EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

LUKASİEWİCZ LOJİĞİ VE ASAL SAYILARIN ARAŞTIRILMASI

Tuğçe KATICAN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 25.08.2016

Bornova-İZMİR

2016

Tuğçe KATICAN tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "Lukasiewicz lojiği ve asal sayıların araştırılması" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi' nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 25.08.2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri: **İmza**

Jüri Başkanı : Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Raportör Üye : Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Üye : Doç. Dr. Burak ORDİN

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ‘‘Lukasiewicz lojiği ve asal sayıların araştırılması’’ başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

25 / 08 / 2016

İmzası

Tuğçe KATICAN

ÖZET

LUKASİEWİCZ LOJİĞİ VE ASAL SAYILARIN ARAŞTIRILMASI

KATICAN, Tuğçe

Yüksek Lisans Tezi Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Ağustos 2016, 42 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Lukasiewicz lojikleri hakkında genel bilgiler verildi. Ayrıca tezde yapılacak çalışmalar kısaca özetlendi.

İkinci bölümde, iki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ ye ve üç-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_3$ e ait bazı temel tanım ve kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde, n-değerli Lukasiewicz lojikleri $Ł_n$ lere ait temel tanım ve kavramlar verilerek, Lukasiewicz lojiklerinin doğruluk değerlerinin yorumlanmasından bahsedildi.

Dördüncü bölümde, n-değerli Lukasiewicz lojikleri $Ł_n$ lerin fonksiyonel özellikleri incelenerek asal sayılarla arasındaki bağlantıya ulaşıldı.

Beşinci bölümde, asal sayılar için matris lojikleri tanımlanarak, bu lojiklere ait bazı temel kavramlar verildi. Ardından asal sayıların kuvvetleri, çift sayılar ve tek sayılar için benzer tanımlamalardan bahsedildi.

Anahtar sözcükler: Asal sayılar, Lukasiewicz lojikleri, matris lojikleri, Post lojikleri, Sheffer Stroke

ABSTRACT

LUKASIEWICZ LOGIC AND INVESTIGATION OF PRIME NUMBERS

KATICAN, Tuğçe

MSc in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tahsin ÖNER

August 2016, 42 pages

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, general information about Lukasiewicz logics is given. Also, there will be a brief summary of study done in the thesis.

In the second chapter, some basic definitions and concepts for C_2 and $Ł_3$ will be given.

In the third chapter, apart from basic concepts for $Ł_n$, the interpretation of truth values of $Ł_n$ will be mentioned.

In the fourth chapter, the functional properties of n-valued Lukasiewicz logics $Ł_n$ are examined and the connection between these logics and prime numbers is achieved.

In the fifth chapter, matrix logics are described for prime numbers, some basic notions will be given for these logics. And then, similar descriptions for powers of prime numbers, even numbers and odd numbers are mentioned.

Key words: Lukasiewicz logics, matris logics, Post logics, prime numbers, Sheffer Stroke

x

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde çalışmalarımda bilgi, görüş ve tecrübelerinden yararlandığım değerli danışmanım Doç. Dr. Tahsin ÖNER e ve değerli hocam Prof. Dr. Urfat NURİYEV e yardımlarından ve sabrından dolayı çok teşekkür ederim. Beni daima destekleyen, her zaman arkamda olduklarını hissettiren aileme ve tüm sevdiklerime yürekten teşekkür ederim.

Tuğçe KATICAN

Ağustos 2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

1. GİRİŞ

Jan Lukasiewicz (1878-1956) in hemen hemen tüm hayatı boyunca ilgilendiği geleceği önceden saptama problemi, çok-değerli lojik fikrinin ilham kaynağıdır. Lukasiewicz'in çok-değerli lojiğinin kökleri Aristo'ya kadar uzanır. Aristo'nun geleceği önceden saptama görüşü üzerine Lukasiewicz'in yaptığı eleştiri, tarihsel olarak üç-değerli lojik için zemin hazırladı. 1920 yılında Lukasiewicz belirsizlik felsefesine dayalı üç-değerli lojiği inşa etti *(Lukasiewicz, 1970a).* Bu lojiğin özellikleri o dönemde oldukça şaşırtıcı görünmekteydi.

Lukasiewicz'in çok-değerli lojiğinin temelindeki sonlu ve sonsuz durumların genelleştirmeleri, 20. yüzyılın sonuna kadar şekillenen ve hala hızlıca gelişmeye devam eden sonuçlar ortaya koydu: Sonsuz-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_\infty$ *(Cignoli, D'Ottaviano and Mundici, 2000)* ve sonlu-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_n$. Birincisi, farklı fakat denk cebirsel yapılar ve bu yapıların uygulamalarından ortaya çıkarken, ikincisi $Ł_n$ ve asal sayılar arasındaki bağlantıyı inceler. Bu tezde sonlu-değerli Lukasiewicz lojiklerinden söz edilmektedir.

İkinci bölümde, iki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ ve üç-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_3$ için bazı temel tanım ve kavramlar verilerek bu lojikler arasındaki benzerliklere ve farklılıklara değinilmiştir. Ayrıca, bu bölümde üç-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_3$ ve geleceğin önceden saptanması arasındaki bağlantı gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, n-değerli Lukasiewicz lojikleri için gerekli tanım ve kavramlar verildi ve ilk olarak 1930 da A. Tarski tarafından ortaya konan $Ł_n$ nin tamlığının kardinal derecelerini de içeren birçok özelliği incelendi. Bu özellik, Lukasiewicz lojikleri ve asal sayılar arasındaki bağlantıyı gösteren ilk işarettir. Daha sonra, Boole cebirleri aracılığıyla $Ł_n$ için bölüm-semantiği inşa edilerek $Ł_n$ nin doğruluk değerlerinin iki yorumlanması önerildi.

Dördüncü bölümde, bir mantıksal sistemi cebir olarak inceleyen iç metot aracılığıyla $(n+1)$-değerli Lukasiewicz lojikleri $Ł_{n+1}$ lerin fonksiyonel özellikleri (ilk olarak *(Finn, 1970)*de söz edilmiştir) araştırılarak, $(n+1)$-değerli Post lojikleri ve maksimal $(n+1)$-değerli Post olmayan lojikler aracılığıyla asal sayılar ve $Ł_{n+1}$ ler arasındaki bağlantıya ulaşılmıştır.

Tezin son bölümü olan beşinci bölümde, asal sayılar için matris lojikleri tanımlanmıştır ve n bir asal sayı olduğunda bu lojiklerin $Ł_{n+1}$ ile aynı fonksiyonel özelliklere sahip oldukları görülmüştür. Asal sayıların mantıksal belirlenebilirliği göz önünde bulundurularak asal sayıların kuvvetleri, çift sayılar ve tek sayılar için benzer tanımlamalar verilmiştir.

2.ÖNBİLGİLER

Burada, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla bazı tanım ve kavramlar verilmiştir.

2.1 İki-Değerli Klasik Önermeler Lojiği

İki-değerli klasik önermeler lojiği, her muhakemenin ya doğru ya da yanlış olduğu varsayımına dayalı en basit muhakeme modelini temsil eden bir lojiktir.

Diğer lojiklerin çoğu bu lojik tarafından ya kapsanır ya da dile yeni bağlaçlar eklenerek onun üzerinden inşa edilir.

Doğruluk veya yanlışlığı değerlendiren bir önermeye doğru ya da yanlış etiketlerinden biri atanır. Bu etikete önermenin doğruluk değeri denir. Doğru bir önermenin etiketlemesi T veya 1 ve yanlış bir önermenin etiketlemesi F veya 0 ile temsil edilir.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere önerme değişkenleri p_n ile gösterilecektir.

Bu lojiğin önermesel bağlaçları $\neg$ (değilleme), $\wedge$ (evetleme), $\vee$ (veyalama), $\supset$ (gerektirme) ve $\equiv$ (denk) dir.

Bileşik önermeler, önermesel bağlaçlar kullanılarak atomik önermelerden oluşturulan önermelerdir.

Tanım 2.1.1 *(Karpenko, 2006)* For ile gösterilen iyi-biçimlendirilmiş formüller kümesinin elemanları rekürsif olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

(a) Her önerme değişkeni bir iyi-biçimlendirilmiş formüldür.

(b) P bir iyi-biçimlendirilmiş formül ise o zaman $(\neg P)$ formülü de iyi-biçimlendirilmiştir.

(c) P ve Q iyi-biçimlendirilmiş iki formül ise o zaman $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \supset Q)$ ve $(P \equiv Q)$ formülleri de iyi-biçimlendirilmiştir.

İyi-biçimlendirilmiş bir formül kısaca formül olarak adlandırılır.

Bir uzlaşı olarak bir formülün en dışındaki parantezler kaldırılacaktır.

p_1 ve p_2 ya doğru ya da yanlış önermeleri göstermek üzere tüm olasılıkları gösteren önerme bağlaçlarının doğruluk çizelgeleri aşağıdaki gibidir:

p_1	$\neg p_1$
1	0
0	1

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \supset p_2$	$p_1 \equiv p_2$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Tanım 2.1.2 *(Karpenko, 2006)* Yukarıdaki çizelgeler yardımıyla tanımlanabilen önerme bağlaçlarına doğruluk fonksiyonelleri denir.

Tanım 2.1.3 *(van Dalen, 2008)* Bir $v\colon For \to \{0,1\}$ değer atama fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

(1) $v(\neg P) = 1 - v(P)$.

(2) $v(P \supset Q) = min\{1, 1 - v(P) + v(Q)\}$.

(3) $v(P \wedge Q) = min\{v(P), v(Q)\}$.

(4) $v(P \vee Q) = maks\{v(P), v(Q)\}$.

(5) $v(P \equiv Q) = 1 - \left| v(P) - v(Q) \right|$.

Tanım 2.1.4 *(Karpenko, 2006)* Tüm olası doğruluk değer atamaları için daima 1 değerini alan bir formüle totoloji ve 1 e atanmış doğruluk değeri denir.

Bazı Totoloji Örnekleri (Karpenko, 2006):

(K) $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$

(S) $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))$

(B′) $(p_1 \supset p_2) \supset ((p_2 \supset p_3) \supset (p_1 \supset p_3))$

(C) $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset (p_2 \supset (p_1 \supset p_3))$

(W) $(p_1 \supset (p_1 \supset p_2)) \supset (p_1 \supset p_2)$

Tanım 2.1.5 *(Houston, 2009)* ‘Bir önerme ya doğru ya da yanlıştır fakat başka bir değer yoktur’ ifadesi ortanın dışlanma yasası olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.6 *(Karpenko, 2006)* ‘İki çelişkili önerme aynı anda doğru değildir’ ifadesine çelişki yasası denir.

Yukarıda belirtilen iki yasa iki-değerli klasik önermeler lojiğinde geçerli iken $n \geq 3$ doğal sayısı için n-değerli Lukasiewicz lojiklerinde geçerli değildir.

Klasik önermeler lojiğinin türetim kuralları:

(a) Modus Ponens: P ve $P \supset Q$ iki totoloji ise o zaman Q da bir totolojidir.

(b) İkame: $P(p_1)$ bir totoloji ise P formülünde p_1 in tüm geçişlerinin yerine Q nun alınmasıyla elde edilen $P(Q)$ formülü de bir totolojidir.

İki-değerli klasik önermeler lojiği, $\mathbf{C}_2$, tüm klasik totolojilerin sınıfı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7 *(Karpenko, 2006)* İki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ nin önerme bağlaçlarının bir sistemi verilsin. $\{0,1\}$ doğruluk değer kümesi üzerinde bir fonksiyonu temsil eden her bağlaç sadece bu sistemin bağlaçları aracılığıyla tanımlanabiliyorsa o zaman bu sisteme doğruluk fonksiyoneli olarak tamdır, denir.

$\{\neg, \vee, \wedge\}$ klasik bağlaçlar kümesi doğruluk fonksiyoneli olarak tamdır *(Post,1921).*

Ayrıca $\{\neg, \supset\}$, $\{\neg, \wedge\}$ ve $\{\neg, \vee\}$ bağlaç sistemleri de doğruluk fonksiyoneli olarak tamdır.

‘Ne p_1 ne de p_2’ anlamını ifade etmek için kullanılan Sheffer Stroke $|$ bağlacı aşağıdaki biçimde doğruluk çizelgesi ile temsil edilir:

p_1	p_2	$p_1 \mid p_2$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\neg p$ ile $p \mid p$ ve $p_1 \wedge p_2$ ile $(p_1 \mid p_1) \mid (p_2 \mid p_2)$ önermeleri mantıksal denk olduklarına göre $\{ \mid \}$ sistemi doğruluk fonksiyoneli olarak tamdır.

'P bir totolojidir' ifadesi $\vDash P$ biçiminde temsil edilir. Ayrıca, Γ formüller kümesi olmak üzere 'P, Γ nın mantıksal sonucudur' ifadesi $\Gamma \vDash P$ biçiminde temsil edilir.

İki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ nin aksiyomlaştırılması *(Karpenko, 2006):*

$\mathbf{C}_2$ nin aksiyomları

(A1) $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$

(A2) $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))$

(A3) $(\neg p_1 \supset \neg p_2) \supset (p_2 \supset p_1)$

dir ve formüllerden formüllere dönüşümler iki-değerli klasik önermeler lojiğinin türetim kuralları kullanılarak gerçekleştirilir.

'P bir teoremdir' ifadesi $\vdash P$ biçiminde temsil edilir ve bu da aksiyomlar yardımıyla P nin bir kanıtının elde edilebileceği anlamına gelir.

Tanım 2.1.8 *(Karpenko, 2006)* Aksiyomlar kümesi ve türetim kuralları aracılığıyla ifade edilebilen mantıksal hesaba Hilbert-tarzı hesap denir.

Hilbert-tarzı hesapta, $\Gamma \vdash P$ notasyonu Γ formüller kümesinden bir P formülünün kanıtının elde edilebileceğini temsil eder.

Teorem 2.1.9 (Türetim Teoremi) *(Karpenko, 2006)* Γ formüller kümesi ve P ve Q iki formül olsun. O zaman $\Gamma, P \vdash Q$ ancak ve ancak $\Gamma \vdash P \supset Q$ dur.

Tanım 2.1.10 *(van Dalen, 2008)* Γ formüller kümesi olmak üzere Γ tutarlıdır ancak ve ancak $\Gamma \vdash P$ ve $\Gamma \vdash \neg P$ olacak şekilde bir P formülü yoktur.

Yukarıda verilen bilgiler ışığında iki-değerli klasik önermeler lojiğinde doğruluk $\vDash$ ve türetilebilirlik $\vdash$ kavramlarının birbirine göre tam olduğu sonucunu ifade edebiliriz.

Teorem 2.1.11 (Tamlık Teoremi) *(Karpenko, 2006)* Bir P formülü için $\vdash P$ ancak ve ancak $\vDash P$ dir.

Bu durumda, iki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ türetimsel olarak tam ve tutarlıdır.

2.2 Üç-Değerli Lukasiewicz Lojiği

Lukasiewicz'in çok-değerli lojiğinin tarihi Aristo'ya kadar uzanır. Aristo ya göre, her önerme ya doğru ya da yanlış olduğundan her şey gereklilikle meydana gelir ve olasılıklar veya özgür iradeyle yapılan herhangi bir seçim söz konusu değildir.

Aristo'nun bu düşüncesi formel olarak aşağıdaki biçimde ifade edilebilir *(Karpenko, 2006):*

T : '… doğrudur',

F : '… yanlıştır',

N : '… gereklidir',

→ : 'ise … o zaman',

~ : '… nın olmaması'

∨ : 'veya'

yı temsil etsin.

i. $\mathrm{T}p \rightarrow \mathrm{N}p$ Öncül I

ii. $\mathrm{F}p \rightarrow \mathrm{N}{\sim}p$ (i) den

iii. $\mathrm{T}p \vee \mathrm{F}p$ Öncül II

iv. $\mathrm{N}p \vee \mathrm{N}{\sim}p$ (i), (ii) ve (iii) den karmaşık yapıcı ikilem aracılığıyla

Kanıt

(ii)

1. $\mathrm{F}p \leftrightarrow \mathrm{T}{\sim}p$ H (Yanlışlığın klasik tanımı)
2. $\mathrm{T}{\sim}p \rightarrow \mathrm{N}{\sim}p$ H ((i) den)
3. $\mathrm{F}p \rightarrow \mathrm{N}{\sim}p$ (1 ve 2 ye geçişlilik uygulanarak)

(iv)

Hatırlatma 'P, Q, R ve S formülleri için eğer $P \to Q,\ R \to S$ ve $P \vee R$ ler totoloji iseler $Q \vee S$ de bir totolojidir' ifadesine karmaşık yapıcı ikilem adı verilir.

1. $\mathrm{T}p \to \mathrm{N}p$ H
2. $\mathrm{F}p \to \mathrm{N}{\sim}p$ H
3. $\mathrm{T}p \vee \mathrm{F}p$ H
4. $\mathrm{N}p \vee \mathrm{N}{\sim}p$ (1, 2 ve 3 den karmaşık yapıcı ikilem aracılığıyla). ■

Lukasiewicz, 'her önerme ya doğru ya da yanlıştır' ifadesinin aşikar olmaması nedeniyle doğru ile yanlışın yanında bu iki değer arasında ara değer olarak nitelendirdiği en az bir tane daha doğruluk değerinin var olması gerektiğini belirtir.

Üçüncü doğruluk değerinin amacı aşağıdaki biçimde açıklanabilir: Hiçbir çelişki olmaksızın Tuğçe'nin iki yıl sonra 20 Ocak akşam vakti Tokyo'da bulunmasının şu an ne pozitif olarak ne de negatif olarak belirlendiği varsayılsın. Öyleyse Tuğçe'nin o tarihte Tokyo'da bulunması olası fakat gerekli değildir. Bu varsayım sebebiyle 'Tuğçe iki yıl sonra 20 Ocak akşam vakti Tokyo'da bulunacak' önermesi şu an ne doğru ne de yanlış bir önermedir. Eğer bu önerme şu an doğru olsaydı Tuğçe'nin iki yıl sonra Tokyo'daki varlığı gerekli olacaktı fakat bu yukarıdaki varsayımla çelişir. Buna karşın, eğer bu önerme şu an yanlış olsaydı Tuğçe'nin iki yıl sonra Tokyo'daki varlığı imkânsız olacaktı fakat bu da yukarıdaki varsayımla çelişir. Bu yüzden, bu önerme şu an ne doğru ne de yanlış olarak değerlendirilir ve '0 (yanlış)' ve '1 (doğru)' dan farklı üçüncü bir değere sahip olmalıdır. 'Olası' yı temsil eden bu üçüncü değer $\frac{1}{2}$ ile gösterilir.

Üç-değerli Lukasiewicz lojiğinin önermesel bağlaçları $\sim$ (değilleme), $\to$ (gerektirme), $\wedge$ (evetleme), $\vee$ (veyalama) ve $\leftrightarrow$ (denk) dir ve bu bağlaçlar için doğruluk çizelgeleri aşağıdaki gibidir:

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_1 \leftrightarrow p_2$
1	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1	0
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	1	1

Tanım 2.2.1 *(Karpenko, 2006)* $\wedge$, $\vee$ ve $\leftrightarrow$ önermesel bağlaçları yukarıdaki doğruluk çizelgeleri yardımıyla aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$p_1 \vee p_2 = (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2$$

$$p_1 \wedge p_2 = \sim(\sim p_1 \vee \sim p_2)$$

$$p_1 \leftrightarrow p_2 = (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1)$$

Tanım 2.2.2 *(Karpenko, 2006)* Bir değer atama, For formüller kümesinden $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ doğruluk değerleri kümesine tanımlanan bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.3 *(Karpenko, 2006)* Her değer atama fonksiyonu altında 1 (atanmış) değerini alan formüle totoloji adı verilir ve bu şekilde tanımlanan totolojilerin kümesine üç-değerli Lukasiewicz lojiği denir ve $Ł_3$ ile gösterilir.

Üç-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_3$ ün aksiyomlaştırılması *(Karpenko, 2006)***:**

$Ł_3$ ün aksiyomları:

$(1)\,(p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3))$

$(2)\ p_1 \to (p_2 \to p_1)$

$(3)\ (\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1)$

$(4)\,\big((p_1 \to \sim p_1) \to p_1\big) \to p_1$

Türetim kuralları Modus Ponens ve ikamedir.

O halde $Ł_3$ ün aksiyomlaştırılması $\mathbf{C}_2$ nin aksiyomlaştırılmasından elde edilir ve bu aksiyomlaştırma aşağıdaki teoremin $Ł_3$ için de geçerli olduğu anlamına gelir.

Teorem 2.2.4 (Tamlık Teoremi) *(Karpenko, 2006)* Bir P formülü için $\vdash P$ ancak ve ancak $\vDash P$ dir.

Üç-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_3$ de iki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ gibi türetimsel olarak tam ve tutarlıdır.

Lemma 2.2.5 *(Karpenko, 2006)* Üç-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_3$ deki herhangi bir totoloji iki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ nin de bir totolojisidir fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.6 $(p_1 \to \big(p_1 \to (p_1 \to p_2)\big)) \to (p_1 \to p_2)$ formülü $\mathbf{C}_2$ nin bir totolojisi iken $Ł_3$ ün bir totolojisi olmadığını gösterelim.

İlk olarak, yukarıdaki formülün $\mathbf{C}_2$ nin bir totolojisi olduğunu gösterelim:

Bu formülün $\mathbf{C}_2$ nin bir totolojisi olmadığını yani $\mathbf{C}_2$ deki bir v değer ataması için $v(\Big(p_1 \to \big(p_1 \to (p_1 \to p_2)\big)\Big) \to (p_1 \to p_2)) = 0$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse, Tanım 2.1.3 den $v\Big(p_1 \to \big(p_1 \to (p_1 \to p_2)\big)\Big) = 1$ ve $v(p_1 \to p_2) = 0$ dır. Eğer $v(p_1 \to p_2) = 0$ ise o zaman Tanım 2.1.3 den $v(p_1) = 1$ ve $v(p_2) = 0$ dır. Buradan $v\Big(p_1 \to \big(p_1 \to (p_1 \to p_2)\big)\Big) = 0$ elde edilir. Bu ise, $v\Big(p_1 \to \big(p_1 \to (p_1 \to p_2)\big)\Big) = 1$ olması ile çelişir. O halde, her v değer ataması için $v(\Big(p_1 \to \big(p_1 \to (p_1 \to p_2)\big)\Big) \to (p_1 \to p_2)) = 1$ dir, yani $(p_1 \to \big(p_1 \to (p_1 \to p_2)\big)) \to (p_1 \to p_2)$ formülü $\mathbf{C}_2$ nin bir totolojisidir.

$(p_1 \to (p_1 \to (p_1 \to p_2))) \to (p_1 \to p_2)$ formülünün $Ł_3$ ün bir totolojisi olmadığını gösterelim:

Eğer p_1 yerine $\frac{1}{2}$ değerini ve p_2 yerine 0 değerini alırsak o zaman bu formül

$$\left(\frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2} \to 0\right)\right)\right) \to \left(\frac{1}{2} \to 0\right) = \left(\frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}\right)\right) \to \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \to 1\right) \to \frac{1}{2}$$

$$= 1 \to \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

değerini alır. O halde, $(p_1 \to (p_1 \to (p_1 \to p_2))) \to (p_1 \to p_2)$ formülü $Ł_3$ ün bir totolojisi değildir.

$Ł_3$ ve $\mathbf{C}_2$ büyük ölçüde birbirinden farklıdırlar. Ortanın dışlanma yasası ve çelişki yasası gibi iki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ nin iki önemli yasası $Ł_3$ de (her $n \geq 3$ için $Ł_n$ de olduğu gibi) geçerli değildir.

$Ł_3$ ve $\mathbf{C}_2$ arasındaki en önemli fark, 1936 da Slupecki tarafından ortaya konmuştur. Slupecki, $\mathbf{C}_2$ nin doğruluk fonksiyoneli olarak tam olmasına rağmen $Ł_3$ ün doğruluk fonksiyoneli olarak tam olmadığını yani her üç-değerli doğruluk-fonksiyonunun $Ł_3$ de tanımlanamadığını gösterdi. Bunun için, $Ł_3$ de tanımlı olmayan ancak $Ł_3$ e eklendiğinde doğruluk fonksiyoneli olarak tam bir sistem oluşturan Slupecki'nin Tp operatörünün doğruluk çizelgesi aşağıdaki gibidir *(Karpenko, 2006):*

p	Tp
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$

3. *n*-DEĞERLİ LUKASİEWİCZ LOJİKLERİ

Şimdiye kadar iki-değerli klasik önermeler lojiği $\mathbf{C}_2$ ve üç-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_3$ tanımlandı. Bu bölümde ise n-değerli Lukasiewicz lojikleri ele alınacaktır.

Tanım 3.1 *(Karpenko, 2006)* $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ için

$$V_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$$

ve $\sim$ ve $\rightarrow$ sırasıyla V_n üzerinde

$$\sim p = 1 - p$$

ve

$$p_1 \rightarrow p_2 = \min(1, 1 - p_1 + p_2)$$

ile tanımlanan 1-li ve 2-li fonksiyon sembolleri olmak üzere

$$\mathfrak{M}_n^L = \langle V_n, \quad \sim, \quad \rightarrow, \quad \{1\} \rangle$$

biçimli bir mantıksal matrise n-değerli Lukasiewicz matrisi denir; burada $\{1\}$, $\mathfrak{M}_n^L$ nin atanmış elemanlarının bir kümesidir.

$\vee$, $\wedge$ ve $\equiv$ fonksiyonları aşağıdaki biçimde tanımlanır *(Karpenko, 2006)*:

(a) $p_1 \vee p_2 = (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2 = maks(p_1, p_2)$
(b) $p_1 \wedge p_2 = \sim(\sim p_1 \vee \sim p_2) = min(p_1, p_2)$
(c) $p_1 \equiv p_2 = (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1)$

Kanıt (a)

$$p_1 \vee p_2 = (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2 = min(1, 1 - (p_1 \rightarrow p_2) + p_2)$$

$$= min(1, 1 - min(1, 1 - p_1 + p_2) + p_2)$$

$$= min(1, \text{maks}(0, p_1 - p_2) + p_2)$$

$$= min(1, maks(0, p_1 - p_2) + maks(p_2, p_2))$$

$$= \min(1, maks(0 + p_2, p_1 - p_2 + p_2)$$

$$= min(1, maks(p_2, p_1))$$

$$= min(1, maks(p_1, p_2))$$

$$= maks(p_2, p_1)$$

(b)

$p_1 \wedge p_2 = \sim(\sim p_1 \vee \sim p_2) = 1 - (\sim p_1 \vee \sim p_2)$ ((a) dan)

$$= 1 - maks(\sim p_1, \sim p_2)$$

$$= 1 - maks(1 - p_1, 1 - p_2)$$

$$= min(1 - (1 - p_1), 1 - (1 - p_2))$$

$$= min(p_1, p_2). \qquad \blacksquare$$

SL önermesel dili yukarıda tanımlanan mantıksal matrisin $\langle V_n, \ \sim, \ \rightarrow\rangle$ cebirlerine karşılık gelir.

Öyleyse $\mathfrak{M}_n^L$ mantıksal matrisinin bütün totolojilerinin kümesine Lukasiewicz'in matris lojiği ya da n-değerli Lukasiewicz lojiği denir ve Ł$_n$ ile gösterilir.

***n*-değerli Lukasiewicz lojiği Ł$_n$ nin aksiyomlaştırılması:** *(Karpenko, 2006)*

Ł$_n$ nin aksiyomları

$$p_1 \rightarrow^0 p_2 = p_2,$$

$$p_1 \rightarrow^{k+1} p_2 = p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow^k p_2)$$

ve

$$p_1 \equiv p_2 = (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1)$$

olmak üzere

1. $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$

2. $p_1 \to (p_2 \to p_1)$

3. $((p_1 \to p_2) \to p_2) \to ((p_2 \to p_1) \to p_1)$

4. $(p_1 \to^n p_2) \to (p_1 \to^{n-1} p_2)$

5. $p_1 \wedge p_2 \to p_1$

6. $p_1 \wedge p_2 \to p_2$

7. $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_3) \to (p_1 \to p_2 \wedge p_3))$

8. $p_1 \to p_1 \vee p_2$

9. $p_2 \to p_1 \vee p_2$

10. $(p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \vee p_2 \to p_3))$

11. $(\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1)$

12. $s, (n-1)$ in bir böleni olmayacak şekilde her $2 \leq s \leq n-1$ için

$$(p \equiv (p \to^{s-2} \sim p)) \to^{n-1} p.$$

Türetim kuralları: Modus Ponens ve ikamedir.

Tanım 3.2 *(Karpenko, 2006)* L bir lojik olsun. L nin teoremlerini kapsayan lojiklerin sayısına L nin tamlığının kardinal derecesi denir ve $\gamma(L)$ ile gösterilir.

A= $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ doğal sayıların keyfi bir dizisi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan A nin C altdizilerinin sayısı $1 \leq i \leq n$ için $N_{\mathrm{A}}(b_i)$ ile gösterilir:

(a) $b_i \in$ C ve her $c \in$ C için $b_i \geq c$ dir.

(b) Eğer $j \neq k$ ve $b_j, b_k \in$ C ise o zaman $(b_j - 1), (b_k - 1)$ in bir böleni değildir.

$a(n) = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ aşağıdaki özelliklere sahip bir dizi olsun:

(i) $b_1 = n$,

(ii) $b_1 > \cdots > b_m > 1$ ve

(iii) $1 \leq i \leq m$ olacak şekilde her i için $(b_i - 1), (n-1)$ in bir bölenidir.

Teorem 3.3 *(Karpenko, 2006)* Sonlu bir n için

$$\gamma(Ł_n) = (\sum_{b_i \in a(n)} N_{\mathrm{a(n)}}(b_i)) + 1$$

dir.

2000 yılında, M. N. Rybakov $\gamma(Ł_n)$ i hesaplamak için bir bilgisayar programı yazmıştır. Her $n \leq 1000$ için $\gamma(Ł_n)$ değerleri hesaplanmıştır *(Karpenko, 2006).*

Teorem 3.4 *(Lukasiewicz and Tarski, 1970)* Her $(n-1)$ asal sayısı için $\gamma(Ł_n) = 3$ tür.

3.1 n-Değerli Lukasiewicz Lojiği $Ł_n$ nin Doğruluk Değerlerinin Yorumlanması

1970 li yılların sonunda, M. Byrd ve A. S. Karpenko tarafından birbirinden bağımsız olarak $Ł_n$ nin doğruluk değerlerinin iki yorumlaması verildi. Byrd, T nin doğruyu F nin yanlışı ifade ettiği T-F-dizileri cinsinden $Ł_n$ nin doğruluk değerlerinin bir yorumlamasını verirken, Karpenko ise T-F-dizilerinin kümeleri cinsinden bir yorumlama önerdi.

Tanım 3.1.1 *(Karpenko, 2006)* B = {T,F} klasik doğruluk değerlerinin kümesi olsun. O zaman her $s \geq 2$ doğal sayısı için $1 \leq i \leq s$ olacak şekilde

$$\mathrm{B}^s = \{\langle b_1, \dots, b_n \rangle \mid b_i \in \mathrm{B}\}$$

kümesinin elemanlarına T-F-dizileri denir ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere α_k ile gösterilirler.

$\neg$, $\wedge$, $\vee$ ve $\supset$ bağlaçları Boole işlemleridir.

Tanım 3.1.2 *(Karpenko, 2006)* $\neg^+, \supset^+, \vee^+$ ve $\wedge^+$ işlemleri, Boole işlemleri aracılığıyla aşağıdaki biçimde tanımlanır:

Her $\alpha_1 = \langle b_1, \dots, b_s \rangle, \alpha_2 = \langle c_1, \dots, c_s \rangle \in \mathrm{B}^s$ için

$$\neg^+ \alpha_1 = \langle \neg b_1, \dots, \neg b_s \rangle$$

$$\alpha_1 \supset^+ \alpha_2 = \langle b_1 \supset c_1, \dots, b_s \supset c_s \rangle$$

$$\alpha_1 \vee^+ \alpha_2 = \langle b_1 \vee c_1, \dots, b_s \vee c_s \rangle$$

$$\alpha_1 \wedge^+ \alpha_2 = \langle b_1 \wedge c_1, \dots, b_s \wedge c_s \rangle.$$

O halde $\mathcal{A}_s^{\mathrm{B}} = \langle \mathrm{B}^s, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+ \rangle$ cebiri 2^s elemanlı bir Boole cebiridir.

Aşağıdaki tanım Byrd tarafından $Ł_n$ nin doğruluk değerlerinin yorumlanması amacıyla ortaya konmuştur.

Tanım 3.1.3 *(Karpenko, 2006)* T-F-dizilerinde bütün T leri dizinin başına öteleyen, yani $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $\alpha_k \in \mathrm{B}^s$ için

$$\mathrm{d}(\alpha_k) = \langle \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \dots, \mathrm{F}, \mathrm{F}, \mathrm{F} \rangle$$

biçiminde tanımlanan d işlemine one-place işlemi denir.

Bu tanım aracılığıyla Byrd in yorumlaması aşağıdaki gibi ifade edilir (Karpenko, 2006):

$$\mathfrak{M}^{L}_{s+1} = \langle \mathrm{B}^{s}_{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{d}, \quad \neg^{\mathrm{d}}, \quad \rightarrow^{\mathrm{d}}, \quad \{\mathrm{T}^{s}\} \rangle$$

mantıksal matrisi verilsin. O zaman $\mathrm{B}^{s}_{\mathrm{T}}$ bütün T lerin dizinin başında bulunduğu T-F-dizilerini içeren doğruluk değerlerinin kümesidir ve bu kümenin elemanları $k \in \mathbb{N}$ için α^{T}_{k} ile gösterilir. $\{\mathrm{T}^{s}\}$, $\mathrm{T}^{s} = \langle \mathrm{T}, \mathrm{T}, \dots, \mathrm{T} \rangle$ biçiminde tanımlanan atanmış elemanların bir elemanlı kümesidir ve işlemler

(i) $\mathrm{d}(\alpha_k) = \alpha^{\mathrm{T}}_{k}$,

(ii) $\neg^{\mathrm{d}}(\alpha^{\mathrm{T}}_{k}) = \mathrm{d}(\neg^{+}\alpha_k)$ ve

(iii) $\alpha^{\mathrm{T}}_{1} \rightarrow^{\mathrm{d}} \alpha^{\mathrm{T}}_{2} = \mathrm{d}(\alpha_1 \supset^{+} \alpha_2)$

biçiminde tanımlanır.

Yukarıdaki biçimde tanımlanan T-F-dizilerinin sayısı $s + 1$ dir ve Ł$_n$ nin doğruluk değerlerinin sayısına eşittir, yani $n = s + 1$ dir.

Teorem 3.1.4 *(Karpenko, 2006)*

$$\mathfrak{M}^{L}_{n} = \langle V_n, \quad \sim, \quad \rightarrow, \quad \{1\} \rangle$$

ve

$$\mathfrak{M}^{L}_{s+1} = \langle \mathrm{B}^{\mathrm{T}}_{s}, \quad \mathrm{d}, \quad \neg^{\mathrm{d}}, \quad \rightarrow^{\mathrm{d}}, \quad \{\mathrm{T}^{s}\} \rangle$$

mantıksal matrisleri izomorftur.

Bu teoremden dolayı aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.5 *(Karpenko, 2006)* $\mathfrak{M}^{L}_{s+1}$ mantıksal matrisi *n*-değerli Lukasiewicz lojiği Ł$_n$ için bir karakteristik matristir. Başka bir deyişle, P formülü Ł$_n$ lojiğinin bir teoremidir ancak ve ancak P, $\mathfrak{M}^{L}_{s+1}$ mantıksal matrisinin bir totolojisidir.

Eğer d işlemi $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $\alpha_k \in \mathrm{B}^{s}$ için

$$\mathrm{d}(\alpha_k) = \langle \mathrm{F}, \mathrm{F}, \mathrm{F}, \dots, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T} \rangle$$

biçiminde tanımlanırsa o zaman yine $\mathfrak{M}_{s+1}^{L}$ mantıksal matrisine izomorf bir matris elde edilir.

O halde $Ł_n$ nin doğruluk değerlerinin yorumlanması T nin T-F-dizilerinin başında ya da sonunda olup olmamasına bağlı değildir. Örneğin, $\frac{3}{4}$ değeri $\langle \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{F} \rangle$ ya da $\langle \mathrm{F}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T} \rangle$ T-F-dizileri olarak yorumlanabilir.

3.2 *n*-Değerli Lukasiewicz Lojiği $Ł_n$ için Bölüm-Semantiği

Bölüm-semantiği, belirli bir türün T-F-dizileri yerine T-F-dizilerinin belirli kümelerini doğruluk değerleri olarak tanımlayan semantiktir *(Karpenko, 1983).*

$s \geq 2$ olmak üzere bir s doğal sayısı için

$$\mathcal{A}_s = \langle \mathrm{B}^s, \quad \cong, \quad R \quad \neg^+, \quad \supset^+ \rangle$$

cebiri verilsin ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $\alpha_k \in \mathrm{B}^s$ için $\eta_{\mathrm{T}}(\alpha_k)$, α_k daki T lerin sayısını göstersin. O zaman her $\alpha_1 = \langle b_1, \dots, b_s \rangle, \alpha_2 = \langle c_1, \dots, c_s \rangle \in \mathrm{B}^s$ için

$$\alpha_1 \cong \alpha_2 \text{ ancak ve ancak } \eta_{\mathrm{T}}(\alpha_1) = \eta_{\mathrm{T}}(\alpha_2)$$

dir ve R bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır *(Karpenko, 2006)*:

$\alpha_1 R\, \alpha_2$ ancak ve ancak (a) $\eta_{\mathrm{T}}(\alpha_1) \leq \eta_{\mathrm{T}}(\alpha_2)$ ve

her $i \leq s$ için $b_i =$T ise $c_i =$T

ya da

(b) $\eta_{\mathrm{T}}(\alpha_1) > \eta_{\mathrm{T}}(\alpha_2)$ ve

her $i \leq s$ için $c_i =$T ise $b_i =$T.

Tanım 3.2.1 *(Karpenko, 2006)* $\mathfrak{M}_{s+1}^{L}$ mantıksal matrisi $\mathcal{A}_s$ cebiri ile ilişkilendirilir ancak ve ancak

$$\mathfrak{M}_{s+1}^{L} = \langle \mathrm{B}^s/_{\cong}, \quad \neg^*, \quad \rightarrow^*, \quad \{|\mathrm{T}^s|\} \rangle$$

dir, burada

(i) $\mathrm{B}^s/_{\cong}, \cong$ bağıntısına göre B^s nin bölüm kümesidir ve $s+1$ elemana sahiptir. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha_k \in \mathrm{B}^s$ ise o zaman $|\alpha_k|$, α_k nin $\cong$ bağıntısına göre denklik sınıflarını belirtir.

(ii) $\mathfrak{M}_{s+1}^{L}$ in atanmış elemanlarının kümesi bir-elemanlı $\{|\mathrm{T}^s|\}$ kümesidir.

(iii) $|\alpha_1|, |\alpha_2| \in \mathrm{B}^s/_{\cong}$ için $\alpha_1' \in |\alpha_1|, \alpha_2' \in |\alpha_2|$ ve $\alpha_1' \, R\, \alpha_2'$ olmak üzere

$$\neg^* |\alpha_1| = |\neg^+ \alpha_1'|$$

ve

$$\left|\alpha_1\right| \to^* \left|\alpha_2\right| = \left|\alpha_1' \supset^+ \alpha_2'\right|$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 3.2.2 *(Karpenko, 2006)* $n = s + 1$ olmak üzere

$$\mathfrak{M}_{s+1}^{L} = \langle \mathrm{B}^s/_{\cong}, \quad \neg^*, \quad \to^*, \quad \{\left|\mathrm{T}^s\right|\}\rangle$$

mantıksal matrisi *n*-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_n$ için tamdır.

Bu durumda, T-F-dizileri yerine B^s den T-F-dizilerinin belirli altkümeleri *n*-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_n$ için doğruluk değerleri olarak ifade edilir. Örneğin, $\{\langle \mathrm{T},\mathrm{T},\mathrm{T},\mathrm{F}\rangle, \langle \mathrm{T},\mathrm{T},\mathrm{F},\mathrm{T}\rangle, \langle \mathrm{T},\mathrm{F},\mathrm{T},\mathrm{T}\rangle, \langle \mathrm{F},\mathrm{T},\mathrm{T},\mathrm{T}\rangle\}$ kümesi $\frac{3}{4}$ değerini ifade eder.

Teorem 3.2.3 *(Karpenko, 2006)* $k \in \mathbb{N}, r = \eta_{\mathrm{T}}(\alpha_k)$ ve $m = s$ olmak üzere her $\left|\alpha_k\right| \in \mathrm{B}^s/_{\cong}$ için $\left|\alpha_k\right|$ denklik sınıfının eleman sayısı

$$C_m^r = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$$

dir.

4. *n*-DEĞERLİ LUKASİEWİCZ LOJİKLERİNİN FONSİYONEL ÖZELLİKLERİ

Mantıksal sistemler, dış metot ve iç metot olmak üzere iki biçimde incelenir: Bunlardan birincisi bir mantıksal sistemi hesap olarak ifade ederek bu hesabın farklı semantiklerini incelerken, ikincisi bir mantıksal sistemi cebir olarak inceleyip bu sistemin cebirsel özelliklerini araştırır.

Böylece, *n*-değerli Lukasiewicz lojikleri $Ł_n$ ler ve asal sayılar arasındaki bağlantıya ulaşılır.

Tanım 4.1 *(Rosser and Turquette, 1958)*

$$V_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$$

kümesi üzerinde

$$J_i(p) = \begin{cases} 1, & p = i\ ise \\ 0, & p \neq i\ ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara J_i −fonksiyonları denir.

J_i −fonksiyonları, çok-değerli lojiklerin geniş sınıflarının aksiyomlaştırılmasından oldukça önemlidir.

Teorem 4.2 *(Rosser and Turquette, 1958)* J_{i-}fonksiyonları, *n*-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_n$ deki ~ ve → aracılığıyla tanımlanabilirdir.

McNaughton, sonlu durumda herhangi bir bir *n* doğal sayısı ve $\mathfrak{M}_n^L$ deki herhangi bir g fonksiyonu için g nin sadece $\sim p$ ve $p_1 \rightarrow p_2$ aracılığıyla tanımlanabilir olup olmadığını belirleyen aşağıdaki teoremi kanıtladı.

Teorem 4.3 *(Karpenko, 2006)* g fonksiyonu $\mathfrak{M}_n^L$ de tanımlanabilirdir ancak ve ancak her $p_1, \cdots, p_s$ ve p için $g(p_1, \cdots, p_s) = p$ ise o zaman

$$ebob(p_1, \cdots, p_s, n-1) \mid p$$

dir.

Sheffer Stroke fonksiyonundan (ya da bağlacından) oluşan bir mantıksal sisteme özel bir ilgi duyulmasına rağmen bir n-değerli lojiğin her fonksiyonlar kümesi Sheffer Stroke fonksiyonuna sahip değildir.

Teorem 4.4 *(Karpenko, 2006)* C gerektirme bağlacını, N değilleme bağlacını ve köşeli parantezler içerisindeki ifadelerin sayısını gösterecek şekilde her p_1 ve p_2 önermesi için

$$Ep_1p_2 = Cp_1C[CNp_2]p_2NCp_2N[Cp_2]Np_2$$

fonksiyonu n-değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_n$ için bir Sheffer Stroke'dur.

Ep_1p_2 fonksiyonu $p_1 \rightarrow^E p_2$biçiminde temsil edilsin. $p_1 \rightarrow p_2$ ile $p_1 \rightarrow^E p_2$ yi karşılaştırmak için $p_1 \rightarrow^E p_2$ fonksiyonu

$$p_1 \rightarrow^E p_2 = \begin{cases} 1, & p_2 = 0 \; ise \\ \sim p_1, & p_2 = 1 \; ise \\ p_1 \rightarrow p_2, & aksi \; halde \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanıma göre, McKinsey'in $\sim p$ ve $p_1 \rightarrow p_2$ tanımları

(a) $1 = (p \rightarrow^E p) \rightarrow^E ((p \rightarrow^E p) \rightarrow^E (p \rightarrow^E p))$
(b) $\sim p = p \rightarrow^E 1$
(c) $p_1 \rightarrow p_2 = p_1 \rightarrow^E (1 \rightarrow^E p_2)$

dir *(Karpenko, 2006).*

Kısım 2.2 deki Slupecki'nin Tp operatörünün bir genelleştirmesi aşağıdaki biçimde tanımlanır:

Her $p \in V_n$ için $T_{\frac{n-2}{n-1}}(p) = \frac{n-2}{n-1}$ olsun. O zaman

$$\{p_1 \rightarrow p_2, \sim p, T_{\frac{n-2}{n-1}}(p)\}$$

sistemi fonksiyonel olarak tamdır *(Rosser and Turquette, 1958).*

Bu sonucun daha da genelleştirilmiş hali aşağıdaki teoremle ifade edilir:

Teorem 4.5 *(Evans and Schwartz, 1958)* Her $p \in V_n$ ve $0 < i < n - 1$ için $T_{\frac{i}{n-1}}(p) = \frac{i}{n-1}$ olsun. O zaman

$$\{p_1 \rightarrow p_2, \sim p, T_{\frac{i}{n-1}}(p)\}$$

sistemi fonksiyonel olarak tamdır ancak ve ancak $(n-1, i) = 1$ dir, yani $n-1$ ve i aralarında asal sayılardır.

4.1 *n*-Değerli Post Lojikleri

n-değerli Post lojikleri, $Ł_n$ den farklı ve fonksiyonel olarak tam olan sonlu değerli lojiklerdir ve P_n ile gösterilirler.

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ için

$$V_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

ve $\neg$ ve $\vee$ sırasıyla V_n üzerinde

$$\neg p = p + 1\, mod(n)$$

ve

$$p_1 \vee p_2 = maks(p_1, p_2)$$

ile tanımlanan 1-li ve 2-li fonksiyon sembolleri olmak üzere

$$\mathfrak{M}_n^P = \langle V_n, \quad \neg, \quad \vee, \quad \{n-1\}\rangle$$

biçimli bir mantıksal matrise *n*-değerli Post matrisi denir, burada $\{n-1\}$, $\mathfrak{M}_n^P$ nin atanmış elemanlarının bir kümesidir *(Karpenko, 2006).*

Aşağıdaki doğruluk çizelgesine sahip $\neg$ fonksiyonuna devirli (dairesel) değilleme adı verilir *(Karpenko, 2006)*:

p	$\neg p$
0	1
1	2
$\vdots$	$\vdots$
$n-2$	$n-1$
$n-1$	1

Teorem 4.1.1 *(Post, 1921)* n-değerli Post lojiği P_n fonksiyonel olarak tamdır.

Kanıt *(Barton, 1979).* ■

Tanım 4.1.2 *(Karpenko, 2006)* $V_{n+1} = \{0, 1, \cdots, n\}$ ve s tane V_{n+1} in kartezyen çarpımı V_{n+1}^s olsun. Eğer g, V_{n+1}^s kümesinden V_{n+1} içine tanımlanan bir fonksiyon ise o zaman $g(p_1, \cdots, p_s)$ ye $(n+1)$ −değerli fonksiyon ya da $(n+1)$ −değerli lojiğin bir fonksiyonu denir.

$k \in \mathbb{N}$ için $g_1, \cdots, g_k$ fonksiyonlarının bir süperpozisyonu

(i) $g_1, \cdots, g_k$ ların bazılarını bu fonksiyonların bileşenlerinin yerine koyarak,

(ii) $g_1, \cdots, g_k$ ların bileşenlerini yeniden adlandırarak

ya da (i) ve (ii) koşullarının her ikisini de uygulayarak elde edilir *(Karpenko, 2006).*

Tanım 4.1.2 *(Janowskaja, 1959)* $(n+1)$ −değerli Post lojiği P_{n+1} için $G \subseteq \mathrm{P}_{n+1}$ olsun. [ ] operatörü, P_{n+1} in kuvvet kümesi üzerinde aşağıdaki biçimde tanımlanır:

(1) $G \subseteq [G]$ dir.

(2) $\big[[G]\big] = [G]$ dir.

(3) Eğer $G_1 \subseteq G_2$ ise o zaman $[G_1] \subseteq [G_2]$ dir.

$[G], G$ kümesindeki fonksiyonların bütün süperpozisyonlarının kümesidir.

Tanım 4.1.3 *(Karpenko, 2006)* $(n+1)$ −değerli Post lojiği P_{n+1} için $G \subseteq \mathrm{P}_{n+1}$ olsun. Eğer $G = [G]$ ise o zaman G fonksiyonlar kümesine kapalı denir. Ayrıca, $\mathfrak{N}$ fonksiyonların kapalı bir kümesi olmak üzere $[G] = \mathfrak{N}$ ise o zaman G fonksiyonlar kümesi $\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{P}_{n+1}$ de fonksiyonel olarak tamdır.

Tanım 4.1.4 *(Karpenko, 2006)* $(n+1)$ −değerli Post lojiği P_{n+1} için $G \subseteq \mathrm{P}_{n+1}$ olsun. O halde bir g fonksiyonu için $g \in \mathrm{P}_{n+1}$ ve $g \notin G$ olmak üzere $[G] \neq \mathrm{P}_{n+1}$ ve $[G \cup \{g\}] = \mathrm{P}_{n+1}$ ise o zaman G kapalı kümesine P_{n+1} de öntam (precomplete) denir.

Fonksiyonların öntam sınıfları, fonksiyonel tamlık için oldukça önemlidir.

Teorem 4.1.5 *(Karpenko, 2006)* $(n+1)-$değerli fonksiyonların bir G kümesi fonksiyonel olarak tamdır ancak ve ancak G kümesi fonksiyonların bir öntam kümesi tarafından kapsanmaz.

4.2 Maksimal $(n+1)$ −Değerli Post Olmayan Lojikler

$(n+1)$ −değerli Post lojiği P_{n+1} de öntam olan T_{n+1} *(Jablonski, 1958)*, maksimal $(n+1)-$ değerli Post olmayan lojik olarak adlandırılır.

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ için

$$V_{n+1} = \{0, 1, \cdots, n\}$$

ve $\sim$, $\wedge$, $\vee$, J_i ve N_i sırasıyla V_{n+1} üzerinde

$$\sim p = n - p,$$

$$p_1 \wedge p_2 = min(p_1, p_2),$$

$$p_1 \vee p_2 = maks(p_1, p_2),$$

$$J_i(p) = \begin{cases} n, & p = i \; ise \\ 0, & p \neq i \; ise \end{cases}$$

ve $1 \leq i \leq n-1$ için

$$N_i(p) = \begin{cases} i, & p \in \{1, \cdots, n-1\} \; ise \\ \sim p, & p \in \{0, n\} \; ise \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyon sembolleri olmak üzere

$$\mathfrak{M}_{n+1}^T = \langle V_{n+1}, \quad \sim p, \quad p_1 \wedge p_2, \quad p_1 \vee p_2, \quad J_0(p), \quad \cdots \quad, J_n(p),$$

$$N_1(p), \quad \cdots \quad, N_{n-1}(p), \quad \{n\}\rangle$$

biçimli bir mantıksal matrise maksimal $(n+1)$ −değerli Post olmayan lojik T_{n+1} in matrisi denir, burada $\{n\}$, $\mathfrak{M}_{n+1}^T$ in atanmış elemanlarının bir kümesidir *(Karpenko, 2006)*.

$\mathfrak{M}_{n+1}^T$ matrisinin imzası aşağıdaki biçimde basitleştirilebilir *(Karpenko, 2006)*:

(i) $n = 2$ ise o zaman

$$p_1 \rightarrow^{\mathrm{T}^*} p_2 = p_1 \rightarrow p_2$$

ve

(ii) $n > 2$ ise o zaman

$$p_1 \to^{T^*} p_2 = \begin{cases} n-1, & p_1 = p_2 \quad ve \quad p_1, p_2 \in \{1, \cdots, n-1\} \quad ise \\ p_1 \to p_2, & aksi\ halde \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{M}_{n+1}^{T^*} = \langle V_{n+1}, \quad \sim p, \quad p_1 \to^{T^*} p_2, \quad \{n\}\rangle$$

mantıksal matrisi verilsin ve $\mathfrak{M}_{n+1}^{T^*}$ in fonksiyonlarının kümesi T_{n+1}^* ile gösterilsin.

Teorem 4.2.1 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 2$ için $T_{n+1} = T_{n+1}^*$ dir.

Tanım 4.2.2 *(Karpenko, 2006)* $0 < \zeta, \mu < n$ olmak üzere

$$I_{\zeta\mu}(p) = \begin{cases} \mu, & p = \zeta\ ise \\ 0, & p \neq \zeta\ ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonların doğruluk çizelgeleri $\zeta = i,\ \mu = j$ ve $1 \leq i, j \leq n-1$ için

p	0	1	$\cdots$	i	$\cdots$	$n-1$	n
$I_{\zeta\mu}(p)$	0	0	$\cdots$	j	$\cdots$	0	0

dir ve I_{n+1}, T_{n+1} de tanımlanabilir olan bütün $I_{\zeta\mu}(p)$ −fonksiyonlarının kümesidir.

Teorem 4.2.3 *(Bochvar and Finn, 1972)* $(n+1)$ −değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_{n+1}$, $(n+1)$ −değerli Post lojiği P_{n+1} de fonksiyonel olarak öntamdır ancak ve ancak $I_{n+1} \subset Ł_{n+1}$ dir, o halde $Ł_{n+1} = T_{n+1}$ dir.

Teorem 4.2.4 *(Bochvar and Finn, 1972)* ***($(n+1)$ −değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_{n+1}$ için öntamlık kriteri)*** $Ł_{n+1} = T_{n+1}$ dir ancak ve ancak *n* bir asal sayıdır.

Kanıt Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.3 den elde edilir. ■

Örnek 4.2.5 $Ł_{17+1}$ in fonksiyonları bir öntam küme oluşturur fakat $Ł_{18+1}$ inkiler oluşturmaz.

Öyleyse, asal sayıların yeni bir tanımı verilebilir.

Tanım 4.2.6 *(Karpenko, 2006)* $n \geq 2$ doğal sayısı asaldır ancak ve ancak $(n+1)$ −değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_{n+1}$ e karşılık gelen bütün fonksiyonların kümesi $(n+1)$ −değerli Post lojiği P_{n+1} de öntamdır yani $Ł_{n+1} = \mathrm{T}_{n+1}$ dir.

Teorem 4.2.4 ten ve Teorem 3.4 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.7 *(Karpenko, 2006)* Eğer $n \geq 2$ için $Ł_{n+1} = \mathrm{T}_{n+1}$ ise o zaman $\gamma(Ł_{n+1}) = 3$ tür.

5.ASAL SAYILAR İÇİN MATRİS LOJİKLERİ

Dördüncü bölümde, $(n+1)$ −değerli P_{n+1} Post lojiğinde öntam olan fonksiyon sınıfları aracılığıyla asal sayıların belirlenebilirliği ifade edilmişti.

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 3$ için

$$V_{n+1} = \{0, 1, \dots, n\}$$

ve ~ ve $\rightarrow^K$ sırasıyla V_{n+1} üzerinde

$$\sim p = 1 - p$$

ve

$$p_1 \rightarrow^K p_2 = \begin{cases} p_2, & 0 < p_1 < p_2 < n \; ve \; (p_1, p_2) \neq 1 \; ise \\ p_2, & 0 < p_1 = p_2 < n \; ise \\ p_1 \rightarrow p_2, & aksi \; halde \end{cases}$$

ile tanımlanan 1-li ve 2-li fonksiyon sembolleri olmak üzere

$$\mathfrak{M}^K_{n+1} = \langle V_{n+1}, \quad \sim, \quad \rightarrow^K, \quad \{n\} \rangle$$

mantıksal matrisi verilsin, burada {n}, $\mathfrak{M}^K_{n+1}$ in atanmış elemanlarının bir kümesidir. $\sim p$ ve $p_1 \rightarrow^K p_2$ nin süperpozisyonları olarak tanımlanan $\mathfrak{M}^K_{n+1}$ in bütün fonksiyonlarının kümesi K_{n+1} ile gösterilir *(Karpenko, 1982).*

$p_1 \rightarrow^K p_2$ ile $p_1 \rightarrow p_2$ yi karşılaştırmak için $p_1 \rightarrow p_2$ fonksiyonu

$$p_1 \rightarrow p_2 = \begin{cases} n, & p_1 \leq p_2 \; ise \\ n - p_1 + p_2, & p_1 > p_2 \; ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır *(Karpenko, 2006).*

Lemma 5.1 *(Karpenko, 2006)* n bir asal sayı ve $p \in V_{n+1}$ olsun. Eğer $p < n - p$ ise o zaman $p \rightarrow^K \sim p = n$ dir.

Asal sayıların, çok-değerli matris lojiği K_{n+1} in totolojilerinin sınıfları cinsinden tanımı aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 5.2 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $n \in K_{n+1}$ dir.

Asal sayıların başka bir tanımı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem 5.3 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $K_{n+1} = Ł_{n+1}$ dir.

Asal sayılar için başka bir matris lojiği tanımlansın:

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 3$ için

$$V_{n+1} = \{0, 1, \ldots, n\}$$

ve $\sim$ ve $\rightarrow^{K'}$ sırasıyla V_{n+1} üzerinde

$$\sim p = 1 - p$$

ve

$$p_1 \rightarrow^{K'} p_2 = \begin{cases} p_1, & \begin{array}{c} 0 < p_1 < p_2 < n, \ (p_1, p_2) \neq 1 \\ ve\ p_1 + p_2 \leq n\ ise \end{array} \\ p_2, & \begin{array}{c} 0 < p_1 < p_2 < n, \ (p_1, p_2) \neq 1 \\ ve\ p_1 + p_2 > n\ ise \end{array} \\ p_2, & 0 < p_1 = p_2 < n\ ise \\ p_1 \rightarrow p_2, & aksi\ halde \end{cases}$$

ile tanımlanan 1-li ve 2-li fonksiyon sembolleri olmak üzere

$$\mathfrak{M}_{n+1}^{K'} = \langle V_{n+1}, \quad \sim, \quad \rightarrow^{K'}, \quad \{n\} \rangle$$

mantıksal matrisi verilsin; burada {n}, $\mathfrak{M}_{n+1}^{K'}$ nin atanmış elemanlarının bir kümesidir. $\sim p$ ve $p_1 \rightarrow^{K'} p_2$ nin süperpozisyonları olarak tanımlanan $\mathfrak{M}_{n+1}^{K'}$ in bütün fonksiyonlarının kümesi K'_{n+1} ile gösterilir *(Karpenko, 2006).*

Lemma 5.4 *(Karpenko, 2006)* n bir asal sayı ve $p \in V_{n+1}$ olsun. Eğer $p < n - p$ ise o zaman $p \rightarrow^{K'} \sim p = n$ dir.

Teorem 5.5 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $n \in K'_{n+1}$ dir.

Teorem 5.6 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $K'_{n+1} = Ł_{n+1}$ dir.

Sonuç 5.7 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $K_{n+1} = K'_{n+1}$ dir.

Kanıt Teorem 5.3 ve Teorem 5.6 dan elde edilir. ■

$$\sim\sim p = p \ \ (çifte\ değilleme)$$

ve

$$p_1 \to p_2 = \sim p_2 \to \sim p_1 \ \ (karşıt\ ters)$$

yasaları $(n+1)$ −değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_{n+1}$ de geçerli oldukları halde asal sayılar için matris lojikleri olan K_{n+1} de ya da K'_{n+1} de geçerli değildir.

5.1 Asal Sayılar İçin Sheffer Stroke

Dördüncü bölümde, $(n+1)$ −değerli Lukasiewicz lojiği $Ł_{n+1}$ için bir sheffer stroke fonksiyonu tanımlanmıştı.

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 3$ için

$$V_{n+1} = \{0, 1, \dots, n\}$$

ve $\sim$ ve $\rightarrow^{S}$ sırasıyla V_{n+1} üzerinde

$$\sim p = 1 - p$$

ve

$$p_1 \rightarrow^{S} p_2 = \begin{cases} n, \quad p_2 = 0 \; ise \\ \sim p_1, \quad p_2 = n \; ise \\ \sim p_2 \rightarrow^{K'} \sim p_1, \quad 0 < p_1, p_2 < n \; ise \\ p_1 \rightarrow^{K'} p_2, \qquad aksi \; halde \end{cases}$$

ile tanımlanan 1-li ve 2-li fonksiyon sembolleri olmak üzere $\sim p$ ve $p_1 \rightarrow^{S} p_2$ nin bütün süperpozisyonlarının kümesi S_{n+1} ile gösterilir (Karpenko, 2006).

Teorem 5.1.1 *(Karpenko, 1994)* n bir asal sayı olacak şekilde her $n \geq 3$ için $S_{n+1} = K'_{n+1}$ dir.

O halde, $p_1 \rightarrow^{S} p_2$ fonksiyonu K'_{n+1} ve Sonuç 5.7 den dolayı K_{n+1} için bir sheffer stroke'dur.

Teorem 5.1.2 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $S_{n+1} = Ł_{n+1}$ dir.

Sonuç 5.1.3 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $S_{n+1} = K'_{n+1}$ dir.

Kanıt Teorem 5.1.2 ve Teorem 5.6 ya geçişlilik uygulayarak elde edilir. ■

Sonuç 5.1.4 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $S_{n+1} = K_{n+1}$ dir.

Kanıt Sonuç 5.7 ve Sonuç 5.1.3 e geçişlilik uygulayarak elde edilir. ■

Teorem 4.4 deki $p_1 \rightarrow^E p_2$ sheffer stroke fonksiyonu ve $\sim p$ fonksiyonunun bütün süperpozisyonlarının kümesi E_{n+1} ile gösterilsin.

Teorem 5.1.5 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 3$ için n bir asal sayıdır ancak ve ancak $S_{n+1} = E_{n+1}$ dir.

5.2 Asal Sayıların Kuvvetlerinin Mantıksal Matrislerle Belirlenmesi

Kısım 5.1 de asal sayılar için matris lojikleri tanımlandı. Bu kısımda, asal sayıların kuvvetleri için benzer bir tanımlama yapılır. Bu amaçla, q bir asal sayı ve β pozitif bir tam sayı olmak üzere K'_{n+1} lojiği $n = q^{\beta}$ durumuna genelleştirilir.

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 3$ için

$$V_{n+1} = \{0, 1, \dots, n\}$$

ve $\sim$ ve $\rightarrow^{F}$ sırasıyla V_{n+1} üzerinde

$$\sim p = 1 - p$$

ve

$$p_1 \rightarrow^{F} p_2 = \begin{cases} p_1, & \begin{array}{c} 0 < p_1 < p_2 < n, \\ d \neq 1 \ olmak \ üzere \\ (p_1, p_2) = d \ ve \ k \in \mathbb{N} \ için \\ d^k \nmid n \ ve \ p_1 + p_2 \leq n \ ise \end{array} \\ p_2, & \begin{array}{c} 0 < p_1 < p_2 < n, \\ d \neq 1 \ olmak \ üzere \\ (p_1, p_2) = d \ ve \ k \in \mathbb{N} \ için \\ d^k \nmid n \ ve \ p_1 + p_2 > n \ ise \end{array} \\ p_2 & \begin{array}{c} 0 < p_1 = p_2 < n \\ ve \ p_1 + p_2 = n \ ise \end{array} \\ p_1 \rightarrow p_2 & aksi \ halde \end{cases}$$

ile tanımlanan 1-li ve 2-li fonksiyon sembolleri olmak üzere

$$\mathfrak{M}^{F}_{n+1} = \langle V_{n+1}, \quad \sim, \quad \rightarrow^{F}, \quad \{n\} \rangle$$

mantıksal matrisi verilsin; burada {n}, $\mathfrak{M}^{F}_{n+1}$ in atanmış elemanlarının bir kümesidir. $\sim p$ ve $p_1 \rightarrow^{F} p_2$ nin süperpozisyonları olarak tanımlanan $\mathfrak{M}^{F}_{n+1}$ in bütün fonksiyonlarının kümesi F_{n+1} ile gösterilir *(Karpenko, 2006).*

Lemma 5.2.1 *(Karpenko, 2006)* q bir asal sayı ve β pozitif bir tam sayı olmak üzere $n = q^{\beta}$ olsun. Eğer $p < n - p$ ise o zaman $p \rightarrow^{F} \sim p = n$ dir.

Teorem 5.2.2 *(Karpenko, 2006)* q bir asal sayı ve β pozitif bir tam sayı olmak üzere her $n \geq 3$ için $n = q^{\beta}$ dır ancak ve ancak $q^{\beta} \in F_{n+1}$ dir.

Teorem 5.2.3 *(Karpenko, 2006)* q bir asal sayı ve β pozitif bir tam sayı olmak üzere her $n \geq 3$ için $n = q^{\beta}$ dır ancak ve ancak $F_{n+1} = Ł_{n+1}$ dir.

5.3 Çift Sayıların Mantıksal Matrislerle Belirlenmesi

Çift sayılar da asal sayılar gibi mantıksal matrisler aracılığıyla belirlenir.

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 3$ için

$$V_{n+1} = \{0, 1, \dots, n\}$$

ve $\sim$ ve $\to^e$ sırasıyla V_{n+1} üzerinde

$$\sim p = 1 - p$$

ve

$$p_1 \to^e p_2 = \begin{cases} p_1, & \begin{array}{c} 0 < p_1 < p_2 < n \; ve \\ p_1 + p_2 < n \; ise \end{array} \\ p_1, & \begin{array}{c} 0 < p_1 < p_2 < n, \\ p_1 + p_2 = n \; ve \\ p_1 \neq p_2 \; (mod\; 2) \; ise \end{array} \\ p_2, & \begin{array}{c} 0 < p_1 < p_2 < n \; ve \\ p_1 + p_2 > n \; ise \end{array} \\ p_2, & \begin{array}{c} 0 < p_1 = p_2 < n \; ve \\ p_1 + p_2 \neq n \; ise \end{array} \\ p_1 \to p_2, & aksi\; halde \end{cases}$$

ile tanımlanan 1-li ve 2-li fonksiyon sembolleri olmak üzere

$$\mathfrak{M}^e_{n+1} = \langle V_{n+1}, \quad \sim, \quad \to^e, \quad \{n\} \rangle$$

mantıksal matrisi verilsin; burada {n}, $\mathfrak{M}^e_{n+1}$ in atanmış elemanlarının bir kümesidir. $\sim p$ ve $p_1 \to^e p_2$ nin süperpozisyonları olarak tanımlanan $\mathfrak{M}^e_{n+1}$ in bütün fonksiyonlarının kümesi E_{n+1} ile gösterilir *(Karpenko, 2006).*

Lemma 5.3.1 *(Karpenko, 2006)* n bir çift sayı ve $p \in V_{n+1}$ olsun. Eğer $p < n - p$ ise o zaman $p \to^e \sim p = n$ dir.

Teorem 5.3.2 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 2$ için n çift sayıdır ancak ve ancak $n \in E_{n+1}$ dir.

Teorem 5.3.3 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 2$ için n çift sayıdır ancak ve ancak $E_{n+1} = Ł_{n+1}$ dir.

5.4 Tek Sayıların Mantıksal Matrislerle Belirlenmesi

Tek sayılar da çift sayılara benzer şekilde mantıksal matrislerle belirlenir.

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 3$ için

$$V_{n+1} = \{0, 1, \dots, n\}$$

ve $\sim$ ve $\rightarrow^{o}$ sırasıyla V_{n+1} üzerinde

$$\sim p = 1 - p$$

ve

$$p_1 \rightarrow^{o} p_2 = \begin{cases} n, & p_1 < p_2 \; ise \\ p_2, & 0 < p_1 = p_2 < n \\ & ve \; p_1 + p_2 = n \; ise \\ p_1 \rightarrow p_2, & aksi \; halde \end{cases}$$

ile tanımlanan 1-li ve 2-li fonksiyon sembolleri olmak üzere

$$\mathfrak{M}^{o}_{n+1} = \langle V_{n+1}, \quad \sim, \quad \rightarrow^{o}, \quad \{n\} \rangle$$

mantıksal matrisi verilsin; burada {n}, $\mathfrak{M}^{o}_{n+1}$ in atanmış elemanlarının bir kümesidir. $\sim p$ ve $p_1 \rightarrow^{o} p_2$ nin süperpozisyonları olarak tanımlanan $\mathfrak{M}^{o}_{n+1}$ in bütün fonksiyonlarının kümesi O_{n+1} ile gösterilir *(Karpenko, 2006).*

Teorem 5.4.1 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 2$ için n bir tek sayıdır ancak ve ancak $n \in O_{n+1}$ dir.

Teorem 5.4.2 *(Karpenko, 2006)* Her $n \geq 2$ için n bir tek sayıdır ancak ve ancak $O_{n+1} = Ł_{n+1}$ dir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Barton, S., 1979, The functional completeness of Post's m-valued propositional calculus, *Zeitschrift für mathematische logic und grundlagen der mathematik*, H.5, (25): 445-446pp.

Bochvar, D. A. and Finn, V. K., 1972, On many- valued logics that permit

the formalization of analysis of antinomies, *Researches on Mathematical Linguistics, Mathematical Logic and Information Languages*, NAUKA Publishers, Moscow, 248-253pp.

Evans, T. and Schwartz, P. B., 1958, On Slupecki T-functions, The Journal of Symbolic Logic, (23):267-270pp.

Houston, K., 2009, How to think like a mathematician, Cambridge University Press, Cambridge, 265p.

Jablonski, S. V., 1958, Functional constructions in k-valued logics, Studies of V. A. Steklov Mathematical Institute, Moscow, (51):5-142pp.

Janowskaja, S. A., 1959, Mathematical logic and foundation of mathematics, *Mathematics in the USSR during 40 years*, ch.13, NAUKA Publishers, Moscow.

Cignoli, R. L. O., D'Ottaviano, I. M. L. and Mundici, D., 2000, *Algebraic Foundation of Many-Valued Reasoning*, Trends in logic, Vol 7, Dordrecht.

Finn, V. K., 1970, On classes of functions that corresponded to the n-valued logics of J. Lukasiewicz. *Proceedings of the Educational Institutions of the Central Area of the RSFSR*, Section of algebra, Mathematical Logic and Computer Science, Ivanova.

Karpenko, A. S., 1982, Characteristic matrix for prime numbers, *The Sixth All-Union Conference on Mathematical Logic*, Abstract, Tblisi, 76p.

Karpenko, A. S., 1983, Factor-semantics for n-valued logics, Studia Logica, 2/3(42):179-185pp.

Karpenko, A. S., 1994, Sheffer's stroke for prime numbers, *Bulletin of the Section of Logic*, 3(23):126-129pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Karpenko, A. S., 2006, Lukasiewicz logics and prime numbers, Luniver Press, Beckington, 158p..

Lukasiewicz, J. and Tarski, A., 1970, Investigations into the sentential calculus, *Selected Works*, Amsterdam, 131-152pp.

Lukasiewicz, J., 1970a, On three-valued logic, *Selected Works*, Amsterdam, 87-88pp.

Post, E. L., 1921, Introduction to a general theory of elementary propositions, American Journal of Mathematics, 3(43):163-185pp.

Rosser, J. B. and Turquette, A. R., 1958, Many-valued logics, Amsterdam.

van Dalen , D., 2008, Logic and structure, Springer, 263p.

ÖZGEÇMİŞ

Tuğçe Katıcan, 20.01.1991 tarihinde İzmir'de dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini İzmir'de tamamladı. 2014 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Teorik Matematik Ağırlıklı Lisans programından mezun oldu. Halen, Ege Üniversitesi Matematik Bölümü, Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini sürdürmektedir.