

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ BİLİM DALI**

**FUZZY SAYI UZAYINDA DİZİ VE İNTEGRALLER İÇİN
TOPLANABİLME METOTLARI**

Enes YAVUZ


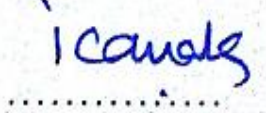
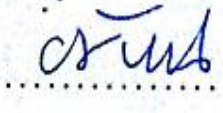
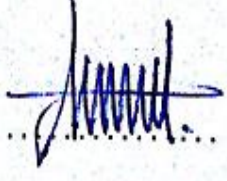
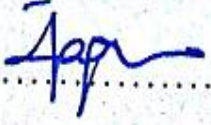
**Danışman
Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN**



MANİSA-2016

TEZ ONAYI

Enes YAVUZ tarafından hazırlanan "Fuzzy Sayı Uzayında Dizi ve İntegraller İçin Toplanabilme Metotları" adlı tez çalışması 23.06.2016 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. İbrahim ÇANAK Ege Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Özer TALO Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Mehmet ÖNDER Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Yrd. Doç. Dr. Faruk ÖZGER İzmir Katip Çelebi Üniversitesi	

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Enes YAVUZ



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
TEŞEKKÜR	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. Fuzzy Sayıları ile İlgili Tanım ve Teoremler	3
2.2. Fuzzy Sayı Değerli Fonksiyonlar ile İlgili Tanım ve Teoremler	11
3. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN ABEL VE LOGARİTMİK TOPLANABİLMESİ .	13
3.1. Fuzzy Sayı Dizilerinin Abel Toplanabilmesi	13
3.2. Fuzzy Sayı Dizilerinin Logaritmik Toplanabilmesi	19
4. FUZZY SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİNİN CES- ÀRO VE LOGARİTMİK TOPLANABİLMESİ	25
4.1. Fuzzy Sayı Değerli Fonksiyonların İntegrallerinin Cesàro Toplanabilmesi .	25
4.2. Fuzzy Sayı Değerli Fonksiyonların İntegrallerinin Logaritmik Toplanabilmesi	32
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	42

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
$[x]$	x reel sayısının tam kısmı
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{K}	\mathbb{R} üzerinde tanımlı aralıkların kümesi
E^1	\mathbb{R} üzerinde tanımlı fuzzy sayıların uzayı
$w(F)$	Fuzzy sayı dizilerinin uzayı
$l_\infty(F)$	Sınırlı fuzzy sayı dizilerinin uzayı
$cs(F)$	Yakınsak seri oluşturan fuzzy sayı dizilerinin uzayı
$bs(F)$	Sınırlı seri oluşturan fuzzy sayı dizilerinin uzayı
$x_n = o(1)$	(x_n) dizisi sıfıra yakınsak
$x_n = o(1/n)$	(nx_n) dizisi sıfıra yakınsak
$x_n = O(1)$	(x_n) dizisi sınırlı
$x_n = O(1/n)$	(nx_n) dizisi sınırlı
$\sigma(t)$	f nin integral fonksiyonunun Cesàro ortalaması
$\tau(t)$	f nin integral fonksiyonunun logaritmik ortalaması

TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőmasının belirlenme ve hazırlanma sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübesiyle her zaman destek olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca çalıőmalarımnda yardımımı eksik etmeyen Doç. Dr. Özer TALO'ya teşekkür ederim.

Öęrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiç eksik etmeyen, her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür etmeyi borç bilirim.

Enes Yavuz
Manisa, 2016



ÖZET

Doktora Tezi

Fuzzy Sayı Uzayında Dizi ve İntegraller İçin Toplanabilme Metotları

Enes YAVUZ

Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde tezin konusunu oluşturan *toplanabilme metodu* ve *fuzzy küme* kavramları hakkında bilgi verilerek tezin önemi ve amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, fuzzy sayı dizilerinin Abel toplanabilmesi kavramı tanımlanmış ve Abel toplanabilme ile ilgili Tauber tipi sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca fuzzy sayı dizileri için logaritmik toplanabilme tanımlanmış ve logaritmik toplanabilme için Landau tek taraflı ve yavaş azalan tip Tauber şartlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, fuzzy sayı değerli fonksiyonların integrallerinin Cesàro toplanabilmesi ve logaritmik toplanabilmesi kavramları tanıtılmış ve bu metotlar için Landau tek taraflı ve yavaş azalan tip Tauber şartlar elde edilmiştir.

Bu tezin orjinal bölümleri üçüncü ve dördüncü bölümlerdir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy sayı dizisi, Fuzzy sayı değerli fonksiyon, Toplanabilme metotları, Tauber tipi teoremler

2016, 42 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Summability Methods for Sequences and Integrals on Fuzzy Number Space

Enes YAVUZ

Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüsametlin ÇOŞKUN

This thesis consists of four chapters.

In first chapter, the concepts of *summability method* and *fuzzy set* are introduced. Also, the purpose and significance of thesis are asserted.

In second chapter, basic definitions and theorems used in thesis are given.

In third chapter, Abel summability of sequences of fuzzy numbers is defined and Tauberian results for Abel summability method are given. Also, logarithmic summability of sequences of fuzzy numbers is defined and Landau one-sided, slowly decreasing type Tauberian conditions are given.

In fourth chapter, Cesàro summability method and logarithmic summability method for integrals of fuzzy-number-valued functions are introduced. Also, Landau one-sided and slowly decreasing type Tauberian conditions for these summability methods are obtained.

Original parts of this thesis are third and fourth chapters.

Keywords: Sequence of fuzzy numbers, Fuzzy number valued function, Summability methods, Tauberian theorems

2016, 42 pages

1. GİRİŞ

Matematiğin birçok branşında verilen bir sonsuz serinin yakınsaklığının bilinmesinden daha çok toplamının bulunması önemlidir. Yakınsak bir serinin toplamının belirlenmesi her zaman kolay olmayabilir. Ayrıca ıraksaklığı bilinen bir serinin uygun bir toplama yakınsaması istenebilir. Bu nedenle ıraksak bir serinin uygun bir toplama yakınsaması için oluşturulan toplanabilme metotlarından faydalanılabilir. Bir toplanabilme metodu genellikle verilen bir serinin kısmi toplam dizisinin ortalamasını alma işlemidir. Örneğin; $\sum a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi (s_n) ise (s_n) nin limiti yerine bunun aritmetik ortalaması olan

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n},$$

dizisinin limitine bakılabilir. Eğer $\lim \sigma_n = a$ ise $\sum a_n$ serisi a ya Cesàro toplanabilir denir ve bu metoda da Cesàro toplanabilme metodu adı verilir. Toplanabilme teorisi, Ernesto Cesàro' nun 1890 yılında bu metodu tanımladığı çalışmasıyla başlamıştır [1]. Cesàro metodu kısa zaman içinde uygulama alanı bulmuştur. Örneğin, 1900 yılında Lipot Fejer, *Fejer Teoremi* olarak bilinen $L^p(0, 2\pi)$ fonksiyon uzayındaki bir f fonksiyonuna karşılık gelen Fourier serisinin f ye Cesàro toplanabildiğini göstermiştir [2].

Kuvvet serileri yardımıyla oluşturulması bakımından önemli diğer bir metod ise Abel toplanabilme metodudur. $|x| < 1$ için $\sum a_n x^n$ kuvvet serisinin bir f fonksiyonuna yakınsak olması halinde, f toplam fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$

olarak yazılabileceğinden (s_n) nin bir ağırlıklı ortalamasıdır. Eğer, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a$ ise a ya $\sum a_n$ serisinin Abel toplamı veya $\sum a_n$ serisi a ya Abel toplanabilir denir. Bu durumda, $\sum a_n = a(A)$ yazılır. Bu iki metodun dışında Riesz, Nörlund, Euler ve Borel metotları gibi birçok toplanabilme metodu tanımlanmış ve yine bu metotlar da Fourier analizi, olasılık teorisi, yaklaşım teorisi, kuantum mekaniği ve sabit nokta teorisi gibi alanlarda uygulanmıştır [3–6].

Toplanabilme metotlarından herhangi biri yardımıyla toplanabilen bir seri yakınsak olmayabilir. Böyle bir serinin hangi şartlar altında yakınsak olacağını belirlemesi yeni bir araştırma konusu olmuştur. Bu şekilde serinin terimleri üzerine

konulan şartlara Tauber şartları ve ilgili teoremlere de Tauber tipi teoremler denir. Bu tip bir teorem ilk olarak 1897 yılında Alfred Tauber [7] tarafından verilmekle birlikte esas çalışmalar 1910 larda Hardy ve Littlewood tarafından yapılmıştır [8–12]. Bir çok matematikçinin ilgilendiği bu teori hakkında pekçok çalışma yapılmıştır [3, 13–17].

$\int_0^\infty f(x)dx$ genelleştirilmiş integrali, $\sum a_n$ sonsuz serisinde (a_n) dizisi yerine sürekli bir $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun alınması şeklinde düşünülebilir. Bu nedenle sonsuz seriler için tanımlanan toplanabilme metotlarının benzerleri genelleştirilmiş integraller için verilebilir. Örneğin, verilen bir $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali için $s(t) = \int_0^t f(x)dx$ ise $s = s(t)$ fonksiyonunun Cesàro ortalaması

$$\sigma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t s(u)du, \quad t \in (0, \infty)$$

olarak tanımlanır. Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ varsa $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali a ya Cesàro toplanabilirdir denir. Genelleştirilmiş integraller için verilen toplanabilme metotlarının ilki olan Cesàro toplanabilme metodu Titchmarsh [18] tarafından tanıtılmıştır. Birçok matematikçinin dikkatini çeken bu çalışmanın ardından integraller için bazı toplanabilme metotları ve bunlara ait Tauber tipi teoremler verilmiştir [19–29]. Ayrıca verilen bu metot ve teoremlerin Fourier integrallerine uygulaması da mevcuttur [30–33].

1965 yılında Azeri bilim insanı Profesör Lotfi Aliasker Zadeh' in Fuzzy küme kavramını tanıtmışından sonra bu alandaki çalışmalar hız kazanmıştır. [34]. Matematiğin hemen hemen her branşında fuzzy küme teorisiyle ilgili çalışmalar olmakla birlikte Analiz branşında fuzzy sayı dizileri ve serileri tanımlanmış [35–48], ve bunların yakınsaklık kriterleri verilmiştir [49–57]. Ayrıca fuzzy sayı değerli fonksiyonların integralleri ve genelleştirilmiş integralleri üzerine çalışmalar yapılmıştır [58–62]. Bu çalışmalarda, fuzzy sayı değerli dizi, seri ve integrallerin klasik analizde olduğu gibi, pek az bir kısmının yakınsak olduğu görülür. Bu nedenle iraksak fuzzy sayı değerli dizi, seri ve integralleri için de toplanabilme metotlarının araştırılması ve bu metotlara ilişkin Tauber tipi şartların belirlenmesi önem arz etmektedir.

Bu çalışmada; fuzzy sayı değerli dizi, seri ve integraller için toplanabilme metotlarının tanıtılması ve bunlarla ilgili Tauber tipi teoremlerin verilmesi amaçlanmaktadır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Fuzzy Sayıları ile İlgili Tanım ve Teoremler

Bu kısımda önce aralık sayıları ve fuzzy sayıları ile onlar üzerindeki cebirsel işlemler ve bu işlemlerin bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra fuzzy sayı dizisi tanımlanmış ve ilgili teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. Bir aralık

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (2.1)$$

ile tanımlanan reel sayıların kapalı ve sınırlı bir alt kümesidir.

Bir A aralığının uç noktaları A^- ve A^+ ile gösterilir. Böylece $A = [A^-, A^+]$ olur. Bir a reel sayısı $[a, a]$ aralığıyla eş tutulur. \mathbb{R} üzerindeki bütün aralıkların kümesi \mathbb{K} ile gösterilir. Aralıklar sayı gibi düşünülerek onlar üzerindeki sıralama bağıntısı ve cebirsel işlemler şöyle tanımlanır:

Reel sayı aralıkları arasındaki kısmi sıralama bağıntısı

$$A \leq B \Leftrightarrow A^- \leq B^- \text{ ve } A^+ \leq B^+$$

şeklinde tanımlanır.

A ve B gibi iki aralığın $C = A + B$ toplamı

$$C^- = A^- + B^- \text{ ve } C^+ = A^+ + B^+$$

şeklinde tanımlanır. Başka bir yolla aralık tanımı kullanılarak

$$A^- \leq a \leq A^+ \text{ ve } B^- \leq b \leq B^+$$

$$A^- + B^- \leq a + b \leq A^+ + B^+$$

elde edilir. Böylece

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

olması sebebiyle iki aralığın toplamının yine bir aralık olduğu görülür.

Bir A aralığının negatifi

$$-A = -[A^-, A^+] = \{-a : a \in A\}$$

olarak tanımlanır. A ve B aralıklarının farkı

$$B - A = B + (-A) = \{b - a : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır. Daha kısa olarak aralıkların toplam ve fark işlemleri

$$[A^-, A^+] + [B^-, B^+] = [A^- + B^-, A^+ + B^+]$$

$$[A^-, A^+] - [B^-, B^+] = [A^- - B^+, A^+ - B^-]$$

şeklinde yazılabilir.

Sıfırı ihtiva etmeyen bir A aralığının tersi ise

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{a} : a \in A \right\}$$

şeklinde tanımlanır. O zaman

$$\frac{1}{A} = \left[\frac{1}{A^+}, \frac{1}{A^-} \right]$$

olur.

A ve B aralıklarının $A \cdot B$ çarpımı

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$$

olarak tanımlanır. $A \cdot B$ çarpımının başlangıç ve bitim noktaları sırasıyla

$$(A \cdot B)^- = \min\{A^- \cdot B^-, A^+ \cdot B^+, A^- \cdot B^+, A^+ \cdot B^-\},$$

$$(A \cdot B)^+ = \max\{A^- \cdot B^-, A^+ \cdot B^+, A^- \cdot B^+, A^+ \cdot B^-\}$$

eşitlikleriyle verilir.

A ve B aralıkları arasındaki $d(A, B)$ uzaklığı

$$d(A, B) = \max\{|A^- - B^-|, |A^+ - B^+|\} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.1. (2.2) eşitliğinde tanımlı d dönüşümü ile (\mathbb{K}, d) bir tam metrik uzaydır [35].

Tanım 2.1.2. Aşağıdaki şartları sağlayan \mathbb{R} üzerindeki bir

$$u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

fonksiyonuna bir fuzzy sayısı denir:

1. u , normaldir. Yani en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $u(x_0) = 1$ 'dir.
2. u , konvektir. Yani $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{u(x), u(y)\}.$$

3. u , üstten yarı süreklidir.
4. $[u]_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$ kompakt bir kümedir [63].

Bir u fuzzy sayısının α -seviye kümesi,

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1 \text{ ise} \\ \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}, & \alpha = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir r reel sayısı,

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 1, & t = r \text{ ise} \\ 0, & t \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir \bar{r} fuzzy sayısı gibi düşünülür. \mathbb{R} üzerindeki bütün fuzzy sayılarının kümesi E^1 ile gösterilir ve fuzzy sayı uzayı olarak isimlendirilir.

Açık olarak $u \in E^1$ olması için gerek ve yeter şart her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha$ kümesinin boş olmayan, kapalı ve sınırlı bir aralık olmasıdır.

Teorem 2.1.2. (Fuzzy Sayılarının Temsil Teoremi)

$u \in E^1$ ve her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ olsun. O zaman aşağıdaki şartlar sağlanır:

1. $u^-(\alpha); (0, 1]$ üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.
2. $u^+(\alpha); (0, 1]$ üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve artmayan bir fonksiyondur.
3. $u^-(\alpha)$ ve $u^+(\alpha)$ fonksiyonları, $\alpha = 0$ noktasında sağdan süreklidir.
4. $u^-(1) \leq u^+(1)$.

Tersine; γ ve β , (1) – (4) şartlarını sağlayan iki fonksiyon ise, o zaman

$$[u]_\alpha = [\gamma(\alpha), \beta(\alpha)]$$

olacak şekilde bir tek $u \in E^1$ vardır. γ ve β 'ya karşılık gelen u fuzzy sayısı;

$$u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad u(x) = \sup\{\alpha : \gamma(\alpha) \leq x \leq \beta(\alpha)\}$$

olarak tanımlanır [64].

Bundan sonraki kısımda, fuzzy sayıları için bazı tanımlar ve onlar üzerindeki cebirsel işlemler verilmiştir.

Tanım 2.1.3. $u, v \in E^1$ olsun. Eğer $\forall x \in \mathbb{R}$ için $u(x) = v(x)$ ise u ile v fuzzy sayıları eşittir denir ve $u = v$ yazılır. Bu tanım seviye kümeleri yardımıyla,

$$u = v \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } [u]_\alpha = [v]_\alpha$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.4. $u, v \in E^1$ olmak üzere, E^1 üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı

$$\begin{aligned} u \preceq v &\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } [u]_\alpha \preceq [v]_\alpha \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } u^-(\alpha) \leq v^-(\alpha) \text{ ve } u^+(\alpha) \leq v^+(\alpha) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$u \prec v \Leftrightarrow u \preceq v \text{ ve } \exists \alpha_0 \in [0, 1] \text{ için } u^-(\alpha_0) < v^-(\alpha_0) \text{ veya } u^+(\alpha_0) < v^+(\alpha_0)$$

şeklindedir [65].

Eğer $u \preceq v$ ve $u \succeq v$ bağıntılarından her ikisi de gerçekleşmiyorsa, u ve v fuzzy sayıları kıyaslanamaz denir ve $u \not\sim v$ yazılır.

Tanım 2.1.5. $u \in E^1$ olsun. Eğer $x > 0$ olan her x için $u(x) = 0$ ise u fuzzy sayısına negatif fuzzy sayısı denir.

Açık olarak u negatif bir fuzzy sayısı ise $u \preceq \bar{0}$ olur.

$u, v \in E^1$ iki fuzzy sayısı olsun. Bu fuzzy sayılarının

(i) $u + v$ cebirsel toplamları,

$$\begin{aligned} u + v = w &\Leftrightarrow [w]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha \\ &\Leftrightarrow w^-(\alpha) = u^-(\alpha) + v^-(\alpha) \text{ ve } w^+(\alpha) = u^+(\alpha) + v^+(\alpha), \end{aligned}$$

(ii) $u - v$ farkları,

$$\begin{aligned} u - v = w &\Leftrightarrow [w]_\alpha = [u]_\alpha - [v]_\alpha \\ &\Leftrightarrow w^-(\alpha) = u^-(\alpha) - v^+(\alpha) \text{ ve } w^+(\alpha) = u^+(\alpha) - v^-(\alpha), \end{aligned}$$

(iii) uv çarpımları,

$$uv = w \Leftrightarrow [w]_\alpha = [u]_\alpha [v]_\alpha,$$

her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} w^-(\alpha) &= \min\{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\}, \\ w^+(\alpha) &= \max\{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\}. \end{aligned}$$

(iv) u sayısının k skaları ile çarpımı,

$$[ku]_{\alpha} = k[u]_{\alpha}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $u \in E^1$ ve $0 \notin \{t \in \mathbb{R} : u(t) > 0\}$ ise, o zaman

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{-}(\alpha) = \frac{1}{u^{+}(\alpha)} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{1}{u}\right)^{+}(\alpha) = \frac{1}{u^{-}(\alpha)}$$

biçiminde tanımlıdır. Yukarıda tanımlı işlemlere göre fuzzy sayılarının sahip olduğu bazı cebirsel özellikler aşağıda not edilmiştir.

Teorem 2.1.3.

- (i) Toplama işlemine göre birim eleman $\bar{0}$ dır.
- (ii) Toplama işlemine göre $u \neq \bar{r}, r \in \mathbb{R}$ fuzzy sayılarının ters elemanı yoktur.
- (iii) $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ olsun. Eğer $a, b \geq 0$ veya $a, b \leq 0$ ise o zaman

$$(a + b)u = au + bu$$

eşitliği geçerlidir. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için bu eşitlik geçerli olmayabilir.

- (iv) Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ ve $u, v \in E^1$ için

$$a(u + v) = au + av$$

eşitliği geçerlidir.

- (v) Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ için

$$a(bu) = (ab)u$$

eşitliği geçerlidir [66].

Teorem 2.1.4. $u, v, w \in E^1$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

- (i) $uv = vu$
- (ii) $(uv)w = u(vw)$
- (iii) $\bar{k}u = ku$

eşitlikleri sağlanır [67].

Teorem 2.1.5. $u, v, w \in E^1$ olsun. Eğer u sayısı $\bar{0}$ ile kıyaslanabilir ve v, w sayıları $\bar{0}$ ın aynı tarafında, yani $v \succeq \bar{0}, w \succeq \bar{0}$ veya $v \preceq \bar{0}, w \preceq \bar{0}$ ise, o zaman

$$u(v + w) = uv + uw$$

eşitliği geçerlidir [67].

E^1 üzerindeki kısmi sıralama bağıntısının bazı özellikleri aşağıda not edilmiştir.

Lemma 2.1.1. $u, v, w \in E^1$ olsun.

- (i) Eğer $u \preceq v$, $v \preceq w$ ise, o zaman $u \preceq w$ olur.
- (ii) Eğer $u \preceq w$, $v \preceq e$ ise, o zaman $u + v \preceq w + e$ olur.
- (iii) Eğer $u \succeq \bar{0}$ ve $v \succ w$ ise, o zaman $uv \succeq uw$ olur [67].

Bir fuzzy sayı dizisinin limitini tanımlamak için öncelikle fuzzy sayıları üzerindeki metriği tanımlamak gerekir. Aşağıda önce bu metrik, daha sonra ise fuzzy sayı dizilerinin yakınsaklığı ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

$u, v \in E^1$ ve d , (2.2) eşitliğindeki gibi olsun. O zaman u ile v arasındaki $D(u, v)$ uzaklığı,

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d([u]_\alpha, [v]_\alpha) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|\}$$

şeklinde tanımlanır. D metriğinin tanımından

$$D(u, \bar{0}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|u^-(\alpha)|, |u^+(\alpha)|\} = \max\{|u^-(0)|, |u^+(0)|\}$$

olduğu görülür. D metriğinin bazı özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

Lemma 2.1.2. u bir fuzzy sayısı olsun ve a, b reel sayıları için $ab \geq 0$ sağlansın. O halde

$$D(au, bu) = |a - b|D(u, 0)$$

dir [69].

Teorem 2.1.6. $u, v, w, z \in E^1$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman,

- (i) (E^1, D) tam metrik uzaydır,
- (ii) $D(ku, kv) = |k|D(u, v)$,
- (iii) $D(u + v, w + v) = D(u, w)$,
- (iv) $D(u + v, w + z) \leq D(u, w) + D(v, z)$,
- (v) $|D(u, \bar{0}) - D(v, \bar{0})| \leq D(u, v) \leq D(u, \bar{0}) + D(v, \bar{0})$ [66].

Tanım 2.1.6. Bir fuzzy sayı dizisi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ doğal sayılar kümesi ve değer kümesi E^1 fuzzy sayı uzayı olan bir fonksiyondur [35].

Bütün fuzzy sayı dizilerinin kümesi $w(F)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. $(u_n) \subset E^1$ bir fuzzy sayı dizisi ve $v_0 \in E^1$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n > n_0$ iken $D(u_n, v_0) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyor

ise, (u_n) dizisi v_0 'a yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v_0 \text{ veya } u_n \rightarrow v_0, (n \rightarrow \infty)$$

yazılır. Bu tanım matematiksel olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } D(u_n, v_0) < \varepsilon$$

şeklinde ifade edilir [35].

D metriğinin tanımına göre; (u_n) fuzzy sayı dizisi v_0 fuzzy sayısına yakınsak ise, o zaman $(u_n^-(\alpha))$ ve $(u_n^+(\alpha))$ fonksiyon dizileri, sırasıyla $v_0^-(\alpha)$ ve $v_0^+(\alpha)$ fonksiyonlarına $[0, 1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Tanım 2.1.8. Bir u_0 fuzzy sayısının ε yarıçaplı $K(u_0, \varepsilon)$ komşuluğu,

$$K(u_0, \varepsilon) = \{u \in E^1 : D(u, u_0) < \varepsilon\}$$

kümesi olarak tanımlanır [35].

Teorem 2.1.7. $u = (u_n)$ dizisi yakınsak ise, sadece bir limit noktası vardır [35].

Teorem 2.1.8. $n \geq n_0$ iken $u_n \preceq w_n \preceq v_n$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut ve

$$\lim_n u_n = \lim_n v_n = \mu_0$$

ise, o zaman $\lim_n w_n = \mu_0$ elde edilir [35].

Tanım 2.1.9. $u = (u_n)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlı ise, (u_n) dizisi sınırlıdır denir. Yani, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $m \preceq u_n \preceq M$ eşitsizliklerini sağlayan m ve M fuzzy sayıları mevcutsa, (u_n) dizisi sınırlıdır denir.

Açık olarak bir (u_n) fuzzy sayı dizisinin sınırlılığı, $\sup_{n \in \mathbb{N}} D(u_n, \bar{0}) < \infty$ olmasına denktir [35].

Sınırlı fuzzy sayı dizilerinin kümesi $\ell_\infty(F)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.9. Yakınsak bir fuzzy sayı dizisi sınırlıdır [35].

Tanım 2.1.10. $u = (u_n)$ bir fuzzy sayı dizisi ve (n_k) da doğal sayıların artan bir dizisi olsun. O zaman (u_{n_k}) dizisine, (u_n) dizisinin bir alt dizisi denir [35].

Teorem 2.1.10. Bir fuzzy sayı dizisi yakınsak ise her alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır [35].

Teorem 2.1.11. $\lim_n u_n = a$, $\lim_n v_n = b$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

1. $\lim(u_n \mp v_n) = a \mp b$,
2. $\lim(ku_n) = ka$,
3. $\lim(u_nv_n) = ab$,
4. $\lim(u_n/v_n) = a/b$, ($\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \notin [v_n]_0$, $0 \notin [b]_0$ için) [35].

Tanım 2.1.11. $u = (u_n)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n, m > n_0$ iken $D(u_n, u_m) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyor ise, (u_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [36].

Tanım 2.1.12. $u = (u_n)$ bir fuzzy sayı dizisi ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

olsun. Eğer (s_n) bir μ fuzzy sayısına yakınsak ise, o zaman fuzzy sayılarının $\sum u_k$ serisi μ sayısına yakınsaktır denir ve $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \mu$ yazılır. Açık olarak $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi μ sayısına yakınsak ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k^-(\alpha) = \mu^-(\alpha) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k^+(\alpha) = \mu^+(\alpha),$$

yakınsamaları $\alpha \in [0, 1]$ ya göre düzgündür. Tersine;

$$\sum_k u_k^-(\alpha) = \mu^-(\alpha) \text{ ve } \sum_k u_k^+(\alpha) = \mu^+(\alpha)$$

serileri α ya göre düzgün yakınsak ise, o zaman

$$[\mu]_{\alpha} = [\mu^-(\alpha), \mu^+(\alpha)]$$

aralığı bir fuzzy sayısı tanımlar ve $\mu = \sum u_k$ olur [58].

Ayrıca $\sum u_k$ fuzzy sayı serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) sınırlı ise, o zaman $\sum u_k$ serisine sınırlıdır denir. Sınırlı seri oluşturan fuzzy sayı dizilerinin uzayını $bs(F)$ ve yakınsak seri oluşturan fuzzy sayı dizilerinin uzayını da $cs(F)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.1.12. $\sum u_k$ ve $\sum v_k$ fuzzy sayı serileri yakınsak ise $D(\sum u_k, \sum v_k) \leq \sum D(u_k, v_k)$ eşitsizliği sağlanır [40].

Teorem 2.1.13. (u_k) bir fuzzy sayı dizisi olmak üzere, $\sum D(u_k, \bar{0}) < \infty$ ise $\sum u_k$ serisi yakınsaktır [40].

Lemma 2.1.3. $(u_k), (v_k) \in w(F)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) Eğer $(u_k) \in cs(F)$ ise o zaman $u_k \rightarrow \bar{0}$ dır.

- (ii) $(u_k) \in cs(F)$ olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \rightarrow \bar{0}$ olmasıdır.
- (iii) Eğer $(u_k), (v_k) \in cs(F)$ ise o zaman $\sum_k (u_k + v_k) = \sum_k u_k + \sum_k v_k$ dir.
- (iv) $\sum_k \alpha u_k = \alpha \sum_k u_k$ [57].

2.2. Fuzzy Sayı Değerli Fonksiyonlar ile İlgili Tanım ve Teoremler

Bu kısımda fuzzy sayı değerli fonksiyonlar için limit kavramı, süreklilik kavramı, Riemann integrallenebilme kavramı ve ilgili tanım ve teoremler verilecektir. Bu noktada belirtmeliyiz ki fuzzy sayı uzayındaki limiti yukarıda tanımlanmış olan D metriğine göre alacağız.

Tanım 2.2.1. $f : [a, b] \rightarrow E^1$ fuzzy sayı değerli bir fonksiyon ve $x_0 \in [a, b]$ verilsin. $\varepsilon > 0$ alalım. Eğer $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in [a, b]$ için $D(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, f fuzzy sayı değerli fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer $f, [a, b]$ aralığının bütün noktalarında sürekli ise f ye $[a, b]$ üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.2.2. f , bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı fuzzy sayı değerli bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $[a, b]$ 'nin $\|P\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması ve c_k 'nin $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki her seçimi için

$$D\left(\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k, I\right) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ ve $I \in E^1$ sayıları mevcut ise f fuzzy sayı değerli fonksiyonuna $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde Riemann integrallenebilirdir denir [68].

Teorem 2.2.1. $f : [a, b] \rightarrow E^1$ fuzzy sayı değerli fonksiyonu α -seviye kümesi

$$[f(x)]_{\alpha} = [f_{\alpha}^{-}(x), f_{\alpha}^{+}(x)]$$

olan sürekli bir fonksiyon ise $\int_a^b f(x)dx$ integrali E^1 de mevcuttur ve

$$\left[\int_a^b f(x)dx \right]_{\alpha} = \left[\int_a^b f_{\alpha}^{-}(x)dx, \int_a^b f_{\alpha}^{+}(x)dx \right] \quad (2.3)$$

dir [68].

Teorem 2.2.2. $f : [a, b] \rightarrow E^1$ ve $g : [a, b] \rightarrow E^1$ fuzzy sayı değerli fonksiyonları sürekli ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- (i) α ve β reel sayılar olmak üzere $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ dir.

- (ii) $a < c < b$ olmak üzere $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ dir.
- (iii) $F(x) = D(f(x), g(x))$ olarak tanımlı $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve

$$D \left(\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx \right) \leq \int_a^b F(x)dx$$

dir.

- (iv) $x \in [a, b]$ için $\int_a^x f(t)dt$ süreklidir.

- (v) Her $x \in [a, b]$ için $f(x) \preceq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx \preceq \int_a^b g(x)dx$ dir [69].

Tanım 2.2.3. a bir reel sayı ve f fuzzy sayı değerli fonksiyonu her bir $t \geq a$ için $[a, t]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx \quad (2.4)$$

ifadesine f fuzzy sayı değerli fonksiyonunun $[a, \infty]$ üzerindeki genelleştirilmiş integrali denir ve

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad (2.5)$$

ile gösterilir. Eğer (2.4) deki limit E^1 de varsa (2.5) integrali yakınsak, limit yoksa integral ıraksaktır denir [69].

3. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN ABEL VE LOGARİTMİK TOPLANABİLMESİ

Bu bölümde, fuzzy sayı dizileri için Abel ve logaritmik toplanabilme kavramlarını tanımlayacağız. Ayrıca Abel ve logaritmik toplanabilen dizilerin yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter Tauber şartları vereceğiz.

3.1. Fuzzy Sayı Dizilerinin Abel Toplanabilmesi

Fuzzy sayı dizilerinin Abel toplanabilme metodunu aşağıdaki şekilde tanımlarız.

Tanım 3.1.1. (u_k) bir fuzzy sayı dizisi ve her $x \in [0, 1)$ için $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ serisi yakınsak olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \mu \quad (3.1)$$

ise (u_k) dizisi μ fuzzy sayısına Abel toplanabilir denir.

Teorem 3.1.1. (u_k) fuzzy sayı dizisi μ fuzzy sayısına yakınsak ise, (u_k) dizisi μ sayısına Abel toplanabilir.

İspat: (u_k) dizisi μ fuzzy sayısına yakınsak olsun. (u_k) sınırlı olduğundan $D(u_k, \bar{0}) < K$ olacak şekilde bir K pozitif sayısı vardır. O halde her $x \in [0, 1)$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} D(u_k x^k, \bar{0}) = \sum_{k=0}^{\infty} D(u_k, \bar{0}) x^k \leq K \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{K}{1-x}$$

eşitsizliği yazılabilir ve $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ serisi Teorem 2.1.13 den dolayı yakınsaktır. Diğer yandan verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için her $N = N(\varepsilon)$ vardır öyle ki her $n > N$ için $D(u_n, \mu) < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. Ayrıca (u_k) sınırlı olduğundan $D(u_k, \mu) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Böylece Teorem 2.1.12 den

$$\begin{aligned} D\left((1-x) \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k, \mu\right) &= D\left((1-x) \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k, (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} \mu x^k\right) \\ &\leq (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} D(u_k, \mu) x^k \\ &= (1-x) \sum_{k=0}^N D(u_k, \mu) x^k + (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} D(u_k, \mu) x^k \\ &< (1-x)M(N+1) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta = \frac{\varepsilon}{2M(N+1)}$ seçilirse $x \in (1-\delta, 1)$ iken

$$D\left((1-x) \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k, \mu\right) < \varepsilon$$

sağlanır ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1.1 in tersi genel olarak sağlanmayabilir.

Örnek 3.1.1. $k \geq 1$ için

$$u_k(t) = \begin{cases} 2 \sqrt[k]{t - (-1)^k}, & (-1)^k \leq t \leq (-1)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ ise,} \\ 1, & (-1)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq t \leq 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ ise,} \\ 2 \sqrt[k]{3 - t}, & 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq t \leq 3 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

ve $u_0(t) = \bar{2}$ şeklinde tanımlı (u_k) fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. (u_k) dizisinin α -seviye kümesi

$$[u_k]_\alpha = \left[(-1)^k + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k, 3 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \right]$$

olarak bulunur. Şimdi $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ serisinin yakınsaklığını inceleyelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için $D(u_k, \bar{0}) \leq 3$ olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ serisinin her $x \in [0, 1)$ için yakınsak olduğu Teorem 3.1.1 in ispatındaki benzer şekilde gösterilebilir. Ayrıca

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^-(\alpha) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^k = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2-\alpha x} \quad (0 < x < 1),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^+(\alpha) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^k = \frac{3}{1-x} - \frac{2}{2-\alpha x} \quad (0 < x < 1)$$

serileri α ya göre düzgün yakınsak olduğundan Tanım 2.1.12 den dolayı $f(x) = \sum u_k x^k$ serisi yakınsaktır ve $[f(x)]_\alpha = \left[\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2-\alpha x}, \frac{3}{1-x} - \frac{2}{2-\alpha x} \right]$ dir.

Bizim amacımız $[\mu]_\alpha = [0, 3]$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = \mu$ olduğunu göstermektir. Bunun için

$$\begin{aligned} D((1-x)f(x), \mu) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} d([(1-x)f(x)]_\alpha, [\mu]_\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| [(1-x)f(x)]^-(\alpha) - \mu^-(\alpha) \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| [(1-x)f(x)]^+(\alpha) - \mu^+(\alpha) \right| \right\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| \frac{1-x}{1+x} + \frac{2(1-x)}{2-\alpha x} \right|, \left| \frac{2(1-x)}{2-\alpha x} \right| \right\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \frac{1-x}{1+x} + \frac{2(1-x)}{2-\alpha x} \right| \\ &= \left| \frac{1-x}{1+x} + \frac{2(1-x)}{2-x} \right| \end{aligned}$$

elde edilebilir ki, bu da $\lim_{x \rightarrow 1^-} D((1-x)f(x), \mu) = 0$ yani $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = \mu$ olduğunu gösterir. Böylece (u_k) dizisi μ fuzzy sayısına Abel toplanabilir, fakat (u_k) fuzzy sayı dizisi yakınsak değildir.

Tanım 3.1.2. $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ bir fuzzy sayı serisi ve $0 \leq x < 1$ olmak üzere $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ yakınsak olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \mu \quad (3.2)$$

ise $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisine μ fuzzy sayısına Abel toplanabilir denir.

Teorem 3.1.2. $\sum u_k$ fuzzy sayı serisi ν fuzzy sayısına yakınsak ise ν ye Abel toplanabilir.

İspat: $\sum u_k$ fuzzy sayı serisi ν fuzzy sayısına yakınsak olsun. (u_k) sınırlı olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ serisinin her $x \in (0, 1)$ için yakınsak olduğu Teorem 3.1.1 in ispatındaki benzer şekilde gösterilebilir.

(s_n) , $\sum u_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $\sum u_k = \nu$ olduğundan (s_n) dizisi ν ye yakınsaktır ve Teorem 3.1.1 den

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = \nu \quad (3.3)$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k, \nu\right) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} d\left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k\right]_{\alpha}, [\nu]_{\alpha}\right) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k^-(\alpha) x^k - \nu^-(\alpha)\right|, \left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k^+(\alpha) x^k - \nu^+(\alpha)\right|\right\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{\left|(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k^-(\alpha) x^k - \nu^-(\alpha)\right|, \left|(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k^+(\alpha) x^k - \nu^+(\alpha)\right|\right\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} d\left(\left[(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k\right]_{\alpha}, [\nu]_{\alpha}\right) \\ &= D\left((1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k, \nu\right) \end{aligned}$$

olduğundan $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \nu$ sağlanır ve $\sum u_k$ fuzzy sayı serisi ν ye Abel toplanabilir. ■

Abel toplanabilen her serinin yakınsak olması gerekmediği aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 3.1.2. $k \geq 1$ için

$$u_k(t) = \begin{cases} \sqrt[k]{(t - (-1)^k)2^k + 2}, & (-1)^k - \frac{1}{2^{k-1}} \leq t \leq (-1)^k - \frac{1}{2^k} \text{ ise,} \\ 1, & (-1)^k - \frac{1}{2^k} \leq t \leq (-1)^k + \frac{1}{2^{k+1}} \text{ ise,} \\ \frac{1}{2^k(t - (-1)^k)} - 1, & (-1)^k + \frac{1}{2^{k+1}} \leq t \leq (-1)^k + \frac{1}{2^k} \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

ve $k = 0$ için

$$u_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{3}{2} \text{ ise,} \\ \frac{1}{t-1} - 1, & \frac{3}{2} \leq t \leq 2 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde $\sum u_k$ fuzzy sayı serisini göz önüne alalım. (u_k) dizisinin α -seviye kümesi

$$[u_k]_\alpha = \left[(-1)^k + \frac{\alpha^k - 2}{2^k}, (-1)^k + \frac{1}{2^k(\alpha + 1)} \right]$$

olarak bulunur ve $\sum u_k$ serisinin iraksak olduğu görülür.

Şimdi $\sum u_k x^k$ serisinin karakterini inceleyelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için $D(u_k, \bar{0}) \leq 2$ olduğundan, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ serisinin her $x \in [0, 1)$ için yakınsak olduğu Teorem 3.1.1 in ispatındaki benzer şekilde gösterilebilir. Diğer yandan $[0, 1)$ aralığında

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^-(\alpha) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha^k - 2)x^k}{2^k} = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2-\alpha x} - \frac{4}{2-x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^+(\alpha) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k(\alpha + 1)} = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(2-x)(\alpha + 1)}$$

serileri α ya göre düzgün yakınsak olduğundan $f(x) = \sum u_k x^k$ yakınsaktır ve

$$[f(x)]^-(\alpha) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2-\alpha x} - \frac{4}{2-x}, \quad [f(x)]^+(\alpha) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(2-x)(\alpha + 1)}$$

olur.

Amacımız $[\nu]_\alpha = \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{2-\alpha} - 4, \frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha+1} \right]$ olmak üzere $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \nu$ olduğunu göstermektir.

$$\begin{aligned} D(f(x), \nu) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} d([f(x)]_\alpha, [\nu]_\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \{ |[f(x)]^-(\alpha) - \nu^-(\alpha)|, |[f(x)]^+(\alpha) - \nu^+(\alpha)| \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2-\alpha x} - \frac{4}{2-x} - \frac{1}{2} - \frac{2}{2-\alpha} + 4 \right|, \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(2-x)(\alpha+1)} - \frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha+1} \right| \right\} \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2-\alpha x} - \frac{4}{2-x} - \frac{1}{2} - \frac{2}{2-\alpha} + 4 \right| \\
&= \left| \frac{1}{1+x} + 1 - \frac{4}{2-x} - \frac{1}{2} - 1 + 4 \right| = \left| \frac{1}{1+x} - \frac{4}{2-x} + \frac{7}{2} \right|
\end{aligned}$$

olduğundan $\lim_{x \rightarrow 1^-} D(f(x), \nu) = 0$ bulunur ve $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \nu$ elde edilir. Böylece $\sum u_k$ serisi ν fuzzy sayısına Abel toplanabilir fakat yakınsak değildir.

Şimdi Abel toplanabilme için bir Tauber tipi teorem ispatlayacağız.

Teorem 3.1.3. $\sum u_k$ fuzzy serisi ν fuzzy sayısına Abel toplanabilir ve $D(u_k, \bar{0}) = o(1/k)$ ise $\sum u_k = \nu$ dir.

İspat: $\sum u_k$ fuzzy serisi ν fuzzy sayısına Abel toplanabilir ve $D(u_k, \bar{0}) = o(1/k)$ olsun. $\sum u_k$ Abel toplanabilir olduğundan her $x \in [0, 1)$ için $\sum u_k x^k = f(x)$, E^1 de mevcut ve $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \nu$ dür. Teorem 2.1.12 den

$$\begin{aligned}
D(s_n, \nu) &\leq D(s_n, f(x)) + D(f(x), \nu) = D\left(\sum_{k=0}^n u_k, \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k\right) + D(f(x), \nu) \\
&\leq D\left(\sum_{k=0}^n u_k, \sum_{k=0}^n u_k x^k\right) + D\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k x^k, \bar{0}\right) + D(f(x), \nu) \\
&\leq \sum_{k=0}^n D(u_k, u_k x^k) + D\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k x^k, \bar{0}\right) + D(f(x), \nu) \\
&\leq \sum_{k=0}^n (1-x^k) D(u_k, \bar{0}) + D\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k x^k, \bar{0}\right) + D(f(x), \nu) \\
&< (1-x) \sum_{k=0}^n k D(u_k, \bar{0}) + D\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k x^k, \bar{0}\right) + D(f(x), \nu)
\end{aligned}$$

olur. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ serisi $(0, 1)$ aralığında tanımlı olduğundan $x = 1 - \frac{1}{n+1}$ alınarak devam edilirse

$$\begin{aligned}
D(s_n, \nu) &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k D(u_k, \bar{0}) + D\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k, \bar{0}\right) + D\left(f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \nu\right) \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k D(u_k, \bar{0}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} D(u_k, \bar{0}) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k + D\left(f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \nu\right) \\
&< \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k D(u_k, \bar{0}) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} k D(u_k, \bar{0}) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k + D\left(f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \nu\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu noktada $D(u_k, \bar{0}) = o(1/k)$ olduğundan

- i) Bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_1$ için $nD(u_n, \bar{0}) < \frac{\varepsilon}{3}$
- ii) Bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_2$ için $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n kD(u_k, \bar{0}) < \frac{\varepsilon}{3}$
- iii) Bir $n_3 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_3$ için $D\left(f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \nu\right) < \frac{\varepsilon}{3}$

şartları sağlanır. O halde bir $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için $D(s_n, \nu) < \varepsilon$ olur ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.1.1. $\sum u_k$ fuzzy serisi ν fuzzy sayısına Abel toplanabilir ve $D(u_k, \bar{0}) = O(1/k)$ ise $(u_k) \in bs(F)$ dır.

İspat: $(s_n), \sum u_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ve $f(x) = \sum u_k x^k$ olsun. Üçgen eşitsizliği yardımıyla

$$D(s_n, \bar{0}) \leq D(s_n, \nu) + D(\nu, \bar{0})$$

yazılabilir. Burada ν bir fuzzy sayısı olduğundan $D(\nu, \bar{0}) \leq M_1$ olacak şekilde bir $M_1 \in \mathbb{R}$ vardır. Diğer yandan

$$D(s_n, \nu) < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n kD(u_k, \bar{0}) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} kD(u_k, \bar{0}) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k + D\left(f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \nu\right)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca $kD(u_k, \bar{0}) = O(1)$ olduğundan

- i) $nD(u_n, \bar{0}) < M_2$
- ii) $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n kD(u_k, \bar{0}) < M_2$
- iii) $D\left(f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \nu\right) < M_3$

olacak şekilde $M_2, M_3 > 0$ sayıları vardır. Böylece $D(s_n, \bar{0}) < 2M_2 + M_3 + M_1$ yani $(u_k) \in bs(F)$ elde edilir. ■

3.2. Fuzzy Sayı Dizilerinin Logaritmik Toplanabilmesi

Bu bölümde fuzzy sayı dizileri için logaritmik toplanabilme metodunu tanımlayacak ve bu metot için Tauber tipi teorem ve sonuçlar elde edeceğiz.

Tanım 3.2.1. (u_k) bir fuzzy sayı dizisi olsun. $\ell_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere (u_k) dizisinin logaritmik ortalaması (τ_n)

$$\tau_n = \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \mu$$

olacak şekilde bir μ fuzzy sayısı varsa (u_k) fuzzy sayı dizisi μ değerine logaritmik toplanabilir denir.

Teorem 3.2.1. (u_k) fuzzy sayı dizisi μ fuzzy sayısına yakınsak ise, o zaman (u_k) dizisi μ sayısına logaritmik toplanabilir.

İspat: $u_k \rightarrow \mu$ olsun. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için $D(u_n, \mu) < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. Ayrıca (u_n) sınırlı olduğundan bir $M > 0$ vardır öyle ki her $n \leq n_0$ için $D(u_n, \mu) \leq M$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}, \mu\right) &\leq \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^n \frac{D(u_k, \mu)}{k} \\ &= \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{D(u_k, \mu)}{k} + \frac{1}{\ell_n} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{D(u_k, \mu)}{k} \\ &< \frac{M}{\ell_n} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2\ell_n} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{M}{\ell_n} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} \rightarrow 0$$

olduğundan, bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_1$ için $\frac{M}{\ell_n} \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Böylece $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ alınırsa her $n > n_2$ için

$$D\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}, \mu\right) < \varepsilon$$

bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Teoremin tersi sağlanmayabilir.

Örnek 3.2.1. u ve v fuzzy sayıları aşağıdaki gibi verilsin.

$$u(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & t \in [-1, 0] \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases} \quad v(t) = \begin{cases} -t + 1, & t \in [0, 1] \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer hallerde.} \end{cases}$$

(u_k) fuzzy sayı dizisini $(u_k) = (u, v, u, v, \dots)$ olarak tanımlayalım. (u_k) dizisinin logaritmik ortalama dizisi (τ_n) nin α -seviye kümeleri

$$[\tau_{2n}]_\alpha = \left[(-\sqrt{1-\alpha}) \frac{1}{\ell_{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1}, (1-\alpha) \frac{1}{\ell_{2n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right]$$

ve

$$[\tau_{2n+1}]_\alpha = \left[(-\sqrt{1-\alpha}) \frac{1}{\ell_{2n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}, (1-\alpha) \frac{1}{\ell_{2n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right]$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (u_n) dizisi $w = \frac{u+v}{2}$ fuzzy sayısına logaritmik toplanabilir fakat yakınsak değildir.

Lemma 3.2.1. (u_k) fuzzy sayı dizisi μ fuzzy sayısına logaritmik toplanabilir ise her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \sum_{k=n+1}^{[n^\lambda]} \frac{u_k}{k} = \mu \quad (3.5)$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell_n - \ell_{[n^\lambda]}} \sum_{k=[n^\lambda]+1}^n \frac{u_k}{k} = \mu \quad (3.6)$$

sağlanır.

İspat: $\lambda > 1$ için

$$\frac{1}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \sum_{k=n+1}^{[n^\lambda]} \frac{u_k}{k} + \frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_n = \tau_{[n^\lambda]} + \frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_{[n^\lambda]} \quad (3.7)$$

ve $0 < \lambda < 1$ için

$$\frac{1}{\ell_n - \ell_{[n^\lambda]}} \sum_{k=[n^\lambda]+1}^n \frac{u_k}{k} + \frac{\ell_{[n^\lambda]}}{\ell_n - \ell_{[n^\lambda]}} \tau_{[n^\lambda]} = \tau_n + \frac{\ell_{[n^\lambda]}}{\ell_n - \ell_{[n^\lambda]}} \tau_n \quad (3.8)$$

eşitliklerinde her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa sırasıyla (3.5) ve (3.6) elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.2. (u_k) fuzzy sayı dizisi μ fuzzy sayısına logaritmik toplanabilir olsun. (u_k) dizisinin μ fuzzy sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) > 1$ ve bir $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$ vardır öyle ki

$$\frac{1}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \sum_{k=n+1}^{[n^\lambda]} \frac{u_k}{k} \geq u_n - \bar{\varepsilon} \quad (n \geq n_0) \quad (3.9)$$

ve bir diğ er $0 < \lambda < 1$ vardır öyle ki

$$\frac{1}{\ell_n - \ell_{[n^\lambda]}} \sum_{k=[n^\lambda]+1}^n \frac{u_k}{k} \preceq u_n + \bar{\varepsilon} \quad (n \geq n_0). \quad (3.10)$$

İspat: (\implies) (u_k) fuzzy sayı dizisi μ fuzzy sayısına yakınsak olsun. O halde $\lambda > 1$ için

$$D\left(\frac{1}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \sum_{k=n+1}^{[n^\lambda]} \frac{u_k}{k}, u_n\right) \leq D\left(\frac{1}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \sum_{k=n+1}^{[n^\lambda]} \frac{u_k}{k}, \mu\right) + D(\mu, u_n)$$

ve $0 < \lambda < 1$ için

$$D\left(\frac{1}{\ell_n - \ell_{[n^\lambda]}} \sum_{k=[n^\lambda]+1}^n \frac{u_k}{k}, u_n\right) \leq D\left(\frac{1}{\ell_n - \ell_{[n^\lambda]}} \sum_{k=[n^\lambda]+1}^n \frac{u_k}{k}, \mu\right) + D(\mu, u_n)$$

eşitsizlikleri ve Lemma 3.2.1 göz önüne alınırsa (3.9) ve (3.10) şartlarının sağlandığı görülür.

(\impliedby) (u_k) dizisi μ sayısına logaritmik toplanabilir olsun ve (3.9), (3.10) şartları sağlansın.

(3.9) şartından verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $n_1 > 1$ ve $\lambda > 1$ vardır öyle ki her $n \geq n_1$ için

$$\frac{1}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \sum_{k=n+1}^{[n^\lambda]} \frac{u_k}{k} \succeq u_n - \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

sağlanır. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\left(\frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_n, \frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_{[n^\lambda]}\right) = 0$$

olduğ undan bir $n_2 > 1$ vardır öyle ki her $n \geq n_2$ için

$$D\left(\frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_n, \frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_{[n^\lambda]}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Böylece

$$\frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_n - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \preceq \frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_{[n^\lambda]} \preceq \frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_n + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

elde edilir. Ayrıca, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{[n^\lambda]} = \mu$ olduğ undan, bir $n_3 > 1$ vardır öyle ki her $n \geq n_3$ için

$D(\tau_{[n^\lambda]}, \mu) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ olur, yani

$$\mu - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \preceq \tau_{[n^\lambda]} \preceq \mu + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

bulunur. (3.7) eşitliğı göz önüne alınırsa, $n_4 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ olmak üzere her $n \geq n_4$ için

$$u_n - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_n \preceq \mu + \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{\ell_n}{\ell_{[n^\lambda]} - \ell_n} \tau_n + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

olduğundan her $n \geq n_4$ için

$$u_n \preceq \mu + \bar{\varepsilon} \quad (3.11)$$

sağlanır.

Benzer şekilde (3.8) ve (3.10) şartları göz önüne alındığında, bir $n_4^* > 1$ vardır öyle ki her $n \geq n_4^*$ için

$$u_n \succeq \mu - \bar{\varepsilon} \quad (3.12)$$

sağlanır. Böylece (3.11) ve (3.12) ifadelerini göz önüne alırsak her $n \geq \max\{n_4, n_4^*\}$ için

$$\mu - \bar{\varepsilon} \preceq u_n \preceq \mu + \bar{\varepsilon}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.2.2. (u_n) bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$u_k \succeq u_n - \bar{\varepsilon}, \quad (n_0 \leq n < k \leq n^\lambda)$$

olacak şekilde bir $n_0 \geq 1$ ve $\lambda > 1$ sayıları bulunabiliyorsa (u_n) dizisine logaritmik toplanabilmeye göre yavaş azalan dizi denir.

Not 3.2.1. (u_n) fuzzy sayı dizisinin logaritmik toplanabilmeye göre yavaş azalan olması için gerek ve yeter şart $\{u_n^-(\alpha) \mid \alpha \in [0, 1]\}$ ve $\{u_n^+(\alpha) \mid \alpha \in [0, 1]\}$ fonksiyon dizilerinin logaritmik toplanabilmeye göre eş-yavaş azalan olmasıdır. Yani her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \geq 1$ ve $\lambda > 1$ vardır öyle ki her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$u_k^-(\alpha) - u_n^-(\alpha) \geq -\varepsilon \quad \text{ve} \quad u_k^+(\alpha) - u_n^+(\alpha) \geq -\varepsilon \quad (n_0 \leq n < k \leq n^\lambda)$$

sağlanır.

Sonuç 3.2.1. (u_n) fuzzy sayı dizisi logaritmik toplanabilmeye göre yavaş azalan ise her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \geq 1$ ve $0 < \lambda < 1$ vardır öyle ki $n > n_0$ için

$$u_n \succeq u_k - \bar{\varepsilon}, \quad n^\lambda \leq k \leq n \quad (3.13)$$

sağlanır.

İspat: İspat için olmayana ergi metodunu kullanacağız. Fuzzy sayı dizisi (u_n) logaritmik toplanabilmeye göre yavaş azalan olsun ve öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ olsun ki her $0 < \lambda < 1$ ve $n_0 \geq 1$ için

$$u_n \not\succeq u_k - \bar{\varepsilon}_0, \quad (n^\lambda \leq k \leq n) \quad (3.14)$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ ve $n > n_0$ değerleri bulunsun. Böylece, bir $\alpha_0 \in [0, 1]$ vardır öyle ki

$$u_n^-(\alpha_0) < u_k^-(\alpha_0) - \varepsilon_0 \quad \text{veya} \quad u_n^+(\alpha_0) < u_k^+(\alpha_0) - \varepsilon_0 \quad (3.15)$$

olur. $u_n^-(\alpha_0)$ ve $u_n^+(\alpha_0)$ dizileri reel değerli logaritmik toplanabilmeye göre yavaş azalan bir (x_n) dizisinin sağlaması gereken

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{n^\lambda \leq k < n} [x_n - x_k] \geq 0 \quad (3.16)$$

şartını sağlamaz. Bu da (u_n) dizisinin yavaş azalan olması ile çelişir ve ispat tamamlanır.

■

Logaritmik toplanabilmeye göre yavaş azalan bir fuzzy sayı dizisi (3.9) ve (3.10) şartlarını sağlayacağından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2. Logaritmik toplanabilmeye göre yavaş azalan (u_n) fuzzy sayı dizisi $\mu \in E^1$ ye logaritmik toplanabilir ise μ ye yakınsaktır.

Teorem 3.2.3. $H > 0$ olsun. (u_n) fuzzy sayı dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(n \ln n)u_n \succeq (n \ln n)u_{n-1} - \overline{H} \quad (3.17)$$

Landau tipi tek taraflı Tauber şartını sağlıyor ise logaritmik toplanabilmeye göre yavaş azalandır.

İspat: Bir $H > 0$ için $(n \ln n)u_n \succeq (n \ln n)u_{n-1} - \overline{H}$ sağlansın. Böylece her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$u_n^-(\alpha) - u_{n-1}^-(\alpha) \geq \frac{-H}{n \ln n}, \quad u_n^+(\alpha) - u_{n-1}^+(\alpha) \geq \frac{-H}{n \ln n}$$

elde edilir. Diğer yandan her $n < k \leq n^\lambda$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} u_k^-(\alpha) - u_n^-(\alpha) &= \sum_{j=n+1}^k \{u_j^-(\alpha) - u_{j-1}^-(\alpha)\} \geq -H \sum_{j=n+1}^k \frac{1}{j \ln j} \\ &\geq -H \int_n^k \frac{du}{u \ln u} = -H \ln \left(\frac{\ln k}{\ln n} \right) \geq -H \ln \lambda \end{aligned}$$

sağlanır. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $\lambda := e^{\varepsilon/H}$ olarak alındığında $n < k \leq n^\lambda$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$u_k^-(\alpha) - u_n^-(\alpha) \geq -\varepsilon$$

bulunur. Benzer şekilde her $n < k \leq n^\lambda$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$u_k^+(\alpha) - u_n^+(\alpha) \geq -\varepsilon$$

elde edilebilir. Böylece her $n < k \leq n^\lambda$ için

$$u_k \succeq u_n - \bar{\varepsilon}$$

sağlanır ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3. (u_n) fuzzy sayı dizisi $\mu \in E^1$ e logaritmik toplanabilir olsun. Eğer (u_n) dizisi (3.17) şartını sağlarsa, o zaman (u_n) dizisi μ sayısına yakınsaktır.



4. FUZZY SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİNİN CESÀRO VE LOGARİTMİK TOPLANABİLMESİ

Bu bölümde fuzzy sayı değerli fonksiyonların integrallerinin Cesàro ve logaritmik toplanabilmesi kavramlarını tanımlayacağız ve bu metotlar için Tauber şartları elde edeceğiz.

4.1. Fuzzy Sayı Değerli Fonksiyonların İntegrallerinin Cesàro Toplanabilmesi

Bu kısımda fuzzy sayı değerli fonksiyonların genelleştirilmiş integralleri için Cesàro toplanabilme metodunu tanımlayacağız. Ayrıca Cesàro toplanabilen genelleştirilmiş integrallerin yakınsaması için yeterli şartları elde edeceğiz.

Tanım 4.1.1. $f : [0, \infty) \rightarrow E^1$ fuzzy sayı değerli sürekli bir fonksiyon ve

$$s(t) = \int_0^t f(x)dx$$

olsun. s fonksiyonunun Cesàro ortalaması

$$\sigma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t s(u)du \quad (4.1)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \mu$ olacak şekilde bir μ fuzzy sayısı var ise

$$\int_0^\infty f(x)dx \quad (4.2)$$

integrali μ sayısına Cesàro toplanabilirdir denir. Ayrıca bu μ sayısı integralin Cesàro toplamı olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.1. $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali μ fuzzy sayısına yakınsak ise μ sayısına Cesàro toplanabilirdir.

İspat:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \mu$$

olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir $t_0 > 0$ vardır öyle ki $t \geq t_0$ için $D(s(t), \mu) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Ayrıca bir $M > 0$ vardır öyle ki $t < t_0$ için $D(s(t), \mu) < M$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} D(\sigma(t), \mu) &= D\left(\frac{1}{t} \int_0^t s(u)du, \mu\right) \\ &= D\left(\frac{1}{t} \int_0^t s(u)du, \frac{1}{t} \int_0^t \mu du\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} D \left(\int_0^t s(u) du, \int_0^t \mu du \right) \\
&\leq \frac{1}{t} \int_0^t D(s(u), \mu) du \\
&= \frac{1}{t} \int_0^{t_0} D(s(u), \mu) du + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t D(s(u), \mu) du \\
&\leq \frac{t_0 M}{t} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{(t - t_0)}{t} < \frac{t_0 M}{t} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_0 M}{t} = 0$ olduğundan bir $t_1 > 0$ bulunabilir öyle ki $t \geq t_1$ için $\left| \frac{t_0 M}{t} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. Böylece $t_2 = \max\{t_0, t_1\}$ olarak seçildiğinde her $t \geq t_2$ için

$$D(\sigma(t), \mu) < \varepsilon$$

sağlanır ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1.1 nin tersi her zaman doğru değildir. Bunu aşağıdaki örneğimizle görebiliriz.

Örnek 4.1.1. $f : [0, \infty) \rightarrow E^1$ fuzzy sayı değerli fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(f(x))(t) = \begin{cases} (t - \cos x)(x + 1)^2, & \cos x \leq t \leq \cos x + \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{ise} \\ 2 - (t - \cos x)(x + 1)^2, & \cos x + \frac{1}{(1+x)^2} \leq t \leq \cos x + \frac{2}{(1+x)^2} \quad \text{ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde.} \end{cases}$$

f fonksiyonunun α -seviye kümesi yardımıyla

$$f_{\alpha}^{-}(x) = \cos x + \frac{\alpha}{(x + 1)^2}, \quad f_{\alpha}^{+}(x) = \cos x + \frac{2 - \alpha}{(x + 1)^2}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
s_{\alpha}^{-}(t) &= \int_0^t f_{\alpha}^{-}(x) dx = \sin t + \alpha \left(1 - \frac{1}{t + 1} \right) \\
s_{\alpha}^{+}(t) &= \int_0^t f_{\alpha}^{+}(x) dx = \sin t + (2 - \alpha) \left(1 - \frac{1}{t + 1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f fonksiyonunun integralinin Cesàro ortalamasının α -seviye kümesi yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}^{-}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t s_{\alpha}^{-}(u) du = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^u f_{\alpha}^{-}(x) dx \right) du = -\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t} + \alpha \left(1 - \frac{\ln(t + 1)}{t} \right) \\
\sigma_{\alpha}^{+}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t s_{\alpha}^{+}(u) du = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^u f_{\alpha}^{+}(x) dx \right) du = -\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t} + (2 - \alpha) \left(1 - \frac{\ln(t + 1)}{t} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{\alpha}^{-}(t) = \alpha, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{\alpha}^{+}(t) = 2 - \alpha$$

bulunur. Şimdi, $[u]_\alpha = [\alpha, 2 - \alpha]$ olmak üzere $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\sigma(t), u) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
D(\sigma(t), u) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} d([\sigma(t)]_\alpha, [u]_\alpha) \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \{ |\sigma_\alpha^-(t) - u^-(\alpha)|, |\sigma_\alpha^+(t) - u^+(\alpha)| \} \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| -\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t} + \alpha \left(1 - \frac{\ln(t+1)}{t} \right) - \alpha \right|, \right. \\
&\quad \left. \left| -\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t} + (2 - \alpha) \left(1 - \frac{\ln(t+1)}{t} \right) - (2 - \alpha) \right| \right\} \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| -\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t} - \alpha \left(\frac{\ln(t+1)}{t} \right) \right|, \right. \\
&\quad \left. \left| -\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t} - (2 - \alpha) \left(\frac{\ln(t+1)}{t} \right) \right| \right\} \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \left| -\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t} - (2 - \alpha) \left(\frac{\ln(t+1)}{t} \right) \right| \right\} \\
&= \left| -\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t} - 2 \left(\frac{\ln(t+1)}{t} \right) \right|
\end{aligned}$$

ifadesinde her iki tarafın $t \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\sigma(t), u) = 0$ olduğu görülür ve böylece $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

fuzzy sayısına Cesàro toplanabilir fakat $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali yakınsak değildir.

Şimdi Cesàro toplanabilme için verecek olduğumuz Tauber teoremlerin ispatında gerekli olan bir lemma vereceğiz.

Lemma 4.1.1. $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali bir μ fuzzy sayısına Cesàro toplanabilir ise her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x)dx = \mu \quad (4.3)$$

ve her $0 < \ell < 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \ell t} \int_{\ell t}^t s(x)dx = \mu \quad (4.4)$$

sağlanır.

İspat: Aşağıdaki eşitlikleri göz önüne alalım.

$$\frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx + \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(t) = \sigma(\lambda t) + \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(\lambda t), \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{t - \ell t} \int_{\ell t}^t s(x) dx + \frac{\ell}{1 - \ell} \sigma(\ell t) = \sigma(t) + \frac{\ell}{1 - \ell} \sigma(t). \quad (4.6)$$

Bulunan (4.5) ve (4.6) eşitliklerinde her iki tarafın $t \rightarrow \infty$ için limitini alırsak sırasıyla (4.3) ve (4.4) eşitliklerini elde ederiz ve ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi Cesàro toplanabilen bir fuzzy değerli fonksiyonun integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şartları verelim.

Teorem 4.1.2. $f : [0, \infty) \rightarrow E^1$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\int_0^{\infty} f(x) dx$ integrali bir μ fuzzy sayısına Cesàro toplanabilir olsun. $\int_0^{\infty} f(x) dx$ integralinin μ sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $t_0 \geq 0$, $\lambda > 1$ ve $0 < \ell < 1$ bulunmasıdır öyle ki her $t > t_0$ için

$$\frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx \succeq s(t) - \bar{\varepsilon} \quad (4.7)$$

ve

$$\frac{1}{t - \ell t} \int_{\ell t}^t s(x) dx \preceq s(t) + \bar{\varepsilon} \quad (4.8)$$

eşitsizlikleri sağlar.

İspat: (\implies) $\int_0^{\infty} f(x) dx$ integrali μ fuzzy sayısına yakınsak olsun.

$$D\left(\frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx, s(t)\right) \leq D\left(\frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx, \mu\right) + D(\mu, s(t))$$

eşitsizliğinde (4.3) göz önüne alınırsa $\lambda > 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D\left(\frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx, s(t)\right) = 0$$

olduğu görülür. Diğer yandan (4.8) nin geçerliliği (4.4) ifadesi yardımıyla benzer şekilde gösterilebilir.

(\impliedby) $\int_0^{\infty} f(x) dx$ integrali μ fuzzy sayısına Cesàro toplanabilir olsun ve (4.7), (4.8) sağlansın. (4.7) şartından, verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $t_1 \geq 0$ ve $\lambda > 1$ vardır öyle ki her $t > t_1$ için

$$\frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx \succeq s(t) - \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

sağlanır. Ayrıca

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D \left(\frac{1}{\lambda - 1} \sigma(t), \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(\lambda t) \right) = 0$$

olduğundan bir $t_2 \geq 0$ vardır öyle ki her $t > t_2$ için

$$D \left(\frac{1}{\lambda - 1} \sigma(t), \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(\lambda t) \right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{\lambda - 1} \sigma(t) - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \preceq \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(\lambda t) \preceq \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(t) + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

elde edilir. Bunun yanında $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(\lambda t) = \mu$ olduğundan bir $t_3 \geq 0$ vardır öyle ki her $t > t_3$ için $D(\sigma(\lambda t), \mu) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ kalır ki buradan

$$\mu - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \preceq \sigma(\lambda t) \preceq \mu + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

elde edilir. Böylece (4.5) eşitliği göz önüne alındığında bir $t_4 = \max\{t_1, t_2, t_3\}$ vardır öyle ki her $t > t_4$ için

$$s(t) - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(t) \preceq \mu + \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(t) + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

sağlanır ve dolayısıyla

$$s(t) \preceq \mu + \bar{\varepsilon} \quad (4.9)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.6) ve (4.8) şartları kullanılarak, bir $t_4^* \geq 0$ bulunabilir öyle ki her $t > t_4^*$ için

$$s(t) \succeq \mu - \bar{\varepsilon} \quad (4.10)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.9) and (4.10) kullanılırsa $t > \max\{t_4, t_4^*\}$ için

$$\mu - \bar{\varepsilon} \preceq s(t) \preceq \mu + \bar{\varepsilon}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar. ■

Tanım 4.1.2. f fuzzy sayı değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$f(x) \succeq f(t) - \bar{\varepsilon} \quad (t_0 < t \leq x \leq \lambda t)$$

olacak şekilde bir $t_0 \geq 0$ ve $\lambda > 1$ sayıları bulunabiliyorsa f fonksiyonuna yavaş azalan fonksiyon denir.

Not 4.1.1. Fuzzy sayı değerli f fonksiyonunun yavaş azalan olması için gerek ve yeter şart $\{f_{\alpha}^{-}(x) \mid \alpha \in [0, 1]\}$ ve $\{f_{\alpha}^{+}(x) \mid \alpha \in [0, 1]\}$ reel değerli fonksiyon ailelerinin eş-yavaş azalan olmasıdır. Yani, her $\varepsilon > 0$ için bir $t_0 \geq 0$ ve $\lambda > 1$ vardır öyle ki her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f_{\alpha}^{-}(x) - f_{\alpha}^{-}(t) \geq -\varepsilon \quad \text{ve} \quad f_{\alpha}^{+}(x) - f_{\alpha}^{+}(t) \geq -\varepsilon, \quad (t_0 < t \leq x \leq \lambda t)$$

sağlanır.

Lemma 4.1.2. Fuzzy sayı değerli f fonksiyonu yavaş azalan ise her $\varepsilon > 0$ için bir $t_0 \geq 0$ ve $0 < \lambda < 1$ vardır öyle ki her $t > t_0$ için

$$f(t) \succeq f(x) - \bar{\varepsilon}, \quad (\lambda t \leq x \leq t) \quad (4.11)$$

sağlanır.

İspat: İspatı olmayana ergi metodu ile yapacağız. Varsayalım ki fuzzy sayı değerli f fonksiyonu yavaş azalan olsun ve bir $\varepsilon_0 > 0$ bulunsun öyle ki her $0 < \lambda < 1$ ve her $t_0 \geq 0$ için

$$f(t) \not\succeq f(x) - \bar{\varepsilon}_0, \quad (\lambda t \leq x \leq t) \quad (4.12)$$

olacak şekilde x ve $t > t_0$ sayıları mevcut olsun. Bu halde bir $\alpha_0 \in [0, 1]$ vardır öyle ki

$$f_{\alpha_0}^{-}(t) < f_{\alpha_0}^{-}(x) - \varepsilon_0 \quad \text{veya} \quad f_{\alpha_0}^{+}(t) < f_{\alpha_0}^{+}(x) - \varepsilon_0 \quad (4.13)$$

olur. Bu noktada Móricz'in reel değerli yavaş azalan fonksiyonlar için formülize etmiş olduğu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\lambda t \leq x \leq t} [f(t) - f(x)] \geq 0 \quad (4.14)$$

şartını hatırlarız [22]. (4.13) deki hangi eşitsizliği seçersek seçelim $f_{\alpha_0}^{-}(t)$ ve $f_{\alpha_0}^{+}(t)$ fonksiyonlarından biri (4.14) şartını sağlamaz. Böylece $f_{\alpha_0}^{-}(t)$ ve $f_{\alpha_0}^{+}(t)$ fonksiyonlarından en azından biri yavaş azalan olmamış olur ki bu da fuzzy değerli f fonksiyonunun yavaş azalan olması ile çelişir. ■

Açıktır ki fuzzy sayı değerli f fonksiyonunun integral fonksiyonu s yavaş azalan ise (4.7) ve (4.8) Tauber şartları sağlanır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $\int_0^{\infty} f(x)dx$ integrali μ fuzzy sayısına Cesàro toplanabilir ve f nin integral fonksiyonu s yavaş azalan ise $\int_0^{\infty} f(x)dx$ integrali μ ye yakınsaktır.

Teorem 4.1.3. $f, [0, \infty)$ aralığı üzerinde fuzzy değerli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$xf(x) \succeq u, \quad (x > x_0) \quad (4.15)$$

olacak şekilde negatif bir u fuzzy sayısı ve bir $x_0 \geq 0$ reel sayısı var ise $s(t) = \int_0^t f(x)dx$ fonksiyonu yavaş azalandır.

İspat: Negatif bir u fuzzy sayısı ve $x_0 \geq 0$ reel sayısı için $xf(x) \succeq u$ sağlansın. Bu durumda $x > x_0$ için

$$xf_{\alpha}^{-}(x) \geq u^{-}(\alpha) \geq u^{-}(0), \quad xf_{\alpha}^{+}(x) \geq u^{+}(\alpha) \geq u^{+}(1) \geq u^{-}(0)$$

olur. Kolaylık adına $H \geq 0$ olmak üzere $u^{-}(0) = -H$ alalım. O halde

$$xf_{\alpha}^{-}(x) \geq -H \Rightarrow f_{\alpha}^{-}(x) \geq -\frac{H}{x}, \quad xf_{\alpha}^{+}(x) \geq -H \Rightarrow f_{\alpha}^{+}(x) \geq -\frac{H}{x}$$

sağlanacağından $\lambda > 1$ ve $x_0 < t < x \leq \lambda t$ için

$$s_{\alpha}^{-}(x) - s_{\alpha}^{-}(t) = \int_t^x f_{\alpha}^{-}(y)dy \geq -H \int_t^x \frac{dy}{y} = -H \ln \frac{x}{t} \geq -H \ln \lambda$$

ve

$$s_{\alpha}^{+}(x) - s_{\alpha}^{+}(t) = \int_t^x f_{\alpha}^{+}(y)dy \geq -H \int_t^x \frac{dy}{y} = -H \ln \frac{x}{t} \geq -H \ln \lambda$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\lambda = e^{\varepsilon/H}$ alırsak her $x_0 < t < x \leq \lambda t$ için

$$s_{\alpha}^{-}(x) \geq s_{\alpha}^{-}(t) - \varepsilon, \quad s_{\alpha}^{+}(x) \geq s_{\alpha}^{+}(t) - \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır ve böylece $x_0 < t < x \leq \lambda t$ için $s(x) \succeq s(t) - \bar{\varepsilon}$ elde edilir. ■

Şimdi teoremin şartını sağlayan bir örneği inceleyelim.

Örnek 4.1.2. $f : [0, \infty) \rightarrow E^1$ fonksiyonu

$$(f(x))(t) = \begin{cases} \frac{t}{2-\sin x}, & 0 \leq t \leq 2 - \sin x \text{ ise,} \\ 2 - \frac{t}{2-\sin x}, & 2 - \sin x \leq t \leq 2(2 - \sin x) \text{ ise.} \end{cases}$$

olarak verilsin. f fonksiyonunun α -kesitleri

$$f_{\alpha}^{-}(x) = (2 - \sin x)\alpha, \quad f_{\alpha}^{+}(x) = (2 - \sin x)(2 - \alpha)$$

olarak bulunur. Böylece her $\alpha \in [0, 1]$ ve $x > 0$ için

$$xf_{\alpha}^{-}(x) \geq 0, \quad xf_{\alpha}^{+}(x) \geq 0$$

olduğundan $xf(x) \succeq \bar{0}$ elde edilir ve s integral fonksiyonu yavaş azalandır.

Theorem 4.1.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2. $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali μ fuzzy sayısına Cesàro toplanabilir ve (4.15) şartı sağlanıyorsa $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali μ ye yakınsaktır.

4.2. Fuzzy Sayı Değerli Fonksiyonların İntegrallerinin Logaritmik Toplanabilmesi

Fuzzy sayı değerli fonksiyonların integrallerinin logaritmik toplanabilmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.2.1. $f : [1, \infty) \rightarrow E^1$ fuzzy sayı değerli sürekli bir fonksiyon ve $s(t) = \int_1^t f(x)dx$ olsun. s fonksiyonunun logaritmik ortalaması

$$\tau(t) = \frac{1}{\ln t} \int_1^t \frac{s(x)}{x} dx \quad (4.16)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \mu$ olacak şekilde bir μ fuzzy sayısı var ise

$$\int_1^\infty f(x)dx \quad (4.17)$$

integrali μ sayısına logaritmik toplanabilir denir. Ayrıca bu μ sayısı integralin logaritmik toplamı olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.1. $\int_1^\infty f(x)dx$ integrali μ fuzzy sayısına yakınsak ise μ sayısına logaritmik toplanabilir.

İspat:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \mu$$

olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için bir $t_0 > 1$ vardır öyle ki her $t \geq t_0$ için $D(s(t), \mu) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Diğer yandan bir $M > 0$ vardır öyle ki her $t < t_0$ için $D(s(t), \mu) < M$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} D(\tau(t), \mu) &= D\left(\frac{1}{\ln t} \int_1^t \frac{s(x)}{x} dx, \mu\right) \\ &= D\left(\frac{1}{\ln t} \int_1^t \frac{s(x)}{x} dx, \frac{1}{\ln t} \int_1^t \frac{\mu}{x} dx\right) \\ &= \frac{1}{\ln t} D\left(\int_1^t \frac{s(x)}{x} dx, \int_1^t \frac{\mu}{x} dx\right) \\ &\leq \frac{1}{\ln t} \int_1^t \frac{D(s(x), \mu)}{x} dx \\ &= \frac{1}{\ln t} \int_1^{t_0} \frac{D(s(x), \mu)}{x} dx + \frac{1}{\ln t} \int_{t_0}^t \frac{D(s(x), \mu)}{x} dx \end{aligned}$$

$$\leq M \frac{\ln t_0}{\ln t} + \frac{\varepsilon (\ln t - \ln t_0)}{2 \ln t} < M \frac{\ln t_0}{\ln t} + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı t sonsuza yaklaşırken sıfıra gittiğinden $D(\tau(t), \mu) \rightarrow 0$ sağlanır ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.1 nin tersi her zaman doğru değildir. Bunu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek 4.2.1. $f : [1, \infty) \rightarrow E^1$ fuzzy sayı değerli fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(f(x))(t) = \begin{cases} (t - \sin x)x^2, & \sin x \leq t \leq \sin x + \frac{1}{x^2} \text{ ise,} \\ 2 - (t - \sin x)x^2, & \sin x + \frac{1}{x^2} \leq t \leq \sin x + \frac{2}{x^2} \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer hallerde.} \end{cases}$$

Buradan α -seviye kümeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{-}(x) &= \sin x + \frac{\alpha}{x^2}, & f_{\alpha}^{+}(x) &= \sin x + \frac{2 - \alpha}{x^2} \\ s_{\alpha}^{-}(t) &= \int_1^t f_{\alpha}^{-}(x) dx = -\cos t + \cos 1 + \alpha \left(1 - \frac{1}{t}\right) \\ s_{\alpha}^{+}(t) &= \int_1^t f_{\alpha}^{+}(x) dx = -\cos t + \cos 1 + (2 - \alpha) \left(1 - \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{\alpha}^{-}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln t} \int_1^t \frac{s_{\alpha}^{-}(x)}{x} dx = \alpha + \cos 1$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{\alpha}^{+}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln t} \int_1^t \frac{s_{\alpha}^{+}(x)}{x} dx = 2 - \alpha + \cos 1$$

olduğu görülür. u , α -seviye kümesi $[u]_{\alpha} = [\alpha + \cos 1, 2 - \alpha + \cos 1]$ olan bir fuzzy sayısı olmak üzere $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\tau(t), u) = 0$ sağlandığından $\int_1^{\infty} f(x) dx$ integrali

$$u(t) = \begin{cases} t - \cos 1, & \cos 1 \leq t \leq 1 + \cos 1 \text{ ise,} \\ -t + 2 + \cos 1, & 1 + \cos 1 \leq t \leq 2 + \cos 1 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

fuzzy sayısına logaritmik toplanabilirdir. Fakat $\int_1^{\infty} f(x) dx$ integrali yakınsak değildir.

Lemma 4.2.1. $\int_1^{\infty} f(x) dx$ integrali bir μ fuzzy sayısına logaritmik toplanabilir ise her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda - 1) \ln t} \int_t^{t^{\lambda}} \frac{s(x)}{x} dx = \mu \quad (4.18)$$

ve her $0 < \ell < 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\ell) \ln t} \int_{t^\ell}^t \frac{s(x)}{x} dx = \mu. \quad (4.19)$$

sağlanır.

İspat: $\lambda > 1$ için

$$\frac{1}{(\lambda-1) \ln t} \int_t^{t^\lambda} \frac{s(x)}{x} dx + \frac{1}{\lambda-1} \tau(t) = \tau(t^\lambda) + \frac{1}{\lambda-1} \tau(t^\lambda), \quad (4.20)$$

ve $0 < \ell < 1$ için

$$\frac{1}{(1-\ell) \ln t} \int_{t^\ell}^t \frac{s(x)}{x} dx + \frac{\ell}{1-\ell} \tau(t^\ell) = \tau(t) + \frac{\ell}{1-\ell} \tau(t). \quad (4.21)$$

eşitsizliklerini göz önüne alalım. (4.20) ve (4.21) eşitliklerinde her iki tarafın $t \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa sırasıyla (4.18) ve (4.19) eşitlikleri elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi logaritmik toplanabilen bir fuzzy değerli fonksiyonun integralinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli şartları veren bir teoremi inceleyeceğiz.

Teorem 4.2.2. $f : [1, \infty) \rightarrow E^1$ sürekli bir fonksiyon ve $\int_1^\infty f(x) dx$ integrali bir μ fuzzy sayısına logaritmik toplanabilir olsun. $\int_1^\infty f(x) dx$ integralinin μ sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $t_0 > 1$, $\lambda > 1$ ve $0 < \ell < 1$ bulunmasıdır öyle ki her $t \geq t_0$ için

$$\frac{1}{(\lambda-1) \ln t} \int_t^{t^\lambda} \frac{s(x)}{x} dx \succeq s(t) - \bar{\varepsilon} \quad (4.22)$$

ve

$$\frac{1}{(1-\ell) \ln t} \int_{t^\ell}^t \frac{s(x)}{x} dx \preceq s(t) + \bar{\varepsilon} \quad (4.23)$$

sağlanır.

İspat: $(\implies) \int_1^\infty f(x) dx$ integrali μ fuzzy sayısına yakınsak olsun. $\lambda > 1$ için

$$D \left(\frac{1}{(\lambda-1) \ln t} \int_t^{t^\lambda} \frac{s(x)}{x} dx, s(t) \right) \leq D \left(\frac{1}{(\lambda-1) \ln t} \int_t^{t^\lambda} \frac{s(x)}{x} dx, \mu \right) + D(\mu, s(t))$$

ve $0 < \ell < 1$ için

$$D \left(\frac{1}{(1-\ell) \ln t} \int_{t^\ell}^t \frac{s(x)}{x} dx, s(t) \right) \leq D \left(\frac{1}{(1-\ell) \ln t} \int_{t^\ell}^t \frac{s(x)}{x} dx, \mu \right) + D(\mu, s(t))$$

eşitizlikleri ve Lemma 4.2.1 kullanılırsa sırasıyla (4.22), (4.23) ifadelerinin geçerli olduğu görülür.

(\Leftarrow) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali μ fuzzy sayısına logaritmik toplanabilir olsun ve (4.22), (4.23) şartları sağlansın. (4.22) şartından, verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $t_1 > 1$ ve $\lambda > 1$ vardır öyle ki her $t \geq t_1$ için

$$\frac{1}{(\lambda - 1) \ln t} \int_t^{t^\lambda} \frac{s(x)}{x} dx \succeq s(t) - \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

sağlanır. Ayrıca

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D \left(\frac{1}{\lambda - 1} \tau(t), \frac{1}{\lambda - 1} \tau(t^\lambda) \right) = 0$$

olduğundan bir $t_2 > 1$ vardır öyle ki her $t \geq t_2$ için

$$D \left(\frac{1}{\lambda - 1} \tau(t), \frac{1}{\lambda - 1} \tau(t^\lambda) \right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{\lambda - 1} \tau(t) - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \preceq \frac{1}{\lambda - 1} \tau(t^\lambda) \preceq \frac{1}{\lambda - 1} \tau(t) + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

elde edilir. Bunun yanında $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t^\lambda) = \mu$ olduğundan bir $t_3 > 1$ vardır öyle ki her $t \geq t_3$ için $D(\tau(t^\lambda), \mu) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ kalır ki buradan

$$\mu - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \preceq \tau(t^\lambda) \preceq \mu + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

elde edilir. Böylece (4.20) eşitliği göz önüne alındığında, bir $t_4 = \max\{t_1, t_2, t_3\}$ vardır öyle ki her $t \geq t_4$ için

$$s(t) - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{1}{\lambda - 1} \tau(t) \preceq \mu + \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{1}{\lambda - 1} \tau(t) + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}$$

sağlanır ve dolayısıyla

$$s(t) \preceq \mu + \bar{\varepsilon} \quad (4.24)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.21) ve (4.23) ifadeleri kullanılırsa bir $t_4^* > 1$ bulunabilir öyle ki her $t \geq t_4^*$ için

$$s(t) \succeq \mu - \bar{\varepsilon} \quad (4.25)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.24) and (4.25) kullanılırsa her $t \geq \max\{t_4, t_4^*\}$ için

$$\mu - \bar{\varepsilon} \preceq s(t) \preceq \mu + \bar{\varepsilon}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar. ■

Tanım 4.2.2. f fuzzy sayı değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$f(x) \succeq f(t) - \bar{\varepsilon}, \quad (t_0 < t \leq x \leq t^\lambda)$$

olacak şekilde bir $t_0 \geq 1$ and $\lambda > 1$ sayıları bulunabiliyorsa f fonksiyonuna logaritmik anlamda yavaş azalan fonksiyon denir.

Not 4.2.1. Fuzzy sayı değerli f fonksiyonunun logaritmik anlamda yavaş azalan olması için gerek ve yeter şart $\{f_\alpha^-(x) \mid \alpha \in [0, 1]\}$ ve $\{f_\alpha^+(x) \mid \alpha \in [0, 1]\}$ reel değerli fonksiyon ailelerinin logaritmik anlamda eş-yavaş azalan olmasıdır yani her $\varepsilon > 0$ için bir $t_0 \geq 1$ ve $\lambda > 1$ vardır öyle ki her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f_\alpha^-(x) - f_\alpha^-(t) \geq -\varepsilon \quad \text{ve} \quad f_\alpha^+(x) - f_\alpha^+(t) \geq -\varepsilon \quad (t_0 < t \leq x \leq t^\lambda)$$

sağlanmasıdır.

Lemma 4.2.2. Fuzzy sayı değerli f fonksiyonu logaritmik anlamda yavaş azalan ise her $\varepsilon > 0$ için bir $t_0 \geq 1$ ve $0 < \lambda < 1$ vardır öyle ki her $t > t_0$ için

$$f(t) \succeq f(x) - \bar{\varepsilon}, \quad (t^\lambda \leq x \leq t) \quad (4.26)$$

sağlanır.

İspat: İspatı olmayana ergi metodu ile yapacağız. Varsayalım ki fuzzy sayı değerli f fonksiyonu logaritmik anlamda yavaş azalan olsun ve bir $\varepsilon_0 > 0$ bulunsun öyle ki her $0 < \lambda < 1$ ve her $t_0 \geq 1$ için

$$f(t) \not\succeq f(x) - \bar{\varepsilon}_0 \quad (t^\lambda \leq x \leq t) \quad (4.27)$$

olacak şekilde x ve $t > t_0$ sayıları mevcut olsun. Bu halde bir $\alpha_0 \in [0, 1]$ vardır öyle ki

$$f_{\alpha_0}^-(t) < f_{\alpha_0}^-(x) - \varepsilon_0 \quad \text{veya} \quad f_{\alpha_0}^+(t) < f_{\alpha_0}^+(x) - \varepsilon_0 \quad (4.28)$$

olur. Bu noktada Móricz'in reel değerli logaritmik anlamda yavaş azalan fonksiyonlar için formülize etmiş olduğu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t^\lambda \leq x \leq t} [f(t) - f(x)] \geq 0 \quad (4.29)$$

şartını hatırlarız. (4.28) göz önüne alındığında $f_{\alpha_0}^-(t)$ ve $f_{\alpha_0}^+(t)$ fonksiyonlarından en az biri (4.29) şartını sağlamaz. Böylece $f_{\alpha_0}^-(t)$ ve $f_{\alpha_0}^+(t)$ fonksiyonlarından en az biri logaritmik anlamda yavaş azalan olmamış olur ki bu da fuzzy sayı değerli f

fonksiyonunun logaritmik anlamda yavaş azalan olması ile çelişir. ■

Açıktır ki fuzzy sayı değerli f fonksiyonunun s integral fonksiyonu logaritmik anlamda yavaş azalan ise (4.22) ve (4.23) Tauber şartları sağlanır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1. $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali μ fuzzy sayısına logaritmik toplanabilir ve f nin s integral fonksiyonu logaritmik anlamda yavaş azalan ise integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali μ ye yakınsaktır.

Teorem 4.2.3. $f, [1, \infty)$ aralığı üzerinde fuzzy değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $x > x_0$ için

$$(x \ln x)f(x) \succeq u \quad (4.30)$$

olacak şekilde negatif bir u fuzzy sayısı ve bir $x_0 \geq 1$ reel sayısı var ise $s(t) = \int_1^t f(x)dx$ fonksiyonu logaritmik anlamda yavaş azalandır.

İspat: Negatif bir u fuzzy sayısı ve $x_0 \geq 1$ reel sayısı için $(x \ln x)f(x) \succeq u$ sağlansın. Bu durumda $x > x_0$ için

$$x \ln x f_{\alpha}^{-}(x) \geq u^{-}(\alpha) \geq u^{-}(0), \quad x \ln x f_{\alpha}^{+}(x) \geq u^{+}(\alpha) \geq u^{+}(1) \geq u^{-}(0)$$

olur. Kolaylık adına $H \geq 0$ olmak üzere $u_0^{-} = -H$ alalım. O halde

$$x \ln x f_{\alpha}^{-}(x) \geq -H \Rightarrow f_{\alpha}^{-}(x) \geq \frac{-H}{x \ln x}, \quad x \ln x f_{\alpha}^{+}(x) \geq -H \Rightarrow f_{\alpha}^{+}(x) \geq -\frac{H}{x \ln x}$$

sağlanacağından $\lambda > 1$ ve $x_0 \leq t < x \leq t^{\lambda}$ için

$$s_{\alpha}^{-}(x) - s_{\alpha}^{-}(t) = \int_t^x f_{\alpha}^{-}(y)dy \geq -H \int_t^x \frac{dy}{y \ln y} = -H \ln \left(\frac{\ln x}{\ln t} \right) \geq -H \ln \lambda$$

$$s_{\alpha}^{+}(x) - s_{\alpha}^{+}(t) = \int_t^x f_{\alpha}^{+}(y)dy \geq -H \int_t^x \frac{dy}{y \ln y} = -H \ln \left(\frac{\ln x}{\ln t} \right) \geq -H \ln \lambda$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\lambda := e^{\varepsilon/H}$ seçilirse $x_0 \leq t < x \leq t^{\lambda}$ için

$$s_{\alpha}^{-}(x) \geq s_{\alpha}^{-}(t) - \varepsilon, \quad s_{\alpha}^{+}(x) \geq s_{\alpha}^{+}(t) - \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır ve $x_0 \leq t < x \leq t^{\lambda}$ olmak üzere $s(x) \succeq s(t) - \bar{\varepsilon}$ bulunur. ■

Theorem 4.2.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2. $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali μ fuzzy sayısına logaritmik toplanabilir ve (4.30) şartı sağlanıyorsa $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali μ sayısına yakınsaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Cesàro, E. Sur la multiplication des séries. Bulletin des Sciences Mathématiques. 1890, 14(2), 114–120.
- [2] Fejér, L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Mathematische Annalen. 1904, 58, 51–69.
- [3] Mursaleen, M. Applied Summability Methods. Springer, 2014.
- [4] Weisz, F. ℓ_1 -summability of higher-dimensional Fourier series. Journal of Approximation Theory. 2011, 163, 99–116
- [5] Sokal, A.D. An improvement of Watson's theorem on Borel summability. Journal of Mathematical Physics. 1980, 21(2), 261–263.
- [6] Swetits, J.J. On summability and positive linear operators. Journal of Approximation Theory. 1979, 25(2), 186–188.
- [7] Tauber, A. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatshefte für Mathematik. 1897, 8, 273–277.
- [8] Hardy, G.H. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. Proceedings of the London Mathematical Society. 1910, 2(8), 310–320.
- [9] Littlewood, J.E. The converse of Abel's theorem on power series. Proceedings of the London Mathematical Society. 1911, 9(2), 434–448.
- [10] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. Tauberian theorems concerning series of positive terms. Messenger of Mathematics. 1913, 42, 191–192.
- [11] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proceedings of the London Mathematical Society. 1914, 2(13), 174–191.
- [12] Hardy, G.H. Divergent Series. Clarendon press, Oxford, 1949.
- [13] Wiener, N. A new method in Tauberian theorems. Journal of Mathematics and Physics. 1928, 7(1), 161–184.
- [14] Karamata, J. Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité. Hermann, Paris, 1937.
- [15] Ingham, A.E. On Tauberian theorems. Proceedings of the London Mathematical Society. 1965, 14A(3), 157–173.
- [16] Boos, J. Classical and modern methods in summability. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [17] Korevaar J. Tauberian Theory: A century of developments. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

- [18] Titchmarsh, E. Introduction to the theory of Fourier integrals (2nd ed.). Chelsea Pub., New York, 1986[1948].
- [19] Philipp, S. P., Shapiro V. L., Sills W. H., The Abel Summability Of Conjugate Multiple Fourier-Stieltjes Integrals. Pacific Journal Of Mathematics. 1971, 36(1), 231–238.
- [20] Golubov, B.I. On the summability of fourier integrals by Riesz spherical means. Mathematics of the USSR-Sbornik. 1977, 104(146), 4(12), 577–596.
- [21] Borwein, D., Thorpe, B., On Cesàro and Abel summability factors for integrals. Canadian Journal of Mathematics. 1986,38, 453–477.
- [22] Móricz, F., Németh, Z. Tauberian conditions under which convergence of integrals follows from summability $(C, 1)$ over R_+ . Analysis Mathematica. 2000, 26, 53–61.
- [23] Çanak, İ., Totur, Ü. A Tauberian theorem for Cesàro summability of integrals. Applied Mathematics Letters. 2011, 24, 391–395.
- [24] Çanak, İ., Totur, Ü. Tauberian conditions for Cesàro summability of integrals. Applied Mathematics Letters. 2011, 24, 891–896.
- [25] Totur, Ü., Çanak, İ. One-sided Tauberian conditions for $(C,1)$ summability method of integrals. Mathematical and Computer Modelling. 2012, 55, 1813–1818.
- [26] Çanak, İ., Totur, Ü. Alternative proofs of some classical type Tauberian theorems for Cesàro summability of integrals. Mathematical and Computer Modelling. 2012, 55(3), 1558–1561.
- [27] Totur, Ü., Çanak, İ. On Tauberian conditions for $(C,1)$ summability of integrals. Revista de la Unión Matemática Argentina. 2013, 54(2), 59–65.
- [28] Totur, Ü., Çanak, İ. On the $(C,1)$ summability method of improper integrals. Applied Mathematics and Computation. 2013, 219(24), 11065–11070.
- [29] Móricz, F. Necessary and sufficient Tauberian conditions for the logarithmic summability of functions and sequences. Studia Mathematica. 2013, 219, 109–121.
- [30] Giang, D.V., Móricz, F. The strong summability of Fourier transforms. Acta Mathematica Hungarica. 1994, 65(4), 403–419.
- [31] Móricz, F. Strong Cesàro summability and statistical limit of double Fourier integrals. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged). 2005, 71, 159–174.
- [32] Brown, G., Feng, D., Móricz, F. Strong Cesàro Summability of Double Fourier Integrals. Acta Mathematica Hungarica. 2007, 115(1-2), 1–12.
- [33] Mishra, V.N., Khatri, K., Mishra, L.N. Strong Cesàro Summability of Triple Fourier Integrals. Fasciculi Mathematici. 2014, 53, 95–112.
- [34] Zadeh, L.A. Fuzzy sets. Information and Control. 1965, 8, 29–44.
- [35] Matloka M. Sequence of fuzzy numbers. BUSEFAL. 1986, 28, 28–37.

- [36] Nanda, S. On sequence of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. 1989, 33, 123–126.
- [37] Stojaković, M., Stojaković, Z. Addition and series of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. 1996, 83, 341–346.
- [38] Taló, Ö., Başar, F. On the space $bv_p(F)$ of sequences of p -bounded variation of fuzzy numbers. *Acta Mathematica Sinica, English Series*. 2008, 24(7), 1205–1212.
- [39] Stojaković, M., Stojaković, Z. Series of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. 2009, 160, 3115–3127.
- [40] Taló, Ö., Başar, F. Determination of the duals of classical sets of sequences of fuzzy numbers and related matrix transformations. *Computers and Mathematics with Applications*. 2009, 58(4), 717–733.
- [41] Taló, Ö., Başar, F. Certain spaces of sequences of fuzzy numbers defined by a modulus function. *Demonstratio Mathematica*. 2010, 43(1), 139–149.
- [42] Çolak, R., Altın, Y., Mursaleen, M. On some sets of difference sequences of fuzzy numbers. *Soft Computing*. 2011, 15(4), 787–793.
- [43] Altınok, H., Çolak, R., Altın, Y. On the class of λ -statistically convergent difference sequences of fuzzy numbers. *Soft Computing*. 2012, 16(6), 1029–1034.
- [44] Kadak, U., Başar, F. Power series of fuzzy numbers with real or fuzzy coefficients. *Filomat*. 2012, 26(3), 519–528.
- [45] Tripathy, B.C., Dutta, A.J. Lacunary bounded variation sequence of fuzzy real numbers. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 2013, 24(1), 185–189.
- [46] Tripathy, B.C., Sen, M. On fuzzy I-convergent difference sequence space. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 2013, 25(3), 643–647.
- [47] Taló, Ö., Çakan, C. The extension of the Knopp core theorem to the sequences of fuzzy numbers. *Information Sciences*. 2014, 276(20), 10–20.
- [48] Taló, Ö. Some properties of limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers. *Information Sciences*. 2014, 279, 560–568.
- [49] Subrahmanyam, P.V. Cesàro summability of fuzzy real numbers. *Journal of Analysis*. 1999, 7, 159–168.
- [50] Taló, Ö., Çakan, Ç. On the Cesàro convergence of sequences of fuzzy numbers. *Applied Mathematics Letters*. 2012, 25, 676–681.
- [51] Taló, Ö., Başar, F. On the Slowly Decreasing Sequences of Fuzzy Numbers, *Abstract and Applied Analysis*. 2013, 2013, 1–7.
- [52] Taló, Ö., Çakan, C. Tauberian Theorems for Statistically $(C, 1)$ -convergent Sequences of Fuzzy Numbers. *Filomat*. 2014, 28, 849–858.
- [53] Çanak, İ. On the Riesz mean of sequences of fuzzy real numbers, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 2014, 26(6), 2685–2688.

- [54] Çanak, İ. Tauberian theorems for Cesàro summability of sequences of fuzzy number. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 2014, 27(2), 937–942.
- [55] Sezer, S.A., Çanak, İ. Power series methods of summability for series of fuzzy numbers and related Tauberian Theorems. *Soft Computing*. 2015, Preprint, 1–8.
- [56] Önder, Z., Sezer, S.A., Çanak, İ. A Tauberian theorem for the weighted mean method of summability of sequences of fuzzy numbers. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 2015, 28(3), 1403–1409.
- [57] Talo, Ö., Kadak, U., Başar, F., On series of fuzzy numbers. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*. 2016, 4(1), 132–155.
- [58] Kim, Y.K., Ghil, B.M. Integrals of fuzzy-number-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*. 1997, 86, 213–222.
- [59] Wu, H-C. The improper fuzzy Riemann integral and its numerical integration. *Information Sciences*. 1998, 111(1), 109–137.
- [60] Wu, H-C. The fuzzy Riemann integral and its numerical integration. *Fuzzy Sets and Systems*. 2000, 110(1), 1–25.
- [61] Gong, Z., Shao, Y. The controlled convergence theorems for the strong Henstock integrals of fuzzy-number-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*. 2009, 160(11), 1528–1546.
- [62] Gong, Z., Wang, L., The Henstock-Stieltjes integral for fuzzy-number-valued functions. *Information Sciences*. 2012, 188, 276–297.
- [63] Fang, J. -X., Huang, H. On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. 2004, 147, 417–415.
- [64] Goetschel, R., Voxman, W. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*. 1986, 18, 31–43.
- [65] Aytar, S., Mammadov, M., Pehlivan, S. Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. 2006, 157(7), 976–985.
- [66] Bede, B., Gal, S.G., Almost periodic fuzzy-number-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*. 2004, 147, 385–403.
- [67] Li, H., Wu, C. The integral of a fuzzy mapping over a directed line, *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158, 2317–2338.
- [68] Goetschel, R., Voxman, W. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*. 1986, 18, 31–43.
- [69] Anastassiou, G.A. *Fuzzy Mathematics: Approximation Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Enes YAVUZ
Doğum Yeri ve Yılı : Nazilli, 1987
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : enes.yavuz@cbu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lisans : Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2010
Yüksek Lisans : Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2012

Mesleki Deneyim

Araştırma Görevlisi, Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2010-2013
Araştırma Görevlisi, Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013-... (halen)

Yayınları

1. Özarслан, H.S., Yavuz, E. A new note on absolute matrix summability. *Journal of Inequalities and Applications*. 2013, 474, 1–7.
2. Özarслан, H.S., Yavuz, E. New Theorems for Absolute Matrix Summability Factors. *General Mathematics Notes*. 2014, 23(2), 63–70.
3. Yavuz, E., Çoşkun, H. Tauberian theorems for Abel summability of sequences of fuzzy numbers. *AIP Conference Proceedings*. 2015, 1676. doi: 10.1063/1.4930505
4. Yavuz, E., Talo, Ö. Abel summability of sequences of fuzzy numbers. *Soft Computing*. 2016, 20(3), 1041–1046.
5. Yavuz, E., Çoşkun, H. On the Borel summability method of sequences of fuzzy numbers. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*. 2016, 30(4), 2111–2117.
6. Yavuz, E., Çoşkun, H. On the logarithmic summability method for sequences of fuzzy numbers. *Soft Computing*. 2016, Preprint, doi: 10.1007/s00500-016-2156-4
7. Yavuz, E., Talo, Ö., Çoşkun, H. Cesàro summability of integrals of fuzzy-number-valued functions. *Arxiv*. 2016, arXiv:1604.05338.
8. Yavuz, E., Çoşkun, H. Logarithmic summability of integrals of fuzzy-number-valued functions. *Applied and Computational Mathematics*. 2016, Under Review.