

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIRALAMA BAĞINTISI İLE İLİŞKİLENDİRME
BAĞLAMINDA İLKÖĞRETİM MATEMATİK
ÖĞRETMEN ADAYLARININ SIRALAMA
KAVRAMINA YÖNELİK ÖĞRENME
GÜÇLÜKLERİNİN İNCELENMESİ

Mustafa AKDEMİR

İzmir

2016

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIRALAMA BAĞINTISI İLE İLİŞKİLENDİRME
BAĞLAMINDA İLKÖĞRETİM MATEMATİK
ÖĞRETMEN ADAYLARININ SIRALAMA
KAVRAMINA YÖNELİK ÖĞRENME
GÜÇLÜKLERİNİN İNCELENMESİ

MUSTAFA AKDEMİR

Danışman
Doç. Dr. Serkan NARLI

İzmir
2016

YEMİN

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum “Sıralama Bağıntısı ile İlişkilendirme Bağlamında İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sıralama Kavramına Yönelik Öğrenme Güçlüklerinin İncelenmesi” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynak dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara ait atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

02/05/2016

Mustafa AKDEMİR

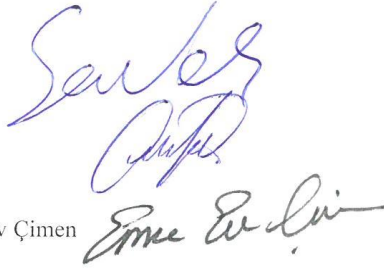
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Eğitimi Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Serkan Narlı

Üye : Doç. Dr. Cenk Keşan

Üye : Yrd. Doç. Dr. Emre Ev Çimen



Onay

Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

25/05/2016



Prof. Dr. Ali Günay BALIM
Enstitü Müdürü

05.06.2016

Ulusal Tez Merkezi | Tez Form Yazdır

T.C
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞİ VE YAYIMLAMA İZİN FORMU

Referans No	10111283
Yazar Adı / Soyadı	MUSTAFA AKDEMİR
Uyruğu / T.C.Kimlik No	TÜRKİYE / 46387590574
Telefon	5068870155
E-Posta	akdemir368@gmail.com
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	SIRALAMA BAĞINTISI İLE İLİŞKİLENDİRME BAĞLAMINDA İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ SIRALAMA KAVRAMINA YÖNELİK ÖĞRENME GÜÇLÜKLERİNİN İNCELENMESİ
Tezin Tercümesi	Investigation of Prospective Elementary Mathematics Teachers' Learning Disabilities Towards Notion of Order in the Context of Making Connection With Order Relation
Konu	Eğitim ve Öğretim = Education and Training
Üniversite	Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Bilim Dalı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı
Tez Türü	Yüksek Lisans
Yılı	2016
Sayfa	208
Tez Danışmanları	DOÇ. DR. SERKAN NARLI 18353521738
Dizin Terimleri	
Önerilen Dizin Terimleri	Sıralama Bağıntısı=Order Relation , Sıralama Kavramı=Notion of Order Öğrenme Güçlükleri=Learning Disabilities, Kavram İmgesi=Concept İmage Kavram Tanımı=Concept Definition Matematik Eğitimi=Mathematics Education , Öğretmen adayları=Prospective Teachers
Kısıtlama	12 ay süre ile kısıtlı

Tezimin,Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanında arşivlenmesine izin veriyorum. Ancak internet üzerinden tam metin açık erişime sunulmasının 05.06.2017 tarihine kadar ertelenmesini talep ediyorum. Bu tarihten sonra tezimin, bilimsel araştırma hizmetine sunulması amacı ile Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi tarafından internet üzerinden tam metin erişime açılmasına izin veriyorum.

NOT: Erteleme süresi formun imzalandığı tarihten itibaren en fazla 3 (üç) yıldır.

05.06.2016

İmza:.....

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın hazırlanmasında değerli düşüncelerini ve yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Serkan NARLI olmak üzere Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'ndaki tüm hocalarıma içten şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana anlayış gösteren ve içten bir şekilde sorularımızı yanıtlayan öğrencilerimize teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca aldığım kararlarda yanımda olan kıymetli eşim Tuğba Şengül Akdemir'e, değerli annem Emine Akdemir'e, değerli arkadaşlarım Muhammet Kaşıkçı, Görkem Avcı ve Ozan Pala'ya sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Mustafa Akdemir

Mayıs 2016

İÇİNDEKİLER

YEMİN METNİ.....	i
TUTANAK	ii
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU DOKÜMANTASYON MERKEZİ TEZ VERİ FORMU	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
TABLO LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	xii
ABSTRACT.....	xiv

BÖLÜM I

GİRİŞ	1
Problem Durumu	3
Sıralama Kavramı ve sıralama bağıntısı ilişkisi	6
Sıralama Bağıntısı	7
Matematiksel İlişkilendirme.....	8
Kuramsal Çerçeve	9
Araştırmanın Amacı ve Önemi	10
Problem	12
Problem Cümlesi	12
Alt Problemler	13
Sayıtlılar	13
Sınırlılıklar	13
Tanımlar	13
Öğrenme	13
Öğrenme Güçlüğü	14
Bağıntı	14
İnformel Bilgi	14

Kısaltmalar	14
-------------------	----

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR.....	15
--	-----------

BÖLÜM III

YÖNTEM.....	20
--------------------	-----------

Araştırma Modeli	20
Çalışma Grubu.....	22
Veri Toplama Araçları	23
Sıralama Kavramı Bilgi Testi.....	23
Sıralama Bağıntısı Kavramları Bilgi Testleri(1-2)	24
Öğretmen Adaylarıyla Yapılan Görüşmeler.....	26
Veri Çözümleme Teknikleri	27

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM.....	29
-------------------------------	-----------

SKBT ile İlgili Bulgular	29
SKBT 1. Sorusuna ait Bulgular.....	30
SKBT 2. Sorusuna ait Bulgular.....	37
SKBT 3. Sorusuna ait Bulgular.....	42
SKBT 4. Sorusuna ait Bulgular.....	49
SKBT 5. Sorusuna ait Bulgular.....	52
SKBT 6. Sorusuna ait Bulgular.....	58
SKBT 7. Sorusuna ait Bulgular.....	62
SKBT 8. Sorusuna ait Bulgular.....	66
SKBT 9. Sorusuna ait Bulgular.....	70
SKBT 10. Sorusuna ait Bulgular.....	74
SKBT 11. Sorusuna ait Bulgular.....	79
SKBT 12. Sorusuna ait Bulgular.....	84
SBKBT-1'e ait Bulgular	89

SBKBT-1'in 1. Sorusuna ait bulgular	89
SBKBT-1'in 2. Sorusuna ait bulgular	92
SBKBT-1'in 3. Sorusuna ait bulgular	96
SBKBT-1'in 4. Sorusuna ait bulgular	99
SBKBT-1'in 5. Sorusuna ait bulgular	102
SBKBT-1'in 6. Sorusuna ait bulgular	105
SBKBT-1'in 7. Sorusuna ait bulgular	107
SBKBT-1'in 8. Sorusuna ait bulgular	110
SBKBT-2'ye ait Bulgular	112
SBKBT-2'nin 1. Sorusuna ait bulgular	112
SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkkına ait bulgular	112
SBKBT-2'nin 1. Sorusunun b şıkkına ait bulgular	122
SBKBT-2'nin 1. Sorusunun c şıkkına ait bulgular	126
SBKBT-2'nin 2. Sorusuna ait bulgular	130
SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkına ait bulgular	130
SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şıkkına ait bulgular	141
SBKBT-2'nin 3. Sorusuna ait bulgular	152
SBKBT-2'nin 4. Sorusuna ait bulgular	155

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER 158

Sonuç ve Tartışma	158
SBKBT'ye Ait Bulgulara İlişkin Sonuç ve Tartışma	158
SBKBT-1 ve SBKBT-2'ye Ait Bulgulara İlişkin Sonuç ve Tartışma	166
SBKBT-1'e Ait Bulguların Tartışılması	166
SBKBT-2'ye Ait Bulguların Tartışılması	169
Öneriler	173
KAYNAKÇA	178
EKLER	184
EK1	185
EK2	186
EK3	187

EK4.....	189
EK5.....	190



TABLO LİSTESİ

Tablo 1	SKBT 1. Sorusuna ait Kategoriler.....	30
Tablo 2	SKBT 2. Sorusuna ait Kategoriler.....	38
Tablo 3	SKBT 3. Sorusuna ait Kategoriler.....	43
Tablo 4	SKBT 4. Sorusuna ait Kategoriler.....	49
Tablo 5	SKBT 5. Sorusuna ait Kategoriler.....	52
Tablo 6	SKBT 6. Sorusuna ait Kategoriler.....	58
Tablo 7	SKBT 7. Sorusuna ait Kategoriler.....	62
Tablo 8	SKBT 8. Sorusuna ait Kategoriler.....	66
Tablo 9	SKBT 9. Sorusuna ait Kategoriler.....	70
Tablo 10	SKBT 10. Sorusuna ait Kategoriler.....	74
Tablo 11	SKBT 11. Sorusuna ait Kategoriler.....	79
Tablo 12	SKBT 12. Sorusuna ait Kategoriler.....	84
Tablo 13	SBKBT-1'in 1. Sorusuna ait Kategoriler	91
Tablo 14	SBKBT-1'in 2. Sorusuna ait Kategoriler	95
Tablo 15	SBKBT-1'in 3. Sorusuna ait Kategoriler	98
Tablo 16	SBKBT-1'in 4. Sorusuna ait Kategoriler	101
Tablo 17	SBKBT-1'in 5. Sorusuna ait Kategoriler	104
Tablo 18	SBKBT-1'in 6. Sorusuna ait Kategoriler	106
Tablo 19	SBKBT-1'in 7. Sorusuna ait Kategoriler	108
Tablo 20	SBKBT-1'in 8. Sorusuna ait Kategoriler	112
Tablo 21	SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan maksimum ve minimum elemanlara ait kategoriler	114
Tablo 22	“SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan maksimal elemanlara ait Kategoriler	115
Tablo 23	SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan minimal elemanlara ait Kategoriler.....	116
Tablo 24	SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan üst sınırlar ile supremuma ait Kategoriler.....	118

Tablo 25	SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkkında bulunan alt sınır ile infimuma ait Kategoriler.....	120
Tablo 26	SBKBT-2'nin 1. Sorusunun b şıkkına ait kategoriler	125
Tablo 27	SBKBT-2'nin 1. Sorusunun c şıkkındaki sınırsız küme tanımına ait Kategoriler.....	127
Tablo 28	SBKBT-2'nin 1. Sorusunun c şıkkında yazılan sınırsız küme örneklerine ait Kategoriler	128
Tablo 29	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkının maksimum elemanlarına ait Kategoriler.....	131
Tablo 30	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkının minimum elemanlarına ait Kategoriler.....	132
Tablo 31	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki maksimal elemanlara ait kategoriler	133
Tablo 32	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki minimal elemanlara ait kategoriler.	134
Tablo 33	SBKBT-2'nin2. Sorusunun a şıkkındaki alt sınır ile infimuma ait Kategoriler.....	136
Tablo 34	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki üst sınır ile supremuma ait Kategoriler.....	137
Tablo 35	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki kümenin sınırlılığine ait Kategoriler.....	139
Tablo 36	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şıkkındaki maksimum elemanlara ait Kategoriler.....	142
Tablo 37	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şıkkındaki minimum elemanlara ait Kategoriler.....	144
Tablo 38	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şıkkındaki maksimal elemanlara ait Kategoriler.....	145
Tablo 39	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şıkkındaki minimal elemanlara ait Kategoriler.....	146
Tablo 40	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şıkkındaki alt sınır ve infimuma ait Kategoriler.....	148

Tablo 41	SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şikkındaki üst sınır ve supremuma ait Kategoriler.....	150
Tablo 42	SBKBT-2'nin 3. Sorusuna ait Kategoriler	154
Tablo 43	SBKBT-2'nin 4. Sorusuna ait Kategoriler	157



ÖZET

Sıralama Bağıntısı ile İlişkilendirme Bağlamında İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sıralama Kavramına Yönelik Öğrenme Güçlüklerinin İncelenmesi

Mustafa AKDEMİR

Sıralama bağıntısı soyut matematiğin önemli kavramlarından biri olup, sıralama bağıntıları sayesinde bir kümenin elemanları sıralanabilir ve bu kümenin maksimum, minimum, supremum, infimum maksimal ve minimal elemanları belirlenebilir. Dolayısıyla matematikte veya günlük hayatta herhangi bir sıralamadan söz edildiğinde farkında olmasak da dip metinde bir sıralama bağıntısı kullanılır. Oysa öğrenciler genelde sıralama kavramı ile sıralama bağıntısının bu ilişkisinin farkında olmayıp, sıralama bağıntısının sadece belli özellikleri sağlayan bir bağıntı olduğunu düşünmektedirler. Bu bağlamda informal olarak günlük hayatta kullanılan sıralama kavramının, akademik yaşantıda sıralama bağıntıları ile ilişkilendirilmesi gerektiği söylenebilir. Bu bağlamda, bu araştırmanın amacı, ilköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının sıralama kavramına ilişkin informal bilgilerinin, soyut matematik dersinde sıralama bağıntıları konusu ile karşılaşmalarından sonra formal bilgiye çevriminde karşılaşılan güçlükleri ortaya çıkarmak, sıralama kavramını sıralama bağıntısı ne derecede ilişkilendirdikleri ortaya koymak ve sıralama bağıntısı konusundaki daha ileri düzey kavramlara ilişkin öğrenme güçlüklerini ortaya koymaya çalışmaktır. Bu amaçla, araştırmada kavram imgesi-kavram tanımı teorik perspektifi kullanılmıştır.

Hazırlanan bu çalışma betimsel türde olup nitel bir çalışmadır. Araştırma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (case study) niteliği taşımaktadır.

Veri toplama aracı olarak açık uçlu üç ayrı test hazırlanmıştır. Bunlar sırasıyla, sıralama kavramı ile ilgili genel ifadeli sorulardan oluşan “sıralama kavramı bilgi

testi”, sıralama bağıntısı konusundaki daha ileri kavramlar ile ilgili olan “sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1” ve “sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi -2” dir. Uygulanacak ilk test olan sıralama kavramı bilgi testindeki sorular, sıralama kavramı ile ilgili genel ifadeli sorulardan oluşmakta olup bu kavram ile ilgili informal bilgileri ölçmeye yöneliktir. Bu test, ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıfta okuyan 100 öğretmen adayına, sıralama bağıntısı konusu ile karşılaşmalarından önce ve karşılaşmalarından sonra olmak üzere, iki kez uygulanmıştır. Böylece konu ile formal olarak karşılaşmanın sıralama kavramı konusundaki informal bilgilere etkisi incelenecektir. Diğer iki test ise sıralama bağıntıları konusuna ilişkin olan ve bu konudaki poset, maksimal-minimal elemanlar, infimum-supremum, alt sınır-üst sınır gibi daha ileri kavramları içeren, daha derinlemesine bilgileri ölçen testlerdir ve sıralama bağıntısı konusundaki kavramlar ile öğretmen adayları karşılaştıkça, bunlar uygulanmıştır. Verileri daha iyi yorumlamak adına yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğrencilerin yazılı olarak verdikleri cevapların altında yatan nedenler ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Açık uçlu testlerden ve görüşmelerden elde edilen veriler içerik analizi ile incelenmiştir.

Öğretmen adaylarının sıralama kavramı ile ilgili hem informal hem de formal düzeyde çeşitli kavram imgelerine sahip oldukları tespit edilmiş, sıralama kavramına ilişkin düşüncelerinde, reel sayılardaki adi sıralamanın ($1 < 3$, $3 < 5$ vb.) hakim olduğu tespit edilmiştir. Buna paralel olarak öğretmen adaylarının sıralama kavramını, sıralama bağıntısı ile ilişkilendirmede yani kavramı formal olarak anlamada ve sıralama bağıntısındaki ileri düzey kavramlarda çeşitli güçlükler yaşadıkları tespit edilmiş, bu güçlüklerle ilişkin öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sıralama bağıntısı, sıralama kavramı, matematikte öğrenme güçlüğü, matematiksel ilişkilendirme, kavram imgesi-kavram tanımı

ABSTRACT

Investigation of Prospective Elementary Mathematics Teachers' Learning Disabilities Towards Notion of Order in the Context of Making Connection With Order Relation

Mustafa AKDEMİR

Order relation is one of the important concepts in abstract mathematics. By using order relations, the elements of a set can be ordered and the maximum, minimum, supreme, infimum, maximal and minimal elements of this set can be determined. In daily life whenever a comparison is done such as big-small, thin-fat, rich-est-poorest etc., we can say that order relation is a intrinsic part of these comparisons. Nevertheless, it may be thought that students generally may not be aware of these associations between the daily usage and the concept of order relation which they learn in university. In this context, it can be thought that the concept of order used informally in daily life can be associated with the concept of order relation in an academic setting. For this reason, the purpose of this study is to investigate how and to what extent the informal information regarding order concept of prospective elementary mathematics teachers are transformed into formal information after the subject of order relation meeting in abstract mathematics course and is to determine difficulties of prospective mathematics teacher regarding the advanced level concepts in the subject of order relation. In addition, Tall and Vinner's concept definition-concept image theoretical framework was used in the study.

This study is a descriptive and qualitative study and it has the characteristics of case study from qualitative research methods.

It was developed three separate tests that included open-ended questions in order to collect data. These are respectively “questionnaire of notion of order” that

consisted of unspecific questions regarding notion of order, “questionnaire of order relation concepts -1” and “questionnaire of order relation concepts-2” that consisted of more advanced level questions regarding concepts in the subject of order relation. The questions in questionnaire of notion of order that firstly applied to prospective mathematics teachers have unspecific quality and are intended for investigate informal information about this concept. The questions were raised to 100 students twice before and after meeting the subject of order relation. Thus, the effects of meeting with the subject formally on informal information related to notion of order was investigated by the researcher. Other two questionnaire are consisted of concepts such as partially ordered set, maximum, minimum, supreme, minimum, maximal and minimal elements. These questionnaire was applied while prospective mathematics teachers learned the subject of order relation. Semi-structured interviews were conducted with prospective teachers in order to interpret the written data in more detail. The data obtained from the questionnaires and the interviews were analyzed using content analysis.

It was founded that prospective teachers have various concept images regarding notion of order both in informal and formal level and that the well-known usage of order ($1 < 3$, $3 < 5$ etc.) in their opinions regarding notion of order is dominant. In parallel with this, it was revealed that prospective teachers have various difficulties in grasping notion of order formally and in understanding of advanced level concepts in order relation.

Key Words: Order relation, notion of order, learning disabilities, making mathematical connections, concept image-concept definition

BÖLÜM I

GİRİŞ

“Matematik nedir?” diye düşündüğümüzde, bu soruya çok farklı şekillerde yanıtlar verilebilir.

Türk Dil Kurumu sözlüğünde matematik “biçim, sayı ve çoklukların yapılarını, özelliklerini ve aralarındaki bağıntıları mantık yoluyla inceleyen, aritmetik, cebir, geometri gibi dallara ayrılan bilim kolu” olarak tanımlanmıştır (TDK, 2014). Matematik, kendi içinde anlamlı ilişkilerin bulunduğu, kendine özgü bir terminolojiye sahip bir dildir (MEB, 2013). Aslında insanlık tarihinin de en eski bilimlerinden biri olan matematik, birbirleriyle bağlantılı sistemler bütünüdür.

Matematikte tanım ve kavramlar bir bütün içerisinde değerlendirilerek ele alınmalı ve öğrenilmelidir (Özdemir, 2000). Yani matematik birbirlerinden kopuk bir şekilde ele alınamayacak yapıların olduğu evrensel bir dildir. Bu dili gereklilikleriyle anlamak, akıl yürütme becerilerini ve eleştirel düşünmeyi de içeren uzun ve karmaşık bir süreçtir denebilir.

Diğer bilimlerle ilişkisi göz önünde bulundurulduğunda matematiğin aslında hemen hemen bütün bilimlerin temelinde bulunduğu yadsınamaz bir gerçektir. Örneğin fizik, kimya ve astronomi gibi fen bilimleri açısından ele alınırsa, matematik olmadan bu bilimlerin var olabilmesi, gelişimini sürdürebilmesi mümkün değildir. Kısaca matematik, dünyayı anlamlandırılmamızda temel bir araçtır denebilir.

Matematiğin bir kısmı toplumda pratik değer taşıyan, günlük hayatımızdaki hesaplamaları yapabilmek için ön plana çıkarken, bir kısmı ise matematiğin temel

dilini bize öğreten, ispat ve teoremlerin olduğu, soyut kavramlar üzerinde çalışan matematik dalıdır. Bunlardan ilkin somut matematik, ikincisine de soyut matematik denebilir (Alkan ve Altun, 1998).

Soyut matematikte yer alan kavramlar ve notasyonlar, aslında matematiğin temelini oluşturur ve matematiksel dili en iyi şekilde kullanmayı, neyin nereden geldiğini görmeyi, kısacası sağlam bir matematik anlayışı geliştirmeyi sağlarlar. Bu açıdan düşünüldüğünde pratik değer taşıyan ve genellikle bireyler tarafından daha işe yarar görülen somut matematiğin yanında soyut matematiğin de önemi görmezden gelinemez denebilir. Matematiğin temel yapısını oluşturan aksiyomlar ve teoremlerin önemi de geri plana atılamaz.

Bu noktada matematik eğitiminin amacından da bahsetmek gerekir. Ernest (1996)'ya göre matematiğin doğası ile öğretme kavramları arasındaki ilişki nedir sorusu, matematik eğitiminin felsefesini araştırmada temel alınan sorudur. Eğer matematiğin doğasını gerektiği gibi anlayabilirsek, o zaman en uygun öğretme ortamları sağlayarak matematik eğitiminde ilerleme kaydedebiliriz.

Matematiksel kavramların anlaşılmasını kolaylaştırmak, matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmek ve matematikte problem çözme becerilerini geliştirmek matematik eğitiminin temel amaçları arasındadır. Bunun yanında topluma her yönden donanımlı bireyler kazandırmak ve çağdaş uygarlıktan geri kalmamak iyi bir matematik eğitimiyle mümkündür. Matematik eğitiminin amacı matematiğin ne olduğunu anlatmak ve bireylere matematiği öğretmektir. Matematik öğretiminin etkili bir şekilde yapılması bireylerin matematik okuryazarlığını artırmak ve insanların matematikte daha çok temel beceriler elde edebilmesi için önem arz etmektedir (Aydoğdu ve Yenilmez, 2012).

Matematik eğitimi araştırmalarında önem arz eden bir başka noktanın da üniversite seviyesinde yapılan matematik araştırmaları olduğu söylenebilir. Üniversite seviyesinden kasıt, ülkemizde ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programlarında okutulan derslerdir. Ülkemize en donanımlı şekilde

öğretmen yetiştirmeyi amaçlayan bu programlarda okutulan matematik derslerinin önemi öğretmen adayları yani geleceğin öğretmenleri için önem arz etmektedir. Matematiğin temel dilini öğretmen adaylarına en iyi şekilde kazandıracak olan bu derslerden biri de soyut matematik dersidir.

Matematik öğretimi, öğrencilerin matematiksel kavramları ve matematiksel işlemleri anlayarak, kavramlar ve işlemlerin arasındaki bağları oluşturmalarına yönelik olmalıdır (Soylu ve Aydın, 2006). Bu noktada da matematikte kavramsal ve işlemsel bilginin dengelenmesi büyük önem arz etmektedir. Matematiği öğrenme iki tip bilginin; kavramsal bilgi (conceptual knowledge) ve işlemsel bilgi (procedural knowledge) var olduğu araştırmacılar tarafından belirtilmiştir (Van de Walle, 2004). “İşlemsel bilgi, alıştırmaları çözmek için kullanılan işlem, kural bilgisi ve matematiği temsil etmek için kullanılan semboller bilgisidir” (Van De Walle, 2004; Kar, Çiltaş ve Işık, 2011’den alıntı). Kavramsal bilgi ise sadece o kavramı ezbere bilmek değil, kavramlar arasındaki bağlantıları da görebilmektir. Genel olarak matematiği öğretmede işlemsel bilgi hep daha ön planda tutulmuş, kavramsal bilgi geri plana itilmiştir. Bu da öğrencilerin matematiksel kavramları layıkıyla öğrenebilmesinin önüne geçmektedir. Fakat matematikte kalıcı ve işlevsel bir öğrenme için temel koşul işlemsel ve kavramsal bilginin dengelenmesidir (Baki, 1998).

Her alanda olduğu gibi matematik öğretiminde de istenmeyen durumların ortaya çıkması normal olarak karşılanabilir. Matematik öğretiminin icrası sırasında ve sonrasında matematiksel kavramların eksik ya da yanlış anlaşılmasından kaynaklı çeşitli kavramsal yanlışlar mevcut olabilmekte ve öğrenme güçlüğü yaşayan öğrenciler bulunabilmektedir. Matematik öğretiminde çeşitli teorik yaklaşımlarla bu hataların tespit edilip, bu hataların üzerinde durularak ve etkili öğrenme ortamları düzenlenerek bu yanlış ve hataların giderilmesi amaçlanmaktadır.

1.1. Problem Durumu

Matematik eğitiminin amacı bütün öğrencilerin öğrenmeyi en üst seviyede gerçekleştirmesidir. Fakat bazılarının bunu gerçekleştirmesine rağmen büyük bir

kısının matematikte zorluk yaşaması doğal olarak görülür (Tall ve Razali, 1993; Tatar ve Dikici, 2008'den alıntı).

“Öğrenme güçlüğü çok geniş bir alanı kapsamasına rağmen matematikte “öğrenme güçlükleri” denildiğinde bu alana özgü birtakım yetersizlikler kastedilmektedir” (Durmuş, 2007:76). Bingölbalı ve Özmantar (2009)’a göre, Matematik eğitimi alanyazında zorluk, kavram yanlışlığı ve hata terimleri, matematik eğitiminde karşılaşılan güçlükleri ifade etmede en çok kullanılan terimler arasındadır. Dikici ve İşleyen (2003) ise herhangi bir konuda güçlük çeken öğrencilerin daha sonra gelen konularda başarıyı elde etmelerinin zor olduğunu belirtmektedir. Matematik doğası gereği birikimli bir bilim dalı olduğu için bir kavramın eksik ya da yanlış öğrenilmesi, diğer kavramları öğrenmede sıkıntılara yol açabilir.

Moore (1994), çalışmasında formal matematiksel kanıtlar yapmayı öğrenmede üniversite öğrencilerinin yaşadıkları bilişsel zorlukları incelemiştir. Öğrencilerle yapılan eğitim oturumları, sınıf gözlemleri ile öğretim elemanı ve öğrencilerle yapılan görüşmeler sonucu topladığı verilerin tümevarımsal analizi sonucu öğrenci güçlüklerinin 3 ana kaynağını belirlemiştir:

1. Kavramı anlama
2. Matematiksel dil ve notasyon
3. Bir kanıt yapmaya başlama

Ayrıca Moore yukarıdaki analizi ile birlikte öğrencilerin kavramları anlamadaki güçlüklerini Tall ve Vinner (1981)’in kavram tanımı (concept image) ve kavram imgesi (concept definition) teorik perspektifi açısından incelemiştir.

Durmuş (2007)’ye göre matematik konuları ve bireysel özellikler olmak üzere matematikte öğrenme güçlüğüne etki eden iki faktör bulunmaktadır. Matematik konularının kendi içinde çok farklı zorluk düzeylerinde olması bunu etkilemektedir. İlköğretim düzeyinde matematik, pratik günlük hayat problemlerinden matematiğin kendine özgü soyut dilini içeren konulara çeşitlilik göstermektedir. Yine üniversite

seviyesinde de görülen matematik dersleri ve konuları çok farklı zorluk seviyelerindedir denebilir. Bu zorluk seviyeleri doğal olarak öğrenme güçlüğü durumu ortaya çıkarabilmektedir. Diğer yandan öğrencilerin bireysel olarak farklı farklı özellikler taşımaları bir konuyu öğrenmede zorluk yaşamalarını ya da o konuda başarıya ulaşmalarını doğal olarak etkileyecektir.

Durmuş (2007)'ye göre öğrenme güçlüğün nedenleri aşağıdaki şekilde sıralanmıştır.

1. Akademik olarak başarısız bir geçmişe sahip olma ve buna bağlı olarak pasif bir rol üstlenme,
2. Dikkat eksikliği,
3. Görsel-uzamsal (visual-spatial) sorunlar,
4. İşitme ve matematiksel dil ile ilgili sorunlar,
5. Bellekle ilgili sorunlar,
6. Motor becerileri ile ilgili sorunlar,
7. Bilişsel ve biliş-ötesi (metacognitive) özellikler.

Öğrenme sürecinde bireylerin karşılaştığı öğrenme güçlükleri “kavram yanılgıları”, “hatalar” ve “öğrenme engelleri” başlıkları altında toplanabilir. Bu kavramlar birbirleriyle neden-sonuç bağlamında ilişkili kavramlardır (Kanbolat, 2010). Kavram yanılgıları, genel olarak öğrenmeyi engelleyen hatalar, öğrencilerin matematiksel ve bilimsel bilgilerini inşa etmedeki zorluk varsayımı ile bağdaştırılan bir düşünce olarak görülür (Smith, diSessa ve Roschelle, 1993). Öğrenmede bireyin karşılaştığı başka bir öğrenme güçlüğü hatalardır. Kavram yanılgısı ve hata birbirleriyle çok karıştırılan ama birbirinden tamamen farklı kavramlardır (Kanbolat, 2010). Kavram yanılgısı bir hata ya da bilgilerdeki eksikliklerden dolayı yanlış verilen bir cevap değildir. Kavram yanılgısı bilimsel olarak o kavramın tanımından farklı olarak zihinde o kavrammış gibi yer edinilmesidir. Eğer öğrenciler hataları sebepleriyle beraber kendilerinden eminmiş gibi savunuyorlarsa, o zaman kavram yanılgısı durumu vardır (Yenilmez ve Yaşa, 2008). Öğrenme engelleri ise öğrencinin

ön bilgilerindeki yetersizlikler ve gelişim düzeylerinin yeterli olmayışı ve matematiksel dili anlamadaki yetersizlikler olarak düşünülebilir.

Sıralama bağıntısı temelinde sıralama kavramı ile ilgili olarak bildiğimiz adi sıralamadan farklı şekillerde sıralamaların olabilmesi, elemanların kıyaslanabilme ve kıyaslanamama durumları, kümelerin sınırlı ya da sınırsız olması, elemanlar arasında büyüklük-küçüklük ilişkileri, birbiri ile ilişkisiz gibi görünen farklı öğelerin sıralanması ve sıralama bağıntılarındaki daha ileri düzey kavramlar (maksimum, minimum, maksimal, supremum vb.) soyut matematik derslerinde öğrenci zihninde kolayca şekillenemeyen hususlardır. Yukarıdaki bilgiler ışığında bu yüksek lisans tezinde sıralama bağıntısı ile ilişkilendirme bağlamında sıralama kavramına ilişkin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler, kavram imgesi-kavram tanımı teorik çerçevesinin de yardımıyla incelenmeye çalışılmıştır.

1.1.1. Sıralama Kavramı ve Sıralama Bağıntısı İlişkisi

Sıralama teorisi, ikili bağıntıları kullanarak, sıralama düşüncesine ilişkin sezgisel inançlarımızı araştıran matematiğin bir dalı olarak tanımlanabilir. Sıralama teorisi bu noktada sıralama kavramının, “bu şundan küçüktür” ya da “şundan önce gelir” şeklindeki ifadelerini tanımlamada formal bir çerçeve sağlayabilir (Vishwanath, 2011).

Günlük hayatta yani informal anlamda 1, 2, 3 sayılarını sıralarken, alışlagelen sıralama bilgimiz ile 1 küçüktür 2, 2 küçüktür 3 şeklinde sayıları sıraya koymaya çalışırız. Diğer yandan a, b ve c gibi elemanları sıralama işleminde aklımıza ilk olarak alfabetik sıralama gelebilir. Fakat günlük hayata alışık olmadığımız birbiriyle ilişkisiz gibi görünen sembollerini sıralama fikrinde ya da reel sayılarda adi sıralama ile uyuşmayan 3'ün 5'den büyük olduğu bir sıralama düşüncesinde kararsızlıklar yaşanabilir. İşte bu noktada başvurulacak adres sıralama bağıntılarıdır. Sıralama bağıntıları ile her küme sıralanabilir. Dolayısıyla günlük hayatta yaptığımız şu bundan büyük, küçük ya da kısa uzun gibi kıyaslarda bile yani herhangi bir sıralamadan söz edildiğinde bile farkında olmasak da dip metinde bir

sıralama bağıntısı kullanıldığı düşünülebilir (Narlı, 2013). Peki bu sıralama nasıl yapılabilir? Bu bağlamda sıralama bağıntısı ve alt kavramlarının tanımları ve bu bağıntının nesneleri nasıl sıraladığı aşağıda özetlenmeye çalışılmıştır:

Sıralama Bağıntısı

Boştan farklı bir A kümesinde tanımlı $\leq$ bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin hepsini sağlıyorsa, $\leq$ bağıntısına A kümesinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısı veya kısaca sıralama bağıntısı denir. Bu durumda $(A, \leq)$ biçiminde gösterilen yapıya ise kısmi sıralanmış sistem veya poset denir (Güney ve Özkoç, 2015).

Bir $(A, \leq)$ posetinde, $(a,b) \in \leq$ ise, a ve b elemanlarına posetin kıyaslanabilir elemanları denir; aksi halde yani bağıntıya ait olmayan bir ikilinin elemanlarına “kıyaslanamaz” denir. Eğer $(a,b) \in \leq$ ise birinci bileşendeki a elemanı ikinci bileşendeki b elemanından önce gelir veya küçüktür yada b elemanı a elemanından sonra gelir veya büyüktür denir. Örneğin $A=\{1,2,3\}$ ve $\leq=\{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (3,1)\}$ ile oluşan poseti düşündüğümüzde 1 elemanı 2 ve 3 ten büyüktür ve 2 ile 3 kıyaslanamaz.

Ayrıca $(A, \leq)$ bir poset ve $B \subset X$ olmak üzere sıralama bağıntısında aşağıdaki tanımlardan bahsedilebilir (Güney ve Özkoç, 2015):

- B kümesine ait bir a elemanı eğer kümedeki tüm elemanlardan büyük ise bu elemana B kümesinin en büyük (maksimum) elemanı; küçükse en küçük (minimum) elemanı denir ve sırasıyla $\max B=a$ veya $\min A=a$ ile gösterilir.
- B kümesinin bir elemanı eğer küme içinde kendisiyle kıyaslanabilen elemanların en büyüğü ise buna kümenin bir maksimal (büyük) elemanı; en küçüğü ise buna kümenin bir minimal (küçük) elemanı denir. Bu B kümesinin maksimal elemanlarının kümesi $M(B)$ ile, minimal elemanlarının kümesi $m(B)$ ile gösterilebilir.

- B kümesinin tüm elemanlarından büyük olan elemanların her birine bu kümenin bir üst sınırı; tüm elemanlarından küçük olan elemanların her birine de bir alt sınırı denir. B kümesinin tüm üst ve alt sınırlarından oluşan kümeler sırasıyla $A^{\bar{u}}$ ve A^a ile gösterilebilir. Ayrıca B kümesinin en az bir alt sınırı varsa bu kümeye alttan sınırlı küme; en az bir üst sınırı var ise üstten sınırlı küme denir. Hem alttan hem de üstten sınırlı bir kümeye (bu posette) sınırlı küme denir. Sınırlı olmayan kümelere ise sınırsız küme denir. Evreni sınırlı olan bir posete sınırlı poset denir. Boş küme sınırsız kabul edilmektedir.
- B kümesinin üst sınırlar kümesinin (varsa) en küçük (minimum) elemanına bu kümenin supremumu; alt sınırlarının (varsa) en büyük (maksimum) elemanına da kümenin infimumu denir. Açıktır ki $\sup B = E_{\text{küs}B}$ ve $\inf B = E_{\text{bas}B}$ dir.

1.1.2. Matematiksel İlişkilendirme

Matematiksel kavramları öğrenmede ve anlamada matematiksel ilişkilendirmenin de önemli bir yer tuttuğu söylenebilir. Matematiğin ardışık ve yığılmalı bir bilim dalı olduğu düşünüldüğünde, matematiği öğrenmede ilişkilendirme becerisi önemli bir yer tutmaktadır (Narlı, 2016). Matematiksel ilişkilendirme, zihinsel ağın örümcek gibi yapılanmış olduğu göz önüne alındığında, bu ağın bir parçası olarak tanımlanabilir. Bu ağda bağlantı yerleri-düğüm ve ağdaki iplikçikler yer alır ve bunlara sırasıyla bilgi parçaları ve bu bilgi parçaları arasındaki ilişkiler karşılık gelir. Ayrıca matematiksel ilişkilendirmeyi, matematikte birçok farklı konu arasında bağ kurarken kullanılan düşünceler ve süreçler olarak da tanımlamak mümkündür (Heibert ve Carpenter, 2004; Narlı, 2016'dan alıntı). Eli, Mohr-Schroeder ve Lee (2013) ise matematiksel ilişkilendirmeyi, zihinsel ağ içindeki bir şemanın bileşenleri olarak görmektedir. Matematiksel ilişkilendirme, mevcut bilgi ve yeni öğrenilen bilgiyi bağdaştırma, günlük hayattaki deneyimlerle ilişkilendirme, matematiksel kavramlar arasında bağ kurma ve farklı disiplinler ile ilişkilendirme olarak dört başlıkta toplanabilir. Bunlardan günlük hayat

deneyimleriyle ilişkilendirme, öğrencilerin matematiksel kavramların günlük hayatta da kullanıldığını görmelerini sağlar ve kavramları daha iyi anlamalarına yardımcı olabilir (Narlı, 2016). Dolayısıyla sıralama kavramı, sıralama bağıntısı ile ilişkilendirilerek ele alınırsa daha anlamlı öğrenmeler sağlanabilir.

1.1.3 Kuramsal Çerçeve

Matematiksel kavramların anlaşılmasında öğrencilerde görülen yanlışları ve öğrencilerin karşılaştıkları güçlüklerin tespitinde, toplanan verilerin bazı kuramsal çerçevelere dayandırılarak incelenmesi daha sağlam analiz ve yorumlara ulaşılmasını sağlayacaktır. Kavram oluşumlarını inceleyen bu teorilerden biri olan ve araştırmamızda kullanılacak kuramsal çerçeve, Tall ve Vinner (1981)'in ortaya koyduğu kavram imgesi (concept image) ve kavram tanımı (concept definition) teorik çatısıdır. Aşağıda bu çerçeve hakkında bilgi verilmiştir.

Kavramların doğru bir şekilde öğrenilmesinde önemli bir nokta da öğreticinin verdiği tanımla öğrencilerin zihinlerinde oluşan görüntünün tutarlı olup olmamasıdır. Bunu kavram imgesi ve kavram tanımı ile açıklayabiliriz. Tall ve Vinner (1981)'e göre kavram tanımı (concept definition) ve kavram imgesi (concept image) birbirlerinden farklı kavramlardır. Kavram tanımı o kavramı ayrıntılı şekilde açıklamak için kullanılan ifade formlarıdır. Kavram imgesi terimi ise kavram ile ilgili tüm bilişsel yapıyı tanımlamak için kullanılır. Bunlar zihinsel imgeler, ilgili özellikler ve süreçlerdir. Kavram imgesi bireyin deneyimleri vasıtasıyla yıllar içinde yapılır, birey yeni uyaranlarla karşılaştıkça değişiklik gösterebilir. Kavram imgesi formal kavram tanımından oldukça farklı yönere sahip olabilir ve genel olarak tanım ile tutarlı olmayabilir. Ayrıca kavram imgelerinin birey ile kavram arasındaki ilişki olduğu düşünüldüğünde, bireyden bireye değişiklik gösterebildiği söyleyebilir (Bingölbali, 2016). Kısaca kavram tanımı dediğimizde formal olarak ders kitaplarındaki kural ve tanımlar aklımıza gelir. Ancak kavram imgesi bu formal tanımla ilgili bireylerin zihinlerinde oluşan görüntülerdir. Vinner (1983)'e göre öğrencilerin öğretim süreci boyunca karşılaştığı örnekler, onların yanlış kavram imgelerine sahip olmasına neden olabilir. Kavram tanımı ve kavram imgesi teorik

çerçevesinde genel olarak imaj ve kavram yanılgısı ilişkisinden söz edilmese de, hatalı imgeler, aşırı genelleme ya da özellemeden ötürü kavram yanılgısı da olabilirler (Bingölbalı, 2016). Diğer yandan bazı kavramlara ilişkin kavram tanımlarına sahip olmasak bile o kavram hakkında bazı imgelere sahip olunabilir. Ancak bazı kavramlar içinse imgelere sahip olmak için kavram tanımları gerekir. Yani formal kavramların imgelerinin yanı sıra informal kavramların imgeleri de söz konusu olabilir (Vinner, 1981; Bingölbalı, 2016'dan alıntı). Bu bağlamda sıralama kavramına ait informal bilgilerin var olduğu düşünülebilir. Çünkü günlük yaşamda sıralama kavramı herkes tarafından bir şekilde kullanılmaktadır. Formal olarak sıralama bağıntısı tanımı verildiğinde öğrenciler sıralama kavramına ait imgelerini sıralama bağıntısı ile ilişkilendirerek yenileyebilirler.

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Matematik dersi, kendine özgü terminolojisi olan ve çoğu birey tarafından anlaşılması zor bulunan, önyargıların hakim olduğu, öğrenciler tarafından genellikle sevilmeyen bir ders olarak değerlendirilebilir. Doğası gereği soyut bir yapıda olan matematik, karmaşık semboller ve anlaşılamayacağı düşünülen içeriği ile sıkıcı bir ders olarak görülebilmektedir (Küçük Demir, 2014). Özellikle üniversitede düzeyindeki matematik dersleri ilköğretim matematik öğretmen adayı tarafından işe yarar görülmebilmektedir. İlköğretim matematik öğretmen adayları, ileriki öğretmenlik yaşamlarında her ne kadar ortaokul düzeyinde daha basit düzeyde matematik öğreteceklerse de, iyi bireyler yetiştirebilmenin ve öğrencilerine matematiğin kazanımlarını verebilmelerinin yolu sağlam bir matematik altyapısı ve anlayışı geliştirebilmelerinden geçer. İşte bu noktada üniversite seviyesindeki matematik derslerinin önemi geri plana atılamaz. Yine bu noktada bilhassa ilköğretim matematik öğretmenliği programı çerçevesinde yer alan soyut matematik dersinin atfettiği önem büyüktür. Moralı, Köroğlu ve Çelik soyut matematiği şu şekilde izah etmişlerdir:

Soyut Matematik sembolik mantık, kanıt yöntemleri, kümeler ve işlemleri, bağıntı ve fonksiyonlar, işlemler ve cebirsel yapılara giriş, temel sayı kümeleri (Doğal, Tam, Rasyonel, İrrasyonel, Reel Sayılar) ve özellikleri, sonluluk ve sonsuzluk kavramları, sayısal denklik gibi konuları içeren, eğitim fakültelerinin orta öğretim ve ilköğretim matematik öğretmenliği bölümleri ve fen edebiyat fakülteleri matematik bölümlerinin 1. sınıflarında okutulan geniş kapsamlı bir derstir (Moralı, Köroğlu ve Çelik, 2004:163).

Yukarıdaki tanımda da görülebileceği üzere soyut matematik dersinin kapsamında bulunan kavramlar, öğretmen adaylarında matematiksel dilin doğru şekilde kullanılabilmesi ve matematiksel muhakeme yeteneğinin geliştirilmesinde önemli bir yere sahip olan kavramlardır.

Soyut matematik dersinin kapsamında bulunun bağıntılar konusunda yer alan sıralama bağıntısı kavramı aslında sıralama kavramının temelini teşkil etmektedir. Günlük hayatta da ‘şu bundan küçüktür’ , ‘büyüktür’, ‘şişmandır’, ‘zayıftır’, ‘uzundur’ veya ‘kısadır’ gibi kıyaslamalar yaparken farkında olmasak da sıralama bağıntılarını kullanırız (Narlı, 2013). Sıralama kavramını, sıralama bağıntıları ile ilişkilendirerek öğrenmek, özellikle soyut matematik dersinde öğrencilerin poset, bir kümedeki maksimal ve minimal elemanlar, alt sınır ve üst sınır, infimum ve supremum gibi daha üst seviye kavramları zihinlerinde tam olarak inşa edebilmeleri için oldukça önemlidir. Nitekim bağıntılar konusunun da matematikteki diğer konuların oluşmasında (örneğin, fonksiyonlar) önemli bir yere sahip olduğu hesaba katılırsa, bağıntı konusunun içinde yer alan sıralama kavramı ve sıralama bağıntısı kavramlarını doğru bir şekilde öğrenmenin gerekliliği fark edilebilir.

Yukarıda da bahsedildiği gibi sıralama ve sıralama bağıntısı kavramı, hem matematiğin hem de günlük hayatın temel öğelerinden biridir. Fakat öğrenciler tarafından kavranması zor olabilen, kavram yanılgılarına, öğrenme güçlüklerine açık olabilen bir kavramdır. İlköğretim düzeyindeki öğrencilerden ziyade özellikle üniversite düzeyinde, ilköğretim matematik öğretmen adayları sıralama kavramını sıralama bağıntısı ile ilişkilendiremediği için, sıralama kavramı çoğu öğrencide bildiğimiz anlamda adi sıralamayla ($1<3$, $3<5$, $1<5$) sınırlıdır. Daha başka şekillerde

de sıralamaların olabileceği ve sıralama bağıntısı kavramıyla ilişki kurulduğunda $\square$, $\#$, $\blacktriangle$, $\boxtimes$ gibi sembollerin de kıyaslanabileceği ya da 3'ün 4'den büyük olduğu bir sıralama yapılabileceği, öğrencilerin zihninde kolayca şekillenemeyen matematiksel bilgilerdir. Bunlara ek olarak sıralama bağıntılarını ileri düzey kavramların soyut yapısı düşünüldüğünde ve epistemolojik engeller dikkate alındığında üniversite öğrencilerinin bahsedilen bu sıralama çeşitlerinde ve sıralama bağıntısı kavramlarında zorluklar yaşamaları doğaldır.

Matematikte sıralama kavramının, sıralama bağıntısı kavramıyla ilişkilendirilerek öğrenilmesi, İlköğretim Matematik Öğretmen adaylarının matematiğin diğer konularında, özellikle soyut matematik ve cebir derslerinde, başka kavramları doğru bir şekilde öğrenebilmeleri için gerekli olabilir.

Bu çalışmadaki amacımız sıralama bağıntısı ile ilişkilendirme temelinde öğretmen adaylarının sıralama kavramına yönelik informal bilgidan formal bilgiye geçişlerindeki güçlükleri ve sıralama bağıntılarındaki daha ileri düzey kavramları anlamada yaşadıkları güçlükleri ortaya çıkarmaya çalışmaktır.

1.3. Problem

Bu araştırmada, İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının sıralama kavramını, sıralama bağıntısı ile nasıl ilişkilendirdikleri derinlemesine incelemek olup, sıralama bağıntısı baz alınarak sıralama kavramında yaşadıkları güçlükler, tespit edilecek ve kavram imgesi-kavram tanımı teorik perspektifi ile analiz edilmeye çalışılacaktır. Buna göre araştırmamızın problem cümlesi ve alt problemleri aşağıdaki gibidir.

1.3.1. Problem cümlesi

“Sıralama bağıntısı ile ilişkilendirme yapılarak incelendiğinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sıralama kavramına ilişkin yaşadıkları güçlükler nelerdir?”

1.4. Alt Problemler

1. Öğrencilerin sıralama bağıntısı konusunu görmeden önceki sıralama kavramına ilişkin informal bilgileri nasıldır?
2. Öğrencilerin sıralama bağıntısı konusunu gördükten sonra, sıralama kavramına ilişkin formal bilgileri nasıldır?
3. Öğrencilerin sıralama kavramına ilişkin informal anlayıştan formal anlayışa geçişte karşılaştıkları güçlükler nelerdir?
4. Öğrencilerin sıralama bağıntısı kavramlarına ilişkin yaşadıkları güçlükler nelerdir?

1.5. Sayıtlılar

Araştırma çerçevesinde öğretmen adaylarının sıralama kavramı bilgi testi ile sıralama bağıntısı kavramları bilgi testlerini içtenlikle cevapladıkları, görüşme yapılan öğretmen adaylarının görüşme sorularına samimi yanıt verdikleri varsayılmıştır.

1.6. Sınırlılıklar

Bu çalışmanın evrenini, soyut matematik dersini alan ilköğretim matematik öğretmen adayları oluşturmaktadır. Araştırmanın örneklemi ise Dokuz Eylül Üniversitesi'nde birinci sınıflardan seçilmiş 100 öğretmen adayı ile sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

1.7.1. Öğrenme

Öğrenme; “Tekrarlar ya da yaşantı sonucu meydana gelen, kalıcı davranış değişikliğidir” (MEB, 2007).

1.7.2. Öğrenme Güçlüğü

Öğrenme güçlüğü dinlemede, konuşmada, okumada, yazmada, muhakeme etmede ya da matematiksel yeteneklerin kullanımında ve ediniminde zorluklarla kendini belli eden heterojen bir grup bozukluğa işaret eden genel bir terimdir (National Joint Committee on Learning Disabilities [NJCLD], 1991).

1.7.3. Bağntı

A ve B boştan farklı herhangi iki küme olmak üzere $A \times B$ kümesinin her alt kümesine A ’dan B ’ye ikili bağntı veya kısaca bağntı denir.

1.7.4. İnfomal Bilgi

İnfomal bilgi, öğrencinin aşına olduğu gerçek yaşam durumları kapsamında oluşturulan, problemlerin çözümünde öğrenci tarafından kullanılabilen, doğru ya da yanlış olabilen, bireysel şekilde oluşturulmuş, pratik gerçek yaşam durumları bilgisi olarak tanımlanabilir (Leinhardt,1988; Mack,1990’dan alıntı).

1.8. Kısaltmalar

SKBT: Sıralama Kavramı Bilgi Testi

SBKBT-1: Sıralama Bağntısı Kavramları Bilgi Testi-1

SBKBT-2: Sıralama Bağntısı Kavramları Bilgi Testi-2

TÖ: Tanımı görmeden önce

TS: Tanımı gördükten sonra

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NJCLD: National Joint Committee on Learning Disabilities

TDK: Türk Dil Kurumu

Ki: Kavram imgesi

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Yapılan literatür çalışmaları sonucunda matematik eğitimi alanında üniversite düzeyinde sıralama bağıntısı ve sıralama kavramına yönelik yapılan hemen hemen hiç çalışma yoktur denebilir. Bu alandaki literatür eksikliği olduğu söylenebilir. Bunun yanında sıralama kavramı üzerine ilköğretim düzeyindeki öğrencilerle yürütülen çalışmalar göze çarpmaktadır. Ancak bu çalışmalar bilinen anlamda adi sıralama üzerinedir denebilir. Üniversite düzeyinde yapılan çalışmalar da incelenip yaptığımız çalışmaya en yakın olabilecek alanlar değerlendirilmiştir. Bu yüzden bu kısımda bağıntı kavramı üzerine, fonksiyon üzerine, soyut matematikteki bazı kavramlar ile soyut cebirdeki bazı kavramlar üzerine yapılan çalışmalar, kavram imgesi-kavram tanımı teorik çerçevesi ile yapılan çalışmalar ve çeşitli konularda öğrenme güçlüğü ile ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilecektir.

Thomaidis ve Tzanakis (2007) çalışmasında sayı doğrusu üzerinde sıralama ilişkisi olgusuna ait 16 yaş gurubu öğrencilerinin düşüncelerini, sıralama ilişkisinin tarihsel gelişimini incelemiş ve öğrencilerin sayı doğrusu üzerinde sıralama ilişkisiyle ve reel sayılarda eşitsizliklerle mücadele etme yollarını araştırmışlardır. Ancak bu çalışma bilinen anlamda reel sayılarda adi sıralama ile ilgili olup, eşitsizlikler üzerinde yoğunlaşmıştır. Çalışmada negatif ve pozitif sayılar üzerinde de durulmuş ve negatif sayıların sıralanmasını anlamada öğrencilerin çeşitli zorluklara sahip oldukları da ortaya çıkarılmıştır.

Kar, Çiltaş ve Işık (2011) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmen adayları üzerinde cebirdeki bazı kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri üzerinde çalışmışlardır. Çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf öğrencilerinin fonksiyon, bire-bir fonksiyon, örten fonksiyon, bağıntı, denklik sınıfı,

kartezen çarpım kümesi ve alt cisim gibi kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri incelenmiştir. Öğrencilerin kartezyen çarpım kümesi ve fonksiyon kavramı arasındaki farkı belirlemede, denklik sınıfı ve bağıntı kavramlarını matematiksel dil ile ifade etmede, fonksiyonların tersini bulmada ve alt cisim kavramında güçlükler yaşadıkları belirlenmiştir. Bu çalışmalarında genel olarak onlar öğrencilerin temel kavramları tanımlamada, kavramlar arasındaki farkı ortaya koymada ve kavramları matematiksel dili kullanarak ifade etmede güçlükler yaşadıklarını tespit etmişlerdir.

Polat ve Şahiner (2007) çalışmasında ise bağıntı ve fonksiyonlar konusunda sınıf öğretmenliği öğrencilerinin yaygın hatalarını saptamış, sınıflandırmışlardır ve “Bu hatalar giderilebilir mi?” sorusuna yanıt aramışlardır. Çalışmada sınıf öğretmenliği öğrencilerinin bağıntıların yansıma ve ters simetri gibi özelliklerini ifade etmede, bağıntı ve fonksiyon arasındaki ilişkiyi açıklamada çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduklarını ortaya çıkarmışlardır. Ayrıca bu çalışmalarında dersin işleniş planı ve kullanılan metot ile hataların büyük oranda ortadan kaldırılabileceğini göstermişlerdir.

Albayrak (2003) araştırmasında, ortaöğretim seviyesinde öğrencilerde bağıntı kavramının oluşmasında görülen zorlukları tespit ederek, bu zorlukların nedenlerini yorumlamış ve giderilmesine yönelik çözüm yöntemleri üzerinde durmuştur. Analiz sonuçlarında belli değişkenlerin öğrencilerde bağıntı kavramının oluşmasına etkisi olup olmadığı incelenmiştir. Çalışmada cinsiyetin bağıntı kavramının oluşmasında etkisinin olmadığı, okul türlerinin ve ebeveynlerin eğitim seviyesinin bu oluşumda etkili olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Ural (2006) araştırmasında, fonksiyon öğreniminde kavramsal zorluklar üzerinde yoğunlaşmıştır. Araştırmasında fonksiyon kavramını yapısal boyutta kavramada çok çeşitli zorluklar ve kavram yanlışları olduğu belirtilmiş ve bu zorluklara ve yanlışlara ilişkin geniş bir literatür taramasına yer verilmiştir. Çalışmada bunların giderilmesinde, öğretmenlerin fonksiyon kavramı ile ilgili oluşturacakları materyallerinin ve tercih edecekleri öğretim yönteminin öneminin büyük olduğu belirtilmiştir.

Moralı, Köroğlu ve Çelik (2004) çalışmalarında matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumlarını ve öğrencilerde görülen kavram yanlışlarını incelemişlerdir. Onlar bu çalışmada önermeler mantığı, kümeler ve işlemleri, sayısal denklik, bağıntı ve fonksiyonlar konularında öğrencilerdeki yanlışlar üzerinde çalışmışlardır. Öğrencilerin büyük bir kısmının diğer konulardaki gibi bağıntılar konusunda da ortaöğretimden kaynaklanan tutumlarla konuyu güncel yaşamla ilişkilendiremediklerini bulmuşlar, konunun ezbere bilindiğini ortaya çıkarmışlardır. Öğrencilerin reel sayı aralığı şeklinde verilen kümelerde, alt sınırları bulmada çoğunluk diyebileceğimiz bir kısmının doğru yanıt verdiğini, ancak bir kısmının da alt sınırlar kümesinin en büyük elemanı olan ve kümeye dahil olmayan elemanı alt sınırlar kümesine de dahil etmediklerini ortaya çıkarmışlardır. Yine reel aralık içeren bir kümenin en büyük alt sınırını bulmada öğrencilerin çoğunluğunun doğru yanıt verdikleri, ancak küme tam sayılarda tanımlandığında ise, en küçük üst sınırının bulunmasında doğru yanıt yüzdesinin daha az olduğunu tespit etmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin verilen kümenin elemanlarının hangi sayı kümesinde tanımlandığına dikkat etmedikleri için kümenin alt ve üst sınırlarının bulunması gibi konularda hatalar yaptıklarını tespit etmişlerdir. Bunun yanında, öğrencilerin matematiğin diğer birçok konusuna benzer şekilde, bağıntılar konusunu güncel yaşamdaki kullanımlarıyla ilişkilendiremediklerini ortaya çıkarmışlardır.

Schindler ve Hußmann (2013) çalışmalarında negatif tamsayı kavramı öğrencilere tanıtılmadan önce öğrencilerin negatif tamsayılar hakkında görüşlerini incelemek için tamsayıların sıralama ilişkileri hakkındaki fikirlerini araştırmışlardır. Bu çalışma ilköğretim seviyesinde, adi sıralama açısından dikkate alınabilir.

Dikici ve İşleyen (2003) çalışmalarında, bağıntı ve fonksiyon konusunda öğrenme güçlükleri ile öğrencilerin matematiğe yönelik tutumu, matematik benlik duygusu ve tercih edilen öğretim metotları arasında anlamlı bir farkın olduğunu ortaya çıkarmışlardır. Matematiğe karşı olumlu bir tutum geliştirmelerinde bireysel farklılıkları göz önüne almanın önemine dikkat çekerlerken, bağıntı ve fonksiyon

konusunun soyut kavramlar olması sebebi ile bu konuda yapılacak tanımların grafik ve şema ile desteklenmesi gerektiğini ve bunu yapmanın kavramsal öğrenmeyi destekleyeceğini belirtmişlerdir.

Tall (1993) çalışmasında, matematikte öğrencilerin karşılaştığı zorlukları sınıflandırmıştır. Bunların bir kısmının fonksiyonlar konusundaki kısıtlı mental imgeler, kalkülüs problemlerini gerçek yaşam problemlerine çevirmedeki zorluklar, uygun temsilleri seçme ve kullanmadaki zorluklar, kısıtlı bir zaman diliminde karmaşık yeni fikirlerin edinimindeki zorluklar, cebirsel, geometrik ve trigonometrik becerilerde yetersizlikler olduğunu belirtmiştir.

Tall ve Vinner (1981) çalışmasında, limit ve süreklilik kavramları üzerinden kavram tanımını, kavramların ders kitaplardaki formal ifadeleri olarak bir başka deyişle ilgili kavramı açıklamak için kullanılan ifade formları olarak tanımlamışlardır. Kavram imgesini de belirli bir kavram ile alakalı bireyin zihnindeki bütün bilişsel yapılar olarak belirtmişler ve bunun tümüyle tutarlı olmayabileceğini, formal kavram tanımından oldukça farklı yönleri sahip olabileceğini açıklamışlardır. Bununla birlikte çalışmalarında fonksiyonların limiti kavramının öğrenciler tarafından formal ya da dinamik olarak iki şekilde içselleştirildiğini açıklamışlar, formal olarak limiti içselleştirmede zorluklar yaşadıklarını ortaya çıkarmışlardır. Ayrıca süreklilik kavramında da öğrencilerin hatalı kavram imgelerine sahip olduklarını belirtmişlerdir.

Przenioslo (2004) çalışmasında üniversite öğrencilerinin fonksiyonların limitine ilişkin imgeleri üzerinde odaklanmıştır. Çalışmada limit kavramını öğrenmenin birçok zorluğu ve engeli beraberinde getirdiği belirtilmiştir ve öğrencilerin daha çok limitin kavram tanımını formül şeklinde yorumladıkları da tespit edilmiştir.

Attorps (2007) çalışmasında, denklemler konusunda ortaokul öğretmenlerinin kavram imgelerini araştırmıştır. Öğretmenlerin denklemlere ilişkin düşüncelerinin işlemsel bilgiye dayalı olduğunu ortaya çıkarmış, bazı öğretmenlerin

$x^2-y^2=(x-y).(x+y)$ gibi ifadeleri denklem olarak yorumlamadıklarını kural ya da formül olarak değerlendirdiklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca iki ifadenin (niceliğin) eşit olduğunu kabul etmede güçlükler yaşadıklarını tespit etmiştir.

Tatar ve Dikici (2008) çalışmasında matematik eğitiminde öğrenme güçlüklerine ilişkin literatür taramasına yer vermiş, öğrenme güçlüklerini ortadan kaldırmaya yönelik çalışmaların, güçlükleri belirleme çalışmalarına göre epeyce az olduğunu ortaya çıkarmıştır. Araştırmada matematikte mevcut olan öğrenme güçlüklerinin kavramların soyut olması, öğretimdeki eksiklik, sözel ifadeleri yorumlamadaki sıkıntılar ve öğrencilerin hazır bulunuşluk düzeylerindeki eksiklikler şeklinde dört ana kaynağı olduğunu belirtmiştir.

Bu araştırmada soyut matematik dersindeki sıralama bağıntısı konusuyla ilişkilendirme temelinde, öğretmen adaylarının sıralama kavramındaki öğrenme güçlüklerinin analiz edilecek olması, literatür incelendiğinde üniversite matematik eğitimi alanındaki ilk çalışmalardan biri olacaktır denebilir. Bu açıdan çalışmanın matematik eğitimi alanına katkılar sağlayacağı umulmaktadır.

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Araştırma Modeli

Bu araştırma betimsel türde ve nitel bir çalışmadır. “Nitel araştırma, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama tekniklerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir” (Yıldırım ve Şimşek, 2013: 45). Nitel araştırmalarda, araştırmanın konusunu oluşturan olgu ya da olay, içinde bulunduğu doğal ortamında incelenmelidir (Patton, 1987; Yıldırım ve Şimşek, 2013’den alıntı). Nitel araştırma desenlerinden biri olan durum çalışması (case study) bu hususu ön planda tutar. Durum çalışmalarında bir ya da birkaç duruma ilişkin etmenler bütüncül bir yaklaşımla araştırılıp, ilgili durumu nasıl etkilediği ve ilgili durumdan nasıl etkilendiği incelenir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Durum çalışmaları karmaşık durum ile ilgili bilgi sağlamak için kullanılan bir yöntem olarak değerlendirilebilir. Araştırmacı araştırdığı konu ve soruları tanımlar ve durum ile ilgili birden çok kaynaktan edindiği bilgileri ayrıntılı olarak analiz ederek temelde nelerin bilindiğini ortaya koymaya çalışır (Kaleli Yılmaz, 2015). Araştırmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sıralama kavramını sıralama bağıntısı ile nasıl ilişkilendirdikleri derinlemesine incelenmeye çalışılmış, sıralama bağıntısı baz alınarak sıralama kavramında yaşadıkları güçlükler tespit edilmeye ve teorik bir perspektifle analiz edilmeye çalışılmıştır. Dolayısıyla bir duruma etki eden etmenler kendi ortamı içinde derinlemesine inceleneceği için bu araştırmanın durum çalışması niteliği taşıdığı söylenebilir.

Bu bağlamda, bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarına, sıralama kavramı ile ilgili informal bilgileri de ölçen ve açık uçlu sorulardan oluşan

“sıralama kavramı bilgi testi” (SKBT), soyut matematik dersinde öğretmen adaylarının sıralama bağıntısı konusu ile karşılaşmalarından önce ve karşılaşmalarından sonra olmak üzere iki kere uygulanmıştır. Bu şekilde öğretmen adaylarının sıralama kavramı hakkındaki informal bilgiden formal bilgiye geçişte neler yaptıkları ve bu hususta yaşadıkları güçlükler ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Toplanan veriler analiz edilerek, beş öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. “Yarı yapılandırılmış görüşmeler, hem sabit seçenekli cevaplama hem de ilgili alanda derinlemesine gidebilmeyi birleştirir” (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013:152). Öğretmen adaylarının yazılı olarak verdikleri cevaplardan ortaya çıkarılan bulgular, görüşmeler ile desteklenmeye çalışılmıştır. Görüşmenin uygulanması araştırmacının bizzat kendisi tarafından gerçekleştirilmiştir.

Diğer taraftan soyut matematik dersinde öğretmen adayları sıralama bağıntısı konusundaki kavramlarla karşılaştıkça, öğretmen adaylarına, sıralama bağıntısı konusundaki kavramlar ile ilgili açık uçlu sorulardan oluşan “sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1” (SBKBT1) ve “sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2” (SBKBT2) uygulanmıştır. Elde edilen veriler içerik analizi ile analiz edilmiştir. Bu testler ile de ilgili her test için beşer kişi olmak üzere toplamda 15 öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmıştır.

Durum çalışmalarında, geçerlik ve güvenirliği artırıp, inandırıcılığı kuvvetlendirmek için çeşitleme kullanılabilir. Çeşitleme, bir araştırma deseninin güçlendirilip inandırıcılığı artırmak için kullanılan önemli yollardan biridir (Büyüköztürk vd., 2013). Denzin (1978)’e göre çeşitleme (triangulation) dört boyutta yapılabilir (Denzin, 1978; Patton, 1990’dan alıntı) : veri çeşitlemesi, araştırmacı çeşitlemesi, kuram çeşitlemesi ve yöntem çeşitlemesi. Bu yüzden bu çalışmada, doküman analizi ve görüşme gibi yöntemlerle çoklu veri toplama yoluna gidilerek ve öğretmen adaylarından toplanan nitel veri setleri bir teorik perspektifle (kavram imgesi-kavram tanımı) analiz edilerek çalışmanın inandırıcılığı yükseltilmeye çalışılmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmeye dahil edilecek öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılarak belirlenmiştir. Maksimum çeşitlilik örnekleme yönteminde amaç nispeten küçük bir örneklem oluşturulup, üzerinde çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini en üst derecede şekilde yansıtmaktır.

Olasılık temelli örnekleme yöntemleri nicel araştırma geleneği içinde önemli bir yer tutarken ve nitel araştırmacılar tarafından sınırlı olarak kullanılırken, amaçlı örnekleme yöntemleri tam olarak nitel araştırma geleneği içinde ortaya çıkmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Nitel araştırma yöntemlerinde amaçlı örnekleme zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına olanak vermektedir (Patton, 1987; Yıldırım ve Şimşek, 2013'den alıntı).

3.2. Çalışma grubu

Araştırmamızın çalışma grubu, iki aşamada gerçekleşen çok aşamalı örnekleme tekniği ile belirlenmiştir. İlk aşamada Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı birinci sınıflarda öğrenim gören 100 öğretmen adayı, amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örnekleme (convenience sampling) ile seçilmiştir. Bu öğrencilere; SKBT, SBKBT1 ve SBKBT2 uygulanmıştır. Kolay ulaşılabilir durum örnekleme yönteminde araştırmacı kendi için erişilmesi nispeten daha kolay bir durumu seçer ve bunun da araştırmaya pratiklik ve hız katacağı söylenebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). İkinci aşama olarak yarı yapılandırılmış görüşmeye dahil edilecek öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılarak belirlenmiştir. Maksimum çeşitlilik örnekleme yönteminde amaç nispeten küçük bir örneklem oluşturulup, üzerinde çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini en üst derecede yansıtmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu bağlamda, SKBT, SBKBT1 ve SBKBT2 ile ilgili yarı yapılandırılmış görüşme yapılan her test için beşer olmak üzere toplamda 15 kişi, test sonuçlarına göre seçilmiştir.

Araştırmanın pilot çalışması yine Dokuz Eylül üniversitesi İlköğretim Matematik Eğitimi Bölümünde, asıl uygulamadan bir yıl önce öğrenim gören birinci sınıflardan seçilmiş 50 öğretmen adayı ile yapılmıştır. Pilot çalışma ile açık uçlu testlerde birtakım düzenlemeler yapılmış ve araştırma sürecindeki eksik noktalar ve hatalar tespit edilerek, bu eksiklerin giderilmesi ve düzeltilmesi yoluna gidilmiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları

Veri toplama aracı olarak açık uçlu üç ayrı test geliştirilmiştir. Bunlar sırasıyla, sıralama kavramı ile ilgili genel ifadeli sorulardan oluşan “SKBT”, sıralama bağıntısı konusundaki kavramlar ile ilgili “SBKBT-1” ve “SBKBT-2”dir. Pilot çalışma ile bu üç test öğrencilere uygulanmış ve zaman, anlaşılabilirlik gibi özelliklere de bakılarak testler son şekillerini almıştır. Bu testler aşağıda tanıtılmıştır.

3.3.1. Sıralama kavramı bilgi testi

Öğretmen adaylarının daha çok sıralama kavramı hakkındaki informal bilgilerini ölçen, uzman görüşü alınarak hazırlanmış sıralama kavramı bilgi testi (Ek1) 12 açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Büyüköztürk (2005)’e göre açık uçlu soruların avantajı, araştırmacının planlamadığı cevapları da alabilmesi ve konu hakkında daha ayrıntılı ve derin bir iç görü kazanabilmesidir.

Bu testteki açık uçlu sorular;

- sıralama kavramının genel olarak ne anlam ifade ettiğine,
- birbirleriyle ilişkisiz gibi görünen elemanların, öğelerin sıralanmasına,
- bilinen anlamda adi sıralamadan başka sıralama çeşitlerinin varlığına,
- sonluluk-sonsuzluk ile sınırlılık-sınırsızlık kavramları arasındaki ilişkiye,
- karmaşık (kompleks) sayılarda sıralamanın yapılıp yapılamayacağına
- kıyaslanabilirlik-kıyaslanamazlık kavramlarına
- sıralama bağıntısının tanımının öğretmen adaylarının zihinlerinde nasıl var olduğuna

yönelik sorulardan oluşmaktadır. Yapılan pilot çalışma sonrasında aşağıdaki düzeltmelere gidilmiştir:

- Sınırlılık ve Sınırsızlıkla sıralama kavramı arasındaki ilişkinin var olup olmadığı hakkındaki sorunun (7.soru) öğretmen adayları tarafından yanlış anlaşıldığı ve buna takriben tutarlı olmayan cevapların verildiği göze çarpmıştır. Bu nedenle bu soru “Bir kümenin ya da sayı aralığının sınırlı veya sınırsız olmasının sıralama kavramı ile bir ilişkisi var mıdır? Gerekçenizi belirtiniz.” Şeklinde düzeltilmiştir.
- Herhangi farklı iki elemanın birbirleriyle kıyaslanamaması hakkındaki sorunun (11.soru) öğretmen adayları tarafından iyi anlaşılamadığı görülmüş ve bu soru “Bir kümede birbirleriyle küçük-büyük anlamında kıyaslanamayan farklı iki eleman olabilir mi? Gerekçenizi yazıp örneklendiriniz” şeklinde değiştirilmiştir.

3.3.2. Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testleri (1-2)

Öğretmen adaylarının sıralama kavramına ilişkin daha çok formal bilgilerini ölçen ve sıralama bağıntısı temel alınarak hazırlanmış, uzman görüşleri ile kapsam geçerliği sağlanmış olan sıralama bağıntısı kavramları bilgi testleri, sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1 (Ek2) ve sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2 (Ek3) olmak üzere iki tanedir. Bu testler soyut matematik dersinde sıralama bağıntısı konusu işlendikçe uygulanmış olup, bir anlamda ara testlerdir. Bu testler de açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Uygulanan testlerin her biri için öğretmen adaylarına yaklaşık bir ders saati (45-50 dakika) süre verilmiştir.

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1;

- sıralama bağıntılarının işlevi,
- sıralama bağıntılarında küçüklük-büyüklik ilişkilerinin nasıl belirlendiği,
- sıralama bağıntılarında elemanların kıyaslanabilirliği,
- bir küme üzerinde belli kriterlere uyan sıralama bağıntısı tanımlama

ile ilgili sekiz sorudan oluşan bir testtir. Bu test, uzman görüşü ve pilot uygulama sonrasında sekizinci soru eklenerek son halini almıştır. Ayrıca bu testte, pilot çalışma sonrası şu değişiklikler yapılmıştır:

- Sıralama bağıntısının tanımını soran bir soru çıkarılmıştır.
- “5, 4 den küçük olabilir mi? Açıklayınız” şeklinde olan 5. soru, pilot uygulama sonrasında “8 in 2 den küçük olduğu bir sıralama bağıntısı tanımlanabilir mi? Açıklayınız.” şeklinde düzeltilmiştir.
- Daha önceden “sıralama bağıntıları niçin yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahiptir? Sıralama kavramını düşünerek açıklayınız” şeklinde olan 7.soru, katılımcıların soruyu daha doğru yorumlamalarını sağlamak amacıyla pilot çalışma sonrasında yeniden ele alınarak “Sıralama bağıntıları yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahiptir. Niçin bu özelliklere sahip bağıntıya sıralama bağıntısı denilmiş olabilir? Sıralama kavramını düşünerek yorumlayınız.” şeklinde düzeltilmiştir.
- “ $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde öyle bir sıralama bağıntısı tanımlayın ki 5, 4’ten küçük olsun; 1 her elemandan büyük olsun; 3 ile 4 kıyaslanmasın. Bu koşula uyabilecek bütün sıralama bağıntılarını yazınız.” şeklinde olan soru pilot çalışma sonrasında düzenlenerek “ $A=\{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde öyle bir sıralama bağıntısı tanımlayın ki “e” elemanı, “d” elemanından küçük olsun; “a” her elemandan büyük olsun; c ile d kıyaslanmasın. Bu koşula uyabilecek bütün sıralama bağıntılarını yazınız.” şeklinde düzeltilmiştir.

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2 kendi içinde alt sıklara da ayrılabilen 4 sorudan oluşmakta olup, sıralama bağıntısındaki daha ileri düzeyde kavramları ele alan bir testtir. Bu test;

- bir kümedeki maksimum ve minimum elemanları,
- maksimal ve minimal elemanları,
- alt sınır ve üst sınır ile supremum ve infimum gibi kavramları,
- sınırlılık ve sınırsızlığı,
- limit durumu içeren kümelerde maksimal, minimal, alt sınır, üst sınır, supremum ve infimum kavramlarını,

➤ sonluluk-sonsuzluk kavramlarını kapsayan bir testtir.

3.3.3. Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmeler

Büyüköztürk vd. (2013) görüşmeyi “en az iki kişi arasında sözlü olarak sürdürülen bir iletişim süreci” (s.150) olarak tanımlamıştır. Patton (2014)’e göre de görüşmenin amacı kişilerin iç dünyalarını ve bir konu hakkındaki bakış açılarını bize anlatmaktır.

Araştırmamızda amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme ile görüşmeye dahil edilecek öğretmen adayları (15 kişi) ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılarak, öğretmen adaylarının sıralama kavramı bilgi testi ve sıralama bağıntısı kavramları bilgi testlerinde yazılı olarak verdikleri cevapların altında yatan nedenler derinlemesine ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Her bir öğretmen adayı ile yapılan görüşme süresi ortalama 10-15 dakika olarak belirlenmiş, görüşmeler araştırmacı tarafından ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Görüşme yapılacak öğretmen adayları seçilirken her testin ayrı ayrı uygulaması yapıldıktan sonra öğretmen adaylarının testlerdeki soruları yanıtlama düzeyleri iyi-orta-kötü şeklinde sınıflandırılmış ve bu üç düzeyin hepsinden de en az bir tane öğretmen adayı görüşmelere dahil edilmiştir. Bunun yanında görüşme yapılacak öğretmen adaylarının seçiminde testleri sorulara verdikleri yazılı cevaplarında ilginç bulunabilecek ifadeler barındıran öğretmen adayları da görüşmeye dahil edilmiştir. Yapılan bu araştırmada, ayrı bir görüşme soruları hazırlanmamış, görüşme için SKBT, SBKBT1 ve SBKBT2 deki sorular kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının görüşme esnasında verdikleri cevaplar ve testlerde önceden vermiş oldukları yazılı cevaplar üzerinden, araştırmacı tarafından o esnada ek sorular yöneltilerek görüşme şekillendirilmeye çalışılmıştır. Bu yöneltilen ek sorular, bulgular bölümünde verilen görüşme diyaloglarında görülebilir.

3.4. Veri Çözümleme Teknikleri

SKBT, SBKBT-1 ve SBKBT-2 den elde edilen yazılı verilere ve görüşme verilerine içerik analizi uygulanmıştır. İçerik analizinde amacın katılımcılardan toplanan verileri izah edebilecek kavramları ve ilişkileri elde etmek olduğu söylenebilir. Yani içerik analizi ile verilerin tanımlanması ve arka planda yatan gerçeklerin ortaya çıkarılması sağlanabilir. Bu bağlamda içerik analizinde verilerin kodlanması, temaların bulunması, verilerin kodlara ve temalara göre düzenlenmesi-tanımlanması ve bulguların yorumlanması gibi aşamalar mevcuttur (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Öğrencilerin yaşadığı güçlükler analiz edilirken Tall ve Vinner'ın (1981) *kavram imgesi ve kavram tanımı* çatısı ve verilerin betimlenmesinde frekans ve yüzdeler kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının cevapları kodlar haline getirilmiştir. Ardından öğretmen adayının cevapları, uygun kodlara dağıtılmıştır. Oluşturulan kodların geçerlik ve güvenilirliğini sağlamak adına farklı bir matematik eğitimcisi tarafından oluşturulan kodlar incelenmiştir. Güvenirlik yüzdesi % 76 bulunmuştur. Uygun bulunmayan, çok genel bulunan ya da daha güncel kaynaklara göre tutarsızlık gösteren kodlar silinmiştir.

Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerde veriler uzman incelemesi öncesi katılımcıların teyidine sunulmuştur. Araştırmada elde edilen verilerin ve bunlara ilişkin araştırmacının ulaştığı sonuçların ve yorumların veri kaynakları (katılımcılar) ile teyit edilmesinde yarar vardır (Yıldırım ve Şimşek, 2013: 302). Katılımcı teyidi sonrası elde edilen transkriptler iki matematik eğitimcisi tarafından analiz edilmiştir. Uyum yüzdesi %79 olarak bulunmuştur.

Yıldırım ve Şimşek (2013)'e göre nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenilirlik konusunda alınabilecek önlemler, araştırmacının çalıştığı durumla etkileşim sürecini uzatmak, veri çeşitlemesi yöntemlerini kullanmak, sonuçlarını araştırmasındaki katılımcılarla paylaşp onların görüşlerini almak ve sonuçların isabetliliği konusunda aynı alanda çalışan başka araştırmacıların görüşlerini almaktır. Çalışmamızda

Çalışılan ortam ve durumla etkileşim süresi uzatılarak, birden fazla veri toplama yöntemi kullanılarak, soruların hazırlanmasında ve araştırma sürecinde uzman görüşü alınarak, çalışmanın inandırıcılığı ile geçerlik ve güvenirliği artırılmaya çalışılmıştır.



BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde araştırmada elde edilen bulgular sunulacak ve yorumlanacaktır. Araştırmanın ilk üç alt problemi, SKBT ile ilgili olduğundan bu testle ilgili bulgular bu alt problemler ile ilişkilendirilerek sunulacaktır. Sonrasında son alt problem SBKBT1 ve SBKBT2 bağlamında ele alınacaktır.

4.1. SKBT ile İlgili Bulgular

Bu kısımda sıralama kavramı ile ilgili informal bilgileri ölçen ve açık uçlu sorulardan oluşan SKBT ile ilgili bulgulara yer verilecektir. Bu testteki her soru için olası kavram imgeleri belirlenerek numaralandırılmış ve tablo ile sunulmuştur. SKBT, formal tanımı görmeden (sıralama bağıntısı ve ilgili kavramları öğretmen adaylarına verilmeden) önce ve gördükten sonra olmak üzere iki kez uygulandığından, tablolarda ilgili imgelerin frekansları, iki aşamayı yansıtacak şekilde sunulmuştur. Böylece informal bilgidен formal bilgiye geçişteki farklılıkların görülebileceği düşünülmüştür. Kavram imgeleri Ki1, Ki2, Ki3, vs... gibi numaralandırılmıştır. Bu imgeler soru bazında örneklenip açıklanmaya çalışılmıştır. Ayrıca boş bırakılan sorular veya gerekçe göstermeden “küme sınırlıdır” şeklinde ifade edilen cevaplar gibi, imge belirtmediği düşünülen kategoriler tabloda imge numarası verilmeden yer almaktadır. Diğer taraftan çalışma grubu 100 kişiden oluştuğu için frekansların yüzde ile çakışacağı açıktır. Aşağıda, SKBT de bulunan 12 soruya ait güçlükler, sırasıyla kavram imgeleri bağlamında ele alınmıştır. Her soru için bulguların sunuluşunda şu yol izlenmiştir:

Öncelikle ilgili soruya ait genel resmi görmek üzere kavram imgelerini de içeren kategorilerin bulunduğu tablo sunulmuştur. Sonrasında tek tek bu kategorilerin içerikleri, örnekler ile açıklanmaya çalışılmıştır. Örnekler, öğrencilerin hem formal tanımı görmeden, hem de gördükten sonraki cevaplarından seçilmiştir. Her bir soru ile ilgili tüm kategoriler bu şekilde sunulduktan sonra, ilgili soruya ait formal tanım verilmeden önce öğrenciler ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşme verilerine yer verilmiştir.

4.1.1 SKBT 1. Sorusuna ait Bulgular

“Sıralama kavramı deyince ne anlıyorsunuz?” şeklinde ifade edilen birinci sorunun sorulma amacı, öğretmen adaylarının, sıralama hakkında günlük yaşam bilgilerini (informal bilgilerini) ortaya çıkarmaya çalışmaktır. Bu bağlamda bu soru ile aynı zamanda öğretmen adaylarının sıralama ile formal olarak etkileşime girmeden önce, zihinlerinde var olan kavram imgelerini ortaya koymak amaçlanmıştır. Öncelikle genel çerçeveyi görmek için veriler, Tablo 1’de özetlenmiştir.

Tablo 1 SKBT 1. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S1	Ki1: Belli bir kriter-kural ihtiyacı hissetme	81	66
	Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme	-	23
	Ki3: Sıralanacak elemanlar arasında ortak özellik bulunma zorunluluğu	8	-
	Ki4: Permütasyon kavramı	5	-
	Ki5: Elemanların gruplandırılması-sınıflandırılması	-	4
	Ki6: Kriter olsun veya olmasın sıraya dizme	3	-
	Diğer	3	7

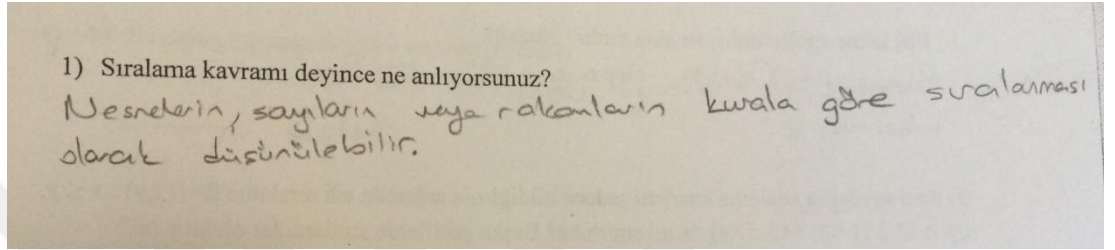
*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

Tablo 1’de sunulan kategorilerin ayrıntıları aşağıda sırası ile verilmektedir:

Ki1: “Belli bir kriter (kural) ihtiyacı hissetme”

Bu kategori cevaplarında öğelerin, nesnelerin ya da elemanların sıralanması işlemi için belli bir kuralı baz almanın gerekliliği vurgulayan öğretmen adaylarını işaret eder. Bu imge ile ilgili, tanımları görmeden önce (TÖ) ve sonra (TS) olmak üzere, birkaç örnek aşağıda sunulmuştur:

F.C (TÖ):



G.Ö (TÖ): “Belirli bir grup elemanın belli bir kurala göre dizilmesi ya da bir kümenin elemanlarının niceliklerine (artışı-azalışına) göre sıralanmasıdır.”

A.Y (TS): “Sıralama deyince sıralamak aklıma geliyor. Belli bir kural çerçevesinde verileri düzene koyup, sıraya dizmek aklıma geliyor.”

Burada TÖ kategorisindeki 81 öğretmen adayı arasında cevaplarında kriter (kural) vurgusu yapmalarının yanı sıra **5 öğretmen adayı** sıralama kavramı için “**elemanların gruplanması**” ifadesini kullanmışlardır. Ayrıca bu 81 öğretmen adayı arasından **2 öğretmen adayı** sıralama işlemini “**yalnızca sayısal verilerin sıralanması**” olarak yorumlamışlardır.

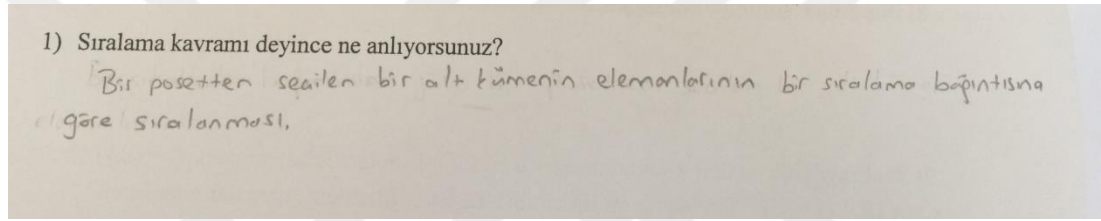
Sıralama kavramı denilince ne anlaşıldığını sorgulayan birinci soruda, öğretmen adaylarının “belli bir kriter-kural ihtiyacı hissetme” imgeleri, sıralama bağıntısı konusu ile karşılaşmalarından sonra 81’den 66 ya belli bir düşünüş göstermiştir. Bu düşünüş, öğretmen adaylarının sıralama kavramı denilince “sıralama bağıntısının akla gelmesi” imgesi (23) ile açıklanabilir. Çünkü öğretmen adayları

tarafından hissedilen kural-kriter ihtiyacı belli bir ölçüde sıralama bağıntısı tarafından karşılanmış olabilir.

Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme

Tablo 1’ de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının %23’ü (23 kişi), sıralama kavramı deyince ne anlıyorsunuz sorusuna, sıralama bağıntıları ile ilişki kurarak cevap vermiştir. Örnek teşkil etmesi açısından cevapları bu kategoriye dahil edilen öğretmen adaylarından ikisinin yazılı cevabı aşağıda verilmiştir.

A.G (TS):



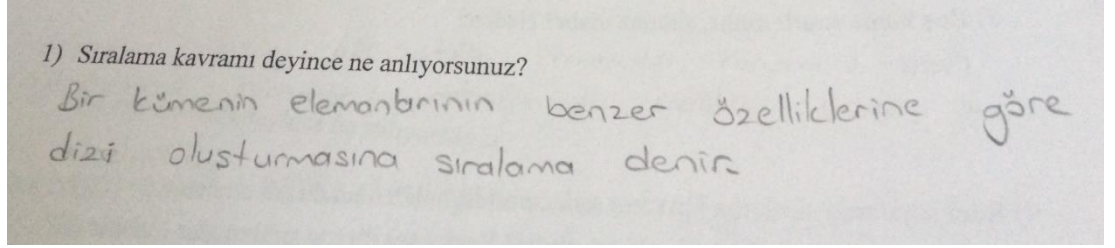
B.B (TS): “Sıralama deyince aklıma sıralama bağıntısı geliyor. Sıralama bağıntısı elemanları sıralar.”

Uygulamadan önce ise bu kategoride hiçbir öğrencinin bulunmadığı görülmektedir. Bu durumda sıralama bağıntısının formal tanımları ile karşılaşmadan önce, öğrencilerin sıralama kavramını, sıralama bağıntısı ile ilişkilendirmedikleri düşünülebilir.

Ki3: Sıralanacak elemanlar arasında ortak özellik bulunma zorunluluğu

Bu kategori, sıralama kavramını aralarında ortak bir özellik bulunan elemanların sıraya dizilmesi şeklinde yorumlayan öğretmen adaylarına işaret eder. Yani bu kategoriye giren cevaplar, sıralama işleminde elemanlar arasında bir bağlantı (ilişki) olması diğer bir ifade ile bir ortak özellik olması vurgusunu taşırlar. Bu bağlamda verilen cevaplardan örnekler aşağıdaki gibidir:

B.E :



S.A : “Aralarında ortak bir özellik bulunan elemanların belirli özelliklere göre sıraya dizilmesidir.”

H.Ç : “Aralarında ortak özellikler bulunan elemanların birbirleriyle büyüklük-küçüklük bakımından kıyaslanmasına sıralama denir.”

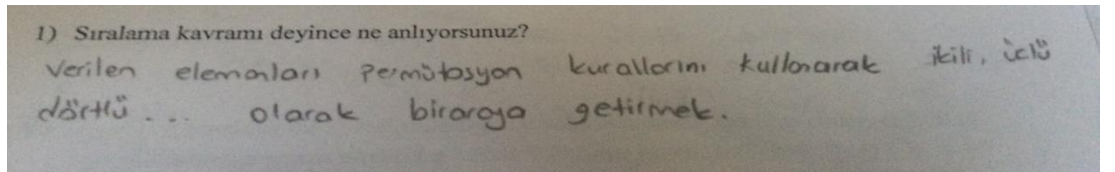
Diğer yandan bu imge, temel tanımlarla karşılaşmadan sonra birinci soru için ortaya çıkmamıştır.

Ki4: Permütasyon kavramı

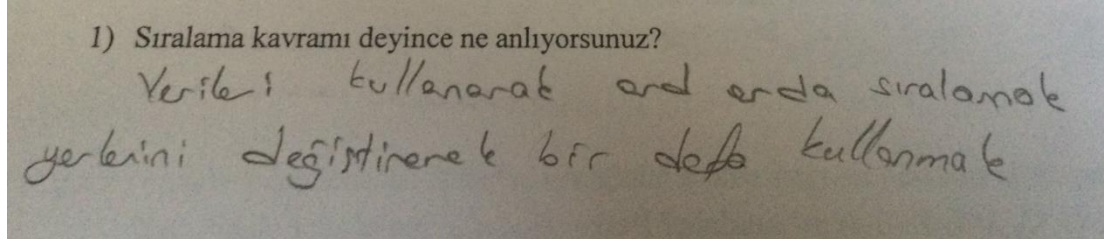
Bu kategori, sıralama kavramını direkt olarak permütasyon kavramı ile ilişkilendiren öğretmen adayı cevaplarına işaret eder. Bu kategoriye giren öğretmen adayları sıralama işini, birtakım öğelerin, elemanların kendi aralarında farklı dizilimleri (değişik sıralarda dizilimleri) olarak yorumlamışlardır. Tablo 1’de gösterildiği gibi bu şekilde 5 kişi tespit edilmiştir. Örnek olması açısından, yazılı cevaplardan örnekler aşağıdaki gibidir.

S.T (TÖ): “Bir kümenin elemanlarının ikili veya üçlü permütasyonlarını yazmaktır.”

K.Ç (TÖ):



A.Y (TÖ):



Diğer yandan permütasyon imgesi, temel tanımlarla karşılaşmadan sonra 1.soru için ortaya çıkmamıştır.

Ki5: “Elemanların gruplandırılması-sınıflandırılması”

İnformal düzeyde bulunmayan bu kategoriye giren öğretmen adayları, sıralama kavramını verilen elemanların gruplandırılması ya da sınıflandırması olarak yorumlamışlardır. Bu kategoriye dahil edilmiş olan öğretmen adaylarının cevaplardan biri aşağıda verilmiştir.

P.Ö (TS): “Nesneleri, sayıları ve kavramları belli bir özelliklerine göre gruplandırmaya denir.”

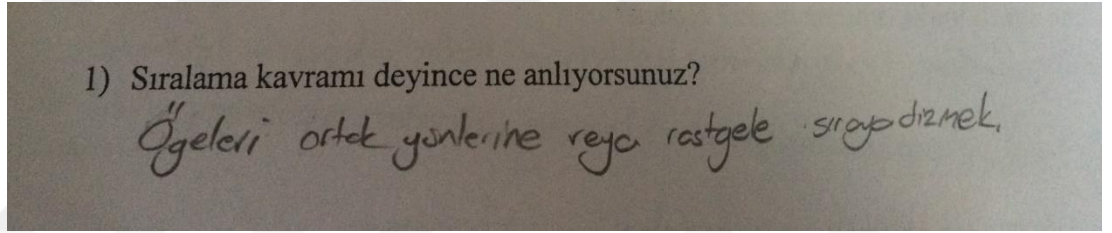
Bu noktada sınıflandırma (gruplandırma) işinin aslında sıralamanın doğasına uygun olmadığını söyleyebiliriz. Elemanlarının gruplandırılmasının daha çok denklik bağıntılarının doğasına uygun olduğunu söyleyebiliriz. Başka bir deyişle denklik bağıntılarındaki denklik sınıflarının gruplandırma işine karşılık geldiğini söyleyebiliriz. Fakat sıralama kavramında ise elemanlar arasında bir sıraya dizme ve kıyasın esas olduğu düşünülebilir. Dolayısıyla cevapları bu kategoriye dahil edilmiş olan öğretmen adaylarının bu hususta bir yanılgıya düşmüş oldukları söylenebilir. Yani bu öğretmen adaylarının sıralama kavramını sıralama bağıntıları ile ilişkilendirmede güçlük yaşadıkları söylenebilir.

Ki6: “Kriter olsun veya olmasın sıraya dizme”

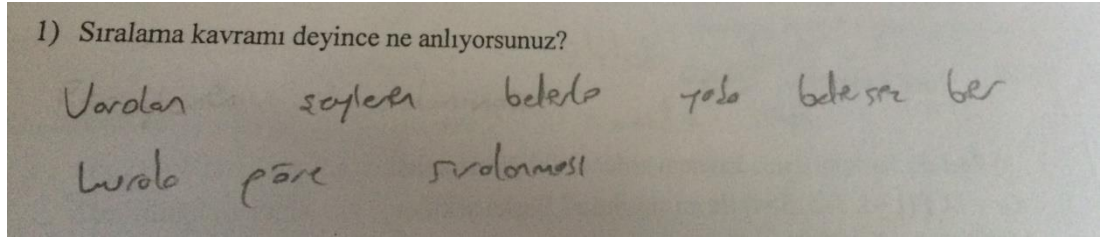
Bu kategori kavramların, öğelerin sıralanması işlemi için belli bir kriter olmasının gerekmediğini cevaplarında belirten öğretmen adaylarına işaret eder. Başka bir deyişle bu kategoriye giren cevaplar, öğeleri rastgele dizebileceğini söyleyen, belli bir koşula bağlı kalınmasına gerek duymayan öğretmen adayı cevaplarıdır. Bu kategoriye giren öğretmen adaylarının yazılı cevaplarından örnekler aşağıdaki gibidir:

A.B (TÖ): “Var olan şeylerin belirli bir kurala göre ve kural olmaksızın sıraya dizilmesi”

N.A (TÖ):



R.K (TÖ):



Son iki imaj değerlendirildiğinde, “kriter olsun veya olmasın sıraya dizme” imgesi temel tanımlarla karşılaşmadan önce mevcut iken, temel tanımlarla karşılaştıktan sonra mevcut değildir. Bunun yerine sıralama bağıntıları ile karşılaştıktan sonra “elemanların gruplandırılması-sınıflandırılması” imgesinin ortaya çıkmış olduğu söylenebilir.

“Diğer” Kategorisi

Bu kategori de, sıralama kavramı bilgi testindeki birinci soruyu yanıtsız bırakan öğretmen adaylarını işaret etmektedir.

Ayrıca ortaya çıkan yazılı verileri desteklemek amacıyla, bu soruya ilişkin öğretmen adayları ile uygulama öncesi yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerden örnekler aşağıda sunulmuştur. **A**, araştırmayı yapan kişiyi, **Ö**’ler ise öğretmen adaylarını temsil etmektedir. Bütün sorular için aynı öğretmen adayı, aynı numara ile verilmiştir. Yapılan araştırmanın tamamında aynı yol izlenmiştir.

A: “Sizce sıralama kavramı nedir, sıralama kavramı deyince sizin aklınıza gelen nedir?”

Ö1: “Bir takım öğeleri mesela kümenin elemanları gibi, belli özelliklerine göre dizmek, önceden bir kural belirleyerek, o kurala göre dizmek, sıralamak aklıma geliyor.”

Ö2: “Belli elemanları, öğeleri, şeyleri bize verilen belli bir özelliğe göre dizmek sıralamak aklıma geliyor”

A: “Peki bir takım öğeleri sıraya dizerken, bir ölçüt-kriter gerekli midir sizce?”

Ö1: “Evet, neye göre sıralayacağımızı bilmemiz gerekiyor”

Ö2: “Evet, bence gerekli, Belli bir kural olmadan sıralama yapılamaz”

Ö3: “Evet belli bir kural gereklidir. Bir ölçüt olmadan sıralama yapılamaz. Örnek olarak en basitinden belli sayıları büyüklük-küçüklük ilişkisine göre sıralarız. Bence bu bile bir ölçüt olur.

A: “Sıralanacak öğeler ya da elemanların ortak bir noktası olmalı mı? Bunların aynı türden mi olması gerekir, ya da birbirleriyle alakasız duran öğeler sıralanabilir mi? Örneğin 3, c, Δ , & gibi elemanlar...”

Ö1: “Sıralanabilir diye düşünüyorum. Bir sıralama bağıntısı yardımıyla bu elemanları sıralayabiliriz. Yani bu elemanlar sıralama bağıntısının elemanı iseler sıralanabilirler diye biliyorum. Bu yüzden bir ortak özellikleri olması gerekmiyor diye düşünüyorum.”

Ö2: “Bence sıralanır ancak sıralama için bir kural verilmeli. Ama nasıl olur tam olarak bilemiyorum. Belki önce şekil ve sembolleri kendi arasında, sayıları ve harfleri kendi arasında sıralayabiliriz.”

Ö3: “Evet bence birbirleriyle aynı türden olmalı, bir ortak özellikleri olmalı yoksa ilişkisiz olursa sıralanamazlar. Mesela burada Δ (üçgen)’nin 3 kenarı var dersek, ?’e ve c’ye bir şey diyemeyiz.”

Yukarıdaki görüşme diyalogundan da görülebileceği gibi, Ö1 ve Ö2 ve Ö3’ün sıralama yapmak için kural-kriter ihtiyacı hissettikleri görülmektedir. Ayrıca Ö3, bir ortak özellik taşımayan, ilişkisiz gibi görünen elemanların sıralamayacağını düşünürken, Ö1’in sıralama bağıntısı yardımıyla birbirleriyle ilişkisiz gibi görünen 3, c, Δ , & gibi sembollerin sıralanabileceğini söylemesi, informal düzeyde ilginç bulunabilir. Bu soru için Tablo 1’de görüldüğü gibi, öğretmen adaylarının tanımları gördükten sonra sıralama kavramını direkt olarak sıralama bağıntısı ile ilişkilendirme düzeyinin yetersiz olduğu söylenebilir.

4.1.2 SKBT 2. Sorusuna ait Bulgular

Sıralama kavramı bilgi testinin ikinci sorusu olan “a, b, c elemanlarını sıralayabilir misiniz? Nasıl?” sorusu ile amaçlanan, reel sayılardaki alışlagelen adi sıralamadan farklı olarak, sayısal bir değer taşımayan elemanların ya da öğelerin nasıl sıralanabileceğine yönelik öğretmen adaylarının kavram imgelerini ortaya

koymaya çalışmaktır. Öncelikle yine genel çerçeveyi görmek için veriler, Tablo 2’de özetlenmiştir. Devamında ise, kategoriler ayrıntılı açıklanmıştır.

Tablo 2 SKBT 2. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S2	Ki7: Keyfi bir kural belirleme	64	24
	Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme	-	65
	Ki8: Kural-ölçüt verilmediği için sıralanamaz olma durumu	12	-
	Ki4: Permütasyon kavramı	18	1
	Ki9: Sadece sayısal verilerin sıralanabilir oluşu	2	-
	Diğer	4	10

*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

Tabloda sunulan kategorilerin ayrıntıları aşağıda sırası ile verilmektedir:

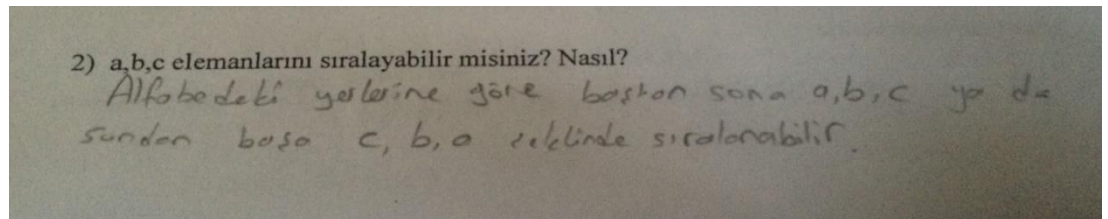
Ki7: “Keyfi bir kural belirleme”

Bu kategori, öğretmen adaylarının a-b-c elemanlarını keyfi olarak belirledikleri bir kurala (kriter) göre sıralama yapmalarını anlatır. Örneğin, öğretmen adaylarının büyük bir kısmı bu elemanları alfabetik sıraya göre ya da alfabetik sıranın tersine göre keyfi olarak sıralamışlardır. Bu kategoriye giren öğretmen adaylarının **(64 kişi)** verdiği yazılı cevaplardan örnekler aşağıdaki gibidir:

A.Ö (TS): “a, b ve c elemanlarını alfabe z harfine olan uzaklıkları bakımından sıralarsam $a > b > c$ olur.”

T.M (TÖ): “a, b ve c elemanlarına sayısal değer vererek sıralama yapabiliriz”

A.G (TÖ):

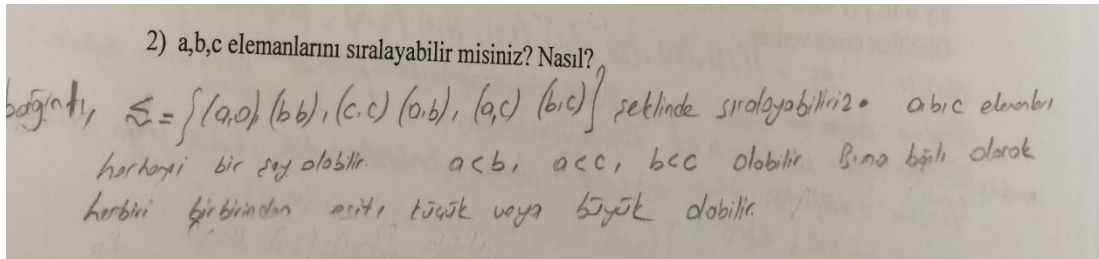


Diğer yandan bu kategorinin frekansı, öğretmen adayları temel tanımlarla karşılaştıktan sonra (TS) 64'den 24'e belli bir düşüş göstermiştir. Bu durum, "sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme" kavram imgesinin 2.durumda yani temel tanımlarla karşılaşmadan sonra ortaya çıkmasıyla açıklanabilir. Çünkü formal tanımları görmelerinden sonra, öğretmen adaylarının a, b ve c elemanlarını bir sıralama bağıntısı ile sıralamaya çalışmaları, onları bu elemanları keyfi bir şekilde sıralamaları fikrinden uzaklaştırmış olabilir.

"Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme"

SKBT'nin 1.sorusunda da ortaya çıkan bu imgenin, bu sorudaki karşılığı öğretmen adayları tarafından a, b ve c elemanlarının bir sıralama bağıntısı tanımlanarak sıralanmasına veya sıralama bağıntıları ile bu elemanlarının sıralanabileceğini sözel olarak ifade etmelerine karşılık gelir. Bu kategorinin frekansının, TS'de (tanımlardan sonra) 65 olduğu görülmektedir. Diğer yandan TÖ'de yani öğretmen adayları sıralama bağıntısının temel tanımları ile karşılaşmadan önce, bu kategori hiç ortaya çıkmamıştır. Bu kategoriye giren öğretmen adayı cevaplarından örnekler, aşağıda sunulmuştur.

S.G:



P.G: "Bu elemanları sıralayabiliriz. Eğer sıralama bağıntısının elemanı olursa sıralanabilir. $\leq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (a, b), (c, b)\}$ yazarsak, c, a'dan küçüktür, a, b'den küçüktür ve c, b'den küçüktür."

A.G: "Bu elemanları sıralayabilir. Eğer bir sıralama bağıntısı tanımlanırsa, bu sıralama bağıntısına göre sıralayabiliriz."

Ki8: “Kural-ölçüt verilmediği için sıralanamaz olma durumu”

Bu kategoriye giren öğretmen adayları, soruda bir kural verilmediği için a, b ve c elemanlarının sıralanamayacağını belirtmişlerdir. Aşağıda bu kategoriye ait yazılı cevaplardan örnekler sunulmuştur.

E.Ö (T.Ö) :

2) a,b,c elemanlarını sıralayabilir misiniz? Nasıl?
a,b,c elemanlarını alfabetik sıraya göre sıralayabiliriz.
matematiksel bir değer ifade etmediği için matematiksel olarak
bir sıralama yapamayacağımızı düşünüyorum.

H.Ş (T.Ö):

2) a,b,c elemanlarını sıralayabilir misiniz? Nasıl?
Belli bir özellik, kriter olmadan sıralayamayız. Elimizde bir özellik
olması lazım sıralayabilmemiz için.

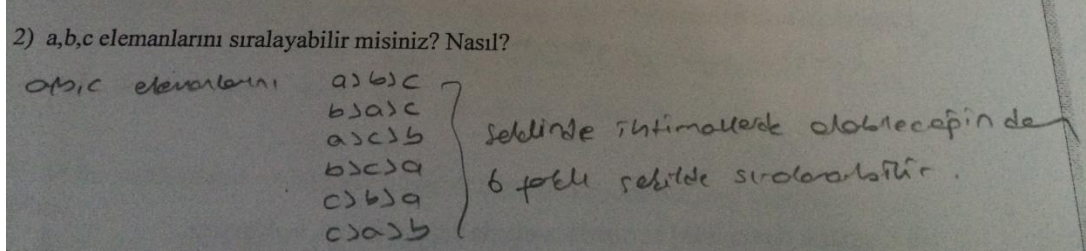
Tablo 2’de görüldüğü üzere, bu kategori, öğretmen adayları formal tanımla karşılaştıktan sonra ortaya çıkmamıştır.

Ki4: “Permütasyon kavramı”

Daha önceden ortaya çıkan bu kategorinin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının cevaplarında a, b ve c elemanlarının olası tüm farklı dizilişlerini ($3!=6$ adet) yazarak, bu dizilişlerin her birinin sıralama olduğunu belirtmelerini anlatır. Tablo 2’de gösterildiği gibi TÖ’de bu şekilde **18** kişi tespit edilmiştir. Örnek teşkil etmesi açısından cevabı bu kategoriye giren 2 öğretmen adayının yazılı cevabı sunulmuştur.

K.A (T.Ö): “a-b-c, b-a-c, a-c-b, c-a-b, c-b-a ve b-c-a” $3! = 6$ farklı şekilde sıralama yapılabilir.”

M.E(T.Ö):

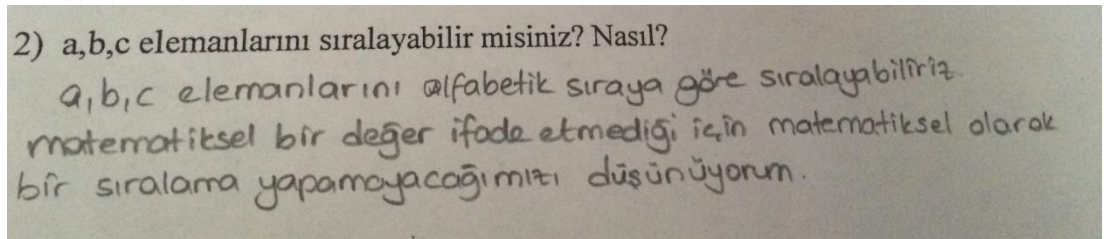


Tablo 2’de görülebileceği gibi sıralama kavramı bilgi testinin 2.sorusu için tanımlarla karşılaştıktan sonra, 1 öğretmen adayı a, b ve c elemanlarının permütasyon kavramı ile sıralanabileceğini ve bunun 6! şeklinde yapılabileceğini belirtmiştir.

Ki9: “Sadece sayısal verilerin sıralanabilir oluşu”

Tablo 2’de görüldüğü üzere T.Ö’de bu öğretmen adaylarından **2 tanesi** gerekçe olarak bu elemanların sayısal bir değer taşımadıkları için sıralanamayacağını göstermişlerdir. Yani bu öğrencilerin yalnızca sayısal verilerin sıralanabileceğine dair bir algı taşıdıkları söylenebilir. Aşağıda bu kategoriye ait yazılı cevaplardan örnekler sunulmuştur.

E.Ö (T.Ö):



Tablo 2’de görüldüğü gibi, T.S’de “sadece sayısal veriler sıralanabilir” kavram imgesi temel tanımlarla karşılaşmadan sonra görülmemiştir.

“Diğer” Kategorisi

Bu kategori de, sıralama kavramı bilgi testindeki ikinci soruyu yanıtsız bırakan öğretmen adaylarını işaret etmektedir.

Tablo 2’de görüldüğü gibi bu öğretmen adaylarının sayısı 4 olarak tespit edilmiştir. Formal tanımla karşılaştıktan sonra sıralama kavramı bilgi testinin 2.sorusu için 10 öğretmen adayının cevabı diğer kategorisine dahil edilmiştir. Bu öğretmen adayları soruyu yanıtsız bırakmışlardır.

SKBT’nin 2.sorusuna ilişkin tanımlarla karşılaşmadan önce, öğretmen adaylarından biri ile yapılan görüşme aşağıda sunulmuştur.

A: “{a, b, c} şeklinde bir küme düşünürsek, bu kümenin elemanlarını sıralayabilir misiniz? Bu konuda ne düşünüyorsunuz?”

Ö4: “Bu elemanları sıralamak için ilk aklıma gelen, alfabedeki sıralama. Bundan dolayı $a > b > c$ şeklinde bir sıralama yapabilirim diye düşünüyorum”

A: “Peki sorduğum soruda bize sıralama yapmak için herhangi bir ölçütten bahsedilmedi. Bu açıdan düşünürsek ne söyleyebilirsiniz?”

Ö4: “Evet soruda bir kural verilmedi fakat ben bu sıralamayı ilk aklıma gelen şeye göre yaptım. Yani kuralı kendim belirledim.”

Diyalogdan görüldüğü üzere, Ö4’ün a, b ve c elemanlarını keyfi olarak belirlediği bir kural ile sıralama yapmaya çalıştığı görülmektedir. Bu noktada günlük hayattaki sıralamada sezgisel düşüncelerin ön planda olduğu söylenebilir.

4.1.3 SKBT 3. Sorusuna ait Bulgular

Sıralama kavramı bilgi testinin üçüncü sorusu olan “□, Δ, #, * sembollerini sıralayabilir misiniz? Sıralayabiliyorsanız nasıl yapabileceğinizi gösteriniz.”

sorusuna ilişkin öğretmen adayı cevapları analiz edildiğinde Tablo 3'te gösterilen imge kategorileri ortaya çıkarılmıştır. Bu soru ile amaçlanan, birbirleriyle görünüşte ilişkisiz gibi görünen elemanların ya da öğelerin sıralanması ile alakalı öğretmen adaylarının zihinlerindeki kavram imgesi kategorilerini ortaya çıkarmaktır. Bu kategorilerin izahı aşağıda verilmiştir.

Tablo 3 SKBT 3. Sorusuna ait Kategoriler

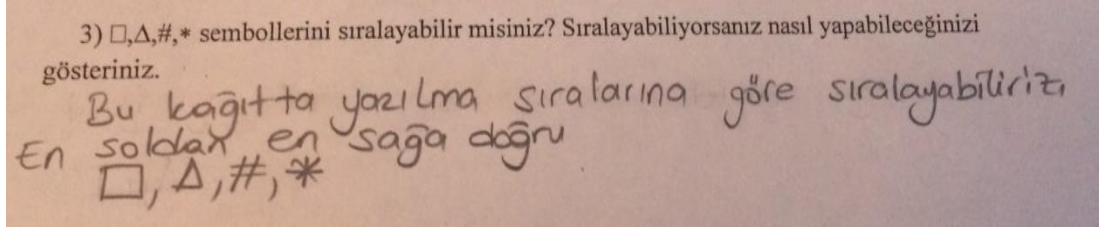
Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S3	Ki7: Keyfi bir kural belirleme	37	17
	Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme	-	60
	Ki4: Permütasyon kavramı	19	4
	Ki8: Kural-ölçüt verilmediği için sıralanamaz olma durumu	13	-
	Ki3: Sıralanacak elemanlar arasında ortak özellik bulunma zorunluluğu	15	-
	Ki9: Sadece sayısal verilerin sıralanabilir oluşu	7	-
	Ki4: Kombinasyon kavramı	2	-
	Sıralama yapılamaz (Gerekçesiz)	-	7
	Boş	7	12

*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

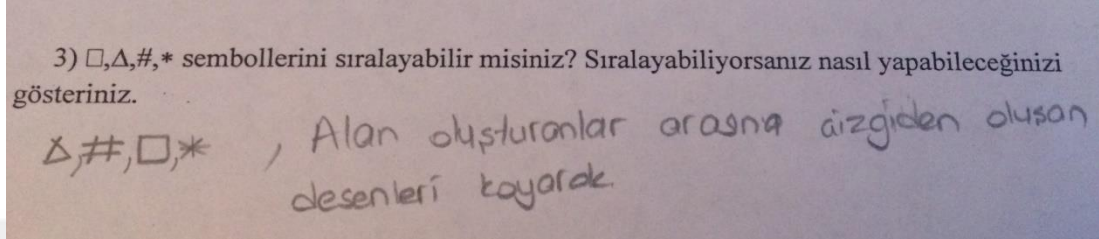
Ki7: “Keyfi bir kural belirleme”

Sıralama kavramı bilgi testinin üçüncü sorusuna verilen yazılı cevaplar analiz edildiğinde daha önce de izahı yapılan bu kategoriye giren **37 öğretmen adayı** tespit edilmiştir. Bu imgenin bu sorudaki karşılığı, bu öğretmen adaylarının soruda verilen sembollerini sıralarken keyfi bir kural-kriteri baz alıp sıralama yoluna gitmişlerdir. Örnek teşkil etmesi açısından öğretmen adayları tarafından verilen yazılı cevaplardan bazıları aşağıdaki sunulmuştur.

A.A (T.Ö):



S.A (T.Ö):



K.M (T.Ö): “Sıralayabilirim. $\square = 1$, $\Delta = 2$, $\# = 3$ ve $* = 4$ dersek $\square < \Delta < \# < *$ şeklinde sıralarım.”

U.B (T.Ö) : “Yapılarındaki çizgi sayısına göre sıralanabilir. $\square = \# > \Delta = *$ gibi.”

Tablo 3’te görülebileceği gibi öğretmen adaylarından **17 kişi** soruda verilen $\square$, Δ , $\#$ ve $*$ sembollerini keyfi olarak kendi belirledikleri bir kuralla sıralama yoluna gitmişlerdir. Örnek olarak bir öğretmen adayının cevabı aşağıdaki gibidir.

D.Y(T.S): “Evet sıralayabiliriz. Doğru parçası sayılarına göre sıralayabiliriz. $\square = \# > \Delta = *$ şeklinde olur.”

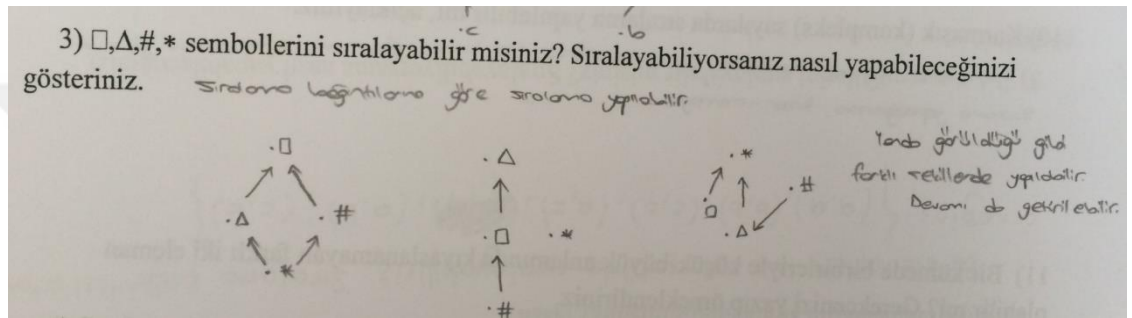
$\square$, Δ , $\#$, $*$ sembollerinin sıralanıp sıralanamayacağını sorgulayan 3.soruda, öğretmen adaylarının temel tanımlarla karşılaşmadan önce “keyfi bir kural belirleme” kavram imgeleri temel tanımlarla karşılaşmadan sonra (TS) frekanslarında azalma görülmüştür.

Ki2: “Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme”

Tablo 3’te görülebileceği gibi bu imge kategorisine giren öğretmen adayları, $\square$, Δ , $\#$, $*$ sembollerinin sıralanması hususunda formal tanımla ilişkilendirerek cevap

vermişlerdir. Bu şekilde (TS)'de 60 öğretmen adayı mevcuttur. Öğretmen adayları, formal tanımla karşılaşmadan önce (T.Ö) bu kategori hiç ortaya çıkmamıştır. Bu öğretmen adaylarından 51'i bu sembolleri uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayıp sıralarken, 9'u ise bir sıralama bağıntısı tanımlamamış, sadece bu sembollerin sıralama bağıntıları ile sıralanabileceğini cevaplarında sözel olarak ifade etmişlerdir. T.S'de bu kategoriye giren öğretmen adaylarının yazılı cevaplarından örnekler aşağıda sunulmuştur.

S.A (T.S):



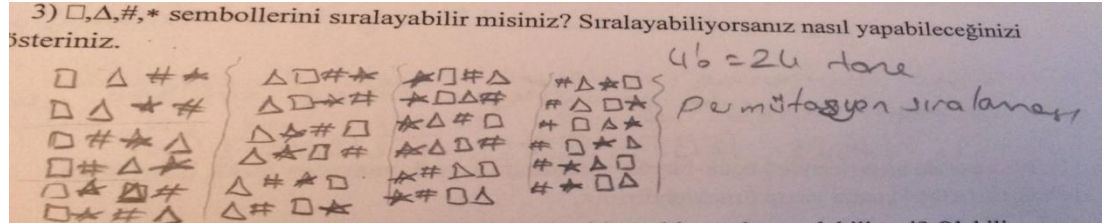
M.D (T.S): “Sıralayabiliriz. $\{\square, \Delta, \#, *\}$ kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlarsak, $\leq = \{(\square, \square), (\Delta, \Delta), (\#, \#), (*, *), (\square, \Delta), (\Delta, *), (\square, *), (\#, *)\}$ bu ikililere göre $\square \leq \Delta, \Delta \leq *, \square \leq *$ ve $\# \leq *$ yazabiliriz.”

Ki4: “Permütasyon kavramı”

Daha önce de izahı yapılan bu imge kategorisinin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının sıralama kavramı bilgi testinin 3.sorusu için cevaplarında verilen sembolleri sıralarken permütasyon kavramını kullanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının soruda verilen sembollerin olası bütün dizilişlerini bulmanın bu sembollerin sıralama işlemine karşılık geleceğini düşündükleri söylenebilir. Tablo 3'den de görüleceği üzere (T.Ö)'de cevapları bu kategoriye giren **19** öğretmen adayı tespit edilmiştir. Öğretmen adayları sıralama bağıntısının temel tanımları ile karşılaştıktan sonra ise (T.S)'de bu kategorinin frekansı **4**'dür. Bu 4 öğretmen adayı da bu sembollerin farklı şekillerde dizilmesi şeklinde oluşan bu sıralamaların **4!** sayıda olacağını verdikleri yazılı cevaplarda belirtmişlerdir.

Örnek teşkil etmesi açısından bu kategoriye giren öğretmen adaylarından cevaplarından biri aşağıda sunulmuştur.

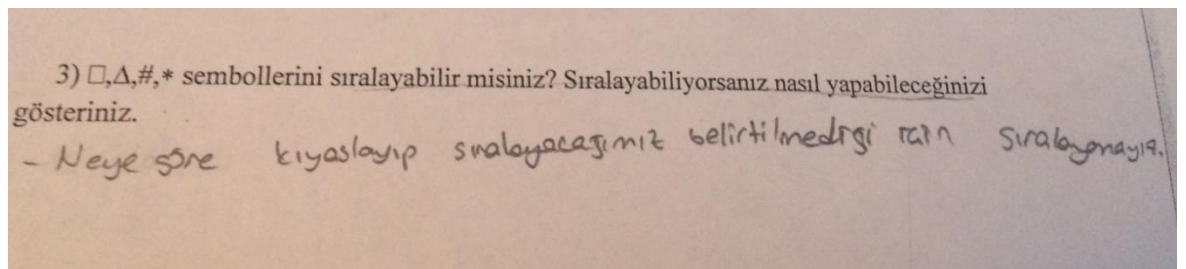
A.Y (T.Ö):



Ki8: “Kural-ölçüt verilmediği için sıralanamaz olma durumu”

Daha önce de izahı yapılan bu kategoriye giren öğretmen adayları, sıralama bağıntısının temel tanımları ile karşılaşmadan önce (T.Ö), SKBT’nin 3.sorusundaki sembollerin soruda bir kural verilmediğini için sıralanamayacağını düşünmektedirler. Bu şekilde T.Ö’de **13** öğretmen adayı mevcuttur. Bu öğretmen adaylarının aynı zamanda sıralama yapabilmek için bir ölçüt ihtiyacı taşıdıkları da söylenebilir. T.S’de ise, bu kategori, bu soru için hiç ortaya çıkmamıştır. Aşağıda bu kategoriye giren öğretmen adaylarının cevaplarından bir örnek sunulmuştur.

R.M (T.Ö):

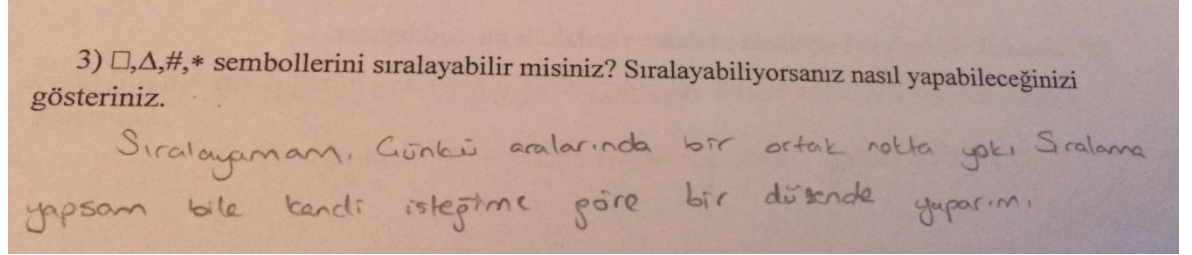


Ki3: “Sıralanacak elemanlar arasında ortak özellik bulunma zorunluluğu”

Daha önce açıklanan bu imge kategorisinin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının bu semboller arasında ortak bir özellik olmadığı için bu sembollerin sıralanamayacağını düşünmeleridir. Bu şekilde T.Ö’de **15** öğretmen adayı tespit

edilmiştir. T.S’de ise bu kategori hiç ortaya çıkmamıştır. Ortaya çıkarılan bu kategoriye örnek teşkil etmesi açısından, öğretmen adaylarının yazılı cevaplarından bir örnek aşağıda sunulmuştur.

H.Ö (T.Ö):



Ki9: “Sadece sayısal verilerin sıralanabilir oluşu”

Daha önceki soruda da ortaya çıkan bu imge cevaplarında sadece sayısal verilen sıralanabileceğini belirtip, bu sembollerin bir sayısal değer taşımadığını gerekçe göstererek sıralama yapılamayacağını söyleyen öğretmen adaylarını işaret etmektedir. Bu şekilde T.Ö’de 7 öğretmen adayı tespit edilmiştir. Öğretmen adayları, sıralama bağıntısındaki temel tanımlarla karşılaştıktan sonra (T.S) ise bu kategori ortaya çıkmamıştır.

Ki4: “Kombinasyon kavramı”

SKBT’nin 3.sorusu için bu kategori, “□, Δ, #, *” sembollerini sıralama işleminde kombinasyon kavramı ile ilişkilendiren öğretmen adayı cevaplarından ortaya çıkarılmış kategoridir. Biraz daha açacak olursak, bu kategoriye giren öğretmen adayları verilen semboller kombinasyon işlemi yardımıyla sıralayabileceklerini cevaplarında belirtmişlerdir. Tablo 3’den de görüldüğü üzere T.Ö’de cevabı bu kategoriye dahil olan 2 öğretmen adayı mevcuttur. T.S’de ise bu kategori hiç ortaya çıkmamıştır. Örnek olması açısından cevabı bu imge kategorisine dahil edilen öğretmen adaylarından birinin cevabı aşağıdaki gibidir:

P.G (T.Ö): “ $\square, \Delta$ veya $\square, \#$ veya $\square, *$ veya $\Delta, \#$ veya $\Delta, *$ veya $\#, *$ gibi kendi aralarında C(4,2) şeklinde sıralanabilir ya da C(4,3) şeklinde de olabilir.”

SKBT'nin 4. Sorusu için 7 öğretmen adayı, temel tanımları gördükten sonra (T.S) bu sembollerin sıralamayacağını düşünmektedirler ve bu öğretmen adayları, cevaplarında buna ilişkin bir gerekçe sunmamışlardır. Bu yüzden bu kategori bir imge olarak değerlendirilmemiştir. T.Ö'de ise bu kategori hiç ortaya çıkmamıştır.

K.D (T.S): “Nasıl sıralanabileceğini bilmiyorum. Sıralama yapılamaz diye düşünüyorum.”

“Diğer” kategorisi

Sıralama kavramı bilgi testinin 3.sorusu için T.Ö'de soruya yanıt vermeyen öğretmen adaylarının cevapları, tablo 3'de de görülebileceği gibi bu kategoriye dahil edilmiştir (**7 kişi**). Ayrıca T.S'de **12** öğretmen adayının soruyu yanıtsız bıraktıkları tespit edilmiştir.

$\square, \Delta, \#, *$ sembollerinin sıralanıp sıralanamayacağını sorgulayan 3.soruda, öğretmen adaylarının temel tanımlarla karşılaşmadan önce “keyfi bir kural belirleme”, “kriter-ölçüt verilmediği için sıralanamaz”, sıralanacak elemanlar arasında ortak özellik bulunma zorunluluğu ve “sadece sayısal veriler sıralanabilir” kavram imgeleri temel tanımlarla karşılaşmadan sonra ortadan ortaya çıkmamış ya da frekanslarında azalma görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının sıralama bağıntıları ile karşılaşmalarından sonra, “sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme” imgesinin ortaya çıkmasıyla açıklanabilir. Temel tanımlarla karşılaşmadan sonra bile (T.Ö)'de sıralama yapılamayacağını düşünen 7 öğretmen adayının mevcut olduğu görülmektedir. Bu durum bu sembollerin sıralama işleminin öğretmen adaylarının genel sezgilere ters düşen bir durum olmasıyla açıklanabilir.

4.1.4. SKBT 4. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 4 SKBT 4. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S4	Ki7: Keyfi bir kural belirleme	32	10
	Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme	-	73
	Sıralama yapılamaz (Gerekçesiz)	44	4
	Sıralama yapılabilir (Gerekçesiz)	15	-
	Diğer	9	13

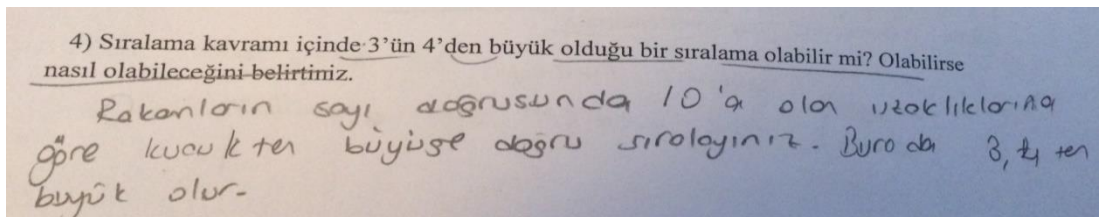
*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

SKBT'nin 4. sorusu olan "Sıralama kavramı içinde 3'ün 4'den büyük olduğu bir sıralama olabilir mi? Olabilirse nasıl olabileceğini belirtiniz." sorusuna ilişkin öğretmen adayı cevapları analiz edildiğinde Tablo 4'de gösterilen kategoriler yani kavram imgeleri ortaya çıkarılmıştır. Bu kategorilerin izahı aşağıda verilmiştir. Bu soru ile amaçlanan, öğretmen adaylarının günlük hayattaki bilgilerine ve algılarına ters düşebileceğini düşündüğümüz bu tarz sıralamalar hakkında onların zihinlerindeki imgeleri ortaya çıkarmaya çalışmaktır.

Ki7: "Keyfi bir kural belirleme"

Daha önce de izahı yapılmış olan bu imge kategorisinin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının 3'ün 4'den büyük olabileceği bir sıralamanın var olabileceğini kendilerinin belirlediği keyfi bir kuralla göstermeleridir. Tablo 4'den de görüldüğü üzere bu şekilde TÖ'de 32 öğretmen adayı mevcuttur. T.S'de ise bu kategorinin frekansının 10 olduğu tespit edilmiştir. Örnek teşkil etmesi açısından bu öğretmen adaylarının cevaplarından bazıları aşağıdaki sunulmuştur.

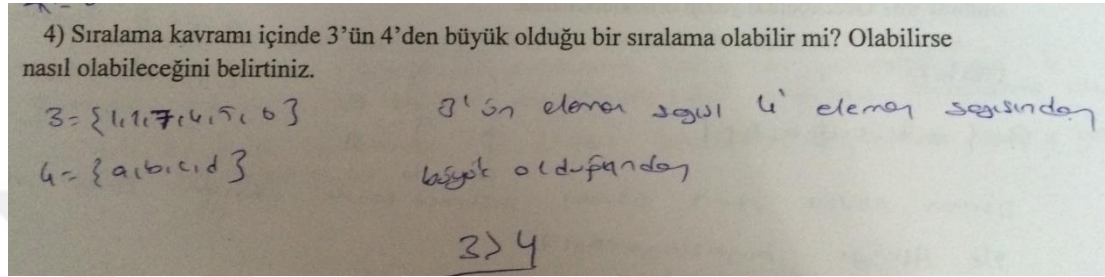
B.A (T.Ö):



A.T (T.Ö): “Olabilir, sürenin sonuç olarak alındığı sıralamada kısa sürede bitiren üst sırada olacağından süresi 3 olan 4 olandan sıralamada daha öndedir.”

K.L (T.Ö): “Olabilir, 34 sayısında $3 > 4$. 3 onluk basamakta yer alır, 4 ise birlik basamakta. Burada 3’ün değeri 4’ten büyük olur.”

M.E(T.S):



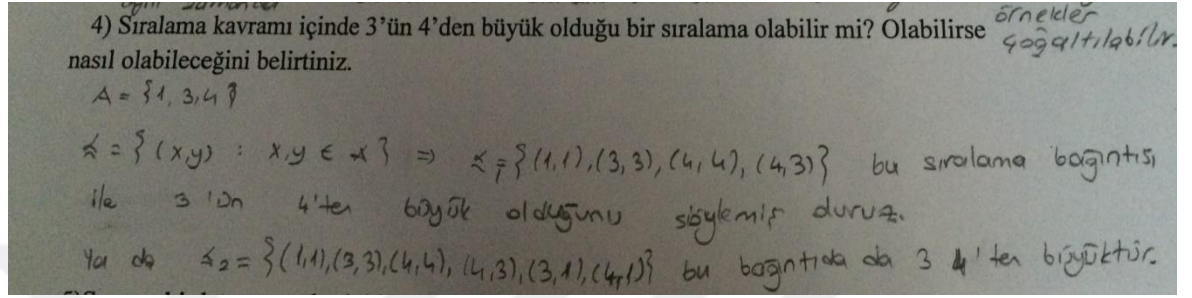
Sıralama kavramı içinde 3’ün 4’den büyük olabileceği bir sıralama olup olamayacağını sorgulayan bu soruda öğretmen adaylarının “keyfi bir kural belirleme” şeklinde isimlendirilen kavram imgesi, frekans olarak 32’den 10’a bir düşüş göstermiştir. Bu noktada temel tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) sıralama yapılamayacağını düşünen öğretmen adaylarının frekansındaki düşüş, öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun sıralama bağıntısı konusu ile karşılaşıldıktan sonra (TS) 3’ün 4’den büyük olabileceği bir sıralamanın, uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak göstermelerine ya da sıralama bağıntıları ile mümkün olabileceğini düşünmelerine bağlanabilir.

Ki2: “Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme”

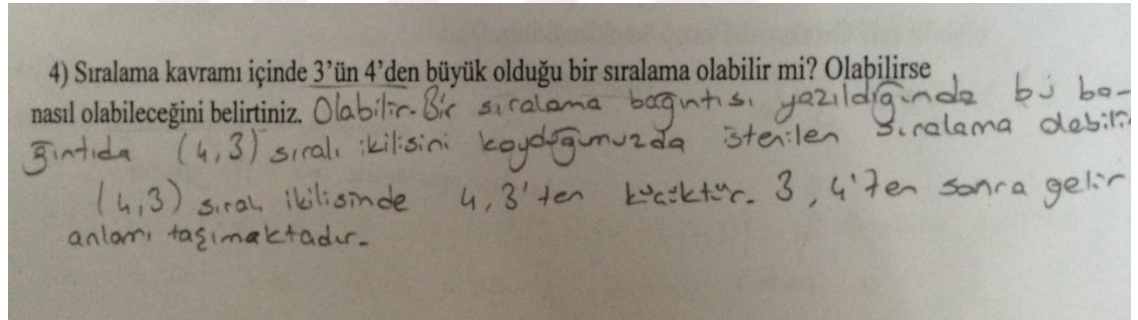
SKBT’nin 4.sorusu için T.S’de bu kategoriye giren 73 öğretmen adayı mevcuttur. Bu öğretmen adaylarının 59’u cevaplarında matematiksel olarak uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak 3’ün 4’den büyük olabileceği bir sıralamanın varlığını göstermişlerdir. 14 öğretmen adayı ise böyle bir sıralamanın sıralama bağıntısı yardımıyla olabileceğini sadece sözel olarak açıklamışlardır. Öğretmen adayları, sıralama bağıntısındaki temel kavramlarla karşılaşmadan önce (T.Ö) ise, bu imge kategorisi ortaya çıkmamıştır. Bu noktada, öğretmen adaylarının informal

düzeyde yani günlük hayat bağlamında, sıralama kavramına ilişkin düşüncelerinin reel sayılarda adi sıralamaya kısıtlanmış olduğu söylenebilir. Aşağıda örnek teşkil etmesi açısından SKBT'nin 4.sorusu için bu kategoriye giren öğretmen adaylarının yazılı olarak verdiği cevaplardan örnekler sunulmuştur.

P.G (T.S):



R.Ö (T.S):



“Sıralama yapılamaz (Gerekçesiz)”

Tablo 4’de görüldüğü gibi, bir imge olmayan bu kategoriye giren öğretmen adayları, cevaplarında 3’ün 4’den büyük olduğu bir sıralamanın olamayacağını söylemekte ve buna ilişkin net bir gerekçe sunmamaktadırlar. T.Ö’de bu şekilde 44 öğretmen adayı mevcuttur. Öğretmen adayları temel tanımlarla karşılaştıktan sonra ise (TS)’de bu kategorinin frekansının 4 olduğu görülmektedir.

“Sıralama yapılabilir (Gerekçesiz)”

Tablo 4’de görüldüğü gibi, bir imge olarak düşünülmeyen bu kategoriye giren öğretmen adayları, cevaplarında 3’ün 4’den büyük olduğu bir sıralamanın

olabileceğini söylemekte ve buna ilişkin net bir gerekçe sunmamaktadırlar. T.Ö’de bu şekilde 15 öğretmen adayı mevcuttur. Öğretmen adayları temel tanımlarla karşılaştıktan sonra ise (TS)’de bu kategorinin hiç ortaya çıkmadığı görülmüştür.

“Diğer kategorisi”

Tablo 4’de bakıldığında SKBT’nin 4.sorusunu boş bırakan öğretmen adayı sayısının temel tanımlarla karşılaşmadan önce (T.Ö) 9, temel tanımlarla karşılaştıktan sonra ise (T.S) 13 olduğu görülmüştür. Bu yüzden bu cevaplar, diğer kategorisine dahil edilmiştir.

4.1.5. SKBT 5. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 5 SKBT 5. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S5	Ki10: Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi	40	8
	Ki11: Reel sayı aralığı ile gerekçelendirme	19	25
	Ki12: Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme	-	39
	Sınırlı olamaz (Gerekçesiz)	7	10
	Sınırlı olabilir (Gerekçesiz)	14	-
	Diğer	20	18

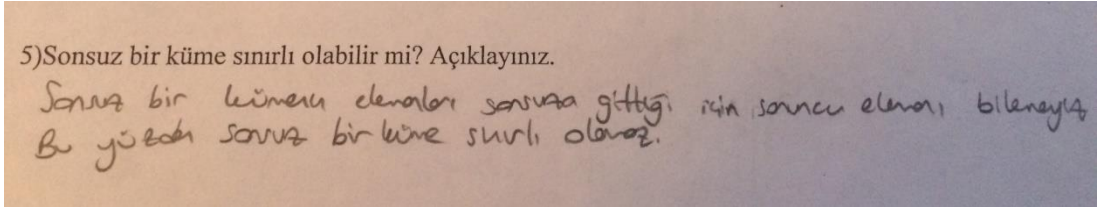
*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

SKBT’nin 5.sorusu olan, “Sonsuz bir küme sınırlı olabilir mi? Açıklayınız.” sorusuna ilişkin öğretmen adayı cevapları analiz edildiğinde tablo 5’teki imge kategorileri ortaya çıkarılmıştır. Bu kategoriler tablo 5’te gösterilmiş olup, kategorilerin izahı aşağıda verilmiştir. Bu sorunun sorulma amacı, öğretmen adaylarının sıralama kavramı yani sıralama bağıntıları temelinde, sonlu-sonsuz, sınırlı ve sınırsız gibi kavramlar hakkında sahip oldukları imgeleri ortaya çıkarmaya çalışmaktır.

Ki10: “Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi”

Bu kavram imgesi kategorisine giren öğretmen adayları, yazılı cevaplarında sonsuz bir kümenin sınırlı olamayacağına ilişkin bir gerekçe göstermeye çalışmış fakat bunların tamamının cevaplarında “**Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemine**” düştükleri tespit edilmiştir. Burada **sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikileminden** kasıt, bu kavramların birbiri yerine kullanılmasıdır. Yani aslında birbirinden farklı olan bu kavramların karıştırılması ya da eş anlama geliyormuş gibi kullanılmasıdır. Örneğin, sonluluk ve sınırlılığın aynı kavramlar gibi düşülmesi ya da sonsuzluğun sınırsızlık olarak ele alınması gibi. Öğretmen adayları sıralama bağıntılarının temel tanımları ile karşılaşmadan önce (TÖ) bu kategoriye giren **40** öğretmen adayı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bu hususta, sonsuz ve sınırsız kümeleri ayırt etmede güçlük yaşadıkları söylenebilir. Tanımlarla karşılaştıktan sonra (TS) ise, bu imgenin frekansının **8** olduğu görülmektedir. Daha iyi anlaşılması için aşağıda hem TÖ’de hem TS’de, bu kategoriye giren öğretmen adaylarının cevaplarından örnekler sunulmuştur.

E.Ü (T.Ö):



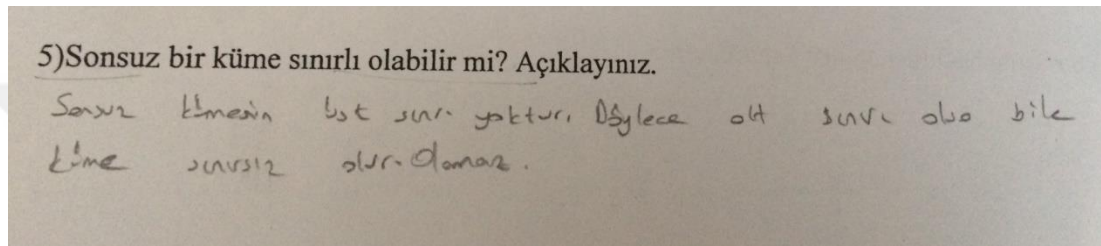
F.G (T.Ö): “Olamaz, sonsuz dememizin nedeni sınırlarının belli olmamasındandır. Sınırları olmayan bir küme sonsuzdur.”

M.H (T.Ö): “Olamaz, sonsuz belli bir bitişi olmayan demektir. Böyle bir şey de sınırlı olamaz.”

A.Ö (T.S): “Sınırı olmayan bir küme sınırlandırılmaz. Çünkü küme sınırsızsa, sonsuz elemana sahip olmuş olur.”

Bu soruda üzerinde durulması gereken başka bir nokta da temel tanımlarla karşılaştıktan sonra **sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemine** düştüğü tespit edilmiş, **8** öğretmen adayından **2** öğretmen adayının sonsuz bir kümenin alt sınırının olabileceği, fakat üst sınırlarının var olamayacağı gibi bir yanlışlık içinde oldukları tespit edilmiştir. Bu noktada bu öğretmen adaylarının **sonsuz bir kümenin üst sınırının olamayacağı** gibi bir imgeye sahip olduklarını söyleyebiliriz. Örnek teşkil etmesi açısından bir öğretmen adayının cevabı aşağıda verilmiştir.

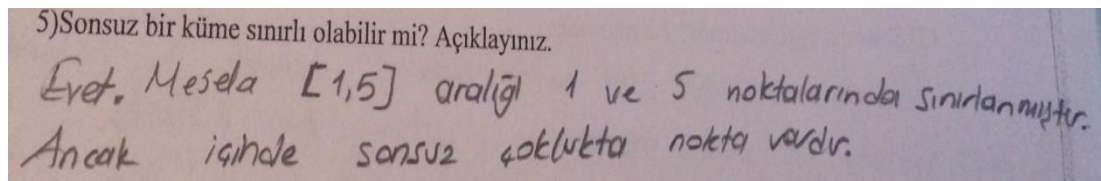
D.D (T.S):

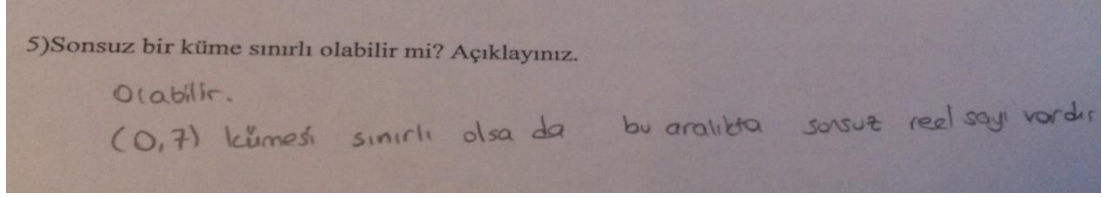


“Ki11: Reel sayı aralığı ile gerekçelendirme”

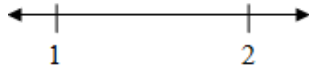
Bu kategoriye giren öğretmen adayları, cevaplarında sonsuz ve sınırlı bir küme örneği olarak reel sayı aralıklarını göstermektedirler. Yani bu öğretmen adaylarının sonsuz ve sınırlı bir küme denilince zihinlerine reel sayı aralıkları gelmektedir. Reel sayı aralıkları, sonsuz ve sınırlı bir küme örneğini matematiksel olarak karşıladıkları için, bu imge, hatalı olarak değerlendirilemez. Tablo 5’e bakıldığında, öğretmen adayları sıralama bağıntılarının temel tanımları ile karşılaşmadan önce (TÖ) bu imgenin frekansının **19** olduğu görülürken, tanımlarla karşılaştıktan sonra ise (TS) **25** olduğu görülmektedir. Aşağıda hem TÖ hem de TS’de bu soruya öğretmen adaylarının verdikleri yazılı cevaplardan örnekler sunulmuştur.

P.G (TÖ):



A.A (TÖ):

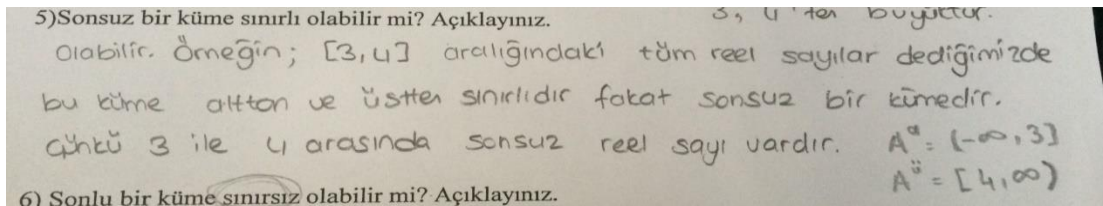
M.B (TÖ): “Reel sayılarda 1 ve 2 arasında sonsuz sayı var. Ama küme 1 ve 2 arasında sınırlı.”



E.O (TS): “Evet olabilir, mesela 0 ile 1 arasında sonsuz tane sayı vardır ancak küme iki taraftan da sınırlandırılmıştır.”

Ki12: “Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme”

Bu imge kategorisine giren öğretmen adayları, SKBT’nin 5.sorusunda sonsuz bir kümenin sınırlı olabileceğini izah ederlerken, sınırsızlığın formal tanımı ile ilişkilendirerek açıklamışlardır. Öğretmen adaylarının sıralama bağıntısındaki formal tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) bu kategorinin ortaya çıkmamış olması doğal olarak karşılanabilir. Tanımlarla karşılaştıktan sonra ise (TS) bu imge kategorisinin frekansının **39** olduğu görülmektedir. Bu **39** öğretmen adayından **15** öğretmen adayı bu durumu sözel olarak ifade ederlerken, **24**’ü ise reel sayı aralıkları üzerinden alt sınır ve üst sınır belirleyerek açıklamışlardır. Bu bağlamda sonsuz bir kümenin sınırlı olabilmesini, direkt olarak kavram tanımı ile ilişkilendirme düzeyinin yetersiz olduğu söylenebilir. Aşağıda örnek teşkil etmesi açısından bu kategoriye giren öğretmen adaylarından birinin yazılı cevabı verilmiştir.

P.E (T.Ö):

“Sınırlı olamaz (Gerekçesiz)”

Bu kategoriye giren öğretmen adayları SKBT’nin 5.sorusu için cevaplarında sonsuz bir kümenin sınırlı olup olamayacağına dair bir gerekçe göstermeden sınırlı olamayacağını belirttikleri için bu kategori imge olarak değerlendirilmemiştir. Tablo 5’te de görüldüğü üzere TÖ’de bu şekilde 7 öğretmen adayı mevcut iken, TS’de 10 öğretmen adayının olduğu görülmüştür.

“Sınırlı olabilir (Gerekçesiz)”

Bu kategoriye giren öğretmen adayları SKBT’nin 5.sorusu için cevaplarında sonsuz bir kümenin sınırlı olup olamayacağına dair bir gerekçe göstermeden sınırlı olabileceğini belirttikleri için bu kategori imge olarak değerlendirilmemiştir. Tablo 5’te de görüldüğü üzere TÖ’de bu şekilde 14 öğretmen adayı mevcuttur.

“Diğer kategorisi”

Tablo 5’te görüldüğü gibi, SKBT’nin 5.sorusunu, T.Ö’de soruyu 20 öğretmen adayı, T.S’de ise 18 öğretmen adayı yanıtsız bıraktıkları için bunlar diğer kategorisinde değerlendirilmiştir.

Yazılı verileri desteklemek için bu soruya ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden bazıları aşağıda sunulmuştur.

A: “Sonlu küme veya sonsuz küme ne demektir, bu kavramlardan ne anlıyorsunuz?”

Ö4: “İçinde sonsuz tane elemanı olan kümelere sonsuz küme denir. Sonsuz tane eleman yoksa sonlu küme olur.”

Ö5: “Sonlu olması demek bir kümenin sınırlı olması demektir. Sonsuz olması ise sınırsız olması demektir. Böyle olduğunu düşünüyorum”

A: “Peki sınırlı ya da sınırsız küme nedir?”

Ö4: “Örneğin $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ gibi bir küme alalım. 5 burada tüm elemanlardan büyük yani bir sınır. 1 ise tüm elemanlardan daha küçük. Bu da bir sınırdır. Küme iki taraftan da sınırlanmış olur. Yani sınırlı küme olur.”

Ö5: “Bir kümenin sınırlı olması, belli bir yerde durması demek, sınırsız olması ise belli bir yerde durmaması, bitmemesi demek.”

A: “Bu noktada bir kümenin sonlu-sonsuz olması ile sınırlı-sınırsız olması aynı şeyler midir?”

Ö4: “Hayır farklı şeylerdir. Sonlu-sonsuz ayrı, sınırlı-sınırsız ayrıdır.”

Ö5: “Evet aynı kavramlardır diye düşünüyorum. Sonuçta sonlu yani sınırlı bir şeyi, sonsuz yani sınırsız bir şeyi anlıyorum.”

A: “Sonsuz bir küme sınırlı olabilir mi?”

Ö4: “Bence olabilir. Mesela $(0, 1)$ aralığı içinde sonsuz tane reel sayı vardır. Fakat 0 ve 1 ile sınırlandırılmıştır. Yani sonsuz fakat sınırlı bir kümedir.”

Ö5: “Bence olamaz, Sonsuz demek zaten sonsuza kadar gitmesi demek. Yani sınırlı olamaz. Sınırlı ise zaten sonsuz olamaz.”

Yukarıdaki görüşme diyaloglarından görüldüğü gibi, Ö5 öğretmen adayının sonlu kümeyi sınırlı olarak, sonsuz kümeyi sınırsız olarak yorumladığı görülmektedir. Yani sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi şeklide adlandırdığımız bir imgeye sahip olduğu söylenebilir. Ö4 öğretmen adayının ise, sonlu-sonsuz ve sınırlı-sınırsız farklı şeyler olarak yorumladığı görülmekte, sonsuz ve sınırlı bir küme denilince, aklına reel sayılarda aralık örneği geldiği görülmektedir.

4.1.6. SKBT 6. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 6 SKBT 6. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S6	Ki10: Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi	61	21
	Ki12: Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme	-	47
	Sınırsız olamaz (Gerekçesiz)	10	16
	Sınırsız olabilir (Gerekçesiz)	8	9
	Diğer	21	7

**TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra*

Sıralama kavramı bilgi testinin 6. sorusu olan **“Sonlu bir küme sınırsız olabilir mi? Açıklayınız.”** sorusuna ilişkin öğretmen adayı cevapları analiz edildiğinde tablo 6’daki kavram imgesi kategorileri ortaya çıkarılmıştır. Bu imge kategorileri tablo 6’da gösterilmiş olup, kategorilerin izahı aşağıda verilmiştir. Önceki soruda olduğu gibi bu sorunun sorulması ile amaçlanan, öğretmen adaylarının sıralama bağıntıları temelinde sonlu-sonsuz, sınırlı ve sınırsız gibi kavramlar hakkında sahip oldukları imgeleri ortaya çıkarmaya çalışmaktır.

Ki10: “Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi”

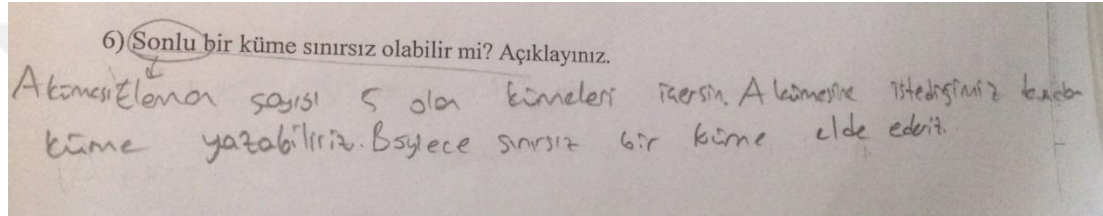
Sıralama kavramı bilgi testinin 6.sorusuna ilişkin TÖ’de daha önceden izahı yapılan bu imgeye sahip olduğu düşünülen **61** öğretmen adayı tespit edilmiştir. Bu **61** öğretmen adayından **45**’i sonlu bir kümenin sınırsız olamayacağına dair cevaplarında gerekçe gösterirken, sonlu bir kümenin sınırlı küme olduğu algısı taşıdıkları için yani sonluluğu, sınırlılıkla eş anlamda kullandıkları için bu kategoriye dahil edilmiş, **16**’sı ise, sonlu ve sınırsız küme örneği olarak reel sayılarda aralık örneklerini gerekçe gösterdikleri için bu kategoriye dahil edilmiştir. Öğretmen adayları sıralama bağıntısındaki tanımlarla karşılaştıktan sonra ise (TS) bu imge kategorisinin frekansının **21** olduğu tablo 6’da görülmektedir. Aşağıda bu kategoriye dahil edilmiş öğretmen adaylarının yazılı cevaplarından örnekler sunulmuştur.

S.A (TÖ): “Sonlu bir küme sınırsız olamaz. Sonlu olursa zaten sınırsızlık ortadan kalkar.”

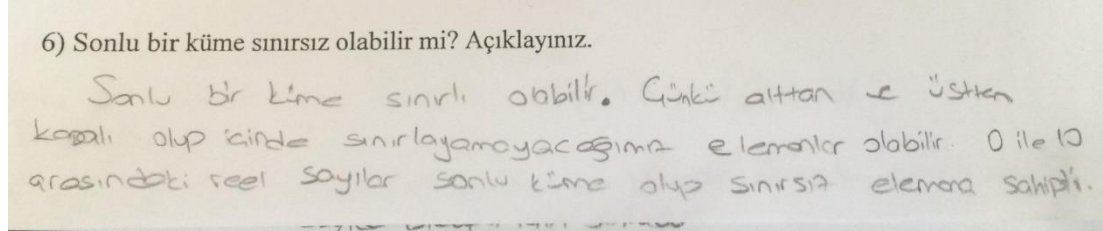
T.B (TÖ): “Sonlu bir küme sınırsız olamaz. Sonuçta küme sonludur ve bir bitiş sınırı vardır.”

B.A (TÖ): “Olabilir. Mesela $[1,2]$ aralığı sonludur ve eleman sayısı sınırsızdır.”

R.M (TÖ):



P.K(TS):

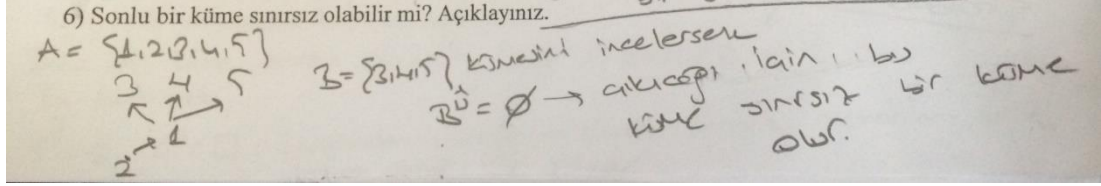


“Ki12: Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme”

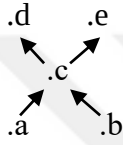
Daha önce de izahı yapılan bu imge kategorisine cevapları dahil edilen öğretmen adayları, sonlu bir kümenin sınırsız olabilmesini, sıralama bağıntılarında sınırsız kümelerin kavram tanımıyla ilişki kurarak yani alt sınır ve üst sınır bağlamında açıklamışlardır. Tablo 6’da görüldüğü gibi TÖ’de bu imge ortaya çıkmaz iken, TS’de bu imgenin frekansının **47** olduğu tespit edilmiştir. Bu kategorinin frekansının formal düzeyde yine de düşük olduğu söylenebilir. Soruda verilen kavramlarının doğalarının öğretmen adaylarının sezgilerine ters düşebilen hususlar olması, ortaya çıkan bu kategori ve frekansı üzerinde etkili olabilir.

Aşağıda bu kategoriye dahil edilen öğretmen adaylarının yazılı cevaplarından örnekler sunulmuştur.

E.S (TS):



M.T (TS): “ $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde bir sıralama bağıntısı düşünelim.



Bu bağıntıya göre, bu kümenin alt kümesi olan $A = \{a, b\}$ kümesinin üst sınırları kümesi $\{c, d, e\}$ ve alt sınırları boş kümedir. Bu yüzden A kümesi sonlu ve sınırsız olur.”

Bu soru için üzerinde durulması gereken başka bir nokta da soruyu alt sınır ve üst sınır kavramları ile ilişkilendirerek açıklayan 47 öğretmen adayı arasından 6 öğretmen adayının yazılı olarak vermiş oldukları cevaplarda, **bir kümenin sınırsız olabilmesi için hem alt sınırın hem de üst sınırın mevcut olması gerektiği** gibi bir yanılgıya düştükleri görülmüştür. Ancak sıralama bağıntılarında bir kümenin sınırsız olması için alt ya da üst sınırlarından birinin olmaması yeterlidir.

“Sınırsız olamaz (Gerekçesiz)”

Tablo 6’da görüldüğü gibi, SKBT’nin 6.sorusu için cevaplarında sonlu bir kümenin sınırsız olamayacağını belirten ve bir gerekçe sunmayan öğretmen adaylarının cevapları bu kategoriye dahil edilmiştir. Bu şekilde TÖ’de 8, TS’de 9 öğretmen adayının mevcut olduğu tespit edilmiştir.

“Sınırsız olabilir (Gerekçesiz)”

Tablo 6’da görülebileceği üzere, SKBT’nin 6.sorusu için cevaplarında sonlu bir kümenin sınırsız olabileceğini belirten ve bir gerekçe sunmayan öğretmen

adaylarının cevapları bu kategoriye dahil edilmiştir. Bu şekilde TÖ’de **10**, TS’de **16** öğretmen adayının mevcut olduğu tespit edilmiştir.

“Diğer kategorisi”

SKBT’nin 6.sorusunu yanıtsız bırakan öğretmen adayları bu kategoriye dahil edilmiştir. Bu şekilde TÖ’de **21**, TS’de **7** öğretmen adayının olduğu tablo 6’da görülebilir.

SKBT’nin 6.sorusuna ilişkin öğretmen adayları ile yapılan mülakatlardan örnekler aşağıda verilmiştir.

A: “ Sonlu küme sınırsız olabilir mi?”

Ö2: “Bence olamaz, zaten sınırsız bir küme olabilmesi için sonsuz olması gerekir diye düşünüyorum.”

Ö5: “Mesela $[1, 4]$ aralığındaki reel sayılar dersek, Bence bu küme sınırsız olamaz. Çünkü sonlu bir kümedir. Sonlu bir küme olduğu için sınırsız olamaz diye düşünüyorum.”

Ö4: “Tam bir fikrim yok. Eğer sonsuz bir küme sınırlı olabiliyorsa, bu da mümkün olabilir diye düşünüyorum. Fakat nasıl olabileceğine dair bir fikrim yok.”

Yukarıdaki görüşme diyaloglarından da görülebileceği gibi, Ö2’nin sonlu bir kümenin sınırsız olamayacağını düşündüğü, Ö5’in ise reel sayılarda $[1, 4]$ aralığını sonlu kabul ettiği için bu aralığın sınırsız olamayacağını düşünmektedir. Ö4’ün ise bu duruma ilişkin tam olarak bir fikre sahip olmadığı, ancak sezgisel olarak sonsuz bir küme sınırlı olabiliyorsa, sonlu bir kümenin de sınırsız olabileceğini düşündüğü görülmektedir.

4.1.7. SKBT 7. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 7 SKBT 7. Sorusuna ait Kategoriler

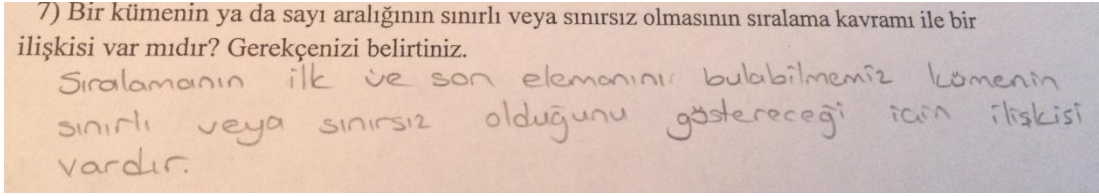
Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S7	Ki13: Sıralamanın sınırları belirlemesi	13	-
	Ki14: Sıralama yapmak için küme sınırlı olmalı	9	-
	Ki10: Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi	6	15
	Ki12: Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme	-	61
	İlişki vardır (Gerekçesiz)	17	10
	İlişki yoktur (Gerekçesiz)	31	6
	Diğer	24	8

**TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra*

Sıralama kavramı bilgi testinin yedinci sorusu olan “Bir kümenin ya da sayı aralığının sınırlı veya sınırsız olmasının sıralama kavramı ile bir ilişkisi var mıdır? Gerekçenizi belirtiniz.” sorusuna ilişkin öğretmen adayları cevapları analiz edildiğinde Tablo 7’de gösterilen imge kategorileri ortaya çıkarılmıştır. Bu kategorilerin izahı sırasıyla aşağıda verilmiştir. Bu soru ile amaçlanan sınırlılık ve sınırsızlık kavramlarının sıralama kavramı ile ilişkisi hakkında öğretmen adaylarında var olan kavram imgelerini ortaya çıkarmaya çalışmaktır.

Ki13: “Sıralamanın sınırları belirlemesi”

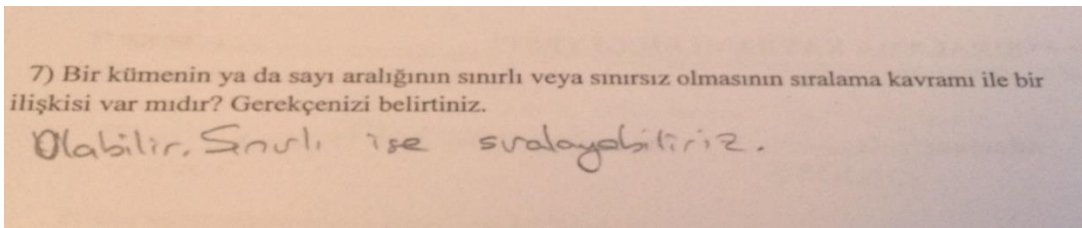
Bu imge kategorisi, SKBT’nin 7.sorusu için sıralama kavramı ile sınırlılık ve sınırsızlık arasında ilişki olduğu söyleyen ve cevaplarında buna gerekçe olarak sıralama yapma işleminin, bir kümedeki sınırları belirlediği gösteren öğretmen adaylarına işaret etmektedir. Öğretmen adayları sıralama bağıntısının temel tanımları ile karşılaşmadan önce (TÖ), bu kategorinin frekansının 13 olduğu tablo 7’de görülmektedir. Öğretmen adayları tanımlarla karşılaştıktan sonra ise, bu imge ortaya çıkmamıştır. Örnek teşkil etmesi açısından bu kategoriye giren cevaplardan bazıları aşağıda verilmiştir.

B.E (TÖ):

B.T (TÖ): “Sıralama işlemi ile kümenin nerede başladığını ve bittiğini belirlememiz, kümenin sınırlılık ve sınırsızlığını göstereceği için ilişki vardır.”

Ki14: “Sıralama yapmak için küme sınırlı olmalı”

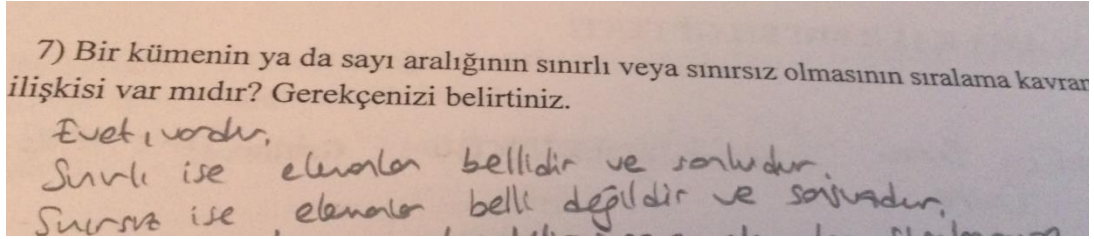
Bu imge kategorisi, SKBT’nin 7.sorusu için sıralama kavramı ile sınırlılık ve sınırsızlık arasında ilişki olduğu söyleyen ve cevaplarında buna gerekçe olarak sıralama yapmak için küme sınırlı olmalı diyen öğretmen adaylarını işaret etmektedir. Öğretmen adayları sıralama bağıntısının temel tanımları ile karşılaşmadan önce (TÖ), bu kategorinin frekansının **9** olduğu tablo 7’de görülmektedir. Öğretmen adayları tanımlarla karşılaştıktan sonra ise, bu imge ortaya çıkmamıştır. Örnek teşkil etmesi açısından bu kategoriye giren cevaplardan biri aşağıda verilmiştir.

F.C (TÖ):**Ki10: “Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi”**

Daha önce de izahı yapılan bu imge kategorisine giren öğretmen adayları, sıralama kavramı ile sınırlılık-sınırsızlık arasında ilişki olduğunu belirtirlerken, cevaplarında **sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemine** düştükleri tespit edilmiştir. Tablo 6’da görüldüğü gibi bu imge kategorisinin frekansının TÖ’de **6**,

TS’de ise 15 olduğu tespit edilmiştir. Örnek teşkil etmesi açısından, bu yazılı cevaplardan biri aşağıdaki gibidir.

E.Ü (TÖ):



Ki12: “Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme”

Daha önce de izahı yapılan bu kategoriye giren öğretmen adayları, sıralama kavramı ile bir kümenin sonluluğu ve sonsuzluğu ilişkisini kavram tanımı ile ilişkilendirerek yani alt sınır ve üst sınır kavramları ile açıklamışlardır. Tablo 6’da görüldüğü gibi, öğretmen adayları, sıralama bağıntısındaki tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) bu kategori hiç ortaya çıkmazken, temel tanımlarla karşılaşmalarından sonra (TS) ise bu kategorinin frekansının 61 olduğu tespit edilmiştir. Örnek teşkil etmesi açısından TS’de bu kategoriye giren öğretmen adaylarının yazılı cevaplarından biri aşağıda verilmiştir.

A.D (TS): “İlişki vardır. Sıralama bağıntılarında, üzerinde sıralama yaptığımız kümenin alt ve üst sınırlarını inceleriz. Alt ve üst sınırların olup olmasına göre, kümenin sınırlı olup olmadığına karar veririz”

“İlişki vardır (Gerekçesiz)”

Bir imge olarak değerlendirilmeyen bu kategoriye giren öğretmen adayları, sıralama kavramı ile bir kümenin sınırlılığı ve sınırsızlığı arasında ilişkinin var olduğunu cevaplarında belirtmiş fakat buna bir gerekçe sunmamışlardır. Tablo 7’den de görüldüğü gibi bu şekilde TÖ’de 17, TS’de ise 10 öğretmen adayının olduğu tespit edilmiştir.

“İlişki yoktur (Gerekçesiz)”

Bir imge olarak değerlendirilmeyen bu kategoriye giren öğretmen adayları, sıralama kavramı ile bir kümenin sınırlılığı ve sınırsızlığı arasında bir ilişkinin olmadığını cevaplarında belirtmiş fakat buna bir gerekçe sunmamışlardır. Tablo 7’den de görüldüğü gibi bu şekilde TÖ’de **31**, TS’de ise **6** öğretmen adayının olduğu tespit edilmiştir.

“Diğer kategorisi”

Tablo 7’de görüldüğü gibi, SKBT’nin 7.sorusunu TÖ’de **24**, TS’de ise **8** öğretmen adayı yanıtsız bıraktıkları için, bunlar diğer kategorisinde değerlendirilmiştir.

SKBT’nin 7.sorusuna ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda verilmiştir.

A: “Bir sayı aralığının ya da bir kümenin sınırlı olup olmaması ile sıralama kavramı arasında bir ilişki var mıdır? Nasıl yorumlarsınız? Bir başka deyişle kümenin sınırlı olup, olmamasında sıralama kavramının etkisi bir rolü var mıdır?”

Ö1: “Küme sınırlı da olsa sınırsız da olsa bence sıralama yapılabilir. Bir kural belirlendiği takdirde sıralanabilir. Sonsuz olması ya da sınırlı olması bir şey değiştirmez diye düşünüyorum. Bence bir etkisi yoktur diye düşünüyorum.”

Ö3: “Evet vardır, sınırlı kümelerde sıralama yapılabileceğini düşünüyorum.”

A: “Peki bu dediğinize göre, sınırsız kümelerde sıralama yapılamaz mı?”

Ö3: “Tam olarak bilemiyorum yapılabilir mi. Ama bir şey söylemek gerekirse, sınırsız kümelerde elemanların tümü tam belli, net olmadığı için sıralama yapılamaz diye düşünüyorum.”

Yukarıda görüşme diyaloglarına bakıldığında, Ö1'in sınırlı ya da sınırsız kümeler ile sıralama arasındaki ilişkiyi tam olarak kuramadığı, sıralamanın sınırsızlığı belirlediği değil, sınırsız ya da sınırlı kümelerin üzerinde sıralama yapma fikrine odaklandığı görülmektedir. Ö3'ün ise, sınırsız kümelerde sıralama yapılamaz şeklinde bir imgeye sahip oldukları görülmektedir. Buna gerekçe olarak da sınırsız kümelerin elemanlarının tam olarak belli olmadığı ileri sürmektedir. Yani sınırsızlığı sonsuz olarak görmektedir.

4.1.8. SKBT 8. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 8 SKBT 8. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S8	Ki15: Elemanı olmadığı için sınırsızdır	50	-
	Ki16: Elemanı olmadığı için sınırlıdır	29	6
	Ki17: Elemanı olmadığı için ne sınırlıdır ne sınırsızdır	11	2
	Ki18: Her kümenin alt kümesi olduğu için sınırsızdır	3	-
	Ki12: Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme (Sınırsız)	-	66
	Ki12: Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme (Sınırlı)	-	2
	Ki19: Sınırsız kabul edilir	-	19
	Diğer	7	5

*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

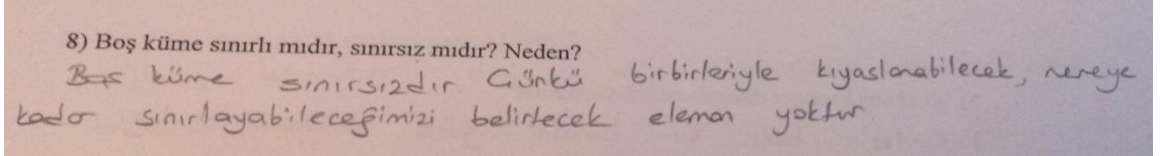
Sıralama kavramı bilgi testinin 8. sorusu olan “Boş küme sınırlı mıdır, sınırsız mıdır? Neden?” sorusuna verilen öğretmen adayı cevapları analiz edildiğinde öğretmen adaylarının boş kümenin sınırlı ve sınırsızlığına ilişkin kavram imgesi kategorileri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu kategoriler yukarıda tablo 8’de gösterilmiştir. Aşağıda bu kategorilerin ayrıntılı açıklamasına yer verilmiştir.

Ki15: “Elemanı olmadığı için sınırsızdır”

Bu kategori, SKBT’nin 8.sorusu için cevaplarında boş kümenin hiç elemanı olmadığı için sınırsız olacağını belirten öğretmen adaylarına işaret etmektedir. Tablo 8’de görüldüğü gibi bu kategorinin frekansının öğretmen adayları sıralama

bağıntısındaki tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) 50 olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları tanımlarla karşılaştıktan sonra (TS) ise bu kategori ortaya çıkmamıştır. Daha iyi anlaşılması açısından bu kategoriye dahil edilen öğretmen adaylarından birinin yazılı cevabı aşağıda verilmiştir.

C.K (TÖ):

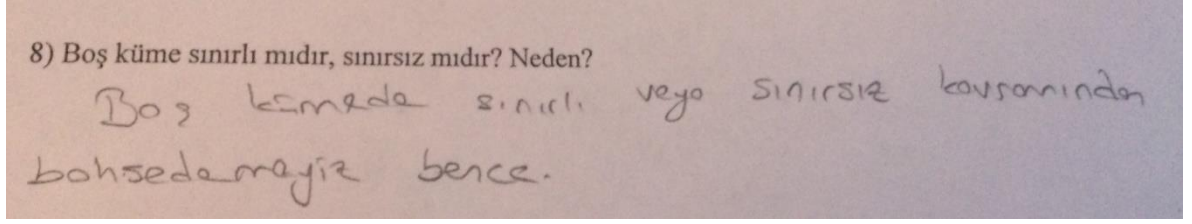


Ki16: “Elemanı olmadığı için sınırlıdır”

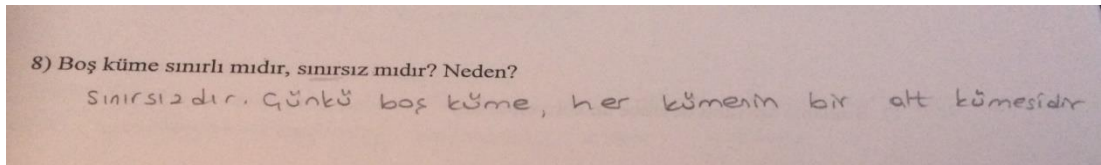
Bu kategori, SKBT’nin 8.sorusu için cevaplarında boş kümenin hiç elemanı olmadığı için sınırlı olacağını belirten öğretmen adaylarına işaret etmektedir. Tablo 8’de görüldüğü gibi bu kategorinin frekansının öğretmen adayları sıralama bağıntısındaki tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) 29 olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları tanımlarla karşılaştıktan sonra (TS) ise bu kategorinin frekansının 6 olduğu görülmektedir.

Ki17: “Elemanı olmadığı için ne sınırlıdır ne sınırsızdır”

Bu imge kategorisi, SKBT’nin 8.sorusu için cevaplarında boş kümeye, hiç elemanı olmadığı için ne sınırlı ne de sınırsız şeklinde bir yorum getirilemeyeceğini belirten öğretmen adaylarına işaret etmektedir. Yani bu imgeye sahip olan öğretmen adayları boş kümenin ne sınırlı ne de sınırsız olduğunu düşünmektedir. Tablo 8’de görüldüğü gibi bu kategorinin frekansının öğretmen adayları sıralama bağıntısındaki tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) 11 olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları tanımlarla karşılaştıktan sonra (TS) ise bu kategorinin frekansının 2 olduğu görülmektedir. Aşağıda örnek olarak bu kategoriye giren yazılı cevaplardan biri verilmiştir.

T.K (TÖ):**Ki18: “Her kümenin alt kümesi olduğu için sınırsızdır”**

Bu imge kategorisi, SKBT’nin 8.sorusu için cevaplarında boş kümenin her kümenin alt kümesi oluşundan ötürü boş küme sınırsız olur şeklinde yorum getiren öğretmen adaylarına işaret etmektedir. Yani bu imgeye sahip olan öğretmen adayları boş kümenin bütün kümelerin alt küme oluşundan dolayı sınırsız olduğunu düşünmektedir. Tablo 8’de görüldüğü gibi bu kategorinin frekansının öğretmen adayları sıralama bağıntısındaki tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) 3 olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları tanımlarla karşılaştıktan sonra (TS) ise bu kategorinin ortaya çıkmadığı görülmektedir. Aşağıda daha iyi anlaşılması açısından örnek olarak bu kategoriye giren yazılı cevaplardan biri verilmiştir.

E.T (TÖ):**Ki12: “Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme (Sınırsız)”**

Daha önce de açıklanan bu imge kategorisinin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarında, sınırlı-sınırsız kümelerin kavram tanımı ile ilişki kurarak boş kümenin sınırsız olduğunu açıklayan öğretmen adaylarını göstermektedir. Yani cevapları bu kategoriye giren öğretmen adayları, boş kümenin alt ve üst sınırı mevcut olmadığı için sınırsız olduğunu belirtmişlerdir. Tablo 8’de görüldüğü gibi, tanımlardan önce (TÖ) bu kategori hiç ortaya çıkmamış, tanımlardan sonra ise (TS) frekansının 66 olduğu tespit edilmiştir. Formal düzeyde öğretmen

adaylarının kalanının (34 kişi) direkt olarak boş kümenin sınırlılığı ve sınırsızlığını alt sınır ve üst sınır kavramları ile ilişkilendirmede güçlük yaşadıkları söylenebilir.

Ki12: “Alt ve üst sınır ile ilişkilendirme (Sınırlı)”

Daha önce de açıklanan bu imge kategorisinin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarında, sınırlı-sınırsız kümelerin kavram tanımı ile ilişki kurdukları fakat boş kümenin sınırlı olduğunu belirtmeleridir. Yani cevapları bu kategoriye giren öğretmen adayları, boş kümenin alt ve üst sınırı olduğu için sınırlı olduğunu belirtmişlerdir. Burada bu öğretmen adaylarının boş kümenin alt ve üst sınırının olduğu yanılgısına düştükleri söylenebilir. Çünkü matematiksel olarak boş kümenin bir elemanı olmadığı için alt ve üst sınırları da mevcut değildir. Tablo 8’de görüldüğü gibi, tanımlardan önce (TÖ) bu kategori hiç ortaya çıkmamış, tanımlardan sonra ise (TS) frekansının 2 olduğu tespit edilmiştir.

Ki19: “Sınırsız kabul edilir”

Bu imge kategorisi ise, cevaplarında boş kümenin sınırsız kabul edildiği belirten öğretmen adayı cevaplarından ortaya çıkarılmıştır. Sıralama bağıntılarında her ne kadar dip metinde boş kümenin alt ve üst sınırı olmadığı için sınırsız olduğu bilinse de matematiksel olarak boş kümenin sınırsız kabul edildiği söylenebilir. Bu açıdan bu imge doğru sayılabilecek bir imgedir. Bu imge TÖ’de ortaya çıkmamış, TS’de ise frekansının 19 olduğu tespit edilmiştir.

“Diğer kategorisi”

Tablo 8’de görülebileceği gibi SKBT’nin 8.sorusunu yanıtsız bırakan TÖ’de 7, TS’de ise 5 öğretmen adayı tespit edildiğinden diğer kategorisinde ele alınmıştır.

SKBT’nin 8.sorusuna ilişkin yazılı verileri desteklemek amacıyla, öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda verilmiştir.

A: “Boş küme sınırlı bir küme midir, sınırsız bir küme midir? Bu husus hakkında ne düşünüyorsunuz?”

Ö1: “Bence bir hüküm veremeyiz. Çünkü boş kümenin içinde hiç eleman olmadığı için ne sınır ne de sınırsızdır diyebiliriz.”

Ö2: “Boş küme sınırsız bir kümedir, çünkü boş kümenin elemanı yoktur başka bir ifadeyle elemanları belli değildir. Bu yüzden sınırsız bir küme olduğunu düşünüyorum.”

Ö5: “Basit bir mantık yapmak gerekirse, uzayın büyük bir kısmının boşluk olduğunu biliyoruz. Bu yüzden uzay sonsuzdur. Yani buradan hareketle boş küme de sonsuz diyebiliriz. Çünkü içinde hiç eleman bulunmaz. Böyle olduğunu düşünüyorum.”

Yukarıdaki görüşme diyaloguna bakıldığında, Ö1’in boş kümenin sınırlılığı ya da sınırsızlığı hakkında, hiç elemana sahip olmadığı için ‘ne sınırlı ne sınırsızdır’ şeklinde bir imgeye sahip olduğu görülmektedir. Ö2 adlı öğretmen adayı ise, boş kümenin elemanı olmamasını gerekçe göstererek, sonsuz olduğu görüşündedir. Burada yine sınırsızlığın sonsuz gibi algılanması söz konusudur. Ö5 ise, boş kümeyi uzayın sonsuzluğu gibi ele alarak, hiç elemanı olmadığı için sonsuz olduğunu düşünmektedir.

4.1.9. SKBT 9. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 9 SKBT 9. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S9	Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme	-	52
	Ki7: Keyfi bir kural belirleme	14	-
	Başka sıralamalar olabilir (Gerekçesiz)	24	19
	Başka sıralamalar olamaz (Gerekçesiz)	39	18
	Diğer	23	11

*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

Sıralama kavramı bilgi testinin (SKBT) dokuzuncu sorusu olan “Reel sayılarda sıralama kavramı sadece bildiğimiz anlamda adi sıralama $\beta = \{(x, y) : x \leq y, x, y \in \mathbb{R}\}$ (1 < 3, 3 < 5, 5 > 4) ile mi sınırlıdır? Başka şekillerde sıralamalar olabilir mi? Olabilirse örnek veriniz.” sorusuna verilen öğretmen adayı cevapları analiz edildiğinde tablo 9’daki kategoriler bulunmuştur. Bunlar ayrıntılı olarak aşağıda açıklanmıştır. Bu soru ile amaçlanan öğretmen adaylarının reel sayılarda adi sıralamadan daha farklı sıralamaların olup olamayacağı hakkında zihinlerindeki imgeleri ortaya koymaya çalışmaktır.

Ki2: “Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme”

Daha önce de izahı yapılmış olan bu imgenin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının reel sayılarda adi sıralamadan farklı sıralamaların olabileceğini cevaplarında bir sıralama bağıntısı tanımlayarak cevap vermeleridir. Yani bu imge kategorisine giren 52 öğretmen adayı uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak bunun olabileceğini cevaplarında göstermişlerdir. Öğretmen adayları sıralama bağıntısındaki temel tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) ise bu imge ortaya çıkmamıştır. Buradan hareketle, sıralama kavramına ilişkin öğretmen adaylarının informal bilgilerinde reel sayılardaki adi sıralamanın hakim olduğu söylenebilir. Fakat sıralama bağıntılarındaki temel tanımlarla karşılaştıktan sonra (TS) ise, bu imgenin frekansının (52) olması yeterli olmadığı söylenebilir. Bu noktada, reel sayılarda adi sıralamadan farklı sıralamaları, sıralama bağıntıları ile ilişkilendirmede öğretmen adaylarının güçlük yaşadıkları söylenebilir. Örnek teşkil etmesi açısından bu imge kategorisine giren yazılı cevaplardan biri aşağıdaki verilmiştir.

P.G (TS):

9) Reel sayılarda sıralama kavramı sadece bildiğimiz anlamda adi sıralama $\beta = \{(x, y) : x \leq y, x, y \in \mathbb{R}\}$ (1 < 3, 3 < 5, 5 > 4) ile mi sınırlıdır? Başka şekillerde sıralamalar olabilir mi? Olabilirse örnek veriniz.

Evet olabilir. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 2), (2, 1), (5, 1)\}$ bu gibi sıralama bağıntılarına (5 < 2, 2 < 1, 5 < 1) adi sıralama bağıntısından farklı sıralamalar yapılabilir.

Ki7: “Keyfi bir kural belirleme”

Daha önceden de izahı yapılan bu kategorinin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının kendilerinin belirlediği keyfi bir kural ile reel sayılarda adi sıralamadan farklı sıralamaların olabileceğini cevaplarında göstermeleridir. TÖ’de bu imgenin frekansının 14 olduğu görülürken, TS’de bu kategori ortaya çıkmamıştır. Örnek teşkil etmesi açısından aşağıda öğretmen adaylarının yazılı cevaplarından bir örnek verilmiştir.

B.T (TÖ): “Olabilir sayıların okunuştaki harf sayısına göre sıralayabiliriz. $1 > 3$ ya da $5 < 4$ olabilir.”

“Başka sıralamalar olabilir (Gerekçesiz)”

SKBT’nin 9.sorusunda, cevaplarında adi sıralamadan farklı sıralamaların olabileceğini belirtip, buna bir gerekçe sunmayan öğretmen adayları bu kategoriye dahil edilmiştir. Tablo 9’da görüldüğü gibi bu şekilde tanımlarla karşılaşmadan önce **24**, tanımlarla karşılaştıktan sonra ise **19** öğretmen adayı mevcuttur.

“Başka sıralamalar olamaz (Gerekçesiz)”

SKBT’nin 9.sorusunda, cevaplarında adi sıralamadan farklı sıralamaların olamayacağını belirtip, buna bir gerekçe sunmayan öğretmen adayları bu kategoriye dahil edilmiştir. Tablo 9’da görüldüğü gibi bu şekilde tanımlarla karşılaşmadan önce **39**, tanımlarla karşılaştıktan sonra ise **18** öğretmen adayı mevcuttur. Örnek olarak bir öğretmen adayının yazılı cevabı aşağıda sunulmuştur.

E.T (TS) : “Başka türlü sıralama olamaz diye düşünüyorum.”

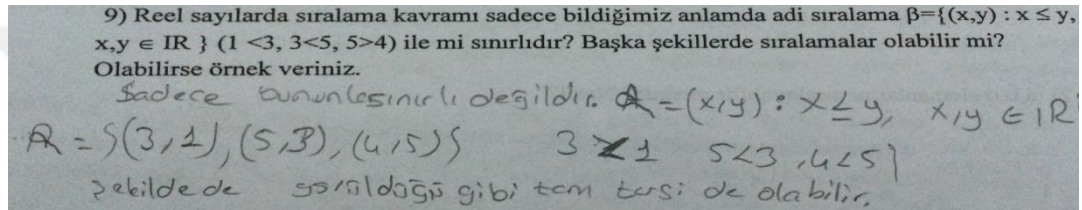
“Diğer kategorisi”

SKBT’nin 9.sorusunu yanıtsız bırakan öğretmen adaylarının TÖ’de **23** olduğu görülmüştür. TS’de ise diğer kategorisine dahil edilen **11** öğretmen adayının **7**’sinin

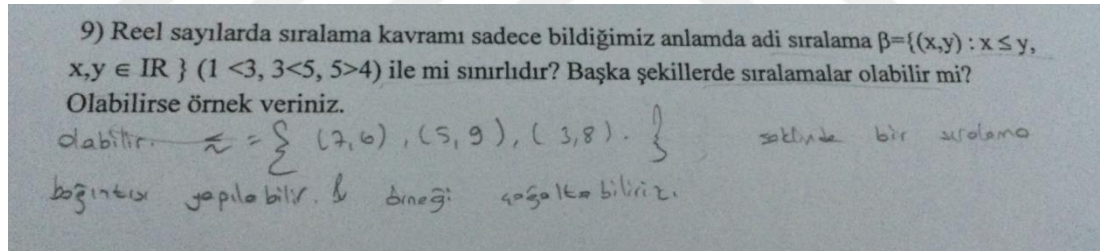
soruyu yanıtsız bıraktıkları tespit edilirken, 4 öğretmen adayının ise tanımladıkları bağıntının sıralama bağıntısı olmadığı tespit edildiği için diğer kategorisinde değerlendirilmiştir. Örnek teşkil etmesi açısından bu cevaplar aşağıda verilmiştir.

Bu soru için, diğer kategorisine giren öğretmen adaylarından bir kısmı soruyu yanıtsız bırakırken (7 kişi), bir kısmının (4 kişi) diğer kategorisine atılış sebebi, tanımladıkları bağıntıların sıralama bağıntısı olmamasından ötürüdür. Aşağıda bu öğretmen adaylarının yazılı cevaplarından örnekler sunulmuştur.

A.K (TS):



D.D (TS):



Bu örneklerde de görüldüğü gibi, bazı öğretmen adaylarının yansıma özelliğini geri plana atarak, bir sıralama bağıntısı tanımlamada güçlük yaşadıkları söylenebilir.

Bu soruya ile de alakalı olarak öğretmen adayları birtakım görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerden örnekler aşağıda sunulmuştur.

A: “Reel sayılarda adi sıralamadan (1 < 3, 3 < 5) farklı başka sıralamalar olabilir mi? Yani bundan farklı bir sıralama, alışlagelenden farklı sıralamalar olabilir mi? Bu konu hakkında ne düşünüyorsunuz?”

Ö1: “Mesela süreli yarışmada ilk gelen yani önce bitiren daha hızlıdır. Bu durumda 1, 2’den önce gelmiş olur. Burada $1 > 2$ gibi bir sıralama yapabiliriz.

Ö2: “1’in 3’den büyük olduğu bir sıralamayı düşünürsek, eğer kuralı ona göre düzenlersek mesela 1’den sonsuza kadar değil de sonsuzdan 1’e doğru gidiyor dersek belki olabilir. Onun haricinde nasıl olabilir tam olarak açıklayamıyorum”

A: “Peki matematiksel olarak sıralama kavramını düşünürsek, bu nasıl olabilir?”

Ö1: “Tam olarak açıklayamıyorum ama farklı bir kural, farklı bir matematiksel düzen belirlenirse olabilir diye düşünüyorum.”

Ö3: “Bir şey söyleyemiyorum. Çünkü bizim her zaman bildiğimiz sıralama $5 > 3 > 1$ şeklinde. Bunun tam tersi bir sıralama düşünemiyorum.”

Yukarıdaki diyaloglara bakıldığında, Ö1 ve Ö2’nin kendilerinin keyfi olarak belirlediği bir kriter ile 1’in 2’den büyük olduğu bir sıralama yapmaya çalıştığı, ancak yine de bu hususa tam bir açıklama getiremedikleri görülmektedir. Ö3 adlı öğretmen adayının ise zihnindeki sıralama fikrinde, günlük hayatta alışlagelen anlamda reel sayılardaki adi sıralama etkin olduğu söylenebilir.

4.1.10. SKBT 10. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 10 SKBT 10. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S10	Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme	-	48
	Ki20: Mutlak değere (modül) göre sıralama	51	25
	Ki21: Bütün sayılar sıralanabilir	11	-
	Ki22: i sayısının değeri bilmediği için sıralanamaz	18	17
	Ki23: Reel-sanal kısım ikilemi	3	4
	Sıralanabilir (Gerekçesiz)	5	-
	Diğer	12	6

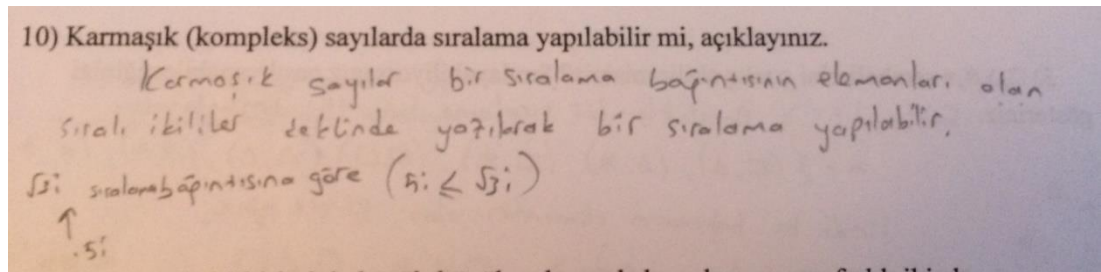
*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

Sıralama kavramı bilgi testinin 10.sorusu olan “Karmaşık (kompleks) sayılarda sıralama yapılabilir mi? Açıklayınız.” Sorusuna verilen yazılı cevaplar analiz edildiğinde yukarıda tablo 10’da gösterilen imge kategorilerine ulaşılmıştır. Bu kategorilerin izahı aşağıda verilmiştir. Bu soru ile karmaşık sayıların sıralanması hakkında öğretmen adaylarının zihinlerinde var olan kavram imgeleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Ki2: “Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme”

Daha önceden de açıklanan bu kategorinin bu sorudaki karşılığı, öğretmen adaylarının eğer uygun bir sıralama bağıntısı tanımlanırsa, karmaşık sayılarda sıralama yapılabileceğini düşünmelerine işaret eder. Öğretmen adayları sıralama bağıntısındaki tanımlarla karşılaşmadan önce (TÖ) bu imge ortaya çıkmaz iken, tanımlarla karşılaştıktan sonra ise (TS) bu imgenin frekansının tablo 10’da görüldüğü gibi **48** olduğu tespit edilmiştir. Fakat bu öğretmen adaylarının büyük bir kısmı, sıralama bağıntıları yardımıyla karmaşık sayılarda sıralama yapılabileceğini sözel olarak ifade etmişlerdir.. Yani geneli yazılı cevaplarında bir sıralama bağıntısı tanımlamamışlar yani bir sıralama bağıntısı örneği vererek cevap vermemişlerdir. Bu noktada öğretmen adaylarının çoğunluğunun karmaşık sayılarda sıralama yapmayı genel olarak reel sayılardaki adi sıralama üzerinden yorumladıkları ve sıralama bağıntıları ile ilişki kurmada güçlük yaşadıkları söylenebilir. Aşağıda örnek teşkil etmesi açısından bir öğretmen adayının yazılı cevabı sunulmuştur.

A.G (TS):



Ki20: “Mutlak değere (modül) göre sıralama”

Bu imge kategorisi, yazılı cevaplarında karmaşık sayıların mutlak değerlerine yani modüllerine göre sıralanabileceğini söyleyen öğretmen adaylarının dahil edildiği kategoridir. Tablo 10’da görüldüğü gibi, bu şekilde TÖ’de **51**, TS’de ise **25** öğretmen adayının varlığı tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının sıralama kavramına ilişkin düşüncelerinde reel sayılarda adi sıralamanın etkin olduğu düşünülebilir. Diğer yandan karmaşık sayılarda mutlak değerlere göre sıralama yapma hususunda, aynı modüle sahip karmaşık sayılar var olduğundan bir belirsizlik oluşacağı için bu imge hatalı olarak değerlendirilebilir.

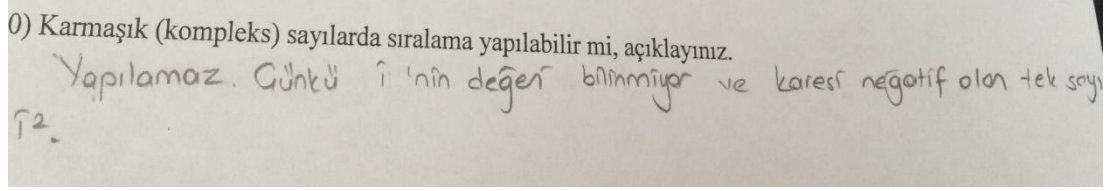
Ki21: “Bütün sayılar sıralanabilir”

Bu imge kategorisi, cevaplarında bütün sayıların sayısal bir değeri olduğu için bir şekilde sıralanabileceğini dolayısıyla karmaşık sayıların da sıralanabileceğini belirten öğretmen adaylarına işaret eder. TÖ’de bu imgenin frekansının **11** olduğu, TS’de ise bu imge kategorinin hiç ortaya çıkmadığı tablo 10’da görülebilir. Yine burada bazı öğretmen adaylarının sıralamaya ilişkin fikirlerinin, reel sayılarda adi sıralamaya kısıtlanmış olduğu söylenebilir.

Ki22: “i sayısının değeri bilmediği için sıralanamaz”

Bu imge kategorisi ise, cevaplarında i sayısının değeri tam olarak bilinmediği için karmaşık sayıların sıralanamayacağını düşünen öğretmen adaylarının dahil edildiği kategoridir. Bu imgenin frekansının tanımlarla karşılaşmadan önce **18** iken, tanımlarla karşılaştıktan sonra **17** olduğu tablo 10’da görülebilir. Aşağıda örnek teşkil etmesi açısından bu imgeye dahil edilen yazılı cevaplardan bir örnek sunulmuştur. Bu öğretmen adaylarının da sıralama kavramına ilişkin düşüncelerinin reel sayılarda adi sıralama fikrine kısıtlanmış olduğu söylenebilir.

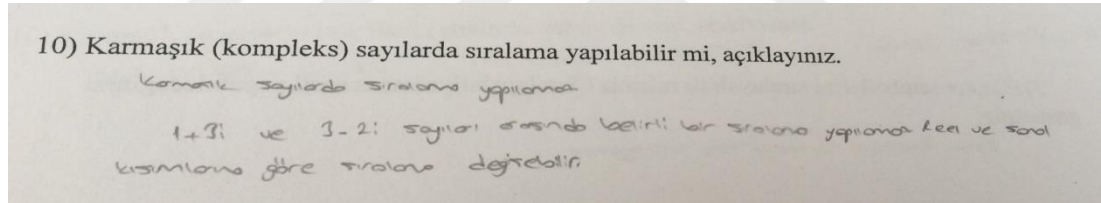
F.B (TÖ):



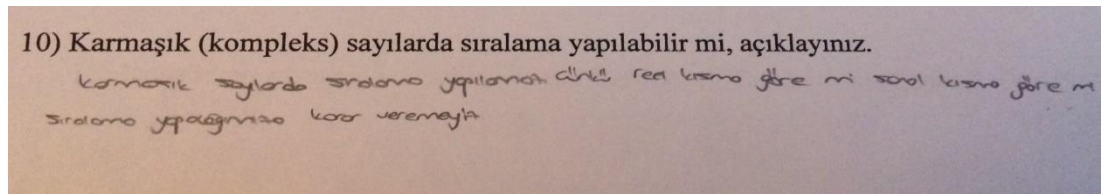
Ki23: “Reel-sanal kısım ikilemi”

Bu imge kategorisi, cevaplarında karmaşık sayıları sıralarken, reel kısma göre mi yoksa sanal kısma göre mi sıralama yapılacağı belirsizlik yaratacağı için karmaşık sayıların sıralanamayacağını belirten öğretmen adayların dahil edildiği kategoridir. Tablo 10 ‘a bakıldığında bu şekilde TÖ’de 3, TS’de ise 4 öğretmen adayı tespit edilmiştir. Aşağıda bu kategoriye dahil edilen yazılı cevaplardan örnek sunulmuştur.

S.A (TÖ):



S.A (TS):



“Sıralanabilir (Gerekçesiz)”

Bir kavram imgesi olarak değerlendirilmeyen bu kategori ise, cevaplarında karmaşık sayıların sıralanamayacağını söyleyen ve buna bir gerekçe göstermeyen öğretmen adaylarının dahil edildiği kategoridir. Bu şekilde TÖ’de 5 öğretmen adayının olduğu belirlenirken, TS’de bu kategori ortaya çıkmamıştır.

“Diğer kategorisi”

Tablo 10’da görüldüğü gibi, SKBT’nin 10.sorusunu yanıtsız bırakan öğretmen adayı sayısının TÖ’de 12, TS’de ise 6 olduğu tespit edilmiş ve diğer kategorisinde değerlendirilmiştir.

SKBT’nin 10.sorusuna ilişkin bazı öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda sunulmuştur.

A: “Karmaşık sayılarda sıralama yapabilir miyiz? Bu konuda ne düşünüyorsunuz?”

Ö1: “Doğal sayılar için tek bir kural belirlerken, karmaşık sayılar için 2 boyutlu bir kural belirlersek, sıralama yapabiliriz. Mesela açısına (argümant) ve uzunluğuna (mutlak değer) göre 2 farklı şekilde sıralama yapılabilir diye düşünüyorum”

Ö2: “Tam olarak bir şey söyleyemiyorum. Mesela $3+4i$ ve $5+6i$ ’yi kıyaslamam gibi duruyor. Bu iki sayının modüllerine göre bir kıyaslama belki olabilir. Çünkü burada reel kısım mı sanal kısım mı ikilemi var. Neye göre sıralama yapacağımın emin olamıyorum.”

Ö4: “Bence karmaşık sayılarda sıralama yapılamaz. Çünkü $3+4i$ ile $5-3i$ ’yi düşünelim. Reel kısma göre mi yoksa sanal kısma göre mi sıralayacağımız belli değildir.

A: “Peki bu noktada $3+0i$ ve $2+0i$ dersek bunlar sıralanabilir mi?

Ö4: “Evet bence sıralanabilir. Mesela $2 < 3$ yazabiliriz.”

A: Peki $3+0i$ ve $2+0i$ birer karmaşık sayı mıdır?

Ö4: “Bence karmaşık sayı değil gibiler, Çünkü i’li kısımları olmamış oluyor. Fakat sanal kısımları ‘0’ diye düşününce onlar da karmaşık sayı olabilir. Burada reel kısım yanında iki sayıda da sanal kısımlar aynı ise ya da tam tersi ise sıralama yapılabilir diye düşünüyorum. Mesela $3+2i$ ve $2+2i$ için $3>2$ dersek $2+2i<3+2i$ şeklinde söyleyebiliriz.”

Yukarıdaki görüşme diyaloglarından da görülebileceği gibi, Ö1 adlı öğretmen adayı, karmaşık sayılar için açısına ya da mutlak değerine göre iki şekilde sıralama yapılabileceğini düşünmektedir. Ö2 ve Ö4’de reel kısım-sanal kısım ikilemi içindedir. Yani sanal kısma mı reel kısma göre mi sıralama yapılacağı ikilem yaratacağı için sıralama yapılamaz görüşündedirler ya da bu konuda net bir fikirleri yoktur. Ö4 ise, sanal kısmı 0 olan $3+0i$ ve $2+0i$ gibi sayıların karmaşık sayı olup olmadığı konusunda emin olamamıştır. Daha sonra sanal kısımlar aynı olursa, reel kısımlarına göre sıralama yapılabileceğini düşünmüştür. Dolayısıyla, bu öğretmen adaylarının sıralama fikirlerinin sadece reel sayılardaki adi sıralama ile kısıtlanmış olduğu söylenebilir. Çünkü sıralama kavramı hakkında günlük hayattan doğan informal bilgilerimizde bilinen en temel sıralamanın ($1<2$, $3<5$) önemli bir yer teşkil ettiğini söyleyebilir.

4.1.11. SKBT 11. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 11 SKBT 11. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S11	Ki2: Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme	-	79
	Ki3: Sıralanacak elemanlar arasında ortak özellik bulunma zorunluluğu	51	6
	Ki9: Sadece sayısal verilerin sıralanabilir oluşu	27	5
	Her iki eleman kıyaslanabilir (Gerekçesiz)	10	3
	Diğer	12	7

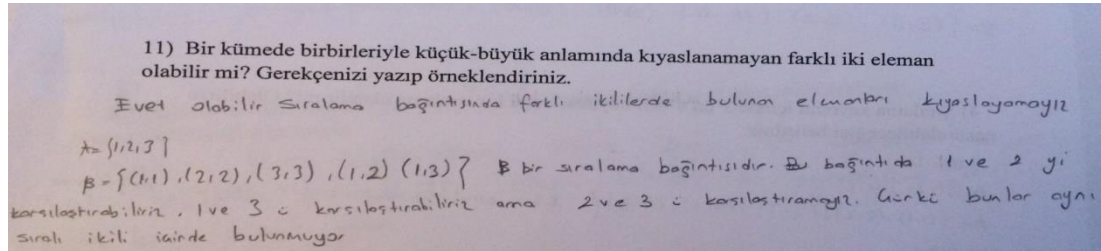
*TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra

Sıralama kavramı bilgi testinin 11.sorusu olan “Bir kümede birbirleriyle küçük-büyük anlamında kıyaslanamayan farklı iki eleman olabilir mi? Gerekçenizi yazıp örneklendiriniz.” sorusuna verilen yazılı cevaplar analiz edildiğinde tablo 11’de gösterilen imge kategorilerine ulaşılmıştır. Bu kategorilerin ayrıntılı izahı aşağıda verilmiştir. Bu soru ile amaçlanan öğretmen adaylarının sıralama bağıntıları temelinde bir kümede bütün elemanların her zaman sıralanıp, sıralanamayacağına ilişkin düşüncelerini ortaya çıkarmaya çalışmaktır.

Ki2: “Sıralama bağıntısının akla gelmesi-formal tanımla ilişkilendirme”

Daha önce de açıklanan bu kategoriye giren öğretmen adayları, SKBT’nin 11.sorusuna verdikleri cevaplarında, belirledikleri bir küme üzerinde uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak göstermişlerdir. Bu kategori, doğal olarak öğretmen adayları sıralama bağıntısındaki temel tanımlarla karşılaşmadan önce ortaya çıkmaz iken, tanımlarla karşılaştıktan sonra ise bu kategorinin frekansının **79** olduğu tespit edilmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından birinin yazılı cevabı verilmiştir.

Ç.B (TS):



Ki3: “Sıralanacak elemanlar arasında ortak özellik bulunma zorunluluğu”

Daha önce de izahı yapılan bu imge kategorisine dahil edilen öğretmen adayları, SKBT’nin 11.sorusunda aynı türden olamayan elemanların kıyaslanamayacağı düşüncesindedir. Yani bu öğretmen adayları birbirleriyle ortak bir özellik taşımayan elemanların birbirleriyle küçük-büyük anlamında kıyaslanamayacağını düşünmektedirler. Bu yüzden bu öğretmen adayları, bir kümede birbirleri ile kıyaslanamayan elemanların olabileceğini söylemektedirler. Tablo 11’de

görüldüğü gibi bu şekilde TÖ'de 51, TS'de 6 öğretmen adayının olduğu görülmektedir. Örnek teşkil etmesi açısından bu öğretmen adaylarından 2 tanesinin yazılı cevabı aşağıdaki gibidir:

S.D (TÖ): “Kıyaslamayan elemanlar olabilir. Örneğin $A=\{1,2,a,b\}$ kümesi için 1 ve a'yı kıyaslayamayız. Çünkü farklı elemanlardır. Bir ortaklıkları yoktur.”

A.Ö (TÖ): “Örneğin, $A=\{2, q, 5, \#, \Delta\}$ kümesinde $\#$ ve Δ elemanlarını ortak bir noktada karşılaştırmak mümkün değildir.”

Ki9: “Sadece sayısal verilerin sıralanabilir oluşu”

Daha önce de izahı yapılan bu imge kategorisinin bu sorudaki karşılığı, cevaplarında sayısal olmayan verilerin ya da öğelerin birbirleriyle kıyaslanamayacağı düşüncesinde olduğu için bir kümede birbiri ile kıyaslanamayan elemanların olabileceğini belirten öğretmen adaylarına işaret etmektedir. Tablo 11'de görüldüğü gibi bu şekilde TÖ'de 27, TS'de 5 öğretmen adayı tespit edilmiştir. Örnekle açıklayacak olursak bu kategoriye giren bir adayın yazılı cevabı aşağıdaki gibidir:

R.K (TÖ):

Evet olabilir.
mesela $A = \{*, \square, \bullet\}$ diye bir kümedeki
elemanlar birbiriyle küme büyük diye kıyaslanamaz.
Sayısal değerleri yok.

K.D (TS): “Olabilir, örneğin $A=\{a, b, c, 1, 2, 3, \square, \blacktriangle\}$ kümesinde 1,2 ve 3 kıyaslanabilirken, bir değeri olmayan a, b, c, $\square$ ve $\blacktriangle$ elemanları birbiri ile kıyaslanamazlar.”

Yukarıdaki cevaplardan da görülebildiği gibi ortak özelliği olmayan elemanların kıyaslanamayacağını ya da sayısal bir değer taşımayan elemanların kıyaslanamayacağını düşünen öğretmen adaylarının aslında sıralama bağıntılarını

geri plana atarak, uygun bir sıralama bağıntısı altında elemanların sıralanabileceklerini düşünmede güçlük yaşadıkları söylenebilir.

“Her iki eleman kıyaslanabilir (Gerekçesiz)”

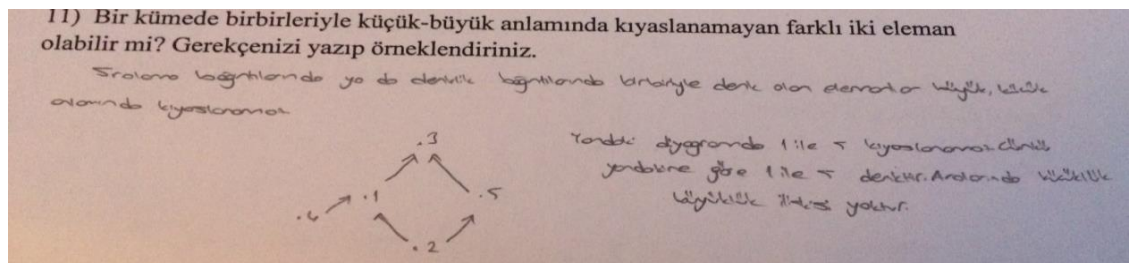
Bu kategoriye giren öğretmen adaylarının, cevaplarında bir kümede verilen elemanların her durumda birbirleri ile kıyaslanabileceğini düşündükleri ve buna bir gerekçe sunmadıkları tespit edilmiştir. Bu yüzden bu cevaplar bu kategoride değerlendirilmiştir. Bu şekilde, TÖ’de **10**, TS’de **3** öğretmen adayı tespit edilmiştir.

“Diğer kategorisi”

Tablo 11’de görülebileceği gibi, öğretmen adayları sıralama bağıntısındaki temel tanımlarla karşılaşmadan önce SKBT’nin 11. Sorusunu yanıtsız bırakan **12**, temel tanımlarla karşılaştıktan sonra ise bu soruyu yanıtsız bırakan **7** öğretmen adayı tespit edilmiştir. Bu yüzden boş cevaplar, diğer kategorisine atılmıştır.

Bu soruda üzerinde değinilmesi gereken başka bir nokta da soruya uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak cevap veren **79** öğretmen adayından birinin yazılı olarak vermiş olduğu cevapta sıralama bağıntılarında birbirleriyle denk olan elemanların da küçüklük büyüklük anlamında kıyaslanamayacağını belirtmesidir. Bu öğretmen adayının cevabı aşağıda verilmiştir.

M.T (TS):



Öğretmen adayının soruya vermiş olduğu yukarıdaki yazılı cevabı incelediğimizde, öğretmen adayının sıralama bağıntısının diyagramında birbirleri ile

görüntü olarak aynı hizada gibi görünen elemanların birbirlerine denk olduğu gibi bir yanılgıya sahip olduğunu söylemek mümkündür. Fakat 2 elemanın denk olabilmesi durumu eğer bir denklik bağıntısı tanımlanmışsa olabilir. Bu yüzden öğretmen adayının burada sıralama bağıntıları ile denklik bağıntılarını karıştırdığı söylenebilir. Çünkü iki elemanın denkliğini konusunun sıralama bağıntılarının değil, denklik bağıntıların çatısı altında olduğu söylenebilir.

Bu noktada, bir kümede birbirleri ile küçüklük-büüklük anlamında kıyaslanamayan elemanların olup olamayacağına ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda sunulmuştur.

A: “Bir kümede birbirleriyle sıralama yapılamayacak yani kıyaslanamayacak elemanlar olabilir mi?” Bu konuda ne düşünüyorsunuz?”

Ö3: “Evet kıyaslanamayan elemanların olabileceğini düşünüyorum. Eğer bir kümedeki 2 tane eleman birbirleri ile bağlantısızsa, ortak bir noktaları yoksa örneğin 1 ve a gibi kıyaslanamaz.”

Ö5: “Bir kural dahilinde her elemanın sıralanabileceğini düşünüyorum. Ama düşününce mesela a, b ve c gibi elemanları düşünürsek, bu 3 harf sayısal bir değer taşıdığı için büyük-küçük olarak sıralanamayabilir.

Ö2: “Örneğin Δ ve 4 elemanlarını düşünelim. Bu elemanlar kıyaslanamaz diye düşünüyorum. Çünkü çok farklı elemanlar.”

A: “Ancak daha önceki cevaplarınızda birbirleri ile ilişkisiz gibi görünen “3, c, Δ , &” gibi elemanların eğer bir kural verilirse kıyaslanıp, sıralanabileceğini söylemiştiniz. Burada bu cevabınız ile bir çelişki yok mu?”

Ö2: “Evet bu noktada bir çelişki yaşadım. Ama son olarak düşüncem bunlar bir şekilde kıyaslanabilir diyorum. Bence birbirleriyle kıyaslanamayacak elemanlar olamaz. Her eleman bir şekilde bir kural belirlenip kıyaslanabilir diye düşünüyorum”

Yukarıdaki diyaloglara bakıldığında, Ö2 ve Ö3 adlı öğretmen adayları, birbirleri ile ortak bir özelliğe sahip olmayan elemanların sıralanamayacağını yani kıyaslanamayacağını düşünmektedir. Ö5 ise, sayısal bir değer ifade etmeyen elemanların kıyaslanamayacağı düşüncesindedir. Ö2 adlı öğretmen adayı ise, daha önceden sıralama kavramı bilgi testinin 1.sorusuna ilişkin yapılan görüşmede 3, c, Δ , & gibi elemanların eğer bir kural verilirse sıralanabileceğini söylemiştir ama burada kıyaslanamayacağını söylediği için bir çelişki yaşamıştır.

4.1.12. SKBT 12. Sorusuna ait Bulgular

Tablo 12 SKBT 12. Sorusuna ait Kategoriler

Soru	Kavram İmgesi veya Kategori	*TÖ(f)	*TS(f)
S12	Formal tanımı verenler	8	84
	Formal tanımı veremeyenler	92	16

**TÖ: Tanımları görmeden önce, *TS: Tanımları gördükten sonra*

Sıralama bağıntılarını formal olarak, yani kitaplardaki şekliyle matematiksel olarak şu şekilde tanımlayabiliriz:

- Boştan farklı bir A kümesinde tanımlı β bağıntısı, yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin üçünü birden sağlıyorsa, β bağıntısına A 'da tanımlı bir sıralama bağıntısı denir (Narlı, 2013).

Buradan hareketle, SKBT'nin son sorusu olan "Sıralama bağıntısı nedir? Tanımlayınız." sorusuna verilen yazılı cevaplar analiz edildiğinde Tablo 12'de görüldüğü gibi TÖ'de sıralama bağıntısını formal olarak tanımlayabilen 8 öğretmen adayı mevcutken, formal tanımı veremeyen 92 öğretmen adayı mevcuttur. Bilindiği gibi ülkemizde ortaöğretim müfredatının konusu içinde bulunan bağıntılar konusundaki sıralama bağıntısı kavramı ile öğretmen adayları üniversiteye gelmeden önce de karşılaşabilmektedir. Dolayısıyla, bu sorunun sorulma amacı, soyut matematik dersinde öğretmen adaylarının temel tanımları görmeden önce (TÖ)

sıralama bağıntılarına ilişkin hem hazır bulunuşluk düzeylerini görmek, hem de sıralama bağıntısı konusu ile karşılaştıktan sonra, SKBT'deki 12 soruya formal tarzda yanıt vermeye çalışırken, kaç tanesinin sıralama bağıntısının tanımını eksiksiz olarak yazabildiklerini tespit etmeye çalışmaktır. TS'de ise formal tanımlı verebilen **84** kişi, formal tanımlı tam olarak veremeyen **16** kişi tespit edilmiştir. Bu **16** kişiden **2**'si soruyu yanıtsız bırakmıştır. Formal tanımlı tam olarak veremeyen kalan **14** kişinin verdikleri yazılı cevaplar aşağıda sunulmuştur. Bu cevaplar aslında öğretmen adaylarının sıralama bağıntısının tanımına ilişkin geliştirmiş oldukları kavram tanımlarıdır denilebilir. Bu tanımlar, öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarını daha çok informal tarzda tanımladıkları ve sıralama bağıntısının tanımını kendi zihinlerinde nasıl şekillendirdiklerini bize gösterebilir. (ÖA: öğretmen adayı)

ÖA1: “Bağıntının kurallarını gösteren bağıntılardır. Mesela $x^2 > y^3$ dersek ona göre sıralarız.”

ÖA2: “Sıralama bağıntıları sıralar. Her nerde sıralamadan bahsediliyorsa, orada sıralama bağıntısı vardır. Kümeden seçtiğimiz elemanların kıyaslanabilir olmalarına göre sıralanmalarını sağlar.”

ÖA3: “Sıralama bağıntıları sıralar.

ÖA4: “Yansıma, simetri ve geçişme özelliğine sahip olan bağıntılara sıralama bağıntısı denir.”

ÖA5: “Sıralama bağıntısı, sıralı ikililerin birbirleri ile bir kurala göre sıralama oluşturduğu bağıntılardır.”

ÖA6: “Sıralı ikili şeklinde belirtilerek (a, b)'de $b > a$ ya da $a < b$ şeklinde ifade edilen bağıntılardır.”

ÖA7: “Sıralama bağıntıları elemanları sıralamaya yarayan bağıntılardır.”

ÖA8: “Sıralama bağıntıları birbirleriyle herhangi bir kıyaslama yapamayacağımız elemanları sıralamamızı sağlar.”

ÖA9: “Sıralama bağıntıları (a, b) gibi ikililerden oluşan ve 1.bileşenin 2.’den büyük olduğu bağıntılardır.”

ÖA10: “Sıralama bağıntıları geçişme, yansıma ve simetri özellikleri olan bağıntılardır.”

ÖA11: “Sıralama bağıntıları elemanları sıralayan bağıntılardır.”

ÖA12: “Sıralama bağıntıları elemanları kıyaslamaya yarayan bağıntılardır.”

ÖA13: “Sıralama bağıntıları bir kümenin alt kümelerinden biri seçilerek bu alt kümede belli bir özelliğe göre sıralama yapmaya yarayan bağıntılardır.”

ÖA14: “Sıralama bağıntıları bağıntı içindeki elemanların kıyaslanıp, kıyaslanamaya-cağın gösteren, bize yardımcı olan bağıntı çeşitlerindendir.”

SKBT’nin 12. sorusuna ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler ise aşağıda sunulmuştur.

A: “Sıralama bağıntısı nedir? Sıralama bağıntısını matematiksel olarak nasıl tanımlarsınız?”

Ö1: “Yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlayan bağıntılara sıralama bağıntısı denir.”

Ö2: “Cevap veremiyorum.”

Ö3: “Ters simetri, yansıma ve geçişme özelliklerine sahip olan bağıntılara sıralama bağıntısı diyoruz. Bu şekilde tanımlayabilirim.”

A: “Peki, sıralama bağıntıları ile sıralama kavramının bir ilişkisi var mıdır?”

Ö1: “Tam olarak bilemiyorum.”

Ö3: “Vardır diye düşünüyorum. Sıralama bağıntılarında yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlaması için elemanları sıralamaya koyarız. Başka bir ilişkisi var mıdır bilemiyorum.”

Yukarıda da görülebileceği gibi Ö1 ve Ö3 adlı öğretmen adaylarının sıralama bağıntısının tanımını söyleyebilmelerine rağmen, sıralama bağıntılarının işlevi konusunda tam olarak bir fikirlerinin olmadığı görülmektedir.

Öğretmen adaylarının sıralamanın temel tanımları ile karşılaşmalarından önce (TÖ) ve karşılaşmalarından sonra (TS) sıralama kavramı bilgi testindeki sorulara vermiş oldukları cevaplardan ortaya çıkarılan bu kavram imgeleri ve dağılımları ile cevaplarında kullandıkları notasyonlar, birlikte değerlendirildiğinde, sıralama kavramına ilişkin informal bilginin formal bilgiye çevriminde karşılaşılan belli başlı zorluklar aşağıdaki başlıklar altında toplayabilir. Bu başlıklar, tartışma bölümünde irdelenecektir.

1. Öğretmen adaylarının sıralama kavramında grupta ifade kullanılarak özünde bu kavramı denklik bağıntısı ile karıştırmaları
2. Öğretmen adaylarının sadece sayısal verilerin ya da aynı türden olan öğelerin sıralanabileceğini düşünmeleri
3. Soyut matematiğin doğasında önemli bir yer teşkil eden matematiksel notasyonu kullanmada eksiklik (matematiksel dilin yeterince kullanılamaması)
4. Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık kavramlarının karıştırılarak birbirinin yerine kullanılması

5. Sıralama bağıntısındaki alt sınır ve üst sınır kavramlarının sınırlılık-sınırsızlıkla yeterince ilişkilendirilememesi
6. Reel sayılarda adi sıralamadan farklı olan sıralamaların olabileceği gerçeğinin öğretmen adaylarının sezgilerine ters düşen bir durum olmasından dolayı, bu hususu kavramakta yaşanan güçlükler
7. Öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarındaki alt sınır ve üst sınır gibi kavramları yeterince doğru yorumlayamamalarından ötürü boş kümenin sınırlı olup olmaması konusunda yaşadıkları güçlükler
8. Karmaşık sayılarda sıralama yapılıp yapılamayacağına dair öğretmen adaylarının zihinlerinde oluşan ikilemler, sıralama bağıntıları ile yeterince ilişkilendirememe
9. Bazı öğretmen adaylarının sıralama bağıntısı konusu ile karşılaşmalarından sonra sıralama bağıntısının formal olarak tanımını vermede yaşadıkları sıkıntılar
10. Elemanların kıyaslanıp-kıyaslanamaması durumunu yeterince kavrayamama ya da sıralama bağıntıları ile yeterince ilişkilendirememe
11. Belirlenen bir kümede sıralama bağıntısı tanımlamada yaşanan sıkıntılar (yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin aynı anda sağlanmaması)

4.2. SBKBT-1'e ait Bulgular

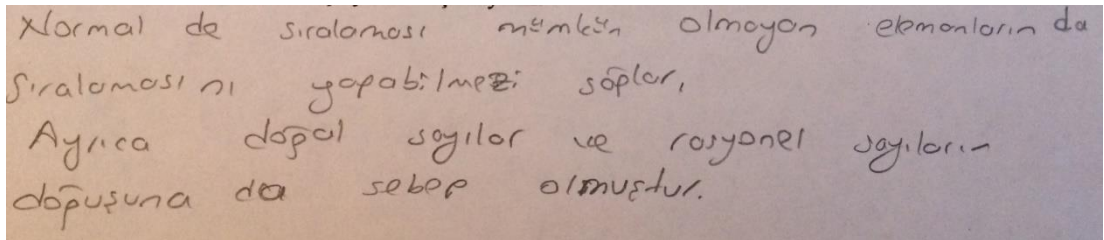
4.2.1. SBKBT-1'in 1. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in 1.sorusu olan "Sıralama bağıntısı ne işe yarar? Açıklayınız." sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı verilerin analizi yapıldığında, tablo 13'te görüldüğü gibi 4 kategori ortaya çıkarılmıştır. Bu kategorilerin izahı aşağıdaki gibidir.

"Bir kümedeki elemanların kıyaslanıp sıralanmasını sağlar"

Tablo 13'te görüldüğü üzere, cevapları bu kategoriye dahil edilen **80** öğretmen adayı mevcuttur. Bu öğretmen adayları, sıralama bağıntısının bir kümedeki elemanların birbirleriyle kıyaslanıp, sıralanmasını sağlayacağını düşünmektedirler. Bu öğretmen adaylarının genel anlamda sıralama bağıntısının işlevini doğru yorumladıkları söylenebilir. Öğretmen adaylarının birinin (1 kişi) cevabında bulunan bir ifadenin kavramsal olarak bir yanlışlığa sahip olabileceği düşünüldüğünden bu noktada bu ifadenin verilmesi uygun görülmüştür:

N.A:



Normal de sıralaması mümkün olmayan elemanların da sıralamasını yapabilmeyi söyler,
Ayrıca doğal sayılar ve rasyonel sayıların doğuşuna da sebep olmuştur.

Öğretmen adayının cevabından bulunan bu ifade, matematiksel olarak aslında denklik bağıntılarının bir işlevidir. Çünkü bazı özel denklik bağıntıları sayesinde doğal sayılar, rasyonel sayıların ya da modüler aritmetiğin inşa edilebileceği söylenebilir.

“Bir kümedeki ortak özelliğini olan elemanların ya da karmaşık verilerin gruplandırılmasını sağlar”

Tablo 13’te görüldüğü gibi, sıralama bağıntısının bir kümedeki ortak özelliği olan elemanların ya da karmaşık verilerin gruplandırılması sağladığı düşünülen 5 öğretmen adayı mevcuttur. Ancak elemanların ya da öğelerin gruplandırılması işleminin denklik bağıntısı konusuna ilişkin bir husus olduğu düşünülebilir (denklik sınıfları gibi). Bu noktadan hareketle bu öğretmen adaylarının sıralama bağıntısının işlevine ilişkin doğru bir algıda olmadıkları söylenebilir. Diğer yandan bu öğretmen adaylarının cevaplarının sıralama bağıntısının asıl işlevi olan kıyaslama-sıralama olgusuna ait bir yaklaşım içermediği söylenebilir.

“Bağıntıları kıyaslayıp değerlendirmeye ya da bağıntılar arasında sıralama oluşturmaya yarar.”

Tablo 13’te da görüldüğü üzere sıralama bağıntısının bağıntıların kıyaslanıp değerlendirmeye ya da bağıntılar arasında sıralama oluşturmaya yaradığını düşünen 5 öğretmen adayı mevcuttur. Buradan hareketle bu öğretmen adaylarının da matematiksel olarak doğru bir ifade içermeyen ya da bir anlam ifade etmeyen bir yorumda bulundukları düşünülebilir. Çünkü sıralama bağıntılarının bir kümedeki elemanların ya da öğelerin kıyaslanmasını ve sıralanmasını sağladığı bilinmektedir. Özetle, bu öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarının, bağıntıların kendilerinin sıralanmasını sağlar gibi bir imgeye sahip oldukları söylenebilir. Örnek olarak kategoriye giren bir öğretmen adayının cevabı aşağıda sunulmuştur.

A.K:

) Sıralama bağıntısı ne işe yarar? Açıklayınız.
Sıralama bağıntısı adı üzerinde bağıntıları belli özelliklerine göre sıralamamızı sağlar. Belli bir kümedeki elemanları istenen özelliğe göre sıralaya biliriz. Sıralama bağıntısı sıralar sıralanmadan hareketle bağıntıların sıralanmasını sağlar.

“Diğer”

Tablo 13’te da görüldüğü gibi “Sıralama bağıntısı nedir, ne işe yarar? Açıklayınız.” sorusunda cevapları diğer kategorisinde değerlendirilen öğretmen adayları %10’luk bir dilimi oluşturmaktadır (**10 kişi**). Daha önce de açıklandığı gibi diğer kategorisi, soruya cevap vermeyen ya da soru ile alakası olmayan veriler barındıran öğretmen adaylarını temsil etmektedir.

Tablo 13 SBKBT-1’in 1. Sorusuna ait Kategoriler

Yanıtlar	f	%
Bir kümedeki elemanların kıyaslanıp sıralanmasını sağlar	80	80
Bir kümedeki ortak özelliği olan elemanların ya da karmaşık verilerin gruplandırılmasını sağlar.	5	5
Bağıntıları kıyaslayıp değerlendirmeye ya da bağıntılar arasında sıralama oluşturmaya yarar.	5	5
Diğer	10	10

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1’in 1.sorusuna ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda sunulmuştur.

A: “Sıralama bağıntısı nedir, matematiksel olarak nasıl tanımlarsınız?”

Ö6: “Sıralama bağıntıları, birbirleriyle kıyaslanamayan farklı karakterlerin ya da öğelerin nasıl sıralanabileceğini bize gösteren bağıntılardır, başka bir ifadeyle yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip bağıntılardır.”

Ö7: “ α , $A \times A$ ’ nın bir alt kümesi olmak üzere eğer α yansıma-ters simetri ve geçişme özelliklerinin 3’ünü birden sağlıyorsa, buna sıralama bağıntısı diyoruz.”

A: “Peki sıralama bağıntıları ne işe yarar? Bu konuda ne söyleyebilirsiniz?”

Ö8: “Sıralama bağıntıları elemanları sıralamaya yarar, bir bağıntıda bulunan elemanlar arasında yorum yapabilmemizi sağlar.”

A: “Peki denklik bağıntıları ile kıyaslarsak işlevleri açısından bir fark var diyebilir miyiz? Ya da fark varsa nasıl bir fark olabilir? Bu konuda ne düşünüyorsunuz?”

Ö8: “Denklik bağıntıları sıralama yapmamızı sağlamaz diye düşünüyorum. Böyle bir fark olabilir. Sonuçta sıralama bağıntıları sıralama yapmamızı sağlıyor ama denklik bağıntılarının tam olarak tam işlevini bilmiyorum.”

Görüldüğü gibi Ö8 adlı öğretmen adayının, sıralama yapma işlevi bakımından sıralama bağıntılarını denklik bağıntılarından ayırabildiğini fakat denklik bağıntılarının işlevini tam olarak izah edemediği görülmüştür. Burada genel bir yorum yapmak gerekirse, öğretmen adaylarının sadece bağıntıların özelliklerini ezbere bildikleri, bağıntıların işlevlerini, esas olarak ne işe yaradıkları konusunda düşünmedikleri söylenebilir.

4.2.2. SBKBT-1’in 2. Sorusuna ait bulgular

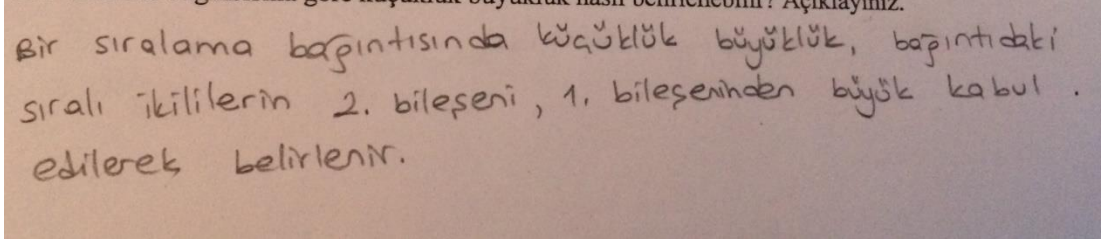
Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1’in 2.sorusu olan “Bir sıralama bağıntısına göre küçüklük büyüklük nasıl belirlenebilir? Açıklayınız.” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı verilerin analizi yapıldığında, tablo 14’de görüldüğü gibi 4 kategori ortaya çıkarılmıştır. Bu kategorilerin izahı aşağıdaki gibidir.

“Bağıntıdaki sıralı ikililerden ikincisi birincisinden büyüktür şeklinde belirlenir”

Tablo 14’de görüldüğü gibi bir sıralama bağıntısı, sıralı ikililer şeklinde yazıldığında bu ikililerden ikincisi, birincisinden büyük diyen 51 öğretmen adayı göze çarpmaktadır. Bu öğretmen adaylarının sıralama bağıntısındaki büyüklük-küçüklük ilişkisini doğru yorumladıkları söylenebilir. Ağırlıklı olarak öğretmen adayları büyüklük-küçüklük ilişkisini bu ifade ile açıklamaya girişmişlerdir. Örnek

teşkil etmesi açısından bu kategoriye giren öğretmen adaylarından birinin cevabı aşağıda sunulmuştur.

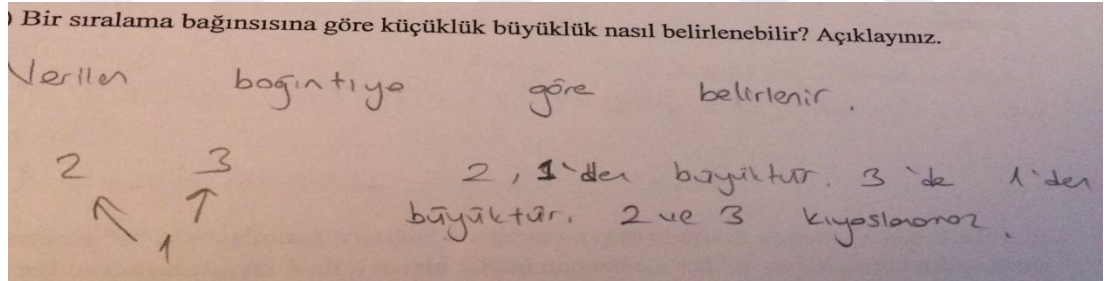
E.T:



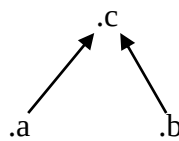
“Bir bağıntı diyagramında hangi eleman hangi elemana gidiyorsa, gittiği eleman daha büyüktür.”

Tablo 14’de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının %10’luk bir kesimi (10 kişi) sıralama bağıntılarındaki büyüklük-küçüklük ilişkisini bağıntı diyagramı üzerinden göstermeye ve yorumlamaya girişmişlerdir. Örnek teşkil etmesi açısından bu kategoriye dahil olan adaylardan birinin cevabı aşağıda verilmiştir.

S.A:



Bilindiği üzere, sıralama bağıntıları sadece sıralı ikili olarak değil, diyagramlar olarak da gösterilebilir ve diyagramlarda elemanlar arası oklar bulunur. Bu diyagramda, bir eleman bir elemana gidiyorsa, elemanın gittiği eleman daha büyüktür deriz. Bunu bir örnekle açıklama gerekirse, $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki gibi diyagram formda verilmiş bir sıralama bağıntısı tanımlandığında;



Bu bağıntıya göre, a elemanı c elemanına gittiği için $a \leq c$ aynı mantık ile $b \leq c$ yazılır. Bu açıdan genel anlamda cevapları bu kategoriye dahil olan öğretmen adaylarının büyüklük-küçüklük ilişkisini diyagramlar üzerinden doğru yorumladıkları söylenebilir.

Bu soruya ilişkin ilişkin tablo 14'deki diğer kategorilerden de görüldüğü gibi 13 öğretmen adayının büyüklük-küçüklük ilişkisini **“Bağıntıdaki sıralı ikililerden önce gelen (birincisi) daha büyüktür”** ve 7 öğretmen adayının cevaplarında ise **“bir bağıntı diyagramında hangi eleman hangi elemana gidiyorsa, giden eleman daha büyüktür”** şeklinde yorumladıkları tespit edilmiştir. Bu kategorileri daha iyi açıklamak adına aşağıda öğretmen adaylarından ikisinin yazılı cevapları sunulmuştur.

Ö.Ö:

Örneğin; bir $A = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$ kümesinde $1 > 2$ 'dir
Çünkü, sıralama bağıntılarında sıralı ikililer şeklinde yazılan
elemanlarda önce gelen büyük olur.

R.M:

) Bir sıralama bağıntısına göre küçüklük büyüklük nasıl belirlenebilir? Açıklayınız.
Sıralamada önce gelen, sonra gelenlerden büyüktür.
 $(x, y) \quad x > y$

F.Ç:

(x, y) bağıntının elemanı $\rightarrow$ y 'ten büyük

Bu noktada “Bağıntıdaki sıralı ikililerden önce gelen (birincisi) daha büyüktür” ve “bir bağıntı diyagramında hangi eleman hangi elemana gidiyorsa, giden eleman daha büyüktür” kategorilerine giren öğretmen adaylarının sıralama

bağıntılarında elemanların büyüklük-küçüklük ilişkilerini belirlemede hataya düştükleri söylenebilir.

Tablo 14 SBKBT-1'in 2. Sorusuna ait Kategoriler

Yanıtlar	f	%
Bağıntıdaki sıralı ikililerden ikincisi birincisinden büyüktür şeklinde belirlenir. $(x, y) \in \leq \Rightarrow x \leq y$	51	51
Bir bağıntı diyagramında hangi elemana hangi eleman gidiyorsa, gittiği eleman daha büyüktür.	10	10
Bağıntıdaki sıralı ikililerden önce gelen (birincisi) daha büyüktür.	13	13
Bir bağıntı diyagramında hangi eleman hangi elemana gidiyorsa giden eleman daha büyüktür.	7	7
Diğer (cevapsız ya da alakasız)	19	19

Bu noktada sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2'nin 2.sorusuna ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda verilmiştir.

A: “Bir sıralama bağıntısına göre, büyüklük- küçüklük ilişkisi nasıl belirlenebilir? Bu konuda ne düşünüyorsunuz?”

Ö6: “Mesela bağıntıda 1 elemanı 5 'e gidiyorsa ya da (1, 5) elemanı varsa 5, 1'den büyüktür gibi bir yorum yapabiliriz bu şekilde belirleriz.

A: “Peki bu soruya verdiğin yazılı cevabında, $\{(1, 1), (2,2), (1, 3), (3,1), (1, 5), (6,2)\}$ şeklinde bir bağıntı tanımlayarak büyüklük-küçüklük ilişkisini açıklamaya çalışmışsın. Bu konuda ne söyleyebilirsin?”

Ö6: “Evet burada böyle bir bağıntı yazdım ve (1,5) elemanına göre 1, 5'den küçük olur dedim.”

A: “Bu cevabında bir sıkıntı olduğunu düşünüyor musun?”

Ö6: “hayır, düşünmüyorum”

A: “Bir sıralama bağıntısına göre, büyüklük- küçüklük ilişkisi nasıl belirlenebilir? Bu konuda neler söyleyebilirsiniz?”

Ö7: “Sıralı ikililere bakarım. (a, b) ikilisi sıralama bağıntısının elemanı ise b, a’dan büyüktür şeklinde belirlerim.”

Ö8: “Örneğin bağıntıda (x, y) gibi bir ikili olsa, $x < y$ deriz ya da $y > x$ deriz veya (5, 2) gibi bir eleman varsa $2 > 5$ diyebiliriz.”

Yukarıdaki görüşme diyaloglarından görüldüğü üzere, bazı öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarında tanımladıkları bağıntıda büyüklük-küçüklük ilişkisini söyleyebildikleri fakat Ö6 isimli öğretmen adayında olduğu gibi, sıralama bağıntılarını sıralı ikililer şeklinde tanımlarken güçlük yaşadıkları söylenebilir. Çünkü tanımladıkları bağıntının sıralama bağıntısının özelliklerini sağlamadığı, öğretmen adaylarının bunu geri plana attıkları görülmektedir.

4.2.3. SBKBT-1’in 3. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1’in 3.sorusu olan “Sıralama bağıntılarında her iki eleman kıyaslanabilir mi? Açıklayınız.” sorusuna ilişkin, tablo 15’e bakıldığında sıralama bağıntılarında elemanların kıyaslanıp-kıyaslanamaması hakkındaki bu soruda öğretme adaylarının verdikleri yazılı cevaplardan ortaya çıkarılmış kategoriler görülmektedir. Buna göre;

- **14** öğretmen adayı, her şekilde bir sıralama bağıntısında bütün elemanlar kıyaslanır algısına sahiptir. Ancak sadece sistemine zincir dediğimiz tam sıralama bağıntılarında tüm elemanlar ikişer ikişer kıyaslanabilir. Yani burada öğretmen adaylarının %14 ‘nün yanlış bir algıya sahip oldukları düşünülebilir.

•66 öğretmen adayı ise bağıntı içerisindeki bütün elemanların kıyaslanamayabileceğini düşünmektedirler. Ancak bu öğretmen adaylarından;

- ✓ 41 kişi, gerekçe olarak bağıntıda sadece sıralı ikili halinde bulunan elemanların kıyaslanabildiğini sunmuştur. Bu öğretmen adaylarının doğru bir yaklaşım içinde oldukları düşünülebilir.
- ✓ 16 kişi ise sıralama bağıntısı diyagramları üzerinden soruyu yorumlamış, gerekçe olarak diyagramda birbirleriyle bağlantılı olan elemanların kıyaslanabildiğini sunmuştur. Bu öğretmen adaylarının da doğru bir yaklaşım içinde oldukları söylenebilir.
- ✓ 9 öğretmen adayı ise birbirleriyle ortak özelliği olmayan (farklı türden) elemanlar kıyaslanamaz şeklinde bir gerekçe sunmuştur. Örnek verecek olursak, bir harf ve bir sayı gibi. Fakat sıralama bağıntılarının doğası düşünüldüğünde, birbiriyle alakasız gibi görünen, farklı türden elemanların uygun bağıntılar altında kıyaslanabilir. Bu öğretmen adaylarının sundukları gerekçe, bu açıdan sıralama bağıntıları ile bir ilişkilendirme içermemektedir ve doğru olmayan bir algı olarak değerlendirilebilir.

Öğretmen adaylarının vermiş oldukları bu cevaplara ilaveten, kendi seçtikleri bir küme üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlayarak da cevap vermeye girişmiş 23 öğretmen adayı tespit edilmiştir. Ancak bu öğretmen adaylarından 7 tanesinin yazmış oldukları bağıntıların aslında sıralama bağıntısının özelliklerini taşımadığı yani sıralama bağıntısı olmadıkları tespit edilmiştir. Örneğin bahsedilen bu öğretmen adaylarının cevaplarından biri aşağıdaki gibidir:

Ö.A: “A= {1, 2, 3, 4} ve $\leq = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,3) \}$ şeklinde bir bağıntıda 1 ve 4 elemanları kıyaslanamaz.”

Görüldüğü üzere, aslında bu öğretmen adayının tanımladığı bağıntı bir sıralama bağıntısı değil, bir denklik bağıntısıdır. Bu noktada bazı öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarının temel özelliklerini geri plana atarak, sıralama bağıntısı tanımlamada zorluklar yaşadıkları söylenebilir.

Tablo 15'e bakıldığında bu soruya ilişkin cevapları diğer kategorisinde değerlendirilen **20** öğretmen adayı mevcuttur.

Tablo 15 SBKBT-1'in 3. Sorusuna ait kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Her şekilde bağıntıdaki bütün elemanlar kıyaslanır.		14		14	
Bağıntıdaki bütün elemanlar kıyaslanamayabilir	Bağıntıda sadece sıralı ikili olarak bulunan elemanlar kıyaslanabilir.	41	66	41	66
	Diyagramda birbiriyle bağlantılı olan elemanlar kıyaslanır, olmayan kıyaslanamayabilir.	16		16	
	Birbiriyle ortak özelliği olmayan elemanlar kıyaslanamaz.	9		9	
Diğer		20		20	

Bu noktada sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in 3.sorusuna ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda verilmiştir.

A: "Sıralama bağıntılarında her eleman birbiriyle kıyaslanabilir mi? Bu konuda ne söyleyebilirsiniz?

Ö6: "Hayır kıyaslanamaz diye düşünüyorum. Mesela sadece (1,1) (2,2), (3,3) gibi elemanlar varsa bu elemanlar birbirlerine gitmedikleri için kıyaslanamazlar diye düşünüyorum."

Ö10: “Hayır, bütün elemanlar kıyaslanamaz. Mesela (1, 5) , (7, 6) gibi elemanlar olduğunu düşünürsek, eğer (1, 7) elemanı bağıntıda yoksa bunları kıyaslayamayız.”

A: “Peki her elemanın birbiri ile kıyaslanabileceği bir sıralama bağıntısı olabilir mi?”

Ö10: “Olabilir gibi. Yani her eleman birbiri ile bir şekilde ilişkisi varsa olabilir diye düşünüyorum.”

4.2.4. SBKBT-1’in 4. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1’in 4.sorusu olan “Sıralama bağıntılarında bir eleman kendinden küçük olabilir mi? Açıklayınız.” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı verilerin analizi sonucu tablo 16’da gösterilen kategorilere ulaşılmıştır. Buna göre;

- Toplamda **70** öğretmen adayı, sıralama bağıntılarında bir elemanın kendinden küçük olabileceğini belirtmiştir. Bu öğretmen adaylarından **64** tanesi, gerekçe olarak yansıma özelliğinden dolayı bir eleman kendinden küçük olmasını göstermiştir. Sıralama bağıntılarında yansıma özelliğinden dolayı sıralı ikililer şeklinde düşünüldüğünde bir eleman kendinden hem büyüktür hem küçüktür diyebiliriz. Bu açıdan değerlendirildiğinde bu öğretmen adaylarının sundukları gerekçe doğrudur diyebiliriz. **6** öğretmen adayı ise gerekçe olarak bu durumun birim bağıntıda geçerli olduğu cevaplarında belirtmişlerdir. Ancak bütün sıralama bağıntılarında yansıma özelliği olması gerektiği için, bu durumun bütün sıralama bağıntılarında var olduğu bir gerçektir. Bu yüzden bu 6 öğretmen adayının uygun olmayan bir imgeye sahip oldukları söylenebilir. Örnek olarak aşağıda bir öğretmen adayının yazılı cevabı sunulmuştur.

D.Ç:

Hem olabilir hem de olamaz. Bu birim bağıntıda geçerlidir.
Ör: $B = \{ (1,1) \}$ bu bağıntıda 1 rakamı hem kendisinden büyüktür
aynı zamanda kendisinden küçüktür.

•Tablo 16'ya göre, bir sıralama bağıntısında bir elemanın kendinden küçük olamayacağını düşünen **16** öğretmen adayı mevcuttur. Bu öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarının yansıma özelliği ile ilişkili olan bir elemanın kendinden küçük olabilme ya da aynı zamanda büyük olabilme durumunun farkında olmadıkları söyleyebilir. Olamaz diyen öğretmen adaylarından aynı zamanda bir gerekçe belirten öğretmen adaylarının cevapları aşağıda sunulmuştur.

T.A: “Sıralama bağıntılarında bir eleman kendinden küçük olamaz ama eşit olabilir.”

H.T: “Bir eleman kendinden küçük olamaz çünkü kendisiyle kıyaslanamayıp büyüklük-küçüklük sıralaması yapılamaz.”

P.A: “Bir sıralama bağıntısında bir eleman kendinden küçük olamaz. Kendisine gider. Tekrar kendisine geri döner.”

N.Ş: “Olamaz, her eleman kendine denktir.”

N.A: “Olamaz. Çünkü elemanın kendisiyle herhangi bir kıyaslama yapamıyoruz.”

A.K: “Kendinden küçük olamaz. Kendisine eşit olabilir anca. Bir eleman kendisinden küçük olursa, zaten kendisi olmaz.”

Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde, sıralama bağıntılarında, bir elemanın kendisine denk olarak yorumlanmasının yanlış bir algı olduğu söylenebilir. Çünkü bu

durum, denklik bağıntılarına ait bir husus olarak değerlendirilebilir. Diğer yandan bu cevaplardan da görülebileceği gibi bazı öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarında bir elemanın kendisiyle kıyaslanamaması şeklinde bir yanlış imgeye sahip olduklarını söyleyebiliriz. Çünkü sıralama bağıntılarında hem sıralı ikililer şeklinde hem de diyagram şeklindeki bir gösterimlerde yansımadan dolayı her elemanın kendisiyle kıyaslanabildiği açıktır. Bu soru için toplamda 14 öğretmen adayının cevapları ise diğer kategorisinde değerlendirilmiştir.

Tablo 16 SBKBT-1'in 4. Sorusuna ait kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Olabilir	Yansıma özelliğinden dolayı bir eleman kendinden küçüktür.	64	70	64	70
	Birim bağıntıda geçerlidir.	6		6	
Olamaz		16		16	
Diğer		14		14	

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in bu sorusuna ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşme örnekleri aşağıda sunulmuştur.

A: "Sıralama bağıntılarında bir eleman kendinden hem büyük hem de küçük olabilir mi?"

Ö7: "Olamaz diye düşünüyorum. Çünkü bir eleman kendinden hem küçük hem büyük olamaz. Bu mantıklı gelmiyor."

Ö9: "Evet olabilir. Mesela bağıntıdaki sıralı ikilide (1, 1) elemanı varsa, 1 kendinden hem büyük hem de küçüktür. Böyle düşünüyorum."

A: "Peki biz bu yorumu bağıntının hangi özelliğine göre yapabiliyoruz?"

Ö9: "Yansıma özelliğinden dolayı."

Yukarıda görüldüğü gibi, Ö7 adlı öğretmen adayının, sıralama bağıntılarında bir elemanın kendinden hem büyük hem de küçük olabilmesini izah etmede güçlük yaşadığı görülmektedir. Sıralama bağıntılarının yansıma özelliğinin işlevinin tam olarak sorgulanmaması, bu konudaki güçlüğü sebebi olabilmektedir.

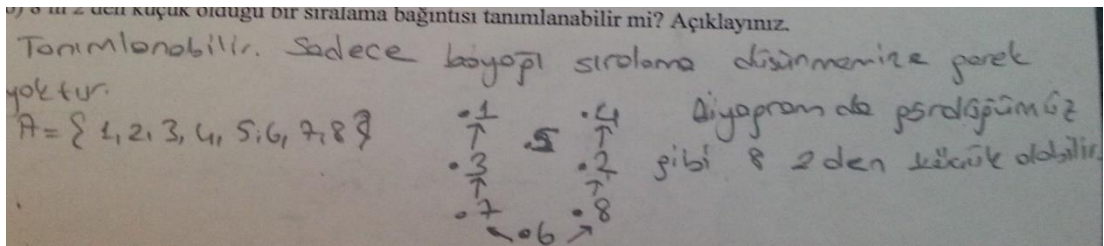
4.2.5. SBKBT-1'in 5. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in 5.sorusu olan "8 in 2 den küçük olduğu bir sıralama bağıntısı tanımlanabilir mi? Açıklayınız." sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı verilerin analizi sonucu tablo 17'de gösterilen kategorilere ulaşılmıştır. Buna göre;

•**46** öğretmen adayı, diyagram formda ya da sıralı ikililer şeklinde uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak, 8'in 2'den küçük olabileceği bir sıralama bağıntısı tanımlayabilmişlerdir. Örnek teşkil etmesi açısından bu öğretmen adaylarından ikisinin cevabı aşağıda sunulmuştur.

L.A: "Tanımlanabilir. Örneğin; $A=\{8, 2, 1\}$ kümesinde $\beta = \{(8,8), (1,1), (2,2), (8,2)\}$ dersek, bu bağıntıya göre $8 < 2$ diyebiliriz."

G.B:



•Tablo 17'de görüldüğü gibi toplamda **28** öğretmen adayı, verilen koşula uyan bir sıralama bağıntısı tanımlayamamıştır. Bu 28 öğretmen adayından, **16** tanesinin tanımladıkları bağıntıların aslında bir sıralama bağıntısı olmadığı tespit edilmiştir. Yani bu öğretmen adayları, tanımladıkları bağıntının yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin tümünü sağlaması

gerektiğinin farkında değildirler. Burada dikkat çeken başka bir bulgu da bu 16 öğretmen adayının tümünün tanımladıkları bağıntıları sıralı ikililer formunda yazmalarıdır. Yani bu öğretmen adaylarının sıralı ikililer şeklinde bir bağıntı yazarken yansıma, geçişme ve ters simetri özelliklerinden en az birini sağlamadıkları tespit edilmiştir. Tablo 17’de görüldüğü gibi 12 öğretmen adayının ise tanımladıkları sıralama bağıntısı, soruda verilen koşulu sağlamamaktadır. Bu öğretmen adayları 8’in 2’den büyük olduğu bir sıralama bağıntısı tanımlamışlardır. Burada dikkat çeken husus, öğretmen adaylarının sıralama bağıntısındaki sıralı ikililerdeki elemanlardan birincisinin ikincisinden büyük olduğu algısı taşımalarıdır. Daha iyi anlaşılması açısından bu öğretmen adaylarının birinin cevabı aşağıdaki gibidir.

M.D: “Tanımlanabilir. Mesela $A=\{2,8\}$ kümesi üzerinde $\beta=\{(2,2), (8,8), (2,8)\}$ bağıntısında $2>8$ ’dir.”

Görüldüğü gibi bu öğretmen adayları, bağıntıdaki sıralı ikililerdeki hangi elamanın büyük olduğuna dair yanlış bir algıya sahiptir.

- Tablo 17’de görüldüğü gibi 7 öğretmen adayı 8’in 2’den küçük olduğu bir sıralama bağıntısı tanımlanamayacağını söylemişlerdir. Reel sayılarda adi sıralamaya uymayan sıralamaların, öğretmen adaylarının algılarına ters düşen bir durum olması, bazı öğretmen adaylarının böyle bir yorum getirmelerine neden olmuş olabilir.

- Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1’in 5.sorusuna cevap vermeyen öğretmen adayı sayısı ise tablo 17’de görülebileceği üzere 19 olarak tespit edilmiştir.

Tablo 17 SBKBT-1'in 5. Sorusuna ait bulgular

Yanıtlar		f	%
Uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayıp gösterenler		46	46
Uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayamayanlar	Tanımlanan bağıntının sıralama bağıntısı olmaması	16	16
	8'in 2'den büyük olduğu bir sıralama bağıntısı tanımlayanlar	12	12
Böyle bir sıralama bağıntısı tanımlanamaz		7	7
Diğer		19	19

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in bu sorusuna ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşme örnekleri aşağıda sunulmuştur.

A: “8'in 2'den küçük olduğu bir sıralama bağıntısı tanımlanabilir mi? Bu konuda ne söyleyebilirsiniz?”

Ö10: “Tanımlanabilir. Örnek verecek olursam, bağıntıda (1,1), (2,2), ... (8,8), bir de (8,2) yazarım böylelikle $8 < 2$ olmuş olur. Daha başka şekillerde de örnekler verebiliriz.”

Ö8: “Mesela $\alpha = \{(8, 2)\}$ dersem 8, 2'den küçük olur.

A: “Peki bu yazdığınız bir sıralama bağıntısı olur mu?”

Ö8: “Hayır olmadı. Yansıma özelliği olmadı. O zaman (8, 8) ve (2,2)'yi de eklemem lazım.”

A: “Peki hangi küme üzerinde bu bağıntıyı tanımladınız?”

Ö8: “Reel sayılar kümesinde.”

Yukarıda Ö8 adlı öğretmen adayı ile yapılan görüşme diyalogunda görülebileceği gibi, başlangıçta verdiği cevapta tanımladığı bağıntının sıralama bağıntısının özelliklerini taşımadığı görülmektedir ve sonradan görüşme esnasında bunun farkına varmış, yanıtını düzeltmiştir. Ancak bu bağıntıyı hangi kümede tanımladığı açıklarken, $\{1, 2, 8\}$ kümesi cevabını verememiş, bu konuda güçlük yaşamıştır.

4.2.6. SBKBT-1'in 6. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in 6.sorusu olan “□, #, ♦, ☼ sembollerini bir sıralama bağıntısı yardımıyla sıralayabilir misiniz? Nasıl yapılabileceğini gösteriniz.” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı verilerin analizi sonucu tablo 18’de gösterilen kategorilere ulaşılmıştır. Buna göre;

- Toplamda **48** öğretmen adayı sıralı ikililer şeklinde ya da diyagram formunda, uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak soruda verilen sembollerini sıralayabilmişlerdir.

- 19** öğretmen adayının ise tanımladıkları bağıntıların aslında bir sıralama bağıntısı olmadıkları tespit edilmiştir. Yani bir önceki soruda olduğu gibi bu öğretmen adayları, tanımladıkları bağıntının yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin tümünü sağlaması gerektiğinin farkında değildirler. Örneğin bu öğretmen adaylarından birinin soruya vermiş olduğu cevap aşağıdaki gibidir.

Ö-X :“ $\{ (\square, \square), (\#, \#), (\diamond, \diamond), (\odot, \odot), (\square, \#), (\#, \diamond), (\diamond, \odot), (\odot, \diamond) \}$ şeklindeki bir bağıntıda $\square < \#$ veya $\diamond < \odot$ olabilir.”

Görüldüğü gibi öğretmen adayının tanımladığı bu bağıntı geçişme, ters simetri gibi özellikleri sağlamamaktadır. Yani aslında bir sıralama bağıntısı değildir.

•Tablo 18’de görüldüğü üzere **16** öğretmen adayı, bu sembollerin birbirleri ile ortak bir yönünün olmadığı birbirleri ile ilişkisiz öğeler oldukları için sıralama yapılamayacağı imgesi taşımaktadırlar. Ancak birbirleriyle ilişkisiz gibi görünen elemanlar da eğer uygun bir sıralama bağıntısı tanımlanırsa sıralanabilirler (Narlı, 2013). Bu hususta bazı öğretmen adaylarının sıralama kavramı hakkındaki informal bilgileri ile hareket ettikleri, sıralama bağıntıları ile ilişkilendirme kuramadıkları söylenebilir.

•Tablo 18’de görülebileceği gibi, bu soru için soruya cevap vermeyen ya da soruyla alakasız veriler sunan öğretmen adaylarının sayısı **17** olarak tespit edilmiştir.

Burada söylenmesi önem arz eden başka bir nokta da öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarını diyagram olarak tanımlarken bir sorun yaşamamaları, fakat sıralı ikililer şeklinde yazmaları durumunda sıralama bağıntısının tüm özelliklerini karşılamamasından ötürü sıkıntı yaşamalarıdır. Bu durum, sıralama bağıntıları için diyagram gösteriminin sıralı ikililer şeklinde yazmaya kıyasla öğretmen adayları tarafından daha kolay bulunduğu sonucuna bizi götürebilir.

Tablo 18 SBKBT-1’in 6. Sorusuna ait kategoriler

Yanıtlar	f	%
Uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayıp gösterenler	48	48
Uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayamayanlar (Tanımlanan bağıntının sıralama bağıntısının özelliklerini taşıyamaması)	19	19
Sıralanamaz, çünkü elemanların ortak bir özelliği yok.	16	16
Diğer	17	17

Bu soruya ilişkin öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda sunulmuştur.

A: “□, #, Δ, ☼ sembollerini bir sıralama bağıntısı yardımıyla sıralayabilir miyiz? Nasıl yapabilirsiniz, bu konuda ne diyebilirsiniz?”

Ö9: “Sıralama bağıntısına göre nasıl sıralanabilir tam olarak bilmiyorum. Ama mesela bu sembollerin okunuşlarındaki harf sayısını ölçüt olarak alırsam yapabilirim diye düşünüyorum. Mesela $\square=4$ harf, $\# =7$ harf, $\Delta=5$ harf, $\odot=5$ harf dersem $\# > \Delta = \odot > \square$ şeklinde yapabilirim. Bir sıralama bağıntısı ile sıralanamaz gibi duruyor.”

Ö10: “Evet sıralayabiliriz. Mesela yapılarındaki doğru parçası sayısına göre yapabilirim.

A: “Fakat siz kendiniz belirlediğiniz bir ölçüte göre sıralama yaptınız. Bizim istediğimiz, bir sıralama bağıntısı tanımlayarak sıralama yapmanız. Bu şekilde nasıl yapabilirsiniz?”

Ö10: “Mesela $\{(\square, \square), (\square, \odot)\}$ dersem $\odot > \square$ olur.”

A: “Hayır olmadı. Yansıma olmadı. $(\#, \#)$, (Δ, Δ) , $(\odot, \odot)$ elemanları da yazılmalı. Bunun yanında ters simetri ve geçişmeyi sağlayacak şekilde elemanlar yazabiliriz. Böyle olabilir diye düşünüyorum.”

Yukarıdaki görüşme diyaloglarından görülebileceği gibi Ö9 ve Ö10 adlı öğretmen adaylarının verilen sembolleri, kendi belirledikleri keyfi bir kriter ile sıralamaya çalıştıkları, ilk başta bir sıralama bağıntısı tanımlayarak sıralama yapmada güçlük yaşadıkları görülmektedir. Ayrıca yine sıralama bağıntıları tanımlarken özelliklerini geri plana attıkları görülmektedir.

4.2.7. SBKBT-1’in 7. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntılarının sahip oldukları özellikler, aslında sıralama kavramının özüne uygun olan özelliklerdir. Örneğin, sıralama bağıntılarında x elemanı y elemanından küçük iken, y elemanı da x elemanından küçük olamaz, eğer öyleyse x ve y ancak birbirine eşit olabilir. Bu durum ters simetri özelliğine karşılık gelir. Öte yandan x elemanı y ’den küçük ve y elemanı z ’den küçük ise, x elemanı da z ’den

küçük olur ki bu durum geçişme özelliğine uyar. Yansıma özelliğinde ise bir elemanın kendinden hem büyük hem de küçük olmasına yani eşit olmasına karşılık gelir (Narlı, 2013).

Sıralama bağıntılarının niçin yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip olduklarına yukarıdaki gibi matematiksel yorum getirebilir. Aslında bu soru ile öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarının ve sıralamanın doğası hakkında düşündüklerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Buradan hareketle, tablo 19'da da gösterildiği gibi sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in 7.sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı verilerin analizi sonucunda, sıralama kavramı ile ilişkilendirerek bu özelliklerin arkasında yatan sebepleri tam olarak ifade edebilen **41** öğretmen adayı tespit edilmiştir. Örnek teşkil etmesi açısından bu öğretmen adaylarından birinin cevabı aşağıda sunulmuştur.

A.Y:

Bir eleman kendisinden hem büyük hem de küçük olabilir; bu yüzden yansıma vardır. Bir eleman büyük olduğu başka bir elemandan küçük olmaz; bu yüzden ters simetri vardır. Bir elemanın büyük olduğu eleman da başka bir elemandan büyüğe ilk eleman da son elemandan büyük olur; bu yüzden geçişme de vardır. Tüm bunlar ele alındığında ortaya bir sıralama bağıntısı çıkar.

Bu nedenleri cevabında tam olarak ifade edemeyen ya da soruyu yanıtızsız bırakan **59** öğretmen adayı tespit edilmiştir. Bu 59 öğretmen adayından soruyu boş bırakanlar haricinde yazılı cevaplar analiz edildiğinde, öğretmen adaylarının yansıma ya da ters simetri özelliklerinden en az birinin altında yatan nedenleri ifade edemedikleri tespit edilmiştir. Geçişme özelliği ise genel olarak öğretmen adayları tarafından ifade edilebilmiştir.

Tablo 19 SBKBT-1'in 7. Sorusuna ait kategoriler

Yanıtlar	f	%
İfade edenler	41	41
İfade edemeyenler	59	59

Bu noktada sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in bu sorusuna ilişkin bazı öğretmen adayları ile görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerden bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.

A: “Peki sıralama bağıntıları neden yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahiptir ya da neden bu özellikleri sağlayan bağıntılara sıralama bağıntıları diyoruz. Bu konuda ne düşünüyorsunuz?”

Ö6: “Öncelikle sıralama bağıntılarında yansıma bir şekilde olmalı diye düşünüyorum ve elemanların kendi aralarında da kıyaslanabilmesi için geçişme de olmalı fakat mesela simetri olamaz. Çünkü 1, 3'e giderken, 3, 1'e gidemez. Bu yüzden ters simetri olmalı.”

Ö7: “Yani tam olarak bilmiyorum. Ama ters simetri özelliği olmalı diye düşünüyorum. Çünkü hem (x, y) hem de (y, x) gibi bir eleman aynı anda bulunamaz. Çelişki olur.”

Ö9: “Tam olarak bir şey söyleyemiyorum. Sıralama yapılabilmesi için elemanların arasında bir bağlantı olması lazım. Yansıma, ters simetri ve geçişme özelliği olursa, bu bağlantı olabilir.”

Ö10: “Mesela yansıma özelliğine sahiptirler. Çünkü bir eleman kendinden hem büyük hem de küçüktür. Ters simetri vardır . Eğer simetri olsaydı örneğin (a, b) elemanı için a hem b'den büyük hem de küçük olurdu. Yani sorun olurdu. Geçişme de vardır örneğin (1, 2) ve (2, 3) bağıntıda varken yani $1 < 2$ ve $2 < 3$ ise $1 < 3$ olmalı yani (1,3) de bağıntıda bulunmalı. Böyle düşünüyorum.”

Yukarıdaki görüşme diyaloglarından görülebileceği gibi Ö6, Ö7 ve Ö9 isimli öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarının yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip olmasının nedenlerini tam olarak ifade etmede güçlük

yaşamaktadırlar. Ö6'nın tam olarak yansıma özelliğinin sebebini açıklayamadığı, Ö7'nin ise sadece ters simetriyi açıklayabildiği görülmektedir.

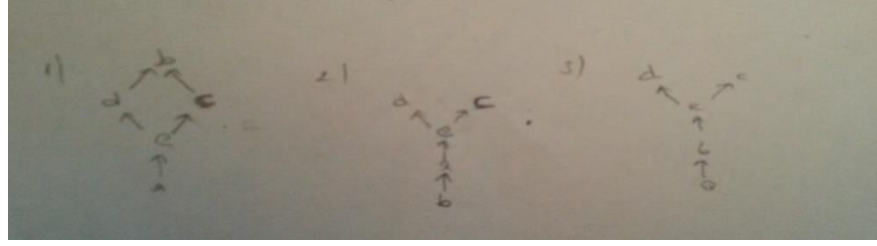
4.2.8. SBKBT-1'in 8. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in 8.sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı cevapların analizi sonucunda tablo 20'de gösterilen kategorilere ulaşılmıştır. Buna göre;

- Soruda belirtilen koşulların hepsini sağlayan bir sıralama bağıntısı tanımlayabilen toplamda **48** öğretmen adayı tespit edilmiştir. Bu 48 öğretmen adayının **33** tanesi tanımladıkları sıralama bağıntısını diyagram şeklinde verirken, **9** tanesi sıralı ikili şeklinde tanımlamış, **6** tanesi ise hem diyagram hem sıralı ikili formunda vermiştir. Bu noktada öğretmen adaylarının eleman sayısı fazla olan kümelerde ve aynı zamanda bu kümelerde tanımlamaları gereken sıralama bağıntısının birçok kritere uyması gerektiği durumlarda diyagram formunu pratik buldukları söylenebilir.

- Soruda belirtilen koşullara uyan bir sıralama bağıntısı tanımlayamayan **52** öğretmen adayının olduğu tespit edilmiştir. Bu 52 öğretmen adayının niçin uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayamadığı sorgulandığında tablo 20'de gösterildiği gibi şu güçlüklerle sahip oldukları ortaya çıkarılmıştır ve bunlar sınıflandırılmıştır.

- ✓ **7** öğretmen adayı, soruda verilen şartta da belirttiği üzere a elemanın tüm elemanlardan büyük olması durumunu, tanımladıkları sıralama bağıntısı diyagramında a elemanını en altta gösterme yanlışlığına düşmüşlerdir. Örnek teşkil etmesi açısından bu yanlışlığa düştüğü tespit edilen öğretmen adaylarından birinin yazılı cevabı aşağıdaki gibidir.



Görüldüğü gibi bazı öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarını diyagram formda ifade ederken, büyüklük-küçüklük ilişkilerini göstermede daha büyük elemanların daha altta olması gerektiği gibi bir yanılgıya sahip oldukları söylenebilir.

- ✓ **21** öğretmen adayının ise yazdıkları sıralama bağıntılarında “a” elemanı, kalan elemanların herhangi biriyle kıyaslanamamaktadır. Ancak soruda “a” elemanının diğer bütün elemanlardan daha büyük olması gerektiği belirtilmiştir.
- ✓ **14** öğretmen adayının ise tanımladıkları bağıntı, sıralama bağıntısının özelliklerini taşımamaktadır, yani bir sıralama bağıntısı değildir. Bu öğretmen adayları, tanımladıkları bağıntının yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin tümünü sağlaması gerektiğinin farkında değildirler. Bu 14 öğretmen adayının tümünün de cevap olarak yazdığı bağıntılar, diyagram şeklinde değil, sıralı ikililer formundadır.
- ✓ **10** öğretmen adayının ise bu soruya yanıt vermedikleri ortaya çıkarılmıştır ve diğer kategorisinde değerlendirilmiştir.

Tablo 20 SBKBT-1'in 8. Sorusuna ait bulgular

Yanıtlar		f		%	
Verilen koşullara uyan bir sıralama bağıntısı tanımlayabilenler	Diyagram formunda verenler	33	48	33	48
	Sıralı ikililer formunda verenler	9		9	
	Her iki formda da verenler	6		6	
Verilen koşullara uyan bir sıralama bağıntısı tanımlayamayanlar	“a” elemanını (en büyük elemanı) diyagramda en altta gösterme	7	52	7	52
	“a” elemanı ile herhangi bir elemanın kıyaslanamaması	21		21	
	Yazılan bağıntının sıralama bağıntısının özelliklerini taşıması	14		14	
	Diğer	10		10	

4.3. SBKBT-2'ye ait Bulgular

4.3.1. SBKBT-2'nin 1. Sorusuna ait bulgular

4.3.1.a. SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkkına ait bulgular

1.sorunun a şıkkı olan “ $B=\{ e, f \}$ kümesinin maksimum ve minimum elemanlarını, maksimal ve minimal elemanlarını, alt sınır ve üst sınırları ile supremum ve infimumunu bulunuz.” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı veriler analiz edilmiştir. Analiz sonuçları tablo 21, tablo 22, tablo 23, tablo 24 ve tablo 25’de gösterilmiştir.

Öğretmen adaylarının $B= \{e, f\}$ kümesinin maksimum ve minimum elemanlarını belirlemeye ilişkin verdikleri cevaplar, tablo 21’de gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %91’i (**91 kişi**) $B=\{e, f\}$ kümesinin maksimum ve minimum elemanları yoktur diyerek, doğru olarak belirlerken, **9** kişi maksimum ve

minimum elemanları hatalı bulmuşlar ya da cevap verememişlerdir. Hatalı bulan bu 9 kişinin verdikleri cevaplar incelendiğinde;

- 3 kişi maksimum ve minimum elemanları $\{e, f\}$ olarak belirlemiştir.
- 2 kişi maksimum ve minimum elemanları e, f olarak yazmışlardır.
- 3 kişi cevap verememiştir.
- 1 kişi ise maksimum ve minimum elemanlara boş küme ($\emptyset$) demiştir.

Hatalı olarak verilen bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde $e, f, \{e, f\}$ ve boş küme ($\emptyset$) cevabı verenlerin maksimum ve minimum elemanların bir küme belirttiğinin düşünülmesi ve birden fazla olabilecekleri yanlışlığına düştükleri söylenebilir. Halbuki maksimum ve minimum elemanlar eğer varsa tektirler ve bu tek eleman küme işareti içine alınmadan yazılır. Eğer maksimum ya da minimum elemanlar yoksalar, yoktur şeklinde yazılırlar, boş küme olarak yazılmazlar. Bu soruda sıralama bağıntısı diyagramındaki e ve f elemanları birbirleriyle kıyaslanamadıkları için doğru cevabın maksimum eleman yoktur ve minimum eleman yoktur şeklinde olması gerekir. Özetle bu noktada öğretmen adaylarının $B=\{e, f\}$ kümesinin maksimum ve minimum elemanlarını belirleme noktasında yanlış olarak değerlendirilen aşağıdaki kavram imgelerine sahip oldukları söylenebilir.

- ❖ Verilen bir sıralama bağıntısına göre, bir kümede birbirleriyle kıyaslanamayan elemanların her ikisinin de maksimum ya da minimum eleman olarak düşünülmesi
- ❖ Maksimum ya da minimum elemanların bir küme belirttiğinin düşünülmesi
- ❖ Maksimum ya da minimum elemanların birden fazla olabileceği düşüncesi

Tablo 21 SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan maksimum ve minimum elemanlara ait kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Doğru bulanlar		91		91	
Yanlış bulanlar	{e, f}	3	9	3	9
	e, f	2		2	
	Cevapsız	3		3	
	Boş küme	1		1	

Öğretmen adaylarının $B = \{e, f\}$ kümesinin maksimal elemanlarını belirlemeye ilişkin verdikleri yanıtlar, tablo 22'de gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %80'i (**80 kişi**), maksimal elemanlara $\{e, f\}$ diyerek, doğru cevap verirlerken, **20** kişi ise yanlış cevap vermişler ya da cevapsız bırakmışlardır. Bu 20 kişinin vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde;

- **1** kişi maksimal elemanları $\{d\}$ olarak belirlemiştir.
- **5** kişi maksimal elemanları $\{b, d, g\}$ olarak belirlemiştir.
- **2** kişi maksimal elemanları $\{b, d, e, f, g\}$ olarak belirlemiştir.
- **2** kişi maksimal elemanlara yoktur demişlerdir.
- **5** kişi maksimal elemanları boş küme ($\emptyset$) olarak belirlemiştir.
- **5** kişi cevap verememiştir.

Hatalı olarak verilen bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde, $\{b, d, g\}$ olarak cevap verenlerin, üst sınırlar ile maksimal elemanları karıştırdıkları söylenebilir. Yoktur olarak cevap verenlerin ise, maksimal elemanların bir küme oluşturması gerektiğini bilmedikleri düşünülebilir. Bu noktada boş küme olarak cevap verenlerin eğer varsa, bir kümede diğer elemanlarla kıyaslanamayan elemanların da maksimal eleman olması gerektiğini bilmedikleri söylenebilir. Yine bu noktada $\{d\}$, $\{b, d, g\}$ ve $\{b, d, e, f, g\}$ olarak cevap verenlerin maksimal elemanların verilen kümeye ait olması gerektiğini dikkate almama yanılgısına sahip oldukları söylenebilir.

Tablo 22 SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan maksimal elemanlara ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Doğru bulanlar		80		80	
Yanlış bulanlar	{d}	1	20	1	20
	{b, d, g}	5		5	
	{b, d, e, f, g}	2		2	
	Yoktur	2		2	
	Boş küme	5		5	
	Cevapsız	5		5	

Öğretmen adaylarının $B = \{e, f\}$ kümesinin minimal elemanların belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 23'te gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %82'si (**82 kişi**) minimal elemanlara $\{e, f\}$ diyerek, doğru cevap verirlerken, toplamda **18** kişi minimal elemanları hatalı bulmuştur ya da cevap verememişlerdir. Bu 18 kişinin vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde;

- **7** kişi minimal elemanları $\{h\}$ olarak belirlemişlerdir.
- **3** kişi minimal elemanları $\{e, f, h\}$ olarak tanımlamışlardır.
- **1** kişi minimal elemanlar yoktur demiştir.
- **3** kişi minimal elemanlara boş küme demiştir.
- **4** kişi ise cevap verememiştir.

Hatalı olarak verilen bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde, $\{h\}$ olarak cevap verenlerin alt sınırlar ile minimal elemanları karıştırdıkları söylenebilir. Bu şekilde $\{h\}$ olarak cevap veren öğretmen adayları ile birlikte $\{e, f, h\}$ olarak cevap veren öğretmen adaylarının minimal elemanların verilen kümeye ait olması gerektiğini, küme dışından elemanlar olmaması gerektiğini bilmedikleri söylenebilir. Boş küme ve yoktur olarak cevap veren öğretmen adaylarının ise bir kümede diğerleri ile kıyaslanamayan elemanların minimal eleman olarak düşünülmemesi yanlışlığına sahip oldukları söylenebilir.

Tablo 23 SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan minimal elemanlara ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Doğru bulanlar		82		82	
Yanlış bulanlar	{h}	7	18	7	18
	{e, f, h}	3		3	
	Yoktur	1		1	
	Boş küme	3		3	
	Cevapsız	4		4	

Bu noktada öğretmen adaylarının diyagram şeklinde verilen sıralama bağıntılarında maksimal ve minimal elemanlara ilişkin aşağıdaki kavram imgelerine sahip oldukları söylenebilir.

- ❖ Üst sınırların maksimal elemanlar olarak düşünülmesi
- ❖ Maksimal ve minimal elemanların bir küme oluşturması gerekmediği algısı
- ❖ Bir kümede diğer elemanlarla kıyaslanamayan elemanları maksimal ya da minimal eleman olarak değerlendirmeme
- ❖ Maksimal ve minimal elemanlar verilen kümeye ait olamayabilir algısı
- ❖ Alt sınırların minimal elemanlar olarak düşünülmesi
- ❖ Maksimal ve minimal elemanların sırasıyla diyagramda en üstte ya da en altta olan elemanlar olarak düşünülmesi

Öğretmen adaylarının, $B=\{e, f\}$ kümesinin üst sınırları ile supremumunu belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 24'de gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %62'si (**62 kişi**) üst sınırlarlara $\{b, g, d\}$ diyerek, doğru olarak bulurlarken, %38'i (**38 kişi**) üst sınırları hatalı olarak belirlemişlerdir. Üst sınırları doğru olarak belirleyen öğretmen adayları içinden supremumu doğru olarak bulabilenler 48 kişi, supremumu doğru olarak bulamayanlar ise **14** kişi olarak tespit edilmiştir. Öncelikle üst sınırlar için hatalı olarak verilen cevaplar incelendiğinde;

- 1 kişi üst sınırları $\{h\}$ olarak belirlemiştir.
- 5 kişi üst sınırları $\{e, f, h\}$ olarak belirlemiştir.
- 14 kişi üst sınırları $\{b, c, d, g\}$ olarak belirlemiştir.
- 5 kişi üst sınırları $\{b, e, f, g\}$ olarak belirlemiştir.
- 6 kişi üst sınırlara yoktur demiştir.
- 4 kişi üst sınırlara boş küme demiştir.
- 3 kişi ise üst sınırlar için cevap verememiştir.

Üst sınırlar için hatalı olarak verilen bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde, $\{h\}$ olarak cevap veren öğretmen adayının üst sınırlar ile alt sınırları karıştırdığı düşünülebilir. Yoktur şeklinde cevap veren öğretmen adaylarının üst sınırların bir küme oluşturması gerektiğini bilmedikleri söylenebilir. Üst sınırları $\{b, c, d, g\}$ olarak belirleyen öğretmen adaylarının, sıralama bağıntısı diyagramında, istenilen kümedeki elemanların hiza olarak üstünde olan tüm elemanların üst sınır olması gerektiği gibi bir yanılgıya düştüklerini söyleyebiliriz. Üst sınır bulurken e, f elemanlarını dahil eden öğretmen adaylarının ise üst sınırın tanımı ile (kümedeki elemanların hepsinden büyük olan elemanlar) çelişki içeren bir algıya sahip oldukları söylenebilir.

Tablo 24'te de gösterildiği gibi üst sınırları doğru olarak belirleyip, supremumu hatalı olarak bulan öğretmen adayların cevapları incelendiğinde ise;

- 7 kişi supremumu $\{d\}$ olarak belirlemiştir.
- 2 kişi supremumu $\{g\}$ olarak belirlemiştir.
- 3 kişi supremumu $\{b, g\}$ olarak belirlemiştir.
- 1 kişi supremum yoktur şeklinde cevap vermiştir.
- 1 kişi ise cevapsız bırakmıştır.

Supremum için verilen bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde supremumu $\{d\}$, $\{g\}$ ya da $\{b, g\}$ olarak belirleyen öğretmen adaylarının supremumun varsa tek olduğunu bu yüzden bir küme belirtmemesi gerektiğini bilmedikleri düşünülebilir.

Bu soru için supremumun küme işareti olmaksızın yalnızca d elemanı olması gerekmektedir. Çünkü supremum, üst sınır elemanlarının en küçüğüdür.

Bu noktada bir kümenin üst sınırlarını ve buna bağlı olarak supremumunu belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının hatalı olarak değerlendirilen aşağıdaki kavram imgelerine sahip oldukları düşünülebilir.

- ❖ Sıralama bağıntısı diyagramında küme elemanlarının hiza olarak üstünde olan tüm elemanların üst sınır olabileceği algısı
- ❖ Supremumun bir küme belirtebileceği algısı
- ❖ Supremumun birden fazla olabileceği düşüncesi

Tablo 24 SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan üst sınırlar ile supremuma ait Kategoriler

Yanıtlar				f		%	
Üst sınırı doğru bulanlar	Supremumu doğru bulanlar		48		62	48	
	Supremumu yanlış bulanlar	{d}	7	14		7	62
		{g}	2			2	
		{b, g}	3			3	
		Yok	1			1	
		Cevapsız	1			1	
Üst sınırı yanlış bulanlar	{h}		1		38	1	
	{e, f, h}		5			5	
	{b, c, d, g}		14			14	
	{b, e, f, g}		5			5	
	Yoktur		6			6	
	Boş küme		4			4	
	Cevapsız		3			3	

Öğretmen adaylarının, $B=\{e, f\}$ kümesinin alt sınırları ile infimumunu belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar ise tablo 25'de gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %71'i (**71 kişi**) alt sınırlara {h} diyerek doğru bulurken, %29'u

(29 kişi) ise alt sınırları hatalı olarak belirlemişlerdir. Alt sınırları doğru olarak belirleyen 71 öğretmen adayı içinden, infimumu doğru bulabilen öğretmen adaylarının sayısı 60, infimumu hatalı bulan öğretmen adaylarının sayısı 11 olarak tespit edilmiştir. Öncelikle alt sınırlar için hatalı olarak verilen cevaplar incelendiğinde;

- 2 kişi alt sınırları h olarak belirlemiştir.
- 2 kişi alt sınırları {b, d, g} olarak belirlemiştir.
- 16 kişi alt sınırları {e, f, h} olarak belirlemiştir.
- 3 kişi alt sınırlar yoktur şeklinde cevap vermiştir.
- 1 kişi alt sınırlara boş küme demiştir.
- 5 kişi ise alt sınırları cevapsız bırakmıştır.

Alt sınırlar için hatalı olarak verilen bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde, h ve yoktur şeklinde cevap veren öğretmen adaylarının, alt sınırların bir küme oluşturması gerektiğini bilmedikleri söylenebilir. Çünkü alt sınırlar küme işareti içinde yazılırlar ve eğer verilen bağıntıya göre mevcut değilseler, boş küme şeklinde belirtilirler. Alt sınırları {b, g, d} olarak belirleyen öğretmen adaylarının ise alt sınırlarla üst sınırları karıştırdığını söyleyebiliriz. Alt sınırları {e, f, h} olarak belirleyen öğretmen adaylarının ise alt sınır kümesine birbirleri ile kıyaslanamayan elemanları (e ve f) dahil ederek, alt sınırların tanımını (kümedeki elemanların hepsinden küçük olan elemanlar) doğru olarak yorumlamadıkları söylenebilir.

Tablo 25’de gösterildiği gibi, alt sınırları doğru olarak belirleyip, infimumu hatalı olarak bulan öğretmen adaylarının (11 kişi) cevapları incelendiğinde ise;

- 7 kişi infimumu {h} olarak belirlemiştir.
- 2 kişi infimum yoktur şeklinde cevap vermiştir.
- 2 kişi ise infimumu cevapsız bırakmıştır.

İnfimum için verilen bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde, infimumu {h} olarak belirleyen öğretmen adaylarının, infimumun varsa tek bir eleman olduğunu bu yüzden bir küme belirtmemesi gerektiğini bilmedikleri söylenebilir. Bu soruda

infimumun bir küme işareti olmaksızın yalnızca h elemanı olması gerekmektedir. Çünkü infimum, alt sınırların en büyüğüdür ve tektir. Alt veya üst sınırları doğru belirledikleri halde, supremum ve infimum elemanları hatalı bulan öğretmen adaylarının kavramların özünden hareketle, aslında maksimum ve minimum eleman belirlemede güçlüklerle sahip olabilecekleri söylenebilir.

Bu noktada $\{e, f\}$ kümesinin alt sınırlarını ve buna bağlı olarak infimumunu belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerinde var olan kavram imgelerinin aşağıdaki gibi olduğu düşünülebilir.

- ❖ Alt sınırların bir küme oluşturmadığı algısı
- ❖ Kümede birbirleri ile kıyaslanamayan elemanların da alt sınır olarak düşünülmesi (alt sınır kavram tanımı ile çelişme)
- ❖ Infimum elemanın bir küme belirttiği algısı (infimum elemanı birden fazla düşünme)

Tablo 25 SBKBT-2'nin 1. Sorusunun a şıkında bulunan alt sınır ile infimuma ait Kategoriler

Yanıtlar				f		%		
Alt sınırı doğru bulanlar	İnfimumu doğru bulanlar			60		71	60	71
	İnfimumu yanlış bulanlar	{h}	7	11	7			
		Yoktur	2		2			
		Cevapsız	2		2			
Alt sınırı yanlış bulanlar	H			2		29	2	29
	{b, d, g}			2			2	
	{e, f, h}			16			16	
	Yoktur			3			3	
	Boş küme			1			1	
	Cevapsız			5			5	

Bu noktada $B = \{e, f\}$ kümesinin maksimum, minimum, maksimal, minimal, alt sınır, üst sınır ve supremum ile infimum elemanlarını belirlemeye yönelik öğretmen

adayları ile görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerden Ö11 takma adıyla isimlendirdiğimiz bir öğretmen adayı ile yapılan görüşme aşağıda sunulmuştur.

A: “Sizlere yaptığımız uygulamada sıralama bağlantısı kavramları bilgi testi-2’nin 1.sorusunda diyagram halinde bir bağıntı vermiştik ve bu bağıntıya göre, $B = \{e, f\}$ kümesinin maksimum, minimum, maksimal, minimal, alt sınır, üst sınır ve supremum ile infimum elemanlarını belirlemenizi istemiştik. Yazılı olarak verdiğiniz cevapta maksimum ve minimum eleman yoktur demişsiniz. Buna gerekçe olarak neyi gösterirsiniz?

Ö11: “e ve f elemanları bağıntıda birbiri ile kıyaslanamadıkları için yoktur olarak düşündüm.”

A: “Yine bu noktada maksimal ve minimal elemanları $\{e, f\}$ kümesi olarak belirlemiştiniz. Bunu neye dayalı olarak belirlediniz?”

Ö11: “Tanımda kümede kıyaslanabildiklerinin en büyüğü ya da en küçüğü olarak tanımlanıyordu. Bu yüzden $\{e, f\}$ olarak belirledim.”

A: “Yani bir kümede elemanlar birbiri ile kıyaslanamasa da maksimal ve minimal elemanlar mevcut olabilir mi?

Ö11: “Evet olabilir tanımdan hareketle düşündüm.”

A: “ $\{e, f\}$ kümesinin üst sınırları için ne diyebilirsiniz, sebebini de belirterek?”

Ö11: “Verilen kümenin elemanlarından büyük elemanları almamız gerekiyordu. O yüzden $\{e, f, d, g, b\}$ diyebilirim.”

A: “Peki e ve f elemanları olmalı mı üst sınırlar içerisinde?

Ö11: “Tam olarak emin değilim, e ve f dahil olmayabilir de, tam bilmiyorum.”

A: “ $\{e, f\}$ kümesinin alt sınırlarına yazılı cevabınızda $\{e, f, h\}$ demişsiniz. Bunu neye göre dediniz peki?”

Ö11: “Yine bu noktada e ve f elemanları alt sınırlara dahil edilemeyebilir. Birbiri ile kıyaslanamıyor çünkü fakat tam olarak emin değilim.”

A: “Yazılı cevabınızda $\{e, f\}$ kümesinin supremuma da infimumuma da olarak e ve f demişsiniz. Bunu neye göre dediniz?”

Ö11: “Mesela burada supremum üst sınırların en küçüğü idi. O yüzden supremum elemana e ve f dedim. Ama şu an emin değilim eğer üst sınırları yanlış bulduysam, bunlar da değişir.”

A: “Peki, supremum ve infimum eleman 2 tane olabilir mi? Yani illa tek bir eleman mı olmalı, birden fazla da olabilir mi?”

Ö11: “Evet olabilir”

Yukarıdaki görüşme diyalogundan görülebileceği gibi, Ö11 adlı öğretmen adayının $\{e, f\}$ kümesinin üst sınırları ve alt sınırları belirlemede güçlük yaşadığı, kümede kıyaslanamayan elemanları da alt ve üst sınıra dahil etme hatasına düştüğü görülmektedir. Ayrıca supremum ve infimum elemanın da birden fazla olabileceği düşünerek yanılgıya düştüğü de görülmektedir. Bu öğretmen adayının alt sınır ve üst sınırın kavram tanımlarını anlamada güçlük çektiği söylenebilir.

4.3.1.b. SBKBT-2'nin 1. Sorusunun b şıkkına ait bulgular

1.sorunun b şıkkı olan “Yukarıdaki bağıntıya göre, üst sınırı olup, supremumu olmayan küme var mıdır? Varsa, küme ya da kümeleri yazınız.” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı veriler analiz edilmiştir. Analiz sonuçları tablo 26’da gösterilmiştir. Tablo incelendiğinde;

• Verilen bağıntıya göre üst sınırı olup, supremumu olmayan doğru bir küme örneği verebilen öğretmen adaylarının sayısı **40** olarak tespit edilmiştir. Yani bu soruda uygun bir örnek sunabilen öğretmen adayları, üst sınır içindeki elemanları arasında en küçük elemanın belirlenemediği bir küme örneği vermişlerdir. Örneğin; en çok verilen örneklerden biri $\{c, d\}$ kümesidir. Çünkü $\{c, d\}$ kümesinin 1.soruda verilen bağıntıya göre üst sınırları kümesi $\{b, g\}$ olup, diyagramda b ve g elemanları kendi arasında büyük-küçük olarak kıyaslanamadığı için supremum yoktur.

• Verilen bağıntıya göre, üst sınırı olup, supremumu olmayan bir küme örneği veremeyen (hatalı örnek verenler ve cevapsız bırakanlar) öğretmen adaylarının sayısı ise **60** olarak tespit edilmiştir. Bu 60 öğretmen adayının verdikleri cevaplar analiz edildiğinde;

✓ **9** öğretmen adayı üst sınırı olmayan bir küme örneği sunmuşlardır. En sık verilen cevaplara $\{b, g\}$ ve $\{c, b, g\}$ kümeleri örnek olarak verilebilir. Bu öğretmen adaylarının verilen bağıntı üzerinden bir kümenin üst sınırları bulmada sıkıntılar yaşadıkları söylenebilir.

✓ **35** öğretmen adayının ise, soruda istendiği gibi üst sınırı olan fakat bu kez supremumu da olan küme örnekleri sundukları ortaya çıkarılmıştır. Bu öğretmen adaylarının en sık verdikleri cevaplara $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e, f\}$, $\{d, e, f\}$ ve $\{h\}$ kümeleri örnek olarak verilebilir. Bu gruptaki öğretmen adaylarının tümü, aslında verdikleri küme örneklerinin üst sınırlarını hatalı bulmuşlardır. Dolaylı olarak da hatalı olarak buldukları üst sınırları baz alarak, supremum yoktur demişlerdir. Yani bu öğretmen adaylarının yine bir kümedeki üst sınırları bulmada sıkıntıları oldukları söylenebilir.

✓ 7 öğretmen adayı ise böyle bir küme yoktur şeklinde cevap vermişlerdir. Bu öğretmen adayları içinden 4 kişinin cevaplarında eğer üst sınır varsa, supremum da vardır şeklinde hatalı bir yorumlamada bulundukları tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu noktada bazı öğretmen adaylarının zihinlerinde eğer üst sınır varsa, supremum da vardır gibi bir imgeye sahip oldukları düşünülebilir. Aslında bir kümenin verilen sıralama bağıntısına göre üst sınırı olduğunda supremumu da olması gerekmez. Üst sınırlar içinde en küçük eleman, kıyaslanıp-kıyaslanamama durumuna göre olmayabilir. 1 öğretmen adayının ise, bir bağıntıda birbiri ile kıyaslanamayan elemanlar varsa, sınırlı bir küme yoktur yani üst sınırı olan bir küme de yoktur şeklinde hatalı bir kavram imgesine sahip olduğu bulunmuştur. Çünkü bir bağıntıda birbiri ile kıyaslanamayan elemanlar varsa, bu bağıntıya göre sınırlı küme yoktur denilemez. Bu durum, kümenin alt ve üst sınırlarının olup olmamasına göre belirlenir. Kalan 2 öğretmen adayı ise bir gerekçe göstermeden böyle bir küme yoktur şeklinde cevap vermişlerdir. Aşağıda örnek teşkil etmesi açısından 2 öğretmen adayının yazılı cevabı sunulmuştur.

A.Ç:

b) Yukarıdaki bağıntıya göre, üst sınırı olup, supremumu olmayan küme var mıdır? Varsa, küme ya da kümeleri yazınız.

Yoktur. Çünkü supremum en küçük üst sınırdır. Eğer üst sınır varsa bir kümenin supremumunda vardır. Mesela üst sınırı olmasaydı supremumu olmazdı.

F.B:

b) Yukarıdaki bağıntıya göre, üst sınırı olup, supremumu olmayan küme var mıdır? Varsa, küme ya da kümeleri yazınız.

Bu bağıntıda birbirine karşılaştırılamayan elemanlar olduğu için sınırlı bir küme yoktur. dolayısıyla böyle bir küme yoktur.

✓ 9 öğretmen adayının ise soruyu yanıtsız bıraktıkları tespit edilmiştir.

Tablo 26 SBKBT-2'nin 1. Sorusunun b şıkkına ait kategoriler

Yanıtlar				f		%			
Üst sınırı olup, supremumu olmayan bir küme örneği verebilenler				40		40			
Üst sınırı olup supremumu olmayan bir küme örneği veremeyenler	Üst sınırı olmayan bir küme örneği verenler			9		9		60	60
	Üst sınırı olup supremumu da olan bir küme örneği verenler			35		35			
	Boş (cevapsız)			9		9			
	Böyle bir küme yoktur	Eğer üst sınır varsa mutlaka supremum da vardır	5	7	5	7			
		Gerekçe vermeyenler	2		2				

Yine bu noktada sıralama kavramı bilgi testi-2'nin 1. Sorusunun b şıkkı ile alakalı olarak öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden bazı örnekler aşağıda sunulmuştur.

A: “1.soruda verdiğimiz bağıntıya göre, üst sınırı olup, supremumu olmayan bir küme söyleyebilir misiniz?” Nedenini de açıklamanızı istiyorum.”

Ö11: “Mesela $\{c\}$ kümesi diyebilirim. Üst sınırları $\{b, g\}$ olur ve supremumu yoktur.”

Ö12: “Mesela $\{d, e, f\}$ kümesini söyleyebilirim. Üst sınırları $\{b, g\}$ olur ve b ile g kıyaslanamadığı için supremum olmaz. Böyle düşünüyorum.”

A: “Peki bu noktada örnek olarak verdiğiniz $\{d, e, f\}$ kümesi için d elemanı sizce dahil olmalı mı üst sınırlara?”

Ö12: “Gerekıyor gibi duruyor, şu an bakınca”

A: “Peki neden dahil olması gerekiyor d elemanının?”

Ö12: “d elemanı çünkü $\{d, e, f\}$ kümesinin maksimum elemanıdır. Şu an almamız gerekiyor diye düşünüyorum. Biraz önce söylediğim üst sınırlar hatalı oldu bu yüzden”

4.3.1.c. SBKBT-2’nin 1. Sorusunun c şıkkına ait bulgular

1.sorunun c şıkkı olan “Sınırsız küme nedir, tanımlayınız. Bu bağıntıya göre sınırsız olan kümeleri yazınız.” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı veriler analiz edilmiştir. Analiz sonuçları tablo 27 ve tablo 28’de gösterilmiştir.

Küme üzerinde tanımlı bir sıralama bağıntısına göre, bir kümenin hem alttan hem de üstten sınırı varsa o küme sınırlı küme diye adlandırılır. Ancak kümenin alttan veya üstten bir sınırı yoksa ya da hem alttan hem de üstten bir sınırı yoksa böyle kümeleri sınırsız küme şeklinde adlandırırız. Bu tanım dikkate alınıp, öğretmen adaylarının her birinin sınırsız küme tanımları incelendiğinde tablo 27’de gösterildiği gibi;

•44 öğretmen adayı, sınırsız küme tanımını doğru olarak verebilmiştir.

•56 öğretmen adayının ise sınırsız küme tanımlarında bazı sıkıntılar gözlenmiştir. Bu 56 kişiden;

✓ 36 kişi, sınırsız küme tanımlarında bir kümenin hem alttan hem de üstten sınırı olmasını gerektiğini belirterek, yanılgıya düşmüşlerdir. Çünkü kümenin sınırsızlığı için için sadece alttan ya da sadece üstten sınırın olmaması yeterlidir.

✓ 20 kişi, sınırsız kümenin tanımıyla ilgili olmayan hatalı tanımlar vermişlerdir. Bu tanımlar içerisinde değinilmesi önem arz edebilecek bazı cevaplar aşağıda verilmiştir. Bu cevaplar sınırsız kümeler konusunda aslında kavram imgelerinin bir parçası olan

öğretmen adaylarının zihinlerindeki kavram tanımı imgeleridir denilebilir.

- ❖ “Elemanları sonsuz sayıda olan kümelere sınırsız küme denir.”
- ❖ “Sınırsız kümeler, eleman sayısı kesin belli olmayan sonsuz kümelerdir.”
- ❖ “Alt sınırın üst sınıra eşit olduğu kümelere sınırsız küme denir.”
- ❖ “Eleman sayısı sonsuz ve sayılamayan kümelere sınırsız küme denir.”
- ❖ “Sınırsız küme içinde kıyaslanamayan eleman bulunduran kümedir.”
- ❖ “Belli bir başı ya da sonu olmayan kümelere sınırsız küme denir”
- ❖ “Alt ve üst sınırı sınırsız olan küme sınırsız kümedir”
- ❖ “Son elemanını yazamadığımız küme sınırsızdır”

Görüldüğü gibi aslında bazı öğretmen adaylarının daha önce de açıklanan **sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemine** düştükleri söylenebilir. Çünkü eleman sayısının sonsuz sayıda olması durumunu sınırsızlık olarak algılama durumu vardır.

Tablo 27 SBKBT-2’nin 1. Sorusunun c şıkkındaki sınırsız küme tanımına ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Tanımı doğru verebilenler		44		44	
Tanımı doğru veremeyenler	Hem üstten hem alttan sınırı olmamalı	36	56	36	56
	Tanım ile çelişen cevaplar	20		20	

Soru kökünde istenen başka bir nokta da öğretmen adaylarının soruda verilen bağıntıya göre sınırsız küme örneği vermeleriydi. Öğretmen adaylarının tümünün verdikleri küme örnekleri incelenmiştir. Tablo 28’de de gösterildiği gibi;

- Verilen bağıntıya göre en az bir tane sınırsız küme örneği sunabilen öğretmen adaylarının sayısı **38** olarak tespit edilmiştir (%38). Bu şekilde en sık verilen küme örnekleri $\{h\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{g\}$, $\{b\}$, $\{e, f\}$ kümeleridir. Bu 38 öğretmen adayından bir kısmının cevaplarında sınırsız diye verdikleri küme örneklerinin aslında sınırlı olmalarının asıl sebebi, öğretmen adaylarının üst ve alt sınırları bulmada sıkıntı yaşamaları olabilir.

- Sınırsız küme örneği veremeyen öğretmen adaylarının sayısı ise **62** olarak bulunmuştur. (%62). Bu 62 kişiden **21** kişinin sınırsız küme diye verdikleri örneklerin aslında sınırlı küme olduğu tespit edilmiştir. **41** öğretmen adayının ise bu bağıntıya göre sınırsız küme yoktur şeklinde cevap verdikleri ya da yanıtsız bıraktıkları veya alakasız örnekler sundukları ortaya çıkarılmıştır.

Tablo 28 SBKBT-2’nin 1. Sorusunun c şıkında yazılan sınırsız küme örneklerine ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Sınırsız küme örneği verebilenler		38		38	
Sınırsız küme örneği veremeyenler	Sınırlı küme örneği verenler	21	62	21	62
	Yoktur veya alakasız-boş yanıtlar	41		41	

Yine bu noktada sıralama kavramları bilgi testi-2’nin 1. Sorusunun c şıkkı ile ilgili öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden bazı örnekler aşağı sunulmuştur.

A: “Sınırsız küme kavramını nasıl tanımlarsınız? Ne düşünüyorsunuz bu konuda?”

Ö11: “Sınırsız küme bağıntımıza göre, alt ve üst sınırları mevcut olmayan kümelerdir.”

Ö14: “ Sınırsız küme bağıntıya göre, alt ve üst sınırlarından biri mevcut olmayan kümeler olarak tanımlayabilirim.”

Ö15: “Sonu olmayan bir kümedir yani başı ve sonu olmayan bir kümedir diyebilirim.”

A: “Peki sıralama bağıntılarını düşünürsek, sınırsızlığın hangi kavramlarla alakası olabilir?”

Ö15: “Bana göre işte ilk bir başlangıcı olup, sonra sonu olacak. Arada da bir doluluk olması gerekir.”

A: “Peki sınırsızlığın alt ve üst sınır kavramları ile bir ilgisi var diyebilir miyiz?”

Ö15: “evet vardır başlangıç ve bitiş olarak düşünürsek alt sınır ve üst sınır ile ilgisi vardır.”

A: “Peki, sınırsız olması için bir kümenin hem alt hem de üst sınırı da olmamalı mı yoksa ikisinden biri olmazsa da olur mu yani sınırsızlık için yeterli olur mu?”

Ö11: “İkisi de olmaması lazım. Sadece biri olmazsa mesela sadece alttan sınırsız olursa, sınırsız küme olmaz diye düşünüyorum.”

Ö14: “Hayır bunlardan herhangi biri olmazsa sınırsız olması için yeterli diye biliyorum”

Ö15: “Evet hem alttan hem de üstten sınırı olmamalı bence.”

A: “Bu bağıntıya göre sınırsız olan bir küme söyleyebilir misiniz?”

Ö11: “bir şey söyleyemiyorum şu an. yok galiba ya da ben bulamadım.”

Ö14: “ $\{h\}$ ve $\{a\}$ kümelerini örnek olarak verebilirim. Bunların alt sınırları olmadığı için sınırsız olurlar diye düşünüyorum.”

Yukarıdaki görüşme diyaloglarından da görülebileceği üzere öğretmen adaylarının bazıları, sınırsız küme tanımını vermede güçlük yaşamaktadırlar. Özellikle sınırsız olması için hem alt hem de üst sınırının olmaması gerekir şeklinde bir imgeye sahip olmaları bu güçlüğü yaşamalarında etkilidir. Ö15 isimli öğretmen adayının ise, sınırsızlığı sıralama bağıntısındaki alt sınır ve üst sınır gibi kavramlarla ilişkilendirmekte güçlük yaşadığı söylenebilir.

4.3.2. SBKBT-2’nin 2. Sorusuna ait bulgular

4.3.2.a. SBKBT-2’nin 2. Sorusunun a şıkkına ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2’nin 2.sorusunun a şıkkı olan “IR reel sayılar kümesi üzerinde bilinen adi sıralama bağıntısına göre, $A = [-1, 7)$ kümesinin maksimum ve minimum elemanlarını, maksimal ve minimal elemanlarını, alt ve üst sınırları ile supremum ve infimumunu bulunuz. Bu küme sınırlı mıdır? Neden?” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı veriler analiz edilmiştir. Analiz sonuçları tablo 29, tablo 30, tablo 31, tablo 32 ve tablo 33’te gösterilmiştir.

Öğretmen adaylarının $A = [-1, 7)$ kümesinin maksimum elemanını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtların analizi tablo 29’da gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %86’sı (**86 kişi**) maksimum elemana yoktur diyerek doğru cevap vermişlerdir. Öğretmen adaylarının %14’ü (**14 kişi**) ise maksimum elemanı hatalı olarak bulmuştur. Hatalı bulan bu 14 kişinin maksimum eleman için verdikleri

cevaplar ve öğrenci sayıları tablo 29’da gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Maksimum elemana 6 ve 6,98 diyen öğretmen adaylarının aslında 7’den küçük en büyük reel sayının ne olduğu konusunda sıkıntılar yaşadıkları söylenebilir. Bu öğretmen adaylarının reel sayı kümelerinde ve sonsuz ondalık sayılarda yanılgılar içinde oldukları düşünülebilir. Maksimum elemanı {6} ve {7} olarak belirleyen öğretmen adaylarının ise maksimum elemanın eğer varsa tek olduğunu bu yüzden bir küme belirtmemesi gerektiğinin farkında olmadıkları söylenebilir. Bunun yanında, maksimum elemanı {7} olarak belirleyen öğretmen adaylarının yanı sıra sadece 7 olarak bulan öğretmen adaylarının maksimum elemanın verilen küme ya da sayı aralığına ait olması gerektiğini bilmedikleri söylenebilir. Maksimum elemana cevap olarak -1 diyen öğretmen adaylarının ise maksimum elemanla minimum elemanı karıştırdıkları düşünülebilir.

Tablo 29 SBKBT-2’nin 2. Sorusunun a şıkkının maksimum elemanlarına ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Maksimum elemanı doğru bulabilenler		86		86	
Maksimum elemanı doğru bulamayanlar	6	2	14	2	14
	7	2		2	
	-1	1		1	
	6,98	1		1	
	{6}	2		2	
	{7}	1		1	
	Cevapsız	5		5	

$A=[-1, 7)$ kümesinin maksimum elemanını belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerindeki kavram imgeleri şu şekilde sıralanabilir.

❖ R’de bir a sayısından küçük en büyük reel sayının a-1 ya da “a-1, 99” olduğu algısı (sonsuz ondalık sayı)

- ❖ Maksimum elemanın bir küme olmayabilir.
- ❖ Maksimum eleman verilen kümeye ait olmayabilir.

Öğretmen adaylarının $A = [-1, 7)$ kümesinin minimum elemanını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 30’da gösterilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının %84’ü **(84 kişi)** minimum elemanı “-1” olarak belirleyerek doğru olarak cevap vermişlerdir. Öğretmen adaylarının %16’sı **(16 kişi)** ise minimum elemanı hatalı olarak bulmuşlardır. **10** kişi minimum elemana $\{-1\}$ olarak belirlerken, **2** kişi minimum eleman yoktur şeklinde cevap vermiştir. **4** öğretmen adayı ise minimum elemanı cevapsız bırakmıştır. Bu cevaplar yorumlandığında;

Minimum elemanı $\{-1\}$ olarak belirleyen öğretmen adaylarının minimum elemanın eğer varsa tek bir eleman olduğu bu yüzden küme oluşturmaması gerektiğinin farkında olmadıkları söylenebilir.

Tablo 30 SBKBT-2’nin 2. Sorusunun a şıkkının minimum elemanlarına ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Minimum elemanları doğru bulabilenler		84		84	
Minimum elemanları doğru bulamayanlar	$\{-1\}$	10	16	10	16
	Yoktur	2		2	
	Cevapsız	4		4	

Öğretmen adaylarının $A = [-1, 7)$ kümesinin maksimal elemanlarını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 31’de gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %63’ü **(63 kişi)** maksimal elemanlara boş küme ($\emptyset$) diyerek doğru cevap verirken, %37’si **(37 kişi)** ise maksimal elemanları hatalı olarak belirlemişlerdir. Maksimal elemanlar için hatalı olarak verilen cevaplar ve öğrenci sayıları tabloda gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde,

Maksimal elemanlara $[7, +\infty)$ diye cevap veren öğretmen adaylarının maksimal elemanlar ile üst sınırları karıştırdıkları söylenebilir. Maksimal elemanlar için 7 ve

yoktur şeklinde cevap veren öğretmen adaylarının ise maksimal elemanların bir küme belirtmesi gerektiğinin farkında olmadıkları söylenebilir. Yine maksimal elemanlara 7, $\{7\}$ veya $[7, +\infty)$ olarak bulan öğretmen adaylarının ise maksimal elemanların verilen küme ya da aralığa ait olması gerektiğini bilmedikleri söylenebilir.

Tablo 31 SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki maksimal elemanlara ait kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Maksimal elemanları doğru bulabilenler		63		63	
Maksimal elemanları doğru bulamayanlar	7	1	37	1	37
	$\{6\}$	1		1	
	$\{7\}$	8		8	
	$[-1,7)$	3		3	
	$[7,+\infty)$	8		8	
	Yoktur	9		9	
	Cevapsız veya boş	7		7	

Özetle $A=[1, 7)$ kümesinin maksimal elemanlarını belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının sahip oldukları imgeler aşağıdaki gibi olabilir.

- ❖ Maksimal elemanları üst sınırlar olarak düşünme
- ❖ ‘Maksimal elemanlar küme belirtmez’ algısı
- ❖ ‘Maksimal elemanlar verilen kümeye ait olmayabilir’ düşüncesi
- ❖ Maksimal elemanlar ‘küme ya da aralıktaki en büyük tamsayıdır’ algısı

Öğretmen adaylarının $A= [-1, 7)$ kümesinin minimal elemanlarını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 32’de gösterilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının %75’i (**75 kişi**) minimal elemanlara $\{-1\}$ diyerek doğru cevap verirlerken, %25’i (**25 kişi**) minimal elemanları hatalı olarak bulmuşlardır. Çünkü

küme içinde kıyaslanabildiklerinin en küçüğü olan elemanlar $\{-1\}$ 'dir. Bu 25 kişinin minimal elemanlar için hatalı olarak verdikleri cevaplar ve öğrenci sayıları tablo 32'de gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Minimal elemanları $(-\infty, -1]$ olarak belirleyen öğretmen adaylarının minimal elemanlar ile alt sınırları karıştırdıkları söylenebilir. Minimal elemanları -1 olarak bulan öğretmen adaylarının ise minimal elemanların bir küme belirtmesi gerektiğinin farkında olmadıklarını söyleyebiliriz. Bununla birlikte minimal elemanları $\{7\}$ veya $(-\infty, -1]$ olarak bulan öğretmen adaylarının minimal elemanların verilen küme ya da aralığa ait olması gerektiğini bilmedikleri düşünülebilir.

Tablo 32 SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki minimal elemanlara ait kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Minimal elemanları doğru bulabilenler		75		75	
Minimal elemanları doğru bulamayanlar	-1	5	25	5	25
	$\{7\}$	1		1	
	$(-\infty, -1]$	8		8	
	Boş küme	3		3	
	Cevapsız	8		8	

$A=[1, 7)$ kümesinin minimal elemanlarını belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerindeki imgelerin aşağıdaki gibi olduğu düşünülebilir.

- ❖ Minimal elemanları alt sınırlar olarak düşünme
- ❖ 'Minimal elemanlar küme belirtmez' algısı
- ❖ 'Minimal elemanlar verilen kümeye ait olmayabilir' düşüncesi

Öğretmen adaylarının " $A= [-1, 7)$ kümesinin alt sınırları ile infimumunu belirlemeye ilişkin verdikleri yanıtlar, tablo 33'de gösterilmiştir. Öncelikle öğretmen adaylarının alt sınırları belirlemeye ilişkin verdikleri cevaplar incelendiğinde öğretmen adaylarının %68'i (**68 kişi**) alt sınırlara $(-\infty, -1]$ diyerek doğru olarak

belirlerken, %32'si (**32 kişi**) alt sınırları hatalı olarak bulmuşlardır. $A = [-1, 7)$ kümesinin alt sınırları için hatalı olarak verilen yanıtlar ve bu yanıtları veren öğretmen adayı sayıları tablo 33'dedir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Alt sınırları $\{-1\}$ olarak belirleyen öğretmen adaylarının, alt sınırların sadece kümeye ait olması gereken elemanlar olarak düşünülmesi yanılıgına sahip oldukları söylenebilir. Aynı zamanda minimal elemanla alt sınırların karıştırılması da bu durumun sebebi olabilir. Alt sınırları $[7, +\infty)$ olarak bulan öğretmen adaylarının ise alt sınırlarla üst sınırları karıştırdıkları söylenebilir. Alt sınırlar yoktur diyen öğretmen adaylarının alt sınırların bir küme belirtmesi gerektiğini bilmedikleri düşünülebilir. Çünkü alt sınırlar mevcut değilse, boş küme şeklinde belirtilir. Alt sınırlar için $(-\infty, 1)$ şeklinde cevap vererek, “-1” elemanını dahil etmeyen öğretmen adaylarının ise alt sınırların her zaman kümeye ait olmayan bir elemanmış gibi düşünülmesi yanılıgına sahip oldukları söylenebilir. Alt sınırları $\{\dots-2, -1\}$ olarak bulan 1 öğretmen adayının ise, reel sayılar kümesinde ($\mathbb{R}$) tanımlı olmayı dikkate almayarak, alt sınırların sadece tam sayı olması gerektiği gibi bir yanılıgıda oldukları söylenebilir.

Diğer yandan alt sınırları doğru bulanlar (68 kişi) arasında infimum eleman için öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar incelendiğinde, tablo 33'de görüldüğü gibi, **63** kişi infimumu doğru olarak belirlerken, **5** kişi infimumu hatalı bulmuştur. Bu 5 öğretmen adayı infimumu $\{-1\}$ olarak bulmuşlardır. Ancak, infimum elemanın eğer varsa tek olması, bu yüzden bir küme belirtmemesi gerekir.

Tablo 33 SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki alt sınır ile infimuma ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Alt sınırları doğru bulabilenler	İnfimumu doğru bulanlar	63	68	63	68
	İnfimumu hatalı bulanlar $\{-1\}$	5		5	
Alt sınırları doğru bulamayanlar	$\{-1\}$	11	32	11	32
	$(-\infty, -1)$	7		7	
	$[7, +\infty)$	3		3	
	$[-1, 7)$	1		1	
	$\{\dots -2, -1\}$	1		1	
	Boş küme	4		4	
	Yoktur	1		1	
	Cevapsız	4		4	

Bu noktada öğretmen adaylarının $A = [-1, 7)$ kümesinin alt sınırları ve infimumunu belirlemeye ilişkin zihinlerindeki imgeler aşağıdaki gibi düşünülebilir.

- ❖ Alt sınırlar, sadece kümeye ait elemanlardır.
- ❖ Alt sınırlar bir küme belirtmeyebilir.
- ❖ Alt sınırlar sadece kümeye ait olmayan elemanlardır.
- ❖ Adi sıralama bağıntısı altında, reel sayı aralığı şeklinde verilen kümelerde, alt sınırlar sadece tamsayılardan oluşan elemanlar kümesidir.
- ❖ İnfimum eleman bir küme belirtir.

Öğretmen adaylarının $A = [-1, 7)$ kümesinin üst sınırları ve supremumunu belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 34'de gösterilmiştir. Öncelikle öğretmen adaylarının üst sınırları belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde, öğretmen adaylarının %67'si (**67 kişi**) üst sınırlara $[7, +\infty)$ diyerek doğru olarak bulurlarken, %33'ü (**33 kişi**) üst sınırları hatalı olarak bulmuşlardır. $A = [-1, 7)$ kümesinin üst sınırları için hatalı olarak verilen yanıtlar ve bu yanıtları veren öğretmen adayı sayıları tabloda gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Üst sınırları $(-\infty, -1]$ olarak bulan öğretmen adaylarının üst sınırlarla alt sınırları karıştırdıkları söylenebilir. Üst sınırları 7 olarak bulan öğretmen adayları ile yoktur diyen öğretmen adaylarının ise üst sınırların bir küme oluşturması gerektiğinin farkında olmadıkları söylenebilir. Üst sınırları $(7, \infty)$ olarak bulan öğretmen adaylarının ise kümeye ait olmayan 7 elemanını üst sınırlara dahil etmeme yanlışlığında oldukları söylenebilir. Üst sınırları $\{6, 7, \dots\}$ olarak belirleyen öğretmen adayının ise kümenin reel sayılar kümesinde (IR) tanımlı olduğunu dikkate almayarak üst sınırların sadece tam sayılardan oluşması gerektiği yanlışlığında olduklarını düşünebiliriz.

Diğer yandan, üst sınırları doğru bulan öğretmen adayların supremum için verdikleri cevaplar incelendiğinde 62 kişi supremumu doğru olarak belirlerken, 5 kişi supremumu hatalı olarak bulmuştur. Supremumu hatalı olarak bulan bu öğretmen adaylarının 3'ü supremuma $\{7\}$ derken, 2 kişi supremum yoktur diye cevap vermiştir. Bu öğretmen adaylarının supremum mevcutsa tek olması gerektiği bu yüzden bir küme belirtmemesi gerektiği bilmedikleri söylenebilir.

Tablo 34 SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki üst sınır ile supremuma ait Kategoriler

Yanıtlar				f		%	
Üst sınırları doğru bulabilenler	Supremumu doğru bulabilenler		62		67	62	
	Supremumu doğru bulamayanlar	{7}	3	5		3	67
		Yoktur	2			2	
Üst sınırları doğru bulamayanlar	7		5		33	5	
	(7,∞)		7			7	
	(-∞,-1]		3			3	
	{6, 7,...}		1			1	
	Boş küme		7			7	
	Yoktur		5			5	
	Cevapsız		5			5	

Öğretmen adaylarının $A = [-1, 7)$ kümesinin üst sınırları ve supremumunu belirlemeye ilişkin kavram imgeleri aşağıdaki gibi olabilir.

- ❖ Üst sınırlar bir küme belirtmeyebilir
- ❖ Kümeye ait olmayan bir uç nokta elemanı üst sınırlar kümesine dahil olmaz
- ❖ Adi sıralama bağıntısı altında, reel sayı aralığı şeklinde verilen kümelerde, üst sınırlar sadece tamsayılardan oluşan elemanlar kümesidir.

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2'nin 2.sorusunda ayrıca öğretmen adaylarından $A = [-1, 7)$ kümesinin sınırlı olup olmaması sorulmuştur. Buna ilişkin öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar tablo 35'de gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %61'i (**61 kişi**) $A = [-1, 7)$ kümesinin alt ve üst sınırları mevcut olduğunu gerekçe göstererek sınırlı şeklinde doğru yanıt verirlerken, %20'si (**20 kişi**) sınırsız olarak hatalı cevap vermiştir. %19'u ise (**19 kişi**) cevap vermemiştir. Sınırsız diyen yani hatalı olarak cevap veren öğretmen adaylarının sundukları gerekçeler tablo 35'de gösterilmiştir. Bu yanıtlar üzerinde düşünüldüğünde;

2 öğretmen adayının sınırsızlığa gerekçe olarak verilen aralıkta sabit bir son elemanın olmamasını sunmaları, sınırlılık ve sınırsızlık kavramlarının yeterince anlaşılabilmesi ve bu kavramların sonluluk-sonsuzluk kavramı ile karıştırılması yanılıgısına düştükleri söylenebilir. 5 öğretmen adayı ise verilen aralıkta sonsuz tane reel sayı olmasını gerekçe göstererek bu kümeye sınırsız demişlerdir. Yine bu öğretmen adaylarının sonluluk-sonsuzluk kavramı ile sınırlılık-sınırsızlık kavramlarını karıştırdıkları söylenebilir. 9 öğretmen adayı ise alt ve üst sınırların sonsuza gittiğini düşünerek, $[-1, 7)$ sayı aralığının sınırsız olduğunu yanılıgısına düşmüşlerdir.

Tablo 35 SBKBT-2'nin 2. Sorusunun a şıkkındaki kümenin sınırlılığına ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Sınırlıdır, çünkü alt ve üst sınırlar mevcuttur.		61		61	
Sınırsızdır	Çünkü sabit bir son elemanı yoktur.	2	20	1	20
	Çünkü alt ve üst sınırlar sonsuza gidiyor.	9		9	
	Çünkü alt ve üst sınırlar mevcut değil.	4		4	
	Çünkü verilen aralıkta sonsuz tane reel sayı vardır.	5		5	
Cevapsız		19		19	

Tablo 35'te de görülebileceği gibi sayılarda adi sıralama bağıntısı altında $[-1,7)$ kümesinden yola çıkarak öğretmen adaylarının sınırsız kümeler hakkındaki hatalı olarak değerlendirilebilecek kavram imgeleri aşağıdaki gibi olabilir.

- ❖ Sabit bir son elemanı olmayan kümeler
- ❖ Alt ve üst sınırları sonsuza giden kümeler
- ❖ Verilen aralıkta sonsuz tane sayı içeren kümeler

Bu noktada reel sayılarda adi sıralama bağıntısı altında $[-1, 7)$ aralığının maksimum, minimum, maksimal, minimal, alt sınır, üst sınır, infimum ve supremumu ile alakalı olarak öğretmen Ö11 ve Ö13 takma adıyla isimlendirdiğimiz öğretmen adayı ile yapılan görüşmelerden örnekler aşağıda sunulmuştur.

Ö11 ile yapılan görüşme:

A: “Sizden $[-1, 7)$ kümesinin maksimum, minimum, maksimal, minimal, alt sınır, üst sınır, infimum ve supremumunu belirlemenizi istemiştik. Bu noktada yazılı cevabınızda, maksimum elemana yoktur ve minimum elemana da -1 demişsiniz. Bunu neye dayandırarak dediniz?”

Ö11: “Küme -1’den 7’ye gidiyor. 7 dahil değil yani 6,999... devreden şeklinde gider. Yani maksimum elemanını bilemeyiz. -1 ise verilen aralığa dahil olduğu için en küçük elemandır diye düşündüm.”

A: “Yine yazılı cevabınızda, bu kümenin maksimal elemanlarına boş küme minimal elemanlara da $\{-1\}$ demişsiniz. Burada maksimal ve minimal elemanlar ile maksimum ve minimum elemanların farkını sorsam sizce ne diyebilirsiniz?”

Ö11: “Maksimal ve minimal elemanlar bir küme içinde yazılırlar, maksimum ve minimum elemanlar ise küme belirtmezler.”

A: “Peki yine burada bu aralığın alt sınırları için $(-\infty, -1]$ ve üst sınırlar için $(7, \infty)$ demişsiniz. Sizce mesela 7 dahil olmalı mı üst sınırlara?”

Ö11: “Bence dahil olmayacak. Çünkü verilen kümede de dahil değil.”

A: “Peki üst sınır olması için bir elemanın verilen kümeye de dahil olması gerekiyor mu yani?”

Ö11: “Evet gerekiyor bence.”

Ö13 ile yapılan görüşme:

A: “Yazılı cevabınızda $[-1, 7)$ kümesinin maksimum elemanı yok ve minimum elemanı -1 demiştiniz. Bunu neye dayandırarak belirlediniz?”

Ö13: “Evet en büyük elemanı bulamıyoruz burada 7 dahil değil çünkü ama -1 en küçük eleman o yüzden minimum olur.”

A: “Peki maksimal eleman olarak $[-1, 7)$ demişsiniz. Bunu neye dayandırarak dediniz?”

Ö13: “Kıyaslanabildiklerinin en büyüğü olarak geçiyor maksimal eleman, çünkü her eleman kendisiyle kıyaslanabiliyor ve mesela 2 1 ile kıyaslanıyor 2’yi alıyoruz. 3, 1 ve 2 ile kıyaslanıyor 3’ü alıyoruz. Böylece maksimal elemanlar $[-1, 7)$ oluyor.

A: “Mesela sizin yazdığınıza göre, 6 elemanı maksimal elemanlara dahil oluyor? Bu uygun mu sizce?”

Ö13: “Evet, 6’nın kıyaslanabildiği elemanlar -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5... ve onlar arasında en büyük sonuçta.”

Yukarıdaki görüşme diyalogları incelendiğinde, Ö11 adlı öğretmen adayının reel sayı aralığı şeklinde verilen kümelerde, “kümeyle ait olmayan bir uç nokta elemanının da üst sınıra dahil edilmeyeceği” şeklinde hatalı bir kavram imgesine sahip olduğu söylenebilir. Bundan dolayı üst sınırı bulmada güçlük yaşamaktadır. Ö13 isimli öğretmen adayının reel sayı aralığı şeklinde verilen kümede maksimal elemana ilişkin cevabında görüldüğü gibi maksimal elemanın kavram tanımını hatalı şekilde yorumladığı görülmektedir.

4.3.2.b. SBKBT-2’nin 2. Sorusunun b şıkkına ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2’nin 2.sorusunun b şıkkı olan “IR reel sayılar kümesi üzerinde bilinen adi sıralama bağıntısına göre, $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin maksimum ve minimum elemanlarını, maksimal ve minimal elemanlarını, alt ve üst sınırları ile supremum ve infimumunu bulunuz.” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı veriler analiz edilmiştir. Analiz sonuçları tablo 36, tablo 37, tablo 38, tablo 39 ve tablo 40’da gösterilmiştir.

Öğretmen adaylarının $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin maksimum elemanlarını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 36’da gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %50’si (**50 kişi**) maksimum elemana 2 diyerek, doğru cevap verirlerken, yine **50 kişi** (%50) maksimum elemanı hatalı olarak bulmuştur.

Maksimum elemanı hatalı bulan 50 kişinin verdikleri cevaplar tabloda gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Maksimum elemanı $3/2$ olarak bulan 1 öğretmen adayının $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{2n+1}$ limit durumunun sonucu olan $3/2$ 'yi maksimum eleman olarak düşünerek, maksimum elemanın eğer varsa kümeye ait olması gerektiği dikkate almama yanılığısına düştüğü söylenebilir. Ayrıca bu öğretmen adayı, n 'in doğal sayı olmasını göz ardı ederek, limit işleminin sonucunun kümeye ait bir elemanmış gibi düşünme yanılığısına düşmüş olabilir. Maksimum elemanı $\{e\}$ ve $\{2\}$ olarak bulan öğretmen adaylarının ise eğer varsa maksimum elemanın tek olması gerektiği ve bu yüzden küme belirtmemesi gerektiğinin farkında olmadıkları söylenebilir. Bu noktada maksimum elemanı $\{e\}$ olarak bulan 1 öğretmen adayının $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{2n+1}$ limitini e olarak hatalı bulduğu tespit edilmiştir. Yine bu öğretmen adayının maksimum elemanın kümeye ait olması gerektiğinin farkında olmadığı düşünülebilir. Maksimum eleman yoktur diye cevap veren 36 kişinin ise maksimum elemanlar minimum elemanı karıştırdıkları düşünülebilir. Bunun sebebi olarak, limit durumu içeren bu kümede, bu öğretmen adaylarının reel sayılarda verilen kümenin elemanlarının artan sırada mı azalan sırada mı olduğunu dikkate almadıkları tespit edilmiştir. Bu durum ise maksimum elemanın yoktur olarak belirlenmesine yol açmıştır. 8 öğretmen adayı ise maksimum elemanı cevapsız bırakmışlardır.

Tablo 36 SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şikkındaki maksimum elemanlara ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Maksimum elemanları doğru bulabilenler		50		50	
Maksimum elemanları doğru bulamayanlar	$3/2$	1	50	1	50
	$\{e\}$	1		1	
	$30/19$	1		1	
	$\{2\}$	3		3	
	Yoktur	36		36	
	Cevapsız	8		8	

Bu noktada yukarıdaki gibi reel sayılarda adi sıralama altında, limit durumu içeren kümelerde maksimum elemanı belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerindeki imgeler şu şekilde sıralanabilir;

- ❖ Limit sonucu maksimum elemandır (limit sonucu kümeye aittir).
- ❖ Maksimum eleman kümeye ait olmayabilir.
- ❖ Maksimum eleman bir küme belirtir.

Öğretmen adaylarının $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin minimum elemanını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 50’de gösterilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının % 46’sı (**46 kişi**) minimum elemana yoktur diyerek doğru cevap verirlerken, %54’ü (**54 kişi**) minimum elemanı hatalı olarak bulmuşlardır. Minimum elemanı hatalı bulan bu 54 kişinin verdikleri cevaplar tablo 37’de gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Minimum elemanı 2 olarak bulan öğretmen adaylarının (**34 kişi**) maksimum elemanla minimum elemanı karıştırdıkları söylenebilir. Bu öğretmen adaylarının verilen kümenin elemanlarının reel sayılarda artan ya da azalan sırada mı olduğunu dikkate almadıkları tespit edilmiştir. Bu durum minimum elemanın maksimum eleman olarak düşünülmesine neden olmuş olabilir. Minimum elemanı $\{2\}$ ya da $\{0\}$ olarak bulan öğretmen adaylarının ise, minimum elemanın eğer varsa tek olması gerektiği bu yüzden bir küme belirtmemesi gerektiğinin farkında olmadıkları söylenebilir. Minimum elemanı $3/2$ olarak bulan 5 öğretmen adayının $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{2n+1}$ limit durumunun sonucu olan $3/2$ ’yi minimum eleman olarak düşünerek, minimum elemanın eğer varsa kümeye ait olması gerektiği dikkate almama yanılığısına düştüğü söylenebilir. Yani bu öğretmen adayları bu limit işleminin sonucunun kümeye ait bir elemanmış gibi düşünme yanılığısına düşmüşlerdir.

Tablo 37 SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şıkkındaki minimum elemanlara ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Minimum elemanları doğru bulabilenler		46		46	
Minimum elemanları doğru bulamayanlar	1	2	54	2	54
	3/2	5		5	
	2	34		34	
	{0}	2		2	
	{2}	2		2	
	Cevapsız	9		9	

Bu noktada yukarıdaki gibi limit durumu içeren kümelerde minimum elemanı belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerindeki imgeler şu şekilde sıralanabilir;

- ❖ Limit sonucu minimum elemandır (limit sonucu kümeye ait bir elemandır)
- ❖ Minimum eleman kümeye ait olmayabilir
- ❖ Minimum eleman bir küme belirtir.

Öğretmen adaylarının $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin maksimal elemanlarını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar ise tablo 38'de gösterilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının %39'u (**39 kişi**) maksimal elemanı {2} olarak belirleyerek doğru cevap verirlerken, %61'i (**61 kişi**) ise maksimal elemanı hatalı bulmuşlardır. Hatalı olarak bulan bu 61 kişinin verdikleri yanıtlar tablo 38'de gösterilmiştir. Bu yanıtlar üzerinde düşünüldüğünde;

Maksimal elemanı $[2, \infty)$ olarak bulan öğretmen adaylarının maksimal elemanlarla bu kümenin üst sınırlarını karıştırdıkları söylenebilir. Maksimal elemanları $\{3/2\}$ ya da $[3/2, \infty)$ olarak bulan öğretmen adaylarının $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{2n+1}$ limit işleminin sonucu olan $3/2$ 'yi maksimal eleman olarak düşünerek, maksimal elemanların eğer varsa kümeye ait olması gerektiğini dikkate almama yanılgısına

düşükleri söylenebilir. Bu durum daha önce de bahsedildiği gibi öğretmen adaylarının limit işleminin sonucunun kümeye ait mi değil mi ikilemine düşmelerinden de kaynaklanabilir. Maksimal elemanları 2 olarak bulan ya da yoktur diyen öğretmen adaylarının ise maksimal elemanların küme belirtmesi gerektiğini yani bir başka deyişle küme olarak yazılması gerektiğini bilmedikleri söylenebilir. Maksimal elemanlara boş küme diyen **24** öğretmen adayının bu cevabı vermelerine maksimum ve minimum elemanlar bulunurken kümenin elemanlarının artan ya da azalan sırada olup olmadığını göz ardı etme yanılgısı neden olmuş olabilir. Tablo 38’de de görülebileceği gibi $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin maksimal elemanlarını cevapsız bırakan **9** öğretmen adayı tespit edilmiştir.

Tablo 38 SBKBT-2’nin 2. Sorusunun b şıkkındaki maksimal elemanlara ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Maksimal elemanları doğru bulabilenler		39		39	
Maksimal elemanları doğru bulamayanlar	2	7	61	7	61
	{3/2}	2		2	
	[2,∞)	9		9	
	[3/2, ∞)	2		2	
	Boş küme	24		24	
	Yoktur	8		8	
	Cevapsız	9		9	

Bu noktada reel sayılarda adi sıralama altında yukarıdaki gibi limit durumu içeren kümelerde maksimal elemanı belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerindeki hatalı olarak değerlendirebileceğimiz imgeler şu şekilde sıralanabilir;

- ❖ Maksimal elemanı üst sınır olarak düşünme
- ❖ Limit sonucunu maksimal eleman olarak düşünme
- ❖ Maksimal eleman kümeye ait olmayabilir.
- ❖ Maksimal eleman bir küme belirtmeyebilir.

Öğretmen adaylarının $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin minimal elemanlarını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 39’da gösterilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının **%35’i (35 kişi)** minimal elemanlara boş küme ($\emptyset$) diyerek doğru cevap verirlerken, **% 65’i (65 kişi)** ise hatalı olarak bulmuşlardır. Hatalı olarak verilen bu cevaplar tablo 39’da gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Minimal elemanları 2 olarak belirleyen ve minimal eleman yoktur diyen öğretmen adaylarının minimal elemanların eğer mevcutsa küme işareti içinde yazılması gerektiğinin başka bir deyişle küme belirtmesi gerektiğinin farkında olmadıklarını söyleyebiliriz. Minimal elemanları $\{2\}$ olarak belirleyen öğretmen adaylarının ise verilen kümenin maksimal elemanları ile minimal elemanlarını karıştırdıkları tespit edilmiştir. Bu durum daha önce de belirtildiği gibi öğretmen adayları tarafından kümenin elemanlarının reel sayılarda artan mı azalan mı sırada olduğunun göz ardı edilmesinden kaynaklanmaktadır. Minimal elemanlara $[2, \infty)$, $\{3/2\}$ veya $(-\infty, 3/2]$ olarak belirleyen öğretmen adaylarının minimal elemanların eğer varsa kümeye ait olması gerektiğini bilmedikleri ya da göz ardı ettikleri söylenebilir. Yine burada minimal elemanlara $[2, \infty)$ veya $(-\infty, 3/2]$ diyen öğretmen adaylarının minimal elemanlarla bu kümenin sırasıyla alt sınırları ve üst sınırlarını birbirleriyle karıştırdıkları söylenebilir.

Tablo 39 SBKBT-2’nin 2. Sorusunun b şıkkındaki minimal elemanlara ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Minimal elemanları doğru bulabilenler		35		35	
Minimal elemanları hatalı bulanlar	2	4	65	4	65
	$\{2\}$	30		30	
	$[2, \infty)$	5		5	
	$\{3/2\}$	4		4	
	$(-\infty, 3/2]$	5		5	
	Yoktur	4		4	
	Cevapsız	13		13	

Bu noktada yukarıdaki gibi limit durumu içeren kümelerde minimal elemanı belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerindeki imgeler şu şekilde sıralanabilir;

- ❖ Minimal eleman küme belirtmeyebilir
- ❖ Minimal eleman kümeye ait olmayabilir
- ❖ Minimal elemanı alt sınırlar olarak algılama
- ❖ Limit durumunun sonucunu minimal eleman olarak düşünme

Öğretmen adaylarının $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin alt sınırları ile infimum elemanını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 40’da gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının % 21’i (**21 kişi**) bu kümenin alt sınırlarına $(-\infty, 3/2]$ diyerek doğru olarak bulabilirken, %79’u (**79 kişi**) ise alt sınırları hatalı olarak bulmuşlardır. Buna bağlı olarak alt sınırları doğru olarak bulabilen **21** kişi arasından bu kümenin infimum elemanını doğru olarak bulabilen **17** kişi iken, **4** kişi de infimum elemanı hatalı bulmuşlardır. Hem alt sınırlar için hem de infimum eleman için hatalı olarak verilen cevaplar tablo 40’da gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Alt sınırları “3/2” veya “e” veya “yoktur” olarak belirleyen öğretmen adaylarının alt sınırların bir küme oluşturması gerektiğinin yani küme işareti içinde yazılması gerektiğinin farkında olmadıkları söylenebilir. Diğer yandan alt sınırlara $(-\infty, 3/2)$ diyen öğretmen adaylarının $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{2n+1}$ limit durumunun sonucu olan 3/2’yi alt sınırlara dahil etmeme yanılgısına düştükleri söylenebilir. Bu durumun sebebi, limit durumunu küme ait olmayan bir eleman olarak ele alınması ve kümeye ait olmayan bir elemanın alt sınırlara dahil edilemeyeceği düşüncesi olabilir. Halbuki alt sınırların tanımlanan kümeye ait olması gerektiği gibi bir zorunluluk yoktur. Verilen kümenin alt sınırlarını $(-\infty, 2]$ olarak bulan öğretmen adaylarının ise bu cevabı büyük ölçüde, $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin minimum elemanının hatalı olarak bulunmasından kaynaklanmaktadır.

Alt sınırları doğru olarak bulan öğretmen adayları içerisinde infimum elemanı hatalı bulan 4 kişi olduğu tablo 40’da görülmektedir. Bu kişilerin cevapları üzerinde düşünüldüğünde; infimuma $\{3/2\}$ diyen öğretmen adaylarının eğer varsa infimum elemanın tek olduğu ve bu yüzden küme belirtmemesi gerektiğini göz ardı etme gibi bir yanılgıda oldukları söylenebilir.

Tablo 40 SBKBT-2’nin 2. Sorusunun b şıkkındaki alt sınır ve infimuma ait Kategoriler

Yanıtlar				f			%		
Alt sınırları doğru bulabilenler	İnfimumu doğru bulabilenler			17		21	17		21
	İnfimumu hatalı bulanlar	{3/2}	3	4	3		4		
		Yoktur	1		1				
Alt sınırları doğru bulamayanlar	3/2			4		79	4		79
	e			1			1		
	{1}			9			9		
	{2}			4			4		
	(-∞,3/2)			6			6		
	(-∞,2]			28			28		
	Boş küme			12			12		
	Yoktur			3			3		
	Cevapsız			12			12		

Bu noktada yukarıdaki gibi limit durumu içeren kümelerde alt sınırları ve buna bağlı olarak infimum elemanı belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerindeki imgeler şu şekilde sıralanabilir;

- ❖ Alt sınırlar bir küme belirtmeyebilir.
- ❖ Alt sınırlar, limit sonucunu içermez.
- ❖ Alt sınırlar, verilen kümeye ait olmayan elemanlardır.
- ❖ İnfimum eleman, bir küme belirtir.
- ❖ Limit durumunun sonucu alt sınırdır.

Öğretmen adaylarının $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin üst sınırları ile supremum elemanını belirlemeye ilişkin vermiş oldukları yanıtlar, tablo 41’de gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %32’si (**32 kişi**) üst sınırlara $[2, +\infty)$ diyerek doğru cevap verirlerken, %68’si (**68 kişi**) üst sınırları hatalı olarak bulmuşlardır. Buna bağlı olarak üst sınırları doğru olarak bulabilen 32 kişi arasından bu kümenin supremum elemanını doğru olarak bulabilen **28** kişi iken, **4** kişi de supremum elemanı hatalı bulmuştur. Hem üst sınırlar için hem de supremum eleman için hatalı olarak verilen cevaplar tablo 41’de gösterilmiştir. Bu cevaplar üzerinde düşünüldüğünde;

Üst sınırları $[3/2, +\infty)$ olarak bulan öğretmen adaylarının $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{2n+1}$ limit durumunun sonucu olan $3/2$ sayısını kümenin en büyük elemanı gibi değerlendirerek üst sınırlara dahil etmesi yanılışına düştükleri söylenebilir. Diğer yandan üst sınırları $[3, +\infty)$ ve $(2, +\infty)$ olarak bulan öğretmen adaylarının ise 2 elemanını üst sınırlara dahil etmedikleri gözlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının kümenin maksimum elemanı olan 2’yi üst sınırlara dahil etmemesinin nedeni, üst sınırların kümeden hariç, kümeye ait olmayan elemanlar gibi düşünmeleri olabilir. Diğer yandan üst sınırlara 2 diyen ve üst sınırlar yoktur olarak cevap veren öğretmen adaylarının ise, üst sınırların bir küme belirtmesi gerektiğini göz ardı ettikleri söylenebilir. Üst sınırları $\{2\}$ olarak belirleyen öğretmen adaylarının ise, bu kümenin maksimal elemanı ile üst sınırlarını karıştırdıkları söylenebilir. Tablo 41’den de görülebileceği gibi **11** öğretmen adayı üst sınırları cevapsız olarak bırakmışlardır.

Üst sınırları doğru olarak bulan öğretmen adayları içerisinde (**32 kişi**) infimum elemanı hatalı bulan **4** kişi olduğu tablo 41’de görülmektedir. Bu kişilerin cevapları üzerinde düşünüldüğünde; supremumu $\{2\}$ olarak bulan öğretmen adaylarının, eğer varsa supremumun tek olduğunu bu yüzden bir küme belirtmemesi gerektiğini bilmedikleri düşünülebilir. Öte yandan üst sınırları doğru olarak belirlediği halde tablodan da görülebileceği gibi supremum yoktur diyen **1** öğretmen adayı mevcuttur. Bu öğretmen adayının yazılı olarak verdiği cevabında “**üst sınırlar sonsuza gittiği için supremumun yoktur**” şeklinde bir ifadenin yer aldığı tespit edilmiştir.

Tablo 41 SBKBT-2'nin 2. Sorusunun b şıkkındaki üst sınır ve supremuma ait Kategoriler

Yanıtlar				f			%		
Üst sınırları doğru bulabilenler	Supremumu doğru bulabilenler			28		32	28		32
	Supremumu hatalı bulanlar	{2}	3	4	3		4		
		Yoktur	1		1				
Üst sınırları hatalı bulanlar	2			5		68	5		68
	{2}			9			9		
	[e,+∞)			4			4		
	[3,∞)			1			1		
	[3/2,∞)			19			19		
	(2,∞)			4			4		
	Boş küme			10			10		
	Yoktur			5			5		
	Cevapsız			11			11		

Bu noktada yukarıdaki gibi reel sayılarda adi sıralama bağıntısı altında, limit durumu içeren kümelerde üst sınırları ve buna bağlı olarak supremum elemanı belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının zihinlerindeki imgeler şu şekilde sıralanabilir;

- ❖ Üst sınırlar verilen kümeye ait olmayan elemanlardır
- ❖ Üst sınırlar bir küme içinde yazılmazlar
- ❖ Üst sınırları maksimal elemanlar olarak düşünme
- ❖ Limit durumunun sonucunu üst sınır olarak düşünme
- ❖ Supremum eleman küme içinde yazılır.
- ❖ Üst sınırlar sonsuza giderse, kümenin supremum elemanı yoktur.

Bu noktada sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2'nin 2.sorusunun b şıkkıyla ilgili Ö12 şeklinde isimlendirilen bir öğretmen adaylarıyla yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

A: “Sizden reel sayılarda adi sıralama altında $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin maksimum, minimum, maksimal, minimal, alt sınır, üst sınır, supremum ve infimum elemanları belirlemenizi istemiştik. Yazılı cevabınızda maksimum eleman 2 ve minimum eleman yok demişsiniz. Bunun sebebini öğrenebilir miyim?”

Ö12: “1’den itibaren sayı verdim. İlk eleman 2 çıkıyor ve elemanlar azalarak gidiyor. Bu yüzden maksimum elemana 2 dedim. Minimum elemana da yok dedim, kümenin sonunu bilemiyorum çünkü.”

A: “Peki maksimal ve minimal elemanlara sırasıyla $\{2\}$ ve boş küme demişsiniz. Bunu sebebini açıklayabilir misiniz?”

Ö12: “Burada yine maksimal eleman ve minimal elemanlar bir küme belirtir ve kümede kıyaslanabildiklerinin en büyüğü olarak düşünürsek, $\{2\}$ ve boş küme olur dedim.”

A: “Peki yazılı cevabınızda A’nın üst sınırlarına $(2, \infty)$ ve alt sınırlarına $\{1\}$ demişsiniz. Bunu neye göre dediniz? Mesela burada 2 dahil olmalı mı üst sınırlara?”

Ö12: “Tam olarak emin değilim ama dahil olmalı gibi duruyor. Alt sınırlar için de $n \in \mathbb{N}$ demiş kümeyi tanımlarken. Burada en büyük eleman 2 ve 2’den küçük olan 1 elemanı var o yüzden alt sınıra $\{1\}$ dedim.”

A: “Peki mesela burada limit durumunu dikkate alabilir miyiz? Mesela yazılı cevabınızda limit sonucu $3/2$ demişsiniz. Limit durumunu dikkate alırsak burada hangi elemanlar değişebilir?”

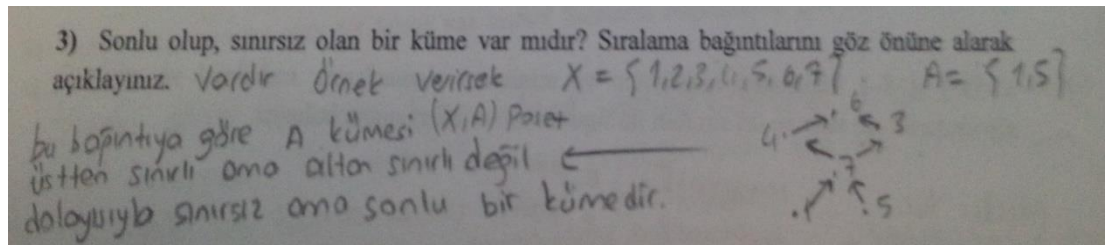
Ö12: “Alt sınırlar değişebilir diye düşünüyorum. Mesela limit durumunu düşünürsek alt sınır $(3/2, 2)$ olabilir. Ama tam da emin değilim bu konuda.”

Yukarıdaki görüşme diyaloguna bakıldığında, Ö12 adlı öğretmen adayının limit durumu içeren kümede, alt ve üst sınırları bulmada güçlük yaşadığı söylenebilir. Öğretmen adayının kümenin limit durumunu dikkate almadığı görülmektedir.

4.3.3. SBKBT-2'nin 3. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2'nin 3.sorusu olan “Sonlu olup, sınırsız olan bir küme var mıdır? Sıralama bağıntılarını göz önüne alarak açıklayınız” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı veriler analiz edilmiştir. Analiz sonuçları tablo 42’de gösterilmiştir. Buna göre, öğretmen adaylarının %52’si **(52 kişi)** böyle bir kümenin olabileceğini doğru olarak açıklayabilirken, %48’i **(48 kişi)** açıklayamamış ya da doğru bir açıklama getirememiştir. Soruya uygun bir izah getiren 52 kişiden **28’i** kendi belirledikleri bir küme üzerinde uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak sonlu ve sınırsız bir küme örneği gösterirken, **24** öğretmen adayı ise sözel olarak uygun bir açıklama getirerek böyle bir kümenin mevcut olabileceğini söylemiştir. Aşağıda uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak cevap veren 28 öğretmen adayından birinin cevabı ile sözel olarak uygun bir açıklama getiren bir öğretmen adayının cevabı örnek olarak sunulmuştur.

A.Ç:



N.G: “Vardır, uygun bir sıralama bağıntısına göre bir poşetten seçilen bir alt kümenin elemanları bellidir, küme sonludur. Ancak sıralama bağıntısına göre kümenin hem alt hem de üst sınırı olmayabilir. Bu durumda küme sınırsız olur.”

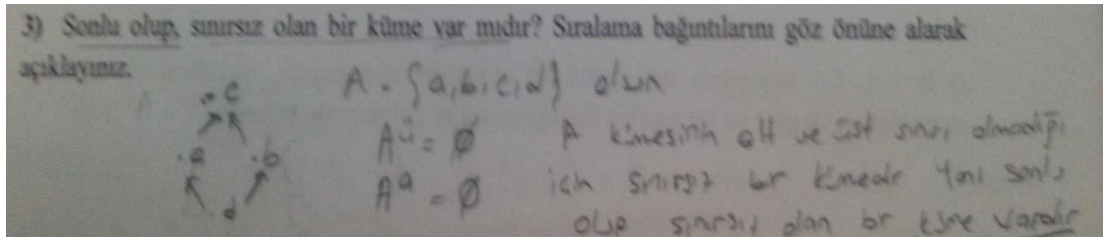
Soruya uygun bir açıklama getiremeyen ya da cevap vermeyen **48** öğretmen adayının verdikleri cevaplar incelendiğinde ise, tablo 42’de görüldüğü gibi, daha önce de açıklanan sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi dediğimiz bu kavramları birbiriyle karıştırma ya da birbirine denk kavramlar olarak düşünme yanılığısına düşen **30** öğretmen adayı tespit edilmiştir. Bu ikilime düşen öğretmen adaylarından birinin verdiği cevap örnek teşkil etmesi açısından aşağıda sunulmuştur.

H.T: “Vardır. Reel sayılar kümesi üzerinde bilinen adi sıralama bağıntısını düşünerek (1,10) kümesi sonlu olup, sınırsızdır.”

Görüldüğü üzere bu öğretmen adayının cevabında bir kümenin sonsuz eleman içermesi, öğretmen adayı tarafından sınırsızlık olarak algılanmıştır.

Tablo 42 incelenmeye devam edildiğinde soruya uygun bir açıklama getiremeyen **48** öğretmen adayından **6** tanesinin cevaplarında sonlu ve sınırsız olarak iddia edilen kümelerin aslında sonlu ve sınırlı olduğu tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayları tanımladıkları sıralama bağıntısına göre alt ve üst sınırları hatalı olarak buldukları için böyle bir hataya düştükleri tespit edilmiştir. Bu hataya düşen öğretmen adaylarından birinin cevabı örnek teşkil etmesi açısından aşağıda verilmiştir.

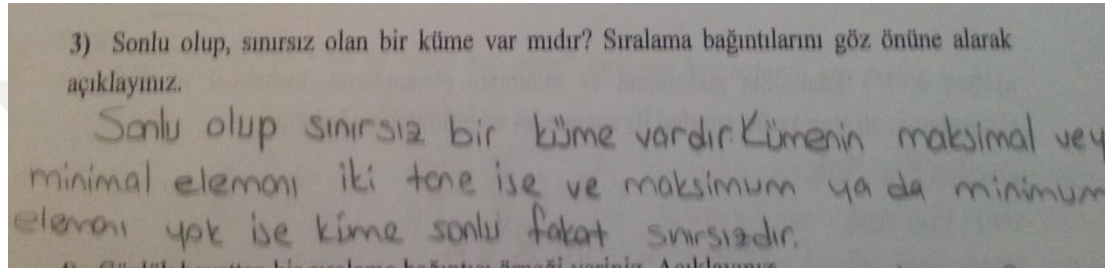
H.Ş:



Görüldüğü gibi öğretmen adayının verdiği cevapta örnek olarak verdiği kümenin hem alt hem üst sınırı aslında boş küme değildir yani mevcuttur. Bu yüzden gerçekte öğretmen adayı sonlu ve sınırlı bir küme örneği vermiştir.

Tablo 42’de de görülebileceği gibi soruya uygun bir cevap veremeyen 48 öğretmen adayından 1 öğretmen adayının verdiği cevap üzerinden bir kümede eğer maksimal ve minimal eleman 2 tane ise ve maksimum ya da minimum eleman yok ise o kümenin sonlu ve sınırsız olacağına dair yanlış bir kavram imgesi taşıdığı tespit edilmiştir. Çünkü sıralama bağıntılarında sonlu bir kümenin sınırlı olup olmadığı belirleyen maksimum, minimum, maksimal ya da minimal eleman değil, alt ve üst sınır elemanlardır. Yapılan bu genellemenin matematiksel açıdan hatalı olduğu söylenebilir. Diğer yandan bu soruyu 11 öğretmen adayı cevapsız bırakmıştır.

B.U:



Tablo 42 SBKBT-2’nin 3. Sorusuna ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Doğru Şekilde Açıklayabilenler	Uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayıp sonlu ve sınırsız bir küme örneği verebilenler	28	52	28	52
	Sözel olarak böyle bir kümeyi tarif edenler	24		24	
Açıklayamayanlar	Sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemi	30	48	30	48
	Tanımlanan kümenin sonlu fakat sınırlı olması (alt ve üst sınırların hatalı bulunması)	6		6	
	Cevapsız	11		12	
	Maksimal ve minimal eleman 2 tane ve maksimum ya da minimum eleman yok ise küme sonlu fakat sınırsız olur	1		1	

Bu noktada öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden bir örnek aşağıda sunulmuştur.

A: “Peki sonlu olup, sınırsız olan bir küme var mıdır? Sıralama bağıntılarını dikkate alarak nasıl açıklarsınız? Mesela yazılı cevabınızda buna örnek olarak (1,3) demişsiniz.”

Ö14: “ Yani 1 ile 3 ikisi arasında, belli bir sonu var, sonlu yani ancak 1 ve 3 arasında birçok eleman var o yüzden sınırsız diyoruz.

A: “Peki sıralama bağıntılarını göz önünde bulundurursan yani bir sıralama bağıntısı tanımlandığını düşünürsen, bu konuda neler söyleyebilirsin?

Ö14: “Yani bilmiyorum şu an bir şey söyleyemiyorum.”

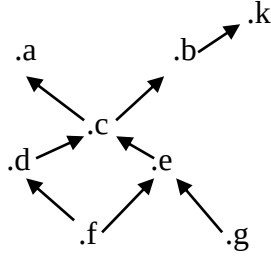
Bu görüşme diyaloguna bakıldığında, öğretmen adayının kümelerde sınırlı-sınırsızlığı sonluluk-sonsuzluk ile karıştırdığı görülmekte ve sınırsızlığı sıralama bağıntıları ile ilişkilendirmekte güçlük yaşamaktadır.

4.3.4. SBKBT-2’nin 4. Sorusuna ait bulgular

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2’nin (SBKBT) 4.sorusu olan “ $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, k \}$ kümesinde öyle bir sıralama bağıntısı tanımlayınız ki $X = \{ d, e, f, g \}$ kümesinin üst sınırı varken alt sınırı olmasın, supremumu varken infimumu olmasın, maksimum ve minimum elemanı olmasın, iki tane maksimal elemanı olsun?” sorusuna ilişkin öğretmen adaylarından toplanan yazılı veriler analiz edilmiştir. Analiz sonuçları tablo 43’de gösterilmiştir.

Öncelikle, örnek teşkil etmesi açısından soruda verilen koşulların tümünü sağlayacak bir sıralama bağıntısı tanımlamak yerinde olabilir. Aşağıda X kümesinin üst sınırı varken alt sınırı olmamasını, supremumu varken infimumun mevcut

olmamasını ve maksimum ve minimum elemanın olmayıp, iki tane maksimal elemanın olmasını sağlayan bir sıralama bağıntısı örneği verilmiştir.



Yanda verilen sıralama bağıntısına göre, $X = \{d, e, f, g\}$ kümesi için;

$X^{\bar{U}} = \{c, a, b, k\}$ ve $\sup X = c$

$X^A = \{ \}$ ve $\inf X = \{ \}$

Max $X =$ yok ve min $X =$ yok ve maximal $X = \{d, e\}$ olur.

Tablo 43'e göre, öğretmen adaylarının %42'si (**42 kişi**) soruda verilen koşulların tümüne uyan bir sıralama bağıntısı tanımlayabilirken, %58'i (**58 kişi**) verilen kriterlere uyan uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayamamış yani yazamamıştır. Bu **58** öğretmen adayının uygun bir sıralama yazamamaları, cevaplarında vermiş oldukları sıralama bağıntısının bazı eksikliklerine göre kategorize edilmeye çalışılmıştır. Tablo 43'de de görülebileceği üzere soruda verilen koşulların aksine öğretmen adaylarından **4 kişi** X kümesinde maksimum eleman mevcut olacak şekilde bir sıralama bağıntısı tanımlarken, **5 kişi** X kümesinde ikiden fazla sayıda maksimal elemanın mevcut olmasına neden olan bir sıralama bağıntısı tanımlamıştır. **10** öğretmen adayı ise A kümesinin bazı elemanlarını tanımladıkları bağıntıya dahil etmeme hatasına düşmüşlerdir. Ancak soruda A kümesi üzerinde bir bağıntı tanımlanması istenmiştir. Diğer yandan **3** öğretmen adayı, X kümesinin alt sınırı ve infimum elemanı mevcut olacak şekilde bir bağıntı tanımlamışlardır. **6** öğretmen adayının ise tanımladıkları bağıntılara göre, X kümesinin üst sınırı varken, supremum elemanın olamayacağı tespit edilmiştir. Bunun yanında **16** öğretmen adayı X kümesinin hem üst sınırı hem de supremumunun olmamasına yol açan bir bağıntı tanımlayarak soruda istenen koşullara uyamamıştır. Son olarak tablo 43'de de gösterildiği gibi **14** öğretmen adayının cevapları incelendiğinde, bunların bir kısmının soruya vermedikleri bir kısmının ise tanımladıkları bağıntıların aslında yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlamayarak bir sıralama bağıntısı olmadığı ortaya çıkarılmıştır. Bu yüzden bu cevaplar, diğer kategorisine atılmıştır.

Bu soru, öğretmen adaylarının maksimum, minimum, maksimal, alt sınır, üst sınır, supremum ve infimum gibi kavramların tümünü düşünmelerini istediği ve aynı zamanda bir bağıntı inşa etmelerini gerektirdiği için zorluk seviyesi yüksek bir soru olarak değerlendirilebilir. Verilen cevapların sınıflandırılmasından da görülebileceği gibi öğretmen adaylarının bu kavramları tam olarak anlamada ve bağıntı oluşturmada güçlükler yaşadıkları söylenebilir.

Bu soruda üzerinde durulması gereken başka bir nokta da katılımcıların tanımlamış oldukları sıralama bağıntılarının tümünün diyagram formunda olduğu yani öğretmen adaylarının bu soru özelinde sıralı ikililer formunda sıralama bağıntısı yazmamış olmalarıdır. Bunun sebebi olarak, soruda istenen şartların sayıca fazla olmasından dolayı, öğretmen adaylarının yazım kolaylığı açısından sıralama bağıntılarının diyagram formunu tercih etmiş olması olabilir.

Tablo 43 SBKBT-2'nin 4. Sorusuna ait Kategoriler

Yanıtlar		f		%	
Koşullara uygun bir bağıntı tanımlayabilenler		42		42	
Koşullara uygun bir bağıntı tanımlayamayanlar	Maksimum mevcut olacak şekilde bir bağıntı tanımlayanlar	4	58	4	58
	2'den fazla maksimal eleman olacak şekilde bir bağıntı tanımlayanlar	5		5	
	A kümenin bazı elemanlarını bağıntıya dahil etmeyenler	10		10	
	Alt sınırı ve infimum mevcut olacak şekilde bir bağıntı tanımlayanlar	3		3	
	Üst sınırı olup, supremumu olmayacak şekilde bir bağıntı tanımlayanlar	6		6	
	Üst sınırı ve supremumu olmayacak şekilde bir bağıntı tanımlayanlar	16		16	
	Alakasız veya cevapsız	14		14	

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde, önceki bölümde sunulmuş olan bulgular temel alınarak, öğretmen adaylarının sıralama kavramına yönelik informal bilgilerinin formal bilgiye dönüşümünde yaşadıkları güçlükler, sıralama bağıntısı konusu ile karşılaşmalarından önce ve sonra sıralama kavramı bilgi testindeki sorulara vermiş oldukları cevaplar üzerinden tartışılmıştır. Bununla birlikte bu bölümde, öğretmen adaylarının sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1 ve sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2'deki sorulara vermiş oldukları yanıtlardan ortaya çıkarılmış kategoriler üzerinden sıralama bağıntısı konusundaki daha ileri düzey kavramlarda yaşadıkları güçlükler hakkında sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir. Buna paralel olarak da çeşitli öneriler sunulmuştur.

5.1. Sonuç ve tartışma

5.1.1. SKBT'ye Ait Bulgulara İlişkin Sonuç ve Tartışma

Bu bölümde bölüm 4.1, 4.2 ve 4.3'de sunulmuş olan, öğretmen adaylarının sıralama kavramına ilişkin informal bilgiden formal bilgiye geçişlerini incelemek amacıyla uygulanan sıralama kavramı bilgi testi (SKBT)'ye ait bulgulara ilişkin sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir.

Yapılan bu araştırmada, bölüm 4.1'de gösterildiği gibi, öğretmen adaylarının sıralama kavramına yönelik informal bilgilerinden ileri gelen kavram imgelerinin birbirlerinden farklı olduğu görülmüştür. Genel olarak, sıralama kavramının günlük hayatta, hakkında az çok bir fikre sahip olunabilecek bir kavram olmasından ötürü,

konu ile formal olarak karşılaşmadan önce kavram ile ilgili farklı düşüncelerin olması doğaldır denebilir. Buna paralel olarak da sıralama hakkında öğretmen adaylarının zihinlerinde farklı imgelerin mevcut olması beklenen bir durum denebilir. Öğretmen adayları sıralama ile formal olarak karşılaştıktan sonra yani sıralama bağıntıları ile karşılaştıktan sonra ise, kavram hakkındaki informal bilginin formal bilgiye çevriminde sıralama kavramı bilgi testindeki sorulara verdikleri cevaplar ve bu cevaplardan ortaya çıkan bu imgelerin değişimi üzerinden çeşitli güçlüklerin vuku bulduğu görülebilir. Sıralama kavramı hakkında öğretmen adaylarının düşüncelerinin araştırıldığı sıralama kavramı bilgi testinin 1.sorusu için öğretmen adaylarının çoğunlukla sıralama yapmak için belli bir kriter-kural ihtiyacı hissetmeleri, bulgulara ortaya konmuştur. Bu durumun doğal olduğunu söylemek mümkündür. Çünkü sıralama işi için, belli şeyleri, öğeleri sıraya dizmek için belli bir kurala ihtiyaç duyarız. Ancak formal anlayış açısından öğretmen adaylarından sıralama kavramını sıralama bağıntısı ile ilişkilendirerek, bu ölçüt ihtiyacını sıralama bağıntıları ile karşılamaları istenen ve beklenen bir durumdur denilebilir. Çünkü günlük yaşamda, ‘şu bundan büyüktür’, ‘küçüktür’, ‘uzundur’ veya ‘kısadır’ gibi kıyaslamalar içinde olduğumuzda bile aslında farkında olmasak da sıralama bağıntılarını kullanırız (Narlı, 2013). Buradan hareketle öğretmen adayları formal olarak sıralama kavramı ile karşılaşmalarından sonra bile sıralama kavramı denilince direkt olarak sıralama bağıntısının akla gelmesi düzeyinde (% 23) bir güçlük olduğu düşünülebilir. Bu durum, günlük hayatta yani informal anlayışta, sıralama kavramından bahsedildiğinde, kavramın doğasının ve arkasında yatan matematiksel düşüncenin yani sıralama bağıntısının öğrenciler tarafından belki de hiç düşünülmemesinden kaynaklanabilir. Nitekim, araştırmanın bulgularında da görülebileceği gibi, informal düzeyde sıralama kavramı bilgi testinin 1.sorusuna öğretmen adayları tarafından verilen cevaplar kategorisinde bağıntı imgesinin hiç ortaya çıkmamış olduğu görülmektedir. Diğer yandan bölüm 4.1’de, tablo 1’de de görülebileceği gibi öğretmen adaylarında sıralama ile formal olarak karşılaştıktan sonra sıralama kavramına ilişkin elemanların gruplandırılıp, sınıflandırılması şeklinde bir imge mevcuttur (4). Sıralamanın özüyle ilişkili sayılamayacak bu imgenin daha çok denklik bağıntılarının kapsamında olduğu söylenebilir. Çünkü sıralama kavramının doğasında gruplama işleminin değil, bir kıyaslama ve büyüklük-

küçüklük bakımından bir sıraya dizme söz konusudur denebilir. Yani bu kavram imgesi, sıralama hakkında doğru olmayan bir imge olarak değerlendirilebilir. Sıralama kavramı bilgi testinin a-b-c gibi 3 elemanın nasıl sıralanabileceğini sorgulayan 2. Sorusunda, öğretmen adaylarının “keyfi bir kural belirleme” kavram imgesi sıralama bağıntısının temel kavramları ile karşılaşmalarından sonra, 64’den 24’e bir düşüş göstermiştir. Yine bu noktada a, b ve c elemanlarını informal düzeyde permütasyon işlemi ile sıralamaya çalışan öğretmen adaylarının sayısında da bir düşüş gözlenmiştir. ($18 \rightarrow 1$). Permütasyon kavramının özünde de bir sıralama ve diziliş söz konusu olduğu için bu imgeyi hatalı olarak değerlendirmek uygun olmayabilir. Bununla beraber öğretmen adayları, sıralama bağıntısındaki temel tanımlarla karşılaştıktan sonra (TS), a, b ve c elemanlarının sıralanması konusunda kural-ölçüt verilmediği için ve elemanlar bir sayısal değer taşımadığı için sıralama yapılamayacağını söyleyen öğretmen adaylarının sayısında da bir düşüş söz konusudur hatta formal düzeyde hiç ortaya çıkmamıştır. Bu düşüşler, formal düzeyde yani sıralama ile formal olarak karşılaştıktan sonra a, b ve c elemanlarını uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak sıralayan (55) ve sıralama bağıntıları ile sıralama yapılabileceği sözel olarak ifade eden (10) öğretmen adayı sayısındaki yükselişe açıklanabilir. Ancak yine de a, b ve c gibi 3 elemanı, uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak sıralamaya çalışan öğretmen adayların sayısının yeterli olmadığı söylenebilir. Bunun sebebi olarak, a ve b ve c elemanlarını sıralamaktan bahsedildiğinde hem formal hem de informal düzeyde, öğretmen adayının zihinlerinde ilk olarak günlük alışkanlıklardan ileri geldiğini söyleyebileceğimiz alfabetik bir düzenin canlanması gösterilebilir. Öğretmen adaylarının birbiri ile ilişkisiz sayılabilecek $\square$, Δ , $\#$, $*$ sembollerinin sıralanıp sıralanamayacağı hakkındaki düşüncelerini sorgulayan soruda ise, bölüm 4.1 tablo 3’de de görülebileceği gibi, öğretmen adaylarının informal düzeyde bu sembolleri “keyfi bir kural belirleyerek sıralama”, “permütasyon ile sıralama” ve “kombinasyon ile sıralama” imgeleri belli bir ölçüde düşüş göstermiş ve aynı zamanda bu sembollerin sıralanamayacağı düşüncesi ile alakalı olan ve hatalı imgeler olarak değerlendirebileceğimiz “kriter-ölçüt verilmediği için sıralanamaz” (13), “ortak bir özellik olmadığı için sıralanamaz” (15) ve “sadece sayısal veriler sıralanabilir” (7) imgeleri de önemli ölçüde azalmıştır ve formal düzeyde bu sembolleri uygun bir sıralama bağıntısı

altında sıralama çalışan öğretmen adayı sayısının 51 olduğu ortaya çıkarılmıştır. Sıralama bağıntısı tanımlayarak bu sembolleri sıralamaya çalışma düzeyinin yine de çok yeterli olmadığı söylenebilir. Yani öğretmen adaylarının bir bölümünün birbiriyle ilişkisiz gibi görünen sembollerin sıralanmasını sıralama bağıntısı ile ilişkilendirme düzeyinde güçlük yaşadıkları söylenebilir. Bu durum, birbiri ile ilişkisiz gibi duran bu sembolleri sıralama işleminin, günlük hayatta öğretmen adaylarının sıralama kavramı hakkındaki sezgileri ile çok örtüşmemesi ile açıklanabilir. Diğer yandan 3'ün 4'den büyük olduğu bir sıralama yapılıp yapılamaması ile ilgili öğretmen adaylarının düşünceleri incelendiğinde, informal düzeyde böyle bir sıralama olamayacağını düşünen öğretmen adayı sayısı, formal düzeyde önemli ölçüde düşüş göstermiştir (44→4). Bu noktada formal düzeyde öğretmen adaylarının önemli bir kısmı uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak 3'ün 4'den büyük olabileceği bir sıralama olabileceğini göstermiş (59), 14'ü ise sıralama bağıntıları ile bu durumun mümkün olabileceğini sözel olarak ifade etmişlerdir. 3'ün 4'den büyük olabileceği bir sıralama, öğretmen adaylarının yine günlük hayat sezgileri ile ters düşebilecek bir durum olabilmesine rağmen, belki de sayısal bir değer ifade etmeyen harf ya da sembollerin yerine sayıların sıralanması, sıralama bağıntıları konusu ile karşılaşmalarından sonra öğretmen adayları tarafından daha anlaşılır bulunmuş olabilir.

Sıralama kavramı bilgi testinin 5.sorusuna yani öğretmen adaylarının sonsuz bir kümenin sınırlı olup olamayacağına ilişkin soruda ise, bölüm 4.1'de tablo 5'de de görülebileceği gibi öğretmen adaylarının hem informal düzeyde hem de formal düzeyde bir kümenin sonluluğu ve sonsuzluğu ile sınırlılığı ve sınırsızlığı kavramlarında bir takım güçlüklerle sahip olduğu görülmektedir. Özellikle bulgularda da bahsedilen sonluluk-sonsuzluk kavramları ile sınırlılık-sınırsızlık kavramlarının birbiri ile karıştırılması anlamına gelen sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikileminin burada önemli bir yer tuttuğu söyleyebilir. Özellikle informal düzeyde öğretmen adaylarının % 40'nın bu ikilem içinde olduğu görülmüştür. Yani öğretmen adaylarının sonluluk ve sonsuzluğu sınırlılık ve sınırsızlık gibi düşündükleri, bir kümenin sonsuz olmasıyla sınırsız olmasını aynı şey olarak algıladıkları tespit edilmiştir. Sonsuz bir küme, yani eleman sayısı sonsuz sayıda olan bir küme

öğretmen adayları tarafından direkt sınırsız olarak algılanabildiği için kümelerin sonlu-sonsuzluğu ile sınırlılık-sınırsızlığını ayırt etmede bir güçlük söz konusudur denebilir. Formal düzeyde ise öğretmen adaylarının bir bölümünün (39 kişi), sonsuz bir kümenin sınırlı olabilmesini sıralama bağıntısındaki alt sınır ve üst sınır gibi kavramlarla açıkladığı görülürken, yine de sonluluk-sonsuzluk ikilemine düşen (8) ya da sınırlı olamaz diyen (10) öğretmen adaylarının varlığı göze çarpmaktadır. Bu kavramların kelime olarak birbirine benzer anlamlar çağrıştırması bu duruma sebep olmuş olabilir. Bu noktada öğretmen adaylarının bir kısmının ise hem informal hem de formal düzeyde reel sayılarda sayı aralığı örnekleri vererek ([1, 3] vb.) sonsuz bir kümenin sınırlı olabilmesini doğru olarak açıklayabildikleri görülmüştür. Ancak bir kümenin sınırlılığı olgusunu kavram tanımındaki alt sınır ve üst sınır kavramları ile ilişkilendirip, sonsuz bir kümenin sınırlı olabileceğini matematiksel olarak doğru açıklama düzeyinde (%39) bir güçlükten bahsedilebilir.

Bölüm 4.1’de Tablo 6’da görülebileceği gibi, benzer bir durumun SKBT’nin 6.sorusunda yani bu kez sonlu bir kümenin sınırsız olup olamayacağını araştıran soruda ortaya çıktığı söylenebilir. Burada öğretmen adaylarının % 61’inin yine informal düzeyde yani sıralama bağıntısı konusu ile tanışmadan önce sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemine düştükleri tespit edilmiş ve bu yüzden formal düzeyde yani TS’de ise %21 olduğu ortaya çıkarılmıştır. Fakat öğretmen adaylarının yalnızca 47’sinin sıralama bağıntıları ile ilişki kurarak bu durumu açıkladığı, diğerlerinin ise sezgisel olarak cevapladıkları yani bir gerekçe sunamadıkları görülmektedir. Bu durum yine sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık kavramlarının epistemolojik zorluklarından kaynaklanabilir. Kümelerin sınırlılığı ve sınırsızlığı kavramlarını, sıralama bağıntısındaki alt sınır ve üst sınır kavramlarıyla ilişkilendirilmesinde öğretmen adaylarının güçlük yaşamaları buna sebep olabilir. Bu noktada öğretmen adaylarının sonlu bir kümenin sınırsız olması açıklamada, sonsuz bir kümenin sınırlı olmasını açıklamaya göre, hem TÖ’de hem de TS’de de daha fazla sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemine düştükleri görülmektedir. Bunun sebebi olarak, öğretmen adaylarının sonsuz ve sınırlı bir küme örneği olarak reel sayı aralıklarını göstermelerine karşın, sonlu ve sınırsız bir küme

örneği olarak reel sayı aralıklarının verilememesi gösterilebilir. Çünkü reel sayı aralıkları, sonlu ve sınırsız kümelerle uygun bir örnek değildirler.

Benzer bir biçimde bir kümenin sınırlı ya da sınırsız olması ile sıralama kavramı arasında bir ilişkinin olup olmadığı sorgulayan SKBT'nin 7.sorusunda ise yine formal düzeyde öğretmen adaylarının bir bölümünün (15 kişi) sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemine düştükleri görülmektedir. Burada informal düzeyde yani öğretmen adayları soyut matematikte sıralama bağıntısı konusu ile karşılaşmadan önce öğretmen adayı cevaplarından ortaya çıkarılmış olan bir kümede sıralama yapmak için kümenin sınırlı olması gerekir (9 kişi) şeklinde bir kavram imgesinin varlığı görülmektedir. Bu kavram imgesinin hatalı bir kavram imgesi olduğu söylenebilir. Çünkü bir kümenin sınırlı veya sınırsız olması, üzerinde bir sıralama işlemi yapamayacağımız anlamına gelmeyip, aksine yapılan sıralama işlemine bağlı olarak alt ve üst sınırlar belirlenerek sınırlı ve ya sınırsız bir küme olacağına karar verilir. Yine bu noktada sınırlı ve sınırsız kavramları ile sıralama olgusunu ilişkilendirmede öğretmen adaylarının bir bölümünün güçlük yaşadığı görülmektedir.

Boş kümenin sınırlı olup olamayacağı ile alakalı olan sıralama kavramı bilgi testinin 8.sorusunda ise, formal düzeyde öğretmen adaylarının %66'sında boş kümenin alt ve üst sınır olamayacağı için sınırsız olduğu düşüncesi hakimdir. Bu, doğru bir düşünce olarak değerlendirilebilir. Çünkü boş kümenin bir alt ya da üst sınırından bahsedilemez. Ancak bu noktada öğretmen adaylarının “sınırlıdır, çünkü boş kümenin alt ve üst sınırı vardır” (%2), “sınırlıdır, çünkü boş kümenin hiç elemanı yoktur” (%6) ve “ne sınırlı ne sınırsızdır” (%2) şeklinde bu konuda hatalı imgelere sahip oldukları söylenebilir. Bunun yanında formal düzeyde de 19 öğretmen adayının boş kümenin sınırsız olduğu konusunda bir gerekçe sunamadıkları tespit edilmiştir. Yani öğretmen adaylarının %34'lük bir kısmının sıralama bağıntısı konusundaki temel tanımlarla karşılaşmalarından sonra boş kümenin sınırlı olup olmaması konusunu sıralama bağıntıları ile açıklamada güçlük yaşadıkları söylenebilir. Bu durum, öğretmen adaylarının sınırlılık ve sınırsızlık kavramlarını sıralama bağıntıları ile ilişkilendirmedeki güçlük yaşamalarından kaynaklanmaktadır. TÖ'de yani

sıralama bağıntısı konusundaki temel tanımlarla ile karşılaşmalarından önce, öğretmen adaylarının %50'lik bir kısmında boş kümenin hiç elemanı olmadığı için sınırsız olabileceği düşüncesinin olması da sınırsız kümelerin formal tanımına yakın bir cevap olarak değerlendirildiğinde dikkat çekici bulunabilir.

Reel sayılarda adi sıralamadan farklı sıralamaların olup olamayacağı ile ilgili olan SKBT'nin 9.sorusunda ise, formal düzeyde yani TS'de öğretmen adaylarının %52'lik bir kısmının uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak adi sıralamadan farklı sıralamaların olabileceğini gösterebildikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının %48'lik bir kısmının ise, bölüm 4.1'de tablo 9'da görülebileceği gibi bu konuda net bir açıklama getiremedikleri ya da reel sayılarda başka sıralamalar olamaz şeklinde hatalı bir yorumda bulundukları söylenebilir. Buradaki güçlüğü sebebi olarak da reel sayılarda adi sıralamadan farklı olan, yani informal olarak günlük hayatta alışlagelen sıralamadan farklı sıralamaların, öğretmen adaylarının sezgilerine ters gelebilen bir sıralama işlemi olması gösterilebilir. Diğer yandan bu sorunun aslında sorguladığı durum açısından sıralama kavramı bilgi testinin 4.sorusu ile benzerlik taşıdığı söylenebilir. Ancak bu sorunun notasyon ile gösterilen bir içeriğinin ($\beta = \{(x,y) : x \leq y, x,y \in \mathbb{R}\}$) oluşu, 4.soruya öğretmen adaylarının daha çoğunun sıralama bağıntısı ile ilişkilendirerek doğru cevap vermelerine neden olmuş olabilir.

Karmaşık sayılarda sıralama yapılıp yapılamayacağına ilişkin öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde ise, bölüm 4.1 tablo 10'da da görülebileceği gibi, formal düzeyde öğretmen adaylarının %48'inin sıralama bağıntısı ile ilişki kurarak cevap verdikleri tespit edilmiştir. Bazı öğretmen adaylarının ise “evet mutlak değerlerine göre sıralama yapılabilir” şeklinde hatalı olarak değerlendirilebilecek bir yorumda bulundukları görülmüştür. Çünkü bu durumda aynı uzaklığı veren birden çok karmaşık sayı mevcut olduğu için karmaşa söz konusudur. Diğer yandan “i sayısının değeri bilinmediği için sıralama yapılamaz” ve “reel kısma mı sanal kısma mı göre sıralama yapılacağı belirsizlik yaratacağı için sıralama yapılamaz” şeklinde cevap veren öğretmen adaylarının ise sıralama düşüncelerinin adi sıralama ile sınırlı kaldıkları, sıralama bağıntıları ile ilişki kurmakta güçlük yaşadıkları açıktır. Bu noktada karmaşık sayıların reel sayılardaki bilinen adi sıralama bağıntısı altında

sıralanamayacağı söylenebilir (Demir, 1992). Fakat, uygun bir kısmi sıralama bağıntısı altında örneğin, özellikle harf sıralaması diye isimlendirebileceğimiz “ $a+bi$ ve $c+di$ 2 karmaşık sayı olmak üzere $a \leq c$ ise $a+bi \leq c+di$, $a=c$ ve $b \leq d$ ise $a+bi \leq c+di$ ” şeklinde tanımlanacak bir bağıntıya göre, karmaşık sayıların sıralanabileceğini söylemek mümkündür. Burada formal düzeyde öğretmen adaylarının %52’lik bir kısmının karmaşık sayılarda sıralama yapmayı sıralama bağıntıları ile ilişkilendirememeleri bu konuda bir güçlük olarak değerlendirilebilir. Buna sebep olarak, karmaşık sayıların doğasından ileri gelen epistemolojik zorluklar gösterilebilir.

Bir kümede birbiri ile kıyaslanamayacak elemanların olup olamayacağını sorgulayan SKBT’nin 11.soruda ise, sıralama bağıntısı konusunu öğrenmelerinden sonra yani formal düzeyde öğretmen adaylarının %79’luk bir kısmının uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayarak birbiri ile kıyaslanamayacak elemanların mümkün olabileceğini gösterebildikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının %21’inin ise elemanların kıyaslanabilmesi-kıyaslanamaması konusunda bir güçlük çektikleri söylenebilir. Burada değinilmesi gereken başka bir nokta da formal düzeyde hala bazı öğretmen adaylarında sadece sayısal veriler kıyaslanabilir ve ortak bir özelliği olmayan elemanlar kıyaslanamaz şeklinde sıralama kavramı ile ilgili olarak hatalı olarak değerlendirilebilecek imgelere sahip olduklarıdır. Ancak bu durum, bölüm 4.1’de Tablo 11’de de görülebileceği gibi, informal olarak yani sıralama bağıntısı konusu ile karşılaşmadan önce öğretmen adaylarının çoğunun (51+27) bu iki imgeden birinin etkisinden kurtulamaması olarak yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarından sıralama bağıntısının tanımını yapmalarını istenen SKBT’nin son sorusunda ise, sıralama bağıntısı konusunu gördükten sonra bile öğretmen adaylarının %16’sının sıralama bağıntısını tanımlamada sıkıntı yaşadıkları tespit edilmiştir. Bu 16 öğretmen adayının informal olarak bir tanımda bulundukları yani kavram tanımını veremedikleri tespit edilmiştir. Bu tanımlar ise bölüm 4.1.12’de sunulmuştur. Sıralama kavramı bilgi testindeki sorulara formal düzeyde yanıt vermeye çalışırken, hala bazı öğretmen adaylarının sıralama bağıntısının tanımını yapamamaları bu konuda bir güçlük olarak değerlendirilebilir. Bu noktada

4.1.12’de gösterilen tanımlara bakıldığında, bazı öğretmen adaylarının sıralama bağıntısının tanımını denklik bağıntıları ile karıştırdıkları da görülmektedir.

5.1.2. SBKBT-1 ve SBKBT-2 ’ye Ait Bulgulara İlişkin Sonuç ve Tartışma

Bu bölümde, öğretmen adaylarının sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1 ve sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2’deki sorulara vermiş oldukları yanıtlardan ortaya çıkarılmış kategoriler üzerinden sıralama bağıntısı konusundaki ileri düzey kavramlarda yaşadıkları güçlükler hakkında sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir.

5.1.2.1. SBKBT-1’e Ait Bulguların Tartışılması

Bu bölümde, öğretmen adaylarının sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1’e ait sorulara vermiş oldukları cevaplardan ortaya çıkarılmış olan bulgular hakkında genel bir tartışmaya yer verilecektir.

Bölüm 4.2.1’e ait bulgulara bakıldığında, sıralama bağıntısının ne işe yaradığı yani işlevi konusunda bir kümedeki elemanların kıyaslanıp sıralanmasını sağlar görüşüne sahip olan öğretmen adaylarının (%80) bu konuda uygun bir yorum getirdikleri söylenebilir. Çünkü sıralama bağıntıları yardımıyla bir kümedeki elemanlar arası kıyaslama yapıp, elemanlar verilen bağıntıya göre sıralayabilir. Yani sıralama bağıntılarının işlevi konusunda öğretmen adaylarının %20’sinin ise güçlük yaşadıkları söylenebilir. Çünkü tablo 13’te de görülebileceği gibi bir kümede ortak özelliği olan elemanların ya da karmaşık verilerin gruplanmasının sıralama bağıntılarının bir işlevi olmadığı söylenebilir. Elemanların gruplanması işleminin denklik sınıfları göz önünde bulundurulduğunda, denklik bağıntılarının kapsamı altında olduğu düşünülebilir. Diğer yandan öğretmen adaylarına ait diğer bir yorum olan sıralama bağıntılarını, bağıntıların kıyaslanıp, bağıntılar arasında sıralama yapmaya yarar şeklindeki yorumları, matematiksel açıdan hatalı bir yorum olarak değerlendirilebilir. Çünkü sıralama bağıntıları ile bağıntıların değil, bir kümedeki elemanların kıyaslanıp sıralanabileceği söylenebilir. Güney ve Özkoç (2015)’e göre,

elemanların diğer elemanlara göre kıyaslanıp, büyük ya da küçük olmasına içinde bulundukları kümede bir sıralama bağıntısı tanımlanırsa karar verilebilir.

Öğretmen adaylarının bir sıralama bağıntısında büyüklük-küçüklük ilişkisinin nasıl tayin edileceği hususundaki görüşleri incelendiğinde ise, %61'inin sıralama bağıntılarında büyüklük- küçüklük ilişkisini açıklamada doğru bir yorum getirdikleri söylenebilir. Öğretmen adaylarının %39'unun ise büyüklük-küçüklük ilişkisinin nasıl belirlendiğini yorumlamada güçlük yaşadıkları söylenebilir. Tablo 14'ten de bu öğretmen adaylarının bağıntıdaki sıralı ikililer içindeki elemanlardan birincisinin daha büyük olduğu ve bağıntı diyagramında hangi eleman hangi elemene gidiyorsa, giden elemanın daha büyük olduğu yanılgılarında oldukları söylenebilir.

Sıralama bağıntılarında elemanların kıyaslanıp-kıyaslanamaması hakkında öğretmen adaylarının görüşlerini araştıran SBKBT-1'in 3.sorusuna verilen cevaplara bakıldığında ise tablo 15'te gösterildiği gibi öğretmen adaylarının %57'sinin bu konuda doğru bir yorum getirdikleri söylenebilir. Yani öğretmen adaylarının %43'ünün poşetlerde kıyaslanabilirlik ve kıyaslanamazlık konusunu tam olarak açıklamada güçlük yaşadıkları söylenebilir. Öğretmen adaylarının her şekilde bütün elemanların kıyaslanabileceğini düşünmeleri ya da bağıntıda birbiri ile ortak özelliği olmayan elemanların kıyaslanamayacağını düşünmeleri bu konudaki yanılgılardandır denebilir. Bunun sebebi, sıralama bağıntılarında kıyaslanabilirlik tanımını anlamada güçlük çekmeleri olabilir.

Sıralama bağıntılarında bir elemanın kendinden küçük olup olamayacağına ilişkin öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde ise, öğretmen adaylarının %64'ünün yansıma özelliğini gerekçe göstererek, bu konuya doğru bir yorum getirebildikleri söylenebilir. Kalan %36'sının ise bir sıralama bağıntısında bir elemanın kendinden küçük olamayacağını düşünerek, ya da bu durumun yalnızca birim bağıntıda olduğunu varsayarak, bu konuda güçlük yaşadıkları söylenebilir. Bir elemanın kendisiyle kıyaslanamayacağını düşünmek ya da her elemanın kendine denk olabileceğini düşünmek bu konudaki diğer yanılgılardandır. Buna ilişkin güçlüğün sebebi olarak öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarındaki yansıma

özelliğini tam olarak yorumlayamamaları gösterilebilir. Çünkü sıralama bağıntılarında yansımadan dolayı bir eleman kendinden hem büyük, hem de küçük olabilir (Narlı, 2013).

Öğretmen adaylarının reel sayılarda adi sıralama bağıntısından farklı bir sıralama bağıntısı oluşturabilmeleri ile ilgili olan, 8'in 2'den küçük olduğu bir sıralama bağıntısının nasıl tanımlanacağına ilişkin görüşleri cevapları incelendiğinde, %46'sının bu konuda uygun bir sıralama bağıntısı tanımlayabildikleri, %54'ünün bu konuda güçlük yaşadığı görülmüştür. Bu öğretmen adayları bu konuda tanımladıkları bağıntıların sıralama bağıntısının özelliklerini taşımaması yani bir sıralama bağıntısı olmaması, soruda istenenin tam tersi şekilde 8'in 2'den büyük olduğu sıralama bağıntısı tanımlama gibi hatalara düştükleri tespit edilmiştir. Yani öğretmen adaylarının bir bölümünün sıralama bağıntısının özellikleri geri plana atarak, özellikle sıralı ikililer şeklinde bir sıralama bağıntısının tanımlarken hata yapmaktadırlar. Ayrıca öğretmen adaylarının %7'sinin böyle bir sıralama bağıntısının tanımlanamayacağını düşünerek bir yanılgı içinde oldukları söylenebilir.

Öğretmen adaylarının birbiri ile ilişkisiz gibi görünen sembolleri ($\square$, #, $\diamond$, $\odot$) sıralarken ise yine tanımladıkları bağıntıların sıralama bağıntısının özelliklerini taşımaması ve ortak özelliği olmayan bu sembollerin sıralanamayacağını düşünerek bu sembolleri bir sıralama bağıntısı yardımıyla tanımlamada güçlük yaşamaktadırlar. Bulgular bölümünde Tablo 18'de de görülebileceği gibi bu konuda öğretmen adaylarının %48'inin tam olarak bir sıralama bağıntısı tanımlayarak bu sembolleri sıralanabildikleri görülebilir. Yani bu konuda bazı öğretmen günlük hayattaki sıralama kavramına ilişkin informal düşüncelerinin etkisi altında oldukları düşünülebilir.

Öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarının yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin arka planında yatan nedenler hakkındaki görüşleri incelendiğinde ise, %59'nun sıralama bağıntılarının niçin bu özellikleri taşıdığını tam olarak yorumlamada güçlük yaşadıkları söylenebilir. Bu öğrencilerin genel olarak geçişme özelliğini açıklayabildikleri, yansıma ve ters simetriden birinin altında yatan

sebepleri açıklamada güçlük yaşadıkları söylenebilir. Sıralama kavramının özünü oluşturan yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerinin soyut kavramlar olması, bu konudaki güçlüğü bir sebebi olabilir. Ayrıca bu kavramların öğretmen adayları tarafından sadece ezbere bilinmesi, bu konudaki güçlüğü sebeplerinden biri olabilir.

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1'in 8.sorusunda, öğretmen adaylarından, sıralama ve kıyaslanabilme koşullarının verildiği bir küme üzerinde verilen koşullara uyan bir sıralama bağıntısı oluşturmaları istenmiştir. Bulgulara bakıldığında %52'lik bir kesimin bu konuda güçlük yaşadıkları görülmektedir. Buna ilişkin bulgular değerlendirildiğinde ise, öğretmen adaylarının diyagram formda sıralama bağıntısı oluştururken en büyük elemanın diyagramda nereye yerleştirileceğini bilememe ve tanımladıkları bağıntıların sıralama bağıntılarının özelliklerini taşınamaması gibi yanlışlar içinde oldukları söylenebilir. Tablo 20'teki bulgulardan görülebileceği üzere, öğretmen adaylarının diyagram olarak değil de sıralı ikili şeklinde yazarken güçlük yaşadıkları söylenebilir.

5.1.2.2. SBKBT-2'ye Ait Bulguların Tartışılması

Bölüm 4.3'e ait bulgular incelendiğinde, sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2'deki sorulara bağlı olarak, öğretmen adaylarının maksimum, minimum, maksimal, minimal, alt sınır, üst sınır, infimum ve supremum elemanları belirlemedeki güçlükleri diyagram formda verilmiş sıralama bağıntılarının tanımlandığı bir küme üzerinde, reel sayılarda adi sıralama bağıntısı altında bir reel sayı aralığı üzerinde ve limit durumu içeren kümeler üzerinde olmak üzere 3 şekilde değerlendirilebilir. Bu kümelerin maksimum ve minimum elemanlarını bulmada yaşadıkları güçlükler, genellikle benzerlik göstermekte ancak farklı yönleri de bulunmaktadır. Genel olarak bahsedilen kavramların soyut yapıda oluşları, öğretmen adaylarının kavramları anlamadaki güçlük yaşamalarına neden olmuş olabilir. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının verilen kümenin nerede tanımlandığını göz ardı etmeleri (reel sayı mı tam sayı mı vb.) bu konuda yapılan hataların sebeplerindendir denebilir. Bu husus, Morali, Köroğlu ve Çelik (2004)'ün çalışmasındaki öğrencilerin elemanların hangi sayı kümesinde tanımlandığına dikkat etmemesi şeklindeki

bulgusuyla paraleldir denebilir. Öncelikle maksimum ve minimum elemanları bulmada öğretmen adaylarının bu elemanların bir küme içinde yazılacağını düşünme, maksimum ve minimum elemanların birden fazla olabileceği düşüncesi, eğer bir kümede birbiri ile kıyaslanamayan elemanlar varsa bu elemanların her ikisinin de maksimum ya da minimum olacağı düşüncesi gibi yanlışlar içinde oldukları söylenebilir. Maksimum ve minimum elemanın sırasıyla $A \subset B$ ve $a \in A$ olmak üzere a , A kümesindeki her elemandan büyük ise a 'ya maksimum eleman denir ve $A \subset B$ ve $a \in A$ olmak üzere a , A kümesindeki her elemandan küçük ise a 'ya minimum eleman denir (Güney ve Özkoç, 2015) tanımları göz önüne alındığında bazı öğretmen adaylarının maksimum ve minimum elemanın kavram tanımlarını anlamada güçlük yaşadıkları söylenebilir. Ayrıca reel sayı aralıkları üzerinde maksimum elemanları belirlemede bazı öğretmen adaylarının maksimum elemanın eğer varsa verilen kümeye ait olması gerektiğini düşünmeme yanlışında olduğu söylenebilir. Bununla birlikte, reel sayılarda adi sıralama altında limit durumu içeren kümelerde bazı öğretmen adaylarının limit sonucunun kümeye ait olduğunu düşünme ve buna bağlı olarak limit sonucunun maksimum ve minimum eleman olacağını düşünme gibi hatalar yaptıkları söylenebilir.

Öğretmen adaylarının maksimal ve minimal elemanları belirlemede ise maksimal ve minimal elemanların bir küme içinde yazılması gerektiği bilmeme, maksimal ve minimal elemanların verilen kümeye ait olmayabilir düşüncesi, maksimal elemanları üst sınırlarla, minimal elemanları alt sınırlarla karıştırma, bir kümede diğer elemanlarla kıyaslanamayan elemanları maksimal ya da minimal eleman olarak düşünmeme gibi yanlışlar içinde oldukları görülmüştür. Ayrıca reel sayılarda adi sıralama bağıntısı altında limit durumu içeren kümelerde limit sonucunu maksimal ya da minimal eleman olarak değerlendirmeleri de öğretmen adaylarının bu konuda yaptıkları hatalardandır. Maksimal ya da minimal elemanların verilen kümede kıyaslanabildikleri elemanların en büyüğü ya da en küçüğü olduğu dikkate alındığında (Güney ve Özkoç, 2015), bu noktada da öğretmen adaylarının maksimal ya da minimal elemanların kavram tanımı tam olarak anlamada güçlük çektikleri söylenebilir.

Öğretmen adaylarının alt sınırları ve buna bağlı olarak infimum elemanı belirlemede de güçlükler yaşadıkları söylenebilir. Alt sınırların bir küme oluşturmadığı algısı, bir kümede birbirleri ile kıyaslanamayan elemanların alt sınır ya da üst sınır elemanlara dahil edilmesi, infimum elemanın birden fazla olabileceği düşüncesi bu konudaki yanlışlıklardandır. Ayrıca reel sayılarda adi sıralama bağıntısı altında verilen reel sayı aralıklarında (sorumuzda $[-1, 7)$) kümenin uç nokta elemanı olan -1 'in alt sınırlara dahil edilmemesi de bu konuda düşülen hatalardandır. Bu husus Moralı, Köroğlu ve Çelik (2004)'ün bulgularına paraleldir. Reel sayı aralıklarında, alt sınırların sadece kümeye ait ya da sadece kümeye ait olmayan elemanlar olarak düşünülmesi ve alt sınırları sadece tamsayılardan oluşan elemanlar kümesi olarak düşünme de öğretmen adaylarının alt sınırları bulmada yaşadıkları güçlüklerdendir. Buradaki sıkıntının bir diğer sebebi olarak da öğretmen adaylarının sayı kümelerinin özelliklerini tam olarak kavrayamamaları gösterilebilir. Buna ilaveten sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2'nin 2.sorusunun b şıkkında olduğu gibi adi sıralama altında limit durumu içeren kümelerde alt sınırların sadece limit sonucuna eşit olduğunu düşünme de bazı öğretmen adaylarının sahip oldukları bir diğer yanlışlıktır. Öğretmen adaylarının alt sınırların ve infimum elemanın kavram tanımını anlamadaki güçlükleri ile beraber bu kavramların soyut yapıda oluşu, bu hataları doğuran sebeplerdendir denebilir.

Öğretmen adaylarının üst sınırları ve buna bağlı olarak supremum elemanı bulmadaki güçlükleri de alt sınır ve infimum elemanı bulmada yaşadıkları güçlüklerle benzerdir denebilir. Supremum elemanın birden fazla olabileceği düşüncesi, supremum elemanın bir küme içinde yazıldığı algısı, diyagram şeklinde verilen sıralama bağıntılarında küme elemanlarının hiza olarak üstünde olan bütün elemanların üst sınır olabileceği algısı, üst sınırların bir küme içinde yazılmaması bazı öğretmen adaylarının üst sınırları ve supremum elemanı bulmada güçlük yaşamlarına neden olmaktadır. Ayrıca adi sıralama bağıntısı altında reel sayı aralığı şeklinde verilen kümelerde üst sınırların sadece tam sayılardan oluşacağını düşünme ve kümeye ait olmayan bir uç nokta elemanının üst sınırlar kümesine dahil edilmeyeceğini algısı da öğretmen adaylarının üst sınırları bulmada güçlük yaşamlarına neden olmaktadır. Reel sayılarda adi sıralama bağıntısı altında, limit

durumu içeren kümelerde ise üst sınırları maksimal elemanlar ile karıştırma, üst sınırları sadece limit sonucuna eşit olarak düşünme de öğretmen adaylarının yaptıkları hatalardandır. Üst sınırlar sonsuza gittiğinde supremum elemanın mevcut olmayacağı şeklindeki kavram imgesinin de supremum eleman bulmada öğretmen adaylarının güçlük yaşamalarına neden olmaktadır. $(A, \leq)$, bir poşet ve B , A kümesinin alt kümesi olmak üzere eğer varsa A içinde B 'nin her elemanından büyük olan elemanların oluşturduğu küme B 'nin üst sınırları kümesi, üst sınırların en küçük elemanı da supremum eleman olarak tanımlanabilir (Güney ve Özkoç, 2015). Bu noktada genel olarak bakıldığında, bazı öğretmen adaylarının üst sınırların ve supremum elemanın kavram tanımını anlamada güçlük yaşamaları, bu hataların sebebi olarak gösterilebilir.

Sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2'nin 1.sorusunun c şıkkında öğretmen adaylarından sınırsız kümeyi tanımlamaları ve 1.soruda verilen bağıntı diyagramına göre sınırsız küme örneği vermeleri istenmiştir. Bu konudaki bulgular incelendiğinde, öğretmen adaylarının sınırsız küme tanımını tam olarak vermede güçlük yaşadıkları söylenebilir. Bu noktada 4.3.1.c'deki bulgulardan da görülebileceği gibi öğretmen adaylarının %56'sının sınırsız küme tanımını tam olarak yazamadıkları tespit edilmiştir. Özellikle sınırsız kümelerin bazı öğretmen adayları tarafından verilen bağıntıya göre hem alttan hem de üstten sınırı olmayan kümeler olarak düşünülmesi bu konuda yapılan hatalardandır. Çünkü Güney ve Özkoç (2015)'e göre, bir kümenin sınırsız küme olarak tanımlanabilmesi için sadece alttan ya da sadece üstten olarak sınırı olmaması yeterlidir denebilir. Bunun haricinde bazı öğretmen adaylarının sınırsız kümeleri, sonsuz kümeler olarak düşünmeleri yani daha önce açıklanan sonluluk-sonsuzluk ve sınırlılık-sınırsızlık ikilemine düşmeleri, bu noktada öğretmen adaylarının sınırsız kümeleri hatalı olarak tanımlamalarına sebep olmuştur denebilir. Ayrıca öğretmen adaylarının sınırsız küme tanımlarında yaşadıkları güçlüğe, sınırsız kümelere ilişkin sahip oldukları “alt sınırın üst sınıra eşit olduğu küme”, “içinde kıyaslanamayan elemanlar bulunduran küme”, “alt ve üst sınırı sonsuz olan küme” ve “belli başı ya da sonu olmayan küme” şeklindeki hatalı imgeleri neden olmuş olabilir. Öğretmen adaylarının verilen bağıntı diyagramına

göre sınırsız küme örneği verememelerine ya da hatalı olarak sınırlı küme örneği vermelerinde ise alt ve üst sınırları bulmadaki güçlükleri sebep olarak gösterilebilir.

5.2. Öneriler

Yapılan araştırmanın bulgularından hareketle aşağıdaki önerilerde bulunulabilir:

- Öğretmen adaylarının sıralama kavramı anlayışlarında reel sayılardaki adi sıralamanın hakim olduğu göz önünde bulundurularak, soyut matematik derslerinde sıralama bağıntıları vasıtasıyla adi sıralamadan farklı sıralamalar olabileceği, farklı kümeler üzerinde uygun sıralama bağıntıları tanımlanarak gösterilip, sadece sayısal ifadelerin ya da ortak bir özelliğe sahip elemanların sıralanabileceğine ilişkin kanıların değiştirilmesi sağlanabilir.
- Yapılan araştırmada, bazı öğretmen adaylarının sıralama kavramına ilişkin “elemanların gruplanması-sınıflanması” şeklinde bir imgeye sahip oldukları ortaya çıkarılmıştır. Bu noktada soyut matematik derslerinde elemanların gruplanması-sınıflanması olgusunun sıralama kavramının özüne uygun olmadığına vurgu yapılarak, öğretmen adaylarının sıralama bağıntılarını kavramsallaştırırken denklik bağıntılarından ayırmaları sağlanabilir.
- Öğretmen adaylarının soyut matematikte önemli bir yer teşkil eden matematiksel notasyonu kullanma becerileri geliştirilebilir. Bu amaçla, matematiksel gösterimlerin ve sembollerin anlamları üzerinde yeterince durularak, öğretmen adaylarına gösterimler ve ispatlar üzerinde sınıf ortamında düşünceleri için daha fazla zaman verilerek, öğretmen adaylarının matematiksel gösterimleri sadece ezbere bilmelerinin önüne geçilebilir. Matematik eğitimi alanında öğretmen adaylarının soyut matematikteki ispatlarda ve tanımlarda notasyonu ne derecede kullanabildikleri ile ilgili farklı örneklem grupları ile çalışmalar yapılabilir.

- Kümelerin sonluluk-sonsuzluğu ve sınırlılık-sınırsızlığına ilişkin bu kavramların çoğunlukla birbirlerinin yerine kullanıldığı, birbirleriyle kolayca karıştırıldığı göz önünde bulundurularak, soyut matematik derslerinde bu kavramlar arasındaki farklar, sıralama bağıntıları ile ilişki kurularak ve kavram tanımları öğrencilere net bir şekilde verilerek öğretiler. Öğretmen adaylarının bu kavramları daha iyi öğrenmelerini sağlamak için üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlanmış kümelerin alt kümelerinin sınırlı olup olmadığının belirlenmesine ilişkin sınıflarda öğretmen adayları ile bir tartışma ortamı oluşturulabilir. Ayrıca matematik eğitimi alanında bu kavramlara ilişkin farklı teorik perspektiflerle çalışmalar yürütülebilir.

- Soyut matematik dersinde sıralama bağıntısı konusunda alt sınır ve üst sınır kavramlarının üzerinde sıralama bağıntısı tanımlanmış kümelerin sınırlı olup olmayacağını belirlediğine vurgu yapılabilir. Bu vurgu, bu husustaki güçlüklerin giderilmesinde yardımcı olabilir.

- Öğretmen adaylarının bağıntıların yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özelliklerini sadece ezbere öğrenmesi değil, bu kavramların özünde ne ifade ettiklerine odaklanıp, sıralama ya da denklik bağıntılarının niçin bu özelliklere sahip olduklarına ilişkin öğrencilerin sorgulama yapmaları sağlanabilir.

- Çalışmanın bulgularında da görülebileceği gibi bazı öğretmen adaylarının özellikle sıralama bağıntılarını sıralı ikililer şeklinde tanımlamada güçlük yaşadıkları görülmektedir. Bu husustaki güçleri gidermeye yardımcı olmak adına, soyut matematik derslerinde öğrencilerin verilen bir küme üzerinde önceden belirlenen koşullara uyan sıralama bağıntıları tanımlamalarına yönelik çalışmalar-egzersizler yapılabilir.

- Soyut matematik derslerinde, bir küme üzerinde tanımlanan bir sıralama bağıntısında her zaman bütün elemanların birbiri ile kıyaslanamayacağına dolayısıyla sıralama yapılamayacağına vurgu yapıp, bu konudaki yanlışlar giderilebilir.

- Sıralama bağıntılarında bir kümedeki elemanlar arasında büyüklük- küçüklük ilişkilerinin nasıl belirleneceği üzerinde yeterince durulup, öğretmen adaylarının bu konudaki güçlüklerinin önüne geçilebilir.

- Sıralama bağıntılarını ok diyagramı formunda verildiğinde, elemanlar arasındaki bağlantılar üzerinde yeterince vurgu yapıp, elemanlar arasındaki büyüklük- küçüklük ilişkileri ve elemanların kıyaslanabilirliğine ilişkin bu diyagramlar üzerinde öğretmen adaylarının yeterince düşünceleri sağlanabilir.

- Üzerinde sıralama bağıntısı tanımlanmış kümelerde maksimum ve minimum, elemanlara ilişkin bu elemanların eğer varsa tek bir tane olduklarına, bir küme içinde yazılmamaları gerektiğine ve verilen kümeye ait olması gerektiğine vurgu yapıp, bu elemanların varsa tek olduğuna ilişkin ispat gösterimleri yapılabilir. Ayrıca bu elemanların kavram tanımları üzerinde yeterince durularak, bu konuda oluşabilecek hatalı imgelerin önüne geçilip, verilen küme üzerinde bu elemanları belirlemeye ilişkin güçlükler azaltılabilir.

- Üzerinde sıralama bağıntısı tanımlanmış kümelerde maksimal ve minimal elemanlara ilişkin, bu elemanların verilen kümeye ait olması gerektiği üzerinde ve kümede kıyaslanabildikleri elemanların en büyüğü ya da en küçüğü olmaları tanımı üzerinde yeterince durulabilir. Bu sayede bu elemanların maksimum-minimum ya da üst sınır-alt sınır gibi kavramlarla karıştırılmasının önüne geçilebilir.

- Üzerinde sıralama bağıntısı tanımlanmış kümelerde alt sınır ve üst sınır elemanlarına ilişkin bu elemanların tanımlanan bağıntıya göre, verilen kümeye ait olmaları gerektiği gibi bir zorunluluk olmadığı ve bu elemanların bir küme belirttikleri üzerinde vurgu yapılabilir. Alt sınır ve üst sınırın kavram tanımları üzerinde yeterince durularak, bu elemanları belirlemeye ilişkin öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler giderilebilir.

- Üzerinde sıralama bağıntısı tanımlanmış kümelerde supremum ve infimum elemanlarına ilişkin, supremum elemanın üst sınır kümesinin minimum elemanı,

infimum elemanın ise alt sınır kümesinin maksimum elemanı olması tanımlarına vurgu yapılabilir. Başka bir deyişle, bu elemanların tanımlarını maksimum ve minimum kavramlarını içerecek şekilde vererek, öğretmen adaylarının supremum ve infimum elemanların birden fazla olabileceğine yönelik algıları değiştirilebilir. Ayrıca öğretmen adaylarının üniversiteden önceki eğitim öğretim hayatlarında, yani lise seviyesinde bu kavramların Eküs ve Ebas olarak tanımlandığı bilinmektedir. Dolayısıyla soyut matematik derslerinde bu kavramlar verilirken, diğer isimlerinin de verilmesi, öğretmen adaylarının konuyu daha kolay öğrenmelerini sağlayabilir ve bu elemanları belirlemeye ilişkin güçlükler giderilebilir.

- Reel sayılarda adi sıralama bağıntısı altında limit durumu içeren kümelerde, limit durumunun özellikle alt sınır ya da üst sınır elemanları belirlemeyi etkileyeceği ve dolayısıyla supremum ve minimum elemanların belirlenmesinde de önemli olduğu üzerinde hassasiyetle durulabilir ve bu konudaki yanlışların önüne geçilebilir. Ayrıca öğretmen adaylarının limit kavramına yönelik hatalı düşüncelerinin ortadan kaldırılmasına yönelik yapılacak çalışmalar, limit durumu içeren kümelerde alt sınır, üst sınır, infimum ve supremum elemanı belirlemede yaşanan güçlüklerin giderilmesine yardımcı olabilir.

- Araştırmada dikkat çeken diğer bir nokta ise, öğretmen adaylarının bir kümede maksimum-minimum, supremum-infimum, alt sınır-üst sınır, maksimal-minimal elemanları bulurken, verilen elemanların hangi sayı kümesinde tanımlandığını dikkate almamalarından dolayı bu elemanları belirlerken hatalara düşmeleridir. Bu hususta öğretmen adaylarına farkındalık kazandırarak, sayı kümeleri hakkında ön bilgileri kontrol edilerek, güçlüklerin giderilmesi sağlanabilir.

- Bulgular bölümünde bölüm 4.3'te de ortaya konmuş olan, öğretmen adaylarının üzerinde sıralama bağıntısı tanımlanmış kümelerin maksimum, minimum, maksimal, minimal, alt sınır, üst sınır, infimum ve supremum elemanlarına ilişkin sahip oldukları hatalı kavram imgelerinin ortadan kaldırılmasına yönelik farklı teorik perspektiflerle çalışmalar yürütülebilir. Bu hususta soyut matematik derslerinde bu elemanların kavram tanımları ile tanımlardaki notasyonlar

üzerinde yeterli süre durularak ve farklı sıralama bağıntıları üzerinden kümelerde bu elemanların belirlmesine yönelik öğretmen adaylarıyla egzersizler yapılarak, bu konudaki güçlüklerin giderilmesine yardımcı olunabilir.

- Özellikle soyut matematik derslerindeki kavramların soyut yapıda olmaları, öğretmen adaylarının bu kavramlarda güçlük yaşamalarına neden olabilir. Buradan hareketle bu kavramların günlük hayatla mümkün olduğunca ilişki kurularak öğretilmesi, (örneğin sıralama bağıntısı konusunun günlük hayatla ilişkilendirilmesi gibi) öğrenme güçlüklerinin azaltılmasında yardımcı olabilir.

- Bu çalışma daha büyük örneklem grupları ve farklı teorik perspektiflerle (Dubinsky ve McDonald (2001)'in APOS teorik çatısı vb.) daha ileriye taşınabilir.

KAYNAKÇA

Albayrak, R. (2003). Öğrencilerde Bağıntı Kavramının Oluşmasında Görülen Sıkıntılar ve Giderilme Önerileri. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Alkan, H. ve Altun, M. (1998). *Matematik Öğretimi*. Özdaş, A. (Ed.), T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları No: 1072, Açıköğretim Fakültesi Yayınları No:591.

Attorps, I. (2007). Concept definition and concept image. *In the case of equations Department of Mathematics, Natural and Computer Sciences University of Gävle, Sweden.*

Aydoğdu, N. ve Yenilmez, K. (2012). Matematikte Problem Çözme Becerisiyle İlgili Yapılan Çalışmaların İncelenmesi. *X.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 27-30 Haziran 2012, Niğde Üniversitesi, Niğde.

Baki, A. (1998). Matematik öğretiminde işlemsel ve kavramsal bilginin dengelenmesi. *Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu*, Atatürk üniversitesi, Erzurum.

Bingölbali, E. (2016). Kavram tanımı ve kavram imajı, Bingölbali, E., Arslan, S. ve Zembat, İ.Ö. (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler. 1. Baskı. Ankara: Pegem Akademi.*

Bingölbali, E., ve Özmantar, M. F. (2009). Matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri. *Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.*

Büyüköztürk, Ş. (2005). Anket geliştirme. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 3(2), 133–151.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak E., Akgün Ö.E., Karadeniz Ş. ve Demirel F. (2013). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (15.baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Demir, H. (1992). Bazı Kavram, Tanım, Bağntı ve Simgeler Üzerine. *Matematik Dünyası*, 4-7.

Dikici, R. ve İşleyen, T. (2003). Bağntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 11(2), 105-116.

Dubinsky, E., McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Hilton et.(Eds.) *The teaching and learning of mathematics at University level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Durmuş, S. (2007). Matematikte öğrenme güçlüğü gösteren öğrencilere yönelik öğretim yaklaşımları. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, Haziran, 8(13) 76-83.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. ve Lee, C. W. (2013). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics*, 113(3), 120-134.

Ernest, P. (1996). The Nature of Mathematics and Teaching. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 9.

Güney, Z. ve Özkoç, M. (2015). Soyut matematik. İzmir: Dinazor Kitabevi.

Kaleli Yılmaz, G. (2015). Durum çalışması. Metin, M. (Ed.), *Kuramdan uygulamaya eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri. Pegem Akademi Yayınları, Ankara.*

Kanbolat, O. (2010). Bazı Matematiksel Kavramlarla İlgili Epistemolojik Engeller. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kar, T., Çiltaş, A. ve Işık, A. (2011). Cebirdeki kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*. 19(3), 939-952.

Küçük Demir, B. (2014). Argümantasyon Tabanlı Bilim Öğrenme Yaklaşımının Öğrencilerin Matematik Başarılarına ve Yaratıcı Düşünme Becerilerine Etkisi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16-32.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2007). Mesleki Eğitim ve Öğretim Sisteminin Güçlendirilmesi Projesi. *Çocuk Gelişimi ve Eğitimi Öğrenme Güçlüğü Modülü*, Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2013). Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. [PDF dokümanı].

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249-266.

Moralı, S., Köroğlu, H. ve Çelik, A. (2004). Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmen Adaylarının Soyut Matematik Dersine Yönelik Tutumları ve Rastlanan Kavram Yanılgıları, *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(1), 161-175.

Narlı, S. (2013). Bağntı kavramı ve bu kavrama temel teşkil eden kavramlar. Zembat, İ.Ö., Özmantar, M.F., Bingölbali, E., Şandır, H. ve Delice, A. (Ed.), Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar (ss. 309-328). Ankara: Pegem Akademi.

Narlı, S. (2016). İlişkilendirme becerisi ve muhtevası, Bingölbali, E., Arslan, S. ve Zembat, İ.Ö. (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler. 1. Baskı*. Ankara: Pegem Akademi.

National Joint Committee on Learning Disabilities [NJCLD]. (1991). Learning disabilities: Issues on definition. *ASHA*, 33(Suppl. 5), 18–20.

Özdemir, H. B. (2000). Matematik öğretimde tanım, terim ve sembollerin önemi, *H.Ü. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi Sempozyumu*, 19–20 Eylül, İzmir, 647–649.

Patton, M.Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2.baskı). London: Sage Pub.

Patton, M.Q. (2014). Nitel araştırma ve Değerlendirme Yöntemleri (1.baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Polat, Z. ve Şahiner, Y. (2007). Bağntı ve Fonksiyonlar Konusunda Yapılan Yaygın Hataların Belirlenmesi ve Giderilmesi Üzerine Boylamsal Bir Çalışma. *Eğitim ve Bilim*. Cilt:32, Sayı:146, 89-95.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 103-132.

Schindler, M. ve Hußmann, S.(2013). About Students' Individual Concepts of Negative Integer- In Terms of The Order Relation. In *Proceedings of CERME 8*, 6-10 February 2013, Antalya.

Smith, J.P., diSessa, A.A. ve Roschelle, J. (1993). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *Journal of the Learning Sciences*, Vol.3, No.2, s. 115-163.

Soylu,Y. ve Aydın, S. (2006). Matematik Derslerinde Kavramsal ve İşlemsel Öğrenmenin Dengelenmesinin Önemi Üzerine Bir Çalışma. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*. 8(2), 83-95.

Tall, D. O. (1993). Students Difficulties in Calculus. *Proceeding of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*. ICME-7, Québec, Kanada, (1993), 13-28.

Tall, D. ve Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12(2), 151-169.

Tatar, E. ve Dikici, R. (2008). Matematik Eğitiminde Öğrenme Güçlükleri. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(9), 183-193.

Thomaidis, Y. ve Tzanakis, C.(2007). The notion of historical “parallelism” revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educ Stud Math* . 66: 165–183.

Türk Dil Kurumu (2014), Türkçe Sözlük, <http://www.tdk.gov.tr> (2 Ekim 2014).

Ural, A. (2006). Fonksiyon öğreniminde kavramsal zorluklar. *Ege Eğitim Dergisi*, 7(2).

Van De Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally*. USA: Pearson Education.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the Notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.

Vishwanath, S. (2011). The Schröder-Bernstein Theorem. .

Yenilmez, K. ve Yaşa, E. (2008). İlköğretim Öğrencilerinin Geometrideki Kavram Yanılgıları. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, XXI (2), 461-483, Bursa.

Yıldırım A. ve Şimşek H. (2013). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.



EKLER

SIRALAMA KAVRAMI BİLGİ TESTİ (EK-1)

Ad soyad:

Numara:

Grubu:

- 1) Sıralama kavramı deyince ne anlıyorsunuz?
- 2) a, b, c elemanlarını sıralayabilir misiniz? Nasıl?
- 3) $\square, \Delta, \#, *$ sembollerini sıralayabilir misiniz? Sıralayabiliyorsanız nasıl yapabileceğinizi gösteriniz.
- 4) Sıralama kavramı içinde 3'ün 4'den büyük olduğu bir sıralama olabilir mi? Olabilirse nasıl olabileceğini belirtiniz.
- 5) Sonsuz bir küme sınırlı olabilir mi? Açıklayınız.
- 6) Sonlu bir küme sınırsız olabilir mi? Açıklayınız.
- 7) Bir kümenin ya da sayı aralığının sınırlı veya sınırsız olmasının sıralama kavramı ile bir ilişkisi var mıdır? Gerekçenizi belirtiniz.
- 8) Boş küme sınırlı mıdır, sınırsız mıdır? Neden?
- 9) Reel sayılarda sıralama kavramı sadece bildiğimiz anlamda adi sıralama $\beta = \{(x, y) : x \leq y, x, y \in \mathbb{R}\}$ (1 < 3, 3 < 5, 5 > 4) ile mi sınırlıdır? Başka şekillerde sıralamalar olabilir mi? Olabilirse örnek veriniz.
- 10) Karmaşık (kompleks) sayılarda sıralama yapılabilir mi, açıklayınız.
- 11) Bir kümede birbirleriyle küçük-büyük anlamında kıyaslanamayan farklı iki eleman olabilir mi? Gerekçenizi yazıp örneklendiriniz.
- 12) Sıralama bağıntısı nedir? Tanımlayınız.

SIRALAMA BAĞINTISI KAVRAMLARI BİLGİ TESTİ-1 (EK-2)

Ad Soyad:

Numara:

Grubu:

- 1) Sıralama bağıntısı ne işe yarar? Açıklayınız.
- 2) Bir sıralama bağıntısına göre küçüklük büyüklük nasıl belirlenebilir? Açıklayınız.
- 3) Sıralama bağıntılarında her iki eleman kıyaslanabilir mi? Açıklayınız.
- 4) Sıralama bağıntılarında bir eleman kendinden küçük olabilir mi? Açıklayınız.
- 5) 8'in 2'den küçük olduğu bir sıralama bağıntısı tanımlanabilir mi? Açıklayınız.
- 6) $\square, \#, \blacklozenge, \odot$ sembollerini bir sıralama bağıntısı yardımıyla sıralayabilir misiniz? Nasıl yapılabileceğini gösteriniz.
- 7) Sıralama bağıntıları yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahiptir. Niçin bu özelliklere sahip bağıntıya sıralama bağıntısı denilmiş olabilir? Sıralama kavramını düşünerek yorumlayınız.
- 8) $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde öyle bir sıralama bağıntısı tanımlayın ki “e” elemanı, “d” elemanından küçük olsun; “a” her elemandan büyük olsun; c ile d kıyaslanamasın. Bu koşula uyan bir sıralama bağıntısı yazınız.

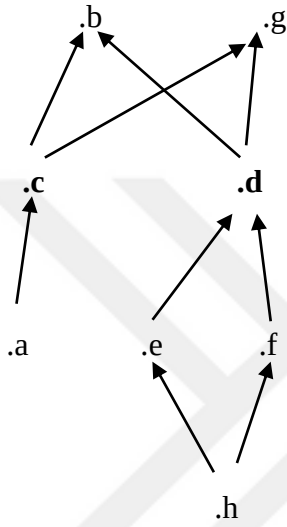
SIRALAMA BAĞINTISI KAVRAMLARI BİLGİ TESTİ-2 (EK 3)

Ad Soyad:

Numara:

Grubu:

1) $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$ kümesi üzerinde verilen bir sıralama bağıntısı aşağıdaki gibidir:



Bu bağıntıya göre;

a) $B = \{ e, f \}$ kümesinin maksimum ve minimum elemanlarını, maksimal ve minimal elemanlarını, alt sınır ve üst sınırları ile supremum ve infimumunu bulunuz.

b) Yukarıdaki bağıntıya göre, üst sınırı olup, supremumu olmayan küme var mıdır? Varsa, küme ya da kümeleri yazınız.

c) Sınırsız küme nedir, tanımlayınız. Bu bağıntıya göre sınırsız olan kümeleri yazınız.

2) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bilinen adi sıralama bağıntısını düşünelim. Bu bağıntıya göre,

a) $A = [-1, 7)$ kümesinin maksimum ve minimum elemanlarını, maksimal ve minimal elemanlarını, alt ve üst sınırları ile supremum ve infimumunu bulunuz. Bu küme sınırlı mıdır? Neden?

b) $A = \left\{ \frac{3n+3}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesi veriliyor. Bu kümede maksimum ve minimum elemanları, maksimal ve minimal elemanları, alt ve üst sınırlar ile supremum ve infimumu bulunuz.

3) Sonlu olup, sınırsız olan bir küme var mıdır? Sıralama bağıntılarını göz önüne alarak açıklayınız.

4) $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, k \}$ kümesinde öyle bir sıralama bağıntısı tanımlayınız ki $X = \{ d, e, f, g \}$ kümesinin üst sınırı varken alt sınırı olmasın, supremumu varken infimumu olmasın, maksimum ve minimum elemanı olmasın, iki tane maksimal elemanı olsun?

ÖĞRENCİLERLE GÖRÜŞME FORMU GİRİŞ KISMI (EK-4)

(Görüşmeler, sıralama kavramı bilgi testi, sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-1 ve sıralama bağıntısı kavramları bilgi testi-2 üzerinden yapılmıştır)

Adı / Soyadı :

Tarih ve Saat (başlangıç-bitiş):.....

GİRİŞ

Merhaba, ben Mustafa Akdemir. Buca eğitim fakültesinde araştırma görevlisiyim. İlköğretim Matematik Eğitimi üzerine yüksek lisans yapıyorum. Sıralama bağıntıları temelinde, sıralama kavramına ilişkin yaşanan güçlükleri araştırmak amacı ile amacıyla çalışma yapıyorum ve seninle bu konu üzerine görüşmek istiyorum. Bu görüşmede amacım, uygulamış olduğumuz testlerdeki sorulardan bazılarını yazılı cevap verirken neler düşündüğünü, hangi nedenlerle o şekilde cevap verdiğini/veremediğini anlamaya çalışmaktır.

- Bu araştırmada ortaya çıkacak sonuçların, bundan sonra yapılacak olan çalışmalara da yarar sağlayacağını düşünüyorum. Bu nedenle senin testlerdeki sorularla ve vermiş olduğun yanıtlarla ilgili düşüncelerini önemsemekteyim. Ancak çalışmamızda gönüllülük esastır. Görüş belirtmek istemediğin soruları rahat bir şekilde ifade edebilirsin.
- Görüşme sürecinde konuşulanların tümü gizlidir. Bu bilgileri araştırmacıların dışında kimsenin görmesi mümkün değildir. Ayrıca araştırmayı yürütürken kesinlikle katılımcıların isimlerini çalışmama yansıtmayacağım.
- Başlamadan önce söylediklerimle ilgili belirtmek istediğin bir düşünce ya da sormak istediğin bir soru var mı?
- Görüşmeyi izinle kaydetmek istiyorum. Bunun sence bir sakıncası var mı?
- İzin verirsen sorulara başlamak istiyorum.

(EK-5)



T.C.
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
İlköğretim Anabilim Dalı Başkanlığı



SAYI : 58329303 / 825
KONU : Tez uygulaması

BUCA-İZMİR
12/11/2014

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

İlgi: 10/11/2014 tarih ve 67493393.302.08.01-2191 sayılı yazınız

Enstitümüz İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı 2013950002 numaralı öğrencisi Mustafa AKDEMİR'in "Sıralama Bağıntısı ile İlişkilendirme Bağlamında İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sıralama Kavramına Yönelik Öğrenme Güçlüklerinin İncelenmesi" konulu tez çalışması kapsamında Fakültemiz İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalında tez uygulama yapma istemi uygulamayı bizzat kendisinin yapması ve uygulama yapacağı dersten önce dersi yürüten öğretim üyesinden önceden izin alması şartıyla uygun bulunmuştur.

Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

Prof.Dr.Teoman KİSERCİOĞLU
İlköğretim Anabilim Dalı Başkanı