

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARI ÜZERİNDE p -KOMPAKT OPERATÖRLERİN
 p -KOMPAKT KÜMELERİNİN DÜZGÜN OLARAK ÇARPANLARA AYRILMASI

AYŞEGÜL KETEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. ERHAN ÇALIŞKAN

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BANACH UZAYLARI ÜZERİNDE p -KOMPAKT OPERATÖRLERİN p -KOMPAKT
KÜMELERİNİN DÜZGÜN OLARAK ÇARPANLARA AYRILMASI**

AYŞEGÜL KETEN tarafından hazırlanan tez çalışması 29.04.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi

Jüri Üyeleri

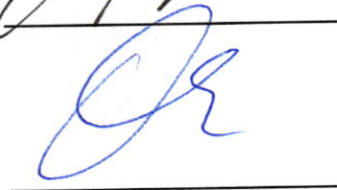
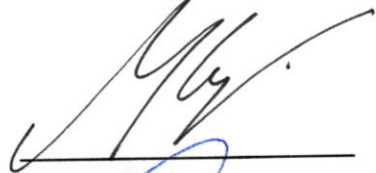
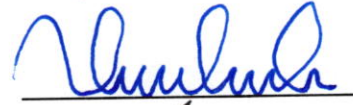
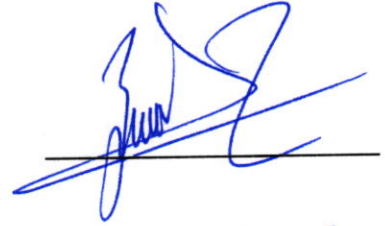
Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR
İstanbul Kültür Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU
İstanbul Üniversitesi





Bu çalışma, TÜBİTAK' ın 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim süresince her türlü görüş ve düşünceleriyle bana yol gösteren, destek olan, yardım ve katkılarını esirgemeyen, birlikte çalışmaktan onur duyduğum değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN' a, tez izleme komitesi üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya ve sayın Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında doktora eğitimim süresince sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca bana verdikleri her türlü maddi-manevi destek, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı aileme ve çalışma hayatım boyunca bana her zaman destek olan tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Nisan, 2016

Ayşegül KETEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vii
ÖZET	x
ABSTRACT.....	xii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Bulgular	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN ARAŞTIRMA	4
2.1 Temel Kavramlar, Tanımlar ve Ön Hazırlıklar	4
2.2 Kompakt Operatörlerin Evrensel Banach Uzayı Vasıtasıyla Çarpanlara Ayrılması.....	14
2.3 Kompakt Operatörlerin Kompakt Alt Kümelerinin Evrensel Banach Uzayı Vasıtasıyla Düzgün Olarak Çarpanlara Ayrılması	16
2.4 p – Kompakt Operatörler İçin Çarpanlara Ayırma Teoremleri	17
BÖLÜM 3	
p – KOMPAKT OPERATÖRLERİN EVRENSEL BANACH UZAYI VASITASIYLA DÜZGÜN OLARAK ÇARPANLARA AYRILMASI.....	19
3.1 p – Kompakt Operatörlerin Evrensel Banach Uzayı Vasıtasıyla Çarpanlara Ayrılması.....	19
3.2 p – Kompakt Operatörlerin Relatif r – Kompakt Alt Kümelerinin Evrensel Banach Uzayı Vasıtasıyla (Düzgün Olarak) Çarpanlara Ayrılması	24

BÖLÜM 4

ÇARPANLARA AYRILMALARIN BAZI UYGULAMALARI	54
4.1 p – Kompakt Operatörlerin Çarpanlara Ayrılışının Yaklaşım Özelliklerine Uygulamaları.....	59
4.2 p – Kompakt Operatörlerin Düzgün Çarpanlara Ayrılışının Homojen Polinom Uzaylarına Bir Uygulaması.....	62

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER	74
KAYNAKLAR.....	76
ÖZGEÇMİŞ.....	79



SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cismi
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi
$co(A)$	A kümesinin konveks kabuğu
$\overline{co}(A)$	A kümesinin kapalı konveks kabuğu
$\Gamma(A)$	A kümesinin mutlak konveks kabuğu
$\bar{\Gamma}(A)$	A kümesinin kapalı mutlak konveks kabuğu
U_X	X normlu uzayının açık birim yuvarı
B_X	X normlu uzayının kapalı birim yuvarı
S_X	X normlu uzayının birim küresi
$\overline{A}^\tau$	A kümesinin τ topolojisine göre kapanışı
$\bar{A}$	A kümesinin norm topolojisine göre kapanışı
X'	X normlu uzayının topolojik duali
X''	X normlu uzayının biduali
$\sigma(X, X')$	X normlu uzayı üzerindeki zayıf topoloji
$\sigma(X', X)$	X' normlu uzayı üzerindeki zayıf*-topoloji
J_X	X uzayından X'' uzayına kanonik tasvir
Λ	Yönlü küme
$L(X, Y)$	X uzayından Y uzayına lineer ve sürekli operatörlerin uzayı
$L_{w*}(X, Y)$	$L(X, Y)$ uzayının zayıf*-zayıf sürekli operatörlerinin alt uzayı
$F(X, Y)$	X uzayından Y uzayına sonlu ranklı operatörlerin uzayı
$K(X, Y)$	X uzayından Y uzayına kompakt operatörlerin uzayı
$W(X, Y)$	X uzayından Y uzayına zayıf kompakt operatörlerin uzayı
$T _A$	T operatörünün A kümesine kısıtlanması
$\inf$	İnfimum
$\sup$	Supremum
$ x $	x vektörünün mutlak değeri

$\ x\ _X$	X normlu uzayı üzerinde x vektörünün normu
$\ x\ _F$	F vektör uzayının boyutu
$d_{BM}(X, Y)$	X ve Y uzayları arasındaki Banach-Mazur uzaklığı
$\mathcal{A}$	İndeks kümesi
$\mathcal{L}$	Tüm lineer ve sürekli operatörlerin sınıfı
$\mathfrak{A}$	Operatör ideal
$\mathcal{F}$	Sonlu ranklı operatörler ideali
c_0	Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
$c_0(X)$	X Banach uzayında sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
$c_0^w(X)$	X Banach uzayında zayıf olarak sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
l_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
l_p	p – toplanabilen dizilerin uzayı
$l_p(X)$	X Banach uzayında p – toplanabilen dizilerin uzayı
$l_p^w(X)$	X Banach uzayında zayıf olarak p – toplanabilen dizilerin uzayı
$p\text{-co}\{(x_n)_{n=1}^\infty\}$	$(x_n)_{n=1}^\infty$ dizisinin p – konveks kabuğu
$\ker T$	T operatörünün çekirdeği
$K_p(X, Y)$	X uzayından Y uzayına p – kompakt operatörlerin uzayı
k_p	$K_p(X, Y)$ uzayı üzerindeki (ideal) norm
$W_p(X, Y)$	X uzayından Y uzayına zayıf p – kompakt operatörlerin uzayı
$K \subset\subset X$	X uzayının relatif kompakt alt kümesi K
$K \subset\subset_p X$	X uzayının relatif p – kompakt alt kümesi K
X / Y	X vektör uzayının (Y alt vektör uzayı ile oluşan) bölüm uzayı
$[x]$	x vektörünü içeren denklik sınıfı
Q_N^X	X uzayından X / N uzayına bölüm tasviri
T'	T operatörünün adjointi
$X \otimes Y$	X ve Y (normlu) vektör uzaylarının cebirsel tensör çarpımı
π	Projektif tensör norm
$X \otimes_\pi Y$	Projektif norma sahip $X \otimes Y$
$X \tilde{\otimes}_\pi Y$	$X \otimes_\pi Y$ uzayının tamlaması
π_s	Simetrik tensör norm
$\otimes^{n,s} X$	X uzayının kendisiyle n – simetrik tensör çarpımı
$\otimes_{\pi_s}^{n,s} X$	π_s normuna sahip $\otimes^{n,s} X$
$\tilde{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X$	$\otimes_{\pi_s}^{n,s} X$ uzayının tamlaması
$\mathcal{L}^s(^n X, Y)$	$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n\text{-kere}}$ çarpımından Y uzayına simetrik, n – lineer, sürekli dönüşümlerin uzayı
$P(^n X, Y)$	X uzayından Y uzayına n – homojen, sürekli polinomların uzayı
$P_{k_p}(^n X, Y)$	$P(^n X, Y)$ uzayının p – kompakt polinomlardan oluşan alt uzayı
P^L	Homojen, sürekli bir P polinomunun lineerizasyonu

$\tilde{P}$	Homojen, sürekli bir P polinomuna karşılık gelen sürekli, multilineer, simetrik operatör
Z_{FJ}	Figiel ve Johnson'ın evrensel Banach uzayı
$Z^{(p)}$	p – kompakt operatörlerin çarpanlara ayrılışında karşılık gelen evrensel Banach uzayı



**BANACH UZAYLARI ÜZERİNDE p -KOMPAKT OPERATÖRLERİN p -KOMPAKT
KÜMELERİNİN DÜZGÜN OLARAK ÇARPANLARA AYRILMASI**

Ayşegül KETEN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN

Bu tez çalışmasında Banach uzayları üzerinde p – kompakt operatörlerin p – kompakt alt kümelerinin (düzgün olarak) çarpanlara ayrılması problemi üzerinde çalışılmıştır.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti, tezin amacı ve bulgular verilmiştir.

İkinci bölümde tezin bütününde kullanılacak olan temel kavramlar, tanımlar ve literatürde daha önce elde edilmiş sonuçlar sunulmuştur.

Tezin orijinal kısmı üçüncü ve dördüncü bölümdür.

Üçüncü bölümde ilk olarak p – kompakt operatörlerin evrensel Banach uzayları vasıtasıyla çarpanlara ayrılabilceği ispat edilmiştir. Daha sonra $r \geq 2$, $1 \leq p \leq r < \infty$ olmak üzere Banach uzayları üzerinde p – kompakt operatörlerin r – kompakt alt kümelerinin (düzgün olarak) çarpanlara ayrılması ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde p – kompakt operatörler için ikinci bölümde ifade edilen bazı basit çarpanlara ayırma sonuçlarının bir uygulaması olarak l_p dizi uzaylarının yaklaşım özelliklerinin belli versiyonlarına sahip olmayan bölüm uzaylarının varlığı oldukça kısa ve basit olan ispatlarla gösterilmiştir.

Aynı zamanda, üçüncü bölümde elde edilen (düzgün) çarpanlara ayırma teoreminin homojen polinom uzaylarına bir uygulaması olarak kapalı birim yuvar üzerinde zayıf düzgün sürekli olan homojen polinomların kompakt kümeler cinsinden bilinen karakterizasyonundan hareketle, p –kompakt kümelerle ilişkili olarak bazı kısmi sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetle verilmiş ve bundan sonra yapılabilecek muhtemel çalışmalar ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Banach uzayı, p –kompakt küme, p –kompakt operatör, çarpanlara ayırma, tensör çarpımı, birlikte p –kompakt küme, yaklaşım özelliği, homojen p –kompakt polinom.



**UNIFORM FACTORIZATION FOR p -COMPACT SETS OF p -COMPACT
OPERATORS ON BANACH SPACES**

Ayşegül KETEN

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN

This dissertation deals with problem of (uniform) factorization for p – compact sets of p – compact operators on Banach spaces.

This dissertation consists of five sections.

In the first section the review of literature, the aim of the dissertation and the findings are given.

In the second section the basic concepts, definitions and previously obtained results in the literature are presented, which will be used throughout the dissertation.

The third and fourth sections of the dissertation are the original parts.

In the third section firstly it is proved that p – compact operators can be factorized through universal Banach spaces. After that results concerning (uniform) factorization for r – compact subsets of p – compact operators on Banach spaces are obtained for $r \geq 2$, $1 \leq p \leq r < \infty$.

In the fourth section, as an application of some simple factorization theorems stated in the second part for p – compact operators, by fairly short and simple proofs, it is shown the existence of quotient spaces of l_p sequence spaces which have no certain variants of approximation properties. Also, as an application of (uniform) factorization

result proved in section third to spaces of homogenous polynomials, motivated by a familiar characterization of homogeneous polynomials that are weakly uniformly continuous on the closed unit ball, some partial results concerning p –compact sets are obtained in terms of compact sets.

In the fifth section the results obtained in the thesis are summarized and possible studies that can be done in the future are stated.

Keywords: Banach space, p –compact set, p –compact operator, factorization, tensor product, collectively p –compact set, approximation property, homogeneous p –compact polinomial.



1.1 Literatür Özeti

Johnson [1] sonlu ranklı operatörlerin kapanışındaki bir operatörün bir evrensel Banach uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabilirliğini göstermiştir. Johnson' nın [1] bu çalışmasından hareketle Figiel [2] kompakt operatörleri Johnson' nın [1] evrensel Banach uzayının kapalı bir alt uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayırmıştır. Randtke [3], Terzioğlu [4] ve Dazord [5] $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_\infty$ gibi belli Banach uzayları üzerinde tanımlanan kompakt operatörleri çarpanlara ayırmışlardır. Daha sonra Graves ve Ruess [6] bu çalışmaları kompakt bir operatörün çarpanlara ayrılmasından, kompakt operatörlerin kompakt alt kümelerindeki operatörlerin simultane olarak çarpanlara ayrılmasına, yani kompakt operatörlerin kompakt alt kümelerinin düzgün olarak çarpanlara ayrılmasına genişletmişlerdir.

Keyfi Banach uzayları üzerinde kompakt operatörlerin kompakt alt kümelerinin düzgün çarpanlara ayrılması Aron vd. [7] tarafından çalışılmıştır. Aron vd. [7] de Johnson [1] ve Figiel [2] tarafından oluşturulan evrensel Banach uzayının aynı zamanda kompakt, zayıf*-zayıf sürekli operatörler uzayındaki operatörlerin çarpanlara ayrılışı için de evrensel bir Banach uzayı olduğunu göstererek, keyfi Banach uzayları üzerinde tanımlanan kompakt operatörlerin relatif kompakt alt kümelerinin (düzgün olarak) çarpanlara ayrılışını elde etmişlerdir.

Sinha ve Karn [8] de Grothendieck' in [9] kompakt kümeleri karakterize eden bir sonucundan esinlenerek, kompaktlığın daha güçlü bir şekli olan, p –kompaktlık kavramını sunmuşlardır. Bundan sonra, p –kompaktlık kavramıyla ilişkili olarak farklı

yönlerde birçok çalışma ortaya çıkmıştır. Örneğin [8], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]' den bahsedebiliriz.

p -kompakt duruma gelince bazı araştırmacılar tarafından yukarıdaki çalışmalar kısmen p -kompakt operatörlerin çarpanlara ayrılışı için de yapılmıştır. Örneğin, [8] de Sinha ve Karn, [12] de Choi ve Kim, [19] da Galicer vd. tarafından yapılan çalışmalardan bahsedebiliriz. Sinha ve Karn [8] de, Grothendieck' in [9] Banach uzayları üzerinde kompakt bir kümenin dizisel karakterizasyonundan esinlenerek p -kompakt küme ve p -kompakt operatör kavramlarını tanımlamış ve p -kompakt operatörlerin basit olarak çarpanlara ayrılışını elde etmişlerdir. Daha sonra Choi ve Kim [12] de ve Galicer vd. [19] da, Sinha ve Karn' nın [8] de elde ettiği çarpanlara ayırmayı kullanarak p -kompakt operatörlerin farklı/alternatif şekillerde çarpanlara ayrıldığını göstermişlerdir. Fakat p -kompakt operatörlerin p -kompakt alt kümelerinin düzgün çarpanlara ayrılmasına bugüne kadar henüz değinilmemiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı Aron vd. nin [7] çalışmasını p -kompaktlık durumuna taşıyarak, p -kompakt operatörlerin p -kompakt alt kümesindeki operatörlerin simultane olarak çarpanlara ayrılışını çalışmaktır. Bu ise iki aşamada yapılacaktır. İlk olarak kompakt ve p -kompakt operatörlerin evrensel Banach uzayları vasıtasıyla çarpanlara ayrılışı çalışılacak, daha sonra asıl amaç olarak, tüm p -kompakt operatörlerin relatif r -kompakt alt kümelerinin (düzgün) çarpanlara ayrılışı göz önüne alınacaktır. İlk iki aşamadan sonra, son bölümde, çarpanlara ayrılmanın yaklaşım özelliğine bir uygulaması ve ayrıca elde edilen sonuçların homojen polinomlar bağlamında uygulamalarının verilmesi amaçlanmaktadır.

1.3 Bulgular

X ve Y Banach uzayları, $r \geq 2$ ve $1 \leq p \leq r < \infty$ olsun. $(K_p(X, Y), k_p)$, X uzayından Y uzayına lineer ve sürekli operatörler uzayının, p -kompakt lineer operatörlerden oluşan, k_p (ideal) normuyla donatılmış, alt uzayını gösterebiliriz. $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subset (K_p(X, Y), k_p)$

dizisi $(ka_k)_{k=1}^{\infty} \in l_r((K_p(X,Y), k_p))$ şeklinde bir dizi ve $H \subset K_p(X,Y)$ alt kümesi $H \subset r-co\{(a_k)_{k=1}^{\infty}\}$ şeklinde bir alt küme olsun. Bu takdirde, Z_{FJ} Figiel-Johnson evrensel çarpanlara ayırma uzayı olmak üzere, bir evrensel Banach uzayı $Z^{(r)}$, bir $u \in K(X, Z_{FJ})$ operatörü, $K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ uzayının relatif r^* -kompakt bir $\{B_T : T \in H\}$ alt kümesi ve bir $v \in K_r(Z^{(r)}, Y)$ operatörü vardır öyle ki, her $T \in H$ için $T = v \circ B_T \circ u$ dur. Ayrıca, eğer H konveks ve dengeli bir küme ise $\{B_T : T \in H\}$ kümesi de konveks ve dengelidir.



TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN ARAŞTIRMA

2.1 Temel Kavramlar, Tanımlar ve Ön Hazırlıklar

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini ve $\mathbb{K}$, reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ yi veya kompleks sayılar cismi $\mathbb{C}$ yi göstermek üzere, göz önüne alacağımız vektör uzayları aksi belirtilmedikçe daima $\mathbb{C}$ cismi üzerindeki normlu (vektör) uzaylar olacaktır.

E bir vektör uzayı, A da E uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ ve $\lambda + \mu = 1$ olmak üzere her $x, y \in A$ için $\lambda x + \mu y \in A$ oluyorsa, A ya E uzayının konveks bir alt kümesi denir. Eğer $|\lambda| \leq 1$ olmak üzere her $x \in A$ için $\lambda x \in A$ oluyorsa, A ya E uzayının dengeli bir alt kümesi denir. Konveks ve dengeli olan bir kümeye mutlak konveks bir küme denir. A kümesinin konveks kabuğu $co(A)$, A kümesini

içeren en küçük konveks küme olup $co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in A, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$

kümesidir [20]. A kümesinin mutlak konveks kabuğu $\Gamma(A)$, A kümesini içeren en

küçük mutlak konveks küme olup, $\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in A, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \right\}$ kümesidir

[20]. X normlu bir uzay olsun. X uzayının bir A alt kümesinin kapalı konveks kabuğu $\overline{co}(A)$, A kümesini içeren en küçük kapalı konveks küme olarak ve A kümesinin kapalı mutlak konveks kabuğu $\overline{\Gamma}(A)$, A kümesini içeren en küçük kapalı mutlak konveks küme olarak tanımlanır [21].

X normlu bir uzay olmak üzere U_X ile X uzayının açık birim yuvarını, B_X ile X uzayının kapalı birim yuvarını ve S_X ile X uzayının birim küresini göstereceğiz. X normlu uzayının bir A alt kümesinin bir τ topolojisine göre kapanışını $\overline{A}^\tau$ ile göstereceğiz; eğer τ , X uzayının olağan norm topolojisi ise kısaca $\overline{A}$ yazacağız. Bu notasyonlara göre, $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$ ve $\overline{\Gamma}(A) = \overline{\Gamma(A)}$ olduğunu görmek kolaydır [21]. X uzayının topolojik duali, yani, X üzerindeki lineer, sürekli fonksiyonellerin oluşturduğu vektör uzayını X' ile göstereceğiz. Benzer şekilde X' uzayının topolojik dualini $(X')' = X''$ ile gösterecek ve X uzayının biduali olarak adlandıracağız.

Şimdi zayıf ve zayıf*-topoloji kavramlarını hatırlatalım.

Bir X normlu uzayının zayıf topolojisi, X için en küçük topolojidir öyle ki X' dualinin her bir üyesi bu topolojiye göre süreklidir [22]. Bu topoloji $\sigma(X, X')$ ile gösterilir.

X normlu bir uzay ve $J_X : X \rightarrow X''$, her $x \in X$, $x' \in X'$ için, $\langle J_X x, x' \rangle = x'(x)$ şeklinde tanımlanan kanonik tasvir olsun. X' dual uzayının zayıf*-topolojisi, X' için en küçük topolojidir öyle ki X uzayındaki her bir x için X' üzerinde $J_X x$ lineer fonksiyoneli bu topolojiye göre süreklidir [22]. Bu topoloji $\sigma(X', X)$ ile gösterilir.

Bir Λ kümesi üzerinde tanımlanan ve

- i) her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda \leq \lambda$ dır,
- ii) eğer $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_1$ ise $\lambda_1 = \lambda_2$ dir,
- iii) eğer $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3$ ise, $\lambda_1 \leq \lambda_3$ tür,
- iv) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $\lambda_1 \leq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3$ olacak şekilde en az bir $\lambda_3 \in \Lambda$ mevcuttur,

şartlarını sağlayan $\leq$ bağıntısı ile birlikte yönlü küme olarak adlandırılacaktır. Tez boyunca göz önüne alacağımız indeks kümeleri, aksi belirtilmedikçe, yönlü kümeler olacaktır.

Λ yönlü bir küme ve X de herhangi bir küme olmak üzere $\phi: \Lambda \rightarrow X$, $\phi(\lambda) := x_\lambda$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyona X de bir ağ denir, böyle bir ağ $\phi = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ olarak gösterilecektir.

X ve Y Banach uzayları olmak üzere olmak üzere, $L(X, Y)$ ile X uzayından Y uzayına tanımlanan tüm lineer ve sürekli operatörlerin uzayını göstereceğiz. Zayıf*-topolojiye göre yakınsayan ağları, zayıf topolojiye göre yakınsayan ağlara dönüştüren bir operatöre, zayıf*-zayıf sürekli bir operatör denir. $L_{w*}(X', Y)$ ile $L(X', Y)$ uzayındaki tüm zayıf*-zayıf sürekli operatörlerin kümesini göstereceğiz. Görüntü uzayının boyutu sonlu olan bir lineer operatöre, sonlu ranklı lineer operatör denir. $F(X, Y)$ ile $L(X, Y)$ uzayındaki tüm sonlu ranklı operatörlerin kümesini göstereceğiz. $T: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer $T(B_X)$, Y uzayının relatif kompakt bir alt kümesi ise veya buna denk olarak X içindeki her sınırlı $(x_n)_{n=1}^\infty$ dizisi, $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ dizisi Y de yakınsak olacak şekilde bir $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ alt dizisine sahip ise, T ye kompakt operatör denir [22]. $K(X, Y)$ ile $L(X, Y)$ uzayındaki tüm kompakt operatörlerin kümesini göstereceğiz. $T: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer $T(B_X)$, Y uzayının relatif zayıf kompakt bir alt kümesi ise veya buna denk olarak X içindeki her sınırlı $(x_n)_{n=1}^\infty$ dizisi, $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ dizisi Y de zayıf yakınsak olacak şekilde bir $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ alt dizisine sahip ise, T ye zayıf kompakt operatör denir [22]. $W(X, Y)$ ile $L(X, Y)$ uzayındaki tüm zayıf kompakt operatörlerin kümesini göstereceğiz. $L_{w*}(X', Y)$ kümesinin $L(X', Y)$ uzayının bir alt uzayı olduğu ve $F(X, Y)$, $K(X, Y)$, $W(X, Y)$ kümelerinin de $L(X, Y)$ uzayının birer alt uzayları oldukları kolayca gösterilebilir.

$T: X \rightarrow Y$ bir operatör ve A , X uzayının bir alt kümesi olmak üzere $T|_A$ ile T operatörünün A kümesine kısıtlanması gösterilecektir.

Tez boyunca aksi belirtilmedikçe $p \geq 1$ ve buna karşılık p^* ise $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ şartını sağlayan $p^* \geq 1$ sayısı olacaktır. Eğer $p = \infty$ ise, $p^* = 1$ alınacak buna karşın eğer $p = 1$ ise, $l_{p^*} = c_0$ olarak alınacaktır.

X ve Y normlu uzaylar olmak üzere lineer, sürekli ve tersi de sürekli olan bir $T : X \rightarrow Y$ operatörü varsa X ve Y (birbirine) topolojik olarak izomorftur, veya kısaca izomorftur diyeceğiz. Eğer ayrıca her $x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ ise X ve Y (birbirine) izometrik olarak izomorfiktir, veya kısaca izometriktir diyeceğiz.

X ve Y birbirine izomorf Banach uzayları olmak üzere X ve Y uzayları arasındaki Banach-Mazur uzaklığı,

$$d_{BM}(X, Y) := \inf \left\{ \|T\| \|T^{-1}\| : T : X \rightarrow Y \text{ izomorfizma} \right\}$$

olarak tanımlanır [23].

Lindenstrauss ve Pelczynski [24] tarafından tanımlanan $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ ve $\mathcal{L}_p$ uzaylarının tanımlarını hatırlatalım. $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \lambda < \infty$ ve X Banach uzayı olsun. Eğer X uzayının her sonlu boyutlu E alt uzayı için, X uzayının E uzayını içeren sonlu boyutlu bir F alt uzayı varsa öyle ki

$$d_{BM}(F, l_p^m) \leq \lambda \quad (m := \text{boy} F)$$

oluyorsa X uzayına bir $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ uzayıdır denir. Eğer X Banach uzayı bir λ için $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ uzayı ise, X uzayına $\mathcal{L}_p$ uzayıdır denir [24].

K kompakt Hausdorff uzayı üzerinde tanımlanan tüm skaler değerli, sürekli fonksiyonların uzayı $C(K)$ ve p -inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların uzayı $L_p(\mu)$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $L_p(\mu)$ uzayı bir $\mathcal{L}_{p,1+\varepsilon}$ uzayıdır ve $C(K)$ uzayı da bir $\mathcal{L}_{\infty,1+\varepsilon}$ uzayıdır [25].

Şimdi $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Banach uzaylarının l_p anlamında sonsuz direkt toplamını hatırlatalım. $\mathcal{A}$ bir indeks kümesi, $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ Banach uzaylarının bir ailesi olsun.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere, herhangi sabit bir p için $\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \right)_p$ ile, $\alpha \in \mathcal{A}$ iken $f(\alpha) \in X_\alpha$

ve $\|f\|_p = \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|f(\alpha)\|^p \right)^{1/p} < \infty$ olacak şekilde tüm $f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ fonksiyonlarının

Banach uzayını göstereceğiz. Eğer $p = \infty$ ise, $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ailelerinin sınırlı uzayı yerine, norm sıfır uzayını göz önüne alacağız. Yani, $\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha\right)_\infty$ ile, $\alpha \in \mathcal{A}$ iken $f(\alpha) \in X_\alpha$, $\|f\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|f(\alpha)\| < \infty$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{\alpha \in \mathcal{A} : \|f(\alpha)\| > \varepsilon\}$ kümesi sonlu olacak şekilde tüm $f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ fonksiyonlarının Banach uzayını göstereceğiz.

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, herhangi sabit bir p için, bu şekilde tanımlanan $\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha\right)_p$ uzayı, $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ Banach uzaylarının l_p anlamında sonsuz direkt toplamı olarak adlandırılır. (Tabii ki burada $p = \infty$ olması durumunda, toplam, c_0 -toplamı olarak alınacaktır.) Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ve tüm X_α uzayları ayrılabilir ise, $\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha\right)_p$ uzayı da ayrılabilir, eğer $1 < p < \infty$ ve tüm X_α uzayları refleksif ise, $\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha\right)_p$ uzayı da refleksiftir [26, sayfa 35-36] veya [27, sayfa 43-44].

Şimdi operatör ideal ve Banach operatör ideallerinin tanımlarını hatırlatalım.

Bir operatör ideali $\mathfrak{A}$, Banach uzayları arasındaki tüm lineer ve sürekli operatörlerin sınıfı $\mathfrak{L}$ nin bir alt sınıfıdır öyle ki, tüm X ve Y Banach uzayları için $\mathfrak{A}$ sınıfının

$$\mathfrak{A}(X, Y) := L(X, Y) \cap \mathfrak{A}$$

bileşenleri aşağıdaki şartları sağlar:

- i) $L(X, Y)$ uzayındaki tüm sonlu ranklı operatörleri içeren lineer bir alt uzaydır,
- ii) ideal özelliği: Eğer $R \in L(X, X_0)$, $S \in \mathfrak{A}(X_0, Y_0)$ ve $T \in L(Y_0, Y)$ ise, $TSR \in \mathfrak{A}(X, Y)$ dir, burada X_0 ve Y_0 Banach uzaylarını göstermektedir [28].

Sonlu ranklı operatörlerin ideali $\mathcal{F}$ en küçük operatör ideal ve tüm lineer, sürekli operatörlerin sınıfı $\mathfrak{L}$ en büyük operatör idealdir.

$\mathfrak{A}$ bir operatör ideali olmak üzere, $A: \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

i) $A|_{\mathfrak{A}(X,Y)}$ tüm X ve Y Banach uzayları için bir norm,

ii) $A(I_{\mathbb{K}}) = 1$, ($I_{\mathbb{K}}, \mathbb{K}$ cismi üzerinde birim operatör)

iii) eğer $R \in L(X, X_0)$, $S \in \mathfrak{A}(X_0, Y_0)$ ve $T \in L(Y_0, Y)$ ise, $A(TSR) \leq \|T\| A(S) \|R\|$

şartlarını sağlıyorsa, $(\mathfrak{A}, A)$ normlu operatör ideal olarak adlandırılır.

Eğer bütün $\mathfrak{A}(X, Y)$ bileşenleri A ya göre tam ise, $(\mathfrak{A}, A)$ Banach operatör ideal olarak adlandırılır [28].

Sonlu ranklı operatörler normlu operatör idealine, kompakt operatörler, zayıf kompakt operatörler, p -kompakt operatörler, tam (olarak) sürekli operatörler, mutlak (olarak) toplanabilir operatörler, nükleer operatörler, Hilbert Schmidt operatörleri ve integral operatörler Banach operatör idealine birer örnektirler [28], [29], [30].

Şimdi p -kompakt küme ve ilişkili kavramları vermeden önce gerekli olacak bazı ön tanımları vereceğiz.

Normlu bir X uzayındaki bir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$ oluyorsa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi X

uzayında p -toplanabilirdir; eğer her $x' \in X'$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|^p < \infty$ oluyorsa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

dizisi X uzayında zayıf p -toplanabilirdir denir [31]. X Banach uzayı ve $1 \leq p < \infty$

olmak üzere $l_p(X)$ ve $l_p^w(X)$ ile, sırasıyla, X uzayının p -toplanabilen ve zayıf p -toplanabilen dizilerinin oluşturdukları Banach uzaylarını göstereceğiz. Bu uzayların her

ikisi de sırasıyla $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p}$ ve $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \sup_{x' \in B_{X'}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|^p \right)^{1/p} \right\}$

normlarıyla Banach uzaylarıdır [31]. Normlu bir X uzayındaki bir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ oluyorsa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi X uzayında sıfıra yakınsaktır denir [31]. X Banach

uzayı olmak üzere $c_0(X)$ ile, X uzayında sıfıra yakınsayan dizilerin Banach uzayını

göstereceğiz. Eğer her $x' \in X'$ için $x'(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ oluyorsa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi X uzayında

zayıf olarak sıfıra yakınsaktır denir [31]. X Banach uzayı olmak üzere $c_0^w(X)$ ile, X uzayında zayıf olarak sıfıra yakınsayan dizilerin Banach uzayını göstereceğiz. Bu uzayların her ikisi de, $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ normu ile Banach uzaylarıdır [31]. X Banach uzayı olmak üzere, $l_p^w(X)$ uzayındaki bir $(x_n)_{n=1}^\infty$ dizisinin p -konveks kabuğu $p-co\{(x_n)_{n=1}^\infty\} := \left\{ \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in B_{l_{p^*}} \right\}$ olarak tanımlanır.

Gözlem 2.1 $(x_n)_{n=1}^\infty$, X Banach uzayında bir sıfır dizisi ve $\bar{\Gamma}((x_n)_{n=1}^\infty)$, $(x_n)_{n=1}^\infty$ dizisinin kapalı mutlak konveks kabuğu olmak üzere $\bar{\Gamma}((x_n)_{n=1}^\infty)$ ve $\left\{ \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in B_{l_1} \right\}$, X uzayında aynı kümeleri gösterirler.

Grothendieck [9], Banach uzayı üzerinde kompakt bir kümenin aşağıdaki şekilde dizisel bir karakterizasyonunu vermiştir.

Teorem 2.1 X Banach uzayının bir K alt kümesinin relatif kompakt olması için gerek ve yeter şart $K \subset \bar{\Gamma}((x_n)_{n=1}^\infty)$ olacak şekilde X uzayında bir $(x_n)_{n=1}^\infty$ sıfır dizisinin mevcut olmasıdır [9], [23].

X bir Banach uzayı ve $K \subset X$ olsun. Eğer K , X uzayında relatif kompakt bir küme ise bunu $K \subset\subset X$ şeklinde göstereceğiz.

Grothendieck' in [9] bu karakterizasyonundan esinlenerek Sinha ve Karn [8] kompaktlık kavramının daha güçlü bir formu olarak, X Banach uzayında p -kompakt küme kavramını tanımlamışlardır.

Tanım 2.1 X Banach uzayı, $K \subset X$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer, $K \subset p-co\{(x_n)_{n=1}^\infty\}$ olacak şekilde $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$ varsa ($p = \infty$ ise, $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0(X)$ alınır) K ya X uzayının relatif p -kompakt alt kümesi denir [8].

X bir Banach uzayı ve $K \subset X$ olsun. Eğer K , X uzayında relatif p -kompakt bir küme ise bunu $K \subset\subset_p X$ şeklinde göstereceğiz. Kapalı ve relatif p -kompakt olan bir kümeyi p -kompakt küme olarak adlandıracacağız. Belirtelim ki, $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0(X)$ iken

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_1} \right\} = \bar{\Gamma}((x_n)_{n=1}^{\infty}) \text{ olduğundan (Gözlem 2.1), Grothendieck' in [9]}$$

kompakt kümelerin karakterizasyonu teoreminden (Teorem 2.1) dolayı, kompakt bir küme ∞ -kompakt bir küme olarak göz önüne alınabilir.

Aşağıdaki lemma literatürde iyi bilinen kanıtlaması kolay bir sonuçtur.

Lemma 2.1 a) X Banach uzayı ve $1 < p < \infty$ olmak üzere $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ ise, $p\text{-co}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ kümesi X uzayının kompakt, konveks ve dengeli bir alt kümesidir.

b) X Banach uzayı ve $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1(X)$ ise, $p\text{-co}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ kümesi X uzayının relatif kompakt, konveks ve dengeli bir alt kümesidir.

c) X Banach uzayı ve $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(X)$ ise, $\bar{\Gamma}((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \infty\text{-co}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ kümesi X uzayının kompakt, konveks ve dengeli bir alt kümesidir.

Not Yukarıdaki lemmada $p = 1$ durumunda $p\text{-co}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ kümesindeki skalerler eğer B_{c_0} yerine $B_{l_{\infty}}$ dan alınırsa küme, aslında kompakt olur.

Böylece Lemma 2.1 in bir sonucu olarak, X Banach uzayında relatif p -kompakt bir küme, relatif kompakttır [8]. Diğer taraftan Delgado vd. [15, Theorem 3.14] de her sonsuz boyutlu Banach uzayının, her $1 \leq p < \infty$ için relatif kompakt olup, relatif p -kompakt olmayan kümelere sahip olduğunu göstermişlerdir.

Gözlem 2.2 Lemma 2.1 den dolayı göz önüne alacağımız relatif p -kompakt kümeleri gerekli olduğu takdirde ayrıca, dengeli ve konveks olarak kabul etmek genelliği bozmayacaktır.

Lemma 2.2 $1 \leq p < q \leq \infty$ olmak üzere, X Banach uzayında relatif p -kompakt bir küme, relatif q -kompakttır [8].

Pineiro ve Delgado [32, Proposition 3.6] da, $1 \leq q < p \leq 2$ için, relatif p -kompakt kümelerin, relatif q -kompakt olduğu sonsuz boyutlu Banach uzaylarının mevcut olduğunu göstermelerine karşın, [32, Proposition 3.5] de $2 \leq q < p$ için, her relatif p -

kompakt bir kümenin, relatif q – kompakt olduğu sonsuz boyutlu bir Banach uzayının mevcut olmadığını göstermişlerdir.

Tanım 2.2 X Banach uzayı, $K \subset X$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $K \subset p\text{-}co\{(x_n)_{n=1}^\infty\}$ olacak şekilde $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p^w(X)$ varsa ($1 \leq p < \infty$) K ya X uzayının relatif zayıf p – kompakt alt kümesi denir. Eğer $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0^w(X)$ ise, K ya X uzayının relatif zayıf ∞ – kompakt alt kümesi denir [8].

Kompaktlıktaki duruma benzer olarak aşağıdaki anonim sonucu vereceğiz.

Lemma 2.3 X Banach uzayı ve $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0^w(X)$ olsun. Bu takdirde,

$L := \left\{ \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in B_{l_1} \right\}$ kümesi konveks, dengeli, zayıf kompakttır ve $L = \overline{\Gamma((x_n)_{n=1}^\infty)}$ dir.

Lemma 2.3' ün bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.1 X Banach uzayı ve $K \subset X$ olsun. Eğer K relatif zayıf ∞ – kompakt bir küme ise, $\overline{K}^{\sigma(X, X')}$ zayıf kompakttır, yani K relatif zayıf kompakttır. Ek olarak K konveks ise, $\overline{K}$ zayıf kompakt olacaktır.

[33, Theorem 1] de kapalı konveks kabuk, kapalı mutlak konveks kabuk ile değiştirildiğinde sonuç doğru olmaya devam edeceğinden kompaktlıktaki durumunun aksine, relatif zayıf kompakt bir kümenin, relatif zayıf ∞ – kompakt olması gerekmez. Sonuç 2.1 de göz önüne alındığında, her $1 < p \leq \infty$ için relatif zayıf p – kompakt kümeler, relatif zayıf kompakttır [15], fakat $p = 1$ için bu özellik genelde doğru değildir [15]. Örneğin, $p = 1$ için $B_{c_0} = p\text{-}co\{(e_n)_{n=1}^\infty\}$, $(e_n)_{n=1}^\infty \in l_1^w(c_0)$ olduğundan, B_{c_0} relatif zayıf 1 – kompakt kümedir. Fakat c_0 refleksif olmadığından, B_{c_0} relatif zayıf kompakt bir küme değildir [15].

Tanım 2.3 X, Y Banach uzayları, $1 \leq p \leq \infty$ ve $T \in L(X, Y)$ olsun.

a) Eğer $T(B_X)$, Y uzayının relatif p – kompakt bir alt kümesi ise, T ye p – kompakt bir operatör denir [8].

b) Eğer $T(B_X)$, Y uzayının relatif zayıf p –kompakt bir alt kümesi ise, T ye zayıf p –kompakt bir operatör denir [8].

X uzayından Y uzayına tanımlanan bütün p –kompakt operatörlerin uzayını $K_p(X,Y)$ ile bütün zayıf p –kompakt operatörlerin uzayını da $W_p(X,Y)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.1 ve Lemma 2.1’ den dolayı $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere her p –kompakt operatör kompakt operatördür, ayrıca Lemma 2.2’ den dolayı $1 \leq p < q \leq \infty$ olmak üzere her p –kompakt operatör q –kompakt operatördür. Fakat bu ifadelerin tersleri genelde doğru değildir.

Örnekler 2.1

a) $1 < p < \infty$ ve $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0 \setminus l_p$ olmak üzere $T: l_p \rightarrow l_p$, $T((x_n)_{n=1}^\infty) = (a_n x_n)_{n=1}^\infty$ şeklinde tanımlanan operatör kompakt olan fakat p –kompakt olmayan bir operatördür [10].

b) $1 \leq p < q \leq pq^*$, $p < q \leq q^*$ ve $(a_n)_{n=1}^\infty \in l_q \setminus l_p$ olmak üzere $T: l_q \rightarrow l_p$, $T((x_n)_{n=1}^\infty) = (a_n x_n)_{n=1}^\infty$ şeklinde tanımlanan operatör q –kompakt olan fakat p –kompakt olmayan bir operatördür [34].

Tanım 2.4 X, Y Banach uzayları ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu takdirde her $T \in K_p(X,Y)$ için, $k_p: K_p(X,Y) \rightarrow [0, \infty)$

$$k_p(T) := \inf \left\{ \left\| (y_n)_{n=1}^\infty \right\|_p : (y_n)_{n=1}^\infty \in l_p(Y) \text{ ve } T(B_X) \subset p\text{-co}\{(y_n)_{n=1}^\infty\} \right\}$$

şeklinde tanımlanan k_p tasviri $K_p(X,Y)$ uzayı üzerinde bir normdur ve (K_p, k_p) bir Banach uzayıdır [8], [15]. Burada $p = \infty$ durumunda, k_p normu supremum normu ile aynıdır [14].

2.2 Kompakt Operatörlerin Evrensel Banach Uzayı Vasıtasıyla Çarpanlara Ayrılması

X ve Y normlu uzaylar olsun. $T: X \rightarrow Y$ lineer (sürekli) operatör olmak üzere, eğer bir normlu uzay Z ve lineer (sürekli) $R: X \rightarrow Z$, $S: Z \rightarrow Y$ operatörleri varsa öyle ki $T = S \circ R$ ise o zaman T operatörü Z uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabilir denir.

Öncelikle Johnson [1] tarafından tanımlanan C_p evrensel çarpanlara ayırma uzayının tanımını verelim.

$(G_n)_{n=1}^{\infty}$ sonlu boyutlu Banach uzaylarının bir dizisi olsun öyle ki,

i) her sonlu boyutlu X Banach uzayı ve her $\varepsilon > 0$ için, $d_{BM}(X, G_n) < 1 + \varepsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ mevcut olsun [35] ve,

ii) her $i \in \mathbb{N}$ için, $\{n : d_{BM}(G_n, G_i) = 1\}$ kümesi sonsuz olsun.

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere sabit bir p için C_p uzayı, G_n uzaylarının l_p anlamında sonsuz direkt toplamı olarak tanımlanır, yani $C_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n \right)_p$ dir ($p = \infty$ durumunda l_{∞} – toplamı, c_0 – toplamını gösterecektir) [1].

Johnson [1] herhangi sabit bir $1 \leq p \leq \infty$ için her $T \in \overline{F(X, Y)}$ operatörünün C_p uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabilirliğini göstermiştir.

Teorem 2.2 X, Y Banach uzayları ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $T \in \overline{F(X, Y)}$ ise, $T = v \circ u$ olacak şekilde $u \in \overline{F(X, C_p)}$ ve $v \in \overline{F(C_p, Y)}$ operatörleri vardır [1].

Bu teorem herhangi sabit bir $1 \leq p \leq \infty$ için C_p uzayının $\overline{F(X, Y)}$ operatörler uzayı için evrensel Banach uzayı olduğunu gösterir. Johnson' nın [1] bu teoreminden hareketle Figiel [2] her kompakt operatörün C_p uzayının kapalı bir alt uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabilirliğini göstermiştir.

Teorem 2.3 X, Y Banach uzayları ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $S \in K(X, Y)$ ise, $S = v \circ u$ olacak şekilde C_p nin kapalı bir W alt uzayı, $u \in K(X, W)$ ve $v \in K(W, Y)$ operatörleri vardır [2].

Yukarıdaki teoremin aşağıdaki versiyonu Banach uzayları arasındaki her kompakt operatörün, evrensel bir Banach uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabilirliğini gösterir.

Teorem 2.4 X ve Y Banach uzayları olsun. Bu takdirde, her $T \in K(X, Y)$ operatörü evrensel bir Z_{FJ} Banach uzayı vasıtasıyla $T = u \circ v$, $v \in K(X, Z_{FJ})$, $u \in K(Z_{FJ}, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir. Burada Z_{FJ} uzayı $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere ve W , C_p uzayının kapalı alt uzayları üzerinden seçilmek üzere, sabit bir p için

$$Z_{FJ} = \left(\sum_{W \subset C_p} W \right)_p \text{ şeklindedir (} p = \infty \text{ ise, } c_0 \text{ toplamı alınır) [1] ve [2].}$$

Aron vd. [7] de Teorem 2.4' teki Z_{FJ} uzayının aynı zamanda $K_{W^*}(X', Y)$ uzayındaki operatörlerin çarpanlara ayrılışı için de evrensel Banach uzayı olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 2.5 X ve Y Banach uzayları olsun. Bu takdirde, her $T \in K_{W^*}(X', Y)$ operatörü, $T = B \circ A$, $A \in K_{W^*}(X', Z_{FJ})$, $B \in K(Z_{FJ}, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir [7].

Randtke [3] tanım kümesi $X = \mathcal{L}_1$, Terzioğlu [4] ve Dazord [5] tanım kümesi $X = \mathcal{L}_\infty$ olan kompakt operatörler için aşağıdaki çarpanlara ayırma teoremlerini elde etmişlerdir.

Teorem 2.6 X bir $\mathcal{L}_1$ uzayı ve Y Banach uzayı olsun. Eğer $T \in K(X, Y)$ ise, $T = B \circ A$ olacak şekilde $A \in K(X, l_1)$ ve $B \in K(l_1, Y)$ operatörleri vardır [3].

Teorem 2.7 X bir $\mathcal{L}_\infty$ uzayı ve Y Banach uzayı olsun. Eğer $S \in K(X, Y)$ ise, $S = A \circ u$ olacak şekilde $u \in K(X, c_0)$ ve $A \in K(c_0, Y)$ operatörleri vardır [4], [5].

Graves ve Ruess [6], Teorem 2.6 ve Teorem 2.7' yi kompakt bir operatörün çarpanlara ayrılmasından kompakt operatörlerin kompakt alt kümelerindeki operatörlerin

simultane olarak çarpanlara ayrılmasına genişletmişlerdir. Bu sonuç gelecek olan bölümde Teorem 2.8' de ifade edilecektir.

2.3 Kompakt Operatörlerin Kompakt Alt Kümelerinin Evrensel Banach Uzayı Vasıtasıyla Düzgün Olarak Çarpanlara Ayrılması

Önce Graves ve Ruess' in [6] da $X = \mathcal{L}_1$ veya $X = \mathcal{L}_\infty$ olması durumunda elde ettikleri sonucu verelim.

Teorem 2.8 X bir $\mathcal{L}_1$ uzayı (veya $\mathcal{L}_\infty$ uzayı), Y Banach uzayı ve C , $K(X, Y)$ uzayının relatif kompakt bir alt kümesi olsun. Bu takdirde, bir $u \in K(X, l_1)$ (veya $u \in K(X, c_0)$) operatörü ve $K(l_1, Y)$ (veya $K(c_0, Y)$) uzayının relatif kompakt bir $\{A_S : S \in C\}$ alt kümesi vardır öyle ki her $S \in C$ için, $S = A_S \circ u$ dur [6].

Aron vd. [7] keyfi Banach uzayları üzerinde tanımlanan kompakt operatörler için evrensel Banach uzayı oluşturarak Teorem 2.8' i özel Banach uzaylarından keyfi Banach uzaylarına genişletmişlerdir. Z_{FJ} uzayı Teorem 2.4' te tanımlanan uzayı göstermek üzere, sözü edilen sonucu önce dual uzaylar için elde etmişlerdir.

Teorem 2.9 X ve Y Banach uzayları olsun. Bu takdirde, $K_{w*}(X', Y)$ uzayının her relatif kompakt H alt kümesi için, bir $u \in K_{w*}(X', Z_{FJ})$ operatörü, $K(Z_{FJ}, Z_{FJ})$ uzayının relatif kompakt bir $\{B_T : T \in H\}$ alt kümesi ve bir $v \in K(Z_{FJ}, Y)$ operatörü vardır öyle ki her $T \in H$ için, $T = v \circ B_T \circ u$ dur [7].

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak Aron vd. [7] aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Sonuç 2.2 X ve Y Banach uzayları olsun. Bu takdirde, $K(X, Y)$ uzayının her relatif kompakt H alt kümesi için, bir $u \in K(X, Z_{FJ})$ operatörü, $K(Z_{FJ}, Z_{FJ})$ uzayının relatif kompakt bir $\{B_T : T \in H\}$ alt kümesi ve bir $v \in K(Z_{FJ}, Y)$ operatörü vardır öyle ki her $T \in H$ için, $T = v \circ B_T \circ u$ dur [7].

Gelecek bölümde, kompakt operatörler için verilen basit çarpanlara ayırma sonuçlarının p – kompakt versiyonlarını vereceğiz.

2.4 p – Kompakt Operatörler İçin Çarpanlara Ayırma Teoremleri

Bu bölümde Sinha ve Karn [8], Choi ve Kim [12] ve Galicer vd. [19] tarafından p – kompakt operatörler için elde edilen çarpanlara ayırma teoremlerini vereceğiz.

Sinha ve Karn [8] de $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ ($p = \infty$ ise $p^* = 1$) olmak üzere p – kompakt bir operatörün l_{p^*} uzayının bölüm uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabilceğini göstermişlerdir.

Teorem 2.10 X ve Y Banach uzayları ve $1 \leq p \leq \infty$ ve $T \in L(X, Y)$ olsun. $T \in K_p(X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $T = \hat{T}_y \circ Q_y$ olacak şekilde bir $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in l_p(Y)$ dizisi, $Q_y \in W_p(X, l_{p^*} / \ker T_y)$ ve $\hat{T}_y \in K_p(l_{p^*} / \ker T_y, Y)$ operatörlerinin mevcut olmasıdır [8].

Sinha ve Karn'ın [8] bu teoreminden hareketle Choi ve Kim [12] yukarıdaki teoremden verilen $\hat{T}_y : l_{p^*} / \ker T_y \rightarrow Y$ p – kompakt operatörünü, l_1 uzayının bölüm uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayırarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.11 X ve Y Banach uzayları ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu takdirde, $T \in K_p(X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $T = \hat{V} \circ \hat{U} \circ Q_y$ olacak şekilde $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in l_p(Y)$ dizisi, l_1 uzayının kapalı bir M alt uzayı, p – kompakt $\hat{U} : l_{p^*} / \ker T_y \rightarrow l_1 / M$ ve kompakt $\hat{V} : l_1 / M \rightarrow Y$ operatörlerinin mevcut olmasıdır [12].

Galicer vd. [19], Teorem 2.10 ve Teorem 2.11' i kullanarak p – kompakt operatörler için aşağıdaki çarpanlara ayırma teoremini elde etmişlerdir.

Teorem 2.12 X ve Y Banach uzayları, $1 \leq p < \infty$ ve $T \in L(X, Y)$ olsun. T operatörünün p – kompakt olması için gerek ve yeter şart T nin, T_0 operatörü p – kompakt, R ve S operatörleri kompakt olmak üzere $T = S \circ T_0 \circ R$ olacak şekilde çarpanlara ayrılmasıdır. Ayrıca bu durumda $k_p(T) = \inf \{ \|S\| k_p(T_0) \|R\| \}$ dir. Burada infimum yukarıdaki tüm muhtemel çarpanlara ayrılma üzerinden alınır [19].

Teoremin 2.12' nin ispatı literatürde iyi bilinen aşağıdaki lemmalar kullanılarak ispatlanabilir. Bu lemmalar sonraki bölümlerde kullanışlı olacaktır.

Lemma 2.4 $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{c_0}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu takdirde, $L := \left\{ (\beta_n \lambda_n)_{n=1}^{\infty} : (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_p} \right\}$ kümesi B_{l_p} nin kompakt bir alt kümesidir.

Gözlem 2.3 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Lemma 2.4' teki L kümesinin relatif kompakt olduğunu göstermek için $T: l_p \rightarrow l_p$, $T((\lambda_n)_{n=1}^{\infty}) = (\beta_n \lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{c_0}$ şeklinde tanımlı diyagonal operatörün kompakt olduğunu göstermek yeterlidir.

Lemma 2.5 Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ olmak üzere, $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \geq 1$ olacak şekilde artan ve sonsuza ıraksayan bir $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \varepsilon$ dur.

Lemma 2.5' den yine literatürde iyi bilinen aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.3 X Banach uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ ve $\varepsilon > 0$ ise,

$$\left(\frac{x_n}{\beta_n} \right)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X) \text{ ve } \left\| \left(\frac{x_n}{\beta_n} \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_p \leq \left\| (x_n)_{n=1}^{\infty} \right\|_p (1 + \varepsilon) \text{ olacak şekilde bir } \beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{c_0}$$

dizisi vardır.

 **p –KOMPAKT OPERATÖRLERİN EVRENSEL BANACH UZAYI VASITASIYLA
DÜZGÜN OLARAK ÇARPANLARA AYRILMASI**

Aron vd. [7] de Banach uzayları arasındaki kompakt operatörlerin relatif kompakt alt kümelerinin (düzgün) çarpanlara ayrılışını elde etmişlerdir. Burada onların metodunun uygun ve dikkatli olarak modifiye edilmesiyle, kabaca söylersek, $r \geq 2$, $1 \leq p \leq r < \infty$ olmak üzere p –kompakt operatörlerin relatif r –kompakt alt kümelerinin (düzgün) olarak çarpanlara ayrılışını elde edeceğiz.

3.1 p –Kompakt Operatörlerin Evrensel Banach Uzayı Vasıtasıyla Çarpanlara Ayrılması

Teorem 2.10, Teorem 2.11 ve Teorem 2.12’ yi kullanarak p –kompakt operatörleri evrensel Banach uzayları vasıtasıyla üç farklı/alternatif şekilde çarpanlara ayırabiliriz. Yani, bir p –kompakt T operatörünü Teorem 2.10’ nu kullanarak evrensel bir Banach uzayı vasıtasıyla A operatörü zayıf p –kompakt ve B operatörü p –kompakt olmak üzere $T = B \circ A$ olacak şekilde; Teorem 2.11’ i kullanarak evrensel bir Banach uzayı vasıtasıyla u operatörü p –kompakt ve v operatörü kompakt olmak üzere $T = v \circ u$ olacak şekilde; ve Teorem 2.12’ yi kullanarak evrensel bir Banach uzayı vasıtasıyla u operatörü kompakt ve v operatörü p –kompakt olmak üzere $T = v \circ u$ olacak şekilde çarpanlara ayırabiliriz.

Aşağıda verilen ispatlar sırasıyla bu sözü edilen teoremlerin ispatlarının karşılık gelen modifikasyonlarıdır.

Aşağıdaki ilk teoremde özel olarak $p = \infty$ durumu kompaktlık durumuna karşılık gelmektedir, ki bu ise Johnson [1] ve Figiel' in [2] sonucuna göre, göreceli olarak daha zayıf bir sonuçtur.

Teorem 3.1 X ve Y Banach uzayları ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu takdirde, her $T \in K_p(X, Y)$ operatörü evrensel bir $Z^{(p)}$ Banach uzayı vasıtasıyla, $T = B \circ A$, $A \in W_p(X, Z^{(p)})$, $B \in K_p(Z^{(p)}, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir. Burada $Z^{(p)}$ uzayı, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere ve $W^{(p)}$, l_{p^*} uzayının kapalı olan tüm alt uzaylarından alınmak üzere sabit bir q için $Z^{(p)} := \left(\sum_{W^{(p)}} l_{p^*} / W^{(p)} \right)_q$ şeklindedir.

İspat $1 \leq p \leq \infty$ ve $T \in K_p(X, Y)$ olsun. Bu takdirde, Teorem 2.10' dan biliyoruz ki, $T = \hat{T}_y \circ Q_y$ olacak şekilde $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in l_p(Y)$ dizisi, $Q_y \in W_p(X, l_{p^*} / \ker T_y)$ ve $\hat{T}_y \in K_p(l_{p^*} / \ker T_y, Y)$ operatörleri vardır, yani, aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow Q_y & \nearrow \hat{T}_y \\ & l_{p^*} / \ker T_y & \end{array}$$

$l_{p^*} / \ker T_y$ uzayı, $Z^{(p)}$ uzayının tanımındaki $l_{p^*} / W^{(p)}$ uzaylarından biri olacağından J , l_{p^*} uzayının kapalı olan tüm alt uzaylarının bir ailesi olmak üzere,

$$I_{l_{p^*} / \ker T_y} : l_{p^*} / \ker T_y \rightarrow Z^{(p)}, \quad I_{l_{p^*} / \ker T_y} \left([(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \right) = (x_{W^{(p)}})_{W^{(p)} \in J}$$

burada $x_{W^{(p)}} = \begin{cases} [(\alpha_n)_{n=1}^\infty], & W^{(p)} = \ker T_y \\ 0, & W^{(p)} \neq \ker T_y \end{cases}$ şeklinde tanımlanan, normu bir olan doğal

gömmeyi ve normu bir olan

$$P_{l_{p^*} / \ker T_y} : Z^{(p)} \rightarrow l_{p^*} / \ker T_y, \quad P_{l_{p^*} / \ker T_y} \left((x_{W^{(p)}})_{W^{(p)} \in J} \right) = x_{\ker T_y}$$

izdüşüm dönüşümünü göz önüne alabiliriz. Bu takdirde $P_{l_{p^*}/\ker T_y} \circ I_{l_{p^*}/\ker T_y}, l_{p^*}/\ker T_y$ üzerinde birim dönüşümdür. Gerçekten $[(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \in l_{p^*}/\ker T_y$ olmak üzere,

$$\left(P_{l_{p^*}/\ker T_y} \circ I_{l_{p^*}/\ker T_y} \right) [(\alpha_n)_{n=1}^\infty] = P_{l_{p^*}/\ker T_y} \left((x_{W^{(p)}})_{W^{(p)} \in J} \right) = x_{\ker T_y} = [(\alpha_n)_{n=1}^\infty]$$

olup,

$$l_{p^*}/\ker T_y \xrightarrow{I_{l_{p^*}/\ker T_y}} Z^{(p)} \xrightarrow{P_{l_{p^*}/\ker T_y}} l_{p^*}/\ker T_y$$

bileşkesi, yani, $P_{l_{p^*}/\ker T_y} \circ I_{l_{p^*}/\ker T_y}$ birim dönüşümdür. O halde

$T = \hat{T}_y \circ Q_y = \hat{T}_y \circ P_{l_{p^*}/\ker T_y} \circ I_{l_{p^*}/\ker T_y} \circ Q_y$ olacaktır. Şimdi $A := I_{l_{p^*}/\ker T_y} \circ Q_y$ ve

$B := \hat{T}_y \circ P_{l_{p^*}/\ker T_y}$ olsun. Böylece

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow A & \nearrow B \\ & Z^{(p)} & \end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani, $T = B \circ A$ olacak şekilde $A \in W_p(X, Z^{(p)}), B \in K_p(Z^{(p)}, Y)$ dönüşümleri elde edilir.

Teorem 3.2 X ve Y Banach uzayları ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu takdirde, her $T \in K_p(X, Y)$ operatörü evrensel bir Z Banach uzayı vasıtasıyla, $T = v \circ u$, $u \in K_p(X, Z), v \in K(Z, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir. Burada Z uzayı, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere ve G, l_1 uzayının kapalı olan tüm alt uzaylarından alınmak üzere, sabit bir q için $Z := \left(\sum_G l_1 / G \right)_q$ şeklindedir.

İspat $1 \leq p < \infty$ ve $T \in K_p(X, Y)$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.11 gereğince M, l_1 uzayının kapalı bir alt uzayı olmak üzere $T = \hat{V} \circ \hat{U} \circ Q_y$ olacak şekilde bir $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in l_p(Y)$ dizisi, zayıf p -kompakt $Q_y : X \rightarrow l_{p^*}/\ker T_y$, p -kompakt

$\hat{U}: l_{p^*}/\ker T_y \rightarrow l_1/M$ ve kompakt $\hat{V}: l_1/M \rightarrow Y$ operatörleri vardır. O halde $A:=\hat{U} \circ Q_y$ ve $B:=\hat{V}$ dersek, $T = B \circ A$, $A \in K_p(X, l_1/M)$ ve $B \in K(l_1/M, Y)$ elde ederiz. l_1/M , Z uzayının tanımındaki l_1/G uzaylarından biri olacağından J , l_1 uzayının kapalı olan tüm alt uzaylarının bir ailesi olmak üzere,

$$I_{l_1/M}: l_1/M \rightarrow Z, \quad I_{l_1/M} \left([(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \right) = (x_G)_{G \in J}$$

burada $x_G = \begin{cases} [(\alpha_n)_{n=1}^\infty], & G = M \\ 0, & G \neq M \end{cases}$ şeklinde tanımlanan, normu bir olan doğal gömmeyi

ve normu bir olan

$$P_{l_1/M}: Z \rightarrow l_1/M, \quad P_{l_1/M} \left((x_G)_{G \in J} \right) = x_M$$

izdüşüm dönüşümünü göz önüne alabiliriz. Bu takdirde, $P_{l_1/M} \circ I_{l_1/M}$, l_1/M üzerinde birim dönüşümdür. Gerçekten $[(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \in l_1/M$ olmak üzere,

$$(P_{l_1/M} \circ I_{l_1/M}) \left([(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \right) = P_{l_1/M} \left((x_G)_{G \in J} \right) = x_M = [(\alpha_n)_{n=1}^\infty]$$

olup

$$l_1/M \xrightarrow{I_{l_1/M}} Z \xrightarrow{P_{l_1/M}} l_1/M$$

bileşkesi, yani, $P_{l_1/M} \circ I_{l_1/M}$ birim dönüşümdür. O halde $T = B \circ A = B \circ P_{l_1/M} \circ I_{l_1/M} \circ A$ olacaktır. Şimdi $u := I_{l_1/M} \circ A$ ve $v := B \circ P_{l_1/M}$ olsun. Böylece

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow u & \nearrow v \\ & Z & \end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani, $T = v \circ u$ olacak şekilde $u \in K_p(X, Z)$, $v \in K(Z, Y)$ dönüşümleri elde edilir.

Teorem 3.3 X ve Y Banach uzayları ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu takdirde, her $T \in K_p(X, Y)$ operatörü evrensel bir $Z^{(p)}$ Banach uzayı vasıtasıyla, $T = v \circ u$, $u \in K(X, Z^{(p)})$, $v \in K_p(Z^{(p)}, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir. Burada $Z^{(p)}$ uzayı, Teorem 3.1' de tanımlanan uzay ile aynıdır.

İspat $1 \leq p < \infty$ ve $T \in K_p(X, Y)$ olsun. Bu takdirde, Teorem 2.12' den biliyoruz ki, T operatörü $T = \tilde{\theta}_z \circ R$, $z = (z_n)_{n=1}^\infty \in l_p(Y)$, $R \in K(X, l_{p^*}/\ker \theta_z)$, $\tilde{\theta}_z \in K_p(l_{p^*}/\ker \theta_z, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir. $l_{p^*}/\ker \theta_z$ uzayı, $Z^{(p)}$ uzayının tanımındaki $l_{p^*}/W^{(p)}$ uzaylarından biri olacağından, buradan itibaren Teorem 3.1' in ispatındaki adımlar izlenerek $T = v \circ u$ olacak şekilde $u \in K(X, Z^{(p)})$, $v \in K_p(Z^{(p)}, Y)$ dönüşümleri elde edilir. Gerçekten de J , l_{p^*} uzayının kapalı olan tüm alt uzaylarının bir ailesi olmak üzere,

$$I_{l_{p^*}/\ker \theta_z} : l_{p^*}/\ker \theta_z \rightarrow Z^{(p)}, \quad I_{l_{p^*}/\ker \theta_z} \left([(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \right) = (x_{W^{(p)}})_{W^{(p)} \in J}$$

burada $x_{W^{(p)}} = \begin{cases} [(\alpha_n)_{n=1}^\infty], & W^{(p)} = \ker \theta_z \\ 0, & W^{(p)} \neq \ker \theta_z \end{cases}$ şeklinde tanımlanan, normu bir olan doğal gömmeyi ve normu bir olan

$$P_{l_{p^*}/\ker \theta_z} : Z^{(p)} \rightarrow l_{p^*}/\ker \theta_z, \quad P_{l_{p^*}/\ker \theta_z} \left((x_{W^{(p)}})_{W^{(p)} \in J} \right) = x_{\ker \theta_z}$$

izdüşüm dönüşümünü göz önüne alabiliriz. Bu takdirde $P_{l_{p^*}/\ker \theta_z} \circ I_{l_{p^*}/\ker \theta_z} : l_{p^*}/\ker \theta_z$ üzerinde birim dönüşümdür. Gerçekten $[(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \in l_{p^*}/\ker \theta_z$ olmak üzere,

$$\left(P_{l_{p^*}/\ker \theta_z} \circ I_{l_{p^*}/\ker \theta_z} \right) \left([(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \right) = P_{l_{p^*}/\ker \theta_z} \left((x_{W^{(p)}})_{W^{(p)} \in J} \right) = x_{\ker \theta_z} = [(\alpha_n)_{n=1}^\infty]$$

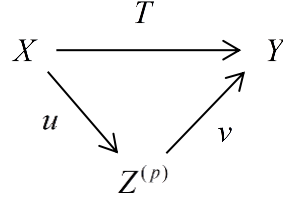
olup

$$l_{p^*}/\ker \theta_z \xrightarrow{I_{l_{p^*}/\ker \theta_z}} Z^{(p)} \xrightarrow{P_{l_{p^*}/\ker \theta_z}} l_{p^*}/\ker \theta_z$$

bileşkesi, yani, $P_{I_{p^*}/\ker \theta_z} \circ I_{I_{p^*}/\ker \theta_z}$ birim dönüşümdür. O halde,

$T = \tilde{\theta}_z \circ R = \tilde{\theta}_z \circ P_{I_{p^*}/\ker \theta_z} \circ I_{I_{p^*}/\ker \theta_z} \circ R$ dir. Şimdi $u := I_{I_{p^*}/\ker \theta_z} \circ R$, $v := \tilde{\theta}_z \circ P_{I_{p^*}/\ker \theta_z}$ olsun.

Böylece



diyagramı değişmeli, yani, $T = v \circ u$ olacak şekilde $u \in K(X, Z^{(p)})$, $v \in K_p(Z^{(p)}, Y)$ dönüşümleri elde edilir.

Bir sonraki bölümde p -kompakt operatörlerin relatif r -kompakt alt kümelerinin evrensel Banach uzayı vasıtasıyla düzgün olarak çarpanlara ayrılmasına ilişkin sonuçları elde edeceğiz. Teorem 3.3, bir sonraki kısımda verilecek olan Teorem 3.4' ün ispatında kullanılacaktır.

3.2 p -Kompakt Operatörlerin Relatif r -Kompakt Alt Kümelerinin Evrensel Banach Uzayı Vasıtasıyla (Düzgün Olarak) Çarpanlara Ayrılması

Şimdi, $r \geq 2$ ve $1 \leq p \leq r < \infty$ olmak üzere bu bölümün hemen başında bahsedilen p -kompakt operatörlerin, relatif r -kompakt alt kümelerinin (düzgün olarak) çarpanlara ayrılması problemini göz önüne alacağız. Amacımıza ulaşmak için gerekli olan, aşağıda ardışık olarak verilecek olan dört lemmayı kullanacağız.

Lemma 3.1 (p -kompakt kümelerin yükseltilmesi) X Banach uzayı, N , X uzayının kapalı bir alt uzayı, $Q_N^X : X \rightarrow X/N$ bölüm tasviri ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere K , X/N uzayının relatif p -kompakt bir alt kümesi olsun. Bu takdirde, $K \subset Q_N^X(C)$ olacak şekilde X uzayının relatif p -kompakt bir C alt kümesi vardır.

İspat: $1 \leq p < \infty$ ve K , X/N uzayının relatif p -kompakt bir alt kümesi olsun. Bu

takdirde, $K \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}} \right\}$ olacak şekilde bir $(X_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X/N)$ dizisi

vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| < \|X_n\| + \frac{1}{n^2}$ olacak şekilde bir $x_n \in X_n$ seçebiliriz. Bu durumda,

$$\|x_n\|^p < \left(\|X_n\| + \frac{1}{n^2} \right)^p \leq 2^p \left(\|X_n\|^p + \frac{1}{n^{2p}} \right)$$

olup $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|X_n\|^p + \frac{1}{n^{2p}} \right) < \infty$ dur. Böylece $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ dir. Bu takdirde

$C := p\text{-co}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$, X uzayının relatif p -kompakt bir alt kümesidir. Şimdi

$K \subset Q_N^X(C)$ olduğunu gösterelim. $x \in K$ ise, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$ olacak şekilde bir

$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}}$ dizisi vardır. Q_N^X bölüm tasviri olduğundan,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Q_N^X(x_n) = Q_N^X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right) \in Q_N^X(C)$$

dir. Böylece $x \in Q_N^X(C)$ olup $K \subset Q_N^X(C)$ dir.

Aşağıdaki lemma bize örten, sürekli, lineer bir operatörün görüntü kümesindeki herhangi bir p -kompakt kümenin daima, operatörün tanım kümesindeki bir p -kompakt kümenin, operatör tarafından görüntüsü içinde kaldığını söyler.

Lemma 3.2 X ve Y Banach uzayları, $T : X \rightarrow Y$ lineer, sürekli, örten bir dönüşüm ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer H , Y uzayının relatif p -kompakt bir alt kümesi ise $H \subset T(A)$ olacak şekilde X uzayının relatif p -kompakt bir A alt kümesi vardır.

İspat $T : X \rightarrow Y$ lineer, sürekli, örten bir dönüşüm olduğundan [29, B.3.7 Proposition] gereğince, $T = T_0 \circ Q$ olacak şekilde $Q : X \rightarrow X / N(T)$ bölüm tasviri ve $T_0 : X / N(T) \rightarrow Y$ topolojik izomorfizması vardır. Eğer H , Y uzayının relatif p -kompakt bir alt kümesi ise, $T_0(C) = H$ olacak şekilde $X / N(T)$ uzayının relatif p -kompakt bir C alt kümesi vardır. Gerçekten T_0 izomorfizma olduğundan, T_0^{-1} lineer ve sürekli bir dönüşümdür. Relatif p -kompakt bir kümenin lineer ve sürekli bir dönüşüm altındaki görüntüsü de relatif p -kompakt bir küme olduğundan $T_0^{-1}(H)$,

$X / N(T)$ uzayında relatif p -kompakt bir kümedir. Şimdi $C := T_0^{-1}(H)$ olsun. (O halde $T_0(C) = H$ dir) Bu takdirde Lemma 3.1 gereğince $C \subset Q(A)$ olacak şekilde X uzayının relatif p -kompakt bir A alt kümesi vardır. Böylece $H = T_0(C) \subset T_0(Q(A)) = T(A)$ elde edilir.

Yukarıdaki lemmaya benzer bir sonuç, bölüm tasvirlerini sürekli, lineer ve örten tasvirlerle değiştirerek, aşağıdaki sonucunda gösterdiği gibi, temel p -kompakt kümeler içinde elde edilebilir.

Lemma 3.3 X ve Y Banach uzayları, $T : X \rightarrow Y$ lineer, sürekli ve örten bir dönüşüm olsun.

a) $p=1$, $\alpha > 1$ ve $(k^\alpha a_k)_{k=1}^\infty \in l_p(Y)$ olmak üzere $H \subset p\text{-}co\{(a_k)_{k=1}^\infty\}$ ise, X uzayında $(k^\alpha \tau_k)_{k=1}^\infty \in l_p(X)$ olacak şekilde bir $(\tau_k)_{k=1}^\infty$ dizisi vardır öyle ki $L := p\text{-}co\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olmak üzere $H \subset T(L)$ dir.

b) $1 < p < \infty$ ve $(ka_k)_{k=1}^\infty \in l_p(Y)$ olmak üzere $H \subset p\text{-}co\{(a_k)_{k=1}^\infty\}$ ise, X uzayında $(k\tau_k)_{k=1}^\infty \in l_p(X)$ olacak şekilde bir $(\tau_k)_{k=1}^\infty$ dizisi vardır öyle ki $L := p\text{-}co\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olmak üzere $H \subset T(L)$ dir.

İspat a) $p=1$, $\alpha > 1$ ve $(k^\alpha a_k)_{k=1}^\infty \in l_p(Y)$ olmak üzere $H \subset p\text{-}co\{(a_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun. $T : X \rightarrow Y$ lineer, sürekli, örten bir dönüşüm olduğundan [29, B.3.7 Proposition] gereğince, $T = T_0 \circ Q$ olacak şekilde bir $Q : X \rightarrow X / N(T)$ bölüm tasviri ve bir $T_0 : X / N(T) \rightarrow Y$ topolojik izomorfizması vardır.

Şimdi $y \in H$ olsun. Bu durumda $y = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k a_k$ olacak şekilde $(\alpha_k)_{k=1}^\infty \in B_{l_{p^*}} (= B_{c_0})$

vardır. Böylece, $T_0^{-1}(y) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k T_0^{-1}(a_k)$ olacaktır. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için bir

$\tau_k \in T_0^{-1}(a_k) = [\tau_k] \in X / N(T)$ vardır öyle ki $\|\tau_k\| < \|[\tau_k]\| + \frac{1}{k^{2\alpha}}$ dir. Böylece,

$$\sum_{k=1}^\infty \|k^\alpha \tau_k\| < \sum_{k=1}^\infty \left(\|k^\alpha [\tau_k]\| + k^\alpha \frac{1}{k^{2\alpha}} \right) = \sum_{k=1}^\infty \left(\|k^\alpha T_0^{-1}(a_k)\| + \frac{1}{k^\alpha} \right) \leq \|T_0^{-1}\| \sum_{k=1}^\infty \|k^\alpha a_k\| + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} < \infty$$

olup $(\tau_k)_{k=1}^\infty$ dizisi X uzayında $(k^\alpha \tau_k)_{k=1}^\infty \in l_p(X)$ olacak şekilde bir dizidir. Şimdi $L := p\text{-co}\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun. Bu takdirde L , X uzayının relatif p -kompakt bir alt kümesi olup $H \subset T(L)$ olduğunu gösterelim.

Eğer $z \in H$ ise, $z = \sum_{k=1}^\infty \beta_k a_k$ olacak şekilde bir $(\beta_k)_{k=1}^\infty \in B_{l_{p^*}} (= B_{c_0})$ dizisi vardır. Buna göre,

$$T_0^{-1}(z) = \sum_{k=1}^\infty \beta_k T_0^{-1}(a_k) = \sum_{k=1}^\infty \beta_k [\tau_k] = \sum_{k=1}^\infty \beta_k Q(\tau_k) = Q\left(\sum_{k=1}^\infty \beta_k \tau_k\right) \in Q(L)$$

dir. Böylece $T_0^{-1}(H) \subset Q(L)$ olup $H \subset T_0(Q(L)) = T(L)$ dir.

b) $1 < p < \infty$ ve $(ka_k)_{k=1}^\infty \in l_p(Y)$ olmak üzere $H \subset p\text{-co}\{(a_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun. $T: X \rightarrow Y$ lineer, sürekli, örten bir dönüşüm olduğundan a) şıkkının ispatındaki adımlar izlenerek, her $k \in \mathbb{N}$ için bir $\tau_k \in T_0^{-1}(a_k) =: [\tau_k]$ bulabiliriz öyle ki $\|\tau_k\| < \|[\tau_k]\| + \frac{1}{k^2}$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \|k\tau_k\|^p &< \sum_{k=1}^\infty \left(\|k[\tau_k]\| + k \frac{1}{k^2} \right)^p \leq 2^p \sum_{k=1}^\infty \left(\|kT_0^{-1}(a_k)\|^p + \frac{1}{k^p} \right) \\ &\leq 2^p \|T_0^{-1}\|^p \sum_{k=1}^\infty \|ka_k\|^p + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p} < \infty \end{aligned}$$

olup $(\tau_k)_{k=1}^\infty$ dizisi X uzayında $(k\tau_k)_{k=1}^\infty \in l_p(X)$ olacak şekilde bir dizidir. Şimdi $L := p\text{-co}\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olarak alınırsa L , X uzayının (relatif) p -kompakt bir alt kümesidir ve $H \subset T(L)$ olduğu a) şıkkının ispatındaki gibi gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Gözlem 3.1 a) Yukarıdaki lemmada hipotezdeki " k " çarpanı yerine genel olarak her

$\gamma > 1$ için $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\xi_k^\gamma} < \infty$ olacak şekilde bir pozitif $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ dizisi seçilirse, sonuç doğru

olmaya devam eder.

b) Yukarıdaki lemmanın ispatında a) şıkkında kullanılan $\|\tau_k\| < \|\tau_k\| + \frac{1}{k^{2\alpha}}$ eşitsizliği yerine ve b) şıkkında kullanılan $\|\tau_k\| < \|\tau_k\| + \frac{1}{k^2}$ eşitsizliği yerine, sabit bir $\beta > 2$ için $\|\tau_k\| < \|\tau_k\| + \frac{1}{k^\beta}$ eşitsizliği kullanılırsa, (a) ve (b) şıklarının ispatları aslında birlikte yapılabilir. Bu durumda (a) şıkkındaki k^α çarpanı yerine aynen (b) de olduğu gibi sadece k çarpanı alınabilir.

Bir sonraki lemmayı vermeden önce lemmada kullanacağımız notasyonu verelim. X ve Y Banach uzayları olmak üzere $X \otimes Y$ ile X ve Y uzaylarının cebirsel tensör çarpımını, $X \otimes_\pi Y$ ile X ve Y uzaylarının projektif tensör çarpımını, yani projektif norm topolojisi ile donatılmış $X \otimes Y$ tensör çarpımını göstereceğiz, burada $X \otimes Y$ üzerindeki projektif norm π

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^m \|x_n\| \|y_n\| : m \in \mathbb{N}, u = \sum_{n=1}^m x_n \otimes y_n \right\}$$

ile verilmektedir [31].

$X \hat{\otimes}_\pi Y$ ile $X \otimes_\pi Y$ uzayının tamlamasını göstereceğiz, burada $X \hat{\otimes}_\pi Y$ üzerindeki projektif norm π

$$\begin{aligned} \pi(u) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| < \infty, u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| : u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n, \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty, \|x_n\| = \|y_n\| = 1 \right\} \end{aligned}$$

ile verilmektedir [31].

Şimdi [34] te verilen bir sonucun ispatını modifiye ederek aşağıdaki lemmayı elde ederiz. Lemmanın ispatı Grothendieck' in [9] tensör çarpımlarını karakterize eden bir sonucuna dayanmaktadır. Bir sonraki sonuç (Teorem 3.4), ki ana sonuçtur, bu lemmada elde edilen tensör temsiline dayandığından bu lemma anahtar sonuç olacaktır.

Lemma 3.4 X ve Y Banach uzayları olsun.

a) $2 \leq p < \infty$ ve $(k\tau_k)_{k=1}^\infty \in l_p(X \hat{\otimes}_\pi Y)$ olmak üzere $L \subset p\text{-co}\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun. Bu takdirde,

$$L \subset \left\{ \sum_{i=1}^\infty \lambda_i r_i \otimes s_i : (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in K \right\}$$

olacak şekilde $(r_i)_{i=1}^\infty \in c_0(X)$, $(s_i)_{i=1}^\infty \in l_p(Y)$ dizileri ve $K \subset p^*\text{-co}\{(t_k)_{k=1}^\infty\}$, $(t_k)_{k=1}^\infty \in l_{p^*}(B_{l_{p^*}})$ ile bir K kümesi vardır.

b) $1 < p < \infty$ ve $(\tau_k)_{k=1}^\infty \in l_p(X \hat{\otimes}_\pi Y)$ olmak üzere $L \subset p\text{-co}\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun. Bu takdirde,

$$L \subset \left\{ \sum_{i=1}^\infty \lambda_i r_i \otimes s_i : (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in K \right\}$$

olacak şekilde $(r_i)_{i=1}^\infty \in c_0(X)$, $(s_i)_{i=1}^\infty \in l_p(Y)$ dizileri ve $B_{l_{p^*}}$ in kompakt bir K alt kümesi vardır.

İspat a) $2 \leq p < \infty$ ve $(k\tau_k)_{k=1}^\infty \in l_p(X \hat{\otimes}_\pi Y)$ olmak üzere $L \subset p\text{-co}\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun.

Eğer $\tau \in L$ ise $\tau = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\tau \tau_k$ olacak şekilde bir $(\lambda_k^\tau)_{k=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$ dizisi vardır. Diğer taraftan

her $k \in \mathbb{N}$ için $\tau_k \in X \hat{\otimes}_\pi Y$ olduğundan Grothendieck' in [9] da ([31, Proposition 2.8 ve sayfa 22 de verilen formül] veya [36, sayfa 165] e bakınız) ifade edilen bir sonucuna

göre $\tau_k = \sum_{i=1}^\infty \lambda_{k,i} r_{k,i} \otimes s_{k,i}$ olarak yazılabilir öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $r_{k,i} \in S_X$, $s_{k,i} \in S_Y$ ve

$$\sum_{i=1}^\infty |\lambda_{k,i}| < \infty \text{ ile } \mu_k := \sum_{i=1}^\infty |\lambda_{k,i}| < \pi(\tau_k) + \frac{1}{2^k k} \text{ dir.}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
\tau &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau \tau_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{k,i} r_{k,i} \otimes s_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k^\tau \frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} r_{k,i} \otimes \mu_k s_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} r_{k,i} \otimes \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p} \mu_k s_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} r_{k,i} \otimes k \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p} \mu_k s_{k,i}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi, yukarıdaki bu son serinin, yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} r_{k,i} \otimes k \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p} \mu_k s_{k,i} \quad (3.1)$$

serisinin $X \hat{\otimes}_\pi Y$ uzayında mutlak yakınsak olduğunu gösterelim. Projektif norm π nin özelliklerinden [31] ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{k} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} r_{k,i} \otimes k \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p} \mu_k s_{k,i} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \pi(\lambda_k^\tau \lambda_{k,i} r_{k,i} \otimes s_{k,i}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_k^\tau| |\lambda_{k,i}| \|r_{k,i}\| \|s_{k,i}\| \quad (\|r_{k,i}\| = 1, \|s_{k,i}\| = 1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^\tau| \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_{k,i}| < \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^\tau| \left(\pi(\tau_k) + \frac{1}{2^k k} \right) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^\tau|^{p^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\pi(\tau_k) + \frac{1}{2^k k} \right)^p \right)^{1/p} \quad ((\lambda_k^\tau)_{k=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}) \\
&\leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\pi(\tau_k))^p + \frac{1}{(2^k k)^p} \right)^{1/p} < \infty
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (3.1)' deki (ikili) serideki terimlerin herhangi bir sıralamasından bağımsız olarak

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} r_{k,i} \otimes k \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p} \mu_k s_{k,i}$$

olacaktır. Aynı zamanda,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \lambda_k^{\tau} \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} \right|^{p^*} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p^*}} |\lambda_k^{\tau}|^{p^*} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p^*}} |\lambda_k^{\tau}|^{p^*} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{\tau}|^{p^*} \leq 1$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left\| k \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p} \mu_k s_{k,i} \right\|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} k^p \left| \frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right| \mu_k^p \|s_{k,i}\|^p \quad (\|s_{k,i}\| = 1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^p \mu_k^p \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} (k \mu_k)^p \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \pi(\tau_k) + \frac{1}{2^k} \right)^p \\ &\leq 2^p \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\pi(k \tau_k))^p + \frac{1}{2^{pk}} \right) < \infty \end{aligned}$$

olduğundan belli bir sıralama seçip (örneğin standart kare sıralaması gibi),

$$(\gamma_l^{\tau})_{l=1}^{\infty} := \left(\frac{1}{k} \lambda_k^{\tau} \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} \right)_{(k,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in B_{l_{p^*}}$$

$$(x_l)_{l=1}^{\infty} := (r_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in l_{\infty}(X)$$

$$(y_l)_{l=1}^{\infty} := \left(k \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p} \mu_k s_{k,i} \right)_{(k,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in l_p(Y)$$

yazarak $\tau = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^{\tau} x_l \otimes y_l$ temsili elde edilir. Üstelik $\sum_{l=1}^{\infty} \|y_l\|^p < \infty$ olduğundan Lemma 2.5

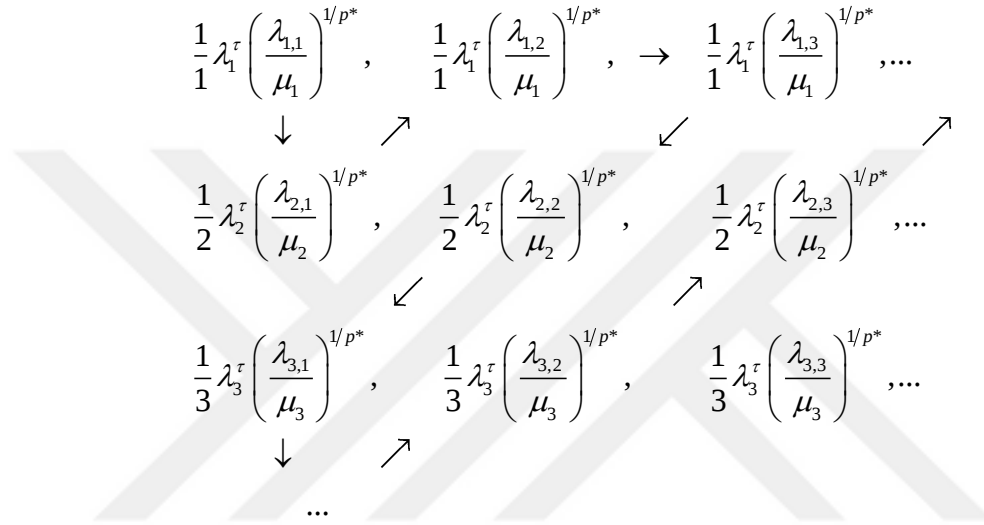
gereğince $\sum_{l=1}^{\infty} \|y_l\|^p c_l < \infty$ olacak şekilde pozitif terimli, artan ve sonsuza ıraksayan bir

$(c_l)_{l=1}^{\infty}$ dizisi seçebiliriz, ki böylece $\sum_{l=1}^{\infty} \|c_l^{1/p} y_l\|^p < \infty$ olacaktır. Buna göre

$\tau = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^\tau x_l \frac{1}{c_l^{1/p}} \otimes c_l^{1/p} y_l$ olup her $l \in \mathbb{N}$ için $r_l := x_l \frac{1}{c_l^{1/p}}$ ve $s_l := c_l^{1/p} y_l$ olarak alırsak,

$\tau = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^\tau r_l \otimes s_l$ temsilini $(r_l)_{l=1}^{\infty} \in c_0(X)$ ve $(s_l)_{l=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ olacak şekilde elde ederiz.

Şimdi her $\tau \in L$ için $(\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty}$ dizisinin $B_{l_{p^*}}$ in relatif p^* -kompakt bir K alt kümesinden seçilebileceğini gösterelim. $(\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty}$ dizisi için yukarıda seçilen belli bir sıralama, örneğin standart



kare sıralaması göz önüne alınabilir. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} (\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty} &= \left(\frac{1}{k} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} \right)_{(k,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} e_i^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} e_i^k \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz, burada çift indisli $(e_i^k)_{(k,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ kümesindeki e_i^k vektörleri l_{p^*} uzayının yukarıdaki gibi sıralanmış e_i , $l \in \mathbb{N}$ standart baz vektörleridirler. Gerçekten her $k \in \mathbb{N}$ için

$$z_k := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} e_i^k$$

olsun. Bu takdirde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{k^{p^*}} |\lambda_k^\tau|^{p^*} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} \right|^{p^*} = \frac{1}{k^{p^*}} |\lambda_k^\tau|^{p^*} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right| = \frac{1}{k^{p^*}} |\lambda_k^\tau|^{p^*} \leq 1$$

olup $z_k \in B_{l_{p^*}} \subset l_{p^*}$ ve böylece $(z_k)_{k=1}^{\infty} \subset l_{p^*}$ dır.

Şimdi $(\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ olduğunu gösterelim. Bunun için $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$ olmak üzere

$\|S_n - (\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty}\|_{p^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\|S_n - (\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty}\|_{p^*} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\gamma_k^\tau|^{p^*} \right)^{1/p^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad ((\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}} \subset l_{p^*} \text{ olduğundan})$$

olup $(\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda_k^\tau \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} e_i^k$ elde edilir.

Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için, $t_k := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} e_i^k$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{k^{p^*}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} e_i^k \right|^{p^*} = \frac{1}{k^{p^*}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right| \|e_i^k\|^{p^*} = \frac{1}{k^{p^*}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right| \leq 1$$

olup her $k \in \mathbb{N}$ için $t_k \in B_{l_{p^*}}$ dir. Aynı zamanda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|t_k\|_{p^*}^{p^*} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p^*}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{k,i}^{(\tau_k)}}{\mu_k} \right| \|e_i^k\|^{p^*} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p^*}} < \infty, \quad (1 < p^* \leq 2)$$

olduğundan $(t_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p^*}(B_{l_{p^*}}) \subset l_{p^*}(l_{p^*})$ dır. Ayrıca $1 < p^* \leq 2 \leq p$ olduğundan

$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^\tau|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^\tau|^{p^*} \leq 1$ olup $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^\tau|^p \right)^{1/p} \leq 1$ dir, dolayısıyla $(\lambda_k^\tau)_{k=1}^{\infty} \in B_{l_p}$ dir. O halde

$$(\gamma_l^\tau)_{l=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_{k,i}}{\mu_k} \right)^{1/p^*} e_i^k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau t_k, \quad (\lambda_k^\tau)_{k=1}^{\infty} \in B_{l_p}$$

olduğundan $K := \{(\gamma_i^\tau)_{i=1}^\infty : \tau \in L\}$ olarak alırsak, $K \subset p^* - \text{co}\{(t_k)_{k=1}^\infty\}$, $(t_k)_{k=1}^\infty \in l_{p^*}(B_{l_{p^*}})$ olup a) şıkkının ispatı tamamlanır.

b) $1 < p < \infty$ ve $(\tau_k)_{k=1}^\infty \in l_p(X \hat{\otimes}_\pi Y)$ olmak üzere $L \subset p - \text{co}\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun. Eğer

$\tau \in L$ ise a) şıkkındaki benzer işlemler ile $\tau = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^\tau r_i \otimes t_i$, $(\lambda_i^\tau)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$ olacak şekilde

$(r_i)_{i=1}^\infty \in c_0(X)$ ve $(t_i)_{i=1}^\infty \in l_p(Y)$ dizileri bulabiliriz. $(t_i)_{i=1}^\infty \in l_p(Y)$ olduğundan Sonuç 2.3

gereğince, $\left(\frac{t_i}{\beta_i}\right)_{i=1}^\infty \in l_p(Y)$ olacak şekilde bir $\beta = (\beta_i)_{i=1}^\infty \in B_{c_0}$ dizisi seçebiliriz. O halde,

$$\tau = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^\tau r_i \otimes t_i = \sum_{i=1}^\infty \beta_i \lambda_i^\tau r_i \otimes \frac{t_i}{\beta_i}, (\lambda_i^\tau)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$$

yazabiliriz. Eğer her $i \in \mathbb{N}$ için $\theta_i^\tau := \beta_i \lambda_i^\tau$ ve $s_i := \frac{t_i}{\beta_i}$ olarak alırsak bu takdirde,

$(r_i)_{i=1}^\infty \in c_0(X)$ ve $(s_i)_{i=1}^\infty \in l_p(Y)$ olmak üzere $\tau = \sum_{i=1}^\infty \theta_i^\tau r_i \otimes s_i$, $(\theta_i^\tau)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$ olacaktır.

Burada $(\theta_i^\tau)_{i=1}^\infty$ dizilerinin $B_{l_{p^*}}$ in kompakt bir alt kümesinden seçilebileceğini görmek

için, Lemma 2.4 gereğince $K := \{(\beta_i \gamma_i)_{i=1}^\infty : (\gamma_i)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}\}$ kümesinin $B_{l_{p^*}}$ in kompakt bir

alt kümesi olduğuna ve $(\theta_i^\tau)_{i=1}^\infty \in K$ olduğuna dikkat etmek yeterlidir.

Gözlem 3.2 Yukarıdaki lemmada hipotezdeki " k " çarpanı yerine genel olarak her $\gamma > 1$

için $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\xi_k^\gamma} < \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\xi_k \geq 1$ olacak şekilde bir $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ dizisi seçilirse, sonuç

doğru olmaya devam eder.

Temel sonucumuz için yapılan hazırlıklarda son adım olarak aşağıdaki gözlemi yapıyoruz.

Gözlem 3.3 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$\tau : K(X, Z^{(p)}) \times (K_p(Z^{(p)}, Y), k_p) \rightarrow (K_p(X, Y), k_p)$$

$$\tau(u, v) := v \circ u, \quad u \in K(X, Z^{(p)}), \quad v \in K_p(Z^{(p)}, Y)$$

şeklinde tanımlanmış bir tasvir olsun. Tasvirin bilineerliği açık olup,

$$\begin{aligned}
\|\tau\| &= \sup \left\{ k_p(\tau(u, v)) : u \in B_{K(X, Z^{(p)})}, v \in B_{(K_p(Z^{(p)}, Y), k_p)} \right\} \\
&= \sup \left\{ k_p(v \circ u) : u \in B_{K(X, Z^{(p)})}, v \in B_{(K_p(Z^{(p)}, Y), k_p)} \right\} \\
&\leq \sup \left\{ k_p(v) \|u\| : u \in B_{K(X, Z^{(p)})}, v \in B_{(K_p(Z^{(p)}, Y), k_p)} \right\} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

olduğundan τ tasviri süreklidir. Aynı zamanda Teorem 3.3' e göre, tasvir örtendir.

Burada τ tasvirinin lineerleşmesi $\hat{\tau}$ ile gösterilecektir ve

$$\hat{\tau} : K(X, Z^{(p)}) \hat{\otimes}_{\pi} (K_p(Z^{(p)}, Y), k_p) \rightarrow (K_p(X, Y), k_p), \quad \hat{\tau}(u \otimes v) = \tau(u, v) = v \circ u$$

ile tanımlanacaktır. Buna göre $\hat{\tau}$ (lineer) sürekli ve örten bir tasvirdir.

Şimdi bu bölümün temel sonucunu vereceğiz. İspat için [7, Theorem 1] de verilen bir metodu kullanacağız. Fakat burada vereceğimiz ispatta herhangi bir seçme prensibini kullanmayacağız, bunun yerine aynı makalede ek notta kompakt durum için ifade edilen kompakt kümelerin yükseltilmesine paralel olarak Lemma 3.1' de verilen, p -kompakt kümelerin yükseltilmesini kullanacağız. Dolayısıyla p -kompakt durum için aşağıda verilecek olan ispat, [7, Theorem 1] de verilen ilk metoda (özellikle de orada verilen ikinci metoda) göre daha direkt bir sonuç olarak elde edilecektir. Aşağıdaki teoremin ispatı Lemma 3.4' ün a) şıkkına dayandığı için teoremin hipotezinde $r \geq 2$ alınmıştır.

Teorem 3.4 X ve Y Banach uzayları, $r \geq 2$ ve $1 \leq p \leq r < \infty$ olsun. Bu takdirde $(ka_k)_{k=1}^{\infty} \in l_r((K_p(X, Y), k_p))$ olmak üzere, $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının her (dengeli, konveks) $H \subset r\text{-co}\{(a_k)_{k=1}^{\infty}\}$ alt kümesi için, bir $u \in K(X, Z_{FJ})$ operatörü, $K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ uzayının relatif r^* -kompakt (dengeli, konveks) bir $\{B_T : T \in H\}$ alt kümesi ve bir $v \in K_r(Z^{(r)}, Y)$ operatörü vardır öyle ki, her $T \in H$ için, $T = v \circ B_T \circ u$ dur, burada Z_{FJ} Teorem 2.4 te verilen Johnson [1] ve Figiel' in [2] evrensel çarpanlara ayırma uzayı ve $Z^{(r)}$ Teorem 3.1' de verilen evrensel Banach uzayıdır.

İspat $r \geq 2$, $1 \leq p \leq r < \infty$ ve $(ka_k)_{k=1}^\infty \in l_r((K_p(X, Y), k_p))$ olmak üzere, $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının bir $H \subset r-co\{(a_k)_{k=1}^\infty\}$ alt kümesini göz önüne alalım. Gözlem 3.3' te verilen $\hat{\tau}$ lineer, sürekli ve örten bir tasvir olduğundan Lemma 3.3' ün b) şıkkı gereğince $K(X, Z^{(p)}) \hat{\otimes}_\pi (K_p(Z^{(p)}, Y), k_p)$ de $(k\tau_k)_{k=1}^\infty \in l_r(K(X, Z^{(p)}) \hat{\otimes}_\pi (K_p(Z^{(p)}, Y), k_p))$ olacak şekilde bir $(\tau_k)_{k=1}^\infty$ dizisi vardır öyle ki $L := r-co\{(\tau_k)_{k=1}^\infty\}$ olmak üzere $H \subset \hat{\tau}(L)$ dir. O halde her $T \in H$ için $T = \hat{\tau}(\tau_T)$ olacak şekilde bir $\tau_T \in L$ vardır. Lemma 3.4 gereğince

$$\tau_T = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^{\tau_T} r_i \otimes s_i, (\lambda_i^{\tau_T})_{i=1}^\infty \in K$$

olacak şekilde $(r_i)_{i=1}^\infty \in c_0(K(X, Z^{(p)}))$, $(s_i)_{i=1}^\infty \in l_r((K_p(Z^{(p)}, Y), k_p))$ dizileri ve $K \subset\subset l_{r^*}$ kümesi vardır. Şimdi,

$$r : X \rightarrow c_0(Z^{(p)}), r(x) := (r_i(x))_{i=1}^\infty$$

şeklinde bir tasvir tanımlayalım. $x \in X$ için, $0 \leq \|r_i(x)\| \leq \|r_i\| \|x\|$ olup $\|r_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ olduğundan $\|r_i(x)\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ dır. Böylece r tasviri iyi tanımlıdır. Tasvirin lineerliği açık olup, her $x \in X$ için

$$\|r(x)\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|r_i(x)\| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \|r_i\| \|x\| = \|(r_i)_{i=1}^\infty\|_\infty \|x\| \Rightarrow \|r\| \leq \|(r_i)_{i=1}^\infty\|_\infty$$

olduğundan tasvir süreklidir.

Şimdi r tasvirinin aslında kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için, Cantor diagonal metodunu kullanarak $r(B_X)$ kümesindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisinin olduğunu göstereceğiz. $(x_j)_{j=1}^\infty \subset B_X$ de bir dizi olsun. r_1 kompakt olduğundan $(r_1(x_j^1))_{j=1}^\infty$ dizisi yakınsak olacak şekilde $(x_j)_{j=1}^\infty$ dizisinin en az bir $(x_j^1)_{j=1}^\infty$ alt dizisi vardır. r_2 kompakt olduğundan $(r_2(x_j^2))_{j=1}^\infty$ dizisi yakınsak olacak şekilde $(x_j^1)_{j=1}^\infty$ dizisinin en az bir $(x_j^2)_{j=1}^\infty$ alt dizisi vardır. Böylece induksiyon yoluyla her $i \in \mathbb{N}$ için $(r_i(x_j^i))_{j=1}^\infty$ dizisi yakınsak olacak şekilde $(x_j^{i-1})_{j=1}^\infty$ dizisinin en az bir $(x_j^i)_{j=1}^\infty$ alt dizisini elde ederiz. $(z_j)_{j=1}^\infty$ dizisi

diyagonal $(x_j^i)_{j=1}^\infty$ dizisi olsun, yani her $j \in \mathbb{N}$ için $z_j := x_j^j$ olsun. Buna göre her $i \in \mathbb{N}$ için $(r_i z_j)_{j=1}^\infty$ dizisi yakınsak olup $y_i := \lim_{j \rightarrow \infty} r_i(z_j)$ olsun. Bu takdirde, $(y_i)_{i=1}^\infty \in c_0(Z^{(p)})$ olduğunu gösterelim. Her $i, j \in \mathbb{N}$ için

$$\|r_i(z_j)\| \leq \|r_i\| \|z_j\| \leq \|r_i\|$$

olup her $i \in \mathbb{N}$ için $\|y_i\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|r_i(z_j)\|$ olduğundan, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|r_i(z_j)\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|r_i\|$ elde edilir.

Böylece her $i \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \|y_i\| \leq \|r_i\|$ dir. Diğer taraftan $\lim_{i \rightarrow \infty} \|r_i\| = 0$ olduğundan,

$$\|y_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \text{ olup } (y_i)_{i=1}^\infty \in c_0(Z^{(p)}) \text{ dir.}$$

Şimdi $y := (y_i)_{i=1}^\infty$ olsun. Bu takdirde iddia ediyoruz ki $r(z_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y$ dir. Gerçekten de keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $i, j \in \mathbb{N}$ için,

$$\|r_i(z_j) - y_i\| \leq \|r_i\| \|z_j\| + \|y_i\| \leq \|r_i\| + \|y_i\|$$

olup $\|r_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ ve $\|y_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ olduğundan bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki,

$$\text{her } i \geq N_0 \text{ için, } \|r_i(z_j) - y_i\| \leq \varepsilon/2 \quad (3.2)$$

dir. Böylece her $j \in \mathbb{N}$ için $\sup_{i \geq N_0} \|r_i(z_j) - y_i\| \leq \varepsilon/2$ dir. Diğer taraftan her $i \in \mathbb{N}$ için

$r_i(z_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y_i$ olduğundan her $i = 1, 2, \dots, N_0 - 1$ için bir $N_i \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her

$j \geq N_i$ için $\|r_i(z_j) - y_i\| \leq \varepsilon/2$ dir. Bu takdirde her $j \geq \max_{1 \leq i \leq N_0-1} N_i$ için,

$$\sup_{1 \leq i \leq N_0-1} \|r_i(z_j) - y_i\| \leq \varepsilon/2 \quad (3.3)$$

dir. Şimdi,

$$\begin{aligned} \|r(z_j) - y\| &= \|(r_i(z_j))_{i=1}^\infty - (y_i)_{i=1}^\infty\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|r_i(z_j) - y_i\| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq N_0-1} \|r_i(z_j) - y_i\| + \sup_{i \geq N_0} \|r_i(z_j) - y_i\| \end{aligned}$$

olup (3.2) ve (3.3)' ten her $j \geq \max_{1 \leq i \leq N_0-1} N_i$ için $\|r(z_j) - y\| \leq \varepsilon$ elde edilir. O halde

$r(z_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y$ olup $(r(z_j))_{j=1}^{\infty}$ dizisi $(r(x_j))_{j=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisidir,

dolayısıyla r tasviri kompakttır. Böylece $r \in K(X, c_0(Z^{(p)}))$ dir.

Şimdi, her $T \in H$ için

$$A_T : c_0(Z^{(p)}) \rightarrow l_{r^*}(Z^{(p)}), A_T(z) := (\lambda_i^{\tau_T} z_i)_{i=1}^{\infty}, z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0(Z^{(p)})$$

şeklinde bir tasvir tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda_i^{\tau_T} z_i\|^{r^*} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i^{\tau_T}|^{r^*} \|z_i\|^{r^*} \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \|z_i\|^{r^*} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i^{\tau_T}|^{r^*} \\ &\leq \left(\sup_{i \in \mathbb{N}} \|z_i\| \right)^{r^*} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i^{\tau_T}|^{r^*} < \infty \end{aligned}$$

olduğundan, A_T tasviri iyi tanımlıdır. Tasvirin lineerliği açıktır. Aynı zamanda,

$$\|A_T\| \leq \|(\lambda_i^{\tau_T})_{i=1}^{\infty}\|_{r^*} \text{ olduğundan } A_T \in L(c_0(Z^{(p)}), l_{r^*}(Z^{(p)})) \text{ dir.}$$

Şimdi,

$$A : l_{r^*} \rightarrow L(c_0(Z^{(p)}), l_{r^*}(Z^{(p)})), A(\lambda)z := (\lambda_i z_i)_{i=1}^{\infty}, \lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}, z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$$

şeklinde bir tasvir olsun. A tasvirinin iyi tanımlı olduğu, A_T tasvirinde olduğu gibi

gösterilebilir. Aynı zamanda A tasvirinin lineerliği açık olup $\|A(\lambda)z\|_{r^*} \leq \|\lambda\|_{r^*} \|z\|_{\infty}$

olduğundan $\|A\| \leq 1$ dir ve dolayısıyla A sürekli bir tasvirdir. Burada $z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0(Z^{(p)})$

için, $A_T(z) = (\lambda_i^{\tau_T} z_i)_{i=1}^{\infty} = A(\lambda^{\tau_T})z$ ve $A(\lambda^{\tau_T}) \in A(K)$ olduğundan dolayısıyla

$\{A_T : T \in H\} \subset A(K)$ dir. $K \subset\subset l_{r^*}$ ve A lineer, sürekli bir tasvir olduğundan

$A(K) \subset\subset L(c_0(Z^{(p)}), l_{r^*}(Z^{(p)}))$ dir. Böylece, özel olarak $\{A_T : T \in H\}$ kümesi

$L(c_0(Z^{(p)}), l_{r^*}(Z^{(p)}))$ nin relatif r^* - kompakt bir alt kümesidir.

Son olarak,

$$s : l_{r^*}(Z^{(p)}) \rightarrow Y, s(w) := \sum_{i=1}^{\infty} s_i(w_i), w = (w_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{r^*}(Z^{(p)})$$

şeklinde bir tasvir olsun.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \|s_i(w_i)\| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|s_i\| \|w_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} k_p(s_i) \|w_i\|, \quad (s_i)_{i=1}^{\infty} \in l_r(K_p(Z^{(p)}, Y), k_p) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} (k_p(s_i))^r \right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\|^{r^*} \right)^{1/r^*} < \infty
\end{aligned}$$

olup s tasviri iyi tanımlıdır. s tasvirinin lineerliği açık olup $\|s\| \leq \left\| (k_p(s_i))_{i=1}^{\infty} \right\|_r$ olduğundan s sürekli bir tasvirdir. Şimdi s tasvirinin r -kompakt olduğunu gösterelim. Her $i \in \mathbb{N}$ için $s_i \in K_p(Z^{(p)}, Y)$ ve $p \leq r$ olduğundan $s_i \in K_r(Z^{(p)}, Y)$ ve $k_r(s_i) \leq k_p(s_i)$ [8] dir. Dolayısıyla, $(s_i)_{i=1}^{\infty} \in l_r((K_p(Z^{(p)}, Y), k_p))$ olduğundan $\sum_{i=1}^{\infty} (k_p(s_i))^r < \infty$ olup $\sum_{i=1}^{\infty} (k_r(s_i))^r < \infty$ dur. Her $i \in \mathbb{N}$ için,

$$k_r(s_i) = \inf \left\{ \left\| (c_n^i)_{n=1}^{\infty} \right\|_r : (c_n^i)_{n=1}^{\infty} \in l_r(Y) \text{ ve } s_i(B_{Z^{(p)}}) \subset r - \text{co}\{(c_n^i)_{n=1}^{\infty}\} \right\}$$

olduğundan, buna göre

$$\left\| (c_n^i)_{n=1}^{\infty} \right\|_r < k_r(s_i) + \frac{1}{2^i} \text{ ve } s_i(B_{Z^{(p)}}) \subset r - \text{co}\{(c_n^i)_{n=1}^{\infty}\}$$

olacak şekilde bir $(c_n^i)_{n=1}^{\infty} \in l_r(Y)$ dizisi vardır. Böylece $\left\| (c_n^i)_{n=1}^{\infty} \right\|_r < 2^r \left((k_r(s_i))^r + \frac{1}{2^{ir}} \right)$

olup,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\| (c_n^i)_{n=1}^{\infty} \right\|_r^r < 2^r \sum_{i=1}^{\infty} \left((k_r(s_i))^r + \frac{1}{2^{ir}} \right) = 2^r \left(\sum_{i=1}^{\infty} (k_r(s_i))^r + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ir}} \right) < \infty$$

dur. Bu takdirde $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n^i\|^r = \sum_{i=1}^{\infty} \left\| (c_n^i)_{n=1}^{\infty} \right\|_r^r < \infty$ dur. Şimdi $w = (w_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{l_{r^*}}(Z^{(p)})$ olsun.

Böylece her $i \in \mathbb{N}$ için $\|w_i\| \leq 1$ dir (genelliği bozmaksızın her $i \in \mathbb{N}$ için, $w_i \neq 0_{Z^{(p)}}$ alabiliriz). s tasvirinin r -kompakt olduğunu görmek için

$$\begin{aligned}
s(w) &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i(w_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\| s_i\left(\frac{w_i}{\|w_i\|}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{w_i} c_n^i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|w_i\| \alpha_n^{w_i} c_n^i, \quad (\alpha_n^{w_i})_n \in B_{l_{r^*}}
\end{aligned}$$

yazalım. Burada,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|w_i\| \alpha_n^{w_i} c_n^i \quad (3.4)$$

serisi Y uzayında mutlak yakınsaktır. Gerçekten de, Hölder eşitsizliğinin ardışık olarak uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|w_i\| \alpha_n^{w_i} c_n^i &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|w_i\| \alpha_n^{w_i})^{r^*} \right)^{1/r^*} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n^i\|^r \right)^{1/r} \right] \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\|w_i\| \alpha_n^{w_i})^{r^*} \right)^{1/r^*} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n^i\|^r \right)^{1/r} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\|^{r^*} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^{w_i}|^{r^*} \right)^{1/r^*} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n^i\|^r \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\|^{r^*} \right)^{1/r^*} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n^i\|^r \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n^i\|^r \right)^{1/r} < \infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (3.4)'teki (ikili) serideki terimlerin sıralamasından bağımsız

olarak $s(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|w_i\| \alpha_n^{w_i} c_n^i$ olacaktır. Aynı zamanda,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n^i\|^r < \infty \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\|w_i\| \alpha_n^{w_i})^{r^*} = \sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\|^{r^*} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^{w_i}|^{r^*} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|w_i\|^{r^*} \leq 1$$

olduğundan belli bir sıralama seçip

$$(\lambda_l)_{l=1}^{\infty} := \left(\|w_i\| \alpha_n^{w_i} \right)_{(i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in B_{l_{r^*}}$$

$$(z_l)_{l=1}^{\infty} := (c_n^i)_{(i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in l_r(Y)$$

yazarak, $s(w) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l z_l$ temsili elde edilir ki bu $s \in K_r(l_{r^*}(Z^{(p)}), Y)$ olduğunu gösterir.

Şimdi $T \in H$ için,

$$\begin{aligned} T &= \hat{\tau}(\tau_T) = \hat{\tau}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\tau_T} r_i \otimes s_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\tau_T} \hat{\tau}(r_i \otimes s_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\tau_T} \tau(r_i, s_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\tau_T} s_i \circ r_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

olup $x \in X$ için

$$\begin{aligned} (s \circ A_T \circ r)(x) &= s(A_T(r(x))) = s\left(\left(\lambda_i^{\tau_T} r_i(x)\right)_{i=1}^{\infty}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i\left(\lambda_i^{\tau_T} r_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\tau_T} (s_i(r_i(x))) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i^T s_i \circ r_i)(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

olduğundan (3.5) ve (3.6)' dan $T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\tau_T} s_i \circ r_i = s \circ A_T \circ r$ elde edilir.

$r \in K(X, c_0(Z^{(p)}))$ ve $s \in K_r(l_{r^*}(Z^{(p)}), Y)$ olduğundan, r ve s dönüşümlerini sırasıyla, Teorem 2.4 ve Teorem 3.3' ü kullanarak, Z_{FJ} ve $Z^{(r)}$ evrensel Banach uzayları vasıtasıyla çarpanlara ayırabiliriz. Yani,

$$r = \alpha \circ u, \quad u \in K(X, Z_{FJ}) \text{ ve } \alpha \in K(Z_{FJ}, c_0(Z^{(p)}))$$

$$s = v \circ \beta, \quad \beta \in K(l_{r^*}(Z^{(p)}), Z^{(r)}) \text{ ve } v \in K_r(Z^{(r)}, Y)$$

olarak yazabiliriz. Böylece

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{r} & c_0(Z^{(p)}) & \xrightarrow{A_T} & l_{r^*}(Z^{(p)}) & \xrightarrow{s} & Y \\ & \searrow u & \nearrow \alpha & & \searrow \beta & \nearrow v & \\ & & Z_{FJ} & & & & Z^{(r)} \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacağından, $T = s \circ A_T \circ r = v \circ \beta \circ A_T \circ \alpha \circ u$ elde edilir. Şimdi her

$T \in H$ için $B_T := \beta \circ A_T \circ \alpha$ olsun. Bu takdirde, $B_T \in K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ dir. Aynı zamanda,

$\{B_T : T \in H\} \subset K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ dir. Gerçekten de $T_1 \in H$ olmak üzere $B_{T_1} \in \{B_T : T \in H\}$

olsun. Bu takdirde $B_{T_1} = \beta \circ A_{T_1} \circ \alpha$ yazabiliriz, burada $A_{T_1} \in \{A_T : T \in H\}$ dir. $\{A_T : T \in H\}$ kümesi, $L(c_0(Z^{(p)}), l_{r^*}(Z^{(p)}))$ uzayının relatif r^* -kompakt bir alt kümesi

olduğundan bir $(q_n)_{n=1}^\infty \in l_{r^*}(L(c_0(Z^{(p)}), l_{r^*}(Z^{(p)})))$ dizisi vardır öyle ki $A_{T_1} = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n^{T_1} q_n$,

$(\sigma_n^{T_1})_n \in B_{l_r}$ olacaktır. Herhangi bir $z \in Z_{FJ}$ için, $\alpha(z) \in c_0(Z^{(p)})$ olup

$A_{T_1}(\alpha(z)) = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n^{T_1} q_n(\alpha(z))$ dir. Böylece

$$\beta(A_{T_1}(\alpha(z))) = \beta\left(\sum_{n=1}^\infty \sigma_n^{T_1} q_n(\alpha(z))\right) = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n^{T_1} \beta(q_n(\alpha(z)))$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\sum_{n=1}^\infty \|\sigma_n^{T_1} \beta \circ q_n \circ \alpha\| \leq \|\beta\| \|\alpha\| \sum_{n=1}^\infty \|\sigma_n^{T_1}\| \|q_n\| \leq \|\beta\| \|\alpha\| \left(\sum_{n=1}^\infty |\sigma_n^{T_1}|^r\right)^{1/r} \left(\sum_{n=1}^\infty \|q_n\|^{r^*}\right)^{1/r^*} < \infty$$

dur. Böylece $\sum_{n=1}^\infty \sigma_n^{T_1} \beta \circ q_n \circ \alpha$ serisi $K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ de mutlak yakınsak olup yakınsaktır

ve buradan $B_{T_1} = \beta \circ A_{T_1} \circ \alpha = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n^{T_1} \beta \circ q_n \circ \alpha$ elde edilir. O halde

$(q_n)_{n=1}^\infty \in l_{r^*}(L(c_0(Z^{(p)}), l_{r^*}(Z^{(p)})))$ olduğundan $\sum_{n=1}^\infty \|\beta \circ q_n \circ \alpha\|^{r^*} < \infty$ ve dolayısıyla

$(\beta \circ q_n \circ \alpha)_{n=1}^\infty \in l_{r^*}(K(Z_{FJ}, Z^{(r)}))$ dir. Böylece $\{B_T : T \in H\} \subset\subset_{r^*} K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ ve her

$T \in H$ için, $T = v \circ B_T \circ u$ dur.

Şimdi H dengeli ve konveks bir küme ise bu durumda $\{B_T : T \in H\}$ kümesinin de, sırasıyla, dengeli ve konveks olacağını göstereyim.

$|\gamma| \leq 1$, $T_1 \in H$ olmak üzere $B_{T_1} \in \{B_T : T \in H\}$ olsun. Bu takdirde, $\gamma B_{T_1} \in \{B_T : T \in H\}$ olduğunu göstereyim.

$B_{T_1} \in \{B_T : T \in H\}$ ise, $B_{T_1} = \beta \circ A_{T_1} \circ \alpha$ ve $A_{T_1} \in \{A_T : T \in H\}$ dir. Bu takdirde $\gamma B_{T_1} = \gamma(\beta \circ A_{T_1} \circ \alpha) = \beta \circ (\gamma A_{T_1}) \circ \alpha$ olup biz $\gamma A_{T_1} = A_{\gamma T_1}$ olduğunu ve dolayısıyla $\gamma B_{T_1} = B_{\gamma T_1}$ olduğunu göstereceğiz.

$z \in Z_{FJ}$ olmak üzere, $\gamma B_{T_1}(z) = \gamma(\beta \circ A_{T_1} \circ \alpha)(z) = \beta(A_{T_1}(\gamma(\alpha(z))))$ dir.
 $\alpha \in K(Z_{FJ}, c_0(Z^{(p)}))$ olduğundan $\alpha(z) \in c_0(Z^{(p)})$ olup $\alpha(z) := (y_i)_{i=1}^\infty$ olsun. Bu takdirde,

$$\gamma B_{T_1}(z) = \beta(A_{T_1}(\gamma(\alpha(z)))) = \beta(A_{T_1}((\gamma y_i)_{i=1}^\infty)) = \beta((\lambda_i^{\tau_{T_1}} \gamma y_i)_{i=1}^\infty)$$

dir, burada $(\lambda_i^{\tau_{T_1}})_{i=1}^\infty$ dizisi, $T_1 \in H$ için $T_1 = \hat{\tau}(\tau_{T_1})$, $\tau_{T_1} \in L$ olmak üzere Lemma 3.4

gereğince $\tau_{T_1} = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^{\tau_{T_1}} r_i \otimes s_i$, $(\lambda_i^{\tau_{T_1}})_{i=1}^\infty \in K$, $K = \{(\lambda_i^\tau)_{i=1}^\infty : \tau \in L\} \subset\subset l_{r^*}$ olacak şekilde bir

dizidir ve $A_{T_1} : c_0(Z^{(p)}) \rightarrow l_{r^*}(Z^{(p)})$, $A_{T_1}(z) = (\lambda_i^{\tau_{T_1}} z_i)_{i=1}^\infty$, $z = (z_i)_{i=1}^\infty \in c_0(Z^{(p)})$ şeklinde

tanımlıdır. Diğer taraftan H dengeli olduğundan $T_1 \in H$ iken $\gamma T_1 \in H$ olup

$A_{\gamma T_1} \in \{A_T : T \in H\}$ dir. Böylece $\gamma T_1 = \hat{\tau}(\gamma \tau_{T_1})$ ve L dengeli olduğundan (Lemma 3.3' ün

ispatına bakınız) $\gamma \tau_{T_1} \in L$ dir ve $\gamma \tau_{T_1} = \sum_{i=1}^\infty \gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} r_i \otimes s_i$ olup $(\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}})_{i=1}^\infty \in K$ olacaktır. Buna

göre $A_{\gamma T_1} : c_0(Z^{(p)}) \rightarrow l_{r^*}(Z^{(p)})$, $A_{\gamma T_1}(z) = (\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} z_i)_{i=1}^\infty$, $z = (z_i)_{i=1}^\infty \in c_0(Z^{(p)})$ olarak

yazılabilecektir. Dolayısıyla $A_{\gamma T_1}(z) = (\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} z_i)_{i=1}^\infty = \gamma(\lambda_i^{\tau_{T_1}} z_i)_{i=1}^\infty = \gamma A_{T_1}(z)$ dir. Buradan

$A_{\gamma T_1} = \gamma A_{T_1}$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \gamma B_{T_1}(z) &= \beta((\lambda_i^{\tau_{T_1}} \gamma y_i)_{i=1}^\infty) = \beta((\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} y_i)_{i=1}^\infty) = \beta(\gamma A_{T_1}((y_i)_{i=1}^\infty)) \\ &= \beta(A_{\gamma T_1}((y_i)_{i=1}^\infty)) = \beta(A_{\gamma T_1}(\alpha(z))) = B_{\gamma T_1}(z) \end{aligned}$$

olup $\gamma B_{T_1} = B_{\gamma T_1}$ elde edilir. O halde $B_{\gamma T_1} = \beta \circ A_{\gamma T_1} \circ \alpha$ ve $\gamma T_1 \in H$ olduğundan

$\gamma B_{T_1} = B_{\gamma T_1} \in \{B_T : T \in H\}$ dir. Böylece $\{B_T : T \in H\}$ dengeli bir kümedir.

Şimdi $\{B_T : T \in H\}$ kümesinin konveks olduğunu gösterelim. Bunun için $T_1, T_2 \in H$

olmak üzere $B_{T_1}, B_{T_2} \in \{B_T : T \in H\}$ ve $0 \leq \gamma \leq 1$ iken $\gamma B_{T_1} + (1-\gamma)B_{T_2} \in \{B_T : T \in H\}$

olduğunu gösterelim. $B_{T_1}, B_{T_2} \in \{B_T : T \in H\}$ ise, $B_{T_1} = \beta \circ A_{T_1} \circ \alpha$, $B_{T_2} = \beta \circ A_{T_2} \circ \alpha$ ve

$A_{T_1}, A_{T_2} \in \{A_T : T \in H\}$ dir.

Bu takdirde $\gamma B_{T_1} + (1-\gamma)B_{T_2} = \beta \circ A_{T_1} \circ (\gamma\alpha) + \beta \circ A_{T_2} \circ ((1-\gamma)\alpha)$ olup biz $\gamma A_{T_1} + (1-\gamma)A_{T_2} = A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2}$ ve dolayısıyla $\gamma B_{T_1} + (1-\gamma)B_{T_2} = B_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2}$ olduğunu göstereceğiz. $z \in Z_{FJ}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\gamma B_{T_1} + (1-\gamma)B_{T_2})(z) &= \beta(A_{T_1}(\gamma\alpha(z))) + \beta(A_{T_2}(((1-\gamma)\alpha(z)))) \\ &= \beta(A_{T_1}(\gamma\alpha(z)) + A_{T_2}(((1-\gamma)\alpha(z)))) \end{aligned}$$

dir. $\alpha \in K(Z_{FJ}, c_0(Z^{(p)}))$ olduğundan $\alpha(z) \in c_0(Z^{(p)})$ olup $\alpha(z) := (y_i)_{i=1}^\infty$ olsun.

Böylece

$$\begin{aligned} (\gamma B_{T_1} + (1-\gamma)B_{T_2})(z) &= \beta(A_{T_1}(\gamma\alpha(z)) + A_{T_2}(((1-\gamma)\alpha(z)))) \\ &= \beta(A_{T_1}((\gamma y_i)_{i=1}^\infty) + A_{T_2}(((1-\gamma)y_i)_{i=1}^\infty)) \\ &= \beta((\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} y_i)_{i=1}^\infty + ((1-\gamma) \lambda_i^{\tau_{T_2}} y_i)_{i=1}^\infty) \end{aligned}$$

dir, burada $(\lambda_i^{\tau_{T_1}})_{i=1}^\infty, (\lambda_i^{\tau_{T_2}})_{i=1}^\infty$ dizileri sırasıyla $T_1, T_2 \in H$ için, $T_1 = \hat{\tau}(\tau_{T_1}), T_2 = \hat{\tau}(\tau_{T_2})$ ve

$$\tau_{T_1}, \tau_{T_2} \in L \text{ olmak üzere, Lemma 3.4 gereğince } \tau_{T_1} = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^{\tau_{T_1}} r_i \otimes s_i, \quad \tau_{T_2} = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^{\tau_{T_2}} r_i \otimes s_i,$$

$(\lambda_i^{\tau_{T_1}})_{i=1}^\infty, (\lambda_i^{\tau_{T_2}})_{i=1}^\infty \in K, \quad K = \{(\lambda_i^\tau)_{i=1}^\infty : \tau \in L\} \subset\subset l_{r^*}$ olacak şekilde dizilerdir ve

$$A_{T_1} : c_0(Z^{(p)}) \rightarrow l_{r^*}(Z^{(p)}), \quad A_{T_1}(z) = (\lambda_i^{\tau_{T_1}} z_i)_{i=1}^\infty, \quad A_{T_2} : c_0(Z^{(p)}) \rightarrow l_{r^*}(Z^{(p)}),$$

$$A_{T_2}(z) = (\lambda_i^{\tau_{T_2}} z_i)_{i=1}^\infty, \quad z = (z_i)_{i=1}^\infty \in c_0(Z^{(p)}) \text{ şeklinde tanımlıdır. Diğer taraftan } H \text{ konveks}$$

bir küme olduğundan $T_1, T_2 \in H$ iken $\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2 \in H$ olup $A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2} \in \{A_T : T \in H\}$

dir. Böylece $\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2 = \hat{\tau}(\gamma \tau_{T_1} + (1-\gamma)\tau_{T_2})$ ve L konveks olduğundan (Lemma 3.3

ün ispatına bakınız) $\gamma \tau_{T_1} + (1-\gamma)\tau_{T_2} \in L$ dir ve

$$\gamma \tau_{T_1} + (1-\gamma)\tau_{T_2} = \sum_{i=1}^\infty (\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} + (1-\gamma) \lambda_i^{\tau_{T_2}}) r_i \otimes s_i \text{ olup } (\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} + (1-\gamma) \lambda_i^{\tau_{T_2}})_{i=1}^\infty \in K \text{ olacaktır.}$$

$$\text{Buna göre } A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2} : c_0(Z^{(p)}) \rightarrow l_{r^*}(Z^{(p)}), \quad A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2}(z) = ((\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} + (1-\gamma) \lambda_i^{\tau_{T_2}}) z_i)_{i=1}^\infty,$$

$z = (z_i)_{i=1}^\infty \in c_0(Z^{(p)})$ olarak yazılabilecektir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2}(z) &= ((\gamma \lambda_i^{\tau_{T_1}} + (1-\gamma) \lambda_i^{\tau_{T_2}}) z_i)_{i=1}^\infty = \gamma (\lambda_i^{\tau_{T_1}} z_i)_{i=1}^\infty + (1-\gamma) (\lambda_i^{\tau_{T_2}} z_i)_{i=1}^\infty \\ &= \gamma A_{T_1}(z) + (1-\gamma) A_{T_2}(z) = (\gamma A_{T_1} + (1-\gamma) A_{T_2})(z) \end{aligned}$$

dir. Buradan $A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2} = \gamma A_{T_1} + (1-\gamma)A_{T_2}$ dir. Böylece $z \in Z_{FJ}$ için

$$\begin{aligned} (\gamma B_{T_1} + (1-\gamma)B_{T_2})(z) &= \beta \left((\gamma \lambda_i^{T_{T_1}} y_i)_{i=1}^{\infty} + ((1-\gamma) \lambda_i^{T_{T_2}} y_i)_{i=1}^{\infty} \right) \\ &= \beta \left(\gamma (\lambda_i^{T_{T_1}} y_i)_{i=1}^{\infty} + (1-\gamma) (\lambda_i^{T_{T_2}} y_i)_{i=1}^{\infty} \right) \\ &= \beta \left((\gamma A_{T_1} + (1-\gamma)A_{T_2})(\alpha(z)) \right) \\ &= \beta \left((A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2})(\alpha(z)) \right) \\ &= (\beta \circ A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2} \circ \alpha)(z) = B_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2}(z) \end{aligned}$$

olup $\gamma B_{T_1} + (1-\gamma)B_{T_2} = B_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2}$ elde edilir. O halde $B_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2} = \beta \circ A_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2} \circ \alpha$ ve $\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2 \in H$ olduğundan $\gamma B_{T_1} + (1-\gamma)B_{T_2} = B_{\gamma T_1 + (1-\gamma)T_2} \in \{B_T : T \in H\}$ dir. Böylece $\{B_T : T \in H\}$ konveks bir küme olup ispat tamamlanır.

Gözlem 3.4 Yukarıdaki teoremden hipotezdeki " k " çarpanı yerine genel olarak her $\gamma > 1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_k^\gamma} < \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\xi_k \geq 1$ olacak şekilde bir $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ dizisi seçilirse, sonuç doğru olmaya devam eder.

Gözlem 3.5 X ve Y Banach uzayları, $r \geq 2$ ve $1 \leq p \leq r < \infty$ olsun. Eğer $(ka_k)_{k=1}^{\infty} \in l_r((K_p(X, Y), k_p))$ ise o zaman $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının her $H \subset r - co\{(a_k)_{k=1}^{\infty}\}$ alt kümesi aslında $(K_r(X, Y), k_r)$ uzayının relatif r^* -kompakt bir alt kümesidir.

İspat Hipotezler altında H kümesinin $(K_r(X, Y), k_r)$ uzayının relatif r^* -kompakt bir alt kümesi olduğunu gösterelim. Teorem 3.4 gereğince bir $u \in K(X, Z_{FJ})$ operatörü, $\{B_T : T \in H\} \subset\subset_{r^*} K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ alt kümesi ve bir $v \in K_r(Z^{(r)}, Y)$ operatörü vardır öyle ki her $T \in H$ için $T = v \circ B_T \circ u$ dur. O halde herhangi bir $T_1 \in H$, $T = v \circ B_{T_1} \circ u$, $B_{T_1} \in \{B_T : T \in H\}$ olacak şekilde yazılabilir. Diğer taraftan $\{B_T : T \in H\} \subset\subset_{r^*} K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ olduğundan $B_{T_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{T_1} h_n$ olacak şekilde $(\lambda_n^{T_1})_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}$ ve $(h_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{r^*}(K(Z_{FJ}, Z^{(r)}))$ vardır. Bu takdirde, her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= v(B_{T_1}(u(x))) = v\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{T_1} h_n\right)u(x)\right) \\
&= v\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{T_1} h_n(u(x))\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{T_1} v(h_n(u(x))) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^{T_1} v \circ h_n \circ u)(x)
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} k_r(\lambda_n^{T_1} v \circ h_n \circ u) &= \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{T_1}| k_r(v \circ h_n \circ u) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{T_1}| k_r(v) \|h_n\| \|u\| \\
&\leq k_r(v) \|u\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{T_1}|^r\right)^{1/r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^{r^*}\right)^{1/r^*} < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{T_1} v \circ h_n \circ u$ serisi $(K_r(X, Y), k_r)$ uzayında mutlak yakınsaktır.

$(K_r(X, Y), k_r)$ Banach uzayı olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{T_1} v \circ h_n \circ u$ serisi yakınsaktır ve her $x \in X$

için $T_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^{T_1} v \circ h_n \circ u)(x)$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{T_1} v \circ h_n \circ u = T_1$ dir. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_r^{r^*}(v \circ h_n \circ u) \leq \sum_{n=1}^{\infty} k_r^{r^*}(v) \|h_n\|^{r^*} \|u\|^{r^*} = k_r^{r^*}(v) \|u\|^{r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^{r^*} < \infty$$

olduğundan $(v \circ h_n \circ u)_{n=1}^{\infty} \in l_{r^*}(K_r(X, Y), k_r)$ olup $H \subset\subset_{r^*}(K_r(X, Y), k_r)$ dir.

Eğer bir önceki teoremin hipotezinde temel dizideki her bir k – ıncı terim ile çarptığımız " k " çarpanını kaldırarak gevşetirsek, Teorem 3.4 ile karşılaştırıldığında görece daha zayıf olan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 3.1 X ve Y Banach uzayları, $r > 1$ ve $1 \leq p \leq r < \infty$ olsun. Bu takdirde, $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının her (dengeli ve konveks) relatif r – kompakt H alt kümesi için, bir $u \in K(X, Z_{FJ})$ operatörü, $K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ uzayının (dengeli ve konveks) bir relatif kompakt $\{B_T : T \in H\}$ alt kümesi ve bir $v \in K_r(Z^{(r)}, Y)$ operatörü vardır öyle ki, her $T \in H$ için $T = v \circ B_T \circ u$ dur.

İspat $r > 1$, $1 \leq p \leq r < \infty$ ve H , $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının relatif r – kompakt bir alt kümesi olsun. $\hat{t}$ lineer, sürekli ve örten bir tasvir olduğundan Lemma 3.2 gereğince

$H \subset \hat{\tau}(L)$ olacak şekilde $K(X, Z^{(p)}) \hat{\otimes}_{\pi} (K_p(Z^{(p)}, Y), k_p)$ uzayının relatif r – kompakt bir L alt kümesi vardır. Böylece bir $(\tau_k)_{k=1}^{\infty} \in l_r \left(K(X, Z^{(p)}) \hat{\otimes}_{\pi} (K_p(Z^{(p)}, Y), k_p) \right)$ dizisi bulabiliriz öyle ki $L \subset r\text{-co}\{(\tau_k)_{k=1}^{\infty}\}$ olur. Diğer taraftan $H \subset \hat{\tau}(L)$ olduğundan, her $T \in H$ için $T = \hat{\tau}(\tau_T)$ olacak şekilde $\tau_T \in L$ vardır. Dolayısıyla Lemma 3.4' ün b) şikkından herhangi bir $\tau_T \in L$, $\tau_T = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i^{\tau_T} r_i \otimes s_i$, $(r_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0(K(X, Z^{(p)}))$, $(s_i)_{i=1}^{\infty} \in l_r((K_p(Z^{(p)}, Y), k_p))$ ve $(\theta_i^{\tau_T})_{i=1}^{\infty} \in K$ olacak şekilde temsil edilebilir, burada K , $B_{l_{r^*}}$ in kompakt bir alt kümesidir. Şimdi Teorem 3.4' ün ispatında elde edilen $\{A_T : T \in H\}$ kümesi $L(c_0(Z^{(p)}), l_{r^*}(Z^{(p)}))$ uzayının relatif kompakt bir alt kümesi olacağından buna karşılık gelen $\{B_T : T \in H\}$ kümesi $K(Z_{FJ}, Z^{(r)})$ uzayının relatif kompakt bir alt kümesidir ve Teorem 3.4' ün ispatına benzer olarak eğer H dengeli ve konveks ise $\{B_T : T \in H\}$ kümesinin de dengeli ve konveks bir küme olduğu gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Banach uzayları arasında tanımlanan kompakt bir operatörün, l_1 uzayının bölüm uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılabilceğini gösterelim. Verilecek olan ispat [19, Proposition 2.9] da verilen Teorem 2.12' nin (ispatının) bir adaptasyonudur. Bunu, Teorem 3.3' ü $p = \infty$ durumu için elde etmek için kullanacağız. Bununla beraber, şunu ifade etmeliyiz ki, bu sonuç ve sonrasında verilecek olan Teorem 3.5, Banach ve Mazur' un [37] her ayrılabilir Banach uzayının l_1 uzayının bir bölüm uzayına izometrik olarak izomorf olduğunu söyleyen sonucundan dolayı zaten Johnson [1] ve Figiel [2] tarafından elde edilmişti.

Önerme 3.2 X ve Y Banach uzayları ve $T \in K(X, Y)$ olsun. Bu takdirde $T = \tilde{\theta}_z \circ R$, $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(Y)$, $R \in K(X, l_1/\ker \theta_z)$, $\tilde{\theta}_z \in K(l_1/\ker \theta_z, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir [1], [2] (ayrıca [19] e bakınız).

Önerme 3.2' nin ispatı için aşağıdaki literatürde iyi bilinen elemanter lemmayı kullanacağız.

Lemma 3.5 X bir Banach uzayı ve $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0(X)$ olsun. Bu takdirde, her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \geq 1$ olacak şekilde, artan ve sonsuza ıraksayan bir $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ dizisi seçebiliriz öyle ki $(\lambda_n x_n)_{n=1}^\infty \in c_0(X)$ olur.

Önerme 3.2 nin ispatı $T \in K(X, Y)$ olsun. Bu takdirde $T(B_X) \subset \bar{\Gamma}((y_n)_{n=1}^\infty)$ olacak şekilde $(y_n)_{n=1}^\infty \in c_0(Y)$ vardır. O halde Lemma 3.5 gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \geq 1$ olacak şekilde, artan ve sonsuza ıraksayan bir $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ dizisi seçebiliriz öyle ki $(\lambda_n y_n)_{n=1}^\infty \in c_0(Y)$ dir. $x \in B_X$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n y_n, \quad (\tau_n)_{n=1}^\infty \in B_{l_1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n y_n, \quad \left(\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için, } \beta_n := \tau_n \frac{1}{\lambda_n}, \quad z_n := \lambda_n y_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z_n, \quad (\beta_n)_{n=1}^\infty \in B_{l_1}, \quad (z_n)_{n=1}^\infty \in c_0(Y) \end{aligned}$$

olacaktır. Diğer taraftan $\left(\frac{1}{\lambda_n} \right)_{n=1}^\infty \in B_{c_0}$ olduğundan Lemma 2.4 gereğince

$$L := \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_n} \tau_n \right)_{n=1}^\infty : (\tau_n)_{n=1}^\infty \in B_{l_1} \text{ öyle ki bir } x \in B_X \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \tau_n z_n = T(x) \right\}$$

kümesi B_{l_1} in relatif kompakt bir alt kümesidir ve $T(B_X) \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z_n : (\beta_n)_{n=1}^\infty \in L \right\}$ dir.

Şimdi,

$\theta_z : l_1 \rightarrow Y$, $\theta_z((\alpha_n)_{n=1}^\infty) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n$ ile lineer, sürekli ve kompakt bir operatör tanımlayalım. Bu takdirde $\tilde{\theta}_z : l_1 / \ker \theta_z \rightarrow Y$, $\tilde{\theta}_z([(\alpha_n)_{n=1}^\infty]) := \theta_z((\alpha_n)_{n=1}^\infty)$ tasviri lineer, sürekli ve kompakttır. Gerçekten, tasvirin lineerliği açık olup (sürekli ve) kompakt olduğunu gösterelim.

$[(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \in B_{l_1/\ker\theta_z}$ olsun.

$$\begin{aligned}\|\tilde{\theta}_z([\alpha_n]_{n=1}^\infty)\| &= \|\theta_z((\alpha_n)_{n=1}^\infty)\| \\ &= \|\theta_z((\alpha_n)_{n=1}^\infty + (\beta_n)_{n=1}^\infty)\|, (\beta_n)_{n=1}^\infty \in \ker\theta_z \\ &\leq \|\theta_z\| \|(\alpha_n)_{n=1}^\infty + (\beta_n)_{n=1}^\infty\|\end{aligned}$$

dir. Bu şekildeki tüm $(\beta_n)_{n=1}^\infty$ ler üzerinden infimum alınarak,

$$\|\tilde{\theta}_z([\alpha_n]_{n=1}^\infty)\| \leq \|\theta_z\| \|[\alpha_n]_{n=1}^\infty\| \text{ elde edilir. Böylece } \tilde{\theta}_z \text{ tasviri s\u00fcreklidir. \u015imdi bu}$$

tasvirin kompakt oldu\u011funu g\u00f6sterelim. $\pi: l_1 \rightarrow l_1/\ker\theta_z$ b\u00f6l\u00fcm tasviri olmak \u00fczere,

$$\theta_z = \tilde{\theta}_z \circ \pi \text{ olarak yaz\u0131labilir.}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_z(B_{l_1/\ker\theta_z}) &= \tilde{\theta}_z(\overline{U_{l_1/\ker\theta_z}}) \subset \overline{\tilde{\theta}_z(U_{l_1/\ker\theta_z})} \quad (\tilde{\theta}_z \text{ nin s\u00fcreklili\u011finden}) \\ &= \overline{(\tilde{\theta}_z \circ \pi)(U_{l_1})} = \overline{\theta_z(U_{l_1})} \subset \overline{\Gamma((z_n)_{n=1}^\infty)}\end{aligned}$$

oldu\u011fundan $\tilde{\theta}_z$ tasviri kompattır.

\u015imdi $T = \tilde{\theta}_z \circ R$ olacak \u015ekilde kompakt bir R operat\u00f6r\u00fcn\u00fcn mevcut oldu\u011funu g\u00f6sterece\u011fiz.

$$0 \neq x \in X \quad \text{i\u00e7in,} \quad x/\|x\| \in B_X \quad \text{ve} \quad T(B_X) \subset \left\{ \sum_{n=1}^\infty \beta_n z_n : (\beta_n)_{n=1}^\infty \in L \right\} \quad \text{oldu\u011fundan}$$

$$T(x/\|x\|) = \sum_{n=1}^\infty \beta_n z_n \text{ olacak \u015ekilde } (\beta_n)_{n=1}^\infty \in L \text{ vardır. B\u00f6ylece her } x \in X \text{ i\u00e7in,}$$

$$T(x) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n z_n \text{ olacak \u015ekilde } (\ker\theta_z \text{ ye g\u00f6re tek t\u00fcrly\u00fcl\u00fc belirli) } (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in l_1 \text{ vardır ve}$$

bunlar bir denklik sınıf\u0131 olu\u015ftururlar. (Burada her $n \in \mathbb{N}$ i\u00e7in,

$$\alpha_n = \|x\| \beta_n, (\beta_n)_{n=1}^\infty \in L, \|(\alpha_n)_{n=1}^\infty\|_1 \leq \|x\| \text{ dir.) Buna g\u00f6re } (\alpha_n)_{n=1}^\infty \text{ dizisi } l_1 \text{ uzay\u0131nda,}$$

$$T(x) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n z_n \text{ \u015art\u0131n\u0131 sa\u011flayan bir dizi olmak \u00fczere, } R: X \rightarrow l_1/\ker\theta_z,$$

$$R(x) := [(\alpha_n)_{n=1}^\infty] \text{ \u015eklinde tanımlanan tasvir iyi tanımlı olup, lineer, s\u00fcrekli ve } \|R\| \leq 1$$

dir. \u015imdi R tasvirinin kompakt oldu\u011funu g\u00f6sterelim.

$y \in R(B_X)$ olsun. Bu takdirde, $y = R(x)$ olacak şekilde $x \in B_X$ vardır. Böylece

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n, \quad (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in L \quad \text{ve} \quad R(x) = [(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}] \quad \text{dir.} \quad \pi: l_1 \rightarrow l_1 / \ker \theta_z \quad \text{bölüm tasviri}$$

olmak üzere, $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in L$ olduğundan $R(x) = [(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}] \in \pi(L)$ dir. O halde $y \in \pi(L)$ olup, $R(B_X) \subset \pi(L)$ dir. Aslında (Teorem 2.12' nin ispatında olduğu gibi) $R(B_X) = \pi(L)$ dir. Gerçekten $y \in \pi(L)$ ise $y = \pi((\alpha_n)_{n=1}^{\infty})$ olacak şekilde $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in L$

vardır. Böylece L kümesinin tanımı gereğince $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n$ olacak şekilde $x \in B_X$

vardır. O halde $R(x) = [(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}]$ olup $y = \pi((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = R(x) \in R(B_X)$ dir. Böylece

$\pi(L) \subset R(B_X)$ dir. $L \subset B_{l_1}$ de relatif kompakt ve π sürekli olduğundan $\pi(\bar{L})$ kompakt olup, R tasviri kompaktır. Diğer taraftan $x \in X$ için,

$$(\tilde{\theta}_z \circ R)(x) = \tilde{\theta}_z([(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}]) = \theta_z((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n = T(x)$$

olup

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow R & \nearrow \tilde{\theta}_z \\ & l_1 / \ker \theta_z & \end{array}$$

diyagramı değişmeli ve dolayısıyla $T = \tilde{\theta}_z \circ R$ dir. O halde T kompakt operatörü, l_1 uzayının bölüm uzayı vasıtasıyla kompakt operatörlerin bileşkesi olarak çarpanlara ayrılabilir.

Şimdi, Önerme 3.2' yi göz önüne alarak, Teorem 3.3' ün $p = \infty$ durumu için de doğru olduğunu gösterelim. Yukarıda ifade ettiğimiz gibi bu sonuç Johnson [1] ve Figiel [2] tarafından zaten elde edilmişti, fakat biz Önerme 3.2' nin bir sonucu olarak elde edeceğiz.

Teorem 3.5 X ve Y Banach uzayları olsun. Bu takdirde, her $T \in K_{\infty}(X, Y) = K(X, Y)$ operatörü evrensel bir $Z^{(\infty)}$ Banach uzayı vasıtasıyla, $T = B \circ A$, $A \in K(X, Z^{(\infty)})$,

$B \in K(Z^{(\infty)}, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir. Burada $Z^{(\infty)}$ uzayı, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere ve W , l_1 uzayının kapalı olan tüm alt uzaylarından alınmak üzere, sabit bir

q için $Z^{(\infty)} := \left(\sum_W l_1 / W \right)_q$ şeklindedir [1], [2].

İspat $T \in K_\infty(X, Y) = K(X, Y)$ olsun. Bu takdirde, Önerme 3.2' den biliyoruz ki, T operatörü $T = \tilde{\theta}_z \circ R$, $z = (z_n)_{n=1}^\infty \in c_0(Y)$, $R \in K(X, l_1 / \ker \theta_z)$, $\tilde{\theta}_z \in K(l_1 / \ker \theta_z, Y)$ olacak şekilde çarpanlara ayrılabilir. $l_1 / \ker \theta_z$ uzayı $Z^{(\infty)}$ uzayının tanımındaki l_1 / W uzaylarından biri olacağından, buradan itibaren Teorem 3.1' in ispatındaki adımlar izlenerek $T = B \circ A$ olacak şekilde $A \in K(X, Z^{(\infty)})$ ve $B \in K(Z^{(\infty)}, Y)$ dönüşümleri elde edilir. Gerçekten de J , l_1 uzayının kapalı olan tüm alt uzaylarının ailesi olmak üzere,

$$I_{l_1 / \ker \theta_z} : l_1 / \ker \theta_z \rightarrow Z^{(\infty)}, \quad I_{l_1 / \ker \theta_z}([(\beta_n)_{n=1}^\infty]) = (x_W)_{W \in J}$$

burada $x_W = \begin{cases} [(\beta_n)_{n=1}^\infty], & W = \ker \theta_z \\ 0, & W \neq \ker \theta_z \end{cases}$ şeklinde tanımlanan, bir normlu doğal gömmeyi ve normu bir olan

$$P_{l_1 / \ker \theta_z} : Z^{(\infty)} \rightarrow l_1 / \ker \theta_z, \quad P_{l_1 / \ker \theta_z}((x_W)_{W \in J}) = x_{\ker \theta_z}$$

izdüşüm dönüşümünü göz önüne alabiliriz. Bu takdirde, $P_{l_1 / \ker \theta_z} \circ I_{l_1 / \ker \theta_z}$ birim dönüşüm olup $T = \tilde{\theta}_z \circ R = \tilde{\theta}_z \circ P_{l_1 / \ker \theta_z} \circ I_{l_1 / \ker \theta_z} \circ R$ dir. Şimdi $A := I_{l_1 / \ker \theta_z} \circ R$ ve $B := \tilde{\theta}_z \circ P_{l_1 / \ker \theta_z}$ olsun. Böylece $T = B \circ A$ olacak şekilde, $A \in K(X, Z^{(\infty)})$ ve $B \in K(Z^{(\infty)}, Y)$ dönüşümleri elde edilir.

Gözlem 3.6 Teorem 3.3' teki çarpanlara ayrılıştaki p değıştikçe $K_p(X, Y)$ uzayına karşılık gelen $Z^{(p)}$ evrensel Banach uzayı değışecektir. Şimdi, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $Z^{(p)}$ uzayları Teorem 3.3 ve Teorem 3.5' deki evrensel Banach uzayları olmak üzere

eğer, $1 \leq q \leq \infty$ iken, sabit bir q için $Z := \left(\sum_{1 \leq p \leq \infty} Z^{(p)} \right)_q$ alınırsa, Z uzayı, p den

bağımsız olarak, Banach uzayları arasındaki tüm p – kompakt operatörlerin çarpanlara

ayrılığı için evrensel bir Banach uzayı olur. Gerçekten de p_1 , $1 \leq p_1 \leq \infty$ olacak şekilde bir sabit ve $T \in K_{p_1}(X, Y)$ olsun. Bu takdirde $1 \leq p_1 < \infty$ ise Teorem 3.3 veya $p_1 = \infty$ ise Teorem 3.5 gereğince, $T = B \circ A$, $A \in K(X, Z^{(p_1)})$ ve $B \in K_{p_1}(Z^{(p_1)}, Y)$ olarak yazabiliriz. $Z^{(p_1)}$ uzayı Z uzayının tanımındaki $Z^{(p)}$ uzaylarından biri olacağından

$$I_{Z^{(p_1)}} : Z^{(p_1)} \rightarrow Z, \quad I_{Z^{(p_1)}}(z_{p_1}) = (z_p)_{p \in [1, \infty]}$$

burada $z_p = \begin{cases} z_{p_1}, & p = p_1 \\ 0, & p \neq p_1 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan, normu bir olan doğal gömmeyi ve normu bir olan

$$P_{Z^{(p_1)}} : Z \rightarrow Z^{(p_1)}, \quad P_{Z^{(p_1)}}((z_p)_{p \in [1, \infty]}) = z_{p_1}$$

izdüşüm dönüşümünü göz önüne alabiliriz. Bu takdirde, $P_{Z^{(p_1)}} \circ I_{Z^{(p_1)}}$ dönüşümü $Z^{(p_1)}$ üzerinde birim dönüşümdür. Gerçekten $z_{p_1} \in Z^{(p_1)}$ olmak üzere,

$$(P_{Z^{(p_1)}} \circ I_{Z^{(p_1)}})(z_{p_1}) = P_{Z^{(p_1)}}((z_p)_{p \in [1, \infty]}) = z_{p_1}$$

olup

$$Z^{(p_1)} \xrightarrow{I_{Z^{(p_1)}}} Z \xrightarrow{P_{Z^{(p_1)}}} Z^{(p_1)}$$

bileşkesi, yani, $P_{Z^{(p_1)}} \circ I_{Z^{(p_1)}}$ birim dönüşümdür. Böylece $T = B \circ A = B \circ P_{Z^{(p_1)}} \circ I_{Z^{(p_1)}} \circ A$ olup $u = B \circ P_{Z^{(p_1)}}$ ve $v = I_{Z^{(p_1)}} \circ A$ olarak alırsak, $T = u \circ v$ olacak şekilde $v \in K(X, Z)$, $u \in K_{p_1}(Z, Y)$ dönüşümleri elde edilir.

Gözlem 3.7 Yukarıdaki açıklamada tanımlanan Z uzayı $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere tüm p -kompakt operatörlerin çarpanlara ayrılığı için bir evrensel Banach uzayı olduğundan, Gözlem 3.3' teki τ tasviri,

$$\tau : K(X, Z) \times (K_p(Z, Y), k_p) \rightarrow (K_p(X, Y), k_p), \quad \tau(u, v) = v \circ u$$

bilineer, sürekli ve örten olacaktır. O halde, τ nun lineerleşmesi,

$$\hat{\tau} : K(X, Z) \hat{\otimes}_{\pi} (K_p(Z, Y), k_p) \rightarrow (K_p(X, Y), k_p), \quad \hat{\tau}(u \otimes v) = \tau(u, v) = v \circ u$$

lineer, sürekli ve örten bir tasvirdir.

Şimdi Teorem 3.4 ve Önerme 3.1' i biraz daha geliştirebiliriz, çünkü bu sonuçlarda elde edilen çarpanlara ayırmalarda p -kompakt operatörlerin, çarpanlara ayrıldığı uzaylardan biri $r \geq 2$ sayısına bağlıdır. Bunun için $\hat{\tau}$ tasviri ve $1 \leq p \leq \infty$ için yukarıdaki tüm p -kompakt operatörlerin Z uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayrılışı göz önüne alınarak Teorem 3.4 ve Önerme 3.1' deki evrensel Z_{FJ} ve $Z^{(r)}$ uzaylarını, Z uzayı ile değiştirebiliriz. Bu takdirde aşağıdaki sonuçları elde ederiz ki, bunlar sırasıyla Teorem 3.4 ve Önerme 3.1' in güçlendirilmesi olacaktır, ki burada karşılık gelen çarpanlara ayırmalar, $r \geq 2$ ye bağlı olmayan evrensel bir Banach uzayı vasıtasıyla elde edilmiştir.

Sonuç 3.1 X, Y Banach uzayları, $r \geq 2$ ve $1 \leq p \leq r < \infty$ olsun. Bu takdirde $(ka_k)_{k=1}^{\infty} \in l_r((K_p(X, Y), k_p))$ olmak üzere $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının her $H \subset r\text{-co}\{(a_k)_{k=1}^{\infty}\}$ (dengeli ve konveks) alt kümesi için bir $u \in K(X, Z)$ operatörü, $K(Z, Z)$ uzayının (dengeli ve konveks) relatif r^* -kompakt bir $\{B_T : T \in H\}$ alt kümesi ve bir $v \in K_r(Z, Y)$ operatörü vardır öyle ki her $T \in H$ için, $T = v \circ B_T \circ u$ dur.

Sonuç 3.2 X, Y Banach uzayları $r > 1$ ve $1 \leq p \leq r < \infty$ olsun. Bu takdirde, $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının her (dengeli ve konveks) relatif r -kompakt H alt kümesi için, bir $u \in K(X, Z)$ operatörü, $K(Z, Z)$ uzayının (dengeli ve konveks) relatif kompakt bir $\{B_T : T \in H\}$ alt kümesi ve bir $v \in K_r(Z, Y)$ operatörü vardır öyle ki her $T \in H$ için, $T = v \circ B_T \circ u$ dur.

ÇARPANLARA AYRILMALARIN BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde [19, Proposition 2.9] da ve [12, Theorem 3.1] de verilen, bizim sırasıyla Teorem 2.12 ve Teorem 2.11 olarak sunduğumuz, çarpanlara ayrılmaların yaklaşım özelliğiyle ilgili uygulamasını ve üçüncü bölümde elde ettiğimiz düzgün çarpanlara ayrılmaların homojen polinomlara ilişkin bir uygulamasını vereceğiz. Önce gerekli olacak bazı yardımcı sonuçlar vereceğiz.

Bunun için birlikte kompakt küme kavramının [38] doğal bir genişlemesi olarak birlikte p –kompakt küme kavramını tanımlayarak başlayacağız.

Tanım 4.1 X, Y Banach uzayları, $1 \leq p \leq \infty$ ve $A, L(X, Y)$ uzayının bir alt kümesi olsun. $A(B_X) = \{T(x) : T \in A, x \in B_X\}$ kümesi Y uzayında relatif p –kompakt bir küme ise, A kümesine $L(X, Y)$ uzayının birlikte p –kompakt alt kümesi denir.

Relatif ∞ –kompakt küme relatif kompakt küme olarak gözönüne alındığından, birlikte ∞ –kompakt küme, benzer şekilde, birlikte kompakt küme olarak göz önüne alınacaktır.

Şimdi, birlikte kompaktlık durumuna benzer olarak ve bir p –kompakt emsal olarak, kendi başına ilginç olan aşağıdaki sonucu elde ederiz, ki bu Teorem 4.1’ in ispatında gerekli olacaktır.

Önerme 4.1 Her $1 \leq p \leq \infty$ için $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının her relatif p –kompakt alt kümesi $L(X, Y)$ uzayının birlikte p –kompakt alt kümesidir.

İspat a) $p = \infty$ durumu kompaktlık durumu [38] olduğundan, biz ispatı $1 < p < \infty$ ve $p = 1$ için olmak üzere iki kısma ayıracağız.

$1 < p < \infty$ ve $A \subset\subset_p (K_p(X, Y), k_p)$ olsun. Bu takdirde $A(B_X) = \{T(x) : T \in A, x \in B_X\}$ kümesinin Y uzayında relatif p -kompakt olduğunu göstereceğiz.

$T \in A$ olsun. $A \subset\subset_p (K_p(X, Y), k_p)$ olduğundan $T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T T_n$ olacak şekilde

$(\alpha_n^T)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}}, (T_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p((K_p(X, Y), k_p))$ vardır. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n \in K_p(X, Y)$ ve

$$k_p(T_n) = \inf \left\{ \|(z_k^n)_{k=1}^{\infty}\|_p : (z_k^n)_{k=1}^{\infty} \in l_p(Y), T_n(B_X) \subset p\text{-co}\{(z_k^n)_{k=1}^{\infty}\} \right\}$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|(z_k^n)_{k=1}^{\infty}\|_p < k_p(T_n) + \frac{1}{2^n} \text{ ve } T_n(B_X) \subset p\text{-co}\{(z_k^n)_{k=1}^{\infty}\}$$

olacak şekilde $(z_k^n)_{k=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ vardır. O halde $T \in A$ ve $x \in B_X$ olmak üzere

$$T(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T T_n \right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T T_n(x), (\alpha_n^T)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n(B_X) \subset p\text{-co}\{(z_k^n)_{k=1}^{\infty}\}$ olduğundan

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{n,x} z_k^n, (\lambda_k^{n,x})_{k=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}}$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T T_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{n,x} z_k^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n^T \lambda_k^{n,x} z_k^n, (\alpha_n^T)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}}, (\lambda_k^{n,x})_{k=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}}$$

olacaktır.

Burada $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n^T \lambda_k^{n,x} z_k^n$ serisi Y uzayında mutlak yakınsaktır. Gerçekten de, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_n^T \lambda_k^{n,x} z_k^n\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_n^T \lambda_k^{n,x}|^{p^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k^n\|^p \right)^{1/p} \right] \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_n^T \lambda_k^{n,x}|^{p^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k^n\|^p \right)^{1/p}, \quad (\alpha_n^T)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}}, \quad (\lambda_k^{n,x})_{k=1}^{\infty} \in B_{l_p} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k^n\|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|(z_k^n)_{k=1}^{\infty}\|_p^p \right)^{1/p} \\
&< 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (k_p^p(T_n) + \frac{1}{2^{np}}) \right)^{1/p} < \infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla bu (ikili) serideki terimlerin sıralamasından bağımsız olarak

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n^T \lambda_k^{n,x} z_k^n$$

olacaktır. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_n^T \lambda_k^{n,x}|^{p^*} &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^T|^{p^*} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{n,x}|^{p^*} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^T|^{p^*} \leq 1, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k^n\|^p &< 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} (k_p^p(T_n) + \frac{1}{2^{np}}) \right) < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan belli bir sıralama seçip,

$$(\gamma_l^{T,x})_{l=1}^{\infty} := (\alpha_n^T \lambda_k^{n,x})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in B_{l_{p^*}},$$

$$(s_l)_{l=1}^{\infty} := (z_k^n)_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in l_p(Y)$$

yazarak $T(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^{T,x} s_l$ temsili elde edilir. Böylece

$A(B_X) = \{T(x) : T \in A, x \in B_X\} \subset p\text{-co}\{(s_l)_{l=1}^{\infty}\}$ olup $1 < p < \infty$ durumu için ispat tamamlanır.

b) Şimdi $p=1$ ve $A \subset\subset_p (K_p(X,Y), k_p)$ olsun. Bu takdirde herhangi bir $T \in A$ için

$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T T_n$ olacak şekilde $(\alpha_n^T)_{n=1}^{\infty} \in B_{c_0}$, $(T_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p((K_p(X,Y), k_p))$ vardır. Buradan

a) şıkkındaki benzer işlemler ile belli bir sıralama seçip,

$$(\gamma_l^{T,x})_{l=1}^\infty := (\alpha_n^T \lambda_k^{n,x})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in B_{l_\infty},$$

$$(s_l)_{l=1}^\infty := (z_k^n)_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in l_1(Y)$$

yazarak $x \in B_X$ için $T(x) = \sum_{l=1}^\infty \gamma_l^{T,x} s_l$ temsili elde edilir. Diğer taraftan $(s_l)_{l=1}^\infty \in l_1(Y)$

olduğundan Lemma 2.5 gereğince $(\beta_l s_l)_{l=1}^\infty \in l_1(Y)$ olacak şekilde bir $\beta_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$ dizisi seçebiliriz. Böylece $(z_l)_{l=1}^\infty := (\beta_l s_l)_{l=1}^\infty$ dersek

$$T(x) = \sum_{l=1}^\infty \gamma_l^{T,x} \frac{1}{\beta_l} \beta_l s_l = \sum_{l=1}^\infty \gamma_l^{T,x} \frac{1}{\beta_l} z_l, \quad (\gamma_l^{T,x} \frac{1}{\beta_l})_{l=1}^\infty \in B_{c_0}$$

olup $A(B_X) = \{T(x) : T \in A, x \in B_X\} \subset p\text{-}co\{(z_l)_{l=1}^\infty\}$ elde edilir. O halde $p=1$ durumu için ispat tamamlanır.

Aşağıdaki sonuç literatürde iyi bilinen elemanter bir sonuçtur, fakat biz muhtemelen standart olan bir ispatını vereceğiz.

Lemma 4.1 $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, X Banach uzayında sonlu sayıdaki relatif p -kompakt kümenin birleşimleri de relatif p -kompakttır.

İspat İki relatif p -kompakt kümenin birleşiminin relatif p -kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. $1 \leq p < \infty$ olsun. ($p = \infty$ durumu relatif kompaktlık durumu olacağından ispat açıktır) A ve B , X uzayının relatif p -kompakt alt kümeleri olsun. Bu takdirde $A \cup B \subset p\text{-}co\{(t_n)_{n=1}^\infty\}$ olacak şekilde $(t_n)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in A \cup B$ olsun. O halde $x \in A$ veya $x \in B$ dir.

$x \in A$ ise $A \subset\subset_p X$ olduğundan $x = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^x y_i$ olacak şekilde $(\alpha_i^x)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$ ($p=1$ ise $(\alpha_i^x)_{i=1}^\infty \in B_{c_0}$) ve $(y_i)_{i=1}^\infty \in l_p(X)$ vardır.

$x \in B$ ise $B \subset\subset_p X$ olduğundan $x = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^x z_i$ olacak şekilde $(\lambda_i^x)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$ ($p=1$ ise $(\lambda_i^x)_{i=1}^\infty \in B_{c_0}$) ve $(z_i)_{i=1}^\infty \in l_p(X)$ vardır.

Şimdi her bir $n \in \mathbb{N}$ için $t_n := \begin{cases} y_k, & n = 2k - 1 \\ z_k, & n = 2k \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$(t_n)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$ olduğunu gösterelim.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^n \|t_k\|^p \leq \sum_{k=1}^n (\|y_k\|^p + \|z_k\|^p) \leq \sum_{k=1}^\infty \|y_k\|^p + \sum_{k=1}^\infty \|z_k\|^p < \infty$ olduğundan

$\sum_{k=1}^n \|t_k\|^p < \infty$ ve dolayısıyla $(t_n)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$ dir.

Şimdi $x \in A \cup B$ için $x = \sum_{n=1}^\infty \beta_n^x t_n$ olacak şekilde $(\beta_n^x)_{n=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$ in mevcut olduğunu gösterelim.

Eğer $x \in A$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n^x := \begin{cases} \alpha_k^x, & n = 2k - 1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$ olarak alırsak $\sum_{n=1}^\infty |\beta_n^x|^{p^*} = \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n^x|^{p^*} \leq 1$

olup $(\beta_n^x)_{n=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$ ($p = 1$ ise $(\beta_n^x)_{n=1}^\infty \in B_{c_0}$) ve $x = \sum_{n=1}^\infty \beta_n^x t_n$ dir.

Eğer $x \in B$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n^x := \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \\ \lambda_k^x, & n = 2k \end{cases}$ olarak alırsak $\sum_{n=1}^\infty |\beta_n^x|^{p^*} = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n^x|^{p^*} \leq 1$

olup $(\beta_n^x)_{n=1}^\infty \in B_{l_{p^*}}$ ($p = 1$ ise $(\beta_n^x)_{n=1}^\infty \in B_{c_0}$) ve $x = \sum_{n=1}^\infty \beta_n^x t_n$ dir.

Böylece $A \cup B \subset p\text{-co}\{(t_n)_{n=1}^\infty\}$ olup ispat tamamlanır.

Aşağıdaki lemma kompakt operatörlerin bir p -kompakt alt kümesindeki operatörlerin dualinin alınmasıyla elde edilen dual uzaylar arasındaki kompakt operatörlerin oluşturduğu dual operatörler kümesinin yine p -kompakt olacağını göstermektedir. Yani, kompakt operatörlerin kümeleri, dualite bağlamında p -kompaktlık altında değişmezdir.

Lemma 4.2 X, Y Banach uzayları ve $H, K(X, Y)$ uzayının bir alt kümesi ve $1 \leq r^* \leq \infty$ olsun. Eğer $H \subset\subset_{r^*} K(X, Y)$ ise $H^* := \{T' : T \in H\} \subset\subset_{r^*} K(Y', X')$ dir.

İspat $T'_1 \in H^* := \{T' : T \in H\}$ olsun. $H \subset\subset_{r^*} K(X, Y)$ olduğundan $(S_n)_{n=1}^\infty \in l_{r^*}(K(X, Y))$

($r^* = \infty$ ise $(S_n)_{n=1}^\infty \in c_0(K(X, Y))$) dir) vardır öyle ki $T_1 = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{T_1} S_n$, $(\alpha_n^{T_1})_{n=1}^\infty \in B_{l_r}$ dir.

$q_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n^{T_1} S_n$ olsun. Bu takdirde

$$\|q_k - T_1\| = \|(q_k - T_1)'\| = \|q'_k - T'_1\|$$

olup $q_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_1$ olduğundan $q'_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T'_1$ dir. Ayrıca $q'_k = \left(\sum_{n=1}^k \alpha_n^{T_1} S_n \right)' = \sum_{n=1}^k \alpha_n^{T_1} S'_n$

olacağından $T'_1 = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{T_1} S'_n$ elde edilir. Schauder Teoremi gereğince [22]

$(S'_n)_{n=1}^\infty \subset K(Y', X')$ dir ve $\|S_n\| = \|S'_n\|$ olduğundan $(S'_n)_{n=1}^\infty \in l_{r^*}(K(Y', X'))$ ($r^* = \infty$ ise $(S'_n)_{n=1}^\infty \in c_0(K(Y', X'))$) dir. Böylece $H^* := \{T' : T \in H\} \subset\subset_{r^*} K(Y', X')$ dir.

4.1 p – Kompakt Operatörlerin Çarpanlara Ayrılışının Yaklaşım Özelliklerine Uygulamaları

Operatörler için elde edilen çarpanlara ayrılma sonuçları, birçok durumda belli Banach uzaylarının belli tipteki yaklaşım özelliklerine sahip olup olmadığını belirlemede önemli bir role sahip olduğundan, Banach uzaylarının yaklaşım özelliği çalışılırken oldukça kullanışlıdır. Bir örnekleme olarak yaklaşım ve k_p –yaklaşım özelliklerini göz önüne alacağız.

Tanım 4.2 X Banach uzayı olmak üzere, X uzayının her bir K kompakt alt kümesi ve her $\varepsilon > 0$ için, $\sup_{x \in K} \|Tx - x\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde, sonlu ranklı bir $T : X \rightarrow X$ operatörü varsa X uzayı yaklaşım özelliğine sahiptir denir [9].

Tanım 4.3 X Banach uzayı ve $p \geq 1$ olmak üzere, X uzayının her bir p –kompakt K alt kümesi ve her $\varepsilon > 0$ için, $\sup_{x \in K} \|Tx - x\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde, sonlu ranklı bir $T : X \rightarrow X$ operatörü varsa X uzayı p –yaklaşım özelliğine sahiptir denir [8].

Tanım 4.4 X Banach uzayı olmak üzere, her Y Banach uzayı için $\overline{F(Y, X)}^{k_p} = K_p(Y, X)$ oluyorsa X uzayı k_p – yaklaşım özelliğine sahiptir denir [14].

Her Banach uzayı 2 – yaklaşım özelliğine sahiptir ve böylece $1 \leq p \leq 2$ ise p – yaklaşım özelliğine sahiptir [8]. $p > 2$ ise p – yaklaşım özelliğine sahip olmayan Banach uzayları vardır [8].

$p \geq 1$ olmak üzere her p – kompakt küme kompakt olduğundan yaklaşım özelliğine sahip olan her Banach uzayı p – yaklaşım özelliğine sahiptir. Enflo [39], yaklaşım özelliğine sahip olmayan ayrılabilir bir Banach uzayının mevcut olduğunu göstermiştir. Böylece p – yaklaşım özelliğine sahip olan her Banach uzayının yaklaşım özelliğine sahip olması gerekmez.

$T \in K_p(X, Y)$ ise $\|T\| \leq k_p(T)$ [8], olduğundan k_p – yaklaşım özelliğine sahip her Banach uzayı p – yaklaşım özelliğine sahiptir. Gerçekten de X , k_p – yaklaşım özelliğine sahip Banach uzayı ve $T \in K_p(Y, X)$ olsun. Bu takdirde $k_p(T_n - T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ olacak şekilde $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset F(Y, X)$ vardır. $\|T_n - T\| \leq k_p(T_n - T)$ olacağından $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ olup $T \in \overline{F(Y, X)}$ dir. Böylece $K_p(Y, X) \subset \overline{F(Y, X)}$ olup X , p – yaklaşım özelliğine sahiptir [13].

Her Banach uzayı k_2 – yaklaşım özelliğine sahiptir [14, Corollary 3.6]. Fakat her $p \neq 2$ için dual uzayı k_p – yaklaşım özelliğine sahip olmayan Banach uzayı vardır. Sonuç olarak her $1 \leq p < 2$ için dual uzayı p – yaklaşım özelliğine sahip olup k_p – yaklaşım özelliğine sahip olmayan Banach uzayı vardır [14, Theorem 2.4]. Ayrıca [19] da yaklaşım özelliğine sahip olan bir Banach uzayının k_p – yaklaşım özelliğine sahip olduğunu, fakat tersinin doğru olmadığı gösterilmiştir. Yukarıdaki sonuçlara göre aşağıdaki diyagram elde edilir:

$$\text{yaklaşım özelliği} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} k_p - \text{yaklaşım özelliği} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} p - \text{yaklaşım özelliği}$$

Şimdi sırasıyla [19, Proposition 2.9] ve [12, Theorem 3.1], yani, bizim sırasıyla Teorem 2.12 ve Teorem 2.11 olarak sunduğumuz teoremlerin direkt sonuçları olarak elde ettiğimiz aşağıdaki sonuçları vereceğiz. İspatlar için bilinen standart metodu

kullanacağız. İlk olarak yaklaşım özelliğiyle ilgili iyi bilinen bir sonucun, bir çarpanlara ayırma sonucunu kullanarak, basit bir ispatını vereceğiz.

Önerme 4.2 $2 < p \leq \infty$ olmak üzere, l_{p^*} uzayının yaklaşım özelliğine sahip olmayan bölüm uzayları vardır [40].

İspat $p = \infty$ olması durumunda, Banach ve Mazur' un [37] (ayrıca [21, sayfa 280] e bakınız) her ayrılabilir Banach uzayının l_1 uzayının bir bölüm uzayına izometrik olarak izomorf olduğunu söyleyen sonucuna ve Enflo'nun [39] daki sonucuna göre l_1 uzayının yaklaşım özelliğine sahip olmayan bölüm uzaylarının mevcut olduğu görülür. Şimdi $2 < p < \infty$ olmak üzere, tersine l_{p^*} uzayının bütün bölüm uzaylarının yaklaşım özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. X , p -yaklaşım özelliğine sahip olmayan bir Banach uzayı ve Y de keyfi bir Banach uzayı olmak üzere herhangi $T \in K_p(Y, X)$ alalım. Bu takdirde [19, Proposition 2.9], yani, bizim Teorem 2.12 olarak ifade ettiğimiz teoremden biliyoruz ki $T = \tilde{\theta}_z \circ R$ olacak şekilde bir $(z_n)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$ dizisi ve $R \in K(Y, l_{p^*} / \ker \theta_z)$, $\tilde{\theta}_z \in K_p(l_{p^*} / \ker \theta_z, X)$ operatörleri vardır. Hipotezden $l_{p^*} / \ker \theta_z$ uzayı yaklaşım özelliğine sahip olduğundan $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R$ olacak şekilde sonlu ranklı operatörlerin bir $(u_n)_{n=1}^\infty \subset F(Y, l_{p^*} / \ker \theta_z)$ dizisi vardır [9]. Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n := \tilde{\theta}_z \circ u_n$ olsun. Böylece $(B_n)_{n=1}^\infty \subset F(Y, X)$ olup

$$\|B_n - T\| = \|\tilde{\theta}_z \circ u_n - \tilde{\theta}_z \circ R\| \leq \|\tilde{\theta}_z\| \|u_n - R\| \quad \text{ve} \quad u_n - R \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

olduğundan $\|B_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dır. O halde $T \in \overline{F(Y, X)}$ olup $K_p(Y, X) \subset \overline{F(Y, X)}$ elde edilir. Bu ise X Banach uzayının p -yaklaşım özelliğine sahip olması demektir [13], ki bu bir çelişkidir. O halde l_{p^*} uzayının yaklaşım özelliğine sahip olmayan bölüm uzayları vardır. $\square$

Oja [41] de her $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ için l_p uzaylarının k_p -yaklaşım özelliğine sahip olmayan kapalı alt uzaylarının varlığını göstermiştir. Bu ise her $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$, için Banach ve Mazur' un [37] sonucuna göre l_1 uzayının k_p -yaklaşım özelliğine sahip

olmayan bölüm uzaylarının varlığını gösterir. Biz bu sonucu aşağıda çarpanlara ayırmayı kullanarak ispatlayacağız.

Önerme 4.3 $1 \leq p \leq \infty$ ve $p \neq 2$ olmak üzere l_1 uzayının k_p – yaklaşım özelliğine sahip olmayan bölüm uzayları vardır [12], [41].

İspat $p = \infty$ durumu Önerme 4.2 deki $p = \infty$ durumuyla aynı olduğundan, p sonlu ve $p \neq 2$ olmak üzere, tersine l_1 uzayının bütün bölüm uzaylarının k_p – yaklaşım özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. X , dual uzayı k_p – yaklaşım özelliğine sahip olmayan bir Banach uzayı [14] ve Y de keyfi bir Banach uzayı olmak üzere $T \in K_p(Y, X')$ olsun. Bu takdirde, [12, Theorem 3.1], yani bizim Teorem 2.11 olarak ifade ettiğimiz teoremden biliyoruz ki $T = v \circ u$ olacak şekilde, l_1 uzayının kapalı bir M alt uzayı, $u \in K_p(Y, l_1/M)$ ve $v \in K(l_1/M, X')$ operatörleri vardır. Hipotezden l_1/M bölüm uzayı k_p – yaklaşım özelliğine sahip olduğundan $k_p(u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ olacak şekilde sonlu ranklı operatörlerin bir $(u_n)_{n=1}^\infty \subset F(Y, l_1/M)$ dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n := v \circ u_n$ olsun. Böylece $(A_n)_{n=1}^\infty \subset F(Y, X')$ olup

$$k_p(A_n - T) = k_p(v \circ u_n - v \circ u) \leq \|v\| k_p(u_n - u) \text{ ve } k_p(u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

olduğundan $k_p(A_n - T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dır. O halde, $T \in \overline{F(Y, X')}^{k_p}$ olup $K_p(Y, X') \subset \overline{F(Y, X')}^{k_p}$ elde edilir. Bu ise X uzayının dual uzayı X' uzayının k_p – yaklaşım özelliğine sahip olması demektir. Bu bir çelişki olduğundan, sonuç olarak l_1 uzayının k_p – yaklaşım özelliğine sahip olmayan bölüm uzayları vardır.

4.2 p – Kompakt Operatörlerin Düzgün Çarpanlara Ayrılışının Homojen Polinom Uzaylarına Bir Uygulaması

Şimdi düzgün çarpanlara ayrılmanın bir uygulamasını vermeye çalışacağız. Burada amaç Toma' nın [42] de verilen ve [7, Corollary 6] da ifade edilen ve birim yuvar üzerinde zayıf düzgün sürekli olan homojen polinomları kompakt kümeler vasıtasıyla karakterize eden sonucunun p – kompakt versiyonunu elde etmektir. Önce [7,

Proposition 5] deki sonucun p -kompakt versiyonunu, $n = 2$ için kısmen, elde etmeye çalışacağız.

Teorem 4.1 X Banach uzayı ve X' yaklaşım özelliğine sahip olsun. $r \geq 2$, $1 \leq p \leq r < \infty$ ve $(ka_k)_{k=1}^\infty \in l_r((K_p(X, X'), k_p))$ olmak üzere $H \subset r\text{-co}\{(a_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ sayısı için, X' uzayının r -kompakt bir K'_ε alt kümesi vardır öyle ki her $T \in H$ ve her $x \in X$ için, $|T(x)(x)| \leq \varepsilon \|x\| \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(x)| + \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(x)|^2$ dir.

İspat Sonuç 3.1 gereğince bir Z Banach uzayı, $u \in K(X, Z)$ operatörü, $K(Z, Z)$ uzayının relatif r^* -kompakt bir $\{B_T : T \in H\}$ alt kümesi ve bir $v \in K_r(Z, X')$ operatörü vardır öyle ki, her $T \in H$ için $T = v \circ B_T \circ u$ dur. $L_T := B_T \circ u$ olsun. Bu takdirde $\{L_T : T \in H\} \subset\subset_{r^*} K(X, Z)$ ve $T = v \circ L_T$ dir. Böylece, her $x \in X \subset X''$ ve her $T \in H$ için

$$|T(x)(x)| = |v \circ L_T(x)(x)| = |v'(x)(L_T(x))| \leq \|v'(x)\| \|L_T(x)\|$$

dir. Şimdi,

$$\|v'(x)\| = \sup_{z \in B_Z} |v'(x)(z)| = \sup_{z \in B_Z} |v(z)(x)| \leq \sup_{k' \in K'_1} |k'(x)|$$

burada $K'_1 := \overline{v(B_Z)} \subset X'$ de r -kompakttır. Ayrıca

$$\|L_T(x)\| = \sup_{z' \in B_{Z'}} |z'(L_T(x))| = \sup_{z' \in B_{Z'}} |(L'_T z')(x)|$$

dir. Şimdi $K := \{L_T : T \in H\}$ ve $K^* := \{L'_T : T \in H\}$ olsun. Bu takdirde Lemma 4.2 gereğince $K^* \subset\subset_{r^*} K(Z', X')$ olacağından $K^* \subset r^*\text{-co}\{(S'_n)_{n=1}^\infty\}$ olacak şekilde

$$(S'_n)_{n=1}^\infty \in l_{r^*}(K(Z', X')) \text{ vardır. Böylece bir } \varepsilon > 0 \text{ verildiğinde, } \sum_{n=N+1}^\infty \|S'_n\|^{r^*} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{r^*}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $S'_n \in K(Z', X')$ ve X' yaklaşım özelliğine sahip olduğundan bir

$S_n^F \in F(Z', X')$ operatörü vardır öyle ki $\|S'_n - S_n^F\| < \frac{\varepsilon}{2n^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{-1}$ dir [23, Theorem 1.e.4].

Buna göre $F(Z', X')$ de $S_n^* = \begin{cases} S_n^F, & n=1, 2, \dots, N \\ 0, & n > N \end{cases}$ ile bir $(S_n^*)_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve

$$K_{F, \varepsilon}^* := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n S_n^* : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r} \text{ öyle ki } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n S'_n \in K^* \right\}$$

kümesi tanımlarsak, bu takdirde $K_{F, \varepsilon}^* \subset F(Z', X')$ ve $(S_n^*)_{n=1}^{\infty} \in l_{r^*}(F(Z', X'), k_{r^*})$ olduğundan $K_{F, \varepsilon}^* \subset\subset_{r^*}(F(Z', X'), k_{r^*})$ dir.

Şimdi herhangi $L'_T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T S'_n \in K^*$ verildiğinde $L_T^* := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T S_n^*$ olsun. Böylece Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|L'_T - L_T^*\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T S'_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T S_n^* \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n^T (S'_n - S_n^F) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n^T S'_n \right\| \\ &= \sum_{n=1}^N |\alpha_n^T| \|S'_n - S_n^F\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n^T| \|S'_n\| \\ &\leq \sum_{n=1}^N \|S'_n - S_n^F\| + \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n^T|^r \right)^{1/r} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|S'_n\|^{r^*} \right)^{1/r^*} \\ &< \frac{\varepsilon}{2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|S'_n\|^{r^*} \right)^{1/r^*} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla herhangi bir $L_T \in K$ verildiğinde bir $L_T^* \in K_{F, \varepsilon}^*$ vardır öyle ki

$\|L'_T - L_T^*\| < \varepsilon$ dur. O halde her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|L_T(x)\| &= \sup_{z' \in B_{Z'}} |z'(L_T(x))| = \sup_{z' \in B_{Z'}} |(L_T' z')(x)| \\
&= \sup_{z' \in B_{Z'}} |(L_T' z' - L_T^* z')(x) + L_T^* z'(x)| \\
&\leq \|L_T' - L_T^*\| \sup_{z' \in B_{Z'}} \|z'\| \|x\| + \sup_{z' \in B_{Z'}} \|L_T^* z'(x)\| \\
&< \varepsilon \|x\| + \sup_{z' \in B_{Z'}} \|L_T^* z'(x)\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $K_{F,\varepsilon}^* \subset\subset_{r^*} (F(Z', X'), k_{r^*}) \subset (K_{r^*}(Z', X'), k_{r^*})$ olup Önerme 4.1 gereğince

$K_{F,\varepsilon}^*, L(Z', X')$ uzayının birlikte r^* -kompakt alt kümesidir. O halde

$K_2' := \overline{\{L_T^*(z') : L_T^* \in K_{F,\varepsilon}^*, z' \in B_{Z'}\}} \subset X'$ uzayında r^* -kompakttır. Aynı zamanda

$1 < r^* \leq 2 \leq r$ olduğundan $K_2' \subset X'$ de r -kompakttır. Bu takdirde,

$$\|L_T(x)\| < \varepsilon \|x\| + \sup_{z' \in B_{Z'}} \|L_T^* z'(x)\| \leq \varepsilon \|x\| + \sup_{k' \in K_2'} |k'(x)|$$

dir. Sonuç olarak $K_\varepsilon' := K_1' \cup K_2'$ dersek Lemma 4.1 gereğince $K_\varepsilon' \subset X'$ de r -kompakt olup,

$$\|v'(x)\| \leq \sup_{k' \in K_1'} |k'(x)| \leq \sup_{k' \in K_\varepsilon'} |k'(x)| \quad \text{ve} \quad \|L_T(x)\| < \varepsilon \|x\| + \sup_{k' \in K_2'} |k'(x)| \leq \varepsilon \|x\| + \sup_{k' \in K_\varepsilon'} |k'(x)|$$

olduğundan her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
|T(x)(x)| &= \|v'(x)\| \|L_T(x)\| \leq \sup_{k' \in K_\varepsilon'} |k'(x)| \left(\varepsilon \|x\| + \sup_{k' \in K_\varepsilon'} |k'(x)| \right) \\
&= \varepsilon \|x\| \sup_{k' \in K_\varepsilon'} |k'(x)| + \sup_{k' \in K_\varepsilon'} |k'(x)|^2
\end{aligned}$$

olur ki böylece ispat tamamlanır.

Düzgün çarpanlara ayrılmanın homojen polinom uzaylarına ilişkin bir uygulamasını vermek için önce gerekli olan terminoloji ve sonuçları verelim.

Kartezyen $\underbrace{X \times X \dots \times X}_{n\text{-kere}}$ çarpımından Y uzayına tanımlanan bütün n -lineer, sürekli

dönüşümlerin uzayını $\mathcal{L}^n(X, Y)$ ile göstereceğiz. $n=1$ durumunda $\mathcal{L}^1(X, Y) = L(X, Y)$

elde edilir. Simetrik, n -lineer, sürekli dönüşümlerin uzayını $\mathcal{L}^s(X, Y)$ ile

göstereceğiz. $\mathcal{L}({}^n X, Y)$ uzayının bir alt uzayı olarak, $Y = \mathbb{C}$ olması durumunda $\mathcal{L}^s({}^n X, \mathbb{C})$ yerine kısaca $\mathcal{L}^s({}^n X)$ yazacağız.

$P: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere, $P(x) = A(x, \dots, x)$, her $x \in X$ olacak şekilde $A \in \mathcal{L}({}^n X, Y)$ dönüşümü varsa P ye sürekli, n – homojen bir polinom denir. X uzayından Y uzayına tanımlanan bütün sürekli, n – homojen polinomların uzayını $P({}^n X, Y)$ ile göstereceğiz. $P \in P({}^n X, Y)$ olmak üzere,

$$P \in P({}^n X, Y) \rightarrow \|P\| := \sup \{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

ile tanımlanan fonksiyon $P({}^n X, Y)$ üzerinde bir normdur ve bu norm ile $P({}^n X, Y)$ bir Banach uzayıdır.

Önerme 4.4 X ve Y Banach uzayları olmak üzere $P({}^n X, Y)$ ve $\mathcal{L}^s({}^n X, Y)$ uzayları topolojik olarak izomorfturlar [43, Theorem 2.2].

Yukarıdaki önermeye göre, bir $P \in P({}^n X, Y)$ polinomu verildiğinde buna bir tek simetrik n -lineer sürekli operatör karşılık gelecektir. P ye karşılık gelen bu n -lineer operatör $\tilde{P}$ ile gösterilecektir.

$A \in \mathcal{L}({}^{j_k} X)$, $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n \in \mathcal{L}({}^{j_1+j_2+\dots+j_n} X)$ tensör çarpımı,

$$\begin{aligned} & (A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n)(x_1, \dots, x_{j_1}, x_{j_1+1}, \dots, x_{j_1+j_2+\dots+j_n}) \\ &= A_1(x_1, \dots, x_{j_1}) \dots A_n(x_{j_1+j_2+\dots+j_{n-1}}, \dots, x_{j_1+j_2+\dots+j_n}) \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

X, Y Banach uzayları ve $P \in P({}^n X, Y)$ olsun. Eğer $P = \sum_{j=1}^k \phi_j^n \otimes c_j$, $\phi_j \in X'$, $c_j \in Y$,

($j = 1, 2, \dots, k$) olacak şekilde yazılabiliyorsa P polinomuna sonlu tipten bir polinom denir [43].

X, Y Banach uzayları ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $|x'_i(x - y)| < \delta$, $x, y \in B_X$ ($i = 1, 2, \dots, n$) iken $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ olacak şekilde $x'_1, x'_2, \dots, x'_n \in X'$ ve bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu X uzayının kapalı birim yuvarı

üzerinde zayıf (olarak) düzgün süreklidir denir [44]. X Banach uzayının kapalı birim yuvarı üzerinde zayıf düzgün sürekli olan n – homojen polinomların uzayı $P_{wu}({}^n X, Y)$ ile ve bunlara karşılık gelen simetrik n – lineer dönüşümlerin uzayını da $\mathcal{L}_{wu}^s({}^n X, Y)$ ile göstereceğiz. $Y = \mathbb{C}$ olması durumunda $P({}^n X, \mathbb{C})$, $P_{wu}({}^n X, \mathbb{C})$ ve $\mathcal{L}_{wu}^s({}^n X, \mathbb{C})$ yerine, sırasıyla, $P({}^n X)$, $P_{wu}({}^n X)$ ve $\mathcal{L}_{wu}^s({}^n X)$ yazacağız.

P , n – homojen bir polinom olmak üzere,

$$T_P : X \rightarrow \mathcal{L}^s({}^{n-1} X), \quad T_P(x_1)(x_2, \dots, x_n) = \tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in X$$

şeklinde tanımlanan operatör lineerdir.

$P \in P({}^n X)$ olsun. $P \in P_{wu}({}^n X)$ olması için gerek ve yeter şart $T_P \in K(X, \mathcal{L}^s({}^{n-1} X))$ olmasıdır. Ayrıca $P \in P_{wu}({}^n X)$ ise, $T_P \in K(X, \mathcal{L}_{wu}^s({}^{n-1} X))$ dir [44].

Örnekler 4.1 Aşağıda tanımlanan dönüşümler sürekli n – homojen polinomlara örnektirler.

- a) $P : l_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $P(x) = x_1 x_2 \dots x_n$, $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_1$,
- b) $P : l_2 \rightarrow l_1$, $P((x_i)_{i=1}^\infty) = (x_i^n)_{i=1}^\infty$, $n \geq 2$,
- c) $P : l_2 \rightarrow l_2$, $P((x_i)_{i=1}^\infty) = (\alpha_i x_i^n)_{i=1}^\infty$, burada $(\alpha_i)_{i=1}^\infty \in l_\infty$,
- d) $P : l_p \rightarrow l_p$, $P(x) := x_1^{n-1} \sum_{j=1}^\infty x_{2j} e_{2j}$ [34].

Şimdi Teorem 4.1' in bir uygulaması olarak, Toma' nın [42], [7, Corollary 6] da ifade edilen sonucunun aşağıdaki kısmi p – kompakt versiyonunu 2. derece homojen polinomlar için elde ederiz.

Sonuç 4.1 X Banach uzayı, X' yaklaşım özelliğine sahip ve $2 \leq r < \infty$ olsun. Bu takdirde T_P lineerizasyonu r – kompakt olan herhangi bir $P \in P_{wu}({}^2 X)$ için, herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, X' uzayının r – kompakt bir K'_ε alt kümesi vardır öyle ki her $x \in X$ için, $|P(x)| \leq \varepsilon \|x\| \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(x)| + \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(x)|^2$ dir.

İspat $P \in P_{wu}({}^2X)$ polinomunun T_p lineerizasyonu r – kompakt ve $2 \leq r < \infty$ olsun. Bu takdirde, $H := \{T_p\}$ olarak Teorem 4.1’ i uygularsak istenilen eşitsizliği elde ederiz.

Burada belirtelim ki, eğer P sonlu tipten bir polinom ise buna karşılık gelen T_p operatörü de sonlu tiptendir ve dolayısıyla $2 \leq r < \infty$ için r – kompakttır.

Gerçekten de P , n . dereceden homojen sonlu tipten bir polinom ise o zaman

$$P = \sum_{j=1}^k \varphi_j^n \otimes c_j \text{ olacak şekilde } \varphi_j \in X', \ c_j \in \mathbb{C} \ (j=1,2,...,k) \text{ vardır. Buna göre}$$

$$\tilde{P}: X \times X \times \dots \times X \rightarrow \mathbb{C}, \ \tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k \underbrace{\varphi_j(x_1) \dots \varphi_j(x_n)}_{n\text{-kere}} c_j$$

tasviri P ye karşılık gelen n – lineer, sürekli (simetrik) tasvir olacaktır. Dolayısıyla, her $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ için

$$\begin{aligned} T_p(x_1)(x_2, \dots, x_n) &= \tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(x_1) \dots \varphi_j(x_n) c_j \\ &= \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j(x_1) [\varphi_j(x_2) \dots \varphi_j(x_n)] \\ &= \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j(x_1) \underbrace{[\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_j]_{n-1 \text{ kere}}(x_2, \dots, x_n)} \\ &= \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j(x_1) \underbrace{[\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_j]_{n-1 \text{ kere}}(x_2, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

olup buradan

$$T_p(x_1) = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j(x_1) \underbrace{[\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_j]_{n-1 \text{ kere}}}_{n-1 \text{ kere}} = \sum_{j=1}^k (c_j \varphi_j \otimes \underbrace{[\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_j]_{n-1 \text{ kere}}}_{n-1 \text{ kere}})(x_1), \text{ (her } x_1 \in X)$$

olacaktır. O halde $T_p = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j \otimes \underbrace{[\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_j]_{n-1 \text{ kere}}}_{n-1 \text{ kere}}$ dir. $c_j \varphi_j \in X'$, $\varphi_j \otimes \dots \otimes \varphi_j \in \mathcal{L}^s({}^{n-1}X)$

olduğundan T_p sonlu tiptendir ve dolayısıyla $2 \leq r < \infty$ için r – kompakttır.

Diğer taraftan Sonuç 4.1’ deki gerektirmenin tersinin doğru olup olmadığı açık değildir. Doğru olması durumunda kompakt kümelerin p – kompakt kümeler ile değiştirilmiş

olması nedeniyle Sonuç 4.1, [7, Corollary 6]'nın $n=2$ durumu için bir geliştirilmesi olacaktır. Son olarak [7, Corollary 6] ve Sonuç 4.1' den hareketle vektör değerli p -kompakt n -homojen polinomlar için de bir sonuç, benzer bir şekilde ifade edilebilir. Bunun için önce gerekli olan bazı tanım, gözlem ve sonuçları ifade edeceğiz.

Gözlem 4.1 $\otimes^n x := x \otimes \dots \otimes x$ olmak üzere, bir $z \in \otimes^{n,s} X$ tensörü $z = \sum_{j=1}^k \lambda_j \otimes^n x_j$

şeklinde bir temsile sahip olduğundan ve bu temsil tek olmadığından $\otimes^{n,s} X$ üzerinde projektif s -tensör normu π_s , $z \in \otimes^{n,s} X$ için,

$$\begin{aligned} \pi_s(z) &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \|x_j\|^n : k \in \mathbb{N}, z = \sum_{j=1}^k \lambda_j \otimes^n x_j \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|x_j\|^n : z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \otimes^n x_j \text{ } (\pi_s\text{-yakınsaklık}) \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [36, sayfa 163].

$\otimes_{\pi_s}^{n,s} X$ uzayının tanımlaması $\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X$ ile gösterilecektir. $z \in \hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X$ olmak üzere

$$\pi_s(z) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|x_j\|^n : z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \otimes^n x_j \right\}$$

dir. Ayrıca $\otimes^{n,s} X$ uzayı üzerinde π ve π_s normları denktirler [36, sayfa 164].

Gözlem 4.2 $P \in P(^n X, Y)$ olmak üzere,

$$P^L : \hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X \rightarrow Y, \quad P^L(z) := \sum_{j=1}^k \lambda_j P(x_j), \quad z = \sum_{j=1}^k \lambda_j \otimes^n x_j \in \otimes_{\pi_s}^{n,s} X$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme P polinomunun lineerleşmesi denir. Eğer $\delta_n : X \rightarrow \otimes^{n,s} X$, $\delta_n : X \rightarrow \otimes^{n,s} X$, $\delta_n(x) = \otimes^n x$ şeklinde tanımlanan n -homojen polinomu göz önüne alırsak $P = P^L \circ \delta_n$ olduğu açık olup, $\otimes^{n,s} X$ uzayı π veya π_s normu ile donatıldığı zaman δ_n sürekli olur [11].

Tanım 4.5 X, Y Banach uzayları, $P : X \rightarrow Y$ sürekli n -homojen bir polinom ve $x \in X$ olsun. Eğer $P(V_x)$, Y uzayında relatif p -kompakt olacak şekilde x vektörünün

ii) Sabit bir $n \geq 2$ için $P_n(x) = \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/p} e'_1(x)^{n-2} \sum_{j \in \sigma_n} e'_j(x)^2 e_j$ şeklinde tanımlanan

$P_n \in P({}^n l_1, l_p)$ polinomu sonlu ranklı olduğundan p -kompakttır [16],

b) $P: l_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $P((x_j)_{j=1}^\infty) := \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j^n$, burada $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in l_{n/(n-1)}$ ($n=1$ ise, $l_{1/0} = l_\infty$) dir,

c) $P: l_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j^2$ [44],

d) $P: X \rightarrow Y$, $P(x) = \sum_{j=1}^k \varphi_j^n(x) y_j$, burada $k \in \mathbb{N}$, $(\varphi_j)_{j=1}^k \subset X'$ ve $(y_j)_{j=1}^k \subset Y$ lineer

bağımsız vektörlerdir,

e) $\varphi \in l'_2$, $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in l_1$, $P: l_2 \rightarrow l_1$, $P(x) = (\varphi(x))^2 y$,

f) $P: l_2 \rightarrow l_1$, $P(x) := \sum_{j=1}^k a_j (\vartheta_j(x))^2 y_j$, burada $k \in \mathbb{N}$, $(\vartheta_j)_{j=1}^k \subset l'_2$, $(a_j)_{j=1}^k \subset \mathbb{K}$ ve $(y_j)_{j=1}^k \subset l_1$ dir,

g) $\varphi \in B_{X'}$, $s > 1$ olmak üzere, $P: X \rightarrow \mathbb{C}$, $P(x) = \sum_{j=1}^\infty (\vartheta_j(x))^n \frac{1}{j^s}$, her $x \in X$.

Homojen polinomların linerizasyonuna ilişkin aşağıda verilen sonuçlar kullanışlı olacaktır.

Teorem 4.2 X ve Y Banach uzayları olsun. Bu takdirde,

a) $P \in P({}^n X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $P^L \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X, Y)$ olmasıdır. Bu durumda $\|P\| = \|P^L\|$ dir [36, sayfa 163, Proposition].

b) $P \in P({}^n X, Y)$ olsun. $P \in P_{k_p}({}^n X, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $P^L \in K_p(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X, Y)$ olmasıdır. Bu durumda,

$$k_p(P) = k_p(P^L) = \inf \left\{ \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p : P(B_X) \subset p\text{-co}\{(x_n)_{n=1}^\infty\} \right\} \text{ dir [11, Theorem 3.1].}$$

Gözlem 4.3 $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach uzayları, $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ bir izometrik izomorfizma ve $(ka_k)_{k=1}^\infty \in l_r((X, \|\cdot\|_X))$ olmak üzere $H \subset r - co\{(a_k)_{k=1}^\infty\}$ olsun. O zaman $(ky_k)_{k=1}^\infty \in l_r((Y, \|\cdot\|_Y))$ ve $N := \{T(x) : x \in H\} \subset r - co\{(y_k)_{k=1}^\infty\}$ olacak şekilde bir $(y_k)_{k=1}^\infty \subset Y$ dizisinin mevcut olduğunu göstermek kolaydır.

Şimdi Teorem 4.1 ve Teorem 4.2' nin bir sonucu olarak aşağıdakini elde ederiz.

Sonuç 4.2 X bir Banach uzayı olsun öyle ki $(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'$ yaklaşım özelliğine sahip olsun.

$r \geq 2$, $1 \leq p \leq r < \infty$ ve $(ka_k^n)_{k=1}^\infty \in l_r((P_{k_p}(^n X, (\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'), k_p))$ olmak üzere

$H_n \subset r - co\{(a_k^n)_{k=1}^\infty\}$ olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'$ uzayının $r -$ kompakt bir K'_ε alt kümesi vardır öyle ki her $P \in H_n$ ve her $x \in X$ için

$$|P(x)(\otimes^n x)| \leq \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(\otimes^n x)| \left(\varepsilon \|x\|^n + \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(\otimes^n x)| \right) \text{ dir.}$$

İspat $n=1$ durumu Teorem 4.1 olacağından $n \geq 2$ olsun. Teorem 4.2 gereğince

$(P_{k_p}(^n X, (\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'), k_p)$ ve $(K_p(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X, (\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'), k_p)$ uzayları izometrik olarak izomorfik olacağından $H_n \subset r - co\{(a_k^n)_{k=1}^\infty\}$ ve $(ka_k^n)_{k=1}^\infty \in l_r((P_{k_p}(^n X, (\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'), k_p))$ ise, Gözlem

4.3' e göre bir $(T_k^n)_{k=1}^\infty \subset K_p(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X, (\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'),$ dizisi vardır öyle ki

$(kT_k^n)_{k=1}^\infty \in l_r(K_p(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X, (\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'), k_p)$ ve $C_n := \{P^L : P \in H_n\} \subset r - co\{(T_k^n)_{k=1}^\infty\}$ dir.

Şimdi $(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'$ yaklaşım özelliğine sahip olduğundan Teorem 4.1 gereğince her $\varepsilon > 0$

için $(\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'$ uzayının $r -$ kompakt bir K'_ε alt kümesi vardır öyle ki, her $P^L \in C_n$ ve

her $x \in X$ için

$$|P^L(\otimes^n x)(\otimes^n x)| \leq \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(\otimes^n x)| \left(\varepsilon \|\otimes^n x\| + \sup_{k' \in K'_\varepsilon} \|k'(\otimes^n x)\| \right)$$

dir. Böylece $P \in H_n$ ve her $x \in X$ için

$$|P(x)(\otimes^n x)| = |P^L(\otimes^n x)(\otimes^n x)| \leq \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(\otimes^n x)| \left(\varepsilon \|\otimes^n x\| + \sup_{k' \in K'_\varepsilon} |k'(\otimes^n x)| \right)$$

olup ispat tamamlanır.

Yukarıda Sonuç 4.2' de $n=1$ durumu tam olarak Teorem 4.1' i verdiğiinden bu anlamda bu sonuç Teorem 4.1' in bir genellemesidir.

Gözlem 4.4 $P(^n X) = (\hat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} X)'$ [36, sayfa 165] olduğundan Sonuç 4.2' nin yaklaşım özelliğiyle ilgili hipotezinin $X = l_1$, c_0 ve T (Tsirelson) uzayı ve $n < q < \infty$ olması durumunda l_q uzayları için sağlandığı görülür [45], [46].



SONUÇ VE ÖNERİLER

X ve Y Banach uzayları olmak üzere:

Lemma 3.4' te $r \geq 2$ olmak üzere projektif tensör çarpımının relatif r – kompakt bir alt kümesinin temsili elde edilmiştir.

Teorem 3.4' te $r \geq 2$, $1 \leq p \leq r < \infty$ olmak üzere $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının relatif r – kompakt H alt kümesinin düzgün olarak çarpanlara ayrılışı elde edilmiştir.

Sonuç 4.1' de, Sonuç 3.1' in bir uygulaması olarak homojen polinomlar için Toma' nın [42], [7, Corollary 6]' da verilen sonucunun kısmen p – kompakt versiyonu ispatlanmıştır. Bu amaçla, ayrıca, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $(K_p(X, Y), k_p)$ uzayının her relatif p – kompakt alt kümesinin birlikte p – kompakt olduğu gösterilmiştir.

Konu ile ilgilenen araştırmacılar aşağıdaki problemler üzerinde çalışabilirler.

- Lemma 3.4' te " k " çarpanı kaldırıldığında lemmadaki K kümesi relatif r^* – kompakt bir küme olarak elde edilebilir mi?

(veya buna denk olarak, Sonuç 3.1' de $\{B_T : T \in H\}$ kümesi relatif r^* – kompakt küme olarak elde edilebilir mi? Örneğin H kümesi üzerine hangi koşullar konursa bu mümkün olur?)

- Lemma 3.4' ün a) şıkkı $p \geq 1$ durumuna genişletilebilir mi, ve bununla birlikte Teorem 3.4' te $1 \leq r < p$ olması durumunda H kümesi çarpanlara nasıl ayrılabilir?

- Teorem 3.4' te H kümesine karşılık gelen $\{B_T : T \in H\}$ kümesinin elamanları kompakt operatörlerden ziyade herhangi bir $1 \leq p < \infty$ için, p – kompakt operatörlerin relatif r^* – kompakt bir alt kümesi olarak elde edebilir mi?

- Sonuç 3.1' de genel olarak $Y = \mathcal{L}^s({}^n X)$ alınırsa, Teorem 4.1' in buna karşılık gelen bir versiyonu elde edilebilir mi? Genel olarak Toma' nın [42], [7, Corollary 6]' da verilen sonucunda kompakt kümeler p – kompakt kümeler ile değiştirilebilir mi?

Yukarıda ifade edilen sonuçlar ve öneriler daha genel olarak, Banach uzayları üzerindeki homojen polinomlar için de göz önüne alınabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Johnson, W.B., (1971). "Factoring Compact Operators", Israel Journal of Mathematics, 9: 337-345.
- [2] Figiel, T., (1973). "Factorization of Compact Operators and Applications to the Approximation Problem", Studia Mathematica, 45: 191-210.
- [3] Randtke, D.J., (1974). "A Compact Operator Characterization of l_1 ", Mathematische Annalen, 208: 1-8.
- [4] Terzioğlu, T., (1972). "Remarks on Compact and Infinite-Nuclear Mappings", Mathematica Balkanica, 2: 251-255.
- [5] Dazord J., (1976). "Factoring Operators Through c_0 ", Mathematische Annalen, 220 (2): 105-122.
- [6] Graves, W.H. ve Ruess W.M., (1987). "Representing Compact Sets of Compact Operators and of Compact Range Vector Measures", Archiv der Mathematik (Basel), 49 (4): 316-325.
- [7] Aron, R., Lindström M., Ruess W.M. ve Ryan R., (1999). "Uniform Factorization for Compact Sets of Operators", Proceedings of the American Mathematical Society, 127 (4): 1119-1125.
- [8] Sinha, D.P. ve Karn, A.K., (2002). "Compact Operators Whose Adjoints Factor Through Subspaces of l_p ", Studia Mathematica, 150 (1): 17-33.
- [9] Grothendieck, A., (1955). "Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires", Memoirs of the American Mathematical Society, 16: 140.
- [10] Aron, R.M., Maestre, M. ve Rueda, P., (2010). " p -Compact Holomorphic Mappings", Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas. RACSAM, 104 (2): 353-364.
- [11] Aron, R.M., ve Rueda, P., (2011). " p -Compact Homogeneous Polynomials from an Ideal Point of View", Contemporary Mathematics, 547: 61-71.
- [12] Choi, Y.S. ve Kim, J.M., (2010). "The Dual Space of $(L(X,Y), \tau_p)$ and the p -Approximation Property", Journal of Functional Analysis, 259: 2437-2454.

- [13] Delgado, J.M., Oja, E., Piñeiro, C. ve Serrano, E., (2009). "The p -Approximation Property in Terms of Density of Finite Rank Operators", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 354 (1): 159-164.
- [14] Delgado, J.M., Piñeiro, C. ve Serrano, E., (2010). "Density of Finite Rank Operators in the Banach Space of p -Compact Operators", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 370 (2): 498-505.
- [15] Delgado, J.M., Piñeiro, C. ve Serrano, E., (2010). "Operators Whose Adjoints are Quasi p -Nuclear", Studia Mathematica, 197 (3): 291-304.
- [16] Lassalle S. ve Turco, P., (2012). "On p -Compact Mappings and the p -Approximation Property", Journal of Mathematical Analysis and Application, 389 (2): 1204-1221.
- [17] Sinha, D.P. ve A.K. Karn, (2008). "Compact Operators which Factor Through Subspaces of l_p ", Mathematische Nachrichten, 281 (3): 412-423.
- [18] Pietsch, A., (2014). "The Ideal of p -Compact Operators and its Maximal Hull", Proceedings of the American Mathematical Society, 142 (2): 519-530.
- [19] Galicer, D., Lassalle, S. ve Turco, P., (2012). "The Ideal of p -Compact Operators: A Tensor Product Approach", Studia Mathematica, 211 (3): 269–286.
- [20] Robertson, A.P. ve Robertson, W., (1964). Topological Vector Spaces, Cambridge University Press.
- [21] Köthe, G., (1969). Topological Vector Spaces I, Springer-Verlag, New York.
- [22] Megginson, R.E., (1998). An Introduction to Banach Space Theory, Springer-Verlag, New York.
- [23] Lindenstrauss J. ve Tzafriri L., (1977). Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces, Springer-Verlag, Berlin.
- [24] Lindenstrauss, J. ve Pelczynski, A., (1968). "Absolutely Summing Operators in $\mathcal{L}_p$ -Spaces and Their Applications", Studia Mathematica, 29: 275-326.
- [25] Benyamini, Y. ve Lindenstrauss, J., (1999). Geometric Nonlinear Functional Analysis, Cilt 1, American Mathematical Society Providence, Rhode Island.
- [26] Day, M.M., (1973). Normed Linear Spaces, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [27] Wojtaszczyk, P., (1991). Banach Spaces for Analysts, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 25, Cambridge University Press, Cambridge.
- [28] Defant, A. ve Floret, K., (1993). Tensor Norms and Operator Ideals, North-Holland.
- [29] Pietsch, A., (1980). Operator Ideals, Mathematical Library 20, North-Holland.
- [30] Diestel, J., Jarchow, H. ve Tonge, A., (1995). Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press.

- [31] Ryan, R.A., (2002). Introduction to Tensor Products of Banach spaces, Springer-Verlag, London.
- [32] Pineiro, C. ve Delgado, J. M., (2011). “ p –Convergent Sequences and Banach Spaces in which p –Compact Sets are q –Compact”, Proceedings of the American Mathematical Society, 139 (3): 957-967.
- [33] Dowling, P.N., Freeman, D., Lennard, C.J., Odell, E., Randrianantoanina B. ve Turett, B., (2012). “A Weak Grothendieck Compactness Principle”, Journal of Functional Analysis, 263 (5): 1378–1381.
- [34] Aron, R.M., Çalışkan, E., García, D. ve Maestre, M., (2016). “Behavior of Holomorphic Mappings on p –Compact Sets in a Banach Space”, Transactions of the American Mathematical Society, 368 (7) 4855–4871.
- [35] Köthe, G., (1979). Topological Vector Spaces II, Springer-Verlag, New York.
- [36] Floret, K., (1997). “Natural Norms on Symmetric Tensor Products of Normed Spaces”, Proceedings of the Second International Workshop on Functional Analysis (Trier, 1997), Note di Matematica, 17: 153–188.
- [37] Banach, S. ve Mazur, S., (1933). “Zur Theorie Der Linearen Dimension”, Studia Mathematica, 4 (1): 100-112.
- [38] Anselone, P.M. ve Palmer, T. W. (1968). “Collectively Compact Sets of Linear Operators”, Pacific Journal of Mathematics, 25: 417–422.
- [39] Enflo, P., (1973). “A Counterexample to the Approximation Problem in Banach Spaces”, Acta Mathematica, 130: 309–317.
- [40] Szankowski, A., (2009). “Three-Space Problems for the Approximation Property”, Journal of the European Mathematical Society, 11 (2): 273-282.
- [41] Oja, E., (2012). “A Remark on the Approximation of p –Compact Operators by Finite-Rank Operators”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 387 (2): 949-952.
- [42] Toma, E., (1993). “Aplicacoes Holomorfas e Polinomios τ –Continuous”, Thesis, Univ. Federal do Rio de Janeiro.
- [43] Mujica, J., (1986). Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland.
- [44] Aron, R.M. ve Prolla, J.B., (1980). “Polynomial Approximation of Differentiable Functions on Banach Spaces”, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 313: 195-216.
- [45] Dineen, S. ve Mujica J., (2012). “The Approximation Property for Spaces of Holomorphic Functions on Infinite Dimensional Spaces III”, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matematicas. RACSAM, 106 (2): 457–469.
- [46] Mujica, J., (2009). “Spaces of Holomorphic Functions and the Approximation Property”, IMI Graduate Lecture Notes 1, Universidad Estadual de Campinas, Brazil.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayşegü KETEN
Doğum Tarihi ve Yeri : 18.06.1988/ Fatih
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : aketen88@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Y. Lisans	Matematik	Erciyes Üniversitesi	2012
Lisans	Matematik	Erciyes Üniversitesi	2010
Lise	Fen-Matematik	Fatih Kız Lisesi	2005

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010	Necmettin Erbakan Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011	Erciyes Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2012	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Özarslan H.S. ve Keten A., (2013). "On a new application of almost increasing sequences", Journal of Inequalities and Applications, 13.
2. Özarslan H.S. ve Keten A., (2015). "A new application of almost increasing sequences", Analele Ştiinţifice ale Universităţii Al. I. Cuza din Iaşi. (Serie Nouă.), 61 (1): 153-160.
3. Çalışkan E. ve Keten A., (2016). "Uniform factorization for p – compact sets of p – compact linear operators", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 437: 1058-1069.

Bildiri

1. Keten A., Özarslan H.S., (2012). "On new application of almost increasing sequences", International Conference on Applied Analysis and Algebra, İstanbul.

BURSLAR

1. Yurtiçi Yüksek Lisans Bursu, Tübitak, 2011.
2. Yurtiçi Doktora Bursu, Tübitak, 2012.