T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANNHEIM EĞRİLERİNİN ÖZELLİKLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yaşar CELAYİR

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI

HAZİRAN - 2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANNHEIM EĞRİLERİNİN ÖZELLİKLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yaşar CELAYİR

(141121114)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışman: Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

Haziran-2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANNHEIM EĞRİLERİNİN ÖZELLİKLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yaşar CELAYİR

(141121114)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 2016
Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Haziran 2016

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI (Fırat Üniv.) M.Külahcı

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vedat ASİL (Fırat Üniv.)

Üye: Yrd. Doç. Dr.Mehmet Akif AKYOL (Bingöl Üniv.)

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak, çalışmamın her aşamasında yanımda olan çok kıymetli danışman hocam sayın Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI' ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Yaşar CELAYİR

ELAZIĞ - 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, bu bölümde Mannheim eğrileri ve AW(k)-tipinden eğriler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler incelenmiştir.

İkinci bölümde diğer bölümlere faydalı olacak temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir yüzey üzerinde yatan bir eğrinin Darboux çatısıyla ilgili temel bilgiler, 3-boyutlu Öklid uzayında Mannheim partner D-eğrilerinin tanımı ve bunlarla ilgili karakterizasyonlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde AW(k)-tipinden eğriler Darboux çatısına göre ifade edilmiştir ve zayıf AW(k)-tipinden Mannheim eğrileri ifade edilmiştir. Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: AW(k)-tipinden eğriler, Mannheim partner eğrileri, Darboux çatısı

ABSTRACT

Propenties and Characterizations of Mannheim Curves

This study consists of four chapters.

The first section is the introduction of this study. In this section information in the literature about the studies on the Mannheim curves and AW(k)-type curves were studied.

In the second chapter, basic definitions and theorems are presented and general facts have been given.

In the third chapter, basic information about the Darboux frame of a curve lying on a surface is given and the definition and characterizations of Mannheim partner D-curve in 3-dimensional Euclidean space are given.

In the fourth chapter, curves of AW(k)-type are expressed according to Darboux frame and weakened AW(k)-type Mannheim curves are expressed. This section is the original part of this study.

Keywords: AW(k)-type curves, Mannheim partner curves, Darboux frame

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

SİMGELER LİSTESİ

E^3 : 3-Boyutlu Öklid Uzayı

IR : Reel Sayılar Kümesi

T : Birim Teğet Vektör

N : Asli Normal Vektör

B : Binormal Vektör

g : g = n×T İle Verilen Birim Vektördür

n : Eğri Boyunca Yüzeyin Birim Normali

‖ ‖ : Norm

$< , >$: İç çarpım

κ : Eğrilik

τ : Torsiyon (Burulma)

k_g : Geodezik Eğrilik

k_n : Normal Eğrilik

τ_g : Geodezik Torsiyon

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bağlantılı eğriler, karşılıklı noktalarında bir eğrinin Frenet vektörlerinden biri ile, diğer eğrinin Frenet vektörlerinden birinin denk olduğu eğrilerdir ve bağlantılı eğriler, uzay eğrilerinin temel eğri teorisi ve uzay eğrilerinin karakterizasyonları için önemli bir problemdir. Böyle eğrilerin iyi bilinen bir örneği; iki eğri arasındaki karşılıklı ilişkinin bir çeşidi gibi karakterize edilen Bertrand eğrileridir. Bilindiği gibi Bertrand eğrilerinde, bir eğrinin asli normali diğer eğrinin asli normalidir. Yani Bertrand eğrisi başka bir eğriyle normal çizgisini paylaşan bir eğridir. Birçok matematikçi yıllarca farklı uzaylarda Bertrand eğrilerini çalıştılar ve bu eğrinin özelliklerini düşündüler. Ravani ve Ku, regle yüzeyleri için Bertrand eğriler kavramını verdiler ve regle yüzeyler için Bertrand offsetleri tanımladılar [18].

Son zamanlarda bağlantılı eğrilerin yeni bir tanımı Liu ve Wang tarafından verilmiştir [13, 22]. Onlar bu yeni eğrileri Mannheim Partner eğrileri olarak adlandırdılar ve şu şekilde tanımladılar: E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında iki eğri x ve x_1 olsun. x ve x_1 uzay eğrileri arasında karşılıklı bir ilişkinin mevcut olması halinde, bu eğrilerin karşılıklı noktalarında, x eğrisinin asli normal doğrusu x_1 eğrisinin binormal doğrusu ile çakışıyorsa, x eğrisine bir Mannheim eğrisi denir. x_1 eğrisine de x eğrisinin bir Mannheim partner eğrisi denir. $\{x, x_1\}$ çiftine de bir Mannheim eğri çifti denir. Buradan $x_1(s_1)$ eğrisinin $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner eğrisi olması için gerek ve yeter şart $x_1(s_1)$ eğrisinin eğriliği κ_1 ve burulması τ_1 olmak üzere sıfırdan farklı bir λ sabiti için aşağıdaki denklemin sağlanmasıdır.

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda}(1 + \lambda^2\tau_1^2)\,.$$

Kahraman ve arkadaşları tarafından Minkowski 3-uzayında Mannheim partner eğrileri çalışıldı [7]. Özbay, Kasap ve Aydemir, Bertrand offsetlerine benzer şekilde regle yüzeylerinin Mannheim offsetlerini tanımladılar ve karakterize ettiler [15]. Minkowski 3-uzayındaki time-like ve space-like regle yüzeylerinin karakterizasyonları da Önder ve Uğurlu tarafından verildi [16,17].

Bu çalışmamızdaki diğer bir konu da AW(k)-tipinden eğrilerdir. AW(k)-tipinden alt manifold kavramı ilk olarak Arslan ve West tarafından çalışıldı [3]. Bundan sonra

AW(k)-tipinden alt manifoldlarla ilgili birçok çalışma yapıldı. Arslan ve Özgür, Öklid uzayında AW(k)-tipinden eğriler ve yüzeyleri çalıştılar [1]. Arslan ve Güvenç, n-boyutlu Öklid uzayında AW(k)-tipinden eğrileri genelleştirdiler [2]. Bu çalışmalarla birlikte, AW(k)-tipinden eğriler farklı uzaylarda çalışıldı: 3-boyutlu null cone da [9], Lorentz uzayında [10,11,12], 3 null cone da ve semi-Öklidyen 3-kürede [20] ve 4-boyutlu Minkowski uzayında [21].

Bu çalışmada, farklı yüzeylerde yatan eğriler için Mannheim partner eğrisi kavramı dikkate alındı. Mannheim partner D-eğri olarak adlandırdığımız yeni bağlantılı eğri çifti verildi. Eğrilerin darboux çatılarını kullanarak, bu eğrilerin tanımı ve karakterizasyonu verildi. Ayrıca darboux çatısı kullanılarak AW(k)-tipinden eğriler ifade edildi ve zayıf AW(k)-tipinden Mannheim eğrileri verildi.

2. BÖLÜM

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayı V olsun. bu takdirde,

f: A×A → V

fonksiyonu için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa, A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir [4].

(A1) ∀P, Q, R ∈A için f (P,Q) + f (Q,R) = f (P,R) ,

(A2) ∀P ∈A ve ∀α ∈ V için f $(\overrightarrow{PQ})$ = α olacak şekilde bir tek Q ∈A vardır.

Tanım 2.1.2. Reel bir afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzay V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak,

$$< , > : V \times V \to IR$$

$$(\alpha,\beta) \to <\alpha,\beta> = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \begin{Bmatrix} \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \\ \beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \end{Bmatrix}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir [4].

Tanım 2.1.3. d: $E^n \times E^n \to IR$

$$(x,y) \to d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{<\overrightarrow{xy},\overrightarrow{xy}>} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de uzaklık fonksiyonu veya Öklid metriği denir [4].

Tanım 2.1.4. A bir afin uzay ve A ile birleşen bir vektör uzayı V olsun. A da verilen $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine V de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n-lisi bir baz oluşturuyorsa, $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine afin çatı denir [4].

Tanım 2.1.5. E^nde sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine IR^n de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n-lisi IR^n de ortonormal bir baz ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine E^n de Öklid çatı denir [4].

Tanım 2.1.6. X≠ϕ bir cümle ve X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. Eğer τ için aşağıdakiler doğru ise τ ya X üzerinde bir topoloji denir [4].

(T1) X,ϕ $\in \tau$

(T2)∀A, B∈ τ için A∩ B $\in \tau$

(T3) $i \in I, A_i \in \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Tanım 2.1.7. Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir [4].

Tanım 2.1.8. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar.

f: X→Y

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1}var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm denir. Bu takdirde X ile Y uzaylarına homeomorfik uzaylar denir [4].

Tanım 2.1.9. X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de sırası ile P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \phi$ olacak biçimde bulunabilirse, X uzayına Hausdorff uzayı denir [4].

Tanım 2.1.10. M bir topolojik uzay ve M için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa, M ye n-boyutlu topolojik manifold denir [4].

(M1) M bir Hausdorff uzayıdır.

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e ya da E^n in bir açık alt cümlesine homeomorfdur.

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 2.1.11. M bir topolojik manifold ve M'nin bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \phi$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\varphi_{\alpha\beta}$ ve $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler, S ye C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlasına M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir [4].

Tanım 2.1.12. M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir bir yapı tanımlanırsa, M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [4].

Tanım 2.1.13. E^n n-boyutlu Öklid uzayında (n-1)-boyutlu bir yüzey veya (n-1)-yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi

$$M = \{x \in U \subset E^n | \mathrm{f}: U \xrightarrow{dif.bilir} \mathrm{IR},$$

$$x \to \mathrm{f}(x) = c\}$$

$\forall \mathrm{f}|_p \neq 0, \forall p \in M$ biçiminde tanımlanır [5].

Tanım 2.1.14. I⊂IR açık(kapalı) bir aralık olmak üzere $\alpha: I \xrightarrow{C^\infty} E^n$ fonksiyonuna E^n de bir eğri denir [4].

Tanım 2.1.15. M, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olsun. ∀s∈ I için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri denir. s ∈ I ya da yay-parametresi adı verilir [4].

Tanım 2.1.16. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Yani $\forall t \in$ I ⊂IR için $\alpha'(t) \neq 0$ dır [4].

Tanım 2.1.17. M⊂ E^3eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\Psi = \{\alpha', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(r)}$, k > r için $\alpha^{(k)} \in S_p\{\Psi\}$ olmak üzere Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı denir. m∈M için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise m∈ M noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. $\forall V_i$, $1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü denir [4].

Tanım 2.1.18. M⊂ E^3eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in$ I için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı,

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t)$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.1.19. $\alpha: I \to E^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere $\forall s \in$ I için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{1}{\kappa(s)}.T'(s)$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.1.20. M$\subset E^n$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in$ I ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı, $\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\}$ olsun. Bu durumda,

k_i: I → IR
s → $k_i(s) = < V_i'(s), V_{i+1}(s) >, \qquad 1 \leq i < r$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-iyinci eğrilik fonksiyonu denir. $s \in$ I için $k_i(s)$ reel sayına, $\alpha(s)$ noktasındaki M nin i-yinci eğriliği denir [4].

Tanım 2.1.21. M$\subset E^n$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in$ I için $\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı, $\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\}$ olsun. Bu takdirde Frenet formülleri,

1) $V_1'(s) = k_1(s)V_1(s)$
2) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r$
3) $V_r(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

şeklindedir [4].

Tanım 2.1.22. E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M de bir eğri α ve α nın teğet vektör alanı T olmak üzere α üzerindeki Y vektör alanı için,

$D_T^Y = 0$

ise Y vektör alanına M üzerinde α boyunca bir Levi-Civita anlamında paralel vektör alanı denir. Eğer $D_T^T = 0$ ise α eğrisine M üzerinde bir geodezik eğri denir [5].

Tanım 2.1.23. E^3 de birim hızlı bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$$k_g = \|D_T T\| = \left\| \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right\|$$

ifadesine α eğrisinin, $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen E^3 deki geodezik eğriliği denir [6].

Tanım 2.1.24. $v_p \in T_p(M)$ olmak üzere

$$k_p(v_p) = < S\left(\frac{v_p}{\|v_p\|}\right), \frac{v_p}{\|v_p\|} >$$

eşitliği ile tanımlanan $k_p(v_p)$ sayısına, M yüzeyinin p noktasında, v_p doğrultusundaki normal eğriliği denir [19].

Tanım 2.1.25. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathrm{IR}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau: I \to \mathrm{IR}, \qquad \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma (torsiyon) fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması (torsiyonu) denir [19].

Tanım 2.1.26. M, IR^3 uzayında bir yüzey ve $\alpha: I \to M$ düzenli (regüler) bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir [19].

Tanım 2.1.27. IR^3 vektör uzayının $\{e_1, e_2, e_3\}$ standart bazını göz önüne alalım.

$$\psi: \mathrm{IR}^3 \Lambda\, \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^3$$

lineer dönüşümü

$$e_1 \Lambda e_2 \to \psi(e_1 \Lambda e_2) = e_3$$

$$e_2 \Lambda e_3 \to \psi(e_2 \Lambda e_3) = e_1$$

$$e_3 \Lambda e_1 \to \psi(e_3 \Lambda e_1) = e_2$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüm bazı baza dönüştüren lineer dönüşüm olduğundan lineer izomorfizmdir.

$$x: \mathrm{IR}^3 \times \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^3$$
$$(\alpha, \beta) \to \alpha \times \beta = \psi(\alpha \Lambda \beta)$$

şeklinde tanımlı x iç işlemine vektörel çarpım işlemi ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β nın vektörel çarpımı denir [4].

Tanım 2.1.28. E^3 de bir M yüzeyi üzerindeki diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir yönlendirme denir [5].

Tanım 2.1.29. E^3 de irtibatlı bir yüzey M olsun. O zaman M üzerinde N_1 ve N_2 gibi sadece iki birim diferensiyellenebilir normal vektör alanı vardır. Öyle ki,

$$N_2(P) = -N_1(P), \qquad \forall P \in M$$

dir. Bu durumda E^3 deki her bir M yüzeyi üzerinde tam iki yönlendirme vardır. Bir yüzey üzerinde bir yönlendirme seçilmiş ise bu yüzeye yönlendirilmiş yüzey denir [5].

Tanım 2.1.30. M, IR^3 uzayında bir yüzey ve $\alpha: I \to M$ düzenli (regüler) bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir eğrilik çizgisi (asli çizgi) veya baş eğri denir [19].

3. BÖLÜM

3.1. Bir Yüzey Üzerinde Yatan Bir Eğrinin Darboux Çatısı

3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de yönlendirilmiş bir yüzey S olsun ve yay uzunluğu s olmak üzere tamamen S de yatan bir $x(s)$ eğrisini göz önüne alalım. Ayrıca $x(s)$ eğrisi bir uzay eğrisi olduğundan, eğrinin her bir noktasında sırasıyla T birim teğet vektör, N asli normal vektör, B binormal vektör olmak üzere bir Frenet çatısı {T, N, B} vardır. κ ve τ sırasıyla $x(s)$ eğrisinin eğriliği ve torsiyonu ve $(')$ ifadesi s ye göre türev olmak üzere $x(s)$ eğrisinin Frenet denklemleri:

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

ile verilir [14]. $x(s)$ eğrisi S yüzeyinde yattığı için $x(s)$ nin {T, g, n} ile gösterilen ve Darboux çatısı diye adlandırılan başka bir çatısı vardır. Bu çatıda T eğrinin birim teğet vektörü, n eğri boyunca S yüzeyinin birim normali ve g ise $g = n \times T$ ile verilen birim vektördür. T birim teğeti, Frenet çatısının ve Darboux çatısının her ikisinde de ortak olduğu için N, B, g ve n vektörleri aynı düzlemde yatar. Bu çatılar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Burada φ, g ile N vektörleri arasındaki açıdır.

Darboux çatısının türev formülü

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{\vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{g} \\ \vec{n} \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

dir. Burada k_g, k_n ve τ_g sırasıyla geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik torsiyon diye adlandırılır. Yukarıda ve bundan sonra, bir eğrinin yay uzunluğu parametresine göre türevini belirtmek için “nokta” kullanacağız.

Geodezik eğrilik, normal eğrilik, geodezik torsiyon ve κ, τ arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$k_g = \kappa \cos \varphi \,, k_n = \kappa \sin \varphi \,, \tau_g = \ \tau + \frac{d\varphi}{ds} \ . \tag{3.1.2}$$

Ayrıca $x(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g ve geodezik torsiyonu τ_g aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$k_g =< \frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2} \times n >, \qquad \tau_g =< \frac{dx}{ds}, n \times \frac{dn}{ds} > \ . \tag{3.1.3}$$

Yüzeylerin diferensiyel geometrisinde, bir S yüzeyinde yatan bir $x(s)$ eğrisi için aşağıdakiler iyi bilinir.

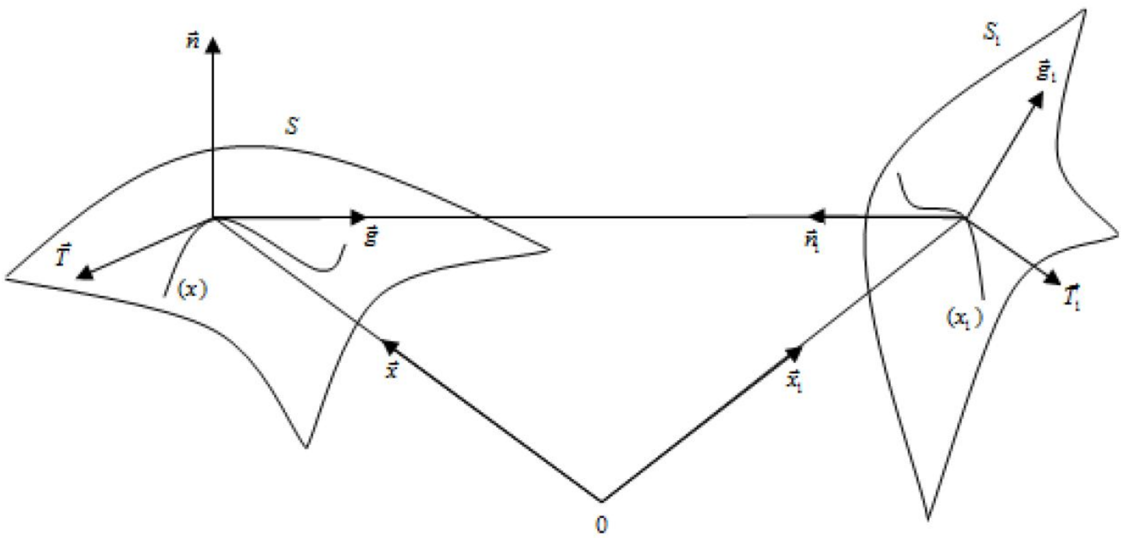
i. $x(s)$ bir geodezik eğridir ⟺ $k_g = 0$
ii. $x(s)$ bir asimptotik çizgidir ⟺ $k_n = 0$
iii. $x(s)$ bir asli çizgidir ⟺ $\tau_g = 0$ [14].

Yüzey üzerindeki her nokta boyunca her bir doğrultudan bir geodezik geçer. Geodezik bir başlangıç noktası ve bu noktadaki teğet ile tek olarak belirtilir. Bir yüzey üzerindeki bütün doğrular geodeziklerdir. Bütün eğrisel geodezikler boyunca eğrilerin asli normali yüzey normali ile çakışır. Asimptotik çizgiler boyunca oskülatör düzlemler ve teğet düzlemler çakışır. Geodezikler boyunca bu düzlemler diktirler. Açılabilir olmayan yüzeyin bir noktasından reel ya da imajiner olan iki asimptotik çizgi geçer.

3.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Mannheim Partner D-Eğrileri

Bu bölümde, Darboux çatısı dikkate alınarak, Mannheim partner D-eğrilerinin tanımı ve bunlarla ilgili karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 3.2.1 3- boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş iki yüzey S ve S_1 olsun, ve sırasıyla tamamen S ve S_1 üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler de $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ olsun. $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları sırasıyla {T, g, n} ve $\{T_1, g_1, n_1\}$ ile gösterilsin. Eğer x ve x_1 eğrileri arasında uygun bir bağıntı varsa, yani eğrilerin eş noktalarında, x in g Darboux çatı elemanı x_1 in n_1 Darboux çatı elemanı ile çakışıyorsa, yani g ve $n_1$vektörleri bir doğru üzerinde yatıyorsa, x eğrisine Mannheim D-eğrisi ve x_1 eğrisine de x eğrisinin bir Mannheim partner D-eğrisidir denir. Bu durumda $\{x, x_1\}$ çiftine bir Mannheim D-çifti denir. Eğer, sırasıyla, yönlendirilmiş S ve S_1 yüzeyleri üzerinde yatan böyle eğriler varsa, {S, S_1} yüzey çiftine Mannheim yüzey çifti denir.



Şekil 1: Mannheim partner D-eğrileri

Teorem 3.2.1 S yönlendirilmiş bir yüzey ve $x(s)$, s yay uzunluğu parametresi ile verilen E^3 de tamamen S yüzeyinde yatan bir Mannheim D-eğrisi olsun. Eğer S_1 başka bir yönlendirilmiş yüzey ve $x_1(s_1)$, s_1 yay uzunluğu parametresiyle verilen tamamen S_1 yüzeyinde yatan bir eğri ise, $x_1(s_1)$ eğrisinin $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitliğin sıfırdan farklı herhangi bir λ sabiti için geçerli olmasıdır.

$$-\lambda\dot{\tau}_{g_1} = \left(\frac{\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2+\lambda^2\tau_{g_1}^2}{\left(1-\lambda k_{n_1}\right)}\right)\left(\frac{\lambda k_{n_1}-1}{\cos\theta}k_n-k_{g_1}\right)+\frac{\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1-\lambda k_{n_1}}\ .$$

Burada θ, x ve x_1 eğrilerinin karşılıklı noktalardaki T ve T_1 teğet vektörleri arasındaki açıdır.

İspat. Kabul edelim ki S yönlendirilmiş bir yüzey ve $x(s)$ tamamen S de yatan Mannheim D-eğrisi olsun. $x(s)$ ve $x_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları sırasıyla $\{T,g,n\}$ ve $\{T_1,g_1,n_1\}$ ile ifade edilsin. O halde tanımdan λ(s_1) diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$x(s_1)=x_1(s_1)+\lambda(s_1)n_1(s_1) \tag{3.2.1}$$

olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi bu denklemin s_1 parametresine göre türevi alınırsa ve (3.1.1) Darboux formülünü uygulayarak

$$\frac{dx}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\frac{dx_1}{ds_1}+\dot{\lambda}(s_1)n_1(s_1)+\lambda(s_1)\dot{n}_1(s_1)$$

$$T\frac{ds}{ds_1}=T_1+\dot{\lambda}n_1+\lambda\left(-k_{n_1}T_1-\tau_{g_1}g_1\right)$$

$$T\frac{ds}{ds_1}=\left(1-\lambda k_{n_1}\right)T_1-\lambda\tau_{g_1}g_1+\dot{\lambda}n_1 \tag{3.2.2}$$

elde edilir. n_1 doğrultusu ile g doğrultusu çakıştığından,

$$\dot{\lambda}(s_1)=0$$

elde edilir. Bu λ nın sıfırdan farklı bir sabit olduğu anlamındadır ve (3.2.2) denklemi

$$T\frac{ds}{ds_1}=T_1+\lambda\dot{n}_1=T_1+\lambda\left(-k_{n_1}T_1-\tau_{g_1}g_1\right)$$

$$T\frac{ds}{ds_1}=\left(1-\lambda k_{n_1}\right)T_1-\lambda\tau_{g_1}g_1 \tag{3.2.3}$$

olur. Öte yandan x ve x_1 eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki T ve T_1 teğet vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$T\ =\ cos\theta T_1+sin\theta g_1 \tag{3.2.4}$$

dir. Bu ifadenin s_1 parametresine göre diferensiyeli alınırsa,

$$\frac{dT}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \left(k_{g_1}g_1 + k_{n_1}n_1\right)\cos\theta + \dot{\theta}(-\sin\theta)T_1 + \left(-k_{g_1}T_1 + \tau_{g_1}n_1\right)\sin\theta + \dot{\theta}\cos\theta\, g_1$$

$$\frac{ds}{ds_1}\left(k_g g + k_n n\right) = \left(-\dot{\theta} - k_{g_1}\right)\sin\theta\, T_1 + \left(\dot{\theta} + k_{g_1}\right)\cos\theta\, g_1$$

$$+(k_{n_1}\cos\theta + \tau_{g_1}\sin\theta)n_1 \tag{3.2.5}$$

eşitliği elde edilir.

$$n = \sin\theta\, T_1 - \cos\theta\, g_1 \tag{3.2.6}$$

eşitliğinin son ifadede yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\left(k_g g + k_n \sin\theta\, T_1 - k_n\cos\theta\, g_1\right)\frac{ds}{ds_1} \\ = \left(-\dot{\theta} - k_{g_1}\right)\sin\theta\, T_1 + \left(\dot{\theta} + k_{g_1}\right)\cos\theta\, g_1 + (k_{n_1}\cos\theta \\ + \tau_{g_1}\sin\theta)n_1\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

denklemi elde edilir. x ve x_1 eğrileri Mannheim partner D-eğrileri oldukları için n_1 in yönü ile g çakışık olduğundan her iki tarafta T_1 in katsayıları birbirine eşittir. Dolayısıyla

$$-\dot{\theta} - k_{g_1} - k_n\frac{ds}{ds_1} = 0$$

bulunur. Böylece

$$\dot{\theta} = -\left(k_n\frac{ds}{ds_1} + k_{g_1}\right) \tag{3.2.8}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.3), (3.2.4) ve T_1 in g_1 e ortogonal olduğu gerçeğinden

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1-\lambda k_{n_1}}{\cos\theta} = -\frac{\lambda\tau_{g_1}}{\sin\theta} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. (3.2.9) denklemi,

$$\tan\theta = -\frac{\lambda\tau_{g_1}}{1-\lambda k_{n_1}} \tag{3.2.10}$$

eşitliğini verir ve bu eşitliklerden kolayca $-\lambda\tau_{g_1} = tan\theta\,(1-\lambda k_{n_1})$ denklemi bulunabilir. Bu denklemin s_1 parametresine göre türevi alınırsa

$$-\lambda\dot{\tau}_{g_1} = \left(1 + \frac{\lambda^2\tau_{g_1}^2}{\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2}\right)\dot{\theta}\left(1-\lambda k_{n_1}\right) - \left(\frac{-\lambda\tau_{g_1}}{1-\lambda k_{n_1}}\right)\lambda\dot{k}_{n_1}$$

elde edilir ve (3.2.8) denklemi göz önüne alınırsa

$$-\lambda\dot{\tau}_{g_1} = \left(\frac{\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2 + \lambda^2\tau_{g_1}^2}{\left(1-\lambda k_{n_1}\right)}\right)\left(\frac{\lambda k_{n_1}-1}{\cos\theta}k_n - k_{g_1}\right) + \frac{\lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1}}{1-\lambda k_{n_1}} \quad (3.2.11)$$

denklemi elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (3.2.11) eşitliği sıfırdan farklı bir λ sabiti için geçerli olsun. O halde (3.2.9) eşitliği (3.2.11) de yerine yazılırsa

$$-k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 = \lambda\dot{\tau}_{g_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right) - \lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1} + \left(\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2 + \lambda^2\tau_{g_1}^2\right)k_{g_1} \quad (3.2.12)$$

elde edilir. λ sıfırdan farklı bir sabit sayı olmak üzere

$$x(s_1) = x_1(s_1) + \lambda n_1(s_1) \quad (3.2.13)$$

eğrisini tanımlayalım. x in bir Mannheim D-eğrisi olduğunu ve x_1 eğrisinin de x eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi olduğunu gösterelim. (3.2.13) denkleminin s_1 e göre iki kez türevi alınırsa,

$$T\frac{ds}{ds_1} = T_1 + \lambda\dot{n}_1 = T_1 + \lambda(-k_{n_1}T_1 - \tau_{g_1}g_1)$$

$$T\frac{ds}{ds_1} = \left(1-\lambda k_{n_1}\right)T_1 - \lambda\tau_{g_1}g_1 \quad (3.2.14)$$

ve

$$\begin{aligned} T\frac{d^2s}{ds_1^2} &+ \left(k_g g + k_n n\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \\ &= \left(-\lambda\dot{k}_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}k_{g_1}\right)T_1 \\ &+ \left(\left(1-\lambda k_{n_1}\right)k_{g_1} - \lambda\dot{\tau}_{g_1}\right)g_1\left(\left(1-\lambda k_{n_1}\right)k_{n_1} - \lambda\tau_{g_1}^2\right)n_1 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

denklemi elde edilir. (3.2.14) ve (3.2.15) denklemleri vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left[k_g(T\times g) - k_n(T\times n)\right]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 & \\ &= \left(1-\lambda k_{n_1}\right)\left[\left(1-\lambda k_{n_1}\right)k_{n_1} - \lambda\tau_{g_1}^2\right](T_1\times n_1) \\ &- \lambda\tau_{g_1}\left(-\lambda\dot{k}_{n_1} + \lambda\tau_{g_1}k_{g_1}\right)(g_1\times T_1) \\ &+ \left(\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2 k_{g_1} - \lambda\dot{\tau}_{g_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)\right)(T_1\times g_1) \\ &+ \left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right) + \lambda^2\tau_{g_1}^3\right)(g_1\times n_1) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
&[k_g n - k_n g]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \\
&\qquad = \left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)T_1 \\
&\qquad - \left(\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2 k_{n_1} - \lambda\tau_{g_1}^2\left(1-\lambda k_{n_1}\right)\right)g_1 \\
&\qquad + \Big[k_{g_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2 - \lambda\dot{\tau}_{g_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right) - \lambda^2\tau_{g_1}\dot{k}_{n_1} \\
&\qquad + \lambda^2\tau_{g_1}^2 k_{g_1}\Big]n_1
\end{aligned}
\tag{3.2.16}
$$

eşitliği elde edilir. (3.2.12) eşitliği (3.2.16) da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&[k_g n - k_n g]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \\
&\qquad = \left(-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)T_1 \\
&\qquad - \left(k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2 - \lambda\tau_{g_1}^2\left(1-\lambda k_{n_1}\right)\right)g_1 - k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 n_1
\end{aligned}
\tag{3.2.17}
$$

denklemi bulunur. (3.2.17) denklemi (3.2.14) denklemi ile vektörel çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
&[k_g(T\times n) - k_n(T\times g)]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \\
&\qquad = \left(-\lambda^2\tau_{g_1}k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)\lambda^3\tau_{g_1}^4\right)n_1 \\
&\qquad - \left(k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^3 - \lambda\tau_{g_1}^2\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2\right)n_1 + k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\left(1-\lambda k_{n_1}\right)g_1 \\
&\qquad + k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}T_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[k_g(T\times n) - k_n(T\times g)]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 \\
&\qquad = \Big(-\lambda^2\tau_{g_1}^2k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)+\lambda^3\tau_{g_1}^4 - k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^3 \\
&\qquad + \lambda\tau_{g_1}^2\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2\Big)n_1 + k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\left(1-\lambda k_{n_1}\right)g_1 \\
&\qquad + k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\lambda\tau_{g_1}T_1
\end{aligned}
\tag{3.2.18}
$$

bulunur. Buradan da

$$[-k_g g - k_n n]\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4$$
$$= k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \lambda\tau_{g_1} T_1 + k_n\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 (1-\lambda k_{n_1}) g_1$$
$$+ \left((1-\lambda k_{n_1})^2 + \lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2 - k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})\right) n_1$$

elde edilir. (3.2.17) ve (3.2.18) denklemlerinden,

$$-k_n k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 g - k_g^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 n$$
$$= \left(-\lambda\tau_{g_1} k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1}) + \lambda^2\tau_{g_1}^3\right) k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right) T_1$$
$$- \left(k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})^2 - \lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})\right) k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right) g_1 - k_n k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 n_1$$

ve

$$-k_n k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 g - k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 n$$
$$= \lambda\tau_{g_1} k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 T_1 + k_n^2(1-\lambda k_{n_1})\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 g_1$$
$$+ k_n\left((1-\lambda k_{n_1})^2 + \lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2 - k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})\right) n_1$$

denklemleri elde edilir. Buradan da gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left(k_g^2 + k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 n$$
$$= \left[k_g \frac{ds}{ds_1}\left(-\lambda\,\tau_{g_1} k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1}) + \lambda^2\tau_{g_1}^3\right) - \lambda\tau_{g_1} k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right] T_1$$
$$- \left[k_g \frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})^2 - \lambda\tau_{g_1}^2(1-\lambda k_{n_1})\right)\right.$$
$$\left. + (1-\lambda k_{n_1}) k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right] g_1$$
$$- \left[k_n k_g\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 + k_n\left((1-\lambda k_{n_1})^2 + \lambda^2\tau_{g_1}^2\right)\left(\lambda\tau_{g_1}^2 - k_{n_1}(1-\lambda k_{n_1})\right)\right] n_1$$

(3.2.19)

denklemi bulunur. Bununla birlikte, (3.2.14) ve (3.2.17) denklemlerinden,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{ds}{ds_1}\right)^2 = \left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2 + \lambda^2\tau_{g_1}^2 \\ k_g\left(\dfrac{ds}{ds_1}\right)^2 = k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right) - \lambda\tau_{g_1}^2 \end{cases} \tag{3.2.20}$$

elde edilir. (3.2.20), (3.2.19) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \left(k_g^2+k_n^2\right)\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 n \\ &= \left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(-\lambda\,\tau_{g_1}k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)+\lambda^2\tau_{g_1}^3\right)-\lambda\tau_{g_1}k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]T_1 \\ &- \left[k_g\frac{ds}{ds_1}\left(k_{n_1}\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2-\lambda\tau_{g_1}^2\left(1-\lambda k_{n_1}\right)\right)\right. \\ &\left.+\left(1-\lambda k_{n_1}\right)k_n^2\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\right]g_1 \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

denklemi elde edilir. (3.2.14) ve (3.2.21) eşitlikleri T ve n vektörlerinin $sp\{T_1, g_1\}$ düzleminde yattığını gösterir yani eğrilerin karşılıklı noktalarında x eğrisinin Darboux çatı elemanı g ile x_1 eğrisinin Darboux çatı elemanı n_1 çakışırlar, yani x ve x_1 eğrileri Mannheim partner D-eğrileridir.

Şimdi bazı özel durumlar için Mannheim partner D-eğrilerin karakterizasyonlarını verelim. Kabul edelim ki $x(s)$ bir asimptotik çizgi olsun. (3.2.11) denkleminden aşağıdaki özel durumlar elde edilir.

(i). $x_1(s_1)$ eğrisinin bir geodezik eğri olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $x_1(s_1)$ eğrisinin $x(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner D-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\dot{\tau}_{g_1} = \frac{-\lambda\tau_{g_1}k_{n_1}}{1-\lambda k_{n_1}}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

(ii). Kabul edelim ki $x_1(s_1)$ eğrisi bir asimptotik eğri olsun. Bu takdirde $x_1(s_1)$ eğrisinin $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi olması için gerek ve yeter şart $x_1(s_1)$ eğrisinin k_{g_1} geodezik eğriliği ve τ_{g_1} geodezik burulması arasında

$$\lambda\dot{\tau}_{g_1} = \left(1+\lambda^2\tau_{g_1}^2\right)k_{g_1}$$

bağıntısının var olmasıdır. Bu durumda $x_1(s_1)$ eğrisinin Frenet çatısı onun Darboux çatısıyla çakışır. (3.1.2) den $k_{g_1} = \kappa_1$ ve $\tau_{g_1} = \tau_1$ elde edilir. Yani Mannheim partner D-eğrileri Mannheim partner eğrileri olur. Yani eğer $x(s)$ ve $x_1(s_1)$

eğrilerinin her ikisi de asimptotik eğri ise Mannheim partner D-eğrilerinin tanım ve karakterizasyonu, 3-boyutlu Öklid uzayındaki Mannheim partner eğrilerinin tanım ve karakterizasyonunu kapsar.

(iii). Eğer $x_1(s_1)$ bir asli çizgi ise bu takdirde $x_1(s_1)$ eğrisinin $x(s)$ eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi olması için gerek ve yeter şart ya geodezik eğriliği k_{g_1}=0 yani $x_1(s_1)$ eğrisi aynı zamanda bir geodezik eğridir ya da $k_{n_1} = \frac{1}{\lambda}$ = sabittir.

Önerme 3.2.1. $\{ x, x_1 \}$ çifti bir Mannheim D-çifti olsun. $x(s)$ eğrisinin k_g geodezik eğriliği, τ_g geodezik torsiyonu ve $x_1(s_1)$ eğrisinin k_{n_1} normal eğriliği, τ_{g_1} geodezik torsiyonu aralarındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

$$k_g - k_{n_1} = \lambda\,(k_g k_{n_1} - \tau_g \tau_{g_1})$$

İspat. $x(s)$ eğrisi bir Mannheim D-eğrisi ve $x_1(s_1)$ eğrisi $x(s)$ eğrisinin Mannheim Partner D-eğrisi olsun. Öyleyse (3.2.13) den sabit bir λ için

$$x_1(s_1) = x(s_1) - \lambda n_1(s_1) \qquad (3.2.22)$$

yazabiliriz. (3.2.22) nin s_1 e göre diferensiyeli alınırsa,

$$T_1 = T\frac{ds}{ds_1} - \lambda\left(-k_{n_1}T_1 - \tau_g g\right) - \dot{\lambda} n_1$$

$$T_1 = \left(1 + \lambda k_g\right)\frac{ds}{ds_1}T - \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}n \qquad (3.2.23)$$

elde edilir.

$$T_1 = cos\theta T + sin\theta n \qquad (3.2.24)$$

olduğu için (3.2.23) ve (3.2.24) denklemlerinden

$$\cos\theta = (1 + \lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}, \qquad \sin\theta = -\lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1} \qquad (3.2.25)$$

yazılabilir. (3.2.9) ve (3.2.25) denklemleri kullanılırsa,

$$\cos^2\theta = (1 + \lambda k_g)\frac{ds}{ds_1}\left(1 - \lambda k_{n_1}\right)\frac{ds_1}{ds} = 1 + \lambda\left(k_g - k_{n_1}\right) - \lambda^2 k_g k_{n_1},$$

$$\sin^2\theta = \lambda\tau_g\frac{ds}{ds_1}\lambda\tau_{g_1}\frac{ds_1}{ds} = \lambda^2\tau_g\tau_{g_1}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$k_g - k_{n_1} = \lambda(k_g k_{n_1} - \tau_g \tau_{g_1})$$

bulunur.

Önerme 3.2.1. den aşağıdaki özel durumlar elde edilir.

$\{x, x_1\}$ bir Mannheim D-çifti olsun. Bu takdirde

i. Eğer x_1 bir asimptotik eğri ise, bu takdirde

$k_g = -\lambda \tau_g \tau_{g_1}$

ii. Eğer x_1 bir asli çizgi ise, bu takdirde

$k_g - k_{n_1} = \lambda k_g k_{n_1}$

iii. Eğer x bir geodezik eğri ise, bu takdirde

$k_{n_1} = \lambda \tau_g \tau_{g_1}$

iv. Eğer x bir asli çizgi ise, bu takdirde

$k_g - k_{n_1} = \lambda k_g k_{n_1}$

dir.

Teorem 3.2.2. $\{x, x_1\}$ çifti Mannheim D-çifti olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemler sağlanır.

(i). $k_{g_1} = -\left(k_n \frac{ds}{ds_1} + \frac{d\theta}{ds_1}\right)$

(ii). $\tau_g \frac{ds}{ds_1} = -k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta$

(iii). $k_g \frac{ds}{ds_1} = k_{n_1} \cos\theta + \tau_{g_1} \sin\theta$

(iv). $\tau_{g_1} = \left(k_g \sin\theta + \tau_g \cos\theta\right) \frac{ds}{ds_1}$.

İspat. (i) $< T, T_1 >= cos\theta$ denkleminin s_1 e göre diferensiyeli alınırsa,

$$\left\langle (k_g g + k_n n) \frac{ds}{ds_1}, T_1 \right\rangle + \langle T, k_{g_1} g_1 + k_{n_1} n_1 \rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir. n_1 in yönü ile g nin yönünün çakıştığı gerçeğini kullanarak,

$$\begin{cases} T_1 = \cos\theta\, T + \sin\theta\, n \\ g_1 = \sin\theta\, T - \cos\theta\, n \end{cases} \tag{3.2.26}$$

eşitlikleri elde edilir. Kolayca

$$\left\langle (k_g g + k_n n) \frac{ds}{ds_1}, T_1 \right\rangle + \langle T, k_{g_1} g_1 + k_{n_1} n_1 \rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$\left\langle (k_g g + k_n n) \frac{ds}{ds_1}, \cos\theta\, T + \sin\theta\, n \right\rangle + \langle T, k_{g_1}(\sin\theta\, T - \cos\theta\, n) + k_{n_1} n_1 \rangle$$
$$= -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$\left\langle k_g \frac{ds}{ds_1} g + k_n \frac{ds}{ds_1} n\,, \cos\theta\, T + \sin\theta\, n \right\rangle + \left\langle T, k_{g_1}(\sin\theta\, T - \cos\theta\, n) + k_{n_1} n_1 \right\rangle$$

$$= -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$k_n \sin\theta \frac{ds}{ds_1} \langle n, n\rangle + k_{g_1} \sin\theta \,\langle T, T\rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds_1}$$

$$k_{g_1} = -k_n \frac{ds}{ds_1} - \frac{d\theta}{ds_1}$$

elde edilir.

(ii) $< n, n_1 >= 0$ denkleminin s_1 e göre diferensiyeli alınırsa,

$$\left\langle (-k_n T - \tau_g g)\, \frac{ds}{ds_1},\ n_1 \right\rangle + \left\langle n, -k_{n_1} T_1 + \tau_{g_1} g_1 \right\rangle = 0$$

elde edilir. (3.2.26) ve n_1 ile g nin yönlerinin çakışık olduğu dikkate alınırsa,

$$\left\langle (-k_n T - \tau_g g)\, \frac{ds}{ds_1},\ n_1 \right\rangle + \left\langle n, -k_{n_1}(cos\theta\, T + \sin\theta\, n) - \tau_{g_1}(\sin\theta\, T - \cos\theta\, n) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle -k_n \frac{ds}{ds_1} T - \tau_g \frac{ds}{ds_1} g, g \right\rangle + \left\langle n, \left(-\cos\theta\, k_{n_1} - \tau_{g_1} \sin\theta\right) T + \left(-k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta\right) n \right\rangle$$

$$= 0$$

$$-\tau_g \frac{ds}{ds_1} \langle g, g\rangle + \left(-k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta\right) \langle n, n\rangle = 0$$

$$\tau_g \frac{ds}{ds_1} = -k_{n_1} \sin\theta + \tau_{g_1} \cos\theta$$

elde edilir.

(iii) $< T, n_1 >= 0$ denkleminin s_1 e göre diferensiyeli alınırsa,

$$\left\langle (k_g g + k_n n) \frac{ds}{ds_1}, n_1 \right\rangle + \langle T, -k_{n_1} T_1 - \tau_{g_1} g_1 \rangle = 0$$

olur. (3.2.26) denklemi kullanılırsa

$$\left\langle (k_g g + k_n n) \frac{ds}{ds_1}, n_1 \right\rangle + \langle T, -k_{n_1}(\cos\theta\, T + \sin\theta\, n) - \tau_{g_1}(\sin\theta\, T - \cos\theta\, n) \rangle = 0$$

$$\left\langle (k_g g + k_n n) \frac{ds}{ds_1}, g \right\rangle + \langle T, -k_{n_1}(\cos\theta\, T + \sin\theta\, n) - \tau_{g_1}(\sin\theta\, T - \cos\theta\, n) \rangle = 0$$

$$k_g \frac{ds}{ds_1} \langle g, g\rangle + (-k_{n_1} \cos\theta - \tau_{g_1} \sin\theta) \langle T, T\rangle = 0$$

$$k_g \frac{ds}{ds_1} = k_{n_1} \cos\theta + \tau_{g_1} \sin\theta$$

elde edilir.

(iv) $< g, g_1 >= 0$ denkleminin s_1 e göre diferensiyeli alınırsa

$$\left\langle(-k_gT+\tau_gn)\frac{ds}{ds_1},g_1\right\rangle+\left\langle g,-k_{g_1}T_1+\tau_{g_1}n_1\right\rangle=0$$

elde edilir. (3.2.26) dan

$$\left\langle(-k_gT+\tau_gn)\frac{ds}{ds_1},\sin\theta\,T-\cos\theta\,n\right\rangle+\left\langle g,-k_{g_1}(\cos\theta\,T+\sin\theta\,n)+\tau_{g_1}n_1\right\rangle=0$$

$$\left\langle -k_g\frac{ds}{ds_1}T+\tau_g\frac{ds}{ds_1}n,\sin\theta\,T-\cos\theta\,n\right\rangle+\left\langle g,-k_{g_1}\cos\theta\,T-k_{g_1}\sin\theta\,n+\tau_{g_1}g\right\rangle=0$$

$$-k_g\sin\theta\frac{ds}{ds_1}\langle T,T\rangle-\tau_g\cos\theta\frac{ds}{ds_1}\langle n,n\rangle+\tau_{g_1}\langle g,g\rangle=0$$

$$\tau_{g_1}=(\,k_g\sin\theta+\tau_g\cos\theta)\frac{ds}{ds_1}$$

bulunur.

Şimdi x bir Mannheim D-eğrisi olsun ve x_1 eğrisi x eğrisinin bir Mannheim partner D-eğrisi olsun. (3.1.3) ün ilk eşitliğinden

$$k_{g_1}=\langle\overrightarrow{\dot{x}_1},\overrightarrow{\ddot{x}_1}\times\overrightarrow{n_1}\rangle=\langle\overrightarrow{\dot{x}_1},\overrightarrow{\ddot{x}_1}\times\vec{g}\rangle$$

$$=\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\left(-k_n\left(1+\lambda k_g\right)^2-\lambda^2\tau_g^2k_n\right)+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\left(\lambda\dot{\tau}_g\left(1+\lambda k_g\right)\right.$$
$$\left.-\lambda^2\tau_g\dot{k}_g\right) \tag{3.2.27}$$

elde edilir. $x_1(s_1)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_{g_1} ve $x(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g, normal eğriliği k_n ve geodezik torsiyonu τ_g arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

1) Eğer k_g=0 ise (3.2.27) den $x_1(s_1)$ eğrisinin k_g geodezik eğriliği

$$k_{g_1}=-\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\left(1+\lambda^2\tau_g^2\right)k_n+\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\lambda\dot{\tau}_g \tag{3.2.28}$$

dir.

2) Eğer k_n=0 ise k_g, τ_g, k_{g_1} arasındaki ilişki

$$k_{g_1}=\lambda\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\left(\dot{\tau}_g\left(1+\lambda k_g\right)-\lambda\tau_g\dot{k}_g\right) \tag{3.2.29}$$

dir.

3) Eğer τ_g=0 ise k_{g_1} geodezik eğriliği için

$$k_{g_1}=-\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3\left(1+\lambda k_g\right)^2k_n) \tag{3.2.30}$$

verilebilir.

Yukarıdaki üç denklemden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.1. x bir Mannheim D-eğrisi olsun ve x_1 eğrisi x eğrisinin bir Mannheim partner D-eğrisi olsun. $x_1(s_1)$ eğrisinin k_{g_1} geodezik eğriliği ve $x(s)$ eğrisinin k_g geodezik eğriliği, k_n normal eğriliği ve τ_g geodezik torsiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

i. Eğer x bir geodezik eğri ise, $x_1(s_1)$ eğrisinin k_{g_1} geodezik eğriliği

$$k_{g_1} = -\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 (1 + \lambda^2\tau_g^2)k_n + \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \lambda\dot{\tau}_g$$

dir.

ii. Eğer x bir asimptotik çizgi ise, k_{g_1}eşitliği

$$k_{g_1} = \lambda\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \left(\dot{\tau}_g\left(1 + \lambda k_g\right) - \lambda\tau_g\dot{k}_g\right)$$

dir

iii. Eğer x bir asli çizgi ise, $x_1(s_1)$ eğrisinin k_{g_1} geodezik eğriliği

$$k_{g_1} = -\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 \left(1 + \lambda k_g\right)^2 k_n$$

dir. Benzer şekilde (3.1.3) ün ikinci eşitliğinden ve g nin n_1 ile çakıştığı gerçeğini kullanarak $x_1(s_1)$ eğrisinin τ_{g_1} geodezik torsiyonu ve $x(s)$ eğrisinin τ_g geodezik torsiyonu arasındaki ilişki

$$\tau_{g_1} = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \tau_g \tag{3.2.31}$$

şeklinde verilir. Ayrıca (3.2.9) u kullanarak, (3.2.31) den

$$\tau_g\tau_{g_1} = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2} \tag{3.2.32}$$

elde edilir.

(3.2.31) ve (3.2.32) den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.2. x bir Mannheim D-eğrisi olsun ve x_1 eğrisi x eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi olsun. $x_1(s_1)$ eğrisinin τ_{g_1} geodezik torsiyonu ve $x(s)$ eğrisinin τ_g geodezik torsiyonu arasındaki ilişki aşağıdakilerden biri ile verilir.

$$\tau_{g_1} = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 \tau_g$$

ya da

$$\tau_g \tau_{g_1} = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$$

dir. Böylece x Mannheim D-eğrisi bir asli çizgi iken x_1 Mannheim partner D-eğrisi de bir asli çizgidir.

Benzer şekilde (3.2.9) ve (3.2.31) den

$$\frac{\tau_g}{\tau_{g_1}} = \frac{\cos^2\theta}{\left(1-\lambda k_{n_1}\right)^2}$$

bulunur. Eğer $x_1(s_1)$ bir asimptotik çizgi ise yani k_{n_1}=0 ise

$$\tau_g = \cos^2\theta\,\tau_{g_1} \tag{3.2.33}$$

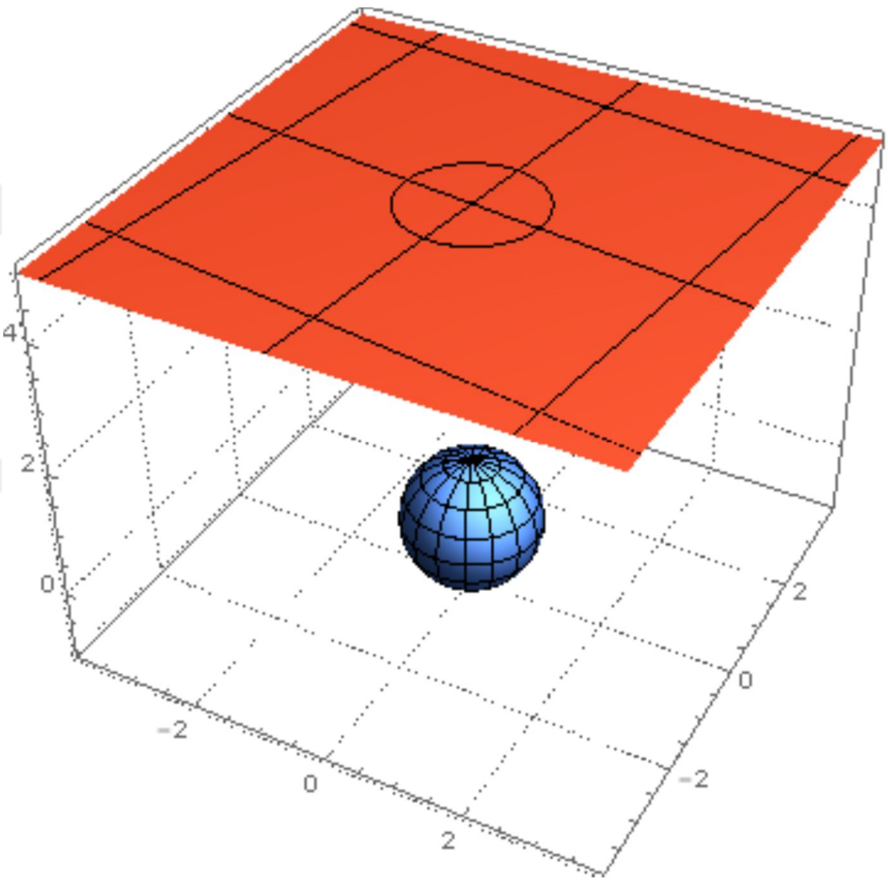
elde edilir ve bu ifadeden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.3. x bir Mannheim D-eğrisi olsun ve x_1, x eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi olsun. Eğer $x_1(s_1)$ bir asimptotik çizgi ise $x(s)$ eğrisinin τ_g geodezik torsiyonu ve $x_1(s_1)$ eğrisinin τ_{g_1} geodezik torsiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

$$\tau_g = \cos^2\theta\,\tau_{g_1}\ .$$

Burada θ, x ile x_1 eğrilerinin karşılıklı noktalarında T ve T_1 teğet vektörleri arasındaki açıdır.

Örnek 3.2.1. $x(\theta) = (\cos\theta\ ,\ \sin\theta\ ,\ 0)$ eğrisi $S(\theta\,,\varphi) = (cos\theta\, sin\varphi, sin\theta\, sin\varphi, cos\varphi)$ birim küresi üzerinde büyük çemberdir. λ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x(\theta)$ eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi $x_1(\theta) = (cos\theta\,, sin\theta\,, \lambda\,)$ eğrisidir ve $x_1(\theta)$ eğrisi, $x_1(\theta)$ eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu $S_1(\theta\,, v) = (cos\theta\,, sin\theta\,, \lambda\,) + v(-sin\theta\,, cos\theta\,, 0)$ regle yüzeyi üzerinde yatar. Bu takdirde $\{\,x, x_1\}$ çifti Mannheim D çiftidir.



Şekil 2

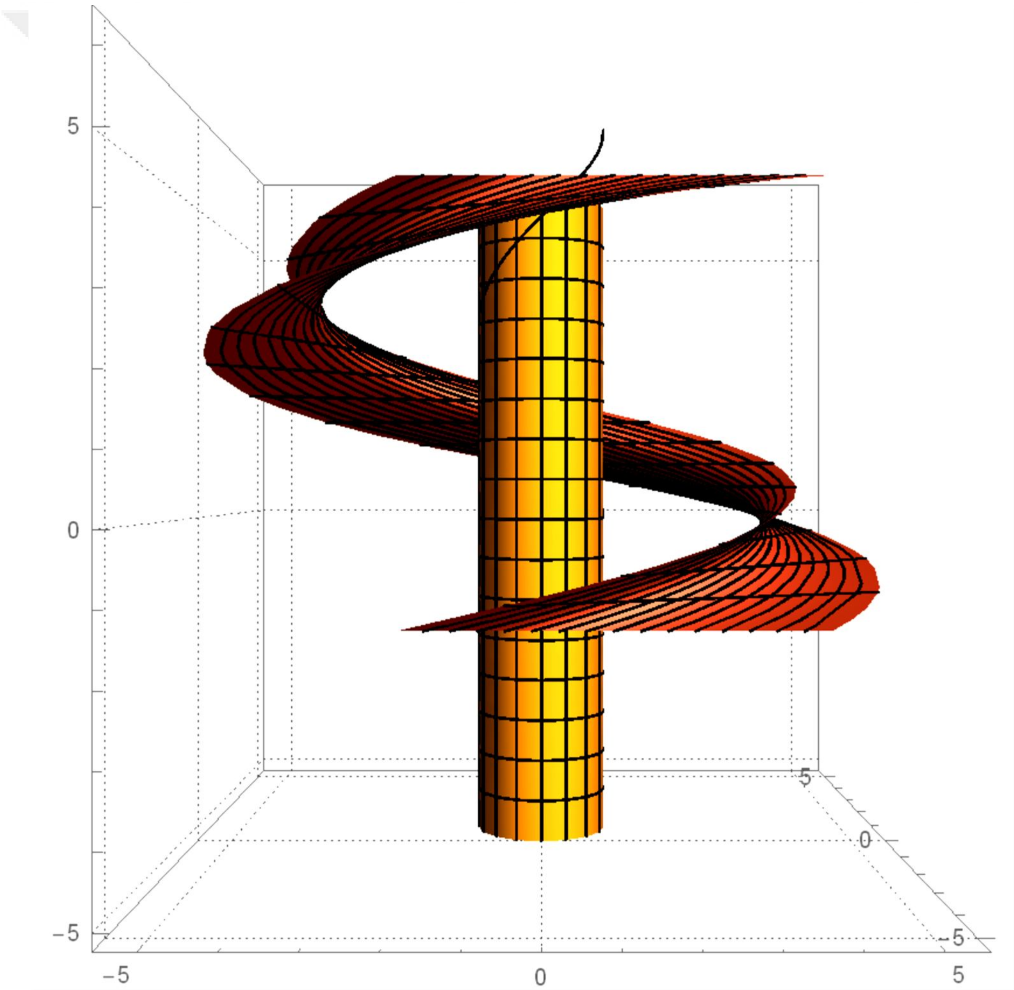
Örnek 3.2.2. $S(\theta\ ,\varphi)\ =\ (cos\theta\ ,sin\theta\ ,\varphi)$ dik silindiri üzerinde $x(\theta)\ =\ (cos\theta\ ,sin\theta\ ,\theta)$ helis eğrisi verilsin. λ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x(\theta)$ eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi

$$x_1(\theta) = \left(\cos\theta + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sin\theta\,, \sin\theta - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\cos\theta\,, \theta + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$$

dir ve a sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $x_1(\theta\ )$ eğrisi

$$S_1(\theta, v) = \left(\cos\theta + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sin\theta + av\cos\theta\,, \sin\theta - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\cos\theta + av\sin\theta\,, \theta + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$$

ile verilen helikoid yüzeyi üzerinde yatar. Bu takdirde $\{\,x,\ x_1\}$ çifti Mannheim D-çiftidir.



Şekil 3

4. BÖLÜM

4.1. AW(k)-Tipinden Eğriler

Bu bölümde AW(k)-tipinden eğri kavramı tanıtılarak bir eğrinin AW(k)-tipinden (k=1, 2, 3) olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.

Önerme 4.1.1. $\alpha \in E^3$ oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\alpha'(s) = T$$
$$\alpha''(s) = k_g g + k_n n$$
$$\alpha'''(s) = T\left(-k_g^2 - k_n^2\right) + g\left(k_g' - k_n\tau_g\right) + n(k_g\tau_g + k_n')$$
$$\begin{aligned}\alpha^{IV}(s) = {} & T\left(-3k_g k_g' - 2k_n k_n' + k_g k_n \tau_g\right) \\ & + g\left(-k_g^3 - k_g k_n^2 + k_g'' - 2k_n'\tau_g - k_n\tau_g' - k_g\tau_g^2\right) + n(-k_n k_g^2 - k_n^2 \\ & + 2\tau_g k_g' - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g' + k_n'')\end{aligned}$$

dir.

Notasyon.

$$N_1(s) = (\alpha''(s))^{\perp} = k_g g + k_n n \tag{4.1.1}$$
$$N_2(s) = (\alpha'''(s))^{\perp} = g\left(k_g' - k_n\tau_g\right) + n(k_g\tau_g + k_n') \tag{4.1.2}$$
$$\begin{aligned}N_3(s) = \left(\alpha^{IV}(s)\right)^{\perp} = {} & g\left(-k_g^3 - k_g k_n^2 + k_g'' - 2k_n'\tau_g - k_n\tau_g' - k_g\tau_g^2\right) \\ & + n(-k_n k_g^2 - k_n^2 + 2\tau_g k_g' - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g' + k_n'')\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Sonuç 4.1.1. $\alpha'(s)$, $\alpha''(s)$, $\alpha'''(s)$, $\alpha^{IV}(s)$ lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow$ $N_1(s)$, $N_2(s)$, $N_3(s)$ lineer bağımlıdır.

Önerme 4.1.2. α, E^3 de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}&\{\|N_1(s)\|^2\|N_2(s)\|^2 - \langle N_1(s), N_2(s)\rangle^2\}N_3(s) \\ &\equiv \{\|N_2(s)\|^2\langle N_3(s), N_1(s)\rangle - \langle N_3(s), N_2(s)\rangle\langle N_1(s), N_2(s)\rangle\}N_1(s) \\ &+\{\|N_1(s)\|^2\langle N_3(s), N_2(s)\rangle - \langle N_3(s), N_1(s)\rangle\langle N_1(s), N_2(s)\rangle\}N_2(s)\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.1.1. α, E^3 de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde

$$N_3(s) = \langle N_3(s), N_1^*(s)\rangle N_1^*(s) + \langle N_3(s), N_2^*(s)\rangle N_2^*(s)$$

dir. Burada

$$N_1^*(s) = \frac{N_1(s)}{\|N_1(s)\|}$$
$$N_2^*(s) = \frac{N_2(s) - \langle N_2(s), N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)}{\|N_2(s) - \langle N_2(s), N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)\|}$$

dir.

Sonuç 4.1.2. α, E^3 de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde,

$$N_1^*(s) = \frac{k_g\sqrt{k_g^2+k_n^2}}{k_g^2+k_n^2}\vec{g} + \frac{k_n\sqrt{k_g^2+k_n^2}}{k_g^2+k_n^2}\vec{n} \tag{4.1.4}$$

ve

$$N_2^* = \frac{\left(\frac{k_g'k_n^2-k_n^3\tau_g-k_nk_g^2\tau_g-k_n'k_nk_g}{k_g^2+k_n^2}\right)\vec{g} + \left(\frac{k_g^3\tau_g-k_g\tau_gk_n^2-k_n'k_g^2-k_g'k_gk_n}{k_g^2+k_n^2}\right)\vec{n}}{\frac{k_n^2\tau_g-k_nk_g'+k_g^2\tau_g+k_gk_n'}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}}$$

$$= \frac{k_n\sqrt{\frac{\left[k_n(-k_g'+k_n\tau_g)+k_g(k_g\tau_g+k_n')\right]^2}{k_g^2+k_n^2}}}{k_n(k_g'-k_n\tau_g)-k_g(k_g\tau_g+k_n')}\vec{g} + \frac{k_g\sqrt{\frac{\left[k_n(-k_g'+k_n\tau_g)+k_g(k_g\tau_g+k_n')\right]^2}{k_g^2+k_n^2}}}{k_n(-k_g'+k_n\tau_g)+k_g(k_g\tau_g+k_n')}\vec{n}$$

$$= \mp\left(\frac{-k_n\sqrt{k_g^2+k_n^2}}{k_g^2+k_n^2}\right)\vec{g} \mp \left(\frac{k_g\sqrt{k_g^2+k_n^2}}{k_g^2+k_n^2}\right)\vec{n} \tag{4.1.5}$$

dir.

Tanım 4.1.1. Oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisine, eğer

i) $\mathrm{N}_3(\mathrm{s}) = \langle \mathrm{N}_3(\mathrm{s}), \mathrm{N}_2^*(\mathrm{s})\rangle N_2^*(s)$ (4.1.6)

şartını sağlıyorsa zayıf AW(2)-tipindendir,

ii) $N_3(s) = \langle N_3(s), N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)$ (4.1.7)

şartını sağlıyor ise zayıf AW(3)-tipindendir denir.

Önerme 4.1.3. α, 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer α, zayıf AW(2)-tipinden ise

$$k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2 = 0$$

dir.

İspat. α, zayıf AW(2)-tipinden ise (4.1.6) denklemini sağlar. (4.1.6) da (4.1.3) ve (4.1.5) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\left(-k_g^3 - k_gk_n^2 + k_g'' - 2k_n'\tau_g - k_n\tau_g' - k_g\tau_g^2\right)\vec{g}\\ &\qquad + \left(-k_nk_g^2 - k_n^2 + 2\tau_gk_g' - k_n\tau_g^2 - k_g\tau_g' - k_n''\right)\vec{n}\\ &= \frac{-k_n\left(-k_g''k_n - k_gk_n^2 + k_gk_n^3 + k_gk_n'' + 2k_gk_g'\tau_g + 2k_nk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g' + k_n^2\tau_g'\right)}{k_g^2+k_n^2}\vec{g}\\ &+ \frac{k_g\left(-k_g''k_n - k_gk_n^2 + k_gk_n^3 + k_gk_n'' + 2k_gk_g'\tau_g + 2k_nk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g' + k_n^2\tau_g'\right)}{k_g^2+k_n^2}\vec{n}\end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{g}$ ve $\vec{n}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\frac{k_g(k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)}{k_g^2 + k_n^2} = 0$$

ve

$$\frac{k_n(k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)}{k_g^2 + k_n^2} = 0$$

olup $k_g, k_n \neq 0$ için,

$$k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2 = 0$$

bulunur.

Önerme 4.1.4. α, 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Eğer α, zayıf AW(3)-tipinden ise

$$-k_nk_g'' - k_gk_n^2 + k_gk_n^3 + k_gk_n'' + 2k_gk_g'\tau_g + 2k_nk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g' + k_n^2\tau_g' = 0$$

dir.

İspat. α zayıf AW(3)-tipinden ise (4.1.7) denklemini sağlar. (4.1.7) de (4.1.3) ve (4.1.4) yerine konulursa,

$$\begin{aligned}&\left(-k_g^3 - k_gk_n^2 + k_g'' - 2k_n'\tau_g - k_n\tau_g' - k_g\tau_g^2\right)\vec{g}\\ &\qquad + \left(-k_nk_g^2 - k_n^2 + 2\tau_gk_g' - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g' + k_n''\right)\vec{n}\\ &= \left(-\frac{k_g(k_g^4 - k_gk_g'' + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_nk_n'' - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)}{k_g^2 + k_n^2}\right)\vec{g}\\ &+ \left(-\frac{k_n(k_g^4 - k_gk_g'' + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_nk_n'' - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)}{k_g^2 + k_n^2}\right)\vec{n}\end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{g}$ ve $\vec{n}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\frac{k_n\left(-k_nk_g'' - k_gk_n^2 + k_gk_n^3 + k_gk_n'' + 2k_gk_g'\tau_g + 2k_nk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g' + k_n^2\tau_g'\right)}{k_g^2 + k_n^2} = 0$$

$$\frac{k_g\left(-k_nk_g'' - k_gk_n^2 + k_gk_n^3 + k_gk_n'' + 2k_gk_g'\tau_g + 2k_nk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g' + k_n^2\tau_g'\right)}{k_g^2 + k_n^2} = 0$$

olup $k_g, k_n \neq 0$ için,

$$-k_nk_g'' - k_gk_n^2 + k_gk_n^3 + k_gk_n'' + 2k_gk_g'\tau_g + 2k_nk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g' + k_n^2\tau_g' = 0$$

bulunur.

Tanım 4.1.2. α, oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Eğer

i) $\mathrm{N}_3(\mathrm{s}) = 0$ ise α, AW(1)-tipindendir,

ii) $\|N_2(s)\|^2 N_3(s) = \langle N_3(s), N_2(s)\rangle N_2(s)$ (4.1.8)

ise α ya AW(2)-tipindendir,

iii) $\|N_2(s)\|^2 N_3(s) = \langle N_3(s), N_1(s)\rangle N_1(s)$ (4.1.9)

ise α ya AW(3)-tipindendir denir.

Teorem 4.1.2. α eğrisi, 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde α, AW(1)-tipinden olması için gerek ve yeter şart

$$-k_g^3 - k_g k_n^2 + k_g'' - 2k_n'\tau_g - k_n\tau_g' - k_g\tau_g^2 = 0$$

ve

$$-k_n k_g^2 - k_n^2 + 2k_g'\tau_g - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g' + k_n'' = 0$$

olmasıdır.

İspat. (⟹): α eğrisi, AW(1)-tipinden olsun. Tanım (4.1.2) (i) den dolayı $N_3(s) = 0$ dır. Böylece (4.1.3) eşitliğinden

$$\left\{-k_g^3 - k_g k_n^2 + k_g'' - 2k_n'\tau_g - k_n\tau_g' - k_g\tau_g^2\right\}\vec{g} + \left\{-k_n k_g^2 - k_n^2 + 2k_g'\tau_g - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g' + k_n''\right\}\vec{n} = 0$$

dır. Ayrıca $\vec{g}$ ve $\vec{n}$ lineer bağımsız olduğundan

$$-k_g^3 - k_g k_n^2 + k_g'' - 2k_n'\tau_g - k_n\tau_g' - k_g\tau_g^2 = 0$$

ve

$$-k_n k_g^2 - k_n^2 + 2k_g'\tau_g - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g' + k_n'' = 0$$

dir.

(⟸): Aşikardır.

Teorem 4.1.3. α eğrisi, 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde α nın AW(2)-tipinden olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}(k_n' + k_g\tau_g)\big(&-k_g'k_g^2k_n - k_g'k_n^2 + k_g^3k_n' - k_g''k_n' + k_gk_n'k_n^2 + k_g'k_n'' + k_g^4\tau_g + 2(k_g')^2\tau_g \\ &- k_g''k_g\tau_g + 2k_g^2k_n^2\tau_g + k_n^3\tau_g + 2(k_n')^2\tau_g - k_n''k_n\tau_g - 3k_g'k_n\tau_g^2 \\ &+ 3k_gk_n'\tau_g^2 + k_g^2\tau_g^3 + k_n^2\tau_g^3 + k_g'k_g\tau_g' + k_n'k_n\tau_g'\big) = 0 \qquad (4.1.10)\end{aligned}$$

ve

$$\left(k_g' - k_n\tau_g\right)\left(-k_g'k_g^2k_n - k_g'k_n^2 + k_g^3k_n' - k_g''k_n' + k_gk_n'k_n^2 + k_g'k_n'' + k_g^4\tau_g + 2(k_g')^2\tau_g - k_g''k_g\tau_g + 2k_g^2k_n^2\tau_g + k_n^3\tau_g + 2(k_n')^2\tau_g - k_n''k_n\tau_g - 3k_g'k_n\tau_g^2 + 3k_gk_n'\tau_g^2 + k_g^2\tau_g^3 + k_n^2\tau_g^3 + k_g'k_g\tau_g' + k_n'k_n\tau_g'\right) = 0 \qquad (4.1.11)$$

dır.

İspat. (⟹): α eğrisi AW(2)-tipinden ise (4.1.8) eşitliği α üzerinde sağlanır. (4.1.2) ve (4.1.3) denklemleri (4.1.8) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned}
&\left\{\left((k_g')^2 + (k_n')^2 - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2\right)\left(-k_g^3 + k_g'' - k_gk_n^2 - 2k_n'\tau_g - k_g\tau_g^2 - k_n\tau_g'\right)\right\}\vec{g} \\
&+ \left\{\left((k_g')^2 + (k_n')^2 - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2\right)\left(-k_g^2k_n - k_n^2 + k_n'' + 2k_g'\tau_g - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g'\right)\right\}\vec{n} \\
&= -\{(k_g' - k_n\tau_g)(k_g^3k_g' - k_g''k_g' + k_gk_g'k_n^2 + k_g^2k_n'k_n + k_n'k_n^2 - k_n''k_n' + k_g''k_n\tau_g + k_gk_n^2\tau_g - k_gk_n^3\tau_g - k_gk_n''\tau_g - k_gk_g'\tau_g^2 - k_n'k_n\tau_g^2 + k_g'k_n\tau_g' - k_gk_n'\tau_g' - k_g^2\tau_g\tau_g' - k_n^2\tau_g\tau_g')\}\vec{g} \\
&- \left\{\left(k_n' + k_g\tau_g\right)\left(k_g^3k_g' - k_g''k_g' + k_gk_g'k_n^2 + k_g^2k_n'k_n + k_n^2k_n' - k_n''k_n' + k_g''k_n\tau_g + k_gk_n^2\tau_g - k_gk_n^3\tau_g - k_gk_n''\tau_g - k_gk_g'\tau_g^2 - k_n'k_n\tau_g^2 + k_g'k_n\tau_g' - k_gk_n'\tau_g' - k_g^2\tau_g\tau_g' - k_n^2\tau_g\tau_g'\right)\right\}\vec{n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada da gerekli sadeleştirmeler yapılarak (4.1.10) ve (4.1.11) denklemlerine ulaşılır.

(⟸): Tersi tanımdan aşikardır.

Teorem 4.1.4. α eğrisi, 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde α nın AW(3)-tipinden olması için gerek ve yeter şart

$$k_g(k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2) + ((k_g')^2 + (k_n')^2 - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)(-k_g^3 + k_g'' - k_gk_n^2 - 2k_n'\tau_g - k_g\tau_g^2 - k_n\tau_g') = 0$$

ve

$$k_n(k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2) + ((k_g')^2 + (k_n')^2 - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)(-k_g^2k_n - k_n^2 + k_n'' + 2k_g'\tau_g - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g') = 0$$

dır.

İspat. ($\Longrightarrow$): α, AW(3)-tipinden ise (4.1.9) eşitliği sağlanır. (4.1.1) ve (4.1.3) denklemleri (4.1.9) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\vec{g}\{((k_g')^2 + (k_n')^2 - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)(-k_g^3 + k_g'' - k_gk_n^2 - 2k_n'\tau_g \\
&\qquad - k_g\tau_g^2 - k_n\tau_g')\} \\
&\qquad + \vec{n}\{((k_g')^2 + (k_n')^2 - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)(-k_g^2k_n - k_n^2 \\
&\qquad + k_n'' + 2k_g'\tau_g - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g')\} \\
&\qquad = \vec{g}\{-k_g(k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g \\
&\qquad + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)\} + \vec{n}\{-k_n(k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g \\
&\qquad + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)\}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\vec{g}\ ve\ \vec{n}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned}
&k_g(k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2) \\
&\qquad + ((k_g')^2 + (k_n')^2 - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)(-k_g^3 + k_g'' \\
&\qquad - k_gk_n^2 - 2k_n'\tau_g - k_g\tau_g^2 - k_n\tau_g') = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&k_n(k_g^4 - k_g''k_g + 2k_g^2k_n^2 + k_n^3 - k_n''k_n - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2) + ((k_g')^2 \\
&\qquad + (k_n')^2 - 2k_g'k_n\tau_g + 2k_gk_n'\tau_g + k_g^2\tau_g^2 + k_n^2\tau_g^2)(-k_g^2k_n - k_n^2 + k_n'' \\
&\qquad + 2k_g'\tau_g - k_n\tau_g^2 + k_g\tau_g') = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

($\Longleftarrow$): Tersi tanımdan aşikardır.

4.2. AW(k)-Tipinden Mannheim Eğrileri

Son olarak bu bölümde de AW(k)-tipinden eğri kavramını kullanarak bir eğrinin AW(k)-tipinden Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.

Önerme 4.2.1. α eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi ve α_1 eğrisi α eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi olsun. Eğer α eğrisi zayıf AW(2)-tipinden ise, aşağıdaki denklem sağlanır:

$$k_n^3 - k_n'' k_n - 2k_g' k_n \tau_g + k_n^2 \tau_g^2 + \frac{\left(-k_g'' + 2k_n' \tau_g\right)\left(-k_{n_1} + \lambda \tau_g \tau_{g_1}\right)}{-1 + \lambda k_{n_1}} + \frac{\left(2k_n^2 + \tau_g^2\right)\left(-k_{n_1} + \lambda \tau_g \tau_{g_1}\right)^2}{\left(-1 + \lambda k_{n_1}\right)^2} + \frac{\left(-k_{n_1} + \lambda \tau_g \tau_{g_1}\right)^4}{\left(-1 + \lambda k_{n_1}\right)^4} = 0\,.$$

İspat. α ve α_1 eğrileri Mannheim partner eğrileri olduğundan Önerme 3.2.1. den

$$k_g - k_{n_1} = \lambda\,(k_g k_{n_1} - \tau_g \tau_{g_1})$$

eşitliği sağlanır. Bu ifade

$$k_g = \left(\frac{k_{n_1} - \lambda \tau_g \tau_{g_1}}{1 - \lambda k_{n_1}}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin türevleri alınırsa

$$k_g' = \frac{k_{n_1}'(1 - \lambda^2 \tau_g \tau_{g_1}) + \lambda(-1 + \lambda k_{n_1})(\tau_g' \tau_{g_1} + \tau_g \tau_{g_1}')}{(-1 + \lambda k_{n_1})^2}$$

$$k_g'' = \frac{1}{(-1 + \lambda k_{n_1})^3}\Big(-k_{n_1}''(-1 + \lambda k_{n_1})(-1 + \lambda^2 \tau_g \tau_{g_1}) - 2\lambda(-1 + \lambda k_{n_1})\lambda k_{n_1}'(\tau_g' \tau_{g_1} + \tau_g \tau_{g_1}') + k_{n_1}'(2\lambda k_{n_1}'(-1 + \lambda^2 \tau_g \tau_{g_1}) + \lambda^2(\tau_g' \tau_{g_1} + \tau_g \tau_{g_1}') - \lambda^2 \lambda k_{n_1}(\tau_g' \tau_{g_1} + \tau_g \tau_{g_1}'))\Big)$$

bulunur. Kabul edelim ki α eğrisi zayıf AW(2)-tipinden olsun. Bu durumda α eğrisi Önerme 4.1.3. deki eşitliği sağlar. k_g, k_g', k_g'' ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$k_n^3 - k_n'' k_n - 2k_g' k_n \tau_g + k_n^2 \tau_g^2 + \frac{\left(-k_g'' + 2k_n' \tau_g\right)\left(-k_{n_1} + \lambda \tau_g \tau_{g_1}\right)}{-1 + \lambda k_{n_1}} + \frac{\left(2k_n^2 + \tau_g^2\right)\left(-k_{n_1} + \lambda \tau_g \tau_{g_1}\right)^2}{\left(-1 + \lambda k_{n_1}\right)^2} + \frac{\left(-k_{n_1} + \lambda \tau_g \tau_{g_1}\right)^4}{\left(-1 + \lambda k_{n_1}\right)^4} = 0$$

ifadesi elde edilir.

Önerme 4.2.2. α eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi ve α_1 eğrisi α eğrisinin Mannheim partner D-eğrisi olsun. Eğer α eğrisi zayıf AW(3)-tipinden ise, aşağıdaki denklem sağlanır:

$$2k_n k_n' \tau_g + k_n^2 \tau_g' + \frac{(k_n^2 - k_n^3 - k_n'')(k_{n_1} - \lambda\tau_g\tau_{g_1})}{-1+\lambda k_{n_1}} + \frac{\tau_g'(k_{n_1} - \lambda\tau_g\tau_{g_1})^2}{(-1+\lambda k_{n_1})^2}$$
$$+ \frac{1}{(-1+\lambda k_{n_1})^3}\big(-2\tau_g(-k_{n_1} + \lambda\tau_g\tau_{g_1})(k_{n_1}' - \lambda^2 k_{n_1}'\tau_g\tau_{g_1} - \lambda\tau_g'\tau_{g_1}$$
$$+ \lambda^2 k_{n_1}\tau_g'\tau_{g_1} - \lambda\tau_g\tau_{g_1}' + \lambda^2 k_{n_1}\tau_g\tau_{g_1}') + k_n(2\lambda k_{n_1}^{2\prime} + k_{n_1}'' - \lambda k_{n_1}'' k_{n_1}$$
$$- 2\lambda^3(k_{n_1}')^2\tau_g\tau_{g_1} - \lambda^2 k_{n_1}''\tau_g\tau_{g_1} + \lambda^3 k_{n_1}'' k_{n_1}\tau_g\tau_{g_1} - 3\lambda^2 k_{n_1}'\tau_g'\tau_{g_1}$$
$$+ 2\lambda^3 k_{n_1}' k_{n_1}\tau_g'\tau_{g_1} + \lambda^2 k_{n_1}'\lambda k_{n_1}\tau_g'\tau_{g_1} - 3\lambda^2 k_{n_1}'\tau_g\tau_{g_1}' + 2\lambda^3 k_{n_1}' k_{n_1}\tau_g\tau_{g_1}'$$
$$+ \lambda^2 k_{n_1}'\lambda k_{n_1}\tau_g\tau_{g_1}')\big) = 0 \ .$$

İspat. α ve α_1 eğrileri Mannheim partner eğrileri olduğundan Önerme 3.2.1. den

$$k_g - k_{n_1} = \lambda\,(k_g k_{n_1} - \tau_g\tau_{g_1})$$

eşitliği sağlanır. Bu ifade

$$k_g = \left(\frac{k_{n_1} - \lambda\tau_g\tau_{g_1}}{1 - \lambda k_{n_1}}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin türevleri alınırsa

$$k_g' = \frac{k_{n_1}'(1 - \lambda^2\tau_g\tau_{g_1}) + \lambda(-1+\lambda k_{n_1})(\tau_g'\tau_{g_1} + \tau_g\tau_{g_1}')}{(-1+\lambda k_{n_1})^2}$$

$$k_g'' = \frac{1}{(-1+\lambda k_{n_1})^3}(-k_{n_1}''(-1+\lambda k_{n_1})(-1+\lambda^2\tau_g\tau_{g_1}) - 2\lambda(-1+\lambda k_{n_1})\lambda k_{n_1}'(\tau_g'\tau_{g_1} + \tau_g\tau_{g_1}')$$
$$+ k_{n_1}'(2\lambda k_{n_1}'(-1+\lambda^2\tau_g\tau_{g_1}) + \lambda^2(\tau_g'\tau_{g_1} + \tau_g\tau_{g_1}') - \lambda^2\lambda k_{n_1}(\tau_g'\tau_{g_1} + \tau_g\tau_{g_1}')))$$

bulunur. Kabul edelim ki α eğrisi zayıf AW(3)-tipinden olsun. Bu durumda α eğrisi Önerme 4.1.4. deki eşitliği sağlar. k_g, k_g', k_g'' ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&2k_n k_n' \tau_g + k_n^2 \tau_g' + \frac{(k_n^2 - k_n^3 - k_n^{"})(k_{n_1} - \lambda\tau_g\tau_{g_1})}{-1 + \lambda k_{n_1}} + \frac{\tau_g'(k_{n_1} - \lambda\tau_g\tau_{g_1})^2}{(-1 + \lambda k_{n_1})^2} \\
&\quad + \frac{1}{(-1 + \lambda k_{n_1})^3}\big(-2\tau_g(-k_{n_1} + \lambda\tau_g\tau_{g_1})(k_{n_1}' - \lambda^2 k_{n_1}'\tau_g\tau_{g_1} - \lambda\tau_g'\tau_{g_1} \\
&\quad + \lambda^2 k_{n_1}\tau_g'\tau_{g_1} - \lambda\tau_g\tau_{g_1}' + \lambda^2 k_{n_1}\tau_g\tau_{g_1}') + k_n(2\lambda k_{n_1}^{2\prime} + k_{n_1}^{"} - \lambda k_{n_1}^{"} k_{n_1} \\
&\quad - 2\lambda^3 (k_{n_1}')^2\tau_g\tau_{g_1} - \lambda^2 k_{n_1}^{"}\tau_g\tau_{g_1} + \lambda^3 k_{n_1}^{"} k_{n_1}\tau_g\tau_{g_1} - 3\lambda^2 k_{n_1}'\tau_g'\tau_{g_1} \\
&\quad + 2\lambda^3 k_{n_1}' k_{n_1}\tau_g'\tau_{g_1} + \lambda^2 k_{n_1}'\lambda \mathrm{k}_{n_1}\tau_g'\tau_{g_1} - 3\lambda^2 k_{n_1}'\tau_g\tau_{g_1}' + 2\lambda^3 k_{n_1}' k_{n_1}\tau_g\tau_{g_1}' \\
&\quad + \lambda^2 k_{n_1}'\lambda \mathrm{k}_{n_1}\tau_g\tau_{g_1}')\big) = 0
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] **Aslan, K., Özgür, C.,** 1999. Curves and surfaces of AW(k)-type, Geometry and topology of submanifolds, World. Sci. Publishing, River Edge, NJ, **IX** (Valenciennes/ Lyan/Leuven, 1997), 21-26.

[2] **Aslan, K., Güvenç, Ş.,** 2014. Curves of generalized AW(k)-type in Euclidean spaces, International Electronic Journal of Geometry, **7(2)**, 25-36.

[3] **Aslan, K., West, A.,** 1995. Product submanifolds with pointwise 3-planar normal sections, Glasg, Math, J., **37(1)**, 73-81.

[4] **Hacısalihoğlu, H.Hilmi,** 1998. Diferensiyel Geometri I. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

[5] **Hacısalihoğlu, H.Hilmi,** 1994. Diferensiyel Geometri II. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

[6] **Hacısalihoğlu, H.Hilmi,** 2003. Diferensiyel Geometri III. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

[7] **Kahraman, T., Önder, M., Kazaz, M., Uğurlu, H.H.,** 2011. Some Characterizations of Mannheim Partner Curves in Minkowski 3-space E_1^3, Proceedings of the Estoniancademy of Sciences, **60(4)**, 210–220.

[8] **Kazaz, M., Önder, M., Uğurlu, H.H., Kahraman, T.,** 2015, Mannheim Partner D-Curves in Euclidean 3-space E^3, BİSKA - New Trends in Mathematical Sciences, NTMSCI 3, **No. 2**, 24-35.

[9] **Külahcı, M., Bektaş, M., Ergüt, M.**, 2007. Curves AW(k)-type in 3-dimensional null cone, PhysLett A, **371**, 275-77.

[10] **Külahcı, M., Bektaş, M., Ergüt, M.,** 2008. On harmonic curvatures of null curves of AW(k)-type in Lorentzian space. Zeitschrift für Naturforschung, **63a**, 248-252.

[11] **Külahcı, M., Ergüt, M.**, 2009. Betrand curves of AW(k)-type in Lorentzian space. Nonlinear Analysis Teory, Methods&Applications, **70**, 1725-1731.

[12] **Külahcı, M., Bektaş, M., Ergüt, M.**, 2009. On harmonic curvatures of a frenet curve in Lorentzian space, Chaos, Solitons & Fractals, **41**, 1668-1675.

[13] **Liu, H., Wang, F.**, 2008. Mannheim partner curves in 3-space, Journal of Geometry, **88(1-2)**, 120-126.

[14] **O'Neill, B.,** 1966. Elemantery Differential Geometry, Academic Press, New York.

[15] **Orbay, K., Kasap, E., Aydemir, I.,** 2009. Mannheim Offsets of Ruled Surfaces, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 160917.

[16] **Önder, M., Uğurlu, H.H.,** 2014. On the Developable Mannheim Offsets of Time like Ruled Surfaces, Proc. Natl. Acad. Sci.,India, Sect. A Phys. Sci., **84(4)**, 541-548.

[17] **Önder, M., Uğurlu, H.H.,** On the Developable Mannheim offsets of space like ruled surfaces, arXiv:0906.4660v25 [math.DG].

[18] **Ravani, B., Ku, T.S.,** 1991. Bertrand Offsets of ruled and developable surfaces, Comp. Aided Geom. Design, 23(2), 145-152.

[19] **Sabuncuoglu, A.,** 2010. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dagıtım, Ankara.

[20] **Sun, J., Pei, D.,** 2015. Some new properties of null curves on 3-null cone and unit semi-Euclidean 3-speheres, J.Nonlinear Sci. Appl, **8**, 275-284.

[21] **Sun, J., Pei, D.,** 2012. Null cartan bertrand curves of AW(k)-type in the Minkowski 4-space, Phys Lett A, 2230-2233.

[22] **Wang, F., Liu,** H., 2007. Mannheim partner curves in 3-Euclidean space, Mathematics in Practice and Theory, **37(1)**, 141-143.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Elazığ'da doğdu. İlköğrenimini Elazığ 60. Yıl İlköğretim Okulunda tamamladı. Lise öğrenimini Elazığ Gazi Lisesinde tamamladı. 2006 yılında İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve 2010 yılında Matematik Bölümünden mezun oldu. 2012 yılında Elazığ Sosyal Yardımlaşma ve Dayanışma Vakfında Büro Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Hala aynı kurumda büro görevlisi olarak çalışmaktadır. 2014 yılında başladığı Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansını 2016 yılında tamamladı.