



MARMARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ALTERNATİF KÜTLE ÇEKİM  
KURAMLARININ  
EKSENEL SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

PINAR KİREZLİ

DOKTORA TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Özgür DELİCE

İSTANBUL, 2016



MARMARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ALTERNATİF KÜTLE ÇEKİM  
KURAMLARININ  
EKSENEL SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

---

PINAR KİREZLİ  
(720311002)

DOKTORA TEZİ  
Fizik Anabilim Dalı

DANIŞMAN  
Prof. Dr. Özgür DELİCE

İSTANBUL, 2016




---

# MARMARA ÜNİVERSİTESİ

## FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Öğrencisi Pınar KİREZLİ'nin "Alternatif Kütle Çekim Kuramlarının Eksenel Simetrik Çözümleri" başlıklı tez çalışması, 6 Mayıs 2016 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuştur.

### Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Özgür DELİCE	(Danışman)	
Marmara Üniversitesi .....	(İMZA)	
Prof. Dr. Şahin AKTAŞ	(Üye)	
Marmara Üniversitesi .....	(İMZA)	
Yrd. Doç. Dr. Dilek KAZICI	(Üye)	
Namık Kemal Üniversitesi .....	(İMZA)	
Prof. Dr. Mithat KAYA	(Üye)	
Marmara Üniversitesi .....	(İMZA)	
Doç. Dr. Savaş ARAPOĞLU	(Üye)	
İstanbul Teknik Üniversitesi .....	(İMZA)	

### ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararı ile Pınar KİREZLİ'nin Fizik Anabilim Dalı Programında Doktora derecesi alması onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü  
Prof. Dr. Uğur YAŞI

# TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının oluşturulmasında bilgi ve birikimini benimle paylaşan, fikir ve desteğini esirgemeyen, her zaman sabır ve hoşgörüsüyle yol gösterici olan değerli hocam Prof. Dr. Özgür DELİCE'ye,

Marmara Üniversitesi'nin benim için anlamı olan ve iyi kalpliliğiyle her zaman yükümü güldüren sevgili arkadaşım Neşe GÜNGÖR'e,

Bu zorlu süreçte, her zaman yanımda olarak bana güven veren ve beni motive eden sevgili annem Şencan KİREZLİ ve kardeşim Oktay KİREZLİ'ye,

Marmara Üniversitesi'nde birlikte çok şey paylaştığım ve öğrendiğim sevgili arkadaşlarım Türküler DURĞUT, Utku SAVTAK, İzzet Paruğ DURU'ya ve Namık Kemal Üniversitesi'nde iş arkadaşlarım Pınar BULUT ve Ayça KARASAKAL'a,

Tez çalışmasına, FEN-C-DRP-090414-0094 no'lu projeye maddi destek sağlayan Marmara Üniversitesi BAPKO birimine,

Sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu tezi, tüm hayatım boyunca bana inanan ve beni maddi, manevi destekleyen dedem merhum Abidin KİREZLİ'ye atfediyorum.

**Mayıs, 2016**

**Pınar Kirezli**

# İÇİNDEKİLER

	SAYFA
TEŞEKKÜR . . . . .	i
İÇİNDEKİLER . . . . .	ii
ÖZET . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
YENİLİK BEYANI . . . . .	vii
SEMBOLLER . . . . .	ix
KISALTMALAR . . . . .	x
ŞEKİL LİSTESİ . . . . .	xi
1 GİRİŞ . . . . .	1
2 DURAĞAN ve STATİK EKSENEL SİMETRİK UZAY- ZAMAN . . . . .	9
2.1 Kozmolojik Sabitli Einstein Alan Denklemleri . . . . .	10
2.1.1 Durağan, Eksenel Simetrik Kozmolojik Sabitli Einstein Alan Denklemleri . . . . .	16
2.2 Statik, Eksenel Simetrik (Weyl-tipi) Çözümler . . . . .	17
2.2.1 Curzon-Chazy Çözümü . . . . .	18
2.2.2 Zipoy-Voorhees Çözümü . . . . .	19
2.2.3 İki Parçacıklı Curzon-Chazy Çözümü . . . . .	19
2.2.4 Küresel Kordinatlarda Genel Weyl-tipi Çözüm . . . . .	20
2.2.5 Bertotti-Robinson Çözümü . . . . .	21
2.3 Jeodezik Denklemleri . . . . .	22
2.3.1 Durağan ve Statik Eksenel Simetrik Metrik Jeodezik Denk- lemleri . . . . .	22

<b>3</b>	<b>KARA DELİKLER ve KARA DELİK TERMODİNAMIĞI</b>	<b>25</b>
3.1	Kerr-Newman-Taub-NUT-(anti de Sitter) Çözümü	26
3.2	Kara delik Termodinamiği	29
<b>4</b>	<b>ALTERNATİF KÜTLE-ÇEKİM KURAMLARI</b>	<b>33</b>
4.1	Brans-Dicke Teorisi	33
4.1.1	Durağan, Eksenel Simetrik BD Alan Denklemleri	34
4.2	$f(R)$ Teorisi	35
4.2.1	Tutarlı $f(R)$ Teorileri	37
4.2.2	Durağan, Eksenel Simetrik $f(R)$ Alan Denklemleri	40
<b>5</b>	<b>ÇÖZÜM ÜRETME TEKNİKLERİ</b>	<b>43</b>
5.1	Ernst Denklemleri	43
5.2	Genişletilmiş Tiwari-Nayak-Rai-Singh Metodu	48
5.2.1	Einstein Çerçevesinde Genişletilmiş Tiwari-Nayak-Rai-Singh Metodu	51
5.3	Kozmolojik Sabitli Einstein Alan Denklemleri ve Metrik $f(R)$ Teorisi Alan Denklemleri Arasındaki İlişki	52
<b>6</b>	<b>BAZI YENİ WEYL-TİPİ BD ÇÖZÜMLERİ</b>	<b>55</b>
6.1	Curzon-Chazy BD Çözümü	55
6.1.1	CC-BD Dairesel Jeodezikleri	56
6.2	İki Parçacıklı Curzon-Chazy BD Çözümü	60
6.3	Zipoy-Voorhees BD Çözümü	60
6.3.1	ZV-BD Dairesel Jeodezikleri	61
6.4	Küresel Koordinatlarda Genel Weyl-tipi BD Çözümü	64
6.5	Bertotti-Robinson BD Çözümü	65
<b>7</b>	<b>BAZI YENİ DURAĞAN, EKSENEL SİMETRİK BD ÇÖZÜMLERİ</b>	<b>67</b>
7.1	Plebanski-Demianski BD Çözümü	69
7.2	Kerr-Newman-Taub-NUT BD Çözümü	70
7.2.1	KNTN-BD Dairesel Jeodezikleri	72

7.3	Manyetikleşmiş Kerr-Newman BD Çözümü . . . . .	78
7.4	(Manyetikleşmiş) İki kutuplu Bonnor-tipi BD Çözümü . . . . .	79
7.5	Genel Görelilik Limiti . . . . .	81
<b>8</b>	<b>KNTNAdS <math>f(R)</math> ÇÖZÜMÜ . . . . .</b>	<b>83</b>
8.1	$f(R)$ Kuramında KNTNAdS Karadeligi Termodinamiği . . . . .	84
<b>9</b>	<b>SONUÇLAR . . . . .</b>	<b>91</b>
	<b>KAYNAKLAR . . . . .</b>	<b>95</b>
	<b>EKLER . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Brans-Dicke Teorisi Aksiyon Varyasyonu . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>B</b>	<b><math>f(R)</math> Teorisi Aksiyon Varyasyonu . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>C</b>	<b>Yüzey Kütle-Çekimi . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>ÖZGEÇMİŞ . . . . .</b>	<b>125</b>

# ÖZET

## ALTERNATİF KÜTLE-ÇEKİM KURAMLARININ EKSENEL SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

Bu tezde, durağan veya statik, eksenel simetrik uzay-zaman geometrileri için alternatif kütle-çekim teorilerden Brans-Dicke ve metrik  $f(R)$  kuramlarının bazı yeni tam çözümleri, bir takım çözüm üretme teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. Standard durağan ve eksenel simetrik bir metriğin özel bir biçimi kullanılarak elde edilen Brans-Dicke (BD) alan denklemlerinin düzenlenmesiyle, önemli bir çözüm üretme tekniği olan Ernst denklemlerinin elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu sonuç, literatürde mevcut olan ve BD çözümlerini, Genel Görelilik (GG) çözümlerini temel alan tek parametrelili bir çözüm üretme yönteminin, bu tezde Einstein veya Jordan çerçevelerinde iki parametrelili bir genelleşmesinin elde edilmesine olanak vermiştir. Elde edilen bu genel çözüm üretme tekniği uygulanarak, bir çok GG çözümüne karşılık gelen bilinen ya da yeni BD çözümleri elde edilmiştir. Örneğin, Weyl-tipi çözümler için iki parçacıklı Curzon-Chazy ve Bertotti-Robinson BD çözümleri, durağan, eksenel simetrik çözümler için, manyetikleşmiş Kerr-Newman BD çözümü gibi çözümler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Aynı zamanda, BD çözümleri elde edilen bazı uzay-zaman çözümlerinin bazı fiziksel özellikleri, tekillik yapıları ile dairesel jeodeziklerinin olup olmadığı irdelenerek GG kuramının sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Kerr-Newman-Taub-NUT BD çözümünün ise en iç kararlı dairesel yörünge (ISCO) denklemi hesaplanmıştır.

Diğer bir alternatif teori olan metrik  $f(R)$  kuramı tam çözümlerinin, BD için türetilen çözüm üretme tekniğine benzer bir yöntem ile elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu yöntem ile, GG uzay-zaman çözümleri bilinen Plebanski-Demianski(PB) ve Kerr-Newman-Taub-NUT-AdS (KNTNAdS) kara delik çözümlerinin metrik  $f(R)$  karşılıkları incelenmiştir. Aynı zamanda, KNTNAdS kara deliği için, Smarr formülü genelleştirilerek, termodinamik büyüklükleri elde edilmiştir.

Mayıs, 2016

Pınar Kirezli

# ABSTRACT

## AXIALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF ALTERNATIVE GRAVITATIONAL THEORIES

In this thesis, some exact solutions of static or stationary and axially symmetric spacetimes are obtained using solution generating techniques for Brans-Dicke or metric  $f(R)$  alternative gravity theories. It is shown that, by employing BD field equations of a particular form of the standard axially symmetric metric, the Ernst equations, which is one of the important solution generating technique, can be obtained for BD theory. This analysis also permits us to construct a two parameter extension in both Jordan and Einstein frames of an old solution generating technique frequently used to construct axially symmetric solutions for BD theory from a seed solution of general relativity. As applications of this technique, several known and new solutions are constructed. For example, the new static solutions are obtained for the general Weyl solutions, two particle Chazy-Curzon solution and Bertotti-Robinson type solution and the new stationary solution are studied for magnetized Kerr-Newman solution. Furthermore, some physical properties, singularity structure and the circular motion of test particles are investigated and compared with the solutions of GG for some BD solutions. The inner-most stable circular orbit (ISCO) is calculated for BD solution of Kerr-Newman-Taub-NUT (KNTN) space-time.

The exact solutions of metric  $f(R)$  theory is studied with a new method which is similar to solution generating technique of BD theory. Plebanski-Demianski and KNTNAdS black hole solutions of metric  $f(R)$  theory with constant scalar curvature are constructed by this technique. Thermodynamic potentials of KNTNAdS black hole are discussed by generalizing Smarr formula for this black hole.

May, 2016

Pınar Kirezli

# YENİLİK BEYANI

## ALTERNATİF KÜTLE-ÇEKİM KURAMLARININ EKSENEL SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

Bu tezde, Einstein Genel Görelilik Kuramının değiştirilmesiyle elde edilen, alternatif teorilerden Brans-Dicke ve metrik  $f(R)$  teorileri tam çözümlerine, bazı çözüm üretme teknikleri kullanılarak ulaşılması amaçlanmıştır. Daha önce Genel Görelilik tam çözümlerine kolay şekilde ulaşılmasını sağlayan Ernst denklemleri, Brans-Dicke kuramı için elde edilmiştir. Bu sonuç, Brans-Dicke tam çözümlerinin de çözüm üretme tekniğiyle elde edileceğini göstermiş ve yine daha önce Tiwari-Nayak-Sighn-Rai tarafından, durağan, eksenel simetrik vakum ve elektromanyetik alan için tek parametrelili Brans-Dicke çözümüne ulaşılmasını sağlayan dönüşümler, iki parametrelili olarak daha genel halleriyle elde edilmiştir.

Genelleştirilen bu yeni yöntem ile, Genel Görelilik metriği bilinen, Weyl-tipi çözümlerden, Bertotti-Robinson, iki parçacıklı Curzon-Chazy, durağan, eksenel simetrik çözümlerden, kozmolojik sabit içermeyen Plebanski-Demianski, manyetikleşmiş Kerr-Newman ve (manyetikleşmiş) iki kutuplu Bonnor-tipi çözümlerinin Brans-Dicke karşılıkları  $k$  ve  $\omega$  parametrelerine bağlı olarak ilk kez elde edilmiştir. Aynı zamanda, Curzon-Chazy ve Zipoy-Voorhees Brans-Dicke uzay-zamanlarında, ışık-tipi ve zaman-tipi test parçacıkları için dairesel jeodezikler incelenmiş ve farklı  $k$  değerleri için parçacıkların etkin potansiyel-yarıçap grafikleri elde edilmiştir. Bertotti-Robinson Brans-Dicke uzay-zamanında ise, parçacıkların dairesel jeodeziklere sahip olamayacakları bulunmuştur. Aynı yöntem ile ele alınan Kerr-Newman-Taub-NUT kara deliğinin Brans-Dicke çözümünün, ışık-tipi ve zaman-tipi test parçacıklarının dairesel jeodezikleri irdelenmiştir. Bu uzay-zamanda, zaman-tipi parçacıkların en iç kararlı dairesel yörünge denklemi iki parametreye bağlı olarak elde edilmiştir. Aynı zamanda, tüm elde edilen Brans-Dicke çözümlerinin  $k \rightarrow 1$  durumunda genel görelilik sonuçlarına indirgendiği gösterilmiştir.

Metrik  $f(R)$  alternatif teorisinin tam çözümleri ise, kozmolojik sabitli Einstein ve

metrik  $f(R)$  alan denklemleri arasında kurulan ilişkiyle elde edilmiştir. Genel görelilik metrikleri bilinen, Plebanski-Demianski ve Kerr-Newman-Taub-NUT-anti-de Sitter kara delik çözümlerinin metrik  $f(R)$  karşılıkları incelenmiştir. Aynı zamanda, Kerr-Newman-Taub-NUT-anti-de Sitter kara deliğinin termodinamik büyüklükleri, Smarr formülünün bu kara delik için genelleştirilmesiyle elde edilmiştir.

Mayıs, 2016

Prof. Dr. Özgür DELİCE

Pınar KİREZLİ



# SEMBOLLER

$g_{\mu\nu}$	: Uzay-zaman metriği
$R_{\mu\nu\lambda\kappa}$	: Riemann tensörü
$R_{\mu\nu}$	: Ricci tensörü
$R$	: Ricci skaleri
$G_{\mu\nu}$	: Einstein tensörü
$F_{\mu\nu}$	: Faraday tensörü
$T_{\mu\nu}$	: Enerji-momentum tensörü
$A_\mu$	: Elektromanyetik bir-form
$\mathcal{K}$	: Kretchmann skaleri
$\phi$	: Skaler alan
$\omega$	: Brans-Dicke parametresi
$k$	: Brans-Dicke integrasyon sabiti
$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$	: Christoffel sembolleri
$\Lambda$	: Kozmolojik sabit
$V_{eff}$	: Etkin potansiyel
$A$	: Yüzey alanı
$\kappa$	: Yüzey kütle-çekim
$\mathcal{H}^+$	: Olay ufku
$\mathcal{H}^-$	: Cauchy ufku
$n$	: Newman-Unti-Tamburino yükü
$a$	: Dönme parametresi

# KISALTMALAR

<b>AdS</b>	: Anti de Sitter
<b>NUT</b>	: Newman-Unti-Tamburino
<b>GG</b>	: Genel Görelilik
<b>BD</b>	: Brans-Dicke
<b>PD</b>	: Plebanski-Demianski
<b>KN</b>	: Kerr-Newman
<b>KNTN</b>	: Kerr-Newman-Taub-NUT
<b>MKN</b>	: Manyetikleşmiş Kerr-Newman
<b>KNTNAdS</b>	: Kerr-Newman-Taub-NUT-anti de Sitter
<b>TNSR</b>	: Tiwari-Nayak-Rai-Singh
<b>CC</b>	: Curzon-Chazy
<b>ZV</b>	: Zipoy-Voorhees
<b>BR</b>	: Bertotti-Robinson
<b>ISCO</b>	: En iç kararlı dairesel yörünge

# ŞEKİL LİSTESİ

SAYFA

<b>Şekil 4.1:</b> $f(R)$ kütle-çekim teorisinin sınıflandırılması ve bunlara karşılık BD teorileri grafiği [122]. . . . .	38
<b>Şekil 6.1:</b> CC metriğinin BD çözümünün, ışık-tipi parçacıkların $\ell = L/m = 4e$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $x$ 'e bağlı grafiği. . . . .	56
<b>Şekil 6.2:</b> CC metriği BD çözümünün zaman-tipi parçacıkların $L = 4.5m$ , $m = 1$ ve $k = 1$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $\rho$ 'ya bağlı grafiği. . . . .	57
<b>Şekil 6.3:</b> CC metriği BD çözümünün zaman-tipi parçacıkların $L = 4.5m$ , $m = 1$ ve $k = -4$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $\rho$ 'ya bağlı grafiği. . . . .	58
<b>Şekil 6.4:</b> CC metriği BD çözümünün zaman-tipi parçacıkların $L = 4.5m$ , $m = 1$ ve $k = 0.3$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $\rho$ 'ya bağlı grafiği. . . . .	58
<b>Şekil 6.5:</b> CC metriği BD çözümünün zaman-tipi parçacıkların $L = 4.5m$ , $m = 1$ ve $k = 0.3$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $\rho$ 'ya bağlı grafiği. . . . .	59
<b>Şekil 6.6:</b> ZV metriğinin BD çözümünün, ışık-tipi test parçacıklarının $L = 7.6$ , $\delta = 2$ , $\ell = 1$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $x$ 'e bağlı grafiği. . . . .	61
<b>Şekil 6.7:</b> ZV metriğinin BD çözümünün, zaman-tipi test parçacıklarının $L = 7.6$ , $\delta = 2$ , $\ell = 1$ ve $k = 1$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $\rho$ 'ya bağlı grafiği. . . . .	62
<b>Şekil 6.8:</b> ZV metriğinin BD çözümünün, zaman-tipi test parçacıklarının $L = 7.6$ , $\delta = 2$ , $\ell = 1$ ve $k = -4$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $\rho$ 'ya bağlı grafiği. . . . .	63
<b>Şekil 6.9:</b> ZV metriğinin BD çözümünün, zaman-tipi test parçacıklarının $L = 7.6$ , $\delta = 2$ , $\ell = 1$ ve $k = 0.3$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $\rho$ 'ya bağlı grafiği. . . . .	63
<b>Şekil 6.10:</b> ZV metriğinin BD çözümünün, zaman-tipi test parçacıklarının $L = 7.6$ , $\delta = 2$ , $\ell = 1$ ve $k = 4$ değerleri için $V_{eff}$ 'in $\rho$ 'ya bağlı grafiği. . . . .	64

# 1. GİRİŞ

Yüzüncü yılı geçen sene kutlanan, Albert Einstein tarafından oluşturulan Genel Görelilik (GG) kuramı, Newton kütle-çekimiyle açıklanamayan bazı durumları açıklayarak, evreni daha anlaşılır hale getirmektedir. Bu kuramın ilk başarısı, Merkür'ün günberi yalpalamasındaki (*perihelion precession*) gözlemlerle Newton kütleçekim kuramının sonuçları arasındaki küçük uyumsuzluğu başarıyla açıklamasıdır. Newton kuramına göre bu uyumsuzluk terimi ancak Güneş ile Merkür arasında bir gezegen daha bulunması (Vulkan gezegeni) ile açıklanmaya çalışılmaktaydı. Genel göreliliğin başarısı ise bu uyumsuzluğun genel görelilik kuramının hesapları gözönüne alındığında varolmadığını göstermesidir. Daha sonra teori, Güneş'in ışığı bükmesinin gözlemlenmesi [1] ve kütle-çekiminin ışığın frekansında kızıla kaymaya neden olmasının [2,3] deneysel olarak ispatlanmasıyla daha da önem kazanmıştır. Bunların yanı sıra, kütle-çekimsel mercekleme, pulsar çiftlerinin incelenmesi gibi bir çok konu GG ile ele alınmaktadır. En son olarak ise, GG kuramının en önemli öngörülerinden birisi olan ve ilk olarak Einstein tarafından kuramsal temelleri atılan kütle-çekimsel dalgalar [4], 1.3 milyar yıl önce iki kara deliğin çarpışmasından çıkan şok dalgalarının LIGO gurubu tarafından ilk olarak doğrudan gözlemlendiğinin duyurulması ile ispatlanmış [5] ve GG bir kez daha geçerliliğini göstermiştir.

Öte taraftan, Einstein'ın teorisini yayınlamasından kısa süre sonra, bilimsel merak ve teoriyi daha iyi anlamak için, bu kuramı tanımlayan Einstein-Hilbert eylemindeki Ricci Eğrilik skaleri yerine, Riemann eğrilik tensöründen elde edilen daha yüksek mertebeli skalerler kullanılarak teori değiştirilmiştir [6, 7]. Ancak, yapılan bu değişiklikler, açıkça gözlemsel ve teorik nedenlere bağlanmadıkları için çok dikkate alınmamıştır. GG teorisi ile kuantum teorisinin birleştirilmesi için yapılan çalışmalarda, GG teorisinin renormalize olmadığı için kuantize de olamayacağı sonucuna ulaşılmıştır. Fakat, Einstein-Hilbert eyleminin yüksek mertebeli eğrilik terimleri içermesi durumunda GG'nin renormalize olduğu gösterilmiştir [8, 9]. Yakın zamanda ise, kuantum düzeltmeleri ve sicim teorisi göz önüne alındığında, etkin düşük enerjili kütle-çekimsel aksiyonun, yüksek mertebeli eğrilik değişmezlerine izin

verdiği gösterilmiştir [10–12].

Son yıllarda astrofizik ve kozmolojik sonuçlar, beklenmedik şekilde evrende bulunan enerji miktarlarının; %4,9 baryonik madde, %26,8 karanlık madde ve %68,3 karanlık enerji olduğunu göstermiştir [13–16]. Karanlık madde, normal madde özellikleri gösteren ancak ya elektromanyetik etkileşmeye girmediği için elektromanyetik ışımaya yaymayan ya da bu etkileşmeye girse bile yaydığı ışımaya teleskoplar tarafından tespit edilemeyecek kadar zayıf olan ve dolayısıyla henüz içeriği tespit edilemeyen maddeyi tanımlarken, karanlık enerji, direkt olarak tespit edilemeyen ve normal madde gibi davranmayan, bilinmeyen bir enerji formunu ifade etmektedir. Aynı zamanda, daha ayrıntılı ele alındığında, karanlık enerjinin bir kozmolojik sabite benzediği söylenebilir. Karanlık enerjinin varlığı, maddeden daha baskın olduğu günümüz evreninde, evrenin pozitif ivmelenmesini açıklayabilmektedir. Ek olarak, günümüz veya geç evrendeki bu hızlanma, erken evrende de bir ivmelenme döneminin, yani enflasyon çağına mevcut olması gerektiğine işaret etmektedir [17–19]. Bu enflasyon dönemi, standard kozmolojinin, ufuk, düzlük ve tek kutupluluk problemlerine bir açıklama getirmiştir [20]. Öte taraftan, karanlık madde, sadece kozmolojik verilerde değil, astrofiziksel gözlemlerde de kendini göstermektedir. 1933'te galaksi kümelerinin [21], 1959'da galaksilerin [22], dönme eğrileriyle içerdikleri toplam madde miktarı arasındaki kütle farkını açıklamak için ortaya atılmışlardır. Ancak bu karanlık maddenin ne olduğuna dair ileri sürülen iddialar parçacık fiziği deneyleri tarafından henüz ispatlanmış değildir [23–28].

Elde edilen bu bilgiler ile, evrenin oluşumu ve sahip olduğu madde/enerji içeriği şaşırtıcıdır ve bir açıklamaya ihtiyaç duymaktadır. Bu gözlem sonuçlarının GG kuramının büyük ölçeklerdeki davranışının değiştirilmesi gerektiği fikri de bilim camiasında bir alternatif olarak ortaya atılmış ve birçok yaklaşım üzerinde çalışılmıştır. Bu yaklaşımların tümü aynı probleme farklı yollardan çözüm üretmeye çalışmaktadır, ancak hiç biri tam kabul gören, basit bir çözüm bulamamıştır. Kütle-çekim kuramının bu şekilde sorgulanması, kütle-çekime daha derin bir anlayış kazanılmasını sağlamakta ve yeni fizik oluşturmak için şans tanımaktadır. GG kuramının, Newton kütle-çekiminde Merkür'ün yörüngesinde başka bir gezegen olması gerektiği

şeklindeki öngörüsünü açıklaması gibi, geliştirilen yeni fizik ile de şu an karanlık madde, karanlık enerji ve kozmolojik sabit gibi bilinmeyen kavramlar açıklanabilir.

Bu motivasyon ile, GG kuramı bir çok farklı şekillerde değiştirilmiştir. En çok bilinen alternatif teori, skaler-tensör teoridir [29–34]. Aynı zamanda, Dvali- Gabadadze-Porrati (DGP) kütle-çekimi [35], zar-evren (*brane-world*) kütle-çekimi [36], Tensör-Vektör-Skaler (TeVSe) [37], Einstein-Esir (*Einstein-Aether*) teorisi [38] ve  $f(R)$  teorisi gibi, literatürde bir çok farklı alternatif kütle-çekim teorisi mevcuttur. Bu tezde ise, alternatif kuramlardan, bir skaler-tensör teorisi olan Brans-Dicke (BD) ve Einstein-Hilbert eylemindeki Ricci skalerinin yerine onun herhangi bir fonksiyonunu yerleştiren  $f(R)$  teorileri irdelenecek ve bazı tam çözümler elde edilmeye çalışılacaktır.

BD skaler-tensör teorisi [29], Newton kütle-çekim sabiti  $G$ 'yi bir skaler alan ile  $\phi = 1/G$  şeklinde değiştiren, GG'ye alternatif en çok bilinen teorilerden biridir. GG'yi en basit şekilde değiştiren bu teori, bu nedenle çok ilgi çekicidir ve GG'nin bir çok yönden test edilmesine yardımcı olur. Aynı uzay-zaman kütle-enerji dağılımı ve geometrisi için GG ve BD'nin tam çözümleri arasında önemli farklılıklar mevcuttur. Örneğin, durgun, küresel simetrik, boşluk (*vacuum*) BD çözümleri [30], GG'den farklı olarak, skaler alan sabit olmadığı sürece, kütle-çekimsel çöküş sonucu oluşan asimtotik düz kara delikleri ifade etmemektedir [39]. Bu durumun nedeni, BD çözümlerinin, bu kara deliklerin sağladığı üç önemli koşul olan asimtotik düzlük, ufukta düzenlilik ve zayıf enerji koşulunu aynı anda sağlamamasıdır. Küresel ve aksel simetrik BD çözümlerinin elde edilmesinden sonra, ilk iki özelliğin sağlandığı ancak üçüncünün sağlanmadığı durumların mevcut olduğu ve dolayısıyla, bu çözümlerin parametrelerin belirli aralıklarında kara delikleri tanımladıkları fark edilmiştir [40–44]. Ancak bu aralıklar, BD parametresi  $\omega$ 'nın fiziksel olmayan negatif değerler almasını gerektirir ve bu durumda kinetik terimi de negatif olur. Aslında, yukarıdaki üç koşul sabit bir skaler alan gerektirdiğinden, BD kara delikleri GG kara delikleri ile aynı çözümlerdir. Öte taraftan, GG ve BD farklı iki teori olduğundan, pertürbasyonları farklı sonuçlar vermektedir [45]. Böylece, bu iki teorinin aynı kara delik çözümlerinin pertürbasyon farklarına bakılarak, BD teorisi GG'ye karşı test

edilebilir [45, 46].

$f(R)$  teorisi ise, Einstein-Hilbert aksiyonunu, Ricci skaleri  $R$ 'nin herhangi bir fonksiyonu olarak belirleyen ve genellikle Einstein denklemleri dördüncü mertebeden metrik türevleri içeren, diğer bir alternatif teoridir. Bu çalışmada, metrik  $f(R)$  olarak isimlendirilen, aksiyonun sadece metriğe bağlı olduğu teori irdelenecektir.  $f(R)$  teorilerinin bazı versiyonlarının, enflasyondan günümüz ivmeli genişleyen evrenine kadar tüm kozmolojik tarihe uygun bir kozmolojik model öngördükleri gösterilmiştir [47]. Aynı zamanda, bu kuramların kozmoloji ve kütle-çekimi açısından bir çok farklı uygulaması yapılmış [48], GG ile aralarındaki bir çok gözlemsel ve teorik farklar ele alınmış ve yerel kütle-çekimsel ve kozmolojik testler incelenmiştir [49–52]. Alternatif kütle-çekim kuramlarının, kozmolojik evrim, kozmolojik pertürbasyonların sebep olduğu genişleme şekli ve kara delikler gibi GG'nin öngördüğü tüm astrofiziksel objeleri içlerinde barındırması gereklidir.  $f(R)$  teorisi uygun fonksiyonlarda seçildiğinde, herhangi bir kozmolojik evrimi ifade edebilir. Aynı zamanda, skaler kozmolojik pertürbasyonlarında kozmolojik genişlemeyi tanımlayabildikleri kanıtlanmıştır [53]. Bu nedenle,  $f(R)$  teorisinde kara delik özelliklerinin incelenmesi ile, Einstein teorisinden ayrıldıkları noktalar ve iç yapıları daha anlaşılır hale gelebilir. Daha önce yapılan çalışmalarda, Einstein çerçevesinde,  $R + aR^2$  terimi konularak elde edilen bir  $f(R)$  teorisinin, aynen GG kuramında Schwarzschild çözümünün olduğu gibi tek bir küresel simetrik çözümü bulunduğu kanıtlanmıştır. Daha sonra ise, yeni kovaryant bir formalizm geliştirilerek bu çözümün tek çözüm olmadığı gösterilmiştir [54]. Öte taraftan, Kerr kara deliklerinin, bazı  $f(R)$  modelleri için süper-ışıma kararsızlığından dolayı kararsız oldukları gösterilmiştir [55]. Öklid aksiyonu metodu kullanılarak anti-de-Sitter (AdS) kara delikleri, farklı  $f(R)$  modelleri için çalışılmıştır [56]. Vakum Schwarzschild-de-Sitter kara deliği entropisi bazı, kozmolojik tutarlı (viable)  $f(R)$  teorileri için hesaplanmış ve kararlılıkları tartışılmıştır [57]. Bu tezde ise, Kerr-Newman-Taub-NUT-AdS kara deliği için metrik  $f(R)$  teorisinin tam çözümü elde edilerek, kara deliğin termodinamik özellikleri üzerinde durulacaktır.

Bir teorinin tam sonuçları, teoriyi gözlemsel veriler ile karşılaştırmak veya teorinin çıktılarını kontrol edebilmek gibi nedenlerden dolayı önemlidir. Durağan, eksenel si-

metrik tam çözümler, yıldızlar, galaksiler ve kara delikler gibi gök cisimlerinin kütle-çekimsel alanlarını belirlemek ve bu tür cisimlerin etrafındaki gezegen veya yıldız yörüngelerinin olup olmadığı ve yörüngelerinin kararlılık durumlarını incelemek için idealdir. Kütle-çekimsel bir teorinin bu önemli özelliklerinin tartışılabilmesi için tam veya yaklaşık çözümleri bilinmelidir. GG'nin alan denklemlerinin karışıklığından dolayı genellikle bazı çözüm üretme teknikleri ile tam çözümler elde edilmektedir. Aynı zamanda, BD ve  $f(R)$  teorilerinin alan denklemleri GG'den bile daha karmaşıktır ve bu nedenle tam çözümlerde yine bazı çözüm üretme teknikleri yardımıyla elde edilebilir. Örneğin, BD alan denklemlerinden çıkarılan Ernst denklemleri [58, 59], BD teorisinin tam çözümlerinin elde edilmesinde kullanılabilir [60–62]. Benzer şekilde, skaler-tensör teorilerinin konformal dönüşüm özellikleri ve vakum veya Maxwell BD teorisinin, Einstein-Maxwell skaler çözümüyle eşitliği kullanılarak da BD kuramının tam çözümlerine ulaşılabilir [63, 64].

Bunların yanı sıra, önceki çalışmalar ışığında [65–68], eksenel simetrik vakum için Tiwari ve Nayak [69] tarafından, yine eksenel simetrik, Maxwell alanları için Singh ve Rai [70] tarafından geliştirilen BD tam çözümlerini elde etmek için bir teknik mevcuttur. Bu metodun ana amacı, durağan eksenel simetrik bir metrik ve bu metrik ile aynı simetriyi paylaşan bir elektromagnetik alan için, BD ve GG alan denklemlerini karşılaştırarak, bu teoriler arasında bir dönüşüm elde etmektir. Bu dönüşümlerin bulunmasıyla, GG çözümü bilinen herhangi bir durağan, eksenel simetrik uzay-zaman için buna karşılık BD çözümü kolayca elde edilebilir. Tiwari-Nayak-Singh-Rai (TNSR) metodu olarak adlandırılan bu metod kullanılarak, Kerr-Newman [43] ve siyah iki kutuplu çözümlerin [71] BD tam çözümleri elde edilmiştir. Bu metod, GG çözümü parametrelerinden farklı olarak sadece BD parametresi  $\omega$ 'yı içermektedir. Ancak, küresel simetrik BD çözümleri [72], Kerr-tipi BD çözümleri [66] ve silindirik simetrik vakum veya Einstein-Maxwell BD çözümleri [73],  $\omega$ 'dan farklı bir parametre daha içermektedir. Bu nedenle, TNSR metodu en genel durumu ifade etmemektedir. Bu tezde, TNSR metodu geliştirilerek, GG'den farklı iki parametrelili durum ele alınacak ve BD tam çözümlerine bu metod yardımıyla ulaşılacaktır.

Bu tezin ana kısımlarından, Bölüm 6 bir kongrede sözlü olarak sunulmuş ve tam

metin kitabında yer almış olup [74], Bölüm 5'in bir kısmı ile Bölüm 7'nin ise tamamı bir makale olarak basılmıştır [75]. Daha önceki kısımlar ise, bu konulara alt yapı oluşturmak için, literatürde bulunan bilgilerin kısa bir özetidir. Bölüm 8'in ise makale olarak basılması planlanmaktadır.

Bölüm 2'de ilk olarak, durağan aksenal simetrik uzay-zaman tanımı yapılmış ve bu uzay-zaman için kozmolojik sabitli Einstein-Maxwell alan denklemlerinin nasıl elde edildiği irdelenmiştir. Bu sonuç daha basit bir çözüm olan durgun, aksenal simetriye indirgenerek, Weyl-tipi bazı GG çözümlerinin üzerinden geçilmiştir. Son olarak ise, en genel jeodezik denklemleri ele alınarak dairesel jeodezikler için gerekli koşullardan bahsedilmiştir.

Bölüm 3'te ise genel kara delik çözümleri yeniden incelenmiş ve önemli bir konu olan kara delik termodinamiğinden bahsedilerek Kerr-Newman kara deliğinin termodinamik büyüklükleri elde edilmiştir. Bölüm 4'te ise, bu tezin ana konuları olan, alternatif kütle-çekim kuramlarından, BD ve  $f(R)$  teorileri daha detaylı incelenerek, alan denklemleri ele alınmıştır.

Aynı zamanda, Bölüm 5, GG tam çözümü bilinen bir uzay-zamanın alternatif kütle-çekim kuramlarında tam çözümünün nasıl elde edileceği üzerine kurulmuştur. Kozmolojik sabitli GG çözümleri için  $f(R)$ , kozmolojik sabit içermeyen GG çözümleri için BD kütle-çekim teorileri için karşılık gelen tam çözümlere ulaşılabileceği gösterilmiştir.

Bölüm 6 ise, GG çözümü bilinen bazı Weyl-tipi çözümlerin BD karşılıkları elde edilerek, BD çözümlerinin teklik yapıları ve dairesel jeodezikleri irdelenmiştir. Işık-tipi parçacıkların dairesel jeodezikleri GG ile aynı gelirken, zaman-tipi parçacıkların jeodeziklerinin GG'den farklı olduğu ve integrasyon sabiti  $k$ 'ya bağlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Benzer şekilde, Bölüm 7'de GG çözümü bilinen durağan, aksenal simetrik bazı çözümler ele alınarak, bu çözümlere karşılık gelen BD çözümleri bulunmuştur. Aynı zamanda, bu bölümde Kerr-Newman-Taub-NUT BD çözümü için dairesel jeodezik-

ler ve en iç kararlı dairesel yörüngeler (ISCO) incelenmiştir. Bulunan tüm BD çözümleri BD parametresi  $\omega$ 'dan başka,  $k$  parametresine de bağılıdır ve  $k \rightarrow 1$  durumu çözümleri GG çözümlerine indirgemektedir.

Son olarak ise, Bölüm 8'de GG çözümü bilinen Kerr-Newman-Taub-NUT-anti-de-Sitter kara deliği ele alınarak, bu uzay-zamanın metrik  $f(R)$  teorisindeki karşılığı elde edilerek, kara deliğin termodinamik büyüklüklerine ulaşılmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.





## 2. DURAĞAN ve STATİK EKSENEL SİMETRİK UZAY- ZAMAN

Bir Riemann manifoldunun yani uzay-zaman geometrisinin bir sürekli simetrisi var ise bu simetriye karşılık gelen ve ismine Killing vektörü denilen ve Killing denklemi denilen bir denklemi sağlayan bir vektör alanı mevcuttur. Bu tezde durağan ve ekstenel simetrik uzay-zaman geometrileri ele alınacağı için, öncelikle bu simetrisi tanımlayan Killing vektörlerinden bahsedilecektir.

Durağan, ekstenel simetrik uzay-zamanı ifade etmek için, durağanlığa (*stationarity*) karşılık gelen ve  $\xi$  ile gösterilen Killing vektörüne ek olarak, ekstenel simetriyi temsil eden ve  $\eta$  ile gösterilen ikinci bir Killing vektörüne ihtiyaç duyulmaktadır. Koordinat sistemi Killing vektörlerine adapte edilerek, durağan, ekstenel simetrik çizgi elemanı;

$$ds^2 = e^{-2U}(\gamma_{MN}dx^M dx^N + W^2 d\varphi^2) - e^{2U}(dt + \mathcal{A}d\varphi)^2 \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,  $\gamma_{MN}$  Killing vektörleri olarak bilinen  $\xi = \partial_t$  ve  $\eta = \partial_\varphi$ 'ye dik olan 2-uzay geometrisine karşılık gelen metriği temsil etmektedir. Buradaki metrik fonksiyonları,  $U, \gamma_{MN}, W, \mathcal{A}$ , koordinatlar  $x^M = x^1, x^2$ 'ye bağlıdır. Bu çizgi elemanı;

$$x^{M'} = x^{M'}(x^N), \quad t' = at + b\varphi, \quad \varphi' = c\varphi + d t \quad (a, b, c, d \text{ sabit}) \quad (2.2)$$

dönüşümleri altında korunumludur. Aynı zamanda,  $W, U, \mathcal{A}$  fonksiyonları,  $x^{M'} = x^{M'}(x^N)$  dönüşümü altında skaler büyüklükler gibi davranır. Öte taraftan, (2.1) metriği blok-diyagonaldir ve  $(t, \varphi) \rightarrow (-t, -\varphi)$  ile yansıma simetrisi gösterir.

Metrik (2.1) için, Killing vektörlerin skaler çarpımları;

$$\xi^a \xi_a = -e^{2U}, \quad \eta^a \eta_a = e^{-2U} W^2 - e^{2U} \mathcal{A}^2, \quad (2.3)$$

$$\xi^a \eta_a = -e^{2U} \mathcal{A}, \quad 2\xi_{[a} \eta_{b]} \xi^a \eta^b = W^2 \quad (2.4)$$

olmaktadır ve genel durumu bozmadan,

$$\gamma_{MN} = e^{2K} \delta_{MN} \quad (2.5)$$

yazılarak izotropik koordinatlara geçilebilir. Bu durumda, durağan, eksenel simetrik çizgi elemanı,

$$ds^2 = -e^{2U} (dt + \mathcal{A}d\varphi)^2 + e^{2(K-U)} (dx_1^2 + dx_2^2) + e^{-2U} W^2 d\varphi^2 \quad (2.6)$$

haline gelir.

## 2.1. Kozmolojik Sabitli Einstein Alan Denklemleri

Maxwell denklemlerinde yük ve akım nasıl elektrik ve manyetik alan vektörleri ile ifade ediliyorsa, Einstein alan denklemlerinin de temel değişkeni metrik tensörüdür. Alan denklemlerini ilk defa elde ederken Einstein'ın izlediği yol, birtakım fiziksel ilke ve varsayımlardan yola çıkmak olmuştur. Daha sonra ise bu alan denklemlerinin bir eylemin (Einstein-Hilbert eylemi) temel değişkenlere (metrik) göre varyasyonu ile de elde edilebileceği görülmüştür.

Klasik mekanikte, bir boyutta hareket eden bir parçacık için aksiyon,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) \quad (2.7)$$

olarak yazılır. Burada  $q(t)$  koordinat ve  $\dot{q}(t)$  koordinatın zamana göre türevidir ve  $L$  bu ikisinin bir fonksiyonudur.

Alan teorisinde, klasik mekanikten farklı olarak, tek bir koordinat olan  $q(t)$ ,  $\phi^i(x^\mu)$  alanlarıyla yer değiştirirken, koordinatın zamana göre türevidir olan  $\dot{q}(t)$ , alanların uzay-zamana göre türevleri olan  $\partial_\mu \phi^i(x^\mu)$  olarak ifade edilir. Böylece Lagranjiyen;

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) \quad (2.8)$$

şeklinde  $\mathcal{L}$  Lagrange yoğunluğu ile yazılabilir. Bu durumda aksiyon;

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) \quad (2.9)$$

olmaktadır.

Öte taraftan, genel görelilikte ise, Lagrange yoğunluğu  $\mathcal{L}$ 'nin metrik ve metriğin yüksek mertebeden türevlerinden oluştuğu varsayılır

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \partial_\sigma \partial_\lambda g_{\mu\nu}, ..). \quad (2.10)$$

Ancak, aksiyon integralinin özelliğinden dolayı, Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}} \quad (2.11)$$

skaler bir yoğunluk olan  $\hat{\mathcal{L}}$  ve metriğin determinantı  $g$  ile ifade edilir. Metrikten elde edilen en basit bağımsız skaler, metriği ve metriğin 2. mertebeden türevlerini içeren Ricci skaleri  $R$  olduğu için, Hilbert Lagranjiyen için en kolay seçimi almıştır

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (2.12)$$

Bu aksiyon Einstein-Hilbert aksiyonu olarak bilinmektedir. Normalize edildiğinde ise;

$$S_g = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.13)$$

elde edilir (Newton sabiti  $G = 1$  ve ışık hızı  $c = 1$  alınmıştır) ve sadece kütle çekimi içerdiği için alt indis olarak  $g$  kullanılır. Ancak, uzay-zamanda kütle-çekimi yanı sıra başka madde alanları da mevcut olabileceğinden toplam aksiyon,  $S_M$  madde aksiyonu ( $\mathcal{L}_M$  madde lagranjiyeni) olmak üzere

$$S = S_g + S_M = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Klasik fizikte, bir parçacığın,  $V(x)$  potansiyeli altında veya  $V(x) + V_0$  ( $V_0$  sabit) potansiyelindeki hareketi aynıdır. Yani, önemli olan iki durum arasındaki potansiyel

farklıdır. Bu durum GG kuramında ise çok farklıdır. Bu kurama göre, sabit boşluk enerjisi dahil her türlü enerji, kütle-çekimine katkıda bulunup uzay-zamanı bükür. Dolayısıyla sabit boşluk enerjisi de parçacık hareketlerini etkiler. Boşluk enerjisinin sabit olduğu düşünülerek, aksiyon ifadesi  $\Lambda$  kozmolojik sabit terimini (ya da boşluk enerjisini) göstermek üzere;

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \quad (2.15)$$

şeklinde değiştirilebilir. Bu aksiyondan, metriğin tersi  $g^{\mu\nu}$ 'ye göre alınacak varyasyon ile Einstein alan denklemleri elde edilir;

$$\delta S = \delta \left[ \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right) \right] = \delta(S_g + S_\Lambda + S_M) = 0. \quad (2.16)$$

İlk olarak, kütle-çekim aksiyonu varyasyonu, Ricci skaleri  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  eşitliğiyle Ricci tensörü ve metrik ile ifade edilirse,

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \delta \int \frac{d^4x}{16\pi} \sqrt{-g} R = \delta \int \frac{d^4x}{16\pi} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\ &= \int \frac{d^4x}{16\pi} [(\delta\sqrt{-g})g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})] \end{aligned} \quad (2.17)$$

şeklinde yazılır.

İlk terim için,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \quad (2.18)$$

varyasyonu ile herhangi bir  $A$  kare matrisi için olan temel kural;

$$\begin{aligned} \det A &= e^{Tr(\ln A)}, \\ \delta(\det A) &= e^{Tr(\ln A)}\delta(Tr \ln A), \\ \delta(\det A) &= \det A Tr(A^{-1}\delta A) \end{aligned} \quad (2.19)$$

kullanılarak,  $A = g_{\mu\nu}$  ve  $\det A = g$  gibi düşünülerek, metriğin determinantı  $g$  için  $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$  yazılabileceğinden;

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

ifadesi elde edilir. Aynı zamanda metrik tanımını,

$$\begin{aligned} g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} &= \delta^\mu_\nu, \\ \delta g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

kullanılarak eşitlik (2.20)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.22)$$

haline gelir.

2. terim çarpan olarak  $\delta g^{\mu\nu}$  içerdiği için düzenleme yapmaya gerek yoktur.

3.terimde ise öncelikle Ricci tensörü tanımından;

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \quad (2.23)$$

yazılarak bu terimin varyasyonu

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta(\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \delta(\partial_\nu\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) + \delta(\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \delta(\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}) \quad (2.24)$$

elde edilir. Kovaryant türevin tanımını ile

$$\nabla_\rho(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) = \partial_\rho\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\delta\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \quad (2.25)$$

eşitlik (2.24);

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \quad (2.26)$$

olarak elde edilir. Herhangi bir vektör için metrik uyumluluğu (*metric compatibility*),

$$g_{\mu\nu}\nabla_\rho V^\nu = \nabla_\rho(g_{\mu\nu}V^\nu) = \nabla_\rho V_\mu \quad (2.27)$$

kullanılarak

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \quad (2.28)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik için kovaryant türev açılımı tekrar yapılarak, metriğin

karekök çarpımıyla;

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R &= \sqrt{-g}\left[\partial_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right. \\
&\quad \left. - \partial_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\right] \\
&= \sqrt{-g}\left[\partial_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) + \left(\frac{1}{2}g^{\nu\sigma}g_{\nu\sigma,\lambda}\right)g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right. \\
&\quad \left. - \partial_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) - \left(\frac{1}{2}g^{\nu\sigma}g_{\nu\sigma,\lambda}\right)g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\right] \\
&= \sqrt{-g}\left[\partial_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) + \frac{\sqrt{-g}_{,\lambda}}{\sqrt{-g}}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right. \\
&\quad \left. - \partial_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) - \frac{\sqrt{-g}_{,\lambda}}{\sqrt{-g}}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\right] \\
&= \partial_\sigma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})
\end{aligned} \tag{2.29}$$

elde edilir. Serbest indisler değiştirilerek;

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R = \partial_\sigma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \sqrt{-g}g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \tag{2.30}$$

sonucuna varılır. Bu eşitliğin integrali için;

$$\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\partial_\sigma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \sqrt{-g}g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \tag{2.31}$$

eşitliğine ulaşılır ve bu sonuç hacim elemanı üzerinden bir integraldir ve Stoke's teoremine göre bu integral sınırlarda sıfır olmaktadır. Bu nedenle bu terimin aksiyon varyasyonuna katkısı yoktur. Böylece kütle-çekim aksiyonu varyasyonu

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi} \int d^4x\sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \tag{2.32}$$

şeklinindedir.

Kozmolojik sabit aksiyonunun varyasyonu için

$$\delta S_\Lambda = \delta \left[ \frac{1}{16\pi} \int d^4x\sqrt{-g}(-2\Lambda) \right] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x\delta(\sqrt{-g})(-2\Lambda) \tag{2.33}$$

yazıldığında eşitlik (2.22)'de kullanılarak;

$$\delta S_\Lambda = \frac{1}{16\pi} \int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\Lambda\delta g^{\mu\nu} \tag{2.34}$$

elde edilir.

Son olarak da madde aksiyonu varyasyonu incelendiğinde, enerji-momentum tensörü  $T_{\mu\nu}$  ile

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.35)$$

tanımlanmaktadır. Burada  $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$  olarak seçilmiş ve enerji korunumundan  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  yazmak mümkündür.

Aksiyon varyasyonu eşitliğini incelediğimiz eşitlik (2.16)'de bulunan sonuçları yerine koyarak,

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_g + \delta S_\Lambda + S_M = 0 \\ \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan kozmolojik sabitli Einstein alan denklemleri

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

elde edilir. Burada  $\kappa = 8\pi$  ve  $G_{\mu\nu}$  Einstein tensörü olarak tanımlanır. Bu eşitlik ters metrik ile çarpılırsa (*contraction*);

$$R - 2R + 4\Lambda = \kappa T \Rightarrow R = -\kappa T + 4\Lambda \quad (2.38)$$

eşitliği bulunur ve bu sonuç (2.37) eşitliğinde yerine yazılarak;

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda + \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (2.39)$$

Einstein denklemlerinin bir diğer biçimi elde edilir. Burada  $T = T^\mu{}_\mu$  enerji momentum tensörünün izidir (*trace*). Vakum için ( $T_{\mu\nu} = 0$ ), eşitlik (2.39)

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda \quad (2.40)$$

haline gelir ve bu eşitlik kozmolojik sabitin sıfır olduğu durumda Ricci tensörünün vakumda sıfır olduğunu gösterir. Ancak bu uzayın düz olduğu düşünülmemeli, Riemann tensörü incelenmelidir.

Öte taraftan elektromanyetik bir alan için Lagrange yoğunluğunu;

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} \quad (2.41)$$

şeklinde metriğin türevlerinden bağımsız, elektrik ve manyetik alanları ifade eden Faraday tensörü  $F_{\mu\nu}$  ile yazmak mümkündür. Bu alan için enerji-momentum tensörü

$$T_{\mu\nu} = 2(F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}), \quad (2.42)$$

eşitliğiyle verilirken (Ek A'de ayrıntılı olarak verilmiştir), dört boyutlu uzay zamanda bu tensörün izi sıfır olmaktadır ( $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$ ). Aynı zamanda, Maxwell denklemleri,

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^{\mu}, \quad F_{[\mu\nu];\lambda} = 0, \quad (2.43)$$

şeklinindedir. Burada köşeli parantez  $[\ ]$  anti-simetrisasyon işlemi temsil etmektedir. Diğer büyüklük olan  $J^{\mu}$  elektrik alan akım dördü vektörüdür, ancak elektrovakum çözümler kaynağın dışındaki bölgeyi göz önüne aldığı için sıfır alınır. Benzer şekilde Maxwell denklemleri vektör potansiyeli  $A^{\mu}$  ile de tanımlanabilir ve Faraday tensörü ile elektromanyetik bir-form arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir;

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}. \quad (2.44)$$

### 2.1.1. Durağan, Eksenel Simetrik Kozmolojik Sabitli Einstein Alan Denklemleri

Durağan, eksenel simetrik metrik (2.6) ile aynı simetriyi paylaşan  $A_0$  ve  $A_3$  katsayılarının koordinatlar  $x_1, x_2$ 'ye bağlı olduğu elektromanyetik potansiyel bir-form

$$A = A_0 dt + A_3 d\varphi \quad (2.45)$$

seçilerek ve Einstein alan denklemleri (2.37),  $Gd_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda - \kappa T_{\mu\nu} = 0$  olarak düzenlenirse bazı Einstein alan denklemleri;

$$Gd_{x_1}^{x_1} + Gd_{x_2}^{x_2} = 2W\Lambda + e^{2(U-K)}\nabla^2 W = 0, \quad (2.46)$$

$$Gd_t^\varphi = 4e^{2U}(\mathcal{A}(\vec{\nabla}A_0)^2 - \vec{\nabla}A_0 \cdot \vec{\nabla}A_3) + W\vec{\nabla}\left(\frac{e^{4U}\vec{\nabla}\mathcal{A}}{W}\right) = 0, \quad (2.47)$$

$$Gd_t^t + Gd_\varphi^\varphi = 2We^{2K}(2W\Lambda + e^{2(U-K)}\nabla^2 W) - e^{6U}(\vec{\nabla}\mathcal{A})^2 \\ + 4We^{2U}[W((\vec{\nabla}U)^2 + \nabla^2 K - \nabla^2 U) - 4\vec{\nabla}U \cdot \vec{\nabla}W] = 0, \quad (2.48)$$

$$Gd_t^t - Gd_\varphi^\varphi = 2[W^2e^{-2U}(\vec{\nabla}A_0)^2 + e^{2U}((\vec{\nabla}A_3)^2 - \mathcal{A}^2(\vec{\nabla}A_0)^2)] \\ - W\vec{\nabla}\left(\frac{\mathcal{A}e^{4U}\vec{\nabla}\mathcal{A}}{W} + 2W\vec{\nabla}U - \vec{\nabla}W\right) = 0, \quad (2.49)$$

elde edilir. Aynı zamanda, eşitlik (2.43) kullanılarak, Maxwell denklemleri için;

$$ME^t = \vec{\nabla}\left[e^{-2U}W\vec{\nabla}A_0 + \frac{\mathcal{A}e^{2U}}{W}(\vec{\nabla}A_3 - A\vec{\nabla}A_0)\right] = 0, \quad (2.50)$$

$$ME^\varphi = \vec{\nabla}\left[\frac{e^{2U}}{W}(\mathcal{A}\vec{\nabla}A_0 - \vec{\nabla}A_3)\right] = 0 \quad (2.51)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu eşitliklerde, türev operatörleri düz Minkowski uzay-zamanı ile aynıdır;  $\vec{\nabla} = \partial_{x_1}\vec{e}^{x_1} + \partial_{x_2}\vec{e}^{x_2} + \partial_\varphi\vec{e}^\varphi$  ve  $\nabla^2 = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_\varphi^2$ .

## 2.2. Statik, Eksenel Simetrik (Weyl-tipi) Çözümler

Eşitlik (2.6)'de verilen metrikte, koordinatlar  $x_1 = \rho$ ,  $x_2 = z$  Weyl kanonik koordinatları ve metrik fonksiyonlarından  $\mathcal{A} = 0$ ,  $W = \rho$  seçilirse;

$$ds^2 = -e^{2U}dt^2 + e^{2(K-U)}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2e^{-2U}d\varphi^2 \quad (2.52)$$

metriği elde edilir ve bu durumda metrik fonksiyonları  $U, K$  silindirik koordinatlar  $\rho$  ve  $z$ 'nin fonksiyonudur. Aynı zamanda, bu uzay-zamanda koordinatların genellikle  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $\rho \in [0, \infty)$ ,  $z \in (-\infty, \infty)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  olduğu kabul edilir.

Kozmolojik sabitin sıfır ( $\Lambda = 0$ ) olduğu durumda, vakum için metrik (2.52)'in alan

denklemlerinden;

$$U_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_{,\rho} + U_{,zz} = 0 \quad (2.53)$$

elde edilirken, bu eşitlik 3-boyutlu Öklid uzayında Laplace denklemini hatırlatmaktadır. Bu nedenle metrik fonksiyonu  $U$ 'yu yukarıdaki denklemi sağlayan herhangi bir Newton kütle dağılımının potansiyeline benzeterek, birçok farklı çözüm elde etmek mümkündür. Bu çözümlerden bazıları aşağıdaki gibidir.

### 2.2.1. Curzon-Chazy Çözümü

Metrik (2.52)'de metrik fonksiyonu  $U$ 'nun  $\rho = 0$  ve  $z = 0$ 'da bulunan bir noktasal kütlenin Newton potansiyeli olduğu varsayılırsa metrik fonksiyonları;

$$U = -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad K = -\frac{m^2\rho^2}{2(\rho^2 + z^2)^2} \quad (2.54)$$

olmaktadır [77, 78].

Bu uzay-zaman için  $\rho = 0$  ve  $z = 0$ 'da eğrilik tekilliği mevcut olup bu tekillik bir ufuk tarafından çevrelenmediği için çıplak (*naked*) olarak adlandırılır. Bu durumda, salınan tüm ışık ışınları sonsuz kıvrıma kaymaya uğrar ve görünmez olurlar [79]. Bununla birlikte, daha dikkatli incelenen bu tekilliğin daha karmaşık olduğu anlaşılmaktadır. Bu tekilliğin orijinde noktasal bir tekillik değil de, bunun etrafında genişletilebilen eğrilerden oluşabileceği düşünülebilir [80]. Aynı zamanda, Weyl koordinatları bu tekillik yapısının anlaşılmasına pek uygun olmadığından, Taylor koordinatları ile bu tekilliğin halka şeklinde olduğu daha açık olarak görülmektedir [81].

Öte taraftan, CC uzay zamanında ışık-tipi ve zaman-tipi parçacık hareketleri farklı sabitler için ayrıntılı şekilde [82]'de incelenmiştir.

### 2.2.2. Zipoy-Voorhees Çözümü

$\gamma$  çözümü olarak da bilinen Zipoy-Voorhees çözümü, eşitlik (2.52)'te metrik fonksiyonu  $U$ 'nun,  $2\ell$  uzunluğunda ve kütle yoğunluğu  $\delta/2$  olan, z-ekseni boyunca simetrik uzanan bir çubuğun Newton potansiyeline karşılık gelmektedir [83,84]. Bu durumda metrik fonksiyonları;

$$e^{2U_E} = \left( \frac{R_+ + R_- - 2\ell}{R_+ + R_- + 2\ell} \right)^\delta \quad (2.55)$$

$$e^{2K_E} = \left( \frac{(R_+ + R_-)^2 - 4\ell^2}{4R_+R_-} \right)^{\delta^2} \quad (2.56)$$

olarak elde edilirken burada

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \ell)^2}, \quad \text{ve} \quad \delta = \frac{m}{\ell} \quad (2.57)$$

şeklindedir. Aynı zamanda kütle yoğunluğu  $\delta$ , deformasyon parametresi olarak da isimlendirilir.

$\delta = \frac{m}{\ell} = 1$  için Schwarzschild çözümüne indirgenen ZV çözümünün, dairesel ve radyal jeodezikleri [85], tekilik yapısının  $\delta < 0$  için noktasal,  $0 < \delta < 1$  için sicim ve  $\delta > 1$  için ise halka şeklinde olduğu [86] ve bu metriğin düşünülenin aksine kara delik çözümleri ile örtüşmediği [87] gibi birçok farklı özelliği incelenmiştir.

### 2.2.3. İki Parçacıklı Curzon-Chazy Çözümü

Yukarıdaki çözümlerde incelediğimiz gibi, Newton potansiyeli ile metrik fonksiyonu  $U$  arasında bir benzerlik kurularak bir çok çözüm elde edilebilir. Bu şekilde farklı Newton potansiyellerin birleştirilmesiyle de farklı çözümler üretilebilir. Bu şekilde elde edilen birleşik çözümlerin fiziksel anlamlı olması için düzeltilmeleri gereklidir. Ancak bu yöntem ile bazı ilginç ve önemli sonuçlar elde edilebilir.

Bu prosedürü takip ederek, ikili Curzon-Chazy parçacıklarının süper pozisyonları elde edilebilir. Böylece,  $z = -b$  ve  $z = b$ 'de bulunan  $m_1$  ve  $m_2$  kütleli iki parçacığın

çözümleri,

$$U = U_1 + U_2 \quad (2.58)$$

$$K = K_1 + K_2 + K_{12} \quad (2.59)$$

elde edilir [77, 78]. Burada,

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{m_1}{R_1}, & U_2 &= -\frac{m_2}{R_2}, & R_1 &= \sqrt{\rho^2 + (z+b)^2}, & R_2 &= \sqrt{\rho^2 + (z-b)^2}, \\ K_1 &= -\frac{1}{2} \frac{m_1^2 \rho^2}{R_1^4}, & K_2 &= -\frac{1}{2} \frac{m_2^2 \rho^2}{R_2^4}, & K_{12} &= \frac{m_1 m_2 \rho^2 + z^2 - b^2}{2b^2 R_1 R_2} + C, \end{aligned} \quad (2.60)$$

ile verilmektedir.  $K_{12} \neq 0$  durumunda, iki kütle arasındaki koordinat boyunca konik bir tekillik olduğu bulunmuştur [88]. Bu tekillik, iki kütleli statik olarak ayrı tutmayı sağlayan bir yapı olarak veya *Weyl strut* olarak yorumlanır.  $K_{12}$  eşitliğindeki sabit  $C$  tekillik yapısının belirlenmesinde önemli bir rol oynar. Bu tezde,  $C = -\frac{m_1 m_2}{2b^2}$  kullanılarak,  $z > b$  için  $K_{12} = 0$  olması sağlanabilecektir [89].

Buna ek olarak, iki eşit kütle için metrik fonksiyonu;

$$K = \frac{m^2 \rho^2}{2} \left[ \frac{(\rho^2 + z^2 - b^2)}{\rho^2 b^2 R_1 R_2} - \frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{R_z^4} \right] - \frac{m^2}{2b^2} \quad (2.61)$$

şeklinde elde edilmiştir [81].

#### 2.2.4. Küresel Koordinatlarda Genel Weyl-tipi Çözüm

Weyl-tipi çözümlerin en geneli küresel koordinatlara geçilerek elde edilir. Küresel koordinatlara geçiş için,  $\rho = r \sin \theta$  ve  $z = r \cos \theta$  dönüşümleri yapılarak, metrik (2.52)

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} (e^{2K} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin \theta d\varphi^2) \quad (2.62)$$

haline gelir ve bu durumda Einstein alan denklemlerinden elde edilen diğer metrik fonksiyonları için;

$$U = - \sum_0^{\infty} a_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \quad (2.63)$$

$$K = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_l a_m \frac{(l+1)(m+1)}{l+m+2} \frac{P_l P_m - P_{l+1} P_{m+1}}{r^{l+m+2}} \quad (2.64)$$

eşitliklerine ulaşılır. Burada,  $P_n(\cos\theta)$  Legendre polinomlarıdır. Bu çözümün en basit hali  $a_0 = m$  ve  $a_i = 0 (i \geq 1)$  seçilerek elde edilebilen CC çözümüdür.

Öte taraftan, klasik Newton teorisine göre,  $a_n$  katsayıları sıralı çok kutuplu momentlere karşılık gelir ve  $a_0$  monopole moment,  $a_1$  dipol moment gibi sırayla yazılabilir.

### 2.2.5. Bertotti-Robinson Çözümü

Magnetostatik çözümler için metrik (2.52) ile birlikte bir Maxwell alanı ele alınmalıdır. Bu alanın Faraday tensörü  $F_{ab}$ 'nin elektrik alan bileşenleri sıfırken ( $F_{ab}\xi^a = 0$ ), manyetik alan bileşenleri skaler bir potansiyel  $\psi$  ile  $*F_{tb} = \partial_b \psi$  şeklinde  $F_{ab}$ 'nin duali ile tanımlanırsa Einstein ve Maxwell alan denklemlerinden;

$$U_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_{,\rho} + U_{,zz} = e^{-2U} ((\psi_{,\rho})^2 + (\psi_{,z})^2) \quad (2.65)$$

$$\psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \psi_{,\rho} + \psi_{,zz} = 2U_{,\rho} \psi_{,\rho} + 2U_{,z} \psi_{,z} \quad (2.66)$$

$$K_{,\rho} = \rho((U_{,\rho})^2 - (U_{,z})^2) + \rho e^{-2U} ((\psi_{,z})^2 - (\psi_{,\rho})^2) \quad (2.67)$$

$$K_{,z} = 2\rho U_{,\rho} U_{,z} - 2\rho e^{-2U} \psi_{,\rho} \psi_{,z} \quad (2.68)$$

elde edilir. Metrik fonksiyonları ve skaler alanın;

$$U = \ln \lambda + \frac{1}{2} \ln(\rho^2 + z^2) \quad (2.69)$$

$$\psi = \lambda \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (2.70)$$

$$K = 1 \quad (2.71)$$

olması durumu Bertotti-Robinson çözümü olarak bilinir [90,91]. Burada  $\lambda$  manyetik alanın şiddetini gösteren bir sabittir. BR uzay-zamanı, düz olmayan elektromanye-

tik kaynağın Einstein-Maxwell denklemlerinden elde edilen konformal düz olan tek çözümdür [92]. BR evreni, Reissner–Nordström kara deliklerinin limit durumunda, dejenere ufuğa yakın bölgeyi ve elektromanyetik düzlem dalgaların çarpışmasını tanımlayan Bell–Szekeres uzay-zamanın etkileşim bölgesi gibi farklı çözümleri ifade etmesiyle önemli bir çözümdür.

## 2.3. Jeodezik Denklemleri

Jeodezik denklemleri belirlemek için en klasik yol olan Lagranjiyeni

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.72)$$

ele alarak, Euler-Lagrange eşitliği

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \quad (2.73)$$

kullanılacaktır. Burada,  $(\cdot)$ , parçacığın  $\tau$  has zamanına göre türevidir. Durağan ve statik aksel simetrik metrikler için jeodezik denklemler ayrı ayrı incelenecek ve BD çözümleri elde edilen uzay-zamanlarda parçacıkların dairesel hareketleri ve en iç kararlı yörünge denklemleri (ISCO) gibi özellikleri daha sonraki bölümlerde irdelenecektir.

### 2.3.1. Durağan ve Statik Aksel Simetrik Metrik Jeodezik Denklemleri

Durağan, aksel simetrik metrik (2.6) formunda bir uzay-zaman için Lagranjiyen;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (g_{tt} \dot{t}^2 + 2g_{t\varphi} \dot{t} \dot{\varphi} + g_{x_1 x_1} \dot{x}_1^2 + g_{x_2 x_2} \dot{x}_2^2 + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2) \quad (2.74)$$

olarak elde edilir. Burada, metrik tensörü bileşenleri  $g_{\mu\nu}$  koordinatlar  $x_1, x_2$ 'ye bağlı olduğundan Euler-Lagrange eşitliğinden korunumlu büyüklükler;

$$g_{tt}\dot{t} + g_{t\varphi}\dot{\varphi} = -E \quad (2.75)$$

$$g_{\varphi t}\dot{t} + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} = L \quad (2.76)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $E, L$  sırasıyla enerji ve açısal momentum ile ilgili büyüklüklerdir. Böylece;

$$\dot{t} = \frac{g_{t\varphi}L + g_{\varphi\varphi}E}{g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi}g_{tt}} \quad (2.77)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{g_{t\varphi}E + g_{tt}L}{g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi}g_{tt}} \quad (2.78)$$

eşitlikleri elde edilir. Ancak,  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  koordinatlarına karşılık gelen jeodezik denklemleri son derece karmaşıktır. Bu nedenle, koordinatlar  $x_1 = r$  ve  $x_2 = \theta$  seçilerek, ekvator düzlemindeki ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) jeodezik denklemlerini elde etmek daha uygundur. Böylece, metrik tensör bileşenleri sadece koordinat  $r$ 'ye bağlı olacaktır. Metrik (2.6) formundaki uzay-zaman için uzay-zaman çizgi elemanını;

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{rr}dr^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 \quad (2.79)$$

şeklinde ifade edersek

$$\epsilon = \frac{ds^2}{d\tau^2} = g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\varphi}\dot{t}\dot{\varphi} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 \quad (2.80)$$

eşitliğini elde edebiliriz. Burada,  $\epsilon$  bir sabit olup, 0 ışık-tipi,  $-1$  zaman-tipi, 1 ise uzay-tipi parçacıklar için aldığı değerlerdir. Eşitlik (2.80) düzenlenerek;

$$\dot{r}^2 = \frac{\epsilon - g_{tt}\dot{t}^2 - 2g_{t\varphi}\dot{t}\dot{\varphi} - g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2}{g_{rr}} \quad (2.81)$$

elde edilir. Örneğin; metrik (2.6) için metrik tensörü bileşenleri yerine konulursa;

$$\dot{t} = \frac{-e^{2U}L\mathcal{A} - e^{2U}E\mathcal{A}^2 + e^{-2U}EW^2}{W^2}, \quad (2.82)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{e^{2U}(L + \mathcal{A}E)}{W^2}, \quad (2.83)$$

$$\dot{r}^2 = \epsilon e^{2(U-K)} + e^{-2K}E^2 - \frac{e^{2(2U-K)}(L + E\mathcal{A})^2}{W^2} \quad (2.84)$$

elde edilir ve metrik fonksiyonları biliniyorsa bu eşitliklerin integralleri alınarak parçacık jeodezikleri belirlenebilir.

Weyl tipi çözümlerde; uzay-zamanı tanımlamak için verilen metrik (2.52), durağan metrik (2.6)'ten,  $\mathcal{A} = 0$ ,  $W = \rho$  seçilerek elde edilebilir. Aynı zamanda Weyl tipi çözümler için koordinatlar  $x_1, x_2$ , sırasıyla  $\rho, z$  ve ekvator düzlemi için  $z = \dot{z} = 0$  olarak tanımlanırsa, yukarıdaki (2.82-2.84) eşitlikleri;

$$\dot{t} = -e^{-2U} E, \quad \dot{\varphi} = \frac{e^{2U} L}{W^2}, \quad (2.85)$$

$$\dot{\rho}^2 = e^{-2K} \left( e^{2U} \epsilon + E^2 - \frac{e^{4U} L^2}{W^2} \right) \quad (2.86)$$

halini alır. Eşitlik (2.86) tekrar düzenlenerek;

$$\frac{1}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} V_{eff} = \frac{1}{2} E^2 \quad (2.87)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada etkin potansiyel

$$V_{eff} = -e^{2U} \epsilon + \frac{e^{4U} L^2}{W^2} \quad (2.88)$$

şeklindedir. Etkin potansiyelin maksimum olduğu dönme noktası kararsız (*unstable*), minimum olduğu dönme noktası ise kararlı (*stable*) dairesel yörüngenin yarıçapına karşılık gelmektedir.

### 3. KARA DELİKLER ve KARA DELİK TERMO-DİNAMİĞİ

Einstein alan denklemleri her türlü koordinat dönüşümleri altında değişmez olduğundan, bu denklemlerin herhangi bir çözümünün yeni bir çözüm mü yoksa literatürde mevcut olan fakat daha farklı bir koordinat sisteminde ifade edilmiş olan başka bir çözüm mü olduğunu anlamak bir bakışta imkansızdır. Bu güçlüğü aşmak ve elde edilen çözümleri sınıflandırmak üzere çeşitli sınıflandırma teknikleri geliştirilmiştir. Bunlardan bir tanesi olan Petrov sınıflandırması herhangi bir Lorentz manifolduna karşılık gelen Weyl tensörünün cebirsel özelliklerini gözönüne almaktadır. Burada bu sınıflama yöntemi tartışılmayacak ancak bunlardan bir tanesi olan  $D$ - tipi çözümler gözönüne alınacaktır. Bu tip çözümler genellikle kara delik çözümlerini de içerdikleri için önemlidirler. Tüm  $D$ -tipi çözümler, ilk olarak Debever [93] tarafından elde edilen ve Plebanski ve Demianski çözümü olarak bilinen metrik,

$$ds^2 = (1 - pq)^{-2} \left[ \frac{X (dt + q^2 d\sigma)^2 - Y (dt - p^2 d\sigma)^2}{p^2 + q^2} + (p^2 + q^2) \left( \frac{dp^2}{X} + \frac{dq^2}{Y} \right) \right], \quad (3.1)$$

$$X = (-g^2 + \gamma - \Lambda/6) + 2np - \epsilon p^2 + 2mp^3 - (e^2 + \gamma + \Lambda/6) p^4, \quad (3.2)$$

$$Y = (e^2 + \gamma - \Lambda/6) - 2mq + \epsilon q^2 - 2nq^3 + (g^2 - \gamma + \Lambda/6) q^4. \quad (3.3)$$

elektromanyetik alan ve kozmolojik sabiti içerecek şekilde ifade edilebilir [94]. Burada;  $m$  kütle,  $n$  NUT parametresi,  $\gamma, \epsilon$  açısal momentumun  $a$  parametresine bölümüyle ilgili,  $b$  ivme ve  $e, g$  elektrik ve manyetik yükler olarak tanımlanmıştır. Aynı zamanda, bu uzay-zaman için elektromanyetik bir formu;

$$A^\mu = \frac{1}{p^2 + q^2} [(eq + gp)d\tau + (gp - ep)qpd\sigma] \quad (3.4)$$

şeklinde elde edilir.

Literatürde bilinen bir çok önemli çözümler bu metriğin bazı dönüşümleri ve limit durumlarında elde edilir. Öte taraftan, metrik (3.1) her zaman kara delik çözümü

değildir. Bu dönüşümler, limitler ve kara delik olması için gerekli durumlar ayrıntılı olarak [79] ve [95] çalışmalarında incelenmiştir. Bu bölümde ise, elektrik ve manyetik yüklü, NUT parametresine sahip, dönen kara deliklerin, kozmolojik sabitli ve kozmolojik sabit içermeyen çözümleri ele alınacaktır.

### 3.1. Kerr-Newman-Taub-NUT-(anti de Sitter) Çözümü

Metrik (3.1)'de bazı dönüşümler ile, Kerr-Newman-Taub-NUT-(anti) de Sitter (KNTN(A) dS) kara delik çözümü;

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\rho^2} \left( dt - \frac{h}{\Xi} d\varphi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( a dt - \frac{(r^2 + a^2 + n^2)}{\Xi} d\varphi \right)^2 \quad (3.5)$$

olarak verilmektedir. Burada

$$\begin{aligned} \Xi &= 1 \pm \frac{1}{3} |\Lambda| a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + (n + a \cos \theta)^2, \\ h &= a \sin^2 \theta + 2n \cos \theta, \\ \Delta_\theta &= 1 \pm \frac{4}{3} |\Lambda| a n \cos \theta \pm \frac{1}{3} |\Lambda| a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta_r &= r^2 - 2mr + a^2 - n^2 + z^2 \mp \frac{|\Lambda|}{3} (3n^2(a^2 - n^2) + r^2(a^2 + 6n^2) + r^4), \end{aligned} \quad (3.6)$$

olmak üzere, kara delik parametreleri,  $m$  kütle,  $z = q_e + q_m$  elektrik ve manyetik yüklerin toplamı,  $n$  NUT manyetik kütlesi,  $a$  dönme parametresi ve  $\Lambda$  kozmolojik sabittir. de-Sitter (dS) çözümü kozmolojik sabitin pozitif olduğu anti-de-Sitter (AdS) ise kozmolojik sabitin negatif olduğu durumları ifade etmektedir ve yukarıdaki çözüm her iki çözümü de içerecek şekilde yazılmıştır. Teoride bu parametreler tüm reel değerleri alabilir ancak tüm değerlerin fiziksel bir anlamı olmayabilir. Örneğin,  $z^2 < 0$  olması durumunda elektrik veya manyetik kuvvetin kompleks olması gerekir, ancak bu durum Einstein-Maxwell denklemleriyle uyumlu değildir. Öte taraftan, bu

çözüm için elektromanyetik 1-form;

$$A_\mu = -\frac{zr}{\rho^2}dt + \frac{zrh}{\Xi\rho^2}d\varphi. \quad (3.7)$$

ile verilir. Aynı zamanda,  $\Delta_r = 0, \rho^2 = 0, \Delta_\theta = 0$  durumlarında metrik (3.5)'te tekillikler mevcuttur. Fakat bu tekilliklerin bazıları koordinat tekilliği olup ufukları belirlemektedir [96]. Gerçek tekillik olan  $\rho^2 = 0$  durumu,  $r = 0$  ve  $\cos\theta = -n/a$  eşitliklerini vermektedir. Buradan,  $a^2 \geq n^2$  durumu ele alındığında, metrik (3.5)'in Kerr-tipi bir halka tekilliğine sahip olduğu sonucu elde edilir.  $n^2 \geq a^2$  durumunda ise uzay-zaman tekilliği mevcut değildir.

AdS çözümü için  $\Delta_r = 0$  tekilliği bir koordinat tekilliği olup, ufukların belirlenmesini sağlamaktadır. Dördüncü dereceden fonksiyon olan bu eşitlik için;

$$\Delta_r = (r - r_+)(r - r_-)(r - r_1)(r - r_1^*) = 0 \quad (3.8)$$

şeklinde dört kök mevcuttur. Burada,  $r_+$ , olay ufukunu,  $r_-$  Cauchy ufukunu belirlerken,  $r_1, r_1^*$  kompleks köklerdir.

Kerr-Newman-Taub-NUT (KNTN) çözümü;

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)(dt + \mathcal{A}d\varphi)^2 + \rho^2 \left[ \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right], \quad (3.9)$$

$$A_E = -\frac{qr}{\Sigma}(dt - b d\varphi), \quad (3.10)$$

şeklinde metrik (3.5)'te kozmolojik sabitin sıfır olduğu ve Boyer-Lindquist koordinatlardaki halidir. Bu durumda fonksiyonları

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2mr + a^2 - n^2 + q^2, \\ \rho^2 &= r^2 + (n + a \cos \theta)^2, \\ \mathcal{A} &= \frac{a(r^2 + a^2 + n^2) \sin^2 \theta - b \Delta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \\ b &= a \sin^2 \theta - 2n \cos \theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

haline gelmektedir. Bu çözümde, ufukların yarıçapları  $\Delta = 0$  ile elde edilir ve  $r_\pm =$

$m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - Q^2 + n^2}$  şeklindedir.  $r_+$  olay ufku (*event horizon*) veya dış ufuk ( $\mathcal{H}^+$ ),  $r_-$  Cauchy ufku ( $\mathcal{H}^-$ ) veya iç ufuk olarak isimlendirilir. Aynı zamanda, bu çözümün kara delik çözümü olması için  $m^2 + n^2 > Q^2 + a^2$  eşitliğinin sağlanması gerekir. Yoksa bu çözüm çıplak halka-tipi bir tekilliğe sahip olmaktadır. Ayrıca,  $m^2 + n^2 = Q^2 + a^2$  durumu uç kara delik (*extremal black hole*) olarak isimlendirilir.

Öte taraftan, NUT parametresi ( $n$ ) ve kozmolojik sabitin ( $\Lambda$ ) sıfır olduğu durumlar Kerr-Newman (KN) kara delik çözümüdür. Bu çözümün bir genelleştirmesi ise, dış manyetik alan içinde bulunan KN kara delik çözümüdür [97,98]. Ancak, durağan metrik için Harrison dönüşümleri çok karmaşık olduğundan manyetikleşmiş KN (MKN) çözümleri yakın zamanda

$$ds^2 = H \left[ -f dt^2 + R^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \right] + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{HR^2} (d\varphi - \Omega dt)^2, \quad (3.12)$$

$$A = \Phi_0 + \Phi_3 (d\varphi - \Omega dt) \quad (3.13)$$

şeklinde en basit halinde elde edilmiştir [99]. Burada

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & \Delta &= (r^2 + a^2) - 2mr + q^2 + p^2, \\ f &= \frac{R^2 \Delta}{\Sigma}, & \Sigma &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.14)$$

olmaktadır. Aynı zamanda çok uzun olan metrik fonksiyonları ve alan değerleri  $H, \Omega(\omega), \Phi_0, \Phi_3$  Gibbons ve arkadaşlarının makalesinde bulunabilir [99]. Karadelikler için ufuğun yakın dışında bulunan ergo bölgesi (*ergoregion*), MKN çözümünde dönme ekseninin yakınında sonsuza doğru genişlemektedir. Ancak bu durum  $q = -amB$  olduğunda oluşmamaktadır.

Bunlara ek olarak, kara delik iki kutup (*dihole*) çözümleri, zıt yüklere sahip durgun, uç durumdaki iki kara delik çiftinin birlikte ele alınmasıyla

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right)^2 \left[ -dt^2 + \frac{\Sigma^4}{[\Delta + (M^2 + a^2) \sin^2 \theta]^3} \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \right] \\ &+ \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right)^2} d\varphi^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0, & A_3 &= \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\Delta + a^2 \sin^2 \theta} d\varphi, \\
\Delta &= r^2 - 2Mr + a^2, & \Sigma &= r^2 - a^2 \cos^2 \theta.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

şeklinde elde edilmiştir [100].

Aynı zamanda, bu çözümün Melvin manyetik evrenine gömülmüş halinin

$$ds^2 = \Lambda^2 \left[ -dt^2 + \frac{\Sigma^4}{[\Delta + (m^2 + a^2) \sin^2 \theta]^3} \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \right] + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Lambda^2} d\varphi^2, \tag{3.17}$$

$$A = A_3 d\varphi = -\frac{2mra + B/2 [(r^2 - a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \theta]}{\Lambda \Sigma} \sin^2 \theta d\varphi, \tag{3.18}$$

$$\Lambda = \frac{\Delta + a^2 \sin^2 \theta + 2Bmra \sin^2 \theta + B^2/4 \sin^2 \theta [(r^2 - a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \theta]}{\Sigma}, \tag{3.19}$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2, \tag{3.20}$$

$$\Sigma = r^2 - a^2 \cos^2 \theta \tag{3.21}$$

olacağı sonucuna ulaşılmıştır [101].

### 3.2. Kara delik Termodinamiği

Kara delikler, genel görelilik kuramının en önemli öngörülerinden birisi olarak, ışığın bile kaçamayacağı kadar yüksek kütle-çekimine sahip uzay-zaman bölgesi olarak tanımlanır. Bu nedenle kara deliklerin doğrudan belirlenmesi ve gözlemlenmesi imkansız hale gelmektedir. Sadece olay ufğunun dış bölgesindeki diğer cisimlerle olan etkileşmelerine bakarak belirlenebilirler. Bu dolaylı gözlemler sonucunda onların kütle, yük ve açısal momentumu belirlenebilir. Aynı zamanda, kara deliklerin tüm fiziksel özellikleri, diğer gök cisimleri gibi bir çok-parçacıklı sistem olarak düşünülemezlerinden dolayı, sadece üç büyüklüğü; kütle, yük ve açısal momentum değerleri ile belirlenebilir. Bu nedenle, kara deliklerin saçı yoktur (*no-hair theorem*) [102].

Ancak, 1970'lerde ilk olarak Bekenstein tarafından GG kapsamında kara delikler için elde edilen yasalar ile termodinamik yasaları arasında bir benzetme kurulabileceği

gösterilmiştir [103]. Klasik GG alan teorisi [104], kara delik olay ufku alanının hiç bir süreçte azalmayacağını

$$\Delta A \geq 0 \quad (3.22)$$

gösterirken, Bekenstein, bu durumun termodinamiğin ikinci yasası olan, kapalı bir sistemde toplam entropinin azalmamasıyla ( $\Delta S \geq 0$ ) yakın bir analogi oluşturduğunu öne sürmüştür. Kısa bir süre sonra, GG durağan kara deliğin olay ufku üzerinde, yüzey kütle-çekiminin ( $\kappa$ ) sabit olduğu ispatlanmıştır [105]. Bu sonuç ise termodinamiğin sıfıncı yasası, termal dengedeki bir sistemin sıcaklığının ( $T$ ) sabit olmasıyla ilişkilendirilmiştir. Öte taraftan, genel görelilik kara delikleri birinci yasası olarak isimlendirilen,

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ \quad (3.23)$$

eşitliği, vakum için ispatlanmıştır [105]. Burada,  $M$  kütle,  $A$  alan,  $J$  açısal momentum ve  $\Omega$  açısal hızı ifade etmektedir. Bu eşitliğin sağ tarafına, başka madde alanlarının varlığı durumunda fazladan terimler eklenebilir. Elde edilen bu sonuç ise termodinamiğin birinci yasası, bir sistemde yaşanan küçük ve geri dönüşü olan değişimler sonucu enerjideki değişim olan,  $dE = TdS + (iş\ terimleri)$  ile ilişkilendirilmiştir. Böylece, termodinamik büyüklükler ile kara delik parametreleri arasında,  $\alpha$ , belirlenmemiş bir büyüklük olmak üzere,  $E \leftrightarrow M$ ,  $T \leftrightarrow \alpha\kappa$ ,  $S \leftrightarrow A/(8\pi\alpha)$  analogileri kurulmuştur. Ancak, klasik GG için kara delik sıcaklığı  $T$  sıfır olduğundan, bu analogilerin fiziksel anlamlarının olmadığı sadece matematiksel ilişkiler olduğu düşünülmüştür.

Bu düşünce, Hawking'in kuantum parçacık yaratma etkisiyle [106], kara deliklerin

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.24)$$

sıcaklığıyla siyah cisim ışımasını yaptığını göstermesiyle değişmiştir. Burada,  $G = c = \hbar = k = 1$  olarak ele alınmıştır. Aynı zamanda, GG için

$$S = \frac{A}{4} \quad (3.25)$$

kara deliğin fiziksel entropisi olarak elde edilir [107].

Bu bilgiler ışığında, durağan en basit kara delik çözümü KN çözümü incelenebilir. Eşitlik (3.9) ile verilen KNTN metriğinde, NUT parametresinin  $n$  sıfır alınmasıyla,

$$ds^2 = - \left( \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) (dt + \mathcal{A} d\varphi)^2 + \rho^2 \left[ \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right], \quad (3.26)$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + q^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \mathcal{A} = \frac{a \sin^2 \theta (2mr - q^2)}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta},$$

şeklinde KN metriği elde edilir. KN kara deliğinin ufuk yarıçapları  $\Delta = 0$  denklemi yardımıyla  $r_{\pm}$  olarak belirlenir. İlk yapılan çalışmalarda, sadece olay ufkunun termodinamik özellikleri ele alınırken, son yıllarda Cauchy ufkunun termodinamik özellikleri de incelenmektedir ve kara deliğin termodinamik niceliklerinin iki ufkun etkilerinin toplamı olduğu düşünülmektedir. Bu durumda, ufuksalarda yüzey alanları;

$$A_{\pm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} d\theta d\varphi = 4\pi(r_{\pm}^2 + a^2) \quad (3.27)$$

olmaktadır. Aynı zamanda,  $\mathcal{H}^{\pm}$  ufuksalrı için Bekenstein-Hawking entropisi de

$$S_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{4} = \pi(r_{\pm}^2 + a^2) \quad (3.28)$$

olarak elde edilir. Karadelikler için diğer büyüklük olan yüzey kütle-çekimi hesaplanması Ek C'de ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu sonucu kullanarak KN kara deliği için;

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - m}{r_{\pm}^2 + a^2} = \frac{r_{\pm}^2 - a^2 - q^2}{2r_{\pm}(r_{\pm}^2 + a^2)} \quad (3.29)$$

ufuk yüzey kütle-çekimi eşitliğine ulaşılır. Sıcaklık ile yüzey kütle-çekimi arasındaki ilişki kullanılarak KN kara deliğinin ufuk sıcaklıkları;

$$T_{\pm} = \frac{\kappa_{\pm}}{2\pi} = \frac{r_{\pm}^2 - a^2 - q^2}{4\pi r_{\pm}(r_{\pm}^2 + a^2)} \quad (3.30)$$

olarak elde edilir. Bunlara ek olarak, Smarr tarafından,  $\Delta = 0$  eşitliğinden;

$$m^2 = \frac{S_{\pm}}{4\pi} + \frac{\pi(q^4 + 4J^2)}{4S_{\pm}} + \frac{q^2}{2} \quad (3.31)$$

sonucu bulunmuştur [108]. Burada,  $a = \frac{J}{m}$  olarak kullanılmıştır. Aynı zamanda, GG kara delik birinci yasası, KN kara delikleri için ele alındığında, kütledeki ufak değişimleri,

$$dm = T_{\pm}dS_{\pm} + \Omega_{\pm}dJ + \Phi_{\pm}dq \quad (3.32)$$

şeklinde  $m = m(S, J, q)$  olmak üzere, kara delik parametreleri ile ifade edilebilir. Burada,  $T_{\pm}$ ,  $\Omega_{\pm}$ ,  $\Phi_{\pm}$ , KN kara delik iç ve dış ufuklarında, sırasıyla sıcaklık, açısız hız ve elektrik potansiyeli ifade eder [109]. Böylece termodinamik büyüklükler;

$$T_{\pm} = \left. \frac{\partial m}{\partial S} \right|_{J,q} = \frac{1}{8m\pi} \left( 1 - \frac{\pi^2}{S_{\pm}^2} (q^4 + 4J^2) \right), \quad (3.33)$$

$$\Omega_{\pm} = \left. \frac{\partial m}{\partial J} \right|_{S,q} = \frac{\pi J}{mS_{\pm}}, \quad (3.34)$$

$$\Phi_{\pm} = \left. \frac{\partial m}{\partial q} \right|_{S,J} = \frac{q}{2m} \left( 1 + \frac{\pi q^2}{S_{\pm}} \right) \quad (3.35)$$

olarak elde edilir. Başka önemli bir termodinamik büyüklük ise özgül ısıdır (*specific heat*). Birim kütle başına ısı miktarı olarak tanımlansa da burada;

$$C_{\pm} = T_{\pm} \left. \frac{\partial S_{\pm}}{\partial T_{\pm}} \right|_{J,q} = \frac{4m\pi T_{\pm} S_{\pm}}{1 - 4\pi T_{\pm} (2m + T S_{\pm})} \quad (3.36)$$

eşitliğiyle sabit açısız momentum ve sabit yük için elde edilir [109].

## 4. ALTERNATİF KÜTLE-ÇEKİM KURAMLARI

Einstein genel görelilik kuramı, Güneş sisteminde (zayıf kütle-çekimi) ve pulsar çiftlerinde (güçlü kütle-çekimi) test edilmiş ve başarılı olmuş bir teoridir [110–112]. Bunlara ek olarak, son yıllarda Type Ia Süpernova (SNe), gözlem sonuçlarıyla evrenin ivmelenerek genişlediğine dair çok kuvvetli kanıtlar bulunmuştur [113, 114]. GG kuramı ile ivmeli bu genişlemenin fiziksel içeriği bilinmeyen bazı büyüklükler olan karanlık enerji, karanlık madde veya kozmolojik sabit ile açıklanmaktadır. Bu nedenle, alternatif kütle-çekim kuramlarıyla bu bilinmeyen kavramların kütleçekim etkileşmesinin uzun menzilde GG'den farklı davranmasının bir sonucu oldukları fikri ile açıklanması amaçlanmaktadır. Bu çalışmada, skaler-tensör teorilerinden Brans-Dicke kuramı ve metrik teorilerinden  $f(R)$  kuramı incelenecektir.

### 4.1. Brans-Dicke Teorisi

Brans-Dicke(BD) teorisi, Newton sabiti  $G$ 'yi skaler bir  $\phi$  alanı ile  $G = 1/\phi$  olarak ilişkilendiren GG kuramına alternatif bir teoridir. Maxwell alanının varlığı durumunda BD teorisinin aksiyonu Jordan çerçevesinde;

$$S_{\text{JBD}} = \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \quad (4.1)$$

olarak verilmektedir. Burada,  $\omega$  BD parametresidir. Bu aksiyonun metriğe göre varyasyonundan (ayrıntılı olarak Ek A'de verilmiştir);

$$G_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{\phi} + \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\lambda} \phi_{,\lambda}) - \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi) \quad (4.2)$$

elde edilirken, skaler alana ( $\phi$ ) göre varyasyonunda ise (ayrıntılı olarak Ek A'de verilmiştir);

$$R - \frac{\omega}{\phi^2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{2\omega}{\phi} \square \phi = 0. \quad (4.3)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.2) eşitliğinin izi alınarak, eşitlik (4.3) tekrar düzenlendiğinde BD alan denklemleri için;

$$(2\omega + 3)\square\phi = T = 0 \quad (4.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada,  $T$  enerji momentum tensörü  $T_{\mu\nu}$ 'nin izidir ve dört boyutlu uzay-zamanda sıfır olmaktadır. Bununla birlikte Maxwell alanı için enerji momentum tensörü eşitlik (2.42) ile verilmiştir.

Brans-Dicke teorisinin  $\omega \rightarrow \infty$  değeri için GG teorisine indirgendiği ve  $\phi$  BD skaler alanının;

$$\phi = \phi_0 + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (4.5)$$

asimtotik özellik gösterdiği şeklinde genel bir kabul vardır [115]. Bu durum zayıf kütleçekim alanları için doğru olsa da kuvvetli kütle-çekim alanlarında durum daha karışıktır. Zayıf kütle-çekim alanı için Güneş sistemi testlerinde  $\omega > 40000$  olması gerektiğini göstermiştir [116]. Ancak, bir çok yeni çalışma bunun bazı durumlarda tam doğru olmadığını göstermiş ve BD tam çözümlerinin her zaman GG çözümlerine  $\omega \rightarrow \infty$  limitinde indirgenemeyebileceği iddia edilmiştir. [117–119].

#### 4.1.1. Durağan, Eksenel Simetrik BD Alan Denklemleri

Eşitlik (2.6)'da durağan, eksenel simetrik metrik tanımlanmıştır. Bu metriğin BD alan denklemleri çözümü için metrik fonksiyonlarını;

$$ds^2 = -e^{2U_B}(dt + \mathcal{A}_B d\varphi)^2 + e^{2(K_B - U_B)}(dx_1^2 + dx_2^2) + e^{-2U_B}W_B^2 d\varphi^2 \quad (4.6)$$

olarak B alt-indisiyle belirtirsek ve kolaylık için eşitlik (4.2)'i

$$Gdn_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}) - \frac{1}{\phi}(\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi) - \frac{2T_{\mu\nu}}{\phi} = 0 \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlarsak bazı BD alan denklemleri;

$$Gdn_{x_1}^{x_1} + Gdn_{x_2}^{x_2} = \nabla^2 (\phi W_B) = 0, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} Gdn_{\varphi}^t &= 4 \left( \mathcal{A}_B (\vec{\nabla} A_{0B})^2 - \vec{\nabla} A_{0B} \vec{\nabla} A_{3B} \right) \\ &+ W_B e^{-2U_B} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{e^{4U_B} \phi \vec{\nabla} \mathcal{A}_B}{W_B} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} Gdn_t^t + Gdn_{\varphi}^{\varphi} &= 2\omega W_B^2 (\vec{\nabla} \phi)^2 + 2\phi W_B \vec{\nabla} (W \vec{\nabla} \phi) - \phi^2 e^{4U_B} (\vec{\nabla} \mathcal{A}_B)^2 \\ &+ 4W_B^2 \phi^2 \nabla^2 K_B - 4\phi^2 W_B^2 \vec{\nabla} (W_B \vec{\nabla} U_B) \\ &+ 2\phi^2 W_B \left[ W_B (\vec{\nabla} U_B)^2 + \nabla^2 W_B \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} Gdn_t^t - Gdn_{\varphi}^{\varphi} &= e^{-2U_B} W_B^2 (\vec{\nabla} A_{0B})^2 - e^{2U_B} \left[ \mathcal{A}_B^2 (\vec{\nabla} A_{0B})^2 - (\vec{\nabla} A_{3B})^2 \right] \\ &- \mathcal{A}_B W_B \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{e^{4U_B} \phi \vec{\nabla} \mathcal{A}_B}{W_B} \right) - e^{4U_B} \phi (\vec{\nabla} \mathcal{A}_B)^2 \\ &+ W_B \left[ 2\vec{\nabla} \cdot (\phi W_B \vec{\nabla} U_B) - \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} W_B) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. Burada, tüm metrik fonksiyonları koordinatlar  $x_1, x_2$ 'ye bağlıdır. Ek olarak eşitlik (4.4) ise;

$$(2\omega + 3) \vec{\nabla} \cdot (W_B \vec{\nabla} \phi) = 0 \quad (4.12)$$

haline gelir. Maxwell denklemleri ise

$$ME^t = \vec{\nabla} \cdot \left[ e^{-2U_B} W_B \vec{\nabla} A_{0B} + \frac{\mathcal{A}_B e^{2U_B}}{W_B} (\vec{\nabla} A_{3B} - \mathcal{A}_B \vec{\nabla} A_{0B}) \right] = 0, \quad (4.13)$$

$$ME^{\varphi} = \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{e^{2U_B}}{W_B} (\mathcal{A}_B \vec{\nabla} A_{0B} - \vec{\nabla} A_{3B}) \right] = 0 \quad (4.14)$$

eşitlikler (2.50-2.51) ile benzer şekilde elde edilir. Görüldüğü gibi BD alan denklemleri oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir.

## 4.2. $f(R)$ Teorisi

Einstein'nın GG kuramına alternatif teorilerden bir diğeri de, (2.11) eşitliğindeki Lagranjiyen  $\mathcal{L}$ 'nin sadece Ricci skaleri değil de, Ricci skalerinin fonksiyonlarından

oluşturduğunu ele alan  $f(R)$  teorisidir. Bu teorinin farklı versiyonları mevcuttur. Bunlardan bazıları arasında, teorinin geometrik yapısının sadece metriğe bağlı olduğu metrik- $f(R)$  teorisi yanında metrik ve bağlantının ayrı değişkenler olarak ele alındığı Palatini  $f(R)$  teorisi ve metrik-afin teorisi sayılabilir.

Metrik  $f(R)$  kuramı, toplam eylemin temel değişkenlerinin sadece metrik ve diğer madde alanları olduğu bir kuramdır ve ;

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + f(R)) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (4.15)$$

eylemi ile ifade edilebilen bir teoridir [120]. Burada,  $\psi$  madde alanının toplamını ve  $f(R)$  Ricci skalerinin herhangi bir fonksiyonunu ifade eder. Aynı zamanda, bu kuramın alan denklemleri metriğin dördüncü dereceden türevlerini içermektedir. Bu aksiyonun metriğe ( $g^{\mu\nu}$ ) göre varyasyonundan (varyasyon hesabı ayrıntılı olarak Ek B'de verilmiştir);

$$R_{\mu\nu}(1 + f'(R)) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + f(R)) - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) - 8\pi G T_{\mu\nu} = 0 \quad (4.16)$$

denklemini elde edilir. Burada, enerji-momentum tensörü  $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ ,  $\nabla_\mu$  Levi-Civita bağlantıları ile metriği birbirine bağlayan kovaryant türev işlemcisi ve  $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$  operatörü olarak belirlenmiştir. Metrik  $f(R)$  teorisi büyük ölçüde ilk olarak [121] tarafından incelenmiştir. Aynı zamanda, bu eşitliğin izi

$$R(1 + f'(R)) - 2(R + f(R)) + 3\square f'(R) - 8\pi G T = 0 \quad (4.17)$$

olurken, enerji-momentum tensörünün izi ( $T = T^\mu{}_\mu$ ) boşluk için ve 4-boyutlu uzay-zamanda elektromanyetik alan için sıfır olmaktadır. Öte taraftan, Ricci skalerinin sabit olduğu uzay-zamanlar için  $R = R_0$  seçilmelidir. Bu durumda, eşitlik (4.17);

$$R_0(1 + f'(R_0)) - 2(R_0 + f(R_0)) = 0,$$

halini alır. Bu eşitlik  $R_0$  için çözülürse;

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{f'(R_0) - 1} \quad (4.18)$$

haline gelirken, eşitlik (4.16) ise;

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_0 + R_{\mu\nu}f'(R_0) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R_0) - 8\pi GT_{\mu\nu} = 0 \quad (4.19)$$

olur ve bu ifadeden sabit eğrilikli çözümünün alan denklemi;

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left( \frac{f(R_0)}{f'(R_0) - 1} + \frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{1 + f'(R_0)} \right) \quad (4.20)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Öte taraftan, Palatini  $f(R)$  teorisi, kütle-çekimsel aksiyonun metrik ve bağlantılara ( $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ ) bağlı olacağını ancak madde aksiyonunun sadece metriğe bağlı olacağı durumu ele almaktadır. Ek olarak, kütle-çekim ve madde varyasyonlarının ikisinin de hem metriğe hem de bağlantılara bağlı olabileceğini ele alan metrik-afin  $f(R)$  teorisi de ilgi çekmektedir.

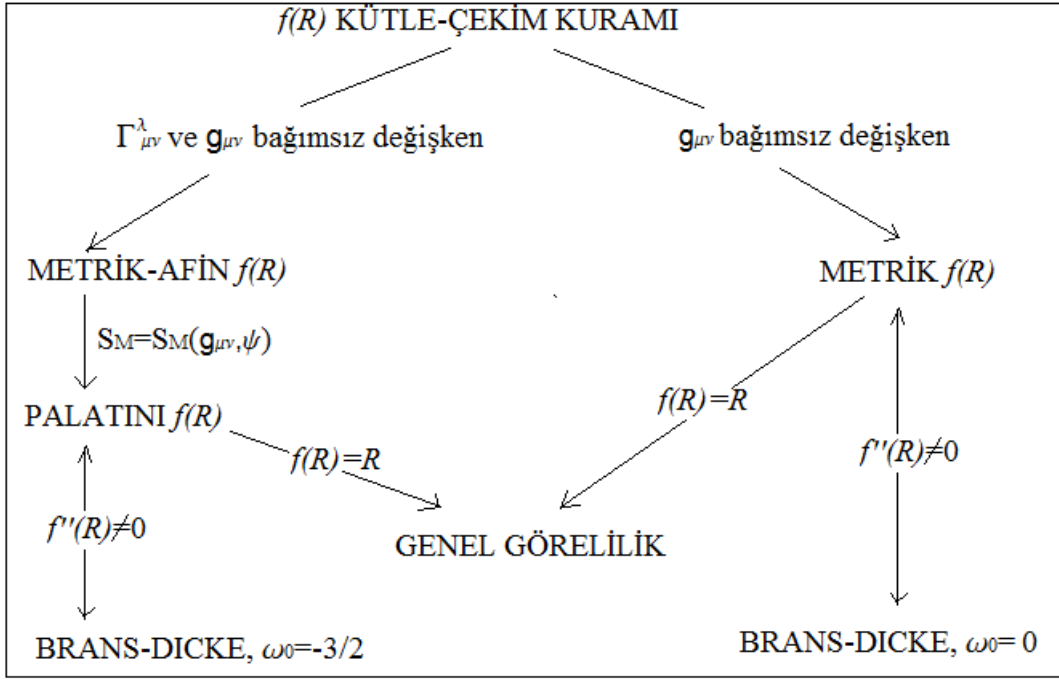
Aslında  $f(R)$  teorilerinin herbirini bir diğerine götüren durumlar mevcuttur. Aynı zamanda, yapılan çalışmalar ile  $f(R)$  teorisi sonuçları, bir skaler potansiyel terimi eklenmiş olan BD kuramının, BD-parametresinin ( $\omega$ ) bazı değerleri için örtüştüğü gösterilmiştir. Bu durumları Şekil 4.1 ile özetlemek mümkündür [122].

Ancak bu tezde, sadece yukarıda da ayrıntılı olarak alan denklemleri gösterilen metrik  $f(R)$  teorisi kullanılarak, kozmolojik sabitli GG çözümleri ile aralarındaki ilişki incelenecektir.

#### 4.2.1. Tutarlı $f(R)$ Teorileri

Diğer önemli bir nokta ise,  $f(R)$  teorilerinin, günümüzde ivmelenerek genişlemekte olan evreni,  $f(R)$  fonksiyonunun hangi durumlarıyla açıklayabildikleridir. Aslında, kütle-çekimsel teorilerin uygunluğunun sağlanması için,  $f(R)$  fonksiyonlarına bazı kısıtlamalar getirilmelidir. Bu çalışmada, gerekli olan durumlardan üçü aşağıda özetlenmiştir [123];

- $1 + f'(R) > 0$ . Bu durum, eşitlik (4.20) için belirlenen, etkin kütle-çekimsel



**Şekil 4.1**  $f(R)$  kütle-çekim teorisinin sınıflandırılması ve bunlara karşılık BD teorileri grafiği [122].

sabit  $G_{eff} = \frac{G}{1+f'(R)}$  değerinin pozitif olmasını sağlar. Aynı zamanda, Einstein denklemlerinin ana kısmının işaretini de korur. Öte taraftan, graviton parçacığının takyon karakteri göstermesinin de önüne geçilir.

- $f''(R) \geq 0$ . Bu kısıtlama kararlı bir kütle-çekimsel evreyi sağlar.
- $\frac{f(R)}{R} \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ . Bu kısıtlama ise, GG'nin erken evrendeki karakterinin belirlenmesine imkan vermektedir. Aynı zamanda, GG'nin büyük patlama nükleosentezi ve kozmik mikrodalga arkaplan ışıması gibi tahminleriyle de doğru olarak örtüşmektedir. Ancak, sadece evrenin ivmeli genişlemesi modellenmek isteniyorsa bu kısıtlamaya gerek yoktur.

Bu kısıtlamaları gözönünde bulundurarak oluşturulan bazı tutarlı (*viable*)  $f(R)$  modelleri şu şekildedir;

A) **Model I:**  $f(R) = \alpha |R|^\beta$

Bu model pozitif  $\alpha$  için, özellikle  $\alpha R^2$  modeli ile ivmeli genişleyen evreni tanımladığından dolayı geniş olarak çalışılmaktadır. Günümüz genişleyen evreninin

gözlem sonuçları, eğriliği pozitif olarak elde ettiği için, eşitlik (4.18) ile verilen eğrilik ifadesinin pozitif olması gereklidir. Bu eşitlik kullanılarak;

$$R_0 = \left( \frac{1}{\alpha(\beta - 2)} \right)^{1/(\beta-1)} \quad (4.21)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuçtaki parametrelerin,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 2$  ve  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 2$  durumları pozitif eğriliği ifade etmektedir. Ancak, ikinci durum için  $\beta = 1$ , eğriliğin sonsuza gitmesine neden olduğundan pozitif sabit eğrilik için bu durum  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 1$  olarak ele alınabilir. Aynı zamanda, bu kısıtlamalar,  $f''(R) \geq 0$  ve  $f'(R) + 1 > 0$  koşullarını da sağlamaktadır.

B) **Model II:**  $f(R) = R^\alpha e^{\beta/R} - R$

Bu model,  $\alpha = 1$  için [124] ve daha genel olarak [125] çalışmalarında daha önce ele alınmıştır. Seçilen  $f(R)$  fonksiyonu eşitlik (4.20)'de kullanılarak, sabit Ricci skaları için;

$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha - 2} \quad (4.22)$$

eşitliği elde edilir. Pozitif eğrilik sabiti için;  $\alpha > 2$ ,  $\beta > 0$  ve  $\alpha < 2$ ,  $\beta < 0$  durumları söz konusudur. Bir önceki modelde olduğu gibi bu modelde elde edilen eşitlikler de yukarıda verilen kısıtlamaları sağlamaktadır.

C) **Model III:**  $f(R) = R [\log(\alpha R)]^\beta - R$

Diğer modeller gibi bu modelde daha önceki çalışmalarda ele alınmıştır. [124, 125]. Seçilen fonksiyon kullanılarak, eşitlik (4.20) düzenlendiğinde;

$$R_0 = \frac{e^\beta}{\alpha} \quad (4.23)$$

eğrilik ifadesine ulaşılır. Bu sonuç,  $\beta > 0$  zorunluluğunu getirdiğinden, pozitif eğrilik için  $\alpha > 0$  olmak zorundadır. Ancak, ulaşılan bu sonuç ile daha önceden bahsedilen kısıtlamalardan,  $f(R)/R \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  kısıtlamasını sağlamamaktadır.

D) **Model IV:**  $f(R) = -\alpha \frac{\kappa \left(\frac{R}{\alpha}\right)^n}{1 + \beta \left(\frac{R}{\alpha}\right)^n}$

Bu modelin ise kozmolojik tutarlı olduğu gösterilmiş [126] ve çok ilgi çekmiştir. Bu çalışmada ise  $n = 1$  alınarak, eğrilik ifadesinin pozitif olması için gerekli sabitler tartışılmıştır. Eşitlik (4.20) ile verilen sabit Ricci skaleri, bu fonksiyon kullanılarak;

$$R_0^\pm = \frac{\alpha(\kappa - 1)}{\beta} \pm \frac{\alpha\sqrt{\kappa(\kappa - 1)}}{\beta} \quad (4.24)$$

şeklinde iki farklı değer olarak elde edilir. Ancak burada, pozitif eğrilik için,  $R_0^-$  eşitliğine gerekli sabitler hiç bir şekilde sağlanamamaktadır. Öte taraftan,  $R_0^+ > 0$  durumunun sağlanması için;

$$\frac{\alpha(\kappa - 1)}{\beta} + \frac{\alpha\sqrt{\kappa(\kappa - 1)}}{\beta} > 0 \quad (4.25)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sonuç için,  $\kappa > 1$  olmak zorunda iken,  $\alpha > 0, \beta > 0$  ve  $\alpha < 0, \beta < 0$  durumları ele alınabilir.

#### 4.2.2. Durağan, Eksenel Simetrik $f(R)$ Alan Denklemleri

Eşitlik (2.6) ile verilen durağan, eksenel simetrik metrik;

$$ds^2 = -e^{2U_f}(dt + \mathcal{A}_f d\varphi)^2 + e^{2(K_f - U_f)}(dx_1^2 + dx_2^2) + e^{-2U_f}W_f^2 d\varphi^2 \quad (4.26)$$

$f(R)$  çözümleri için  $f$  alt indisli olarak belirtilmektedir. Eşitlik (4.19) ile verilen  $f(R)$  alan denklemlerinden;

$$Gdn_{x_1}^{x_1} + Gdn_{x_2}^{x_2} = W_f \left( \frac{f(R_0)}{f'(R_0) - 1} \right) + e^{2(U_f - K_f)} \nabla^2 W_f = 0, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} Gdn_t^\varphi &= \frac{4e^{2U_f}}{1 + f'(R_0)} (\mathcal{A}_f (\vec{\nabla} A_{f0})^2 - \vec{\nabla} A_{f0} \cdot \vec{\nabla} A_{f3}) \\ &+ W_f \vec{\nabla} \left( \frac{e^{4U_f} \vec{\nabla} \mathcal{A}_f}{W_f} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} Gdn_t^t + Gdn_\varphi^\varphi &= 2W_f e^{2K_f} \left( \frac{W_f f(R_0)}{f'(R_0) - 1} + e^{2(U_f - K_f)} \nabla^2 W_f \right) - e^{6U_f} (\vec{\nabla} \mathcal{A}_f)^2 \\ &+ 4W_f e^{2U_f} \left[ W_f ((\vec{\nabla} U_f)^2 + \nabla^2 K_f - \nabla^2 U_f) - 4\vec{\nabla} U_f \cdot \vec{\nabla} W_f \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
Gdn^t_t - Gdn^\varphi_\varphi &= \frac{2}{1 + f'(R_0)} \left[ W_f^2 e^{-2U_f} (\vec{\nabla} A_{f0})^2 + e^{2U_f} ((\vec{\nabla} A_{f3})^2 - \mathcal{A}_f^2 (\vec{\nabla} A_{f0})^2) \right] \\
&- W_f \vec{\nabla} \left( \frac{\mathcal{A}_f e^{4U_f} \vec{\nabla} \mathcal{A}_f}{W_f} + 2W_f \vec{\nabla} U_f - \vec{\nabla} W_f \right) = 0 \quad (4.30)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, tüm metrik fonksiyonları  $x_1, x_2$  koordinatlarına bağılyken,  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{x}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{x}_2$  şeklinde tanımlanmıştır. Öte taraftan, eşitlik (2.45) ile verilen elektromanyetik bir-form,  $f(R)$  çözümleri için  $A_f = A_{0f} dt + A_{3f} d\varphi$  yazılarak, Maxwell denklemleri için,

$$ME^t = \vec{\nabla} \cdot \left[ e^{-2U_f} W_f \vec{\nabla} A_{0f} + \frac{\mathcal{A}_f e^{2U_f}}{W_f} (\vec{\nabla} A_{3f} - \mathcal{A}_f \vec{\nabla} A_{0f}) \right] = 0, \quad (4.31)$$

$$ME^\varphi = \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{e^{2U_f}}{W_f} (\mathcal{A}_f \vec{\nabla} A_{0f} - \vec{\nabla} A_{3f}) \right] = 0 \quad (4.32)$$

eşitliklerine ulaşılır.



## 5. ÇÖZÜM ÜRETME TEKNİKLERİ

Bir önceki bölümde BD alan denklemlerinin çok karmaşık olmaları dolayısıyla (4.8-4.11) denklemlerin çözülerek tam çözümlerinin elde edilmesinin çok zor olduğu açıkça görülmektedir. Bu nedenle karışık alan denklemlerinin çözülmesi için bazı çözüm üretme teknikleri kullanılmaktadır. Bu tekniklerden bir tanesi Ernst denklemlerini kullanarak sonucu elde etmektir. Genel görelilik için Ernst tarafından elde edilen bu denklemler [58, 59], kozmolojik sabitli genel görelilik için Astorino [127] tarafından geliştirilmiştir. Burada ise, BD alan denklemleri için Ernst denklemleri elde edilecektir.

Diğer bir teknik ise, vakum için Tiwari ve Nayak [69], elektromanyetik alan için Singh ve Rai [70] tarafından elde edilen, BD metrik fonksiyonlarının, genel görelilik metrik fonksiyonları bilinen vakum veya elektromanyetik bir uzay-zaman ile ilişkilendirilmesidir. Burada, Tiwari-Nayak-Rai-Singh (TNRS) metodu olarak isimlendirilen bu çözüm üretme tekniği geliştirilerek, GG kuramı kapsamında çözümü bilinen bazı uzay-zamanların kolaylıkla BD çözümleri elde edilecektir.

Öte taraftan, TNSR metodu ile kozmolojik sabitli GG alan denklemleri arasında bir ilişki belirlenememiştir. Bu kapsamda  $f(R)$  teorisi ile kozmolojik sabitli GG alan denklemleri arasındaki ilişki ele alınacaktır.

### 5.1. Ernst Denklemleri

Durağan, aksenal simetrik uzay-zaman metriğinin kanonik biçimi kullanılarak elde edilen alan denklemleri, karmaşık olmaları dolayısıyla, BD kuramı için Ernst denklemini elde etme sürecini zorlaştırmaktadır. Bu güçlüğü aşmak için, bu uzay-zaman metriğini daha uygun bir biçimde yazmanın bu süreci kolaylaştırabileceği düşünüldü. Bunun sonucu olarak aşağıda verilen ve daha önce [128] makalesinde sunulan metrik formu gözönüne alındı,

$$ds^2 = -\alpha e^{\Omega/2} (dt + \mathcal{A}d\varphi)^2 + \alpha e^{-\Omega/2} d\varphi^2 + \frac{e^{2\nu}}{\sqrt{\alpha}} (dx_1^2 + dx_2^2). \quad (5.1)$$

Bu metriğin ve metrik (2.6)'in metrik fonksiyonları arasında

$$U = \frac{\Omega}{4} + \frac{1}{2} \ln \alpha, \quad K = \frac{\Omega}{4} + \nu + \frac{1}{4} \ln \alpha, \quad W = \alpha. \quad (5.2)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Aynı zamanda BD alan denklemleri çözümü için bu metrik;

$$ds^2 = -\alpha_B e^{\Omega_B/2} (dt + \mathcal{A}_B d\varphi)^2 + \alpha_B e^{-\Omega_B/2} d\varphi^2 + \frac{e^{2\nu_B}}{\sqrt{\alpha_B}} (dx_1^2 + dx_2^2) \quad (5.3)$$

B alt indisi ile temsil edilirse, BD alan denklemleri eşitlikler (4.2) ve (4.4)'den;

$$Gdn_{x_1}^{x_1} + Gdn_{x_2}^{x_2} = \nabla^2(\alpha_B \phi) = 0, \quad (5.4)$$

$$Gdn_t^\varphi = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \left( \alpha_B \phi e^{\Omega_B} \vec{\nabla} \mathcal{A}_B \right) + 2e^{\Omega_B/2} [\mathcal{A}_B \left( \vec{\nabla} A_{0B} \right)^2 - \vec{\nabla} A_{0B} \vec{\nabla} A_{3B}] = 0, \quad (5.5)$$

$$Gdn_t^t - Gdn_\varphi^\varphi = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \left( \alpha_B \phi \vec{\nabla} \Omega_B \right) + \mathcal{A}_B \vec{\nabla} \cdot \left( \alpha_B \phi e^{\Omega_B} \vec{\nabla} \mathcal{A}_B \right) + \alpha_B \phi e^{\Omega_B} \left( \vec{\nabla} \mathcal{A}_B \right)^2 + 2e^{\frac{\Omega_B}{2}} \left[ \mathcal{A}_B^2 \left( \vec{\nabla} A_{0B} \right)^2 - \left( \vec{\nabla} A_{3B} \right)^2 \right] - 2e^{-\frac{\Omega_B}{2}} \left( \vec{\nabla} A_{0B} \right)^2 = 0 \quad (5.6)$$

$$Gdn_t^t + Gdn_\varphi^\varphi = \frac{1}{2} \alpha_B \phi e^{\Omega_B} \left( \vec{\nabla} \mathcal{A}_B \right)^2 - \frac{1}{8} \alpha_B \phi \left( \vec{\nabla} \Omega_B \right)^2 + \frac{1}{2} \nabla^2(\alpha_B \phi) - 2\alpha_B \phi \nabla^2 \nu_B - \frac{3}{2} \alpha_B \nabla^2 \phi - \omega \alpha_B \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{\phi} = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{e^{-2\nu}}{\sqrt{\alpha_B}} (2\omega + 3) \vec{\nabla} \cdot \left( \alpha_B \vec{\nabla} \phi \right) = 0, \quad (5.8)$$

olarak elde edilirken, Maxwell alan denklemleri için ise;

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ e^{-\Omega_B/2} \vec{\nabla} A_{0B} + \mathcal{A}_B e^{\Omega_B/2} \left( \vec{\nabla} A_{3B} - \mathcal{A}_B \vec{\nabla} A_{0B} \right) \right] = 0, \quad (5.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ e^{\Omega_B/2} \left( \vec{\nabla} A_{3B} - \mathcal{A}_B \vec{\nabla} A_{0B} \right) \right] = 0. \quad (5.10)$$

eşitlikleri yazılabilir. Yeni bir potansiyel tanımlanarak eşitlik (5.10) ;

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} \tilde{A}_{3B} &= e^{\Omega_B/2} (\vec{\nabla} A_{3B} - \mathcal{A}_B \vec{\nabla} A_{0B}), \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} \tilde{A}_{3B} &= e^{\Omega_B/2} (\vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} A_{3B} - \mathcal{A}_B (\vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} A_{0B})), \\ \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} A_{3B} \right] &= \vec{\nabla} \cdot \left[ \mathcal{A}_B (\vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} A_{0B}) - e^{-\Omega_B/2} \vec{\nabla} \tilde{A}_{3B} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

olarak ifade edilebilir. Burada,  $\vec{e}^\varphi$  düz uzay taban vektörleri seti  $\{\vec{e}^{x_1}, \vec{e}^\varphi, \vec{e}^{x_2}\}$  karşılık gelmektedir. Yeni potansiyel  $\tilde{A}_{3B}$  kullanılarak Maxwell alan denklemi (5.9) için;

$$\vec{\nabla} \left[ e^{-\Omega_B/2} \vec{\nabla} A_{0B} + \mathcal{A}_B (\vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} \tilde{A}_{3B}) \right] = 0 \quad (5.12)$$

yazılabilir. Kompleks yeni bir potansiyel  $\Phi = A_{0B} + i\tilde{A}_3$  atanarak Maxwell alan denklemlerini

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ e^{-\Omega_B/2} \vec{\nabla} \Phi - i\mathcal{A}_B \vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} \Phi \right] = 0 \quad (5.13)$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. Bu eşitliğin reel kısmı eşitlik (5.9)'a, karmaşık kısmı ise eşitlik (5.10)'a karşılık gelmektedir. BD alan denklemlerinden eşitlik (5.5) yeni tanımlanan potansiyel ile;

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ e^{\Omega_B} \phi \alpha_B \vec{\nabla} \mathcal{A}_B - 2\vec{e}_\varphi \times \text{Im}(\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \right] = 0 \quad (5.14)$$

haline gelir. Burada  $\Phi^* = A_{0B} - i\tilde{A}_3$  olarak  $\Phi$ 'nin kompleks eşleştiğidir. Tekrar bir potansiyel tanımlayarak eşitlik (5.14)'ü;

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} h &= e^{\Omega_B} \phi \alpha_B \vec{\nabla} \mathcal{A}_B - 2\vec{e}_\varphi \times \text{Im}(\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} h &= e^{\Omega_B} \phi \alpha_B \vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} \mathcal{A}_B - 2\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\varphi \times \text{Im}(\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{\nabla} \mathcal{A}_B &= \frac{-e^{-\Omega_B}}{\phi \alpha_B} \left( \vec{\nabla} h + 2 \text{Im}(\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

olarak yazmak mümkündür. Böylece, BD alan denklemi (5.5);

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{e^{-\Omega_B}}{\phi \alpha_B} \left( \vec{\nabla} h + 2 \text{Im}(\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \right) \right] = 0. \quad (5.16)$$

eşitliğine dönüşür. Aynı zamanda, yeni bir fonksiyon  $f = e^{\Omega_B/2} \alpha_B \phi$  belirlenerek, eşitlik (5.6),

$$\begin{aligned} \frac{f}{\alpha_B \phi} \vec{\nabla} \cdot (\alpha_B \phi \vec{\nabla} f) - \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} f - \frac{f^2}{\alpha_B \phi} \nabla^2 (\alpha_B \phi) &= 2f \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi^* \\ &- [\vec{\nabla} h + 2 \text{Im}(\Phi^* \vec{\nabla} \Phi)]^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

ile ifade edilebilir. Son olarak ise, kompleks bir fonksiyon  $\varepsilon = f - |\Phi|^2 + ih$  ile, BD alan denklemleri ve Maxwell denklemleri;

$$(\text{Re } \varepsilon + |\Phi|^2) \frac{1}{\alpha_B \phi} \vec{\nabla} \cdot (\alpha_B \phi \vec{\nabla} \varepsilon) = (\vec{\nabla} \varepsilon + 2\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{\nabla} \varepsilon, \quad (5.18)$$

$$(\text{Re } \varepsilon + |\Phi|^2) \frac{1}{\alpha_B \phi} \vec{\nabla} \cdot (\alpha_B \phi \vec{\nabla} \Phi) = (\vec{\nabla} \varepsilon + 2\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{\nabla} \Phi, \quad (5.19)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikler Ernst denklemlerinin [59] BD skaler alanı için genelleştirilmiş halleridir. BD alan denklemlerinden (5.5) eşitliği, eşitlik (5.18)'in kompleks kısmına, (5.6) ise eşitlik (5.18)'in reel kısmına karşılık gelmektedir. Öte taraftan, eşitlik (5.19)'un reel kısmı Maxwell denklemi (5.9)'a, kompleks kısmı ise eşitlik (5.10)'a eşittir.

Yukarıdaki (5.18) ve (5.19) denklemleri bu bölümde neden kanonik durağan, eksene simetrik uzay zaman metriğini değil de (5.1) ile verilen standart biçimde olmayan metriğin kullanıldığı sorusunun yanıtıdır. BD kuramı için Ernst denklemleri olan (5.18) ve (5.19) eşitliklerini veren (5.4-5.8) eşitlikleri ve onu izleyen denklemlerde hiçbir şekilde BD skaleri  $\phi$  tek başına bulunmamakta her zaman  $\alpha_B$  fonksiyonu ile çarpılmış olarak gelmektedir. Dolayısıyla elde edilen Ernst denklemleri (5.18) ve (5.19) daki  $\alpha_B \phi$  çarpımı ve diğer metrik fonksiyonları  $\Omega_B, \mathcal{A}_B$  ve ayar fonksiyonu  $A_B$  için

$$\alpha_B \phi = \alpha, \quad \Omega_B = \Omega, \quad A_B = A, \quad \mathcal{A}_B = \mathcal{A}, \quad (5.20)$$

eşleştirmeleri yapılırsa, bu fonksiyonlarda GG kuramının karşılık gelen Ernst denklemlerinin herhangi bir çözümü seçilirse, BD kuramı için elde edilen (5.18) ve (5.19) denklemler ile verilen Ernst denklemleri *aynen* GG kuramının Ernst denklemlerine, yani

$$(\text{Re } \varepsilon + |\Phi|^2) \frac{1}{\alpha} \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \varepsilon) = (\vec{\nabla} \varepsilon + 2\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{\nabla} \varepsilon, \quad (5.21)$$

$$(\text{Re } \varepsilon + |\Phi|^2) \frac{1}{\alpha} \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \Phi) = (\vec{\nabla} \varepsilon + 2\Phi^* \vec{\nabla} \Phi) \cdot \vec{\nabla} \Phi, \quad (5.22)$$

dönüşür. Dolayısıyla, seçilen metrik biçimi, BD kuramı için Ernst denklemini elde etme sürecini son derece kolaylaştırmaktadır. Burada bahsetmek gerekir ki, BD kuramı çerçevesinde Ernst denklemlerini elde etmek daha önce de, özellikle Einstein

çerçevesinde ve metriğin kanonik biçimi kullanılarak [60–62], çalışılmış bir konudur. Ancak bu çalışmada seçilen metrik biçimi bu süreci son derece kolaylaştırmaktadır.

Öte taraftan, eşitlik (5.4), kanonik çözüm olan  $\alpha = \rho$  seçilmesine de olanak sağlamaktadır. Bu seçim ile Ernst denklemlerini;

$$(\varepsilon + \varepsilon^* + |\Phi|^2) \tilde{\nabla}^2 \varepsilon = 2 \left( \vec{\nabla} \varepsilon + 2\Phi^* \vec{\nabla} \Phi \right) \cdot \vec{\nabla} \varepsilon, \quad (5.23)$$

$$(\varepsilon + \varepsilon^* + |\Phi|^2) \tilde{\nabla}^2 \Phi = 2 \left( \vec{\nabla} \varepsilon + 2\Phi^* \vec{\nabla} \Phi \right) \cdot \vec{\nabla} \Phi, \quad (5.24)$$

olarak yazmak mümkündür. Burada,  $\varepsilon^*$ ,  $\varepsilon$  potansiyelinin kompleks eşleniği ve  $\tilde{\nabla}^2$  üç boyutlu düz silindirik koordinatlar için Laplace operatörüdür. Elde edilen denklemler, Maxwell alanı içeren GG kuramının Ernst denklemlerinin aynısıdır [58, 59]. Yani, BD teorisi için Ernst denklemlerine metriği (5.1) formunda alarak ulaşmak daha kolaydır. Aslında, yukarıda verilen Ernst denklemleri, BD teorisi için Einstein çerçevesinde çalışılmış [60–62] ve bazı tam çözümlere bu denklemlerin integrali alınarak ulaşılmıştır. Aynı zamanda, literatürde Einstein çerçevesinden Jordan çerçevesine geçmek için verilen dönüşümler ile de BD teorisi çözümleri elde edilebilir. Bu tezde, literatürde çok farklı koordinatlarda çözümlerin mevcut olmasından dolayı,  $W \neq \rho$  durumlarını da içermek üzere, daha genel olan,  $\alpha \neq \rho$  durumuna karşılık gelen (5.21), (5.22) Ernst denklemlerini göz önüne alınmıştır.

Ernst yöntemi kullanılarak, BD kuramı çerçevesinde yeni çözümler elde etmek üzere eşitlikler (5.18) ve (5.19)'u çözen Ernst potansiyelleri için, BD alan denklemleri (5.4-5.6)'ninde integre edilerek tüm ve aranan çözüme uygun çözümün elde edilmesi gereklidir. Yukarıda da bahsedildiği gibi, elde edilen Ernst denklemleri GG için olan Ernst denklemleriyle aynı olduğundan, GG için çözüm olan Ernst denklemleri BD teorisi için de çözümdür. Ancak, eşitlik (5.4) 'de  $\alpha_B$  ve  $\phi$  için seçilen çözümün (5.8) eşitliğini de sağlaması gerekir. Öte taraftan, (5.8) eşitliğini sağlayan  $\alpha_B$  ve  $\phi$  fonksiyonları kullanılarak eşitlik (5.7)'nin integralinin alınması ve metrik fonksiyonu  $\nu_B$ 'nun elde edilmesi gereklidir. Bu nedenle Ernst denklemleri kullanılarak BD teorisi için çözüm üretmek biraz uğraştırıcı olmaktadır. Bunun yerine daha kolay bir metod ile çözümler elde edilecektir.

## 5.2. Genişletilmiş Tiwari-Nayak-Rai-Singh Metodu

Bir önceki bölümde, durağan, eksenel simetrik uzay-zamanın hem metrik (2.6) hem de metrik (5.1) ile ifade edilebileceği ve metrik fonksiyonları arasında eşitlik (5.2) ilişkileri olduğu gösterilmiştir. Bu dönüşümlerin varlığı, Ernst denklemlerinin yanı sıra başka çözüm üretme yöntemlerinin de ele alınabileceğini göstermektedir. Bu bölümde, literatürde tek parametrelili çözümü, metrik (2.6) formunda bulunan Tiwari-Nayak-Sighn-Rai metodu ele alınacaktır.

Burada ele alınacak teknik, Einstein(-Maxwell) çözümü bilinen bir statik veya durağan eksenel simetrik çözümün, bu uzay-zaman ile aynı simetriyi paylaşan, Brans-Dicke(-Maxwell) teorisindeki çözümünün üretilmesini sağlayacaktır. Tekniği oluşturmak için ise şu yol izlenecektir: İlk olarak, metrik (5.1) formundaki bir uzay-zaman için, skaler alanı ( $\phi$ ) ve Maxwell alanı bu uzay-zaman ile aynı simetriye sahip ve metrik fonksiyonları  $\alpha_B, \Omega_B, \mathcal{A}_B, \nu_B, A_B, \phi$  olarak ifade edilen metriğin BD(-Maxwell) alan denklemleri elde edilir. Aynı metrik ve metrik fonksiyonları  $\alpha, \Omega, \mathcal{A}, \nu, A$  olarak ele alınan Einstein(-Maxwell) alan denklemleri, BD(-Maxwell) alan denklemleriyle karşılaştırılarak, BD(-Maxwell) alan denklemlerinin, metrik fonksiyon dönüşümleri yapılarak Einstein(-Maxwell) alan denklemlerine indirgenmesi sağlanır.

BD(-Maxwell) alan denklemleri (5.4-5.10)'den (5.5) ve (5.6) veya bunların eşdeğerleri (5.18) ve (5.19) eşitliklerinden metrik fonksiyonu  $\alpha_B (= W_B)$ 'nin her zaman skaler alan  $\phi$  ile çarpım halinde olduğu ilk göze çarpan durumdur. Bu nedenle, daha önce de bahsedildiği gibi  $\alpha = \alpha_B \phi$  olarak seçilebilir. Bu seçim ile,  $\alpha_B = \alpha^k$  ve  $\phi = \alpha^{1-k}$ ,  $k$  bir sabit olmak üzere ele alınır, (5.4) ve (5.8) eşitliklerini sağlamaktadır. Bu seçimin keyfi bir seçim olduğu ve daha genel seçimlerin mevcut olabileceği düşünülse de aslında bu seçim tüm alan denklemlerini sağlayan muhtemelen tek seçimdir. Bunu görmek üzere metrik fonksiyonu  $\alpha$ 'nın kanonik değeri  $\alpha = \rho$  durumu göz önüne alındığında, BD skaler alanının,  $\phi = f(\rho)$  şeklinde bir fonksiyon olması gerektiği görülmektedir. Bu durumda  $\alpha_B = \frac{\rho}{f(\rho)}$  olacağından, eşitlik (5.8)'den

$$\left( \frac{\rho f'(\rho)}{f(\rho)} \right)' = 0 \quad (5.25)$$

elde edilir ve buradan  $f(\rho) = \rho^{c_0}$  sonucuna ulaşılır. Bu tezde bu integral sabiti  $c_0 = 1 - k$  olarak ele alınmıştır. Diğer alan denklemleri de kullanılarak daha detaylı bir analiz ile aşağıdaki teoreme ulaşılmıştır;

**Teorem 1** *Einstein ya da Einstein Maxwell kuramının (5.1) biçiminde bir metriğe sahip olan, Einstein-Maxwell durumu için muhtemel bir  $A = A_0(\rho, z)dt + A_3(\rho, z)d\varphi$  Maxwell alanına sahip olan herhangi bir çözümünden, aşağıdaki dönüşümler kullanılarak bu çözümlere karşılık gelen BD ya da BD-Maxwell çözümü elde edilebilir:*

$$\alpha_B = \alpha^k, \quad \phi = \alpha^{1-k}, \quad (5.26)$$

$$\mathcal{A}_B = \mathcal{A}, \quad A_B = A, \quad \Omega_B = \Omega, \quad (5.27)$$

$$\nu_B = \nu + \frac{2\omega - (2\omega + 3)k}{4} \ln \phi. \quad (5.28)$$

Bu dönüşümlerden (5.27) eşitliği BD alan denklemlerinin GG için Ernst denklemini verme koşulu olan (5.20) eşitliğinden elde edilmiştir. (5.26) ise hem Ernst denklemleri hem de Ernst denklemlerine girmeyen BD skaler alan denklemleri (4.4) birlikte kullanılarak  $\alpha = \alpha_B \phi$  eşitliği ve (5.25) denklemleri yardımı ile yukarıda elde edilmiştir. Böylece, teoremi ispatlamak için sadece son eşitliğin ispatlanması yeterlidir. Bunun için ise son dönüşüm haricindeki dönüşümler alan denklemlerinde yerine konularak yukarıdaki eşitliğin doğru olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla, durağan ve aksel simetrik uzay-zaman geometrilerini temsil eden metriği (5.1) şeklinde standart olmayan bir biçimde ifade etmek, GG çözümlerini BD çözümlerine dönüştüren dönüşümleri elde etme sürecini son derece kolaylaştırmıştır. Uzay-zaman metriği biçimini bu şekilde seçmenin avantajı, bu koordinatlarda BD ve GG Ernst denklemlerinin kolaylıkla elde edilebilmesi ve Ernst denklemleri ile ilgili çeşitli daha ileri çözüm üretme tekniklerinin BD kuramına kolaylıkla uygulanabilmesidir. Buradaki tek sıkıntı, metriğin bu formunun pek fazla bilinmemesidir. Bundan dolayı, elde edilen sonuçları literatürde mevcut olan sonuçlar ile karşılaştırabilmek ve ayrıca yukarıdaki yöntemi kullanarak yeni çözümler elde edebilmek için, yukarıdaki teoremi metriğin standart biçimi (2.6) kullanarak yeniden ifade edilmelidir. Bu iki metrik biçiminin metrik fonksiyonları arasındaki ilişkiyi (5.2) kullanarak yukarıdaki teorem

aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

**Teorem 2** *Einstein ya da Einstein Maxwell kuramının (2.6) biçiminde bir metriğe sahip olan ve Einstein-Maxwell durumu için muhtemel bir  $A = A_0(\rho, z)dt + A_3(\rho, z)d\varphi$  Maxwell alanına sahip olan herhangi bir çözümünden, aşağıdaki dönüşümler kullanılarak bu çözümlere karşılık gelen BD ya da BD-Maxwell çözümü elde edilebilir:*

$$\begin{aligned} W_B &= W^k, & \phi &= W^{1-k}, & \mathcal{A}_B &= \mathcal{A}, & A_B &= A, \\ U_B &= U - \frac{1}{2} \ln \phi, \\ K_B &= K + \frac{2\omega - 1 - (2\omega + 3)k}{4} \ln \phi. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Yukarıdaki yöntemi kullanırken karşılaşılabilecek tek muhtemel zorluk, durağan, ek-senel simetrik çözümler birçok farklı koordinat sisteminde ifade edilebileceği için, kullanılmak istenen GG çözümlerini (2.6) metriği biçimine getirmektir. Yukarıdaki kuram ile elde edilen BD çözümüne karşılık gelen uzay-zaman çizgi elemanı ise aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} ds_{JBD}^2 &= \phi^{-1} \left[ -e^{2U} (dt + \mathcal{A}d\varphi)^2 + e^{2(K-U)} \phi^{(1-k)(\omega+3/2)} (dx_1^2 + dx_2^2) \right. \\ &\quad \left. + e^{-2U} W^2 d\varphi^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Bu aşamada artık yukarıda ifade edilen sonuçlar ile literatürdeki sonuçlar karşılaştırılabilir. Aslında, yukarıdaki teoremde ifade edilen yöntem, daha kısıtlı bir biçimi ile [69, 70], yani  $K_B = K$  özel durumu için, literatürde bilinmekte idi. Bu özel koşul, yukarıdaki teorem (1) ve (2) de serbest bir parametre olarak tanımlanan  $k$  sabitinin daha önceki çalışmalarda bir serbest parametre olmayıp, BD parametresi olan  $\omega$ 'ya  $k = (2\omega - 1)/(2\omega + 3)$  eşitliği ile belirlenmesine yol açmaktadır. Bu  $K_B = K$  kısıtlaması altında, bu yöntem kullanılarak, BD için Kerr-Newman-tipi çözümler [43] ve Bonnor tipi kara di-hole çözümleri [71] daha önce tartışılmıştır. Ayrıca, benzer bir yöntem,  $W = \rho$  özel durumu için, BD kuramında Einstein-Rosen tipi kütleçekim dalga çözümlerinin elde edilmesinde kullanılmıştır [129].

### 5.2.1. Einstein Çerçevesinde Genişletilmiş Tiwari-Nayak-Rai-Singh Metodu

Jordan çerçevesinde ifade edilen BD eylemi (4.1),

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}, \quad \psi = \left(\omega + \frac{3}{2}\right) \ln \phi \quad (5.31)$$

ile verilen konformal dönüşüm uygulanırsa, Einstein çerçevesindeki biçimi olan

$$S_{EBD} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left( \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (5.32)$$

eylemine dönüşür. Burada  $8\pi G = 1$  alınmıştır. Bu dönüşümün bir önemli özelliği, Lagranjiyendeki Maxwell teriminin dört boyutta bir konformal değişmez olmasıdır. Dolayısıyla, diğer madde alanlarından farklı olarak, bu dönüşümler sonucunda skaler alan Maxwell alanına bağlanmamaktadır. Bundan dolayı, Einstein çerçevesinde bir Maxwell alanı içeren BD kuramı, Einstein-Maxwell-skaler çözümlerine eşdeğerdir. Bu tespitlerden sonra, yukarıdaki teoremlerle verilen yöntemin Einstein çerçevesindeki biçimi tartışılacaktır. Einstein-Maxwell boşluk denklemlerinin herhangi bir verilen durağan, aksel simetrik çözümünden buna karşılık gelen BD-Maxwell çözümü teorem (2)'deki dönüşümler aracılığıyla elde edilebileceği tartışılmıştı. Eğer yukarıda (5.31) ile verilen dönüşümler (5.30) metriğine uygulanırsa, Einstein çerçevesindeki BD-Maxwell çözümünü veren çizgi elemanı ve skaler alan

$$ds_{EBD}^2 = -e^{2U} (dt + \mathcal{A}d\varphi)^2 + e^{2(K-U)+(1-k)\psi} (dx_1^2 + dx_2^2) + e^{-2U} W^2 d\varphi^2, \quad (5.33)$$

$$\psi = \frac{(1-k)(2\omega+3)}{2} \ln W, \quad (5.34)$$

halini alır. Buradan şu teorem elde edilir;

**Teorem 3** *Einstein ya da Einstein Maxwell kuramının (2.6) biçiminde bir metriğe sahip olan ve Einstein-Maxwell durumu için muhtemel bir  $A = A_0(\rho, z)dt + A_3(\rho, z)d\varphi$  Maxwell alanına sahip olan herhangi bir çözümünden, aşağıdaki dönüşümler kullanılarak bu çözümlere karşılık gelen Einstein çerçevesinde BD ya da BD-*

*Maxwell (Einstein-Maxwell-Skaler) çözümü elde edilebilir:*

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_B &= W, & \psi &= \frac{(1-k)(2\omega+3)}{2} \ln W, \\
\tilde{\mathcal{A}}_B &= \mathcal{A}, & \tilde{A}_B &= A, \\
\tilde{U}_B &= U, & \tilde{K}_B &= K + \frac{1-k}{2} \psi.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Bu aşamada, daha önce [68] çalışmasında, Einstein-Maxwell-skaler kuramı için, bu tezde kullanılan notasyon cinsinden  $K$  ve  $\psi$  nin sağladığı bir diferansiyel denklem çözümünü gerektiren bir çözüm üretme tekniğinin mevcut olduğu not edilmelidir.

### 5.3. Kozmolojik Sabitli Einstein Alan Denklemleri ve Metrik $f(R)$ Teorisi Alan Denklemleri Arasındaki İlişki

Durağan, aksenal simetrik metrik (2.6) için kozmolojik sabitli GG alan denklemleri (2.46-2.49) ile ve yine durağan, aksenal simetrik metrik (4.26) için  $f(R)$  alan denklemleri (4.27-4.30) eşitlikleri ile verilmiştir. Herhangi bir kozmolojik sabitli GG çözümü bilinen bir uzay-zamanın,  $f(R)$  çözümünü elde etmek için alan denklemlerini yeniden çözmek yerine, metrik fonksiyonlarını ve elektromanyetik bir-form katsayılarını birbirine benzeterek sonucu elde etmek çok daha kolay bir yoldur. Bu durumda, eşitlik (2.46) ile eşitlik (4.27) incelendiğinde, eğer metrik fonksiyonları  $W = W_f$ ,  $U = U_f$ ,  $K = K_f$  seçilirse kozmolojik sabit için, sabit Ricci skalerli durum için;

$$\Lambda = \frac{f(R_0)}{2(f'(R_0) - 1)} \tag{5.36}$$

eşitliği elde edilir. Aynı zamanda, bu sonuç eşitlik (2.48) ve eşitlik (4.29) incelendiğinde de elde edilmektedir. Öte taraftan, eşitlik (2.47) ile eşitlik (4.28) birlikte ele alındığında, metrik fonksiyonlarının GG ve  $f(R)$  için aynı seçilmesi durumunda, elektromanyetik bir-form katsayıları için,  $A_{0f} = \frac{A_0}{\sqrt{1+f'(R_0)}}$ ,  $A_{3f} = \frac{A_3}{\sqrt{1+f'(R_0)}}$  eşitlikleri elde edilir. Bu sonuç, eşitlik (2.49) ile eşitlik (4.30) için ve GG Maxwell eşitlikleri (4.13,4.14) ve  $f(R)$  Maxwell eşitlikleri (4.31,4.32) için de doğru sonucu vermektedir.

Elde edilen bu sonuçları şu şekilde özetlemek mümkündür;

**Teorem 4** *Einstein ya da Einstein Maxwell kuramının (2.6) biçiminde bir metriğe sahip olan ve Einstein-Maxwell durumu için muhtemel bir  $A = A_0(\rho, z)dt + A_3(\rho, z)d\varphi$  Maxwell alanına sahip olan herhangi bir kozmolojik sabitli çözümlerinden, aşağıdaki dönüşümler kullanılarak bu çözümlere karşılık gelen  $f(R)$  ya da  $f(R)$ -Maxwell çözümü elde edilebilir:*

$$\begin{aligned} W_f &= W, & U_f &= U, & K_f &= K, & \mathcal{A}_f &= \mathcal{A}, \\ A_{f0} &= \frac{A_0}{\sqrt{1 + f'(R_0)}}, & A_{f3} &= \frac{A_3}{\sqrt{1 + f'(R_0)}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Burada verilen GG metrik fonksiyonlarının,  $f(R)$  çözümleri elde edilirken değiştirilerek  $f(R)$  formunda yazılması gerekebilir. Daha önce yapılan  $f(R)$  kara delik çözümlerinde, ele alınan uzay-zaman için  $f(R)$  alan denklemleri çözülerek metrik fonksiyonları elde edilmiştir [125, 130, 131]. Yukarıda Teorem 4 ile verilen dönüşümler kullanılarak da aynı çözümler elde edildiğinden, bu çözüm üretme tekniği  $f(R)$  çözümlerinin elde edilmesinde büyük kolaylık sağlamaktadır.

Öte taraftan, eşitlik (4.18) ile kozmolojik sabit için elde edilen eşitlik (5.36) karşılaştırıldığında

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{f'(R_0) - 1} = 4\Lambda \quad (5.38)$$

sabit Ricci skaleri  $R_0$  ve kozmolojik sabit  $\Lambda$  arasındaki ilişki elde edilir.



## 6. BAZI YENİ WEYL-TİPİ BD ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, daha önce Bölüm 2'de Einstein veya Einstein-Maxwell çözümleri verilen Weyl-tipi çözümlerin BD veya BD-Maxwell çözümleri dönüşümler (5.29) kullanılarak elde edilecektir. Weyl-tipi uzay-zamanlar, durgun eksenel simetrik çözümler olduklarından dolayı, durağan eksenel simetrik metrikten,  $\mathcal{A} = 0$ ,  $W = \rho$  eşitlikleriyle elde etmek mümkündür. (5.29) ile verilen dönüşümler kullanılırsa;

$$\mathcal{A}_B = 0, \quad W_B = \rho^k, \quad \phi = \rho^{1-k} \quad (6.1)$$

halini alacaklardır ve diğer metrik fonksiyonlarında aynı dönüşüm denklemlerinden kolaylıkla elde edilebileceklerdir.

### 6.1. Curzon-Chazy BD Çözümü

Curzon-Chazy Einstein çözümü için metrik fonksiyonları (2.54) eşitliği ile verilmiştir. Aynı zamanda, BD metrik fonksiyonu ve skaler alanın  $W_B = \rho^k$ ,  $\phi = \rho^{1-k}$  olduğu bilindiğinden, diğer metrik fonksiyonları da dönüşümler (5.29) ile;

$$U_B = - \left( \frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{1-k}{2} \ln \rho \right) \quad (6.2)$$

$$K_B = - \left( \frac{m^2 \rho^2}{2(\rho^2 + z^2)^2} + \frac{(k-1)(2\omega - 1 - (2\omega + 3)k)}{4} \ln \rho \right) \quad (6.3)$$

olarak elde edilir. BD metrik fonksiyonları ile metrik yeniden düzenlendiğinde

$$ds_{CC}^2 = \rho^{k-1} \left[ - e^{-\frac{2m}{\sqrt{\rho^2+z^2}}} dt^2 + \rho^2 e^{\frac{2m}{\sqrt{\rho^2+z^2}}} d\varphi^2 + \rho^{(1-k)^2(\omega+3/2)} e^{\frac{2m}{\sqrt{\rho^2+z^2}} - \left(\frac{m\rho}{\rho^2+z^2}\right)^2} (d\rho^2 + dz^2) \right], \quad (6.4)$$

şeklinde CC uzay-zamanı için BD çözümüne ulaşılır. Daha önceki çalışmalarda CC uzay-zamanın BD çözümleri daha sınırlı çözüm olan  $K_B = K$  için elde edilmiştir [132]. CC uzay-zamanı BD çözümlerinin  $k \rightarrow 1$  değeri için Einstein çözümlerine indirgendiği açıkça görülmektedir.

### 6.1.1. CC-BD Dairesel Jeodezikleri

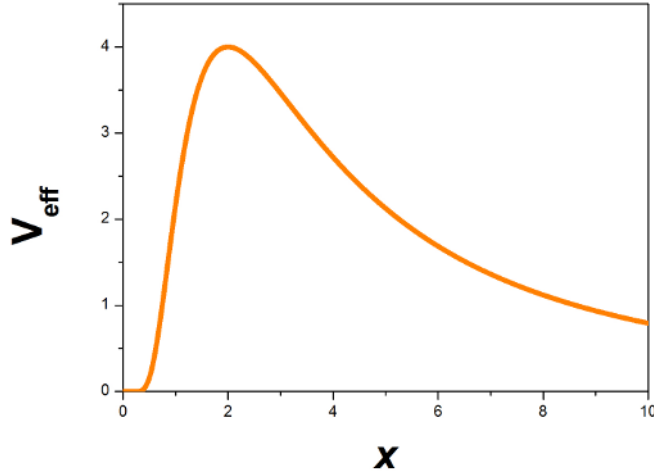
CC uzay-zamanı BD çözümlerinin ekvator düzleminde dairesel jeodezik denklemlerine eşitlik (2.88)'te metrik fonksiyonları kullanılarak ulaşılır. Öncelikle ışık-tipi ( $\epsilon = 0$ ) parçacıkların etkin potansiyeli;

$$V_{eff} = \frac{L^2 e^{-4m/\rho}}{\rho^2} \quad (6.5)$$

olurken  $\ell = L/m$  ve  $x = \rho/m$  dönüşümleriyle bu potansiyel,

$$V_{eff} = \frac{\ell^2 e^{-4/x}}{x^2} \quad (6.6)$$

haline gelir ve etkin potansiyel  $V_{eff}$ 'in  $x$ 'e bağlı grafiği



**Şekil 6.1** CC metriğinin BD çözümünün, ışık-tipi parçacıkların  $\ell = L/m = 4e$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $x$ 'e bağlı grafiği.

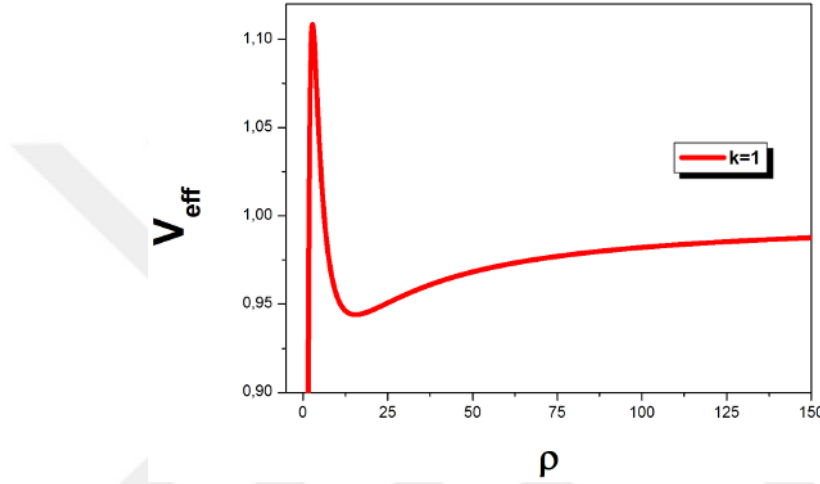
Şekil 6.1 ile elde edilir. Burada, literatürde Einstein çözümü için kullanılan değer olan  $\ell = 4e$  kullanılmış [133] ve ışık-tipi parçacıklar için BD ve Einstein çözümlerinin aynı olduğu bulunmuştur. Kısacası, ışık-tipi parçacıkların hareketlerini BD skaler alanı etkilememektedir. Etkin potansiyel incelendiğinde de BD parametreleri  $k$  ve  $\omega$ 'dan bağımsız olduğu görülmektedir.

CC uzay-zamanının BD çözümünde zaman-tipi ( $\epsilon = -1$ ) parçacıklar için ise etkin

potansiyel;

$$V_{eff} = e^{-2m/\rho} \rho^{k-1} + \frac{L^2 e^{-4m/\rho}}{\rho^2} \quad (6.7)$$

olmaktadır. Zaman-tipi parçacıkların etkin potansiyeli görüldüğü gibi BD parametresi  $k$  değerine bağlıdır. Değişen  $k$  değerleri için etkin potansiyelin  $\rho$ 'ya bağlı grafikleri aşağıda verilmiştir. Bu grafikler [133] çalışmasında Einstein çözümleri için elde edi-



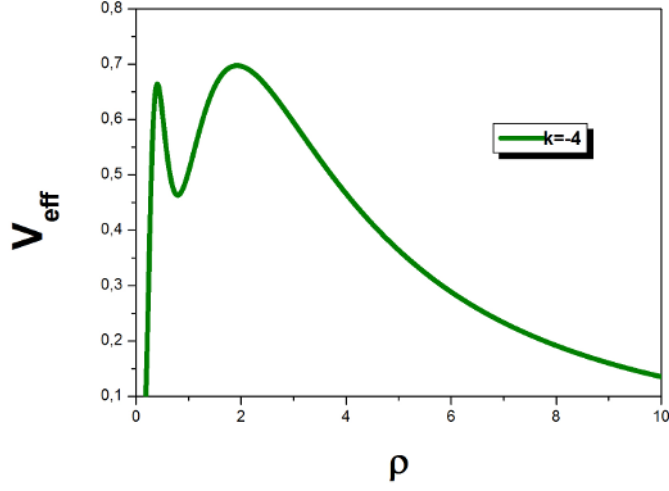
**Şekil 6.2** CC metriği BD çözümünün zaman-tipi parçacıkların  $L = 4.5m$ ,  $m = 1$  ve  $k = 1$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $\rho$ 'ya bağlı grafiği.

len grafik değerleri kullanılarak elde edilmiştir . Ancak Einstein çözümünden farklı olarak  $m$  parametresine de değer verilmiştir.  $L = 4.5m$  ve  $m = 1$  için öncelikle Einstein çözümüne giden  $k = 1$  değeri daha ayrıntılı Şekil 6.2 ile incelendiğinde zaman-tipi parçacıkların bir tane kararsız ve bir tane kararlı dairesel jeodeziklerinin mevcut olduğu görülmektedir.

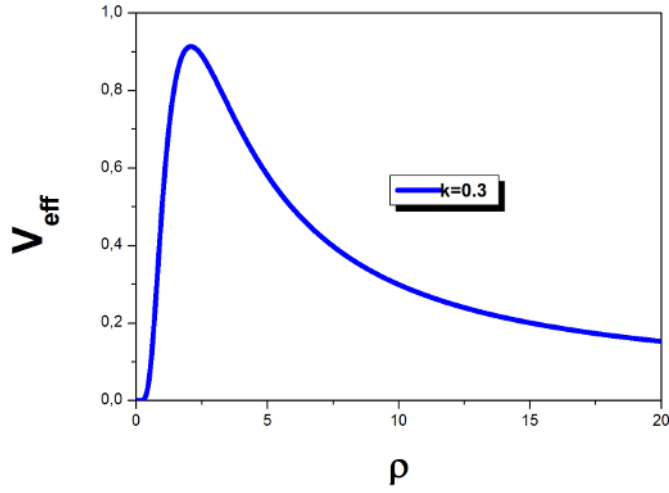
Aynı zamanda, aynı sabitler için Şekil 6.3'de verilen  $k = -4$  değeri için zaman-tipi parçacıkların iki kararsız ve bir kararlı dönüm noktalarına sahip oldukları görülmektedir.

Benzer şekilde, Şekil 6.4 ile verilen  $k = 0.3$  değeri etkin potansiyel grafiğinde ise zaman-tipi parçacıkların, bir tane kararsız dönüm noktası mevcuttur.

Öte taraftan, Şekil 6.5'te  $k = 4$  değeri için CC uzay-zamanının BD çözümünde



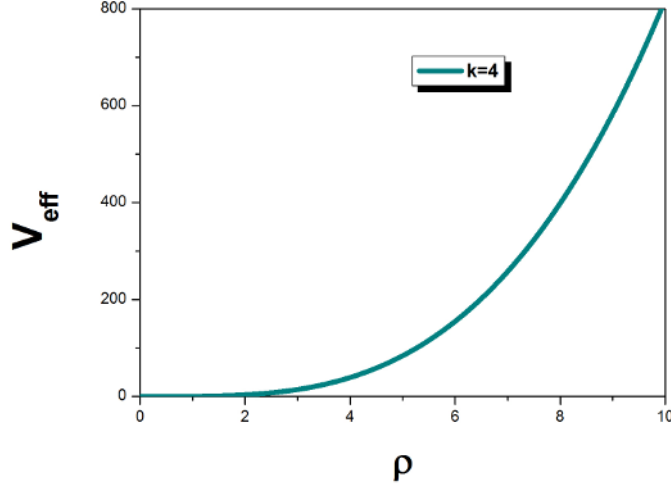
**Şekil 6.3** CC metriği BD çözümünün zaman-tipi parçacıkların  $L = 4.5m$ ,  $m = 1$  ve  $k = -4$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $\rho$ 'ya bağlı grafiği.



**Şekil 6.4** CC metriği BD çözümünün zaman-tipi parçacıkların  $L = 4.5m$ ,  $m = 1$  ve  $k = 0.3$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $\rho$ 'ya bağlı grafiği.

zaman-tipi parçacıklar için dönüm noktası mevcut değildir. Bu sonucu daha da genelleştirilerek,  $k$ 'nın 1'den büyük değerlerinde zaman-tipi parçacıkların CC uzay-zamanının BD çözümünde bir dairesel yörüngede bulunamayacakları söylenebilir.

GG çözümünde tekillik yapısının karışık olduğu CC uzay-zamanının BD çözümü için



**Şekil 6.5** CC metriği BD çözümünün zaman-tipi parçacıkların  $L = 4.5m$ ,  $m = 1$  ve  $k = 0.3$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $\rho$ 'ya bağlı grafiği.

Kretschmann skaleri;

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} = & \rho^{-5-2\omega+4k(1+\omega)-k^2(3+2\omega)} \frac{1}{4(\rho^2+z^2)^6} e^{2m\left(\frac{m\rho^2}{(\rho^2+z^2)^2} - \frac{2}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)} \\
& \times \left( 64m^6\rho^6 - 192m^5\rho^6\sqrt{\rho^2+z^2} + (-1+k)^2 \right. \\
& \times (17+16\omega+8\omega^2+k^4(3+2\omega)^2 - 4k^3(3+5\omega+2\omega^2) \\
& + 6k^2(5+6\omega+2\omega^2) - 4k(7+11\omega+4\omega^2)) \times (\rho^2+z^2)^6 - 32m^3\rho^4(\rho^2+z^2)^{3/2} \\
& \times (\rho^2(19+4\omega-2k(7+4\omega)+k^2(7+4\omega)) + (13-2k+k^2)z^2) + 16m^4\rho^4(\rho^2+z^2) \\
& \times (\rho^2(31+4\omega-2k(7+4\omega)+k^2(7+4\omega)) + (7-4\omega+2k(5+4\omega) \\
& - k^2(5+4\omega))z^2) + 4m^2\rho^2(\rho^2+z^2)^3(\rho^2(127+52\omega+4\omega^2-4k^3(13+55\omega+4\omega^2) \\
& + k^4(15+16\omega+4\omega^2) - 4k(45+33\omega+4\omega^2) + 2k^2(69+62\omega+12\omega^2)) \\
& + (-1+k)^2(-1+4\omega+4\omega^2+k^2(3+8\omega+4\omega^2) - 2k(7+10\omega+4\omega^2))z^2) \\
& - 4(-1+k)^2m\rho^2 \times (\rho^2+z^2)^{7/2}(\rho^2(39+28\omega+4\omega^2-2k(11+14\omega+4\omega^2) \\
& + k^2(15+16\omega+4\omega^2)) + (3+4\omega+4\omega^2-2k(11+4\omega+4\omega^2) \\
& \left. + k^2(15+16\omega+4\omega^2))z^2) \right) \tag{6.8}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradaki ilk terim  $\rho^{-5-\omega+4k(1+\omega)-k^2(3+2\omega)}$  GG çözümünden farklı olan terimdir. Bu nedenle, CC uzay-zamanının BD çözümünün GG'de olan tekilliklerine ek olarak  $\omega > -\frac{3}{2} - \frac{k+1}{(k-1)^2}$  değerleri için  $\rho = 0$ 'da bir tekilliği daha vardır.

## 6.2. İki Parçacıklı Curzon-Chazy BD Çözümü

$z = -b$  ve  $z = b$  noktalarında bulunan iki parçacık için bileşke Curzon-Chazy çözümü eşitlik (2.58) ile verilmiştir. Dönüşüm eşitlikleri (5.29) kullanılarak iki parçacıklı CC uzay-zamanı için BD çözümünün metrik fonksiyonları;

$$U_B = -\frac{m_1}{R_1} - \frac{m_2}{R_2} - \frac{1-k}{2} \ln \rho \quad (6.9)$$

$$K_B = -\frac{\rho^2}{2} \left( \frac{m_1^2}{R_1^4} + \frac{m_2^2}{R_2^4} - \frac{m_1 m_2 (\rho^2 + z^2 - b^2)}{2\rho^2 b^2 R_1 R_2} \right) + \frac{(1-k)(2\omega - 1 - (2\omega + 3)k)}{4} \ln \rho - \frac{m_1 m_2}{2b^2} \quad (6.10)$$

olarak elde edilir. Buradaki sabitler eşitlik (2.60) ile verilmiştir. Bu fonksiyonları metrikte yerine koyarak;

$$ds_{DCC}^2 = \rho^{k-1} \left[ -e^{-\frac{2m_1}{R_1} - \frac{2m_2}{R_2}} dt^2 + \rho^2 e^{\frac{2m_1}{R_1} + \frac{2m_2}{R_2}} d\varphi^2 + \rho^{(1-k)^2(\omega+3/2)} e^{\frac{2m_1}{R_1} + \frac{2m_2}{R_2} - \rho^2 \left( \frac{m_1^2}{R_1^4} + \frac{m_2^2}{R_2^4} - \frac{m_1 m_2 (\rho^2 + z^2 - b^2)}{2\rho^2 b^2 R_1 R_2} \right) - \frac{m_1 m_2}{b^2}} (d\rho^2 + dz^2) \right] \quad (6.11)$$

şeklinde iki parçacıklı CC uzay-zamanının BD çözümüne ulaşılır. Eşit kütleli iki parçacık için ise;

$$ds_{DCC}^2(m_1 = m_2 = m) = \rho^{k-1} \left[ -e^{-2m \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} dt^2 + \rho^2 e^{2m \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} d\varphi^2 + \rho^{(1-k)^2(\omega+3/2)} e^{m \left( \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} - \rho^2 m \left( \frac{1}{R_1^4} + \frac{1}{R_2^4} - \frac{(\rho^2 + z^2 - b^2)}{2\rho^2 b^2 R_1 R_2} \right) - \frac{m}{b^2} \right)} (d\rho^2 + dz^2) \right] \quad (6.12)$$

CC uzay-zamanı BD çözümüne ulaşılır. Bu iki sonuç için de  $k \rightarrow 1$  yaklaşımı çözümleri Einstein çözümüne indirgemektedir.

## 6.3. Zipoy-Voorhees BD Çözümü

Diğer önemli bir Weyl-tipi çözüm olan Zipoy-Voorhees metrik fonksiyonları eşitlik (2.55) ile verilmektedir. Weyl-tipi çözümler için  $\mathcal{A}_B = 0$  ve  $W_B = \rho$ ,  $\phi = \rho^{1-k}$  eşitlikleri de gözönünde bulundurularak, metrik fonksiyonları için BD dönüşümleri

(5.29) kullanılarak;

$$ds_{ZV}^2 = \rho^{k-1} \left[ - \left( \frac{R_+ + R_- - 2\ell}{R_+ + R_- + 2\ell} \right)^\delta dt^2 + \rho^2 \left( \frac{R_+ + R_- - 2\ell}{R_+ + R_- + 2\ell} \right)^{-\delta} d\varphi^2 \right. \\ \left. + \rho^{(1-k)^2(\omega+3/2)} \left( \frac{R_+ + R_- - 2\ell}{R_+ + R_- + 2\ell} \right)^{-\delta} \left( \frac{(R_+ + R_-)^2 - 4\ell^2}{4R_+R_-} \right)^{\delta^2} (d\rho^2 + dz^2) \right] \quad (6.13)$$

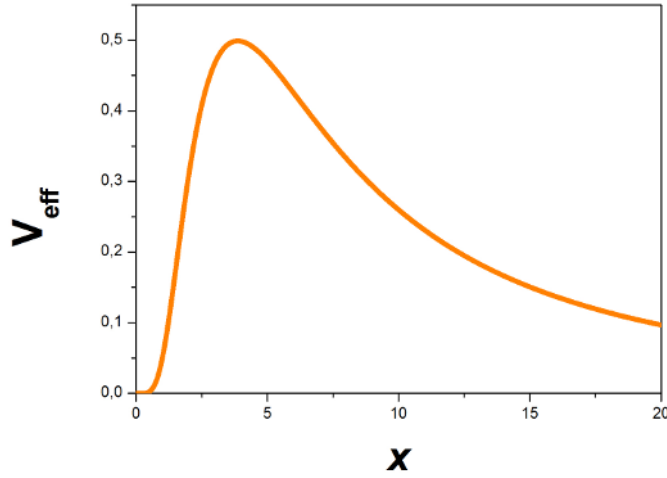
ZV uzay-zamanı BD çözümü elde edilir. Bu çözüm daha önceki çalışmalarda Einstein çerçevesinde ele alınmıştır [134]. Buradaki sabitler eşitlik (2.57) ile verilmiştir. Aynı zamanda, diğer çözümlerde olduğu gibi ZV uzay-zamanı BD çözümü için  $k \rightarrow 1$  GG limitidir.

### 6.3.1. ZV-BD Dairesel Jeodezikleri

ZV uzay-zamanı BD çözümü test parçacıklarının ekvator düzleminde dairesel yörüngelerini eşitlik (2.88) ifadesinde verilen etkin potansiyel kullanılarak incelenebilir. İlk olarak ışık-tipi ( $\epsilon = 0$ ) test parçacıkları için etkin potansiyel,  $x = \rho/\ell$  seçilerek;

$$V_{eff} = \frac{L^2(-1 + \sqrt{x^2 + 1})^{2\delta}(1 + \sqrt{x^2 + 1})^{-2\delta}}{\ell^2 x^2} \quad (6.14)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi ışık-tipi test parçacıklarının etkin potansiyeli BD parametreleri  $k$ ,  $\omega$ 'dan bağımsızdır.



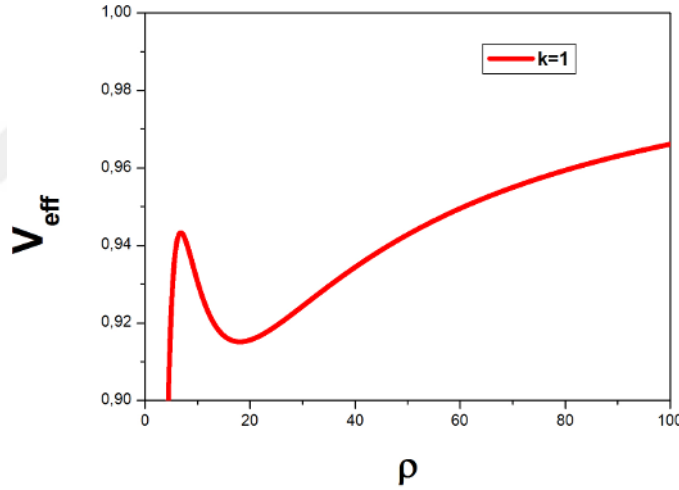
**Şekil 6.6** ZV metriğinin BD çözümünün, ışık-tipi test parçacıklarının  $L = 7.6$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 1$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $x$ 'e bağlı grafiği.

Şekil 6.6, sabitler  $L = 7.6$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 1$  seçilerek, etkin potansiyel  $V_{eff}$ 'in  $x$ 'e bağlı grafiğidir. Bu grafik GG için elde edilmiş grafikler ile benzerdir [85,87]. Işık-tipi test parçacıklarının dairesel jeodezikleri BD skaler alanından etkilenmemektedir.

Öte taraftan, ZV metriği BD çözümü için zaman-tipi ( $\epsilon = -1$ ) test parçacıklarının dairesel yörüngeleri biraz daha karmaşıktır. Zaman-tipi parçacıklar için etkin potansiyel;

$$V_{eff} = \rho^{k-1} \left( \frac{2\sqrt{\rho^2 + \ell^2} - 2\ell}{2\sqrt{\rho^2 + \ell^2} + 2\ell} \right)^\delta + \frac{L^2}{\rho^2} \left( \frac{2\sqrt{\rho^2 + \ell^2} - 2\ell}{2\sqrt{\rho^2 + \ell^2} + 2\ell} \right)^{2\delta} \quad (6.15)$$

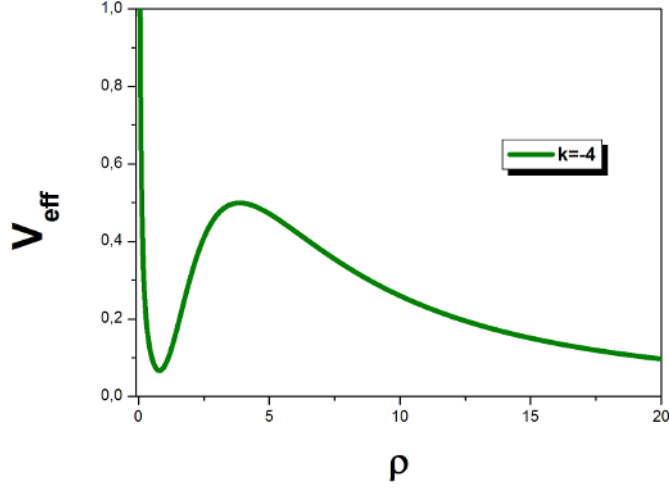
haline gelir. Işık-tipi parçacıkların tersine zaman-tipi parçacıkların dairesel yörüngeleri BD parametresi  $k$ 'ya bağlıdır. Uygun sayısal değerler verilerek farklı  $k$  değerleri için etkin potansiyelin  $\rho$ 'ya bağlı grafikleri aşağıda incelenmiştir.



**Şekil 6.7** ZV metriğinin BD çözümünün, zaman-tipi test parçacıklarının  $L = 7.6$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 1$  ve  $k = 1$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $\rho$ 'ya bağlı grafiği.

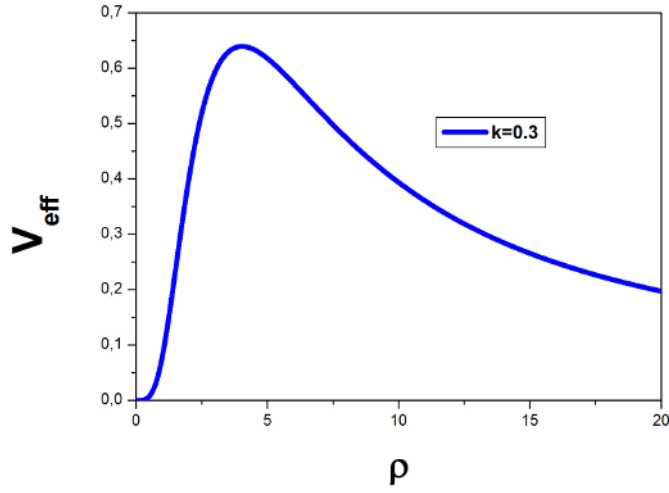
GG limiti olan  $k = 1$  için etkin potansiyel grafiği ayrıntılı olarak Şekil 6.7 ile incelendiğinde, zaman-tipi parçacıkların kararlı ve kararsız dairesel yörüngelerinin mevcut olduğu görülmektedir [87].

Benzer şekilde, ZV uzay-zamanı BD çözümünde Şekil 6.8'te gösterilen  $k = -4$  değeri için de zaman-tipi parçacıkların kararlı ve kararsız dairesel yörüngelerde hareket edebilirler.  $k$ 'nın bu değeri için diğerlerinden farklı olarak, küçük  $\rho$  değerlerinde



**Şekil 6.8** ZV metriğinin BD çözümünün, zaman-tipi test parçacıklarının  $L = 7.6$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 1$  ve  $k = -4$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $\rho$ 'ya bağlı grafiği.

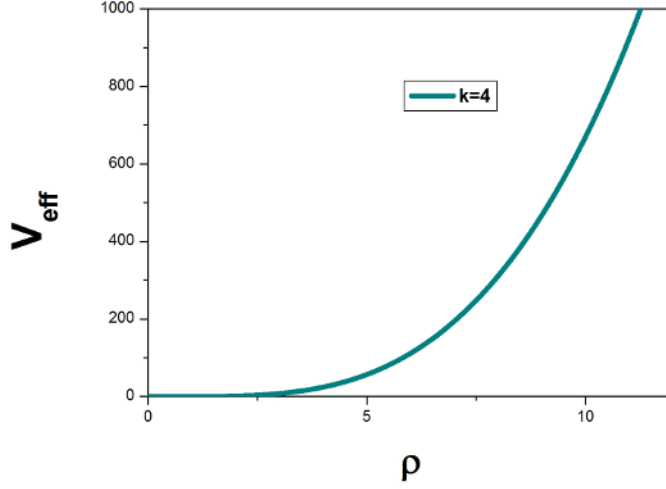
etkin potansiyel sonsuza gitmektedir.



**Şekil 6.9** ZV metriğinin BD çözümünün, zaman-tipi test parçacıklarının  $L = 7.6$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 1$  ve  $k = 0.3$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $\rho$ 'ya bağlı grafiği.

Öte taraftan, Şekil 6.9 ile gösterilen ZV BD uzay-zamanında,  $k = 0.3$  değeri için zaman-tipi parçacıklar sadece kararsız dairesel yörüngede bulunabilmektedir.

Aynı zamanda, Şekil 6.10'te  $k = 4$  değeri için ise etkin potansiyelin  $\rho$ 'ya bağlı grafiğinin üstel artmasından dolayı, zaman-tipi test parçacıklarının dairesel yörüngeleri yoktur.



**Şekil 6.10** ZV metriğinin BD çözümünün, zaman-tipi test parçacıklarının  $L = 7.6$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 1$  ve  $k = 4$  değerleri için  $V_{eff}$ 'in  $\rho$ 'ya bağlı grafiği.

#### 6.4. Küresel Koordinatlarda Genel Weyl-tipi BD Çözümü

En genel, durgun ve asimptotik olarak düz aksenal simetrik çözüm küresel koordinatlarda Weyl-tipi çözümlerdir ve metriği (2.62) biçiminde ele almak daha uygundur. Ancak bu metrik için BD çözümlerini (5.29) dönüşümleri ile elde edebilmek için metrik formunun (2.6) biçiminde olması gereklidir. Metriği bu forma sokmak için;

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + r^2 e^{-2U} \left[ e^{2K} \left( \frac{1}{r^2} dr^2 + d\theta^2 \right) + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (6.16)$$

yazılarak  $r = e^R$  dönüşümüyle

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{2R} e^{-2U} \left( e^{2K} (dR^2 + d\theta^2) + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (6.17)$$

eşitliği elde edilir. Bu formdaki metrik için dönüşümler (5.29) kullanılırsa ve  $r = e^R$  için ters dönüşüm yapılırsa, küresel koordinatlarda Weyl-tipi için BD çözümlerinin metrik fonksiyonları;

$$W_B = (r \sin \theta)^k, \quad \phi = (r \sin \theta)^{1-k}, \quad (6.18)$$

$$U_B = U - \frac{1}{2} \ln \phi, \quad K_B = K + \frac{2\omega - 1 - (2\omega + 3)k}{4} \ln \phi. \quad (6.19)$$

haline gelir. Buradaki  $U, K$  metrik fonksiyonları eşitlikler (2.63-2.64) ile verilmiştir. Böylece küresel koordinatlarda genel Weyl-tipi BD çözümü;

$$ds^2 = (r \sin \theta)^{k-1} \left[ -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} \left( e^{2K} (r \sin \theta)^{(1-k)^2(\omega+3/2)} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \right] \quad (6.20)$$

olarak elde edilir.

## 6.5. Bertotti-Robinson BD Çözümü

Statik, aksenal simetrik Einstein-Maxwell çözümüne örnek olan Bertotti-Robinson metrik fonksiyonları eşitlikler (2.69-2.71) ile verilmiştir. Bu fonksiyonlara dönüşümler (5.29) uygulandığında;

$$U_B = \ln \lambda + \frac{1}{2} \ln(\rho^2 + z^2) - \frac{1-k}{2} \ln \rho, \quad (6.21)$$

$$K_B = 1 + \frac{(1-k)(2\omega - 1 - (2\omega + 3)k)}{4} \ln \rho \quad (6.22)$$

elde edilir ve BR uzay-zamanı BD çözümü

$$ds_{BR}^2 = \rho^{k-1} \left[ -(\rho^2 + z^2) dt^2 + \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2} d\varphi^2 + \rho^{(1-k)^2(\omega+3/2)} \frac{1}{\rho^2 + z^2} (d\rho^2 + dz^2) \right] \quad (6.23)$$

sonucuna ulaşılır.

BR uzay-zamanı için jeodezik denklemleri incelenerek BD metriği için ekvator düzleminde ışık-tipi ve zaman-tipi test parçacıklarının dairesel yörüngede hareket edemeyecekleri sonucu elde edilmiştir.

Riemann tensörünün kendisiyle çarpımı (*contraction*) ile elde edilen Kretschmann skaleri,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{\lambda^4}{4e^4} \rho^{-5+4k-3k^2-2\omega(k-1)^2} \left[ \rho^4 \left( 39 - 16k + 3k^2 + 8k^3 + 13k^4 - 24k^5 + 9k^6 \right. \right. \\ & + 4(k-1)^2(1+k^2)(-1+k(3k-4))\omega + 4\omega^2(k-1)^4(2+k^2) \left. \left. \right) \right. \\ & + 2\rho^2 z^2 (k-1) \left( -1 + 37k - 54k^2 + 58k^3 - 33k^4 + 9k^5 + 4\omega(k-1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (5 + k(-14 + k(18 + k(3k - 10)))) + 4\omega^2(k - 1)^3(4 + k(k - 2)) \\
& + z^4(k - 1)^2 \left( k(-38 + k(76 - 42k + 9k^2)) + 4k\omega(3k - 4)(6 + k(k - 4)) \right. \\
& \left. + 4\omega^2(k - 1)^2(6 + k(k - 4)) + 3(9 + 4\omega) \right) \Big] \tag{6.24}
\end{aligned}$$

BR uzay-zamanı BD çözümü için yukarıdaki gibi elde edilir. BR'nin GG çözümünde koordinatlar  $\rho, z$ 'den bağımsız olan bu skaler BD skaler alanında bu koordinatlara bağlı bulunmuştur. Aynı zamanda bu skaler bu çözümün tekillik yapısının belirlenmesine yardımcı olmaktadır. GG çözümünde bir tekillik barındırmayan BR metriği, yukarıdaki eşitlikteki ilk terimden dolayı, BD çözümünde  $\omega > -\frac{3}{2} - \frac{k+1}{(k-1)^2}$  eşitsizliği sağlandığında  $\rho = 0$ 'da bir tekillığe sahip olmaktadır.

## 7. BAZI YENİ DURAĞAN, EKSENEL SİMETRİK BD ÇÖZÜMLERİ

Durağan, aksenal simetrik Einstein veya Einstein-Maxwell çözümü bilinen bir uzay-zamanın BD çözümlerinin Teorem 2 ile elde edileceği Bölüm 5'te gösterilmişti. Yöntemin bazı noktalarına dikkat çekmek ve ayrıca literatürde mevcut olan çözümleri kolaylıkla yeniden elde ederek ne kadar pratik bir yöntem olduğunun altını çizmek üzere birkaç basit örnek tartışılacaktır. İlk olarak düz Minkowski uzay zamanı ele alınacaktır. Minkowski uzay zamanı kartezyen koordinatlarda yazıldığında,  $W = 1$  olduğundan, Teorem 2'nin uygulanması sonucunda yeni bir çözüm vermeyecektir. Dolayısıyla, skaler alanı sabit olmayan bir çözüm elde etmek için, Minkowski çözümünün farklı koordinatlardaki biçimlerini göz önüne almak gereklidir. Öncelikle küresel koordinatlarda Minkowski metriği

$$ds^2 = ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (7.1)$$

incelenecektir. Bu metriği dönüşümler için gerekli form olan (2.6) haline getirmek için  $r = e^R$  dönüşümü uygulanırsa

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2R}(dR^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (7.2)$$

elde edilir. Metrik (2.6) karşılaştırıldığında  $R = x_1$ ,  $\theta = x_2$  alınarak, dönüşümler (5.29) kullanılarak;

$$ds^2 = (r \sin \theta)^{k-1} \left[ -dt^2 + (r \sin \theta)^{(1-k)^2(\omega+3/2)}(dr^2 + r^2 d\theta^2) + (r \sin \theta)^2 d\varphi^2 \right], \quad (7.3)$$

$$\phi = (r \sin \theta)^{1-k} \quad (7.4)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuçtan, uygulanan genişletilmiş TNSR metodun boş uzay-zaman için küresel simetriyi kırdığı [71]'de tartışıldığı gibi açıkça görülmektedir. Kullanılan genişletilmiş TNSR metodu için çözümü bilinen küresel simetrik bir uzay-zaman ele alınsa bile  $g_{zz}$ ,  $g_{\varphi\varphi}$  metrik bileşenleri değiştiği için BD çözümü aksenal

simetrik olarak elde edilir. Bu nedenle, bu metod küresel simetrik BD sonuçları elde etmek için uygun değildir.

Benzer şekilde silindirik simetrik düz uzay-zaman metriği;

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad (7.5)$$

ele alındığında dönüşümler (5.29) kullanılarak,

$$ds^2 = \rho^{k-1} \left[ -dt^2 + \rho^{(1-k)^2(\omega+3/2)} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \right]. \quad (7.6)$$

silindirik simetrik boş uzay-zamanın BD çözümleri elde edilir. Küresel simetrinin aksine, bu metod silindirik simetriyi korumaktadır.

Teorem 2'de verilen genişletilmiş TNSR yöntemi kullanılarak BD kuramı çerçevesinde daha farklı yöntemler kullanılarak bulunmuş olan çözümlerin kolaylıkla elde edilebileceğini göstermek üzere silindirik simetrik Einstein-Maxwell çözümü bu kuram çerçevesinde ele alınacaktır. Bu bağlamda, radyal bir elektrik alan için statik, silindirik simetrik Einstein-Maxwell çözümü Weyl-formunda;

$$ds^2 = -G^{-2} dt^2 + G^2 \left[ \rho^{2m^2} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \right], \quad (7.7)$$

$$A_0 = \frac{\rho G'}{bG}, \quad A_3 = 0, \quad G(\rho) = a_1 \rho^m + a_2 \rho^{-m}, \quad b^2 = -4a_1 a_2 m^2 > 0 \quad (7.8)$$

şeklinde verilmiştir [95]. Teorem 2 kullanılırsa, bu çözüme karşılık gelen BD-Maxwell çözümü;

$$ds^2 = \rho^{k-1} \left\{ -G^{-2} dt^2 + G^2 \left[ \rho^{2m^2+(1-k)^2(\omega+3/2)} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \right] \right\}, \quad (7.9)$$

$$\phi = \rho^{1-k} \quad (7.10)$$

olarak elde edilmektedir. Bu çözüm aslında, [73] çalışmasında sunulan çözüm ile, yukarıdaki metrik parametrelerinin  $m = 2\sigma + (1 - k)/2$ ,  $c^2 = -a_1/a_2$  dönüşümü altında, [73] çalışmasında eşitlik (44) ile verilen çözüm ile tam olarak uyuşmaktadır. Bu çözümde, elektrik yükünün sıfır olması, çözümü vakum Levi-Civita BD sonucuna götürmektedir.

## 7.1. Plebanski-Demianski BD Çözümü

Tüm Petrov D tipi çözümlerin Plebanski-Demianski (PD) metriği (3.1) ile verildiğine Bölüm 3'te değinilmiştir. Bu metriğin BD çözümlerinin elde edilebilmesi için bu metriği, (2.6) formunda ifade etmek gereklidir. Aynı zamanda, genişletilmiş TNSR metodu kozmolojik sabitli çözümleri içermediği için  $\Lambda = 0$  alınmalıdır. Metrik (3.1)'de  $dp = \sqrt{X}d\theta$ ,  $dq = \sqrt{Y}dr$ ,  $\sigma = \varphi$ , koordinat dönüşümleri ile metrik fonksiyonları;

$$\begin{aligned} 2K &= \ln \left[ \frac{Y - X}{(1 - pq)^4} \right], & \mathcal{A} &= \frac{q^2 X + p^2 Y}{X - Y}, \\ 2U &= \ln \left[ \frac{Y - X}{(1 - pq)^2 (p^2 + q^2)} \right], & W &= \frac{\sqrt{XY}}{(1 - pq)^2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

haline gelir. Dönüşümler (5.29) kullanılarak,

$$\begin{aligned} W_B &= \left( \frac{\sqrt{XY}}{(1 - pq)^2} \right)^k, & \phi &= \left( \frac{\sqrt{XY}}{(1 - pq)^2} \right)^{1-k}, & \mathcal{A}_B &= \frac{q^2 X + p^2 Y}{X - Y}, \\ U_B &= \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{Y - X}{(1 - pq)^2 (p^2 + q^2)} \right] - \frac{1 - k}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{XY}}{(1 - pq)^2} \right] \\ K_B &= \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{Y - X}{(1 - pq)^4} \right] + \frac{(1 - k)(2\omega - 1 - (2\omega + 3)k)}{4} \ln \left[ \frac{\sqrt{XY}}{(1 - pq)^2} \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

PD metriğinin BD metrik fonksiyonları elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[ \frac{\sqrt{XY}}{(1 - pq)^{2(1 + \frac{1}{k-1})}} \right]^{k-1} \left[ \frac{X (dt + q^2 d\sigma)^2 - Y (dt - p^2 d\sigma)^2}{p^2 + q^2} \right. \\ &\quad \left. + (p^2 + q^2) \left( \frac{dp^2}{X} + \frac{dq^2}{Y} \right) \left( \frac{\sqrt{XY}}{(1 - pq)^2} \right)^{(1-k)^2(\omega + \frac{3}{2})} \right], \end{aligned} \quad (7.13)$$

$p$ ,  $q$  koordinatlara geri dönülerek PD metriğinin BD çözümüne ulaşılır. Bu sonuçta sabitler (3.2-3.3) eşitliklerinde kozmolojik sabitin sıfır olduğu durum için geçerlidir. Aynı zamanda, bu sabitlerde ivmenin sıfır olması durumunda, metrik Boyer-Lindquist koordinatlarda yazılarak Kerr-Newman-NUT tipi BD çözümlerine ulaşılır. Öte taraftan, bu BD genel çözümü, Hawking'in kuramı dolayısıyla, skaler alan sabit olmadığı sürece, asimptotik olarak düz olan ve bir yıldızın kütleçekimsel çöküşü sonucu oluşan kara delikleri tanımlamamaktadır. Ancak, bu BD çözümleri,

iç bölgeleri bu çözümün parametreleri tarafından karakterize edilen tıkkız(*compact*) nesnelerin dış kütleçekim alanlarını belirlemede kullanışlı olabilirler.

## 7.2. Kerr-Newman-Taub-NUT BD Çözümü

Metrik (3.9) ile verilen Kerr-Newman-Taub-NUT çözümlerine Toerem 2 BD dönüşümlerinin uygulanabilmesi için öncelikle metriğin (2.6) formuna getirilmesi gerekir. Bu nedenle  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \theta$  olarak atanıp radyal koordinatın  $r = e^R + m + (m^2 - a^2 + n^2 - q^2)/4 e^{-R}$  ve [135]'da kullanılan dönüşümler ile metrik (3.9) ;

$$ds^2 = - \left( \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) (dt + \mathcal{A} d\varphi)^2 + \rho^2 \left[ \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} d\varphi^2 + dR^2 + d\theta^2 \right], \quad (7.14)$$

$$A = - \frac{qL}{\Sigma} (dt - b d\varphi), \quad (7.15)$$

haline gelir. Burada,  $L = e^R + m + (m^2 - a^2 + n^2 - q^2)/4 e^{-R}$  olarak belirlenmiştir. Aynı zamanda metrikte bulunan fonksiyonlar da;

$$\begin{aligned} \Delta &= L^2 - 2mL + a^2 - n^2 + q^2, \\ \rho^2 &= L^2 + (n + a \cos \theta)^2, \\ \mathcal{A} &= \frac{a(L^2 + a^2 + n^2) \sin^2 \theta - b \Delta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \\ b &= a \sin^2 \theta - 2n \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.16)$$

olmaktadır. Bu eşitliklerden metrik fonksiyonları açıkça görüldüğü için dönüşümler (5.29) kullanılarak BD metrik fonksiyonları;

$$\begin{aligned} W_B &= \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)^k, \quad \phi = \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)^{1-k}, \quad \mathcal{A}_B = \frac{a(r^2 + a^2 + n^2) \sin^2 \theta - b \Delta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}, \\ U_B &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) - \frac{1-k}{2} \ln \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right), \\ K_B &= \frac{1}{2} \ln (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) + \frac{(1-k)(2\omega - 1 - (2\omega + 3)k)}{4} \ln \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right), \end{aligned} \quad (7.17)$$

şeklinde  $r$  için ters dönüşüm yapılarak elde edilir. Böylece, KNTN uzay-zamanı BD çözümü,

$$ds^2 = (\sqrt{\Delta} \sin \theta)^{k-1} \left\{ - \left( \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) (dt + \mathcal{A}_B d\varphi)^2 + \rho^2 \left[ \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} d\varphi^2 + \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)^{(1-k)^2(\omega + \frac{3}{2})} \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \right] \right\}, \quad (7.18)$$

$$A_B = A \quad (7.19)$$

olarak elde edilir. KNTN BD çözümü daha önce sigma modeli adı verilen bir metod ile incelenmiştir [44]. Bu iki çözümün parametreleri arasında  $\alpha = (1 - k)(2\omega + 3)/4$  ilişkisi mevcuttur.

$k \rightarrow 1$  durumunda sifıra giden Ricci skaleri;

$$R = (k - 1)^2 \omega \frac{\Delta \cos^2 \theta + (m - r)^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)^{k-3-\frac{1}{2}(k-1)[1-2\omega+k(2\omega+3)]}, \quad (7.20)$$

aynı zamanda tekillik yapısını anlamak için önemli bir büyüklüktür. Ek olarak,  $\rho^2 = 0$  durumunun bir halka-tipi tekilliği tanımladığı açıkça görülmektedir. Bu eşitliğin son teriminin katkısını yok etmek için üstel ifadenin sıfır olması gereklidir. Bu çözümün düzenli ufka sahip bir kara deliği ifade etmesi için parametrelerin alacağı değerler incelenmiş ve  $\omega < -3/2$ ,  $\alpha_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 + 4|2\omega + 3|})/4$  durumunda ufkun düzenli olacağı sonucu elde edilmiştir [44]. Bu sonuç, tezdeki notasyona uyarlanırsa  $k_{\pm} = 1 - (1 + \sqrt{1 + 4|2\omega + 3|})/(2\omega + 3)$  eşitliği elde edilir. Burada önemli bir nokta, skaler alanın zayıf enerji koşulunu sağlamamasıdır. Bu nedenle, bu sonuç Hawking kriterlerini de sağlamamaktadır [39]. Öte taraftan kara delikler için yüzey kütle çekimi;

$$\kappa_{\pm} = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \sqrt{\frac{g^{rr}}{A}} A, r \quad (7.21)$$

olduğu ve metrik (2.6) formu için

$$A = \frac{W^2}{e^{-2U} W^2 - e^{2U} \mathcal{A}^2} \quad (7.22)$$

olduğu Ek C'de ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu eşitlikler ile metrik (7.18) dikkate

alındığında yüzey kütle çekimi için;

$$\kappa_{\pm} = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \frac{A, r \sqrt{\Delta(\Delta \sin \theta)^{(1-k)^3(\omega+3/2)}}}{\sqrt{A} \rho} = 0 \quad (7.23)$$

sonucuna ulaşılır. Yüzey kütle-çekiminin iç ve dış ufuklarda sıfır olması Hawking sıcaklığının da sıfır olduğunu ifade etmektedir ve bu tip kara delikler ergo-soğuk (*ergo-cold*) olarak adlandırılır [43, 44].

### 7.2.1. KNTN-BD Dairesel Jeodezikleri

KNTN-BD çözümlerinin jeodezik denklemlerini belirlemek için durağan, ekstenel simetrik uzay-zaman için elde edilen eşitlikler (2.82-2.84) kullanılacaktır. Bu eşitliklerde, KNTN-BD için bulunan metrik fonksiyonları (7.17) kullanılarak;

$$\dot{\phi} = \frac{(\Delta - a^2)(L - aE) + aE(r^2 + n^2)}{(r^2 + n^2)\Delta^{(k+1)/2}}, \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{(r^2 + n^2)\Delta^{(k+1)/2}} \times [a(\Delta - a^2)(L - aE) \\ &+ (r^2 + n^2)(E(r^2 + n^2) - a(L - 2Ea))] \end{aligned} \quad (7.25)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler ile de;

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{1}{(r^2 + n^2)^2 \Delta^{\frac{1-k}{4}[2\omega-1-k(2\omega+3)]}} \left\{ (a^2 - \Delta)(L - aE)^2 \right. \\ &+ \left. (r^2 + n^2)[E^2(r^2 + n^2) + 2aE(aE - L) + \epsilon\Delta^{(k+1)/2}] \right\} \end{aligned} \quad (7.26)$$

ifadesi elde edilerek ekvator düzleminde jeodezik denklemleri belirlenir. Jeodezik denklemleri  $k \rightarrow 1$  için GG için elde edilen sonuçlara indirgenmektedir [136, 137]. Daha ayrıntılı olarak ışık-tipi ve zaman-tipi parçacık hareketleri ele alınacaktır.

Işık-tipi ( $\epsilon = 0$ ) jeodezik denklemleri için eşitlikler (7.24, 7.25) değişmezken, (7.26) eşitliği;

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{(r^2 + n^2)^2 \Delta^{\frac{1-k}{4}[2\omega-1-k(2\omega+3)]}} \left\{ (a^2 - \Delta)(L - aE)^2 \right.$$

$$+ (r^2 + n^2) [E^2(r^2 + n^2) + 2aE(aE - L)] \} \quad (7.27)$$

haline gelmektedir. Farklı etki parametresi (*impact parameter*)  $D = L/E$  ışık-tipi jeodezikler için iki alt grupta incelenebilir.

### 1. Özel Durum ( $L = aE$ )

Etki parametresinin  $D = a$  olduğu özel durum için jeodezik eşitlikler (7.24, 7.25 ve 7.27);

$$\dot{\varphi} = \frac{aE}{\Delta^{(k+1)/2}} \quad (7.28)$$

$$\dot{t} = \frac{(a^2 + r^2 + n^2)E}{\Delta^{(k+1)/2}} \quad (7.29)$$

$$\dot{r} = \pm E \Delta^{\frac{k-1}{8}(2\omega-1-k(2\omega+3))} \quad (7.30)$$

haline gelmektedir. Burada, (+) işareti dışa, (-) işareti ise içe doğru hareket eden fotonların radyal hareketini ifade etmektedir. Bu eşitliklerden;

$$\pm \varphi = a \int \Delta^{\frac{1}{8}[(k-1)^2(2\omega+3)-8]} dr, \quad (7.31)$$

$$\pm t = \int (a^2 + r^2 + n^2) \Delta^{\frac{1}{8}[(k-1)^2(2\omega+3)-8]} dr, \quad (7.32)$$

$$\pm E \tau = \int \Delta^{\frac{1-k}{8}[2\omega-1-k(2\omega+3)]} dr \quad (7.33)$$

şeklinde GG sonuçlarından daha karmaşık sonuçlar elde edilir [136, 137]. Örneğin, GG çözümünde tekdüze değişen radyal koordinatlar, BD çözümünde düzgün değişmemektedir.

### 2. Genel Durum ( $D = L/E$ )

Genel durum için ışık-tipi parçacıkların dairesel jeodeziklerini ( $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ ) incelemek bu uzay-zaman geometrisinin jeodezik yapısı hakkında önemli bilgiler verir. Dairesel jeodezikler için belirli bir yarıçap ( $r_c$ ) ve buna karşılık gelen enerji ( $E_c$ ) ve açısal momentum ( $L_c$ ) değerleri için, (7.27) eşitliği;

$$\begin{aligned} (r_c^2 + n^2)\dot{r}^2 &= \frac{1}{\Delta^{\frac{k-1}{4}[2\omega-1-k(2\omega+3)]}} \left[ (r_c^2 + n^2)E_c^2 + \frac{(a^2 - \Delta)(aE_c - L_c)^2}{(r_c^2 + n^2)} \right. \\ &\quad \left. - 2aE_c(L_c - aE_c) \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.34)$$

ve bu eşitliğin türevi için;

$$\Delta^{\frac{1-k}{4}[2\omega-1-k(2\omega+3)]} \left\{ r_c E_c^2 - \frac{(L_c - a E_c)^2}{r_c^2 + n^2} [(r_c - m)(r_c^2 + n^2) + r_c(a^2 - \Delta)] \right\} = 0, \quad (7.35)$$

sonuçlarına ulaşılır. Etki parametresini bu değerlerde  $D_c = L_c/E_c$  ifadesiyle belirtirsek yukarıdaki eşitlikler;

$$(r_c^2 + n^2) + \frac{(a^2 - \Delta)(a - D_c)^2}{(r_c^2 + n^2)} - 2a(D_c - a) = 0, \quad (7.36)$$

$$r_c - \frac{(D_c - a)^2}{(r_c^2 + n^2)^2} [(r_c - m)(r_c^2 + n^2) + r_c(a^2 - \Delta)] = 0 \quad (7.37)$$

haline gelir. Eşitlik (7.37) ile etki parametresi;

$$D_c = a \pm \sqrt{\frac{r_c(r_c^2 + n^2)^2}{(r_c - m)(r_c^2 + n^2) + r_c(a^2 - \Delta)}}. \quad (7.38)$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda, elde edilen jeodezik eşitlikleri BD parametreleri  $k$  ve  $\omega$ 'dan bağımsızdır. Bu sonuç, BD skaler alanının fotonların jeodezik hareketlerini etkilemediğini göstermektedir. Öte taraftan, etki parametresi eşitlik (7.36)'de yerine koyulursa, KNTN-BD için foton küresini tanımlayan eşitlik elde edilir [138, 139] .

Zaman-tipi parçacıkların KNTN-BD uzay-zamanı jeodezikleri için  $\epsilon = -1$  olarak alındığında, (7.24,7.25) eşitlikleri değişmezken, (7.26) eşitliği;

$$(r^2 + n^2)r^2 = \frac{1}{\Delta^{\frac{k-1}{4}(2\omega-1-k(2\omega+3))}} \left[ (r^2 + n^2)E^2 + \frac{(a^2 - \Delta)(aE - L)^2}{(r^2 + n^2)} - 2aE(L - aE) - \Delta^{\frac{k+1}{2}} \right] = 0 \quad (7.39)$$

haline gelmektedir. Işık-tipi parçacık jeodeziklerine benzer iki durum incelenerek genel durum için parçacıkların ISCO olarak isimlendirilen en iç kararlı dairesel yörüngeleri belirlenebilir.

## 1. Özel Durum ( $L = aE$ )

Bu durum için radyal jeodezik eşitliği

$$\Delta^{\frac{k-1}{4}(2\omega-1-k(2\omega+3))}(r^2 + n^2)\dot{r}^2 = (n^2 + r^2)E^2 - \Delta^{(k+1)/2}, \quad (7.40)$$

haline gelirken, (2.82) ve (2.83) denklemleri ışık-tipi parçacıklar için elde edilen (7.28) ve (7.29) eşitlikleri ile aynı sonucu vermektedir.

## 2. Genel Durum ( $L - aE = x$ )

Genel durum için karşıt yarıçap  $r = \frac{1}{u}$  kullanılırsa, (7.39) eşitliği;

$$\begin{aligned} \Delta^{\frac{k-1}{4}[2\omega-1-k(2\omega+3)]}(1 + u^2n^2)^2 u^{-4} \dot{u}^2 &= E^2(1 + n^2u^2)^2 - 2aE xu^2(1 + n^2u^2) \\ -u^2(1 + n^2u^2)\Delta^{(k+1)/2} + (a^2 - \Delta)u^4x^2 &= 0, \end{aligned} \quad (7.41)$$

olarak ifade edilebilir. Burada, KNTN-BD çözümü için  $\Delta = \frac{1}{u^2} - \frac{2m}{u} + a^2 + Q^2 - n^2$  haline gelmektedir. Aynı zamanda, bu eşitliğin türevinden

$$\begin{aligned} 2n^2u^2E^2(1 + n^2u^2) - 2au^2xE(1 + 2n^2u^2) - u^2\Delta^{(k+1)/2}(1 + 2n^2u^2) \\ + 2(a^2 - \Delta)u^4x^2 - (mu - 1) \left[ \frac{k+1}{2}(1 + n^2u^2)\Delta^{(k-1)/2} + u^2x^2 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (7.42)$$

elde edilir. (7.41) ve (7.42) eşitlikleri;

$$\begin{aligned} (1 + n^2u^2)^2 E^2 &= u^4x^2(a^2 - \Delta) - (mu - 1)(1 + n^2u^2) \\ &\times \left[ \frac{k+1}{2}\Delta^{(k+1)/2}(1 + n^2u^2) - x^2u^2 \right], \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} 2aE u^2x(1 + n^2u^2) &= 2(a^2 - \Delta)u^4x^2 - u^2(1 + n^2u^2)\Delta^{(1+k)/2} \\ &- (mu - 1)(1 + n^2u^2) \left[ \frac{k+1}{2}(1 + n^2u^2)\Delta^{(k-1)/2} + u^2x^2 \right] \end{aligned} \quad (7.44)$$

şekillerinde bir araya getirilebilir. Elde edilen  $E$  eşitliği yukarıdaki eşitliklerde yerine yazılarak;

$$\mathcal{A}u^4x^4 + \mathcal{B}u^2x^2 + \mathcal{C} = 0, \quad (7.45)$$

şeklinde  $u^2x^2$  için 2. dereceden denkleme ulaşılır. Burada;

$$\mathcal{A} = 4\Delta \left\{ [2\Delta u^2 + (mu - 1)(1 + n^2 u^2)]^2 - 4\Delta a^2 u^4 \right\}, \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & 4\Delta^{(k+1)/2}(1 + u^2 n^2) \left\{ -4\Delta a^2 u^4 + [2\Delta u^2 + (mu - 1)(1 + n^2 u^2)]^2 \right. \\ & \left. + k(mu - 1)(1 + n^2 u^2)[(mu - 1)(1 + n^2 u^2) + 2\Delta u^2] \right\}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$\mathcal{C} = \Delta^k (1 + n^2 u^2)^2 [2\Delta u^2 + (k + 1)(mu - 1)(1 + n^2 u^2)]^2 \quad (7.48)$$

olarak tanımlanmıştır. 2. dereceden bu denklemin diskriminantı

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & 64\Delta^{k+2} u^4 a^2 (1 + n^2 u^2)^2 \left\{ 4a^2 \Delta u^4 + k^2 (mu - 1)^2 (1 + n^2 u^2)^2 \right. \\ & \left. - [2\Delta u^2 + (mu - 1)(1 + n^2 u^2)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.49)$$

olarak elde edilirken,

$$x^2 u^2 = -\frac{\Delta^{(k-1)/2}(1 + n^2 u^2)}{2} \left[ 1 + \frac{k'(Z_+ + Z_-)}{2Z_+ Z_-} \pm \frac{2\sqrt{\Delta} a u^2 \sqrt{k'^2 - Z_+ Z_-}}{Z_+ Z_-} \right], \quad (7.50)$$

şeklinde köklerine ulaşılır. Buradaki sabitler;

$$\begin{aligned} k' &= k(mu - 1)(1 + n^2 u^2), \\ Z_+ Z_- &= (2\Delta u^2 + (mu - 1)(1 + n^2 u^2))^2 - 4\Delta a^2 u^4, \\ Z_{\pm} &= 2\Delta u^2 + (mu - 1)(1 + n^2 u^2) \pm 2\sqrt{\Delta} a u^2, \end{aligned}$$

olarak tanımlanmış olup, çözüm ise

$$x = \pm \left\{ -\frac{\Delta^{(k-1)/2}(1 + n^2 u^2)}{2u^2} \left[ 1 + \frac{k'(Z_+ + Z_-)}{2Z_+ Z_-} \pm \frac{2\sqrt{\Delta} a u^2 \sqrt{k'^2 - Z_+ Z_-}}{Z_+ Z_-} \right] \right\}^{1/2} \quad (7.51)$$

olarak elde edilir. Bu sonuç ile enerji ifadesi (7.44) eşitliğinin birlikte ele alınmasıyla enerji için;

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{\sqrt{2(1 + n^2 u^2)}} \left\{ -\Delta^{\frac{k-1}{2}} (k + 1)(mu - 1)(1 + n^2 u^2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{Z_+ Z_-} \times [(mu - 1)(1 + n^2 u^2) - u^2(a^2 - \Delta)] \right. \\ & \left. \times \left[ -Z_+ Z_- + k'(Z_+ + Z_-)/2 \pm 2a u^2 \sqrt{\Delta} \sqrt{k'^2 - Z_+ Z_-} \right] \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (7.52)$$

sonucuna ulaşılır. Zaman-tipi parçacık jeodeziklerinin KNTN-BD uzay-zamanında ISCO'larını belirlemek için, (7.39) eşitliği tekrar düzenlenerek;

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{E^2 - 1}{2\Delta^{\frac{k-1}{4}[2\omega-1-k(2\omega+3)]}} + V_{eff}, \quad (7.53)$$

olarak yazılıp etkin potansiyel;

$$V_{eff} = \frac{1}{2\Delta^{\frac{k-1}{4}[2\omega-1-k(2\omega+3)]}} \left[ 1 + \frac{(a^2 - \Delta)(aE - L)^2}{(r^2 + n^2)^2} - \frac{2aE(L - aE) + \Delta^{(k+1)/2}}{(r^2 + n^2)} \right]. \quad (7.54)$$

olarak tanımlanabilir. Etkin potansiyelin radyal koordinat  $r$ 'ye göre birinci türevinin sıfır olması parçacığın dairesel yörüngede olduğunu ifade ederken, ikinci türevinin sıfır olması ise parçacığın ISCO'ya sahip olduğunu belirtmektedir. Ufkun dış bölgesinde,  $\Delta \neq 0$  için, etkin potansiyelin ikinci türev hesaplanıp sıfıra eşitlenirse;

$$\begin{aligned} & -\Delta^{k/2}(n^2 + r^2) \{ -2\Delta^2(n^2 - 3r^2) + \Delta(k+1) [n^2 + (4m - 3r)r] (n^2 + r^2) \\ & + (k^2 - 1)(m - r)^2(n^2 + r^2)^2 \} + 4aE x \Delta^{3/2}(n^2 + r^2)(n^2 - 3r^2) \\ & - 2x^2 \Delta^{3/2} [2a^2(n^2 - 5r^2) - 2\Delta(n^2 - 5r^2) + (n^2 + r^2)(n^2 + 8mr - 7r^2)] = 0 \end{aligned} \quad (7.55)$$

olurken elde edilen  $Ex$  ve  $x^2$  sonuçları bu eşitlikte yerine yazılarak

$$\begin{aligned} & (k+1)(n^2 + r^2)^2 [-\Delta m - r(k-1)(m-r)^2] + \Delta [-4r^3(a^2 - \Delta) - 4r^5 - 4n^2r^3 \\ & + m(n^2 + 5r^2)(n^2 + r^2)] \left\{ [2\Delta r + (m-r)(n^2 + r^2)]^2 - 4\Delta r^2 a^2 \right. \\ & + k(m-r)(n^2 + r^2) [2\Delta r + (m-r)(n^2 + r^2)] \pm 2ar\sqrt{\Delta} \left[ 4a^2r^2\Delta \right. \\ & \left. \left. - [2\Delta r + (m-r)(r^2 + n^2)]^2 + k^2(m-r)^2(n^2 + r^2)^2 \right]^{1/2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.56)$$

KNTN-BD uzay-zamanı için zaman-tipi parçacıkların ISCO denkleminde ulaşılır. Görüldüğü gibi bu uzay-zaman için ISCO denklemi çok karmaşıktır. Bu nedenle, bazı özel durumları inceleyerek sonuçları yorumlamak daha anlamlıdır. İlk olarak,  $a^2 = m^2 + n^2 - q^2$  eşitliğiyle elde edilen uç KNTN-BD uzay-zamanı ele alındığında, ISCO için yarıçap  $r = m$  olacaktır;

$$\begin{aligned}
r_m &= \frac{r}{m}, & n_m &= \frac{n}{m}, \\
q_m &= \frac{q}{m}, & a_m &= \frac{a}{m} = \sqrt{1 + n^2 - q^2}, \\
\Delta &= m^2(1 - r_m)^2,
\end{aligned} \tag{7.57}$$

tanımlamalarıyla, ISCO denklemi;

$$\begin{aligned}
& -(k+1)(r_m - 1)^2 [1 + (k-1)r_m] (n_m^2 + r_m^2)^2 + m^6(r_m - 1)^4 [n_m^4 \\
& + 2n_m^2 r_m^2 (3 - 4r_m) + r_m^3 (4q_m^2 - 3r_m)] \left( (k+1)n_m^4 + 2n_m^2 r_m (2 + k - 3r_m) \right. \\
& + r_m \left\{ r_m [4q_m^2 + r_m(-4 + 2k + r_m - kr_m)] \right\} \pm 2r_m \sqrt{1 + n_m^2 - q_m^2} \\
& \times \left[ (k^2 - 1)n_m^4 + 2n_m^2 r_m [-2 + r_m(k^2 + 3)] \right. \\
& \left. \left. + r_m^2 \left\{ -4q_m^2 + r_m [4 + r_m(k^2 - 1)] \right\} \right]^{1/2} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{7.58}$$

şeklinde elde edilir. Açıkça görüldüğü gibi, bu özel durumda KNTN-BD uzay-zamanı ISCO için yarıçap elektrik ve NUT yükleri ile BD skaler alanından bağımsızdır.

Diğer bir durum ise  $n = 0$ ,  $q = 0$  ile elde edilen Kerr-BD durumudur. ISCO eşitliği;

$$\begin{aligned}
& (k+1) [-\Delta m - r(k-1)(m-r)^2] + \Delta r (-4a^2 + 4\Delta \\
& - 4r^2 + 5mr) \times [(2\Delta + r(m-r))^2 - 4a^2\Delta \\
& + kr(m-r)[2\Delta - r(m-r)] \pm 2a\sqrt{\Delta} \\
& \times \sqrt{4a^2\Delta - (2\Delta + r(m-r))^2 + k^2 r^2 (m-r)^2}] = 0.
\end{aligned} \tag{7.59}$$

haline gelirken  $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$  olmaktadır. Elde edilen bu sonuçlar daha önce yapılan çalışmalar ile uyumludur [136–138].

### 7.3. Manyetikleşmiş Kerr-Newman BD Çözümü

Homojen bir dış manyetik alan içerisine gömülmüş Kerr-Newman kara deliğini tanımlayan GG çözümü (3.12) eşitliği ile verilmiştir. Bu metriğin BD çözümünü genişletilmiş TNSR metoduyla elde etmek için, bu metriği, (2.6) metriği biçiminde ifade

etmek gereklidir. Bunun için,  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \theta$  seçilerek,  $dR^2 = dr^2/\Delta$  dönüşümüyle, GG çözümü metrik fonksiyonları;

$$\begin{aligned} e^{2U} &= Hf - \frac{\Sigma\Omega^2 \sin^2 \theta}{HR^2}, & e^{2K} &= H^2 R^2 f - \Sigma\Omega^2 \sin^2 \theta, \\ \mathcal{A} &= \frac{\Omega\Sigma \sin^2 \theta}{fH^2 R^2 - \Sigma\Omega^2 \sin^2 \theta}, & W &= \frac{\sqrt{f\Sigma} \sin \theta}{R} \end{aligned} \quad (7.60)$$

şeklinde ifade edilebilir. Genişletilmiş TNSR metodu uygulanarak MKN-BD metrik fonksiyonları

$$\begin{aligned} W_B &= \left(\frac{\sqrt{f\Sigma} \sin \theta}{R}\right)^k, & \phi &= \left(\frac{\sqrt{f\Sigma} \sin \theta}{R}\right)^{1-k}, & \mathcal{A} &= \frac{\Omega\Sigma \sin^2 \theta}{fH^2 R^2 - \Sigma\Omega^2 \sin^2 \theta}, \\ U_B &= \frac{1}{2} \ln \left(Hf - \frac{\Sigma\Omega^2 \sin^2 \theta}{HR^2}\right) - \frac{1-k}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{f\Sigma} \sin \theta}{R}\right), \\ K_B &= \frac{1}{2} \ln (H^2 R^2 f - \Sigma\Omega^2 \sin^2 \theta) + \frac{(k-1)(2\omega - 1 - (2\omega + 3)k)}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{f\Sigma} \sin \theta}{R}\right), \end{aligned} \quad (7.61)$$

olarak elde edilir. Böylece MKN-BD metriği Jordan çerçevesinde

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{\sqrt{f\Sigma} \sin \theta}{R}\right)^{k-1} \left\{ H \left[ -fdt^2 + R^2 \left(\frac{\sqrt{f\Sigma} \sin \theta}{R}\right)^{(k-1)^2(\omega+\frac{3}{2})} \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{HR^2} (d\varphi - \Omega dt)^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.62)$$

haline gelir. Aynı zamanda, Einstein çerçevesinde bu çözümü elde etmek için, sadece süslü parantez içindeki ifade ve  $\phi$  yerine eşitlik (5.34) ile verilen  $\psi$  değerini almak yeterlidir. Öte taraftan, bu çözümde  $k \rightarrow 1$  durumu sonucu GG eşitliklerine götürmektedir.

#### 7.4. (Manyetikleşmiş) İki kutuplu Bonnor-tipi BD Çözümü

İki-kutuplu Bonnor-tipi GG metriği eşitlik (3.15) ile verilmiştir. BD çözümleri için Teorem 2 ile ifade edilen genişletilmiş TNSR metodunun öngördüğü gibi bu metriğin, (2.6) formunda olması için, öncekilere benzer şekilde  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \theta$  seçilmiş ve  $dR^2 = dr^2/\Delta$  dönüşümleri yapılmıştır. Böylece, iki kutuplu Bonnor-tipi BD uzay-zamanı metrik fonksiyonları;

$$\begin{aligned}
W_B &= (\sqrt{\Delta} \sin \theta)^k, & \phi &= (\sqrt{\Delta} \sin \theta)^{1-k}, & \mathcal{A}_B &= 0, \\
U_B &= \ln \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) - \frac{1-k}{2} \ln \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right) \\
K_B &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\Sigma^4}{[\Delta + (m^2 + a^2) \sin^2 \theta]^3} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right)^4 \right) \\
&+ \frac{(1-k)(2\omega - 1 - (2\omega + 3)k)}{4} \ln \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)
\end{aligned} \tag{7.63}$$

olarak elde edilirken, metrik ise;

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)^{k-1} \left\{ - \left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right)^2 \left[ - dt^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\Sigma^4 \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)^{(1-k)^2(\omega+3/2)}}{[\Delta + (M^2 + a^2) \sin^2 \theta]^3} \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \right] + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right)^2} d\varphi^2 \right\}, \tag{7.64}
\end{aligned}$$

haline gelmektedir. Daha önceki çalışmalarda,  $k = (2\omega - 1)/(2\omega + 3)$  özel durumuna karşılık gelen Bonnor-tipi BD çözümleri incelenmiştir [71]. Dolayısıyla bu çözüm, daha önceki tek parametre içeren BD çözümünün iki parametreliliğe genişletilmesidir.

Benzer şekilde, Melvin manyetik evrenine gömülmüş iki-kutuplu Bonnor-tipi çözümleri ifade eden eşitlik (3.17) metriği incelenerek, BD metrik fonksiyonları için;

$$\begin{aligned}
W_B &= (\sqrt{\Delta} \sin \theta)^k, & \phi &= (\sqrt{\Delta} \sin \theta)^{1-k}, & \mathcal{A}_B &= 0, \\
U_B &= \ln \Lambda - \frac{1-k}{2} \ln \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right) \\
K_B &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\Sigma^4 \Lambda^4}{[\Delta + (m^2 + a^2) \sin^2 \theta]^3} \right) + \frac{(1-k)(2\omega - 1 - (2\omega + 3)k)}{4} \ln \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right),
\end{aligned} \tag{7.65}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, BD metriği,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)^{k-1} \left\{ \Lambda^2 \left[ - dt^2 + \frac{\Sigma^4 \left( \sqrt{\Delta} \sin \theta \right)^{(1-k)^2(\omega+3/2)}}{[\Delta + (M^2 + a^2) \sin^2 \theta]^3} \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \right] \right. \\
&+ \left. \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Lambda^2} d\varphi^2 \right\}, \tag{7.66}
\end{aligned}$$

haline gelir. Aynı zamanda, (manyetikleşmiş) iki kutuplu Bonnor-tipi çözümlerin

$k \rightarrow 1$  için GG'ye indirgendiği açıkça görülmektedir.

## 7.5. Genel Görelilik Limiti

BD teorisinin GG limiti aslında düşünüldüğü kadar açık değildir.  $\omega \rightarrow \infty$  durumunun BD çözümlerini, GG'e karşılık gelen çözümlere indirgediği iddia edilmektedir. Bu limit özellikle zayıf alan çözümleri için doğru olsa da, kuramın yüksek eğrilik içerdiği tam halinde geçerli olmayabilir. Aslında, literatürde bunun aksini gösteren birçok örnek mevcuttur. Örneğin, dört-boyutlu uzay-zaman için, enerji-momentum tensörünün izinin ( $T$ ) sıfır olduğu durumlarda  $\omega \rightarrow \infty$  limitinin BD çözümlerini, GG çözümlerine indirgediği gösterilmiştir [73, 118, 140–143]. Bu durum,  $T$ 'nin konformal değişmezliğinin kaybolmasına bağlanmıştır [141]. Bunun bir başka sebebi ise, skaler alan denklemlerinin kaynaksız hale gelmesi ve buradan elde edilen integral sabitinin BD parametresi  $\omega$ 'dan bağımsız olmasıdır. Bununla ilgili güzel bir örnek, yüksek boyutlu, statik, silindirik simetrik BD-Maxwell çözümlerinin incelendiği [143] çalışmadır. Bu çalışmada, dörtten yüksek boyutlu uzay-zaman için elektromanyetik alana ait enerji momentum tensörünün izinin sıfırdan farklı olduğu ve bu nedenle BD parametresi  $\omega$  ve integrasyon sabitini birbirine bağlayan bir denkleme yol açtığı, ve dolayısıyla bu denklem  $\omega$  için çözümlenerek elde edilen çözümün  $\omega \rightarrow \infty$  limitinde GG çözümüne gittiği gösterilmiştir. Ancak bu durum dört boyutlu uzay-zamanda elektromanyetik alan enerji-momentum tensörünün izi sıfır olduğu için  $\omega$  ile diğer integrasyon sabiti arasında bir denkleme yol açmadığından dolayı geçerli değildir ve  $\omega \rightarrow \infty$  yerine diğer sabitin özel bir değeri GG limitini verir.

Bu tezde ise, GG limiti çok daha basit bir şekilde, skaler alanın sabit olmasıyla elde edilmiştir. Eşitlikler (5.29) incelendiğinde,  $k \rightarrow 1$  limitinde, sonlu değerdeki  $\omega$ 'dan bağımsız olarak, BD metrik fonksiyonlarının GG'ye indirgendiği açıkça görülmektedir. Öte taraftan,  $\omega \rightarrow \infty$  limitinde, BD çözümlerinin,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi = \phi_0$  =sabit durumunda bile, GG ile minimal olarak birleşmiş (*coupled*) bir skaler alanının toplamından oluşmuş bir kurama dönüştüğü gösterilmiştir [145]. Bu durumda,  $k$  değeri için  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} k = 1$  olacak şekilde bir tutarlılık koşulunun gerekli olduğu düşünülebilir.

Uzay-zaman düzenliliği  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} k = 1 - \sqrt{\frac{\beta}{2\omega+3}}$  herhangi bir sabit olan  $\beta$  ile sağlanabilir. Fakat, bu durumda metrik fonksiyonu  $K_B = K + \frac{\beta}{4} \ln W$  haline gelirken GG değerine indirgenmemektedir. Bu nedenle, elde edilen sonuçlar için  $\omega \rightarrow \infty$  limiti BD çözümlerini, karşılık gelen GG çözümlerine indirgemez.



## 8. KNTNAdS $f(R)$ ÇÖZÜMÜ

Bölüm 5.3'te, metrik (2.6) formundaki bir uzay-zaman için, sabit Ricci skaleri durumunda, GG çözümlerine karşılık  $f(R)$  çözümlerinin elde edilme yöntemi gösterilmiştir. İlk olarak, tüm kara delik çözümlerini ifade etmek için kullanılabilen eşitlik (3.1) Plebanski-Demianski metriğinin, metrik  $f(R)$  karşılığı

$$ds^2 = (1 - pq)^{-2} \left[ \frac{X' (dt + q^2 d\sigma)^2 - Y' (dt - p^2 d\sigma)^2}{p^2 + q^2} + (p^2 + q^2) \left( \frac{dp^2}{X'} + \frac{dq^2}{Y'} \right) \right], \quad (8.1)$$

$$X' = \left( -\frac{g^2}{1 + f'(|R_0|)} + \gamma - |R_0|/24 \right) + 2np - \epsilon p^2 + 2mp^3 - \left( \frac{e^2}{1 + f'(|R_0|)} + \gamma + |R_0|/24 \right) p^4, \quad (8.2)$$

$$Y' = \left( \frac{e^2}{1 + f'(|R_0|)} + \gamma - |R_0|/24 \right) - 2mq + \epsilon q^2 - 2nq^3 + \left( \frac{g^2}{1 + f'(|R_0|)} - \gamma + |R_0|/24 \right) q^4 \quad (8.3)$$

şeklinde elde edilir. Bu dönüşümler yapılırken, elektromanyetik bir form fonksiyonları,  $e, g$  elektrik ve manyetik yükleri içerdiği için, bu yükler metrik  $f(R)$  çözümünde bir sabit olan  $1/\sqrt{(1 + f'(|R_0|))}$  ile çarpılarak gerekli dönüşümler elde edilebilir.

Öte taraftan, bu metrikte ivmenin sıfır ve kozmolojik sabitin negatif olmasıyla Boyer-Lindquist koordinatlarında KNTNAdS çözümüne ulaşılır. GG KNTNAdS çözümü metrik (3.5) ile verilirken, metrik fonksiyonları eşitlik (3.6) ile ifade edilmiştir. Bu çözümün  $f(R)$  karşılığını elde etmek için, metriğin (2.6) formunda yazılması gereklidir. Bunun için,

$$dR^2 = \frac{\Delta_\theta dr^2}{\Delta_r}$$

dönüşümü yapılmalıdır. Bu dönüşüm sayesinde, eşitlik (5.37) ile KNTNAdS  $f(R)$  çözümü,

$$ds^2 = -\frac{\Delta'_r}{\rho^2} \left( dt - \frac{h}{\Xi'} d\varphi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta'_r} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta'_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta'_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( a dt - \frac{(r^2 + a^2 + n^2)}{\Xi'} d\varphi \right)^2 \quad (8.4)$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$\Xi' = 1 - \frac{|R_0|}{12}a^2, \quad (8.5)$$

$$\Delta'_\theta = 1 - \frac{1}{3}|R_0|an \cos \theta - \frac{1}{12}|R_0|a^2 \cos^2 \theta, \quad (8.6)$$

$$\Delta'_r = r^2 - 2mr + a^2 - n^2 + q^2 + \frac{|R_0|}{12} (3n^2(a^2 - n^2) + r^2(a^2 + 6n^2) + r^4) \quad (8.7)$$

olarak ele alınmıştır. Burada, kozmolojik sabit ile  $R_0$  arasındaki (5.38) eşitliği kullanılmıştır. Bunlara ek olarak elektromanyetik bir-form ve yük;

$$A_\mu = -\frac{zr}{\rho^2 \sqrt{1 + f'(R_0)}} dt + \frac{zrh}{\Xi \rho^2 \sqrt{1 + f'(R_0)}} d\varphi, \quad (8.8)$$

$$A_\mu = -\frac{qr}{\rho^2} dt + \frac{qrh}{\Xi \rho^2} d\varphi, \quad (8.9)$$

$$q = \frac{z}{\sqrt{1 + f'(R_0)}} \quad (8.10)$$

olarak elde edilir. Burada, metrik fonksiyonları, GG çözümünün metrik fonksiyonları değiştirilerek elde edilmektedir. Kozmolojik sabitli Einstein çözümleri ile sabit eğrilikli  $f(R)$  çözümleri arasındaki tek fark, bu kuramların yük ve eğrilik sabitlerinin birbirinden birer sabit çarpan kadar farklı olmasıdır, fakat bu durum bu çözümlerin kendi alan denklemlerini çözmelerini engellememektedir. Öte taraftan, NUT parametresi  $n = 0$  seçildiğinde KNAdS'in  $f(R)$  çözümüne ulaşılır ve bu sonuç daha önce yapılan çözümler ile uyumludur [125, 131]. Aynı şekilde, kozmolojik sabit  $\Lambda = 0$  durumu, KNTN  $f(R)$  çözümlerine ulaşılmasını sağlar ve bu sonuçta [146] ile aynıdır.

## 8.1. $f(R)$ Kuramında KNTNAdS Karadeligi Termodinamiği

KN kara delik termodinamiğine Bölüm 3.2'de değinilmiştir. Aynı yollar izlenerek, KNTNAdS  $f(R)$  kara deliğinin termodinamik özellikleri de belirlenebilir. İlk olarak, KNTNAdS için iç ve dış ufuklarının yarıçaplarının belirlendiği (3.8) eşitliği,  $f(R)$  çözümünde de aynı olacağından,  $r_+$  dış ufuk ( $\mathcal{H}^+$ ),  $r_-$  iç ufuk ( $\mathcal{H}^-$ ) yarıçapları olarak ele alınabilir. Böylece, KNTNAdS  $f(R)$  uzay-zamanı ufuklarının alanları;

$$A_\pm = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{\Xi} (r_\pm^2 + a^2 + n^2). \quad (8.11)$$

olarak elde edilir. Burada,  $A_+$  dış ufuk veya olay ufkunun,  $A_-$  ise iç ufuk veya Cauchy ufkunun alanlarıdır. Genel anlamda, durağan bir gözlemci için (yani  $r = \text{sabit}$ ,  $\theta = \text{sabit}$  olan ve düzgün (*uniform*) bir açısal momentuma sahip olan bir gözlemcinin) açısal hızı;

$$\Omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \quad (8.12)$$

olarak tanımlanırken, ufuklarda ( $\Delta_r = 0$ )

$$\Omega_{\pm} = \frac{a\Xi}{r_{\pm}^2 + a^2 + n^2}. \quad (8.13)$$

haline gelmektedir. Aynı şekilde, ufuklarda Bekenstein-Hawking entropisi;

$$\mathcal{S}_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{4} = \frac{\pi}{\Xi}(r_{\pm}^2 + a^2 + n^2). \quad (8.14)$$

olarak elde edilirken, yüzey kütle-çekimi ise;

$$\begin{aligned} \kappa_{\pm} = & \frac{1}{2r_{\pm}} \left[ \frac{|R_0|}{4} r_{\pm}^4 + r_{\pm}^2 \left( 1 + \frac{|R_0|}{12} (a^2 + 6n^2) \right) - a^2 + n^2 - q^2 \right. \\ & \left. - \frac{|R_0|n^2}{4} (a^2 - n^2) \right] \end{aligned} \quad (8.15)$$

eşitliğiyle ifade edilir (yüzey kütle-çekim hesabı ayrıntılı olarak Ek C'de verilmiştir).

Bu sonuç, ufuklarda sıcaklığın;

$$\begin{aligned} T_{\pm} = & \frac{\kappa_{\pm}}{2\pi} = \frac{1}{4\pi r_{\pm}} \left[ \frac{|R_0|}{4} r_{\pm}^4 + r_{\pm}^2 \left( 1 + \frac{|R_0|}{12} (a^2 + 6n^2) \right) - a^2 + n^2 - q^2 \right. \\ & \left. - \frac{|R_0|n^2}{4} (a^2 - n^2) \right] \end{aligned} \quad (8.16)$$

olduğunu göstermektedir.

KN kara deliği kütlesi için elde edilen Smarr formülü, KNTNAdS çözümleri için,  $\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t}$  ve  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  Killing vektörleri seçilerek, Komar integralleri için referans alt uzayın AdS alınmasıyla, kütle  $m$ , açısal momentum  $J$ , yük  $q$  ve NUT parametresi  $n$  için;

$$M = \frac{m}{\Xi^2}, \quad J = \frac{am}{\Xi^2} = aM, \quad Q = \frac{q}{\Xi}, \quad n' = \frac{n}{\Xi} \quad (8.17)$$

sonsuzda elde edilen değerler kullanılarak genelleştirilebilir. (Bundan sonraki kı-

sımda  $n'$  yerine kolaylık olması için  $n$  kullanılacaktır.) Böylece,  $\Delta_r = 0$  eşitliğinden, uzun bir hesaplama ile;

$$\begin{aligned}
M^2 &= \frac{\pi}{\mathbf{A}_{\pm} - 4n^2\pi} \left\{ \frac{\mathbf{A}_{\pm}^2}{16\pi^2} + (Q^2 - 2n^2)^2 + \frac{\mathbf{A}_{\pm}(Q^2 - 2n^2)}{2\pi} \right. \\
&+ J^2 \left( 4 + \frac{|R_0|\mathbf{A}_{\pm}}{12\pi} - \frac{2}{3}|R_0|n^2 + \frac{|R_0|^2 n^2 a^2}{36} \right) \\
&+ \left[ \frac{|R_0|}{12} \left( \left( \frac{\mathbf{A}_{\pm}}{4\pi} \right)^2 - 2n^2 a^2 + 4n^2 \Xi \left( \frac{\mathbf{A}_{\pm}}{4\pi} - 2n^2 \Xi \right) \right) \right]^2 \\
&+ \frac{\mathbf{A}_{\pm}|R_0|}{24\pi} \left( \left( \frac{\mathbf{A}_{\pm}}{4\pi} \right)^2 - 2n^2 a^2 + 4n^2 \Xi \left( \frac{\mathbf{A}_{\pm}}{4\pi} - 2n^2 \Xi \right) \right) \\
&+ \left. \frac{|R_0|(Q^2 - 2n^2)}{6} \left( \left( \frac{\mathbf{A}_{\pm}}{4\pi} \right)^2 - 2n^2 a^2 + 4n^2 \Xi \left( \frac{\mathbf{A}_{\pm}}{4\pi} - 2n^2 \Xi \right) \right) \right\} \quad (8.18)
\end{aligned}$$

kütle eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, genelleştirilmiş Smarr formülü olarak düşünülebilir. Aynı zamanda, kütlelin ufuk entropileri cinsinden ifadesi;

$$\begin{aligned}
M^2 &= \frac{\pi}{4\mathcal{S}_{\pm} - 4n^2\pi} \left\{ \frac{\mathcal{S}_{\pm}^2}{\pi^2} + (Q^2 - 2n^2)^2 + \frac{2\mathcal{S}_{\pm}(Q^2 - 2n^2)}{\pi} \right. \\
&+ J^2 \left( 4 + \frac{|R_0|\mathcal{S}_{\pm}}{3\pi} - \frac{2}{3}|R_0|n^2 + \frac{|R_0|^2 n^2 a^2}{36} \right) \\
&+ \left[ \frac{|R_0|}{12} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 - 2n^2 a^2 + 4n^2 \Xi \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \Xi \right) \right) \right]^2 \\
&+ \frac{\mathcal{S}_{\pm}|R_0|}{6\pi} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 - 2n^2 a^2 + 4n^2 \Xi \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \Xi \right) \right) \\
&+ \left. \frac{|R_0|(Q^2 - 2n^2)}{6} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 - 2n^2 a^2 + 4n^2 \Xi \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \Xi \right) \right) \right\} \quad (8.19)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Ancak varılan bu sonuç,  $a^2$  terimleri içerdiği ve  $a = J/M$  olduğundan dolayı bu haliyle kütleli tanımlayan bir eşitlik değildir. Bu durum, bu ifadenin ele alınmasını zorlaştırmaktadır. Bu nedenle, burada sadece yavaş dönen KNTNAdS  $f(R)$  kara deliği için, dönme parametresi  $a$ 'nın küçük olduğu ve  $a^2$  ifadesinin ihmal

edilebilir olması durumu incelenecektir. Böylece, kütle eşitliği;

$$\begin{aligned}
M^2 &= \frac{\pi}{4\mathcal{S}_{\pm} - 4n^2\pi} \left\{ \frac{\mathcal{S}_{\pm}^2}{\pi^2} + (Q^2 - 2n^2)^2 + \frac{2\mathcal{S}_{\pm}(Q^2 - 2n^2)}{\pi} \right. \\
&+ J^2 \left( 4 + \frac{|R_0|\mathcal{S}_{\pm}}{3\pi} - \frac{2}{3}|R_0|n^2 \right) + \left[ \frac{|R_0|}{12} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \right]^2 \\
&+ \frac{\mathcal{S}_{\pm}|R_0|}{6\pi} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \\
&+ \left. \frac{|R_0|(Q^2 - 2n^2)}{6} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \right\} \quad (8.20)
\end{aligned}$$

halini almaktadır. Buradan, kara delik kütesinin  $M = M(\mathcal{S}_{\pm}, J, Q, n, \Lambda)$  parametrelerine bağlı bir büyüklük olduğu düşünülerek;

$$dM = T_{\pm}d\mathcal{S}_{\pm} + \Omega_{\pm}dJ + V_{\pm}dQ + V'_{\pm}dn + \Theta_{\pm}d\Lambda. \quad (8.21)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik, kara delikler için oluşturulan birinci yasayı ifade etmektedir. Kozmolojik sabit, bir sabit olmasına rağmen, bir değişken gibi ele alınabileceği [147] çalışmasında incelenmiştir. Burada,  $T$ ,  $\Omega$ ,  $V$ ,  $V'$ ,  $\Theta$ , ufuklarda sırasıyla sıcaklık, açısal hız, elektrik yükünün elektromanyetik potansiyeli, NUT yükünün elektromanyetik potansiyeli ve kozmolojik sabitin termodinamik durum fonksiyonunu ifade etmektedir. Böylece;

$$\begin{aligned}
T_{\pm} &= \frac{\partial M}{\partial \mathcal{S}_{\pm}} = \frac{\pi}{8M(\mathcal{S}_{\pm} - n^2\pi)^2} \left[ \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \right) - Q^2(Q^2 - 2n^2) \right. \\
&- J^2 \left( 4 - \frac{|R_0|n^2}{3} \right) + \frac{3|R_0|^2\mathcal{S}_{\pm}^2}{(12\pi)^2} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \\
&+ \frac{|R_0|}{6} \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} + (Q^2 - 2n^2) \right) \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}^2}{\pi^2} - 2n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \\
&+ \left. \frac{|R_0|}{6} \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - n^2 \right) \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \right] \quad (8.22)
\end{aligned}$$

$$\Omega_{\pm} = \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{\pi J}{M(4\mathcal{S}_{\pm} - 4\pi n^2)} \left( 4 + \frac{|R_0|\mathcal{S}_{\pm}}{3\pi} - \frac{2|R_0|n^2}{3} \right) \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned}
V_{\pm} &= \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{\pi Q}{M(4\mathcal{S}_{\pm} - 4\pi n^2)} \left[ 2(Q^2 - 2n^2) + \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right. \\
&+ \left. \frac{|R_0|}{6} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_{\pm}}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \right] \quad (8.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V'_\pm &= \frac{\partial M}{\partial n} = \frac{n\pi}{4M(\mathcal{S}_\pm - n^2\pi)^2} \left[ -\frac{3\mathcal{S}_\pm^2}{\pi} + \pi(Q^4 - 4n^4) - 2\mathcal{S}_\pm(Q^2 - 4n^2) \right. \\
&\quad + \pi J^2 \left( 4 - \frac{|R_0|\mathcal{S}_\pm}{3\pi} \right) \\
&\quad + \frac{|R_0|^2}{12^2} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \left( \frac{5\mathcal{S}_\pm^2}{\pi} - 8n^2\pi \left( \frac{2\mathcal{S}_\pm}{\pi} - n^2 \right) \right) \\
&\quad - \frac{|R_0|\pi}{3} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} - n^2 \right) \\
&\quad \left. + \frac{|R_0|}{6} \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} + Q^2 - 2n^2 \right) \left( \frac{5\mathcal{S}_\pm^2}{\pi} - 8n^2\pi \left( \frac{2\mathcal{S}_\pm}{\pi} - n^2 \right) \right) \right] \quad (8.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_\pm &= \frac{\partial M}{\partial \Lambda} = -\frac{\pi}{2M(\mathcal{S}_\pm - n^2\pi)} \left[ \frac{J^2}{3} \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} - 2n^2 \right) \right. \\
&\quad + \frac{2|R_0|^2}{12^2} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} - 2n^2 \right) \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \left( \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} \right)^2 + 4n^2 \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} - 2n^2 \right) \right) \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} + Q^2 - 2n^2 \right) \right] \quad (8.26)
\end{aligned}$$

eşitlikleri kolay hesaplamalar ile elde edilir. Aynı zamanda, özgül ısı;

$$C \Big|_{J,Q,n,\Lambda} = T \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{8MT(\mathcal{S}_\pm - n^2\pi)^2}{-8T^2(\mathcal{S}_\pm - n^2\pi)^2 - 16MT(\mathcal{S}_\pm - n^2\pi) + \pi D(\mathcal{S}_\pm, Q, n, |R_0|)} \quad (8.27)$$

sabit açısal momentum, elektriksel ve NUT yükler ve kozmolojik sabit için elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{S}_\pm, Q, n, |R_0|) &= 2 \left[ \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi^2} - \frac{n^2}{\pi} + \frac{6|R_0|^2\mathcal{S}_\pm}{(12\pi)^2} \left( \frac{\mathcal{S}_\pm^2}{\pi^2} + \frac{2\mathcal{S}_\pm n^2}{\pi} - 2n^4 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{|R_0|}{6\pi} \left( \frac{3\mathcal{S}_\pm^2}{\pi^2} + Q^2 \left( \frac{\mathcal{S}_\pm}{\pi} - n^2 \right) - \frac{\mathcal{S}_\pm n^2}{\pi} - 2n^4 \right) \right] \quad (8.28)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilmiştir. Hesaplanan tüm potansiyeller, Kerr-Newman-AdS çözümü için  $n = 0$  ve  $|R_0| = 12/\ell^2$  olarak ele alındığında, [148]'de verilen sonuçlar ile aynı olmaktadır.

Termodinamik bir sistemin kararlı olup olmadığı, entropisi incelenerek belirlenebilir. Kanonik topluluklarda, tek değişken parametre sıcaklık olduğundan, özgül ısının pozitif değerlerinin incelenmesi kararlılık için yeterlidir. Öte yandan, özgül ısının sıfır olduğu ya da ıraksadığı bölgeler, sistemin yerel olarak kararlı olduğu bölgeleri sınırlayan "kritik" yüzeyleri vermektedir. Bu nedenle,  $\partial T/\partial S = 0$ ,  $\infty$  eşitliği incelenerek,

sistemin sadece sabit açısasal momentumu için;

$$\begin{aligned}
J_{\pm}^2 = & \frac{1}{48\pi^4(n^2|R_0| - 12) (\pi(7n^2|R_0| - 36)4|R_0|S_{\pm})} \left\{ - \left[ -16\pi^5(-325Q^4 \right. \right. \\
& - 36n^8|R_0|^2 + 8n^{10}|R_0|^3 - 36n^6|R_0|(15 + Q^2|R_0|) + 45n^2Q^2(24 + Q^2|R_0|) \\
& + 18n^2(11Q^2|R_0| - 60)) + 32\pi^4(-9n^6|R_0|^2 + n^8|R_0|^3 + 18n^2(Q^2|R_0| - 30) \\
& + 9(24 + Q^2|R_0|)(Q^2 - n^2|R_0|))S_{\pm} \\
& + 72\pi^3(72 + |R_0|(12Q^2 - 5n^4|R_0| + 2n^6|R_0|^2 - n^2(18 + Q^2|R_0|)))S_{\pm}^2 \\
& \left. - 64\pi^2|R_0|(n^4|R_0|^2 - 27)S_{\pm}^3 - \pi|R_0|^2(17n^2|R_0| - 180)S_{\pm}^4 + 6|R_0|^3S_{\pm}^5 \right] \\
& + \left[ \left( 16\pi^5(-324Q^4 - 36n^8|R_0|^2 + 8n^{10}|R_0|^3 - 36n^6|R_0|(15 + Q^2|R_0|) \right. \right. \\
& + 45n^2Q^2(24 + Q^2|R_0|) + 18n^4(11Q^2|R_0| - 60)) - 32\pi^4(n^8|R_0|^3 - 9n^6|R_0|^2 \\
& + 18n^2(Q^2|R_0| - 30) + 9(24 + Q^2|R_0|)(Q^2 - n^4|R_0|))S_{\pm} - 72\pi^3(72 + |R_0|(12Q^2 \\
& - 5n^4|R_0| + 2n^6|R_0|^2 - n^2(18 + Q^2|R_0|)))S_{\pm}^2 + 4\pi^2|R_0|(n^4|R_0|^2 - 27)S_{\pm}^3 \\
& + \left. \left. \pi|R_0|^2(17n^2|R_0| - 180)S_{\pm}^4 - 6|R_0|^3S_{\pm}^5 \right)^2 - 3\pi(n^2|R_0| - 12) \right. \\
& \times (\pi(7n^2|R_0| - 36) - 4|R_0|S_{\pm}) \\
& \times (4\pi^2(6n^2 - 3Q^2 + 2n^4|R_0|) - 4\pi(3 + n^2|R_0|)S_{\pm} - |R_0|S_{\pm}^2)^3 \\
& \left. \times (4\pi S_{\pm} - 12\pi^2Q^2 - |R_0|S_{\pm}^2 + 4n^2\pi(2\pi + |R_0|S_{\pm})) \right]^{\frac{1}{2}} \left. \right\} \quad (8.29)
\end{aligned}$$

eşitliği, bu kritik yüzeyleri belirleyen denklemi vermektedir. Aynı zamanda, bu eşitlik için,  $n = 0$  ve  $|R_0| = 12$  seçildiğinde, sonuç KNAdS çözümüne indirgenmektedir [148].

Özetle bu bölümde, sabit eğrilikli  $f(R)$  kuramının KKTNAdS kara delik çözümü için bir genelleştirilmiş Smarr formülü elde edilerek, termodinamik potansiyeller ve spesifik ısı büyüklükleri hesaplanmıştır. Bu çözümün gerek termodinamik özelliklerinin daha ayrıntılı bir incelemesi, gerekse diğer önemli fiziksel özellikleri daha sonra incelenecektir.



## 9. SONUÇLAR

Bu tezde, Genel Görelilik kuramına alternatif olan ve Einstein-Hilbert eyleminin değiştirilmesi ile elde edilebilen çeşitli kuramlardan BD ve  $f(R)$  kuramları için doğadaki yıldızlar ve kara delikleri de tanımlamaları nedeniyle son derece önemli olan, durağan, aksenal simetrik uzay-zaman geometrilerinin tam çözümlerinin, bir takım çözüm üretme teknikleri kullanılarak elde edilmesi amaçlanmıştır.

İlk olarak, durağan ve statik, aksenal simetrik uzay-zaman metrikleri ele alınarak, bu uzay-zamanlarda daha önceden bilinen bazı GG çözümleri incelenmiştir. Aynı zamanda, BD ve  $f(R)$  teorileri alan denklemlerinin karmaşık olmaları dolayısıyla, çözüm üretme teknikleriyle tam çözümlerin daha kolay elde edileceği düşünülerek, Ernst denklemleri, konformal dönüşümler ve TNSR metodu gibi çözüm üretme teknikleri gözden geçirilmiştir. Daha önceden tek parametrelilik ele alınan TNSR metodu, iki parametrelilik olarak daha genel bir formda elde edilerek, BD metrik fonksiyonları ve GG metrik fonksiyonları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Bu sonuç ile, Jordan çerçevesinde Einstein veya Einstein-Maxwell çözümü bilinen bir uzay-zamana karşılık gelen BD çözümüne, Teorem 2 ile verilen dönüşümler ile ulaşılabilir. Aynı zamanda bu dönüşümler Einstein çerçevesi için Teorem 3 ile verilmiştir. Kozmolojik sabit içermeyen GG çözümlerinin BD karşılıkları genelleştirilmiş TNSR metodu ile, kozmolojik sabitli GG çözümlerinin  $f(R)$  karşılığı ise TNSR metodunun  $f(R)$ 'a uyarlanması olan bir yöntem ile elde edilmiştir. Daha sonra ise, BD ve  $f(R)$  alternatif teorileri için bulunan çözüm üretme teknikleri kullanılarak yeni bir takım çözümler ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş TNSR metodu ile, Weyl-tipi uzay-zamana örnek olan, Curzon-Chazy, Zipoy-Voorhees, iki parçacıklı Zipoy-Voorhees ve Bertotti-Robinson BD çözümleri incelenerek iki parametrelilik olarak elde edilmiştir. CC ve ZV BD çözümlerinin dairesel jeodeziklerinin, ışık-tipi parçacıklar için GG ile benzer olduğu, ancak zaman-tipi parçacıklar için GG'den farklı olduğu ve değişen  $k$  parametresi değerleri için ekvator düzleminde farklı kararlı ve kararsız dairesel jeodeziklerinin mevcut olduğu sonu-

cuna ulaşılmıştır. Her iki uzay-zaman için de  $k = 4$  değerinde parçacıkların etkin potansiyellerinin üstel arttığı ve bu durumda parçacıkların dairesel yörüngeye sahip olamayacağı görülmüştür. Öte taraftan, BR BD uzay-zamanının ışık-tipi ve zaman-tipi tüm parçacıklar için dairesel yörüngelerinin mevcut olmadığı saptanmıştır. Aynı zamanda, CC ve BR BD uzay-zamanlarının GG'den farklı olarak  $\omega > -\frac{3}{2} - \frac{k+1}{(k-1)^2}$  durumu için  $\rho = 0$ 'da simetri eksenini boyunca uzanan bir tekiliği daha olduğu elde edilmiştir.

Yine genelleştirilmiş TNSR metodu yardımıyla, durağan aksenal simetrik çözümlerden olan, kozmolojik sabit içermeyen Plebanski-Demianski, Kerr-Newman-Taub-NUT, manyetikleşmiş Kerr-Newman ve (manyetikleşmiş) iki kutuplu Bonnor-tipi BD çözümlerine iki parametrelilik olarak ulaşılmıştır. KNTN BD uzay-zamanının, ışık-tipi ve zaman-tipi test parçacıkları için dairesel jeodeziklerine bakılmıştır. Işık-tipi parçacıklar için  $L/E$ 'nin özel ve genel durumları incelenmiştir. Zaman-tipi test parçacıkları için ise ISCO eşitliğine başarıyla ulaşılmış, uç-kara delik çözümleri için ISCO eşitliğinin Kerr-Newman çözümleriyle örtüştüğü saptanmıştır.

Elde edilen tüm durağan ve statik aksenal simetrik BD çözümlerinin,  $\omega$ 'nın tüm sonlu değerleri için,  $k \rightarrow 1$  durumunda GG'ye indirgenmediği açıkça görülmektedir. Ancak, literatürde,  $\omega \rightarrow \infty$  değerinde BD çözümlerinin GG çözümlerine gittiğini belirten bir çok durum söz konusu olmasına rağmen, bu tezde bulunan sonuçlar için,  $\omega \rightarrow \infty$  durumu, çözümleri GG'ye indirgememektedir.

Kozmolojik sabitli Einstein alan denklemleri ve metrik  $f(R)$  alan denklemlerinin birlikte ele alınmasıyla, metrik fonksiyonları arasında Teorem 4 ile verilen dönüşümler kullanılarak, herhangi bir kozmolojik sabitli GG çözümlerine karşılık gelen metrik  $f(R)$  çözümlerine ulaşılacağı gösterilmiştir. Örnek olarak ise, kara deliklerin tüm parametrelerini barındıran Plebanski-Demianski metrik  $f(R)$  çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümlerin, ivmenin sıfır ve kozmolojik sabitin negatif olduğu durumunu ifade eden KNTNAdS GG çözümleri kullanılmış ve bu uzay-zamanın metrik  $f(R)$  karşılığı elde edilmiştir. Ancak, bu dönüşüm yönteminde dikkat edilmesi gereken husus, GG metrik fonksiyonları metrik  $f(R)$ 'a dönüşürken değişmediği için, metrik  $f(R)$  fonksi-

yonları GG metrik fonksiyonları formuna değiştirilmesidir. Aksi takdirde, elde edilen çözümler, metrik  $f(R)$  alan denklemlerinin çözümleri olmamaktadır.

Metrik  $f(R)$  çözümleri bulunan KNTNAdS kara deliğinin termodinamik özellikleri elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Smarr formülünün elde edilmesiyle, kara delik termodinamiği birinci yasası olan ifadeye bu kara delik için ulaşılmıştır. Bu eşitlik yardımıyla, KNTNAdS kara deliğinin olay ve Cauchy ufuklarında, sıcaklığı, açısız hızı, elektrik ve NUT yüklerinin elektromanyetik potansiyeli ve kozmolojik sabit termodinamik durum fonksiyonu kolayca elde edilmiştir.





# KAYNAKLAR

- [1] Dyson, F. W., Eddington, A. S., Davidson C. (1920). A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of 29 May 1919, Philosophical Transactions of the Royal Society 220A: 291–333. doi:10.1098/rsta.1920.0009.
- [2] Pound, R. V., Rebka, Jr. G. A. (1959). Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance, Physical Review Letters 3 (9): 439–441.
- [3] Pound, R. V., Rebka Jr. G. A. (1960). Apparent weight of photons, Physical Review Letters 4 (7): 337–341.
- [4] Einstein, A (1916). Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin. part 1: 688–696. Einstein, A (1918). Über Gravitationswellen, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin. part 1: 154–167.
- [5] LIGO Scientific and Virgo Collaborations (Abbott B.P., ve ark.). (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Phys.Rev.Lett. 116 no.6, 061102.
- [6] Weyl, H. (1919). A New Extension of Relativity Theory, Ann. Phys. 59, 101-133.
- [7] Eddington, A. S. (1923). The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press, Cambridge.
- [8] Utiyama, R., DeWitt, B. S. (1962). Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields, J. Math. Phys. 3, 608-618.
- [9] Stelle, K. S. (1977). Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity, Phys. Rev. D16, 953-969.
- [10] Birrell, N. D., Davies, P. C. W. (1982). Quantum Fields in Curved Spacetime, Cambridge University Press, Cambridge.

- [11] Buchbinder, I. L., Odintsov, S. D., Shapiro, I. L. (1992). *Effective Actions in Quantum Gravity*. IOP Publishing, Bristol.
- [12] Vilkovisky, G. A. (1992). Effective action in quantum gravity, *Class. Quant. Grav.* 9, 895-903.
- [13] Spergel, D. N., ve arkadaşları (WMAP grubu). (2007). Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology, *Astrophys. J. Suppl.* 170, 377.
- [14] Planck Collaboration: Ade, P. A. R. ve ark. (2014). Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results, *Astronomy & Astrophysics* 571, A1.
- [15] Planck Collaboration: Ade, P. A. R. ve ark. (2014). Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, *Astronomy & Astrophysics* 571, A16.
- [16] Planck Collaboration: Ade, P. A. R. ve ark. (2015). Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, arXiv:1502.01589. (20.03.2016)
- [17] Guth, A. H. (1981). The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems, *Phys. Rev. D* 23, 347-356.
- [18] Kolb, E. W., Turner, M. S. (1992). *The Early Universe*. Addison-Wesley, California.
- [19] Linde, A. (1990). *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Harwood Academic Publishers, Switzerland.
- [20] Mukhanov, V. F. (2003). CMB, quantum fluctuations and the predictive power of inflation, eprint astro-ph/0303077.
- [21] Zwicky, F. (1933). The redshift of extragalactic nebulae, *Helv. Phys. Acta* 6, 110-127.
- [22] Kahn, F. D., Woltjer, L. (1959). Intergalactic Matter and the Galaxy, *Astrophys. J.* 130, 705.

- [23] Rubin, V., Ford, W. K. J. (1970). Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions, *Astrophys. J.* 159, 379-403.
- [24] Bosma, A. (1978) The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types. Doktora Tezi, Reijksuniversiteit Groningen.
- [25] Rubin, V. C., Thonnard, N., Ford, W. K. J. (1980). Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 / $R=4\text{kpc}/$  to UGC 2885 / $R=122\text{kpc}/$ , *Astro-phys. J.* 238, 471.
- [26] Persic, M., Salucci, P., Stel, F. (1996). The Universal rotation curve of spiral galaxies: 1. The Dark matter connection, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 281, 27.
- [27] Moore, B. (2001). The dark matter crisis ,Plenary talk, 20th Texas Symposium, eprint astro-ph/0103100.
- [28] Ellis, J. R. (2002). Dark 2002 and Beyond, Summary of DARK 2002: 4th International Heidelberg Conference on Dark Matter in Astro and Particle Physics, 4-9 Feb 2002, Cape Town, South Africa.
- [29] Brans, C., Dicke, R. H. (1961). Mach's principle and a relativistic theory of gravitation, *Phys. Rev.* 124, 925-935.
- [30] Dicke, R. H. (1962). Mach's principle and invariance under transformation of units, *Phys. Rev.* 125, 2163-2167.
- [31] Bergmann, P. G. (1968). Comments on the scalar tensor theory, *Int. J. Theor. Phys.* 1, 25-36.
- [32] Nordtvedt, J. K. (1970). PostNewtonian metric for a general class of scalar tensor gravitational theories and observational consequences, *Astrophys. J.* 161, 1059-1067.
- [33] Wagoner, R. V. (1970). Scalar tensor theory and gravitational waves, *Phys. Rev. D* 1, 3209-3216.

- [34] Faraoni, V. (2004). *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*, ISBN-1-4020-1988-2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.
- [35] Dvali, G. R., Gabadadze, G., Porrati, M. (2000). 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space, *Phys. Lett. B* 485, 208-214.
- [36] Maartens, R. (2004). Brane world gravity, *Living Rev. Rel.* 7, 7.
- [37] Bekenstein, J. D. (2004). Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm, *Phys. Rev. D* 70, 083509.
- [38] Jacobson, T., Mattingly, D. (2001). Gravity with a dynamical preferred frame, *Phys. Rev. D* 64, 024028.
- [39] Hawking, S. W. (1972). Black holes in the Brans-Dicke theory of gravitation, *Commun. Math. Phys.* 25, 167-171.
- [40] Campanelli, M., Lousto, C. O. (1993). Are black holes in Brans-Dicke theory precisely the same as a general relativity?, *Int. J. Mod. Phys. D* 02, 451-462.
- [41] Bronnikov, K. A., Constantinidis, C. P., Evangelista, R. L., Fabris, J. C. (1999). Electrically charged cold black holes in scalar tensor theories, *Int. J. Mod. Phys. D* 08, 481-505.
- [42] Bhadra, A., Sarkar, K. (2005). On static spherically symmetric solutions of the vacuum Brans-Dicke theory, *Gen. Relativ. Gravit.* 37, 2189-2199.
- [43] Kim, H. (1999). New Black Hole Solutions in Brans-Dicke Theory of Gravity, *Phys. Rev. D* 60, 024001.
- [44] Park, D. H. (2007). Rotating Black Hole Solutions in the Brans-Dicke Theory, *J Kor. Phys. Soc.* 51, 258-262.
- [45] Barausse, E., Sotiriou, T. P. (2008). Perturbed Kerr Black Holes can probe deviations from General Relativity, *Phys. Rev. Lett.* 101, 099001.

- [46] Cardoso, V., Carucci, I. P., Pani, P., Sotiriou, T. P. (2013). Matter around Kerr black holes in scalar-tensor theories: scalarization and superradiant instability, *Phys. Rev. D* 88, 044056.
- [47] Nojiri, S., Odintsov, D. (2011). Unified cosmic history in modified gravity: from  $F(R)$  theory to Lorentz non-invariant models, *Phys. Rept.* 505, 59-144.
- [48] De Felice, A., Tsujikawa, S. (2010).  $f(R)$  theories, *Living Rev. Rel.* 13, 3.
- [49] Sotiriou, T. P. (2006). The Nearly Newtonian regime in non-linear theories of gravity, *Gen. Rel. Grav.* 38 1407-1417.
- [50] Faraoni, V. (2006). Solar System experiments do not yet veto modified gravity models, *Phys. Rev. D* 74 023529.
- [51] Nojiri, S., Odintsov, S. D. (2006). Modified  $f(R)$  gravity consistent with realistic cosmology: From matter dominated epoch to dark energy universe, *Phys. Rev. D* 74 086005.
- [52] Sawicki, I., Hu, W. (2007). Stability of Cosmological Solution in  $f(R)$  Models of Gravity, *Phys. Rev. D* 75 127502.
- [53] de la Cruz-Dombriz, A., Dobado, A., Maroto, A.L. (2008). On the evolution of density perturbations in  $f(R)$  theories of gravity, *Phys. Rev. D* 77, 123515.
- [54] Nzioki, A. M., Carloni, S., Goswami, R., Dunsby, P. K. S. (2010). A New framework for studying spherically symmetric static solutions in  $f(R)$  gravity, *Phys. Rev. D* 81 084028.
- [55] Myung, Y. S. (2011). Instability of rotating black hole in a limited form of  $f(R)$  gravity, *Phys. Rev. D* 84 024048.
- [56] Cognola, G., Elizalde, E., Nojiri, S., Odintsov, S. D., Zerbini, S. (2005). One-loop  $f(R)$  gravity in de Sitter universe, *JCAP* 0502, 010.
- [57] Briscese, F., Elizalde, E. (2008). Black hole entropy in modified gravity models, *Phys. Rev. D* 77, 044009.

- [58] Ernst, F. J. (1968). New formulation of the axially symmetric gravitational field problem, *Phys. Rev.* 167, 1175.
- [59] Ernst, F. J. (1968). New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II, *Phys. Rev.* 168, 1415.
- [60] Chatterjee, S., Banerji, S. (1980). Axially Symmetric Brans–Dicke Solutions, *Acta Phys. Polon. B* 11, 493 .
- [61] Tsuchida, T., Watanabe, K. (1999). Comment on the exterior solutions and their geometry in scalar-tensor theories of gravity, *Prog. Theor. Phys.* 101, 73.
- [62] Astorino, M. (2013). Embedding hairy black holes in a magnetic universe, *Phys. Rev. D* 87, 084029.
- [63] Buchdahl, H. A. (1959). Reciprocal Static Metrics and Scalar Fields in the General Theory of Relativity, *Phys. Rev.* 115, 1325-1328.
- [64] Janis, A. I., Robinson, D. C., Winicour, J. (1969). Comments on einstein scalar solutions, *Phys. Rev.* 186, 1729-1731.
- [65] Buchdahl, H. A. (1972). Static solutions of the brans-dicke equations, *Int. J. Theor. Phys.* 6, 407-412.
- [66] McIntosh, C. B. G. (1974). A family of Jordan-Brans-Dicke Kerr solutions, *Commun. Math. Phys.* 37, 335-341.
- [67] Tiwari, R. N., Nayak, B. K. (1976). Class of the Brans-Dicke Maxwell Fields, *Phys. Rev. D* 14, 2502-2504.
- [68] Eris, A., Gurses, M. (1977). Stationary Axially Symmetric Solutions of Einstein-Maxwell Massless Scalar Field Equations, *J. Math. Phys.* 18, 1303.
- [69] Nayak, B. K., Tiwari, R. N. (1977). Axisymmetric stationary Brans–Dicke vacuum fields, *J. Math. Phys.* 18, 289.
- [70] Singh, T., Rai, L. N. (1979). On stationary axially symmetric Einstein–Maxwell scalar and Brans–Dicke–Maxwell fields, *Gen. Relativ. Gravit.* 11, 37.

- [71] Kim, H., Lee, H. M. (2005). Noncommutative space-time effect on the slow roll period of inflation, *Int. J. Mod. Phys. A* 20, 6461.
- [72] Brans, C. H. (1962). Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. II, *Phys. Rev.* 125, 2194.
- [73] Baykal, A., Delice, O. (2009). Cylindrically symmetric Brans-Dicke-Maxwell solutions, *Gen Relativ. Gravit.* 41, 267-285.
- [74] Kirezli, P., Delice, O. (2016). Static Weyl type solutions of the Brans-Dicke theory, *AIP Conf. Proc.* 1722, 050003, 24-27 August, 2015, İstanbul, Turkey.
- [75] Kirezli, P., Delice, O. (2015). Stationary axially symmetric solutions in Brans-Dicke theory, *Phys. Rev. D* 92, 104045.
- [76] Carter, B. (1970). The commutation property of a stationary, axisymmetric system. *Commun. Math. Phys.* 17, 233-238.
- [77] Curzon, H. E. J. (1924). Cylindrical solutions of Einstein's gravitation equations, *Proc. London Math. Soc.* 23, 477-480.
- [78] Chazy, J. (1924). Sur la champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité, *Bull. Soc. Math. France*, 52, 17.
- [79] Griffiths, J., Podolský, J. (2009) *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, United Kingdom.
- [80] Szekeres, P., ve Morgan, F. H. (1973). Extensions of the Curzon metric, *Commun. Math. Phys.*, 32, 313-318.
- [81] Taylor, J.P. W. (2005). Unravelling directional singularities, *Class. Quantum Grav.*, 22, 4961-4971.
- [82] López-Suspes, F., González, G. A. (2014), Equatorial Circular Orbits of Neutral Test Particles in Weyl Spacetimes, *Brazilian Journal of Physics*, 44(4), 385-397.
- [83] Zipoy, D. M. (1966). Topology of some spheroidal metrics, *J. Math. Phys.*, 7, 1137-1143.

- [84] Voorhees, B. H. (1970). Static axially symmetric gravitational fields, *Phys. Rev. D*, 2, 2119-2122.
- [85] Herrera L., Paiva F. M., Santos N.O. (2000). Geodesics in the gamma spacetime, *Int.J.Mod.Phys. D*, 9, 649-660.
- [86] Kodama, H., and Hikida, W. (2003). Global structure of the Zipoy-Voorhees-Weyl spacetime and the  $\delta = 2$  Tomimatsu-Sato spacetime, *Class. Quantum Grav.*, 20, 5121-5140.
- [87] Lukes-Gerakopoulos, G. (2012). The non-integrability of the Zipoy-Voorhees metric, *Phys.Rev.D*. 86:044013.
- [88] Einstein, A., Rosen, N. (1936). Two-body problem in general relativity, *Phys. Rev.*, 49, 404-405.
- [89] Bini, D., Paolis, F.D., Geralico, A., Ingrosso, G., Nucita, A. (2005). Periastron shift in Weyl class spacetimes, *Gen.Rel.Grav.* 37, 1263-1276.
- [90] Bertotti, B. (1959). Uniform Electromagnetic Field in the Theory of General Relativity, *Phys. Rev.* 116, 1331-1333.
- [91] Robinson, I. (1959). A Solution of the Maxwell-Einstein Equations, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser.Sci. Math. Astr. Phys.* 7, 351-352 .
- [92] Tariq, N., Tupper, B. O. J. (1974). The uniqueness of the Bertotti-Robinson electromagnetic universe, *J. Math. Phys.*, 15, 2232-2235.
- [93] Debever, R. (1971). On type D expanding solutions of Einstein-Maxwell equations, *Bull. Soc. Math. Belg.*, 23, 360-376.
- [94] Plebanski, J., Demianski, M. (1976). Rotating, charged and uniformly accelerating mass in general relativity, *Ann. Physics*, 98, 98-127.
- [95] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., Hertl, E. (2003) *Exact Solutions of Einsteins Field Equations*, 2nd Edn. Cambridge.

- [96] Grenzebach, A., Perlick, V., Lämmerzahl, C. (2014). Photon Regions and Shadows of Kerr-Newman-NUT Black Holes with a Cosmological Constant, *Phys.Rev. D*89, 12, 124004.
- [97] Ernst, F. J. (1976). Black holes in a magnetic universe, *J. Math. Phys.* 17, 54.
- [98] Ernst, F. J., Wild, W. J. (1976). Kerr black holes in a magnetic universe, *J. Math. Phys.* 17, 182.
- [99] Gibbons, G. W., Mujbata, A. H., Pope, C. N. (2013). Ergoregions in Magnetised Black Hole Spacetimes, *Class. Quantum Grav.* 30, 125008.
- [100] Bonnor, W. B. (1966). An exact solution of the Einstein-Maxwell equations referring to a magnetic dipole, *Z. Phys. A.* 190, 444-445.
- [101] Emparan, R. (2000). Black diholes, *Phys. Rev. D* 61, 104009.
- [102] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. San Francisco, USA.
- [103] Bekenstein, J.D. (1970). Black holes and entropy, *Phys. Rev. D*7, 2333-2346.
- [104] Hawking, S.W. (1971). Gravitational radiation from colliding black holes, *Phys. Rev. Lett.* 26, 1344-1346.
- [105] Bardeen, J.M., Carter, B., Hawking, S. W. (1973). The Four laws of black hole mechanics, *Commun. Math. Phys.*31, 161-170.
- [106] Hawking, S.W. (1975). Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math. Phys.* 43, 199-220.
- [107] Wald, R.M. (1997). Black holes and thermodynamics. *Symposium on Black Holes and Relativistic Stars (dedicated to memory of S. Chandrasekhar)*, 14-15 Dec 1996. Chicago, Illinois.
- [108] Smarr, L. (1973). Mass formula for Kerr black holes, *Phys.Rev.Lett.* 30, 71-73.
- [109] Davies, P.C.W. (1977). Thermodynamics of Black Holes, *Proc.Roy.Soc.Lond.* A353, 499-521.

- [110] Will, C. M. (1981). Theory and experiments in gravitational physics. Cambridge University Press, New York, USA.
- [111] Will, C. M. (2005). The Confrontation between General Relativity and Experiment, Living Rev. Rel. 9, 3.
- [112] Stairs, I. H. (2003). Testing General Relativity with Pulsar Timing, Living Rev. Rel. 6, 5.
- [113] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., et al., (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, Astron.J. 116, 1009-1038.
- [114] Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., et al. (1999). Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae, Astrophys.J. 517, 565-586.
- [115] Weinberg, S. (1972). Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, New York.
- [116] Bertotti, B., Iess, L., Tortora, P. (2003). A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft, Nature 425, 374-376.
- [117] Matsuda, T. (1972). On the gravitational collapse in brans-dicke theory of gravity, Progr. Theor. Phys. 47, 738.
- [118] Romero, C., Barros A. (1993). Does Brans-Dicke theory of gravity go over to the general relativity when omega  $\rightarrow$  infinity?, Phys.Lett. A173, 243-246.
- [119] Paiva, F.M., Reboucas, M., MacCallum, M. (1993). On limits of space-times: A Coordinate-free approach, Class. Quant. Grav. 10, 1165.
- [120] Starobinsky, A. A. (1980). A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity, Phys. Lett. B91, 99-102.
- [121] Buchdahl, H. A. (1970). Non-linear Lagrangians and cosmological theory, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 150, 1.

- [122] Sotiriou, T. P. (2006),  $f(R)$  gravity and scalar-tensor theory, *Class. Quant. Grav.* 23, 5117-5128.
- [123] Albareti, F. D., Cembranos, J.A.R., de la Cruz-Dombriz, A., Dobado, A. (2013). On the non-attractive character of gravity in  $f(R)$  theories, *JCAP* 1307, 009.
- [124] Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D., Tsujikawa, S. (2007). Conditions for the cosmological viability of  $f(R)$  dark energy models, *Phys. Rev. D* 75, 083504.
- [125] Cembranos, J.A.R., de la Cruz-Dombriz, A., Romero, P.J. (2014). Kerr-Newman black holes in  $f(R)$  theories, *Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.* 11, 1450001.
- [126] Hu, W., Sawicki, I. (2007). Models of  $f(R)$  Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests, *Phys. Rev. D* 76, 064004.
- [127] Astorino, M. (2012). Charging axisymmetric space-times with cosmological constant, *JHEP* 1206, 086.
- [128] Charmousis, C. Langlois, D., Steer, D. A., Zegers, R. (2007). Rotating space-times with a cosmological constant, *J. High Energy Phys.* 0702, 064.
- [129] Akyar, L., Delice, O. (2014). On generalized Einstein-Rosen waves in Brans-Dicke theory, *Eur. Phys. J. Plus* 129, 226.
- [130] de la Cruz-Dombriz, A., Dobado, A., Maroto, A.L. (2009). Black Holes in  $f(R)$  theories, *Phys.Rev. D* 80, 124011 [düzeltme: *Phys. Rev. D* 83, 029903(E) (2011)].
- [131] Larranaga, A., (2012). A Rotating Charged Black Hole Solution in  $f(R)$  Gravity, *Pramana* 78, 697-703.
- [132] Singh, T., On Some Brans-Dicke Fields Generated From Einstein's Vacuum Fields, *Indian J. Pure Appl. Math.* 7, 482 (1976).
- [133] González, A.G., López-Suspes, F. (2014). Equatorial Circular Orbits of Neutral Test Particles in Weyl Spacetimes, *Braz.J.Phys.* 44, 385-397.

- [134] Tsuneishi, S., Watanabe, K., Tsuchida, T. (2006). Light propagation and gravitational lensing on the Weyl-like spacetime in scalar-tensor theories of gravity, *Prog.Theor. Phys.* 115, 487.
- [135] Misra, R. M., Pandey, D. B. (1972). Stationary axially symmetric fields and the kerr metric, *J. Math. Phys.* 13, 1538-1540.
- [136] Chakraborty, C. (2014). ISCOs in Kerr-Taub-NUT and Taub-NUT spacetimes, *Eur. Phys. J. C* 74, 2759.
- [137] Pradhan, P. (2015). Circular Geodesics in the Kerr-Newman-Taub-Nut Spacetime, *Class. Quantum Grav.* 32, 165001.
- [138] Chandrasekhar, S. (1992) *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, New York.
- [139] Claudel, C. M., Virbhadra, K. S., Ellis, G. F. R. (2001). The Geometry of photon surfaces, *J. Math. Phys.* 42, 818-838.
- [140] Banerjee, N., Sen, S. (1997). Does Brans-Dicke theory always yield general relativity in the infinite omega limit?, *Phys. Rev. D.* 56, 1334-1337.
- [141] Faraoni, V. (1999). Illusions of general relativity in Brans-Dicke gravity *Phys. Rev. D.* 59, 084021.
- [142] Bhadra, A., Nandi, K. K. (2001). Omega dependence of the scalar field in Brans-Dicke theory, *Phys. Rev. D.* 64, 087501.
- [143] Ciftci, D. K., Delice, O. (2015). Brans-Dicke-Maxwell Solutions for Higher Dimensional Static Cylindrical Symmetric Spacetime, *J. Math. Phys.* 56, 072502.
- [144] Kirezli, P., Ciftci, D. K., Delice, O. (2013). Higher Dimensional Cylindrical or Kasner Type Electrovacuum Solutions *Gen. Relativ. Gravit.* 45, 2251.
- [145] Chauvineau, B. (2007). Stationarity and large omega Brans-Dicke solutions versus general relativity, *Gen. Relativ. Gravit.* 39, 297-306.

- [146] Pradhan, P. (2015). Area product and mass formula for Kerr–Newman–Taub–NUT spacetime, *Mod.Phys.Lett. A*30, 35, 1550170.
- [147] Henneaux, M., Teitelboim, C. (1985). Asymptotically anti-de Sitter spaces, *Commun.Math. Phys.* 98, 391.
- [148] Caldarelli, M. M., Cognolay, G., Klemm, D. (2000). Thermodynamics of Kerr–Newman–AdS Black Holes and Conformal Field Theories, *Class.Quant.Grav.* 17,399-420.





# EKLER

## Ek A. Brans-Dicke Teorisi Aksiyon Varyasyonu

Brans-Dicke aksiyonu varyasyon hesabına başlamadan önce, gerekli bazı eşitliklerin ispatı ele alınacaktır. İlk olarak, Christoffel sembolü tanımından,

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda} (g_{\sigma\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\sigma} - g_{\sigma\nu,\lambda}) \quad (\text{A.1})$$

yazılarak, köşegen metrik için;

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma} (g_{\sigma\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\sigma} - g_{\sigma\nu,\sigma}) = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma} g_{\sigma\sigma,\nu} \quad (\text{A.2})$$

ve  $g^{\sigma\sigma} = (g_{\sigma\sigma})^{-1}$  ifadeleriyle;

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-g}_{,\nu}}{\sqrt{-g}} \quad (\text{A.3})$$

eşitliği elde edilir. Aynı zamanda, Christoffel sembolünün;

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \quad (\text{A.4})$$

varyasyonu;

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\lambda} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) + \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda} (\delta g_{\mu\lambda,\nu} + \delta g_{\lambda\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \delta g^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda} (\delta g_{\mu\lambda,\nu} + \delta g_{\lambda\nu,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda} (\delta g_{\mu\lambda;\nu} + \delta g_{\lambda\nu;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

şeklinde elde edilir. Burada, (;) kovaryant türev ifadesi için kullanılmıştır.

Jordan çerçevesinde, BD için aksiyon;

$$S_{\text{JBD}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi - (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \right) \quad (\text{A.6})$$

eşitliği ile verilmektedir. Burada,  $S_M$  madde aksiyonudur. Bu aksiyonun metriğe

göre varyasyonu;

$$\delta S = \delta \left( \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})) \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

olarak ifade edilebilir. Bu eşitliği,

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 \\ \delta S_1 &= \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \phi R) \\ \delta S_2 &= - \int d^4x \delta \left( \sqrt{-g} \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \\ \delta S_3 &= -\delta \int d^4x \delta (\sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

şeklinde ele alarak üç farklı aksiyon gibi varyasyonları incelenebilir.

$S_1$  aksiyonunun metriğe göre varyasyonu için;

$$\delta S_1 = \int d^4x (\delta(\sqrt{-g}) \phi R + \sqrt{-g} \phi \delta R) \quad (\text{A.9})$$

yazılarak birinci kısım için;

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g \quad (\text{A.10})$$

varyasyonu ile herhangi bir kare matrisi için olan temel kuralı kullanılarak

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.11})$$

ifadesi elde edilir. Aynı zamanda metrik tanımını,

$$\begin{aligned} g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} &= \delta^\mu_\nu, \\ \delta g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

eşitliğiyle

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.13})$$

ifadesine ulaşılır. İkinci kısım için  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  Ricci tensörü ifadesi ile;

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (\text{A.14})$$

elde edilirken, ilk terimde düzenleme yapmaya gerek olmadığından, ikinci terim ayrıntılı incelenmelidir. Ricci tensörü eşitliğinden

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta(\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \delta(\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) + \delta(\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \delta(\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}) \quad (\text{A.15})$$

elde edilir. Kovaryant türevin tanımı ile

$$\nabla_\rho(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) = \partial_\rho \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \delta\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \quad (\text{A.16})$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece;

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \quad (\text{A.17})$$

ile metrik uyumluluğu kullanılarak;

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \quad (\text{A.18})$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikte kovaryant türev ifadesi tekrar ele alınıp, metriğin kareköküyle çarpılmasıyla;

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} \left[ \partial_\sigma (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right. \\ &\quad \left. - \partial_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[ \partial_\sigma (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) + \left( \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} g_{\nu\sigma,\lambda} \right) g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right. \\ &\quad \left. - \partial_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) - \left( \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} g_{\nu\sigma,\lambda} \right) g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[ \partial_\sigma (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) + \frac{\sqrt{-g}_{,\lambda}}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right. \\ &\quad \left. - \partial_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) - \frac{\sqrt{-g}_{,\lambda}}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \right] \\ &= \partial_\sigma (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

sonucu elde edilir. Serbest indisler değiştirilerek;

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\nu\mu} - \sqrt{-g} g^{\mu\rho} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \quad (\text{A.20})$$

eşitliği elde edilirken, skaler alan ile çarpılan bu ifade için;

$$\begin{aligned}
\phi\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \phi\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu} - \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \\
&= \partial_\rho[(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu} - \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})\phi] \\
&\quad - (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu} - \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})\phi_{,\rho}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

yazılabilir. Burada ilk terim tam türev ifadesi olduğundan, integrali alındığında varyasyon hesabına bir katkı sağlamamaktadır. Bu durumda;

$$\phi\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu} - \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})\phi_{,\rho} \tag{A.22}$$

haline gelirken, Christoffel sembolünü varyasyonu için yazılan eşitlik (A.5) kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\phi\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= -\frac{\phi_{,\rho}\sqrt{-g}}{2}(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}(\delta g_{\nu\lambda;\mu} + \delta g_{\lambda\mu;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\lambda}) \\
&\quad - g^{\mu\rho}g^{\sigma\beta}(\delta g_{\sigma\beta;\mu} + \delta g_{\beta\mu;\sigma} - \delta g_{\sigma\mu;\beta}))
\end{aligned} \tag{A.23}$$

elde edilir. Bu eşitlikte dummy indisler değiştirilerek;

$$\begin{aligned}
\phi\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= -\frac{\phi_{,\rho}\sqrt{-g}}{2}(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}(\delta g_{\nu\lambda;\mu} + \delta g_{\lambda\mu;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\lambda}) \\
&\quad - g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}(\delta g_{\mu\nu;\lambda} + \delta g_{\nu\lambda;\mu} - \delta g_{\mu\lambda;\nu})) \\
&= -\phi_{,\rho}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}(\delta g_{\mu\lambda;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\lambda})
\end{aligned} \tag{A.24}$$

sonucuna ulaşılır. Aynı zamanda bu eşitliği;

$$\begin{aligned}
\phi\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= -\sqrt{-g}\phi^{,\lambda}(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\lambda;\nu} - g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu;\lambda}) \\
&= -\sqrt{-g}\phi^{,\lambda}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}_{;\lambda} - g_{\mu\lambda}\delta g^{\mu\lambda}_{;\lambda}) \\
&= -\sqrt{-g}\phi^{,\lambda}((g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})_{;\lambda} - (g_{\mu\lambda}\delta g^{\mu\lambda})_{;\lambda}) \\
&= -\sqrt{-g}\left((g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\phi^{,\lambda})_{;\lambda} - \mu\nu\delta g_{\mu\nu}\phi^{,\lambda}_{;\lambda} \right. \\
&\quad \left. - (g_{\mu\lambda}\delta g^{\mu\lambda}\phi^{,\lambda})_{;\lambda} + g_{\mu\lambda}\delta g^{\mu\lambda}\phi^{,\lambda}_{;\lambda}\right)
\end{aligned} \tag{A.25}$$

şeklinde de ifade etmek mümkündür. Eşitlik (A.19) gibi kovaryant türev ifadesi yazıldığında, birinci ve üçüncü terimler yine varyasyon hesabına bir katkı sağlama-

dığından;

$$\begin{aligned}\phi\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(g_{\mu\nu}\phi_{;\lambda}^{\lambda}-g_{\mu\lambda}\phi_{;\lambda}^{\lambda}\right) \\ &= \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(g_{\mu\nu}\square\phi-\phi_{;\mu;\nu}\right)\end{aligned}\quad (\text{A.26})$$

eşitliği elde edilir. Skaler alan için kovaryant türev, kısmi türeğe eşit olduğundan, son terimde ilk kısmi türev kovaryant türev olarak yazılabilir. Böylece  $S_1$  aksiyonunun metriğe göre varyasyonu için;

$$\frac{\delta S_1}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}\phi g_{\mu\nu}R + \phi R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\phi - \phi_{;\mu;\nu}\right)\quad (\text{A.27})$$

sonucuna ulaşılır.

$S_2$  aksiyonunun varyasyonu ise çok daha basit olarak elde edilir;

$$\begin{aligned}\delta S_2 &= -\int d^4x\delta\left(\sqrt{-g}\frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \\ &= -\int d^4x\left(\delta(\sqrt{-g})\frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \sqrt{-g}\frac{\omega}{\phi}\delta(g^{\mu\nu})\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \\ &= -\int d^4x\left(\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \sqrt{-g}\frac{\omega}{\phi}\delta(g^{\mu\nu})\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \\ &= -\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\omega}{\phi}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (\text{A.28})$$

Öte taraftan, madde aksiyonunun varyasyonu için, enerji-momentum tensörü

$$\begin{aligned}\delta S_3 &= -\int d^4x\left(\delta(g^{\lambda\beta}g^{\alpha\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\sigma})\sqrt{-g} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\delta(\sqrt{-g})\right) \\ &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left[\delta(g^{\lambda\beta})g^{\alpha\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\sigma} + \delta(g^{\alpha\sigma})g^{\lambda\beta}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\sigma}\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\delta g^{\mu\nu}\right]\end{aligned}\quad (\text{A.29})$$

eşitliği yazılabilir. Burada, ilk iki terimde serbest indisler değiştirilerek;

$$\frac{\delta S_3}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\int d^4x\sqrt{-g}\left[F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] = 0\quad (\text{A.30})$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikte;

$$T_{\mu\nu} = 2\left(F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)\quad (\text{A.31})$$

tanımlanabilir.

Ayrı olarak ele alınan üç aksiyon varyasyonunun toplanmasıyla;

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \square \phi - \phi_{,\mu,\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{\phi} \left( \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} \right) - T_{\mu\nu} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

eşitliği elde edilir. Köşeli parantez içerisindeki ifadenin sıfır olması gerektiğinden;

$$G_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{\phi} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} \right) - \frac{1}{\phi} (g_{\mu\nu} \square \phi - \phi_{,\mu,\nu}) \quad (\text{A.33})$$

BD aksiyonunun metriğe göre varyasyonundan, BD alan denklemi elde edilir.

Benzer şekilde, aynı aksiyonun skaler alan  $\phi$  için varyasyonu;

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \left( \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) + S_M \right) \\ &= \int d^4x \left( \sqrt{-g} R \delta \phi + \frac{\omega}{\phi^2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \delta \phi \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\omega}{\phi} (\delta(\partial_\mu \phi) \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \delta(\partial_\nu \phi)) \right) + \frac{\partial S_M}{\partial \phi} \delta \phi \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

eşitliği yazılabilir. Son terim olan madde aksiyonunun skaler alana göre varyasyonu sıfır olmaktadır. Üçüncü terim için;

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu (\delta \phi) \partial_\nu \phi &= \partial_\mu \left( \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi \delta \phi \right) \\ &\quad - \partial_\mu \left( \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi \right) \delta \phi \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

denklemi yazılırken, ilk terim yine Stoke's teoreminden sıfır olmaktadır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu (\delta \phi) \partial_\nu \phi &= \frac{\omega}{\phi^2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \delta \phi \\ &\quad - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi) \delta \phi \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

olarak elde edilir. Ek olarak;  $\frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\mu \phi \partial_\nu (\delta \phi)$  terimi de aynı sonucu vereceğinden,

bulunan sonuç ikiyle çarpılarak yazılabilir. Böylece aksiyon varyasyonu için;

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{\omega}{\phi^2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{2\omega}{\phi^2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right. \\ & \left. + \frac{2\omega}{\phi \sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) \right] \delta \phi \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece;

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square \phi \right) = 0 \quad (\text{A.38})$$

şeklinde, BD aksiyonun skaler alan  $\phi$  için varyasyonu elde edilir. Bu eşitlikte parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerektiğinden;

$$R - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square \phi = 0 \quad (\text{A.39})$$

yazılabilir. Bu eşitlik skaler alan için alan denklemi olmaktadır ve elde edilen çözümün bu eşitliği de sağlaması gereklidir. 4 boyutlu uzay-zaman için; metriğe göre varyasyondan elde edilen alan denklemi (A.33)'in izi alınarak ve eşitlik (A.39) kullanılarak;

$$(2\omega + 3) \square \phi = 0 \quad (\text{A.40})$$

sonucu elde edilir.



## Ek B. $f(R)$ Teorisi Aksiyon Varyasyonu

Metrik  $f(R)$  teorisi aksiyonu ;

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + f(R)) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (\text{B.1})$$

olarak ifade edilmektedir. Bu aksiyonun metriğe göre varyasyonu için;

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 \\ S_1 &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \\ S_2 &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \\ S_3 &= S_M \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

şeklinde ele alınarak üç aksiyonun varyasyonu incelenmelidir.

$S_1$  aksiyonunun varyasyonu daha önceki bölümlerde, kütle-çekimsel aksiyon olarak ifade edilen eşitlik (2.17) ile aynıdır. Bu nedenle;

$$\delta S_1 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{B.3})$$

olarak yazılabilir.

$S_2$  aksiyonunun varyasyonu ise;

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x (\delta \sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R)) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ \delta \sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} \left( \frac{\partial f(R)}{\partial R} \delta R \right) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ \delta \sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) f'(R) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

olarak ifade edilir. Burada,  $f'(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}$  şeklinde gösterilmiştir. Aynı zamanda,  $\delta \sqrt{-g}$  ifadesi, eşitlik (2.22)'te verildiğinden;

$$\delta S_2 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} f(R) \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) f'(R) \right] \quad (\text{B.5})$$

yazılabilir. Bu ifade de birinci ve ikinci terimler  $\delta g^{\mu\nu}$  terimi içerdiği için, bu terimleri

tekrar düzenlemeye gerek yoktur. Üçüncü terim tekrar incelenmelidir. İlk olarak, Ricci tensörü varyasyonu için

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta(\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \delta(\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) + \delta(\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \delta(\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}) \quad (\text{B.6})$$

elde edilir. Kovaryant türev tanımı eşitlik (A.16) kullanılarak

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \quad (\text{B.7})$$

sonucuna ulaşılır. Metriğin kovaryant türevinin sıfır olmasından dolayı ve serbest indisler değiştirilerek;

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \quad (\text{B.8})$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik  $f'(R)$  ile çarpılarak;

$$\begin{aligned} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= f'(R) \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) \\ &= \nabla_\sigma ((g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) f'(R)) \\ &\quad - (g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}) f'(R)_{;\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

yazılabilir. Burada, ilk terim için eşitlik (A.19)'deki gibi kovaryant türev ifadesi yazıldığında, Stoke's teoreminden aksiyon varyasyonuna bir katkı sağlamamaktadır. Christoffel sembolünün varyasyonunu veren eşitlik (A.5) kullanılarak;

$$\begin{aligned} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= (g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu} - g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\nu\mu}) f'(R)_{;\sigma} \\ &= g^{\mu\nu} g^{\sigma\beta} (\delta g_{\mu\nu;\beta} - \delta\gamma_{\mu\beta;\nu}) f'(R)_{;\sigma} \\ &= f'(R)^{;\beta} (-g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}_{;\beta} + g_{\mu\beta} \delta g^{\mu\nu}_{;\nu}) \\ &= f'(R)^{;\beta} (-g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}_{;\beta} + g_{\mu\beta} \delta g^{\mu\beta}_{;\beta}) \\ &= (-g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f'(R)^{;\beta})_{;\beta} + g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f'(R)^{;\beta}_{;\beta} \\ &\quad + (g_{\mu\beta} \delta g^{\mu\beta} f'(R)^{;\beta})_{;\beta} - g_{\mu\beta} \delta g^{\mu\beta} f'(R)^{;\beta}_{;\beta} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

sonucuna ulaşılır. Aynı zamanda, eşitlik (A.19) gibi kovaryant türev incelendiğinde,

yine burada ilk ve üçüncü terimlerin katkısı sıfır olmaktadır. Böylece;

$$\begin{aligned}
f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}f'(R)^{;\beta}{}_{;\beta}\delta g^{\mu\nu} - g_{\mu\beta}f'(R)^{;\beta}{}_{;\beta}\delta g^{\mu\beta} \\
&= g_{\mu\nu}\left(f'(R)^{;\beta}{}_{;\beta} - f'(R)^{;\nu}{}_{;\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= (g_{\mu\nu}\square f'(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R))\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece  $S_2$  aksiyonunun varyasyonu için;

$$\begin{aligned}
\delta S_2 &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}f'(R) \right. \\
&\quad \left. + g_{\mu\nu}\square f'(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) \right] \delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

sonucuna ulaşılır.

Ek olarak, madde aksiyonunun varyasyonunda, önceki çalışmalar gibi enerji-momentum tensörü  $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$  tanımlanarak;

$$\delta S_3 = \delta S_M = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{B.13}$$

eşitliği yazılabilir.

Böylece,  $f(R)$  teorisi aksiyonu  $S$ 'in metriğe göre varyasyonu için;

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f'(R)R_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + g_{\mu\nu}\square f'(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - 8\pi G T_{\mu\nu} \right) = 0
\end{aligned} \tag{B.14}$$

sonucu elde edilir. Bu eşitlikte, parantez içindeki ifadenin sıfır olması gereğinden;  $f(R)$  teorisi alan denklemleri elde edilir. Bu sonuç eşitlik (4.16)'da verilmiş ve alan denklemleri buradan hesaplanmıştır.



## Ek C. Yüzey Kütle-Çekimi

Bu kısımda, açısal momentumu olmayan test parçacıkları için, eksenel simetrik uzay-zamanda yüzey kütle çekimi eşitliği elde edilecek ve KNTNAdS için bu sonuç ele alınacaktır. İlk olarak, durağan, eksenel simetrik uzay-zaman için;

$$ds^2 = -Adt^2 + B(d\varphi - Hdt)^2 + Cdr^2 + Dd\theta^2 \quad (\text{C.1})$$

metriği seçilmiştir ve burada metrik fonksiyonları koordinatlar  $r, \theta$ 'nın birer fonksiyonudur. Bu metriğin oluşturduğu uzay-zamanda hareket eden bir test parçacığının korunumlu büyüklükleri;

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} &= L = B\dot{\varphi} - BH\dot{t} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} &= E = (-A + BH^2)\dot{t} - BH\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Lagrangian eşitliğinden elde edilir. Böylece;

$$\begin{aligned} \dot{t} &= -\frac{HL + E}{A} \\ \dot{\varphi} &= \frac{L}{B} - \frac{H(HL + E)}{A} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

yukarıdaki eşiliklerin düzenlenmesiyle sonuçlarına ulaşılır. Öte taraftan;

$$\begin{aligned} u &= u^\mu\partial_\mu \\ \tilde{u} &= u_\mu dx^\mu \\ K^{(a)} &= \zeta^\mu\partial_\mu^{(a)} \Rightarrow K^{(t)} = \partial_t, \quad K^{(\varphi)} = \partial_\varphi \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

hız vektörü, hız bir-formu ve eksenel simetri için Killing vektörleri tanımlanabilir. Bu eşitlikler ile korunumlu büyüklükler;

$$\begin{aligned} i_{K^{(\varphi)}}\tilde{u} &= i_{\partial_\varphi}(u_t dt + u_\varphi d\varphi) = u_\varphi \\ i_{K^{(t)}}\tilde{u} &= i_{\partial_t}(u_t dt + u_\varphi d\varphi) = u_t \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

şeklinde,  $u_\varphi$ ,  $u_t$  açısal momentum ve enerji olmak üzere, korunumlu büyüklükler olarak ifade edilebilir. Açısal momentum sıfır olduğunda ( $L = u_\varphi = 0$ )

$$u^t = g^{tt}u_t, \quad u^\varphi = g^{\varphi t}u_t \quad (C.6)$$

elde edilir. Aynı zamanda; aksel simetrik metrik (C.1) için açısal hız;

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{g^{t\varphi}}{g^{tt}} = H \quad (C.7)$$

olmaktadır.

Aynı zamanda, kara deliğin ufuklarında yüzey kütle-çekimi;

$$\kappa_\pm = \lim_{r \rightarrow r_\pm} \frac{\sqrt{a^\mu a_\mu}}{u^t} \quad (C.8)$$

şeklinde  $a^\mu$  ivme ve dörtlü hız  $u = u^t (\partial_t + \Omega \partial_\varphi)$  ile tanımlanmaktadır. Dörtlü hızın normalizasyonundan;

$$-1 = u^\mu u_\mu = (u^t)^2 (g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}) \quad (C.9)$$

eşitliği elde edilir. Aynı zamanda, parçacığın ivmesi;

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda \quad (C.10)$$

olarak tanımlanmasıyla;

$$a^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \ln(u^t)^2 \quad (C.11)$$

sonucuna ulaşılır. Buradaki hız vektörü için;

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} \quad (C.12)$$

yazılabilir ve metrik (C.1) kullanılarak sıfır açısal momentum için;

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (C.13)$$

elde edilir. Buradan;

$$a_\mu a^\mu = \left| g^{rr} \left( -\frac{1}{2} \frac{A_{,r}}{A} \right) \right| + \left| g^{\theta\theta} \left( -\frac{1}{2} \frac{A_{,\theta}}{A} \right) \right| \quad (C.14)$$

sonucuna ulaşılır ve böylece yüzey kütle-çekimi;

$$\begin{aligned}\kappa_{\pm} &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \sqrt{\left|g^{rr} \frac{A_{,r}}{4A^2}\right| + \left|g^{\theta\theta} \frac{A_{,\theta}}{4A^2}\right|} \frac{1}{u^t} \\ &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \sqrt{\left|g^{rr} \frac{A_{,r}}{4A}\right| + \left|g^{\theta\theta} \frac{A_{,\theta}}{4A}\right|}\end{aligned}\quad (\text{C.15})$$

elde edilir. Genellikle, ufuk yarıçapları  $r_{\pm}$  için,  $A_{,\theta}$  sifira gitmektedir. Bu durumda yüzey kütle-çekimi eşitliği;

$$\kappa_{\pm} = \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \frac{1}{2} \sqrt{g^{rr}} \frac{A_{,r}}{A} \quad (\text{C.16})$$

olarak bulunur.

Tez boyunca ele alınan durağan, aksenal simetrik metrik (2.6) ile yüzey kütle-çekimi hesabı için kullanılan metrik (C.1) karşılaştırıldığında;

$$A = \frac{W^2}{e^{-2U} W^2 - e^{2U} \mathcal{A}^2} \quad (\text{C.17})$$

eşitliği kolayca elde edilir.

İlk olarak, KN kara deliğini tanımlayan eşitlik (3.26) kullanılarak, yüzey kütle-çekimi için;

$$\begin{aligned}\kappa_{\pm} &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \frac{1}{2} \frac{\Delta_{,r}}{r^2 + a^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \frac{1}{2} \frac{2r - 2m}{r^2 + a^2} \\ &= \frac{r_{\pm}^2 - a^2 - q^2}{2r_{\pm} (r_{\pm}^2 + a^2)}\end{aligned}\quad (\text{C.18})$$

sonucu elde edilir.

Benzer şekilde, KNTN metriği BD çözümü olan eşitlik (7.18) için, yüzey kütle-çekimi hesabı için gereken büyüklükler;

$$\begin{aligned}g^{rr} &= \frac{\Delta}{(\sqrt{\Delta} \sin \theta)^{(k-1)+(1-k)^2(\omega+3/2)}} \\ A &= \frac{(\Delta - \sin^2 \theta)^k}{\frac{\rho^2 (\Delta \sin^2 \theta)^k}{(\sqrt{\Delta} \sin \theta)^{k-1} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)} - \frac{(\sqrt{\Delta} \sin \theta)^{k-1} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \mathcal{A}_B^2}{\rho^2}}\end{aligned}\quad (\text{C.19})$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte açıkça görüldüğü gibi,  $A$ 'nın  $r$ 'ye göre türevi ifadesi her zaman bir  $\Delta$  ifadesi içermekte ve bunu götüreceği bir çarpan olmadığından, KNTN BD çözümü için yüzey kütle-çekimi sıfır olmaktadır.

Bir diğer yüzey kütle-çekimi hesabı, KNTNAdS  $f(R)$  çözümü olarak verilen metrik (8.4) için yapılmıştır. Bu metrik ile diğer durağan, eksenel simetrik metrik (C.1) karşılaştırıldığında;

$$\begin{aligned} g^{rr} &= \frac{\Delta_r}{\rho^2} \\ A &= \frac{\Delta_r \rho^2}{\frac{-\Delta_r h^2}{\Delta_\theta + (r^2 + a^2 + n^2)^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

elde edilir. Bu eşitlikler yüzey kütle-çekimi eşitliği (C.16) yerine koyulduğunda;

$$\begin{aligned} \kappa_\pm &= \lim_{r \rightarrow r_\pm} \frac{1}{2} \frac{\Delta_{r,r}}{\sqrt{\frac{-\Delta_r h^2}{\Delta_\theta \sin^2 \theta} + (r^2 + a^2 + n^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2(r_\pm^2 + a^2 + n^2)} \lim_{r \rightarrow r_\pm} \Delta_{r,r} \\ &= \frac{1}{2r_\pm} \left[ \frac{|R_0|}{4} r_\pm^4 + r_\pm^2 \left( 1 + \frac{|R_0|}{12} (a^2 + 6n^2) \right) - a^2 + n^2 - q^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{|R_0| n^2}{4} (a^2 - n^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

sonucuna ulaşılır.

## ÖZGEÇMİŞ

Pınar Kirezli 1986 yılında Tekirdağ'da dünyaya gelmiştir. Lise öğrenimini 2003 senesinde, İstanbul Çapa Anadolu Öğretmen Lisesinde bitirip, Boğaziçi Üniversitesi Fizik Öğretmenliği Bölümünde lisans eğitimini tamamlamıştır. 2009 yılında Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde fizik anabilim dalında yüksek lisans eğitimine ve yine aynı yıl Namık Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlamıştır. 2011 yılında ise yüksek lisans eğitimini "Yüksek Boyutlu, Statik, Silindirel Simetrik Uzay-zamanlarda Einstein-Maxwell Çözümleri" başlıklı tezi ile tamamlamış ve Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik anabilim dalında doktora eğitimine başlamıştır. Bu süre zarfında danışmanı sayın Prof. Dr.Özgür DELİCE ile su anda sunma asamasına gelinen Doktora tez çalışması tamamlanmıştır.

### Akademik Çalışmalar:

- SCI (Science Citation Index), SSCI (Social Science Citation Index), AHCI (Arts and Humanities Citation Index) tarafından taranan dergilerde yayımlanan teknik not, editöre mektup, tartışma, vaka takdimi ve özet türünden yayınlar dışındaki makaleler;
  1. "Stationary axially symmetric solutions in Brans-Dicke theory" Pınar Kirezli and Özgür Delice, Phys. Rev. D 92, 104045, (2015).
  2. "Higher dimensional cylindrical or Kasner type electrovacuum solutions", Delice Ö., Kirezli P., Kazıcı D., Gen. Relativ. Gravit. 45:2251–2272, (2013).
- Uluslararası kongre, sempozyum, panel gibi bilimsel toplantılarda sunularak, programda yer alan tam metin olarak yayımlanan bildiriler;
  1. "Static Weyl type solutions of the Brans-Dicke theory" Pınar Kirezli and Özgür Delice, AIP Conf. Proc. 1722, 050003 (2016), 9th International

Physics Conference of the Balkan Physical Union (BPU-9), August 24 – 27, 2015.

- Uluslararası kongre, sempozyum, panel gibi bilimsel toplantılarda sunulacak, programda yer alan özet metin olarak yayınlanan bildiri ya da poster veya gösteri;

1. "Einstein-Maxwell Solutions of N-Dimensional Static, Cylindrically Symmetric Space-time". O. Delice, D.K. Ciftci, P. Kirezli Turkish Physical Society 28th International Congress, 6-9 September 2011.

Mayıs, 2016

Pınar Kirezli