{(p'}(\Omega)$ da $\min\{M, g_n\} \to \min\{M, g\}$ sağlanır. O halde $v \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\|\min\{M, g\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} - \varepsilon \leq \|\min\{M, g_v\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|\min\{M, g\}\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists v \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)} - 2\varepsilon \leq \|\min\{M, g_v\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|g_v\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

sağlanır. ∎

Lemma 4.4 $f \in L^{\infty}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx = \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

olacak biçimde $g \in L^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonu vardır.

İspat. Eğer $f \in L^{\infty}(\Omega)$ ise bu durumda

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0$$

olur. Dolayısıyla $\sigma = \sigma(f) \in]0, p-1[$ olmak üzere

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \left(\frac{\sigma}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\sigma}\, dx\right)^{\frac{1}{p-\sigma}} = \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}$$

gerçeklenir.

$g \in L^{\infty}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx = \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\sigma}\, dx\right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |g(x)|^{(p-\sigma)'}\, dx\right)^{\frac{1}{(p-\sigma)'}}$$

sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx &\leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |g(x)|^{(p-\varepsilon)'}\, dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&\leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}\, \sigma^{-1/(p-\sigma)} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |g(x)|^{(p-\sigma)'}\, dx\right)^{\frac{1}{(p-\sigma)'}} \\
&= \sigma^{1/(p-\sigma)} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\sigma}\, dx\right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \sigma^{-1/(p-\sigma)} \\
&\quad \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |g(x)|^{(p-\sigma)'}\, dx\right)^{\frac{1}{(p-\sigma)'}} \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Aşağıda vereceğimiz sonuçta literatürde $\sum^{p}$ ile gösterilen L^{∞} un $L^{p)}$ deki kapanışını göz önüne alacağız. Banach fonksiyon uzayı teorisindekine benzer bir notasyon kullanmak için bu uzayı $L_b^{p)}$ ile gösterelim. $L_b^{p)}$ nin $L^{p)}$ de kapsanmadığı bilinmektedir. Bu yüzden $L_b^{p)}$ bir Banach fonksiyon uzayı değildir.

Sonuç 4.4 $f \in L_b^{p)}$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{\substack{g \neq 0 \\ g \in L^{(p'}(\Omega)}} \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx}{\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}}$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 4.7 den

$$\sup_{\substack{g \neq 0 \\ g \in L^{(p'}(\Omega)}} \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx}{\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}} \leq \sup_{\substack{g \neq 0 \\ g \in L^{(p'}(\Omega)}} \frac{\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}}{\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}} = \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}$$

elde edilir. Lemma 4.4 ten

$$\sup_{\substack{g \neq 0 \\ g \in L^{(p'}(\Omega)}} \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx}{\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}} \geq \sup_{\substack{g \neq 0 \\ g \in L^{(p'}(\Omega)}} \frac{\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}}{\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}} = \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır. ■

4.3.2 Small Lebesgue uzayları

Tanım 4.6 Small Lebesgue uzayı $L^{p)'} = \left\{ g \in \mathcal{M}_0 : \|g\|_{p)'} < \infty \right\}$ ile tanımlanır, burada $\psi \in L^{(p'}(\Omega)$ olmak üzere $\|g\|_{p)'}$ normu

$$\|g\|_{L^{p)'}(\Omega)} = \sup_{\substack{0 \leq \psi \leq |g| \\ \psi \in L^{(p'}(\Omega)}} \|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

ile verilir.

Bu tanıma göre

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)} &\leq \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}, \qquad \forall g \in \mathcal{M}_0 \\ \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)} &= \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}, \qquad \forall g \in L^{(p'} \end{aligned}$$

gerçeklenir (Capone ve Fiorenza 2005).

Önerme 4.3 $L^{p)'}$ small Lebesgue uzayı bir Banach fonksiyon uzayıdır.

İspat. $L^{p)'}$ nin Banach fonksiyon uzayı olması için $\|g\|_{L^{p)'}}$ nin sağlaması gereken bütün özelliklerini Teorem 4.6 kullanılarak ispatlamak kolaydır. Geriye sadece $L^{p)'}$ uzayının

$$\Omega \text{ da h.h.y. } 0 \leq g_n \uparrow g \Rightarrow \|g_n\|_{L^{p)'}(\Omega)} \uparrow \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}$$

Fatou özelliğini sağladığını göstermek kalır.

$\|.\|_{L^{p)'}(\Omega)}$ normunun sıra koruma özelliğinden dolayı $\|g_n\|_{L^{p)'}(\Omega)}$ artan dizidir ve

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^{p)'}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}$$

gerçeklenir.

Şimdi $g \in L^{p)'}(\Omega)$ ve $g \notin L^{p)'}(\Omega)$ olma durumlarını göz önüne alalım.

1. Durum: $g \in L^{p)'}(\Omega)$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $\psi \in L^{(p'}(\Omega)$ için

$$0 \leq \psi \leq |g| \text{ ve } \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)} - \varepsilon \leq \|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}$$

gerçeklenir.

Ω da h.h.y. $0 \leq \min\{\psi, g_n\} \uparrow \psi$ olur. Böylece Sonuç 4.3 ten $\|\min\{\psi, g_n\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} \uparrow \|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)}$ sağlanır. $\upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)} - \varepsilon \leq \|\min\{\psi, g_\upsilon\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

olur. O halde $\forall\varepsilon > 0$ için $\upsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\|g\|_{L^{p)'}(\Omega)} - 2\varepsilon \leq \|\min\{\psi, g_\upsilon\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} \leq \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}$$

gerçeklenir.

2. Durum: $g \notin L^{p)'}(\Omega)$ olsun. $M > 0$ sabiti ve $\psi \in L^{(p'}(\Omega)$ için $0 \leq \psi \leq |g|$ ve $\|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)} > M$ olur.

Ω da h.h.y. $0 \leq \min\{\psi, g_n\} \uparrow \psi$ sağlanır. Böylece Sonuç 4.3 ten $\|\min\{\psi, g_n\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} \uparrow \|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)}$ gerçeklenir. $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\|\min\{\psi, g_\upsilon\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} > M$ olur. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\upsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\|g_\upsilon\|_{L^{p)'}(\Omega)} \geq \|\min\{\psi, g_\upsilon\}\|_{L^{(p'}(\Omega)} > M$$

sağlanır. ■

Şimdi grand Lebesgue uzayları için Hölder tipi eşitsizliği ispatlayacağız.

Teorem 4.8 $1 < p < \infty$ ve $n \geq 1$ için $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçüsü sonlu bir küme olsun. $\forall f \in L^{p)}$, $g \in L^{p)'}$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx \leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}$$

Hölder tipi eşitsizliği sağlanır.

İspat. Herhangi bir $f \in L^{p)}$ ve $g \in \mathcal{M}_0$ için Teorem 4.7 den

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|\,|g(x)|\, dx &= \sup_{\substack{0\leq\psi\leq|g| \\ \psi\in L^\infty(\Omega)}} \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|\,\psi(x)\, dx \\
&\leq \sup_{\substack{0\leq\psi\leq|g| \\ \psi\in L^{(p'}(\Omega)}} \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|\,\psi(x)\, dx \\
&\leq \sup_{\substack{0\leq\psi\leq|g| \\ \psi\in L^{(p'}(\Omega)}} \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)} = \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.5 $f \in L_b^{p)}$ olsun. O halde

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{\substack{g\neq 0 \\ g\in L^{p)'}(\Omega)}} \frac{\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx}{\|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}} = \|f\|_{\left(L^{p)'}\right)'(\Omega)}$$

gerçeklenir.

Önerme 4.4 $L^{p)'}$ ve $\left(L^{p)'}\right)'$ yeniden düzenleme altında değişmez uzaylardır. Ayrıca $\left(L^{p)'}\right)' = L^{p)}$ gerçeklenir.

İspat. Yeniden düzenleme altında değişmez uzayın ilişik uzayı yeniden düzenleme altında değişmez uzay olduğundan (Bennett ve Sharpley 1988) $\left(L^{p)'}\right)'$ uzayının yeniden düzenleme altında değişmez olduğunu göstermek yeterlidir.
$f \in \left(L^{p)'}\right)'$ ve $f_n = \min\{n, f\} \in L^\infty$ olsun. O halde

$$\Omega \text{ da h.h.y. } 0 \leq f_n \uparrow f \tag{4.8}$$

olur. Böylece

$$[0, |\Omega|) \text{ da h.h.y. } 0 \leq (f_n)^* \uparrow f^*$$

sağlanır, burada $(f_n)^*$ ve f^* sırasıyla f_n ve f in azalan yeniden düzenlemesidir. $\left(L^{p)'}\right)'$ Fatou özelliğini sağladığından (4.8) gereğince

$$\|f_n\|_{\left(L^{p)'}(\Omega)\right)'} \uparrow \|f\|_{\left(L^{p)'}(\Omega)\right)'} \tag{4.9}$$

olur. Diğer taraftan

$$\|(f_n)^*\|_{L^{p)}(0,|\Omega|)} \uparrow \|f^*\|_{L^{p)}(0,|\Omega|)} \tag{4.10}$$

gerçeklenir. Sonuç 4.5 ten

$$\|f_n\|_{\left(L^{p)'}(\Omega)\right)'} = \|f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} = \|(f_n)^*\|_{L^{p)}(0,|\Omega|)} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.9), (4.10), (4.11) den $\|f\|_{\left(L^{p)'}(\Omega)\right)'} = \|f^*\|_{L^{p)}(0,|\Omega|)}$ sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.9 (**Lorentz-Luxemburg Teoremi**) Her X Banach fonksiyon uzayı X'' ikinci ilişik uzayı ile çakışır. Başka bir değişle $f \in X \Longleftrightarrow f \in X''$ dir ve bu durumda

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}$$

sağlanır (Bennett ve Sharpley 1988).

Önerme 4.4 ve klasik Lorentz-Luxemburg Teoreminin sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.10 $L^{p)}$ uzayı $L^{p)'}$ uzayının ilişik uzayıdır ve tersine $L^{p)'}$ uzayı da $L^{p)}$ uzayının ilişik uzayıdır.

Şimdi $L^{p)}$ uzayının yansımalı olup olmadığını inceleyelim.

Lemma 4.5 X Banach fonksiyon uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul X ve X' uzayının mutlak sürekli norma sahip olmasıdır
(Bennett ve Sharpley 1988).

Önerme 4.5 $L^{p)}$ uzayı yansımalı değildir.

İspat. $L^{p)}$ uzayı yansımalı olmadığını göstermek için mutlak sürekli norma sahip olmayan bir fonksiyon oluşturmak yeterlidir.
Genelliği bozmadan $L^{p)}(0,1)$ uzayını ve $f(x) = x^{-1/p}$ fonksiyonunu ele alalım.
f fonksiyonu mutlak sürekli norma sahip değildir. Böylece ispat tamamlanır. ∎

5. GRAND LEBESGUE UZAYLARINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Bu bölümde maksimal operatör ve Calderón-Zygmund operatörünün grand Lebesgue uzaylarında sınırlılığı ispatlanacaktır. Ayrıca I_α Riesz potansiyeli grand Lebesgue uzaylarında sınırlı olmadığından (Teorem 5.4)

$$\|f\|_{L^{p),\theta}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

olmak üzere $L^{p),\theta}(\Omega)$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzaylarında I_α nın sınırlılığı ispat edilecektir.

İlk olarak

$$Mf(x) = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

ile verilen $Mf : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty]$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun grand Lebesgue uzaylarında sınırlılığını ispatlayalım, burada $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ve $d =$çap$(\Omega) = \sup\{|x-y|\,;\ x,y\in\Omega\}$ dır.

Teorem 5.1 $1 < p < \infty$ ve $d < \infty$ olsun. Bu durumda M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzaylarında sınırlıdır (Meskhi 2011).

İspat. Grand Lebesgue uzaylarındaki norm tanımından

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{L^{p)}(\Omega)} &= \max\left\{ \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |Mf(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right. \\ &\qquad \left. ;\ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |Mf(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\} \\ &=: \max\{A_1, A_2\} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$\sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p-1$, $\frac{1}{p-\varepsilon} > \frac{1}{p-\sigma}$ ($\sigma < \varepsilon < p-1$ iken) ve Hölder eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon\left|\Omega\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Mf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\left|\Omega\right|^{-1} \int_{\Omega} \left|Mf\left(y\right)\right|^{p-\varepsilon} dy\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \quad ; \; q \to \frac{p-\sigma}{p-\varepsilon}, \; q' \to \frac{p-\sigma}{\varepsilon-\sigma} \\
&\leq \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left[\left(\left|\Omega\right|^{-1} \int_{\Omega} \left|Mf\left(y\right)\right|^{p-\sigma} dy\right)^{\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}} \left(\int_{\Omega} dy\right)^{\frac{\varepsilon-\sigma}{p-\sigma}}\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left[\left(\left|\Omega\right|^{-1} \left|\Omega\right|^{\frac{\varepsilon-\sigma}{p-\sigma}} \int_{\Omega} \left|Mf\left(y\right)\right|^{p-\sigma} dy\right)^{\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}}\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left[\left(\left|\Omega\right|^{-\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}} \int_{\Omega} \left|Mf\left(y\right)\right|^{p-\sigma} dy\right)^{\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}}\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\left|\Omega\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \|Mf\|_{L^{p-\sigma}(\Omega)} \\
&\leq (p-1)\left|\Omega\right|^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \|Mf\|_{L^{p-\sigma}(\Omega)} \\
&\leq (p-1)\,\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left|\Omega\right|^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Mf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan Teorem 3.1 i kullanarak

$$
\begin{aligned}
\|Mf\|_{L^{p)}(\Omega)} &\leq p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left|\Omega\right|^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Mf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&\leq c_0\, p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left(\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\varepsilon\left|\Omega\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&\leq c_0\, p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \left[\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left(\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right] \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. σ, yeterince küçük olduğu için

$$
C_{p,\sigma} := c_0\, p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \left[\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left((p-\varepsilon)'\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right]
$$

sonludur. Yani $C_{p,\sigma} \leq c_0\, p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} (p-\sigma)'$ gerçeklenir.

Dolayısıyla M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p)}(\Omega)$ da sınırlıdır. ■

Şimdiki teoremde Calderón-Zygmund operatörünün grand Lebesgue uzaylarında sınırlılığını inceleyeceğiz.

Teorem 5.2 $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda T Calderón-Zygmund operatörü $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzaylarında sınırlıdır (Meskhi 2011).

İspat. $0 < \sigma < p-1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^{p)}(\Omega)} &= \max\left\{ \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left(\varepsilon\, |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\varepsilon}\, dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} ; \right. \\
&\quad \left. \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon\, |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\varepsilon}\, dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\} \\
&=: \max\{A_1, A_2\}
\end{aligned}$$

olur. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon\, |\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\varepsilon}\, dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\sigma}\, dy \right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \\
&\leq (p-1)\, \sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\sigma}\, dy \right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \\
&\leq (p-1)\, \sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left(\varepsilon\, |\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak Teorem (3.3) den

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^{p)}(\Omega)} &\leq \left[(p-1)\, \sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} + 1\right] \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left(\varepsilon\, |\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&\leq \left[(p-1)\, \sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} + 1\right] \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\varepsilon} \left(\varepsilon\, |\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&= \left[(p-1)\, \sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} + 1\right] \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\varepsilon}
\end{aligned}$$

bulunur, burada

$$C_{p,\varepsilon} = \begin{cases} \frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1} + \frac{p-\varepsilon}{2-p+\varepsilon}, & 1 < p < 2 \\ p - \varepsilon + \frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-2}, & p > 2. \end{cases}$$

ve

$$\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\varepsilon} \leq \begin{cases} \frac{p-\sigma}{p-\sigma-1} + \frac{p}{2-p}, & 1 < p < 2, \\ \frac{p-\sigma}{p-\sigma-1} + \frac{p-\sigma}{p-\sigma-2}, & p > 2, \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla T Calderón-Zygmund operatörü $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayında sınırlıdır. ■

Riesz potansiyelinin grand Lebesgue uzaylarında sınırlı olmadığı bilindiğinden (Meskhi 2010)

$$\|f\|_{L^{p),\theta}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

olmak üzere $L^{p),\theta}$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılığını inceleyeceğiz.

Teorem 5.3 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $\theta_2 \geq \left[1 + \frac{\alpha q}{n}\right] \theta_1$, $\theta_1 > 0$ olsun. Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1}$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzaylarından $L^{q),\theta_2}$ ye sınırlıdır (Meskhi 2011).

İspat. İspatı $\theta_2 = \left[1 + \frac{\alpha q}{n}\right] \theta_1$ için yapmak yeterlidir. Çünkü $\theta_2 > \left[1 + \frac{\alpha q}{n}\right] \theta_1$ ve yeterince küçük ε için $\varepsilon^{\theta_2} \leq \varepsilon^{\left[1+\frac{\alpha q}{n}\right]\theta_1}$ dir.

$$\varphi(u) := \left[p + \frac{(u-q)\, n}{n - \alpha (u-q)} \right]^{\frac{n-(u-q)\alpha}{n}}$$

olsun. Bu durumda $t \to 0^+$ için $\varphi(t) \sim t^{1+\frac{\alpha q}{n}}$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \left[p + \frac{(t-q)\, n}{n - \alpha (t-q)} \right]^{\frac{n-(t-q)\alpha}{n}} &= \left[p - \frac{qn}{n+\alpha q} \right]^{1+\frac{\alpha q}{n}} ; \ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} \Rightarrow p = \frac{qn}{n+\alpha q} \\ &= \left[\frac{qn}{n+\alpha q} - \frac{qn}{n+\alpha q} \right]^{1+\frac{\alpha q}{n}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1+\frac{\alpha q}{n}} = 0$$

dır. Dolayısıyla $\psi(t) := \varphi\left(t^{\theta_1}\right)$ olmak üzere I_α, Riesz potansiyelinin $L^{p),\theta_1}$ den $L^{q),\psi(.)}$ ye sınırlı olduğunu ispatlamak yeterlidir. $\sigma > 0$ yeterince küçük bir sayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{L^{q),\varphi}(\Omega)} &= \max\left\{\sup_{0<\varepsilon\le\sigma}\left(\psi(\varepsilon)|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|I_\alpha f\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega)};\right.\\
&\left.\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1}\left(\psi(\varepsilon)|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|I_\alpha f\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega)}\right\}\\
&=: \max\{A_1, A_2\}
\end{aligned}$$

olur. Hölder eşitsizliğinden ve $\sigma < \varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sup_{\sigma<\varepsilon<q-1}(\psi(\varepsilon))^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left(|\Omega|^{-1}\int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon}dy\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\\
&\le \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1}(\psi(\varepsilon))^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right]\left(|\Omega|^{-1}\int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\sigma}dy\right)^{\frac{1}{q-\sigma}}\\
&= \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1}(\psi(\varepsilon))^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right]\psi(\sigma)^{-\frac{1}{q-\sigma}}\psi(\sigma)^{\frac{1}{q-\sigma}}\left(|\Omega|^{-1}\int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\sigma}dy\right)^{\frac{1}{q-\sigma}}\\
&\le \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1}(\psi(\varepsilon))^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right]\psi(\sigma)^{-\frac{1}{q-\sigma}}\sup_{0<\varepsilon\le\sigma}\left(\psi(\varepsilon)|\Omega|^{-1}\int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon}dy\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi $0 < \varepsilon \le \sigma$ olsun. ε için $\frac{1}{p-\eta} - \frac{1}{q-\varepsilon} = \frac{\alpha}{n}$ olacak biçimde η tanımlayabiliriz. σ yeterince küçük iken η da yeterince küçük pozitif sayıdır; ayrıca $u \to 0^+$ iken $\varphi(u) \sim u^{1+\frac{\alpha q}{n}}$ dir; dolayısıyla $\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}} = 1$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p-\eta} - \frac{1}{q-\varepsilon} &= \frac{\alpha}{n} \Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q-\varepsilon}\\
&\Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = \frac{\alpha(q-\varepsilon)+n}{n(q-\varepsilon)} \Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = -\frac{n-\alpha(\varepsilon-q)}{n(\varepsilon-q)}\\
&\Rightarrow p-\eta = -\frac{n(\varepsilon-q)}{n-\alpha(\varepsilon-q)} \Rightarrow \eta = p + \frac{n(\varepsilon-q)}{n-\alpha(\varepsilon-q)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}} &= \psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left[p + \frac{n(\varepsilon-q)}{n-\alpha(\varepsilon-q)}\right]^{\left[\frac{n-\alpha(\varepsilon-q)}{n}\right]\left(-\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}\right)}\\
&= \left[\varphi\left(\varepsilon^{\theta_1}\right)\right]^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\varphi(\varepsilon)^{-\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\\
&\sim \left[\left(\varepsilon^{\theta_1}\right)^{1+\frac{\alpha q}{n}}\right]\left[\varepsilon^{-\left(1+\frac{\alpha q}{n}\right)\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\right] = 1
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda Teorem 3.4 den

$$\begin{aligned}
\left(\psi(\varepsilon)|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|I_\alpha f\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega)} &\leq \bar{c}(p-\eta,\alpha,n)\left(\psi(\varepsilon)|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\eta}(\Omega)} \\
&= \bar{c}(p-\eta,\alpha,n)\,\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\,\eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}}\,|\Omega|^{-\frac{1}{q-\varepsilon}}\,\eta^{\frac{\theta_1}{p-\eta}}\|f\|_{L^{p-\eta}(\Omega)} \\
&= \bar{c}(p-\eta,\alpha,n)\,|\Omega|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p-\eta}}\,\eta^{\frac{\theta_1}{p-\eta}}\|f\|_{L^{p-\eta}(\Omega)} \\
&\leq \left[\sup_{0<\eta\leq\sigma_1}\bar{c}(p-\eta,\alpha,n)\right]|\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L^{p),\theta_1}(\Omega)}
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q),\theta_2}(\Omega)} \leq \left[\sup_{0<\eta\leq\sigma_1}\bar{c}(p-\eta,\alpha,n)\right]|\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L^{p),\theta_1}(\Omega)},$$

burada

$$\bar{c}(p-\eta,\alpha,n) = c\frac{n}{\alpha\left[n-\alpha(p-\eta)\right]}\left[\frac{p-\eta}{p-\eta-1}\right]^{\frac{1}{q-\varepsilon}},$$

c, p,η ve α dan bağımsız bir sabit; σ_1 yeterince küçük pozitif sayıdır. Eğer σ_1 yeterince küçük ise $0<\eta\leq\sigma_1$ olduğunda η_0 için $n-\alpha(p-\eta)\geq\eta_0>0$, $\frac{p-\eta}{p-\eta-1}\leq p'+1$ dir. ■

$\theta_2<\left[1+\frac{\alpha q}{n}\right]\theta_1$, $\theta_1>0$ olduğunda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1}$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzaylarından $L^{q),\theta_2}$ ye sınırlı olmaz. Aşağıdaki teoremde $n=1$, $\Omega=[0,1]$ özel durumu için I_α nın sınırlı olmadığını göstereceğiz.

Teorem 5.4 $0<\alpha<1$, $1<p<\frac{1}{\alpha}$, $q=\frac{p}{1-\alpha p}$ ve θ_1 ve θ_2 de $\theta_2<(1+\alpha q)\,\theta_1$ olacak biçimde pozitif sayılar olsun. Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1}$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzaylarından $L^{q),\theta_2}$ ye sınırlı değildir (Meskhi 2010).

İspat. Aksini kabul edelim, yani I_α $L^{p),\theta_1}$ den $L^{q),\theta_2}$ ye sınırlı olsun. Buradan c f ye bağlı olmayan pozitif sabit olmak üzere

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q),\theta_2}([0,1])} \leq c\,\|f\|_{L^{p),\theta_1}([0,1])} \tag{5.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

$J \subset [0,1]$ olacak biçimde bir aralık olmak üzere (5.1) de $f = \chi_J$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|J| &= \left| \int\limits_J dy \right| \\
&= \left| \int\limits_J \frac{dy}{|x-y|^{1-\alpha}} |x-y|^{1-\alpha} \right| \\
&\leq \int\limits_J \frac{dy}{|x-y|^{1-\alpha}}; \quad 0 < |x-y| < 1 \\
&\leq \left(\int\limits_J \frac{dy}{|x-y|^{1-\alpha}} \right)^{1/\alpha} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1
\end{aligned}$$

olur ve

$$(I_\alpha f)(x) = \int\limits_J \frac{dy}{|x-y|^{1-\alpha}} \geq |J|^\alpha, \quad x \in J$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q),\theta_2}([0,1])} \geq |J|^\alpha \|\chi_J\|_{L^{q),\theta_2}([0,1])}$$

gerçeklenir. (5.1) den

$$|J|^\alpha \|\chi_J\|_{L^{q),\theta_2}([0,1])} \leq \|\chi_J\|_{L^{p),\theta_1}([0,1])} \tag{5.2}$$

olur, burada c J ye bağlı olmayan pozitif sabittir.

$0 < \varepsilon_J < p-1$ olmak üzere

$$\sup_{0<\varepsilon\leq p-1} \left(\varepsilon^{\theta_1} |J|\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \left(\varepsilon_J^{\theta_1} |J|\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \tag{5.3}$$

eşitliği sağlansın. İddia ediyoruz ki

$$\lim_{|J|\to 0} \varepsilon_J = 0$$

olur. Aksini kabul edersek $|J_n| \to 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_{J_n} \geq \lambda > 0$ olacak biçimde J_n aralıklarının bir dizisi ve bir λ pozitif sayısı vardır. Açık olarak

$$\frac{|J_{n_0}|^{\frac{1}{\theta_1}} (p-1)}{e} < e^{-\frac{p}{\lambda/2}}$$

olacak biçimde J_{n_0} seçebiliriz. $f(x) = \left(x^{\theta_1} |J_{n_0}|\right)^{\frac{1}{p-x}}$ olmak üzere her $x \in [\lambda/2, p-1]$ için $f'(x) < 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten $\lambda/2 \leq x \leq p-1$ için

$$\frac{|J_{n_0}|^{\frac{1}{\theta_1}} x}{e} \leq \frac{|J_{n_0}|^{\frac{1}{\theta_1}} (p-1)}{e} < e^{-\frac{p}{\lambda/2}} \leq e^{-\frac{p}{x}}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı kolayca görülür. Buradan

$$\ln f(x) = \frac{1}{p-x} \ln\left(x^{\theta_1} |J_{n_0}|\right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (p-x)^{-2} \ln\left(x^{\theta_1} |J_{n_0}|\right) + \frac{1}{p-x} \frac{\theta_1 x^{\theta_1 - 1} |J_{n_0}|}{x^{\theta_1} |J_{n_0}|}$$

$$f'(x) = f(x) \frac{1}{p-x} \left[\frac{\ln\left(x^{\theta_1} |J_{n_0}|\right)}{p-x} + \frac{\theta_1}{x}\right]$$

formülünü ve

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{|J_{n_0}|^{\frac{1}{\theta_1}} x}{e} < e^{-\frac{p}{x}}$$

olduğunu kullanırsak $f'(x) < 0$ olduğunu elde ederiz.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ eşitliği ile birlikte yukarıdaki hesaplamalar $\varepsilon_{J_{n_0}} < \lambda$ olduğunu gösterir, burada $\varepsilon_{J_{n_0}}$

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq p-1} \left(\varepsilon^{\theta_1} |J_{n_0}|\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \left(\varepsilon_{J_{n_0}}^{\theta_1} |J_{n_0}|\right)^{1/\left(p - \varepsilon_{J_{n_0}}\right)}$$

ile tanımlanır. Bu ise her n için $\varepsilon_{J_n} \geq \lambda > 0$ olmasıyla çelişir. Ayrıca

$$\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p - \varepsilon_J} - \frac{1}{q - \eta_J}$$

olacak biçimde η_J seçelim. Buradan

$$q - \eta_J = \frac{p - \varepsilon_J}{1 - \alpha(p - \varepsilon_J)}$$

$$\eta_J = q - \frac{p - \varepsilon_J}{1 - \alpha(p - \varepsilon_J)} \tag{5.4}$$

olur. (5.2) ve (5.3) ten

$$|J|^{\alpha} \sup_{0 < \eta \leq q-1} \left(\eta^{\theta_2} |[0,1]|^{-1}\right)^{\frac{1}{q-\eta}} |J|^{\frac{1}{q-\eta}} \leq c \sup_{0 < \varepsilon \leq p-1} \left(\varepsilon^{\theta_1} |[0,1]|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} |J|^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$|J|^{\alpha} \eta_J^{\frac{\theta_2}{q - \eta_J}} |J|^{\frac{1}{q-\eta}} \leq c \varepsilon_J^{\frac{\theta_1}{p - \varepsilon_J}} |J|^{\frac{1}{p - \varepsilon_J}} \tag{5.5}$$

elde edilir, burada eğer ε_J yeterince küçük ise bu durumda $0 < \eta_J < q - 1$ olması gerçeğini kullandık.(5.5) eşitsizliğinden

$$\eta_J^{\frac{\theta_2}{q - \eta_J}} \varepsilon_J^{-\frac{\theta_1}{p - \varepsilon_J}} \leq c \tag{5.6}$$

sağlanır. Ayrıca (5.4) ve (5.6) eşitsizlikleri

$$\left(q - \frac{p - \varepsilon_J}{1 - \alpha(p - \varepsilon_J)}\right)^{\frac{\theta_2}{p - \varepsilon_J} - \alpha\theta_2} \varepsilon_J^{-\frac{\theta_1}{p - \varepsilon_J}} \varepsilon_J^{\frac{\theta_2}{p - \varepsilon_J} - \alpha\theta_2} \varepsilon_J^{-\left(\frac{\theta_2}{p - \varepsilon_J} - \alpha\theta_2\right)} \leq c$$

$$\left(\frac{q-\frac{p-\varepsilon_J}{1-\alpha(p-\varepsilon_J)}}{\varepsilon_J}\right)^{\frac{\theta_2}{p-\varepsilon_J}-\alpha\theta_2} \varepsilon_J^{-\frac{\theta_1}{p-\varepsilon_J}+\frac{\theta_2}{p-\varepsilon_J}-\alpha\theta_2} \leq c \tag{5.7}$$

olmasını gerektirir. $|J| \to 0$ iken limit alınırsa (5.7) nin sol tarafı sonsuza gider çünkü birinci çarpanın limiti $\left[\frac{1}{(1-\alpha p)^2}\right]^{\frac{\theta_2}{p}-\alpha\theta_2}$ dir ve

$$\lim_{|J|\to 0} \varepsilon_J^{\frac{\theta_2-\theta_1}{p-\varepsilon_J}-\alpha\theta_2} = \lim_{|J|\to 0} \varepsilon_J^{\frac{\theta_2-\theta_1}{p-\varepsilon}-\alpha\theta_2} = \infty$$

dur, burada $\frac{\theta_2}{\theta_1} < 1+\alpha q \Leftrightarrow \frac{\theta_2-\theta_1}{p} - \alpha\theta_2 < 0$ ifadelerini göz önüne aldık. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.4 de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $q = \frac{np}{n-\alpha p}$ ve $\theta_1 = \theta_2 = 1$ alındığında $\theta_2 < \left(1+\frac{\alpha q}{n}\right)\theta_1$ bağıntısı $1 < \left(1+\frac{\alpha q}{n}\right)$ olarak karşımıza çıkar bu ise I_α Riesz potansiyelinin $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayından $L^{q)}(\Omega)$ ya sınırlı olmadığını gösterir.

6. SONUÇ

T. Iwaniec ve C. Sbordone tarafından 1992 yılında Jacobian'in integrallenebilme özelliklerini çalışırken ortaya çıkan $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayları, $n \geq 2$ için $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçüsü sonlu bir küme ve $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

olacak biçimde $f \in \mathcal{M}_0$ fonksiyonlarının sınıfından oluşur, burada $\mathcal{M}_0$, Ω üzerinde tanımlı reel değerli ve sonlu ölçülü fonksiyonların kümesidir. Bu çalışmada $L^{p)}$ grand Lebesgue uzaylarının temel özellikleri incelenmiştir. Ardından, maksimal operatör ve Calderón-Zygmund operatörlerinin $L^{p)}$ grand Lebesgue uzaylarında sınırlılığı ispatlanmıştır. Daha sonra I_α Riesz potansiyeli grand Lebesgue uzaylarında sınırlı olmadığından (Teorem 5.4) $\varphi\,(0, p-1)$, $1 < p < \infty$, üzerinde tanımlı sürekli pozitif bir fonksiyon ve $\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = 0$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p),\varphi(.)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varphi(\varepsilon)}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

olacak biçimde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sınıfından oluşan $L^{p),\varphi(.)}$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzayı tanımlanmış; $\theta \geq 0$ ve $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^\theta$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p),\theta}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

özel durumunda Riesz pontansiyelinin sınırlılığı ispatlanmıştır.

Teorem 6.1 $1 < p < \infty$ ve $d < \infty$ olsun. Bu durumda M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzaylarında sınırlıdır (Meskhi 2011).

Teorem 6.2 $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda T Calderón-Zygmund operatörü $L^{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzaylarında sınırlıdır (Meskhi 2011).

Teorem 6.3 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $\theta_2 \geq \left[1 + \frac{\alpha q}{n}\right] \theta_1$, $\theta_1 > 0$ olsun. Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1}$ genelleştirilmiş grand Lebesgue uzaylarından $L^{q),\theta_2}$ ye sınırlıdır (Meskhi 2011).

KAYNAKLAR

Adams, D.R. 1975. A note on Riesz potentials. Duke Math. J., 42(4), 765–778.

Bennett, C. and Sharpley, R. 1988. Interpolation of operators. Academic Press, Boston.

Burenkov, V.I., Guliev, V.S., Tararykova, T.V., Serbetci, A. 2008. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in Local Morrey-Type spaces. Doklady Akademii Nauk, Vol. 422, No. 1, 11–14.

Capone, C. and Fiorenza, A. 2005. On small Lebesgue spaces. J. Funct. Spaces Appl., 3, 73–89.

Capone, C., Formica, M.R. and Giova, R. 2005. Grand Lebesgue spaces with respect to measurable function. Nonlinear Analysis 85, 125–131.

Castillo, R.E. and Rafeiro, H. 2005. Inequalities with conjugate exponents in grand Lebesgue spaces. Hacet. J. Math. Stat., 44 (1), 33-39.

Coifman, R.R. and Weiss, G. 1971. Analyse harmonique non-commutative sur certains Espaces Homoge´nes. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242, Springer-Verlag, Berlin.

Di Fazio, G. and Ragusa, M.A. 1991. Commutators and Morrey spaces. Boll. U.M.I. 7(5-A), 323–332.

Duandikoetxea, J. 2001. Fourier analysis. Graduate Studies in Math., Vol. 29, AMS, Providence, RI.

Dyn'kin, E.M. 1991. Methods of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory. Commutative Harmonic Analysis I. Encyclopaedia of Math. Sci., 15, 167–259.

Edmunds, D.E., Kokilashvili, V., and Meskhi, A. 2002. Bounded and compact integral operators. Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Eridani, A., Kokilashvili, V., and Meskhi, A. 2009. Morrey spaces and fractional integral operators. Expo. Math., 27, 227–239.

Fiorenza, A. and Karadzhov, G.E. 2004. Grand and small Lebesgue spaces and their analogs. Consiglio Nazionale delle Ricerche, Istituto per le Applicazioni del Calcolo 'Mauro Picone', Raporto Technico No. 316/06.

Fiorenza, A., Gupta, B., and Jain, P. 2008. The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces. Stud. Math., 188(2), 123–133.

Fiorenza, A. 2000. Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces. Collect. Math., 51(2), 131–148.

Giaquinta M. 1983. Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Greco, L., Iwanie, T., and Sbordon, C. 1997. Inverting the p-harmonic operator. Manuscripta Math. 92, 249–258.

Hedberg, L. 1972. On certain convolution inequalities. Proc. Am. Math. Soc. 36, 505–510.

Iwaniec, T. and Sbordone, C. 1992. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. Arch. Rational Mech. Anal. 119, 129–143.

Iwaniec, T. and Sbordone, C. 1994. Weak minima of variational integrals. J. Reine Angew. Math. 454, 143–161.

Iwaniec, T. and Sbordone, C. 1998. Riesz transforms and elliptic pde's with VMO coefficients. J. Analyse Math. 74, 183–212.

Kokilashvili, V. 2009. Boundedness criterion for the Cauchy singular integral operator in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemann problem. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 151, 129–133.

Kokilashvili, V. 2012. Trace and one-weighted inequalities for fractional integrals in Grand Lebesgue spaces. Memorial seminar dedicated to Professor Miroslav Krbec, November 8-9, Prague, Czech Republic.

Kokilashvili, V. and Meskhi, A. 2008. Maximal and singular integrals in Morrey spaces with variable exponent. Arm. J. Math. 1, 18–28.

Kokilashvili, V. and Meskhi, A. 2009. A note on the boundedness of the Hilbert transform in weighted grand Lebesgue spaces. Georgian Math. J., 16(3), pp. 547–551.

Kokilashvili, V. and Meskhi, A. 2010. Maximal functions and potentials in variable exponent Morrey spaces with non-doubling measure. Complex Var. Elliptic Eqns., 55(8), 923–936.

Kristiansson, E., 2002. Decreasing rearrangement and Lorentz L(p, q) Spaces. Master Thesis, Lulea University of Technology, Gothenburg, S-412 96.

Meskhi, A. 2010. Criteria for the boundedness of potential operators in grand Lebesgue spaces. Available at http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1007/1007.1185v1.pdf.

Meskhi. A. 2011. Maximal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces. Complex Variables and Elliptic Equations, 56(10-11), 1003–1019.

Neri, U. 1971. Singular integrals. Springer Verlag, New York.

Sbordone, C. 1996. Grand Sobolev spaces and their applications to variational problems. Le Matematiche LI(2), 335–347.

Sbordone, C. 1998. Nonlinear elliptic equations with right hand side in nonstandard spaces. Rend. Sem. Mat. Fis. Modena, Supplemento al XLVI, 361–368.

Stein, E.M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

Sadosky, C., 1979. Interpolation of operators and singular integrals. Marcel Dekker, Inc., 375p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeynep ÇAKIR
Doğum Yeri : Keçiören
Doğum Tarihi : 29/08/1991
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Özel Çağrı Fen Lisesi (2009)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2013)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2014 – Haziran 2016)