

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Çağatay ÇETİNKAYA**

**İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMINDAN SIRA İSTATİSTİKLERİNİN  
MOMENTLERİ**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**ADANA, 2016**

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMINDAN SIRA İSTATİSTİKLERİNİN  
MOMENTLERİ**

**Çağatay ÇETİNKAYA**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

Bu Tez 28/06/2016 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından  
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....  
Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ  
DANIŞMAN

.....  
Doç. Dr. Güzin YÜKSEL  
ÜYE

.....  
Yrd. Doç. Dr. Tuğba YILDIZ  
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.  
**Kod No:**

**Prof. Dr. Mustafa GÖK**  
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMINDAN SIRA İSTATİSTİKLERİNİN  
MOMENTLERİ

Çağatay ÇETİNKAYA

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ  
Yıl: 2016, Sayfa: 105  
Jüri : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ  
: Doç. Dr. Güzin YÜKSEL  
: Yrd. Doç. Dr. Tuğba YILDIZ

Sıra istatistikleri ve sıra istatistiklerinin momentleri istatistiksel tahmin çalışmalarında oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada, finansal verilerin modellenmesinde sıklıkla kullanılan iki yönlü kuvvet dağılımı sıra istatistikleri açısından ele alınmış olup, öncelikle sıra istatistiklerinin tekli momentleri elde edilmiştir. Ardından, bu tekli momentlere ait yineleme bağıntıları, L-momentleri, minimum ve maksimum sıra istatistiklerinin asimptotik dağılımları, sıra istatistiklerinin çarpım momentleri ve bu çarpım momentlerine ait yineleme bağıntıları elde edilmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlardan yararlanılarak iki yönlü kuvvet dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin en iyi lineer yansız tahmin edicileri (BLUE) hesaplanmış ve sıra istatistiklerinin momentleri yardımıyla hesaplanan BLUE değerinin daha etkin sonuçlar verdiği sonucuna ulaşılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Sıra istatistikleri, iki yönlü kuvvet dağılımı, sıra istatistiklerinin momentleri, moment yineleme bağıntıları

## ABSTRACT

### MSc. THESIS

# MOMENTS OF ORDER STATISTICS FROM THE TWO-SIDED POWER DISTRIBUTION

Çağatay ÇETİNKAYA

ÇUKUROVA UNIVERSITY  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF STATISTICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ

Year: 2016, Pages: 105

Jury : Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ

: Assoc. Prof. Dr. Güzin YÜKSEL

: Asst. Prof. Dr. Tuğba YILDIZ

Order statistics and moments of order statistics are widely used in statistical inference studies. In this study, two sided power (TSP) distribution which is used widely for modelling financial data is studied and firstly, single moments of order statistics are obtained. Then, recurrence relations for these single moments, L-moments, domain of attractions of minimum and maximum order statistics, product moments of order statistics and recurrence relations for these product moments are obtained. Finally, best linear unbiased estimators (BLUE) of location and scale parameters of the two-sided power distribution are obtained and observed that the BLUE's which are obtained by using moments of order statistics give more effective results.

**Key Words:** Order statistics, two sided power distribution, moments of order statistics, recurrence relations for moments

## TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında hiçbir yardımı esirgmeden bana desteklerini sunan, bu destekleriyle sürekli olarak mesleğime olan sevgimin daha da artmasını sağlayan ve bana yol gösteren sayın danışmanım Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında elini taşın altına koymaktan çekinmeden, tüm zorluklara rağmen beni bu noktalara taşıyan ve varlıklarından her zaman gurur ve huzur duyduğum annem Leyla ÇETİNKAYA ve babam Hacı Ali ÇETİNKAYA' ya, doğduğu günden beri yaşama sevincim olan kardeşim Başak ÇETİNKAYA' ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tez çalışmam boyunca tüm kahrımı çeken, zor zamanlarımda güçlü kalmamı sağlayan, hayata umutla bakmama sebep olan, birlikte bir ömür sürdürmeye karar verdiğimiz sevgili müstakbel eşim Merve KANDEMİR' e sonsuz teşekkürler.

Ayrıca, hayatta her anıma değer katan, ilkokuldan bugünlere geldiğim süreçlerde üzerimde emekleri bulunan başta değerli ilkokul öğretmenim sayın Durdane ÖZDEN, bana matematiği ilk sevdiren matematik öğretmenim sayın Şaban BORAN başta olmak üzere tüm öğretmenlerime ve hocalarıma, dostluklarını benden esirgemeyen tüm arkadaşlarıma ve akrabalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

## SAYFA

ÖZ .....	I
ABSTRACT .....	II
TEŞEKKÜR .....	III
İÇİNDEKİLER .....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	VIII
1. GİRİŞ .....	1
2. İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI .....	5
2.1. Genel İki Yönlü Kuvvet Dağılımı (TSP) .....	5
2.2. Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı (STSP) .....	7
3. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN MOMENTLERİ .....	11
3.1. Tekli Momentler .....	12
3.1.1. Herhangi Bir Sıra İstatistiğinin Tekli Momenti .....	12
3.1.2. Minimum Sıra İstatistiğinin Tekli Momenti .....	18
3.1.3. Maksimum Bir Sıra İstatistiğinin Tekli Momenti .....	23
3.2. Tekli Momentler için Yineleme Bağlılıları .....	28
3.2.1. Alt Tekli Momentler için Yineleme Bağlılıları .....	29
3.2.2. Üst Tekli Momentler için Yineleme Bağlılıları .....	35
3.3. L-Momentler .....	45
3.4. Minimum ve Maksimum Sıra İstatistiklerinin Asimptotik Dağılımları .....	49
3.3.1. Maksimum Sıra İstatistiklerinin Asimptotik Dağılımları .....	49
3.4.2. Minimum Sıra İstatistiklerinin Asimptotik Dağılımları .....	56
3.5. Sıra İstatistiklerinin Çarpım Momentleri .....	62
3.6. Sıra İstatistiklerinin Çarpım Momentleri için Yineleme Bağlılıları .....	67
3.6.1. Alt Çarpım Momentleri için Yineleme Bağlılıları .....	68
3.6.2. Orta Çarpım Momentleri için Yineleme Bağlılıları .....	78
3.6.3. Üst Çarpım Momentleri için Yineleme Bağlılıları .....	83
4. UYGULAMA .....	91
4.1. Gerçek Veri Uygulaması .....	97

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	101
KAYNAKLAR .....	103
ÖZGEÇMİŞ .....	105



## ÇİZELGELER DİZİNİ

## SAYFA

Çizelge 3.1. STSP dağılımının bazı $\alpha$ ve $\beta$ değerleri için L-varyasyon (L-CV), L-basıklık (L-CS), L-sivrilik (L-CK) değerleri.....	48
Çizelge 3.2. STSP dağılımının maksimum sıra istatistiğinin farklı $\alpha$ , $\beta$ ve $n$ değerlerine göre kesin ve asimptotik beklenen değerleri ve standart hataları.....	54
Çizelge 3.3. STSP dağılımının minimum sıra istatistiğinin farklı $\alpha$ , $\beta$ ve $n$ değerlerine göre kesin ve asimptotik beklenen değerleri ve standart hataları.....	60
Çizelge 4.1. Simetrik STSP dağılımına ait $\mu$ değerinin BLUE katsayıları .....	93
Çizelge 4.2. Simetrik STSP dağılımına ait $\sigma$ değerinin BLUE katsayıları .....	94
Çizelge 4.3. Simetrik STSP dağılımına ait $\mu$ ve $\sigma$ değerinin BLUE değerlerinin varyans ve kovaryansları ( $x\sigma^2$ ).....	95
Çizelge 4.4. $\hat{\alpha} = 3,463$ , $\hat{\beta} = 0,5375$ , $\hat{\mu} = 1,632$ , $\hat{\sigma} = 7,941$ değerleri için STSP dağılımının $r$ . sıra istatistiğinin beklenen değer ve standart hataları.....	97
Çizelge 4.5. Kamyon taşıma verilerinin $\mu$ ve $\sigma$ değerlerinin BLUE katsayıları.....	99



Şekil 2.1. STSP dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonunun çeşitli parameter değerlerine göre grafiği .....6





## 1. GİRİŞ

$X_1, X_2, \dots, X_n$  olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x)$  ve kümülatif dağılım fonksiyonu  $F(x)$  olan,  $n$  birimlik rastgele bir örnekleme temsil etsin.  $X_i$  'lerin artan dizilimleriyle oluşan  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  rastgele değişkenlerine bu rastgele değişkenlerinin sıra istatistikleri denir. Burada  $X_{i:n}$  ler birer istatistiktir ve sıralıdır. Yani  $i$ . sıra istatistiği  $X_{i:n}$ , büyüklüklerine göre dizilmiş  $X_i$  lerin baştan  $i$ . sıradaki elemanıdır.

Sıra istatistikleri, istatistik teorisinde önemli bir yer tutmakta olup istatistiksel tahminleme yöntemlerinde oldukça yaygın olarak kullanılırlar (David ve Nagaraja, 2003; Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja, 1992). Örneğin, parametrelerin en iyi doğrusal yansız tahmin edicilerinin (BLUE) bulunması, bilinmeyen kitle dağılımının tutarlı bir tahmin edicisi olan deneysel dağılım fonksiyonunun oluşturulması, uyumun iyiliğini (goodness of fit) tayin ederken grafiksel bir araç olarak kullanılan Q-Q grafikleri ve parametrik olmayan istatistiksel yöntemler gibi teorik ve uygulamalı istatistiğin birçok alanında sıra istatistikleri önemli bir rol üstlenmektedir. Ayrıca aşağıdaki alanlarda da uygulamalara sahiptir (Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja, 1992);

- Uç değer (outlier) tespiti
- Güvenilirlik analizleri
- İstatistiksel kalite kontrol
- Dayanıklı ölçek tahminleri ( Robust Location Estimates)
- Sansürlü örnekleme
- Materyallerin gücü, dayanıklılığı
- Eşitsizlik ölçümleri
- Uyumun iyiliği
- Sinyal işleme, görüntü işleme
- Doğal afetlerin tahmin edilmesi

- Deprem ölçümleri
- Sigortacılık uygulamaları.

Sıra istatistiklerinin momentleri de istatistiksel tahmin çalışmalarında yaygın olarak kullanılmaktadır (Balakrishnan ve Cohen,1991). Parametrelerin en iyi doğrusal yansız tahmin edicilerinin hesaplanması, en çok olabilirlik yöntemi, L-momentlerin hesaplanması, nokta tahmini, güven aralığının oluşturulması, uyumun iyiliğinin ölçülmesi gibi çalışmalar sıra istatistiklerinin momentlerinin kullanıldığı en yaygın çalışmalar olarak ortaya çıkmaktadır (David ve Nagaraja,2003). Literatürde çeşitli dağılımlardan sıra istatistiklerinin momentlerine dair çalışmalar yaygın olarak yer almaktadır. Son yıllarda yapılan bazı çalışmalara örnek olarak; Topp-Leone (Genç, 2012; MirMostafae, 2014), Gompertz-Makeham (Jodrá, 2013) ve simetrik üçgensel (Nagaraja, 2013) dağılımları verilebilir.

Sıra istatistiklerinin momentlerinin hesaplanması genellikle uzun ve karmaşık işlemler gerektirebilmektedir. Özellikle bazı dağılımların sıra istatistiklerinin momentleri, dağılımın yapısı gereği hesaplama açısından oldukça uzun işlemler gerektirmektedir. Bu durumda moment yineleme bağıntıları önem kazanmaktadır. Herhangi bir moment hesaplanabiliyor ise moment yineleme bağıntıları kullanılarak diğer momentler kolaylıkla elde edilebilir. Genel veya dağılıma özgü olmak üzere elde edilen moment yineleme bağıntıları kullanılarak işlem kolaylığı ve zamandan tasarruf sağlanır (Arnold ve ark, 1992). Bu nedenle literatürde sıra istatistiklerinin momentlerine ait yineleme bağıntıları ile ilgili çalışmalar da oldukça yaygındır. Son yıllarda yapılan çalışmalara örnek olarak, Thomas ve Samuel (2008) tarafından Beta ve Bekçi (2009) tarafından düzgün dağılımlarının sıra istatistiklerinin momentlerine dair yineleme bağıntıları çalışmaları gösterilebilir.

Öte yandan düzgün, üçgensel ve kuvvet dağılımını genelleyen iki yönlü kuvvet dağılımı (Two-sided power, TSP) van Dorp ve Kotz (2002a,2002b) tarafından tanımlanmıştır. Dağılımın özellikleri incelenmiş ve beta dağılımına

alternatif bir dağılım olarak önerilmiştir. Ayrıca dağılımın tepe noktasının sivriliği nedeniyle Laplace dağılımına benzerliği ifade edilmiştir (Kotz ve van Dorp, 2004). Bu dağılımın sıra istatistikleri açısından incelenmesi bu tez konusunun ortaya çıkmasında önemli bir etken olmuştur.

Çalışmada öncelikle TSP dağılımı ve özel durumları tanıtılmıştır. Ardından bu dağılımın özel bir durumu olan standart iki yönlü kuvvet dağılımı (STSP) tanıtılmış ve kullanım alanları belirtilmiştir. Ardından STSP dağılımının sıra istatistiklerinin tekli momentleri elde edilerek bu momentleri elde edebilmek için alternatif formüller sunulmuştur. Devamında bu tekli momentler için elde edilen moment yineleme bağıntıları verilmiştir. Daha sonra STSP dağılımının sıra istatistikleri için L-momentler elde edilerek elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır. Ardından minimum ve maksimum sıra istatistiklerinin asimptotik dağılımları incelenmiş ve asimptotik durumda dağılımın davranışları incelenerek yorumlanmıştır. Bölümün sonunda da özellikle en iyi doğrusal yansız tahmin edicileri (BLUE) hesaplamada kullanılmak üzere STSP dağılımının sıra istatistiklerinin çarpım momentleri ifade edilerek bu momentlere ait moment yineleme bağıntıları elde edilmiştir. Son bölümde ise Kotz ve van Dorp (2004) tarafından en uygun TSP dağılımına uyum gösterdiği belirtilen Hauling Data verisinin en iyi doğrusal yansız tahmin edicileri (BLUE) elde edilen formül ve bağıntılar kullanılarak elde edilmiştir ve sonuçlar yorumlanmıştır.



## 2. İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI

### 2.1. Genel İki Yönlü Kuvvet Dağılımı (TSP)

İki yönlü kuvvet dağılımı (TSP) van Dorp ve Kotz (2002a,2002b) tarafından tanımlanmıştır. Bu dağılım özellikle mühendislikte sıkça kullanılan PERT (Program Evaluation and Review Technique) analizi gibi bir takım risk ve belirsizlik problemlerinin çözümünde, aşırı sivrilige sahip finansal verilerin modellenmesinde beta dağılımının bir alternatifi olarak önerilmekte ve kullanılmaktadır (Kotz ve van Dorp, 2004). Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf)

$$f(x|a, b, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{b-a} \left(\frac{x-a}{\beta-a}\right)^{\alpha-1}, & a < x \leq \beta \\ \frac{\alpha}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-\beta}\right)^{\alpha-1}, & \beta < x \leq m \end{cases} \quad (2.1.)$$

kümülatif dağılım fonksiyonu (kdf)

$$F(x|a, b, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta-a}{b-a} \left(\frac{x-a}{\beta-a}\right)^{\alpha}, & a \leq x \leq \beta \\ 1 - \frac{(b-\beta)}{(b-a)} \left(\frac{b-x}{b-\beta}\right)^{\alpha}, & \beta \leq x \leq m \end{cases} \quad (2.2.)$$

şeklindedir. Bu dağılımda,  $a$  ve  $b$  dağılımın sınırları,  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) şekil (shape) parametresi,  $\beta$  ( $a \leq \beta \leq b$ ) ise yansıma/eşik (reflection/threshold) parametreleri olarak ifade edilir. TSP dağılımı, parametrelerinin özel durumlarına göre üçgensel dağılım, standart iki yönlü kuvvet dağılımı ve düzgün dağılımı içermektedir;

- $a = 0$  ve  $b = 1$  durumunda, standart iki yönlü kuvvet (STSP) dağılımına sahiptir.

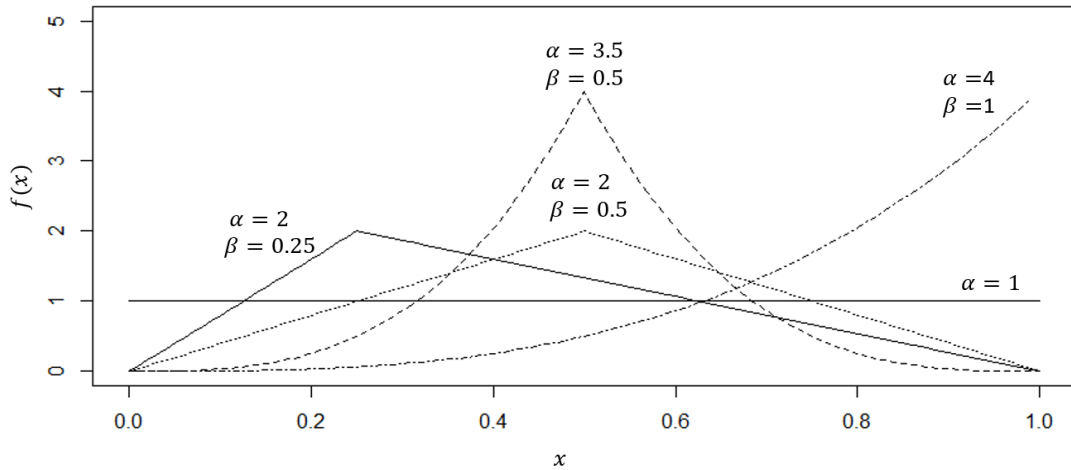
- $\alpha = 1$  durumunda  $[a, b]$  aralığında düzgün dağılıma sahiptir.
- $a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $\alpha = 2$  durumunda üçgensel dağılıma sahiptir.

Dağılımın beklenen değer ve varyansı (2.1.) kullanılarak kolaylıkla aşağıdaki şekillerde elde edilir.

$$E(X) = \frac{a + (\alpha - 1)\beta + b}{\alpha + 1}$$

$$Var(X) = (b - a)^2 \left\{ \frac{\alpha - 2(\alpha - 1) \frac{(\beta - a)(b - \beta)}{(b - a)^2}}{(\alpha + 2)(\alpha + 1)^2} \right\}$$

TSP dağılımının pozitif uzayı da beta dağılımı gibi sonlu bir aralıktır. Fakat TSP dağılımı beta dağılımının aksine kapalı formda bir kümülatif dağılım fonksiyonuna ve kantil fonksiyonuna sahiptir. Bu açıdan bakıldığında TSP dağılımının beta dağılımına göre matematiksel açıdan daha kullanışlı olduğu söylenebilir. Üstelik TSP dağılımı da beta dağılımı gibi şekil olarak esnektir.



Şekil 2.1. STSP dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun çeşitli parametre değerlerine göre grafiği

## 2.2. Standart İki Yönlü Kuvvet Dağılımı (STSP)

TSP dağılımının özel bir durumu ( $a = 0, b = 1$ ) olan standart iki yönlü kuvvet dağılımı (STSP) özellikle pikli (peaked) bir dağılıma sahip finansal verilerin modellenmesinde kullanılır. Örneğin; Laplace dağılımının normal dağılımın pikli bir alternatifi olmasına benzer şekilde, STSP dağılımı da beta dağılımının pikli bir alternatifi olarak önerilmiş ve bu yönde çalışmalar Kotz ve van Dorp (2004) tarafından yapılmıştır. Beta dağılımına benzer şekilde esnek bir yapıya sahip olan STSP dağılımı, pikli histograma sahip bir çok finansal verinin modellenmesinde beta dağılımına alternatif olarak kullanılmaktadır (van Dorp ve Kotz, 2002a). Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} & , \quad 0 < x \leq \beta \\ \alpha \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1} & , \quad \beta \leq x < 1 \end{cases} \quad (2.3.)$$

kümülatif dağılım fonksiyonu (kdf)

$$F(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} & , \quad 0 \leq x \leq \beta \\ 1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha} & , \quad \beta \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.4.)$$

şeklindedir. TSP dağılımında da bahsedildiği üzere burada;  $\alpha$  şekil (shape) parametresi,  $\beta$  yansıma/eşik (reflection/threshold) parametresidir. STSP dağılımı, parametrelerinin farklı değerlerine göre esnek bir yapıya sahiptir;

- Dağılım  $\beta = 0.5$  için  $\alpha$  değeri ne olursa olsun simetriktir.
- $\alpha = 2$  durumunda üçgensel dağılım elde edilir.

- $\alpha = 2$  ,  $\beta = 0.5$  için Nagaraja(2013) nın çalıştığı simetrik üçgensel dağılım elde edilir.
- $\alpha = 1$  durumunda  $[0,1]$  aralığında düzgün dağılım elde edilir.
- $\beta = 1$  durumunda güç fonksiyonu dağılımı elde edilir.

TSP dağılımını sıra istatistikleri yönünden çalışmak dağılımın sınırlarını belirten  $a$  ve  $b$  parametrelerinin varlığı nedeniyle oldukça zor ve karmaşık bir hal almaktadır. Fakat bu dağılımın özel bir durumu ( $a = 0$  ve  $b = 1$ ) olan STSP dağılımı matematiksel yapısı açısından daha kullanışlıdır. Bu nedenle bu çalışmada TSP dağılımı, özel durumu STSP dağılımı üzerinden çalışılmıştır.

$$X \sim STSP(y|\alpha, \beta) \text{ ve } Y \sim TSP(x|a, b, \alpha, \beta) \text{ olmak üzere;} \\ Y = (b - a)X + a, \quad b > a \quad (2.5.)$$

olduğundan (Kotz ve van Dorp,2004) STSP dağılımı için elde edilen dağılımsal sonuçlar kolaylıkla TSP dağılımı için de elde edilebilir.

Öncelikle;  $X_1, X_2, \dots, X_n$  STSP dağılımından alınan rastgele bir örneklem olsun.  $X_i$  lerin artan sırada dizilimleriyle oluşan  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  rastgele değişkenleri de STSP dağılımının sıra istatistikleri olmak üzere, STSP dağılımının herhangi bir sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{r:n}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha n!}{(n-r)!(r-1)!} \beta^{r(1-\alpha)} x^{\alpha r-1} \left[1 - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]^{n-r}, & 0 < x \leq \beta \\ \frac{\alpha n!}{(n-r)!(r-1)!} (1-\beta)^{(n-r+1)(1-\alpha)} (1-x)^{\alpha(n-r+1)-1} \\ \quad * \left[1 - (1-\beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha\right]^{r-1}, & \beta \leq x < 1 \end{cases} \quad (2.6.)$$

olarak elde edilir. STSP dağılımının sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak, sıra istatistiklerinin tek ve çarpım momentleri, yineleme bağıntıları ve elde edilen bu sonuçların bir uygulaması 3. ve 4. bölümlerde verilmiştir.





### 3. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN MOMENTLERİ

Sıra istatistiklerinin momentleri istatistiksel tahmin çalışmalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Parametrelerin en iyi doğrusal yansız tahmin edicilerinin hesaplanması, en çok olabilirlik yöntemi, L-momentlerin hesaplanması, nokta tahmini, güven aralığının oluşturulması, uyumun iyiliğinin ölçülmesi gibi çalışmalar sıra istatistiklerinin momentlerinin kullanıldığı en yaygın çalışmalar olarak ortaya çıkmaktadır.

Herhangi  $r$ . sıra istatistiğinin  $k$ . momenti

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{r:n}(x) dx \quad (3.1.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir. Ayrıca  $0 < x < 1$  durumunda aşağıda verilen (3.2.) bağıntısı kullanılarak da  $r$ . sıra istatistiğinin  $k$ . momenti hesaplanabilir.

$$\mu_{r:n}^{(k)} = k \int_0^1 x^{k-1} [1 - F_{r:n}(x)] dx \quad (3.2.)$$

$$\begin{aligned} \mu_{r:n}^{(k)} &= k \int_0^1 t^{k-1} dt - k \int_0^1 t^{k-1} F_{r:n}(t) dt \\ &= 1 - \left( t^k F_{r:n}(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 t^k f_{r:n}(t) dt \right) = \int_0^1 t^k f_{r:n}(t) dt = \mu_{r:n}^{(k)} \end{aligned}$$

Ayrıca, herhangi  $r$ . ve  $s$ . sıra istatistiğinin  $k$ . mertebeli çarpım momenti ise,

$$\mu_{r,s:n}^{(k,l)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^l f_{r,s:n}(x, y) dx dy \quad (3.3.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. Burada  $x$ ;  $r$ . sıradaki gözlem ve  $y$ ;  $s$ . sıradaki gözlemdir.

Standart iki yönlü kuvvet dağılımının (STSP) sıra istatistiklerinin tek ve çarpım momentleri (3.1.), (3.2.) ve (3.3.) eşitlikleri kullanılarak elde edilmiş ve bu momentlere ait yineleme bağıntıları da dağılımın özelliklerine uygun olarak ifade edilmiştir.

### 3.1. Tekli Momentler

#### 3.1.1. Herhangi Bir Sıra İstatistiğinin Tekli Momenti

Standart iki yönlü kuvvet dağılımının herhangi  $r$ . ( $1 \leq r \leq n$ ) sıra istatistiğinin  $k$  mertebeli tekli momentini (3.1.) eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \mu_{r,n}^{(k)} &= \int_0^1 x^k f_{r,n}(x) dx = C_{r,n} \int_0^1 x^k [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r} f(x) dx \\ &= C_{r,n} \int_0^\beta x^k \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right]^{r-1} \left[ 1 - \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right]^{n-r} \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx \\ &+ C_{r,n} \int_\beta^1 x^k \left[ 1 - (1 - \beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^\alpha \right]^{r-1} \left[ (1 - \beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^\alpha \right]^{n-r} \\ &\quad * \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx \end{aligned} \quad (3.4.)$$

olarak elde edilir. İki integralin toplamı olarak elde edilen bu eşitliğin ilk parçası  $I_1$  ve ikinci parçası  $I_2$  olarak aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$I_1 = \int_0^\beta x^k \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right]^{r-1} \left[ 1 - \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^\alpha \right]^{n-r} \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx$$

$$I_2 = \int_{\beta}^1 x^k \left[ 1 - (1 - \beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{r-1} * \left[ (1 - \beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-r} \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx \quad (3.5.)$$

Dolayısıyla, standart iki yönlü kuvvet dağılımının herhangi bir herhangi  $r$ . sıra istatistiğinin  $k$  mertebeli tekli momenti

$$\mu_{r:n}^{(k)} = C_{r,n} (I_1 + I_2) \quad (3.6.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir. Bu eşitlikte yer alan  $I_1$  ve  $I_2$  integrallerinin çözümü birtakım matematiksel işlemler uygulanarak elde edilen bağıntılar sayesinde farklı yollarla hesaplanabilir.

İlk olarak,  $I_1$  integralinde,  $\beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} = u$  ve  $\left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx = du$  olmak üzere değişken değiştirme işlemi uygulandığında,

$$I_1 = \int_0^{\beta} u^{k/\alpha} \beta^{k-k/\alpha} u^{r-1} (1-u)^{n-r} du = \beta^{k-k/\alpha} \int_0^{\beta} u^{\frac{k}{\alpha}+r-1} (1-u)^{n-r} du \quad (3.7.)$$

olarak elde edilir. Bu integralin çözümü, tamamlanmamış beta fonksiyonundan yararlanılarak,

$$\int_0^{\beta} u^{\frac{k}{\alpha}+r-1} (1-u)^{n-r} du = B \left( \beta; \frac{k}{\alpha} + r, n - r + 1 \right)$$

olmak üzere

$$I_1 = \beta^{k-k/\alpha} B\left(\beta; \frac{k}{\alpha} + r, n - r + 1\right) \quad (3.8.)$$

olarak elde edilir. Bir başka alternatif çözüm olarak, (3.5.) eşitliğinde  $I_1$  integralinde yer alan  $\left[1 - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]^{n-r}$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa,

$$\left[1 - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]^{n-r} = \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \beta^j \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha j}$$

olmak üzere,

$$I_1 = \alpha \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \beta^{j-\alpha j+(1-\alpha)(r-1)-(\alpha-1)} \int_0^\beta x^{\alpha j+k+\alpha(r-1)+\alpha-1} dx$$

$$I_1 = \alpha \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \frac{\beta^{j+r+k}}{\alpha(j+r)+k} \quad (3.9.)$$

olarak da elde edilebilir. Bir başka alternatif çözüm ise (3.7.) eşitliğinde değişken değiştirme yöntemi kullanılarak elde edilebilir. (3.7.) eşitliğinde  $1 - t = u$  dönüşümü uygulandığında,

$$I_1 = \beta^{k-k/\alpha} \int_0^b (1-t)^{\frac{k}{\alpha}+r-1} t^{n-r} dt$$

olarak elde edilir. Burada  $(1-t)^{\frac{k}{\alpha}+r-1}$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa,

$$(1-t)^{\frac{k}{\alpha}+r-1} = \sum_{j=0}^{\frac{k}{\alpha}+r-1} \binom{\frac{k}{\alpha}+r-1}{j} (-1)^j t^j$$

olmak üzere,

$$I_1 = \beta^{k-k/\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{k}{\alpha}+r-1} \binom{\frac{k}{\alpha}+r-1}{j} (-1)^j \int_0^b t^{j+n-r} dt$$

$$I_1 = \beta^{k-k/\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{k}{\alpha}+r-1} \binom{\frac{k}{\alpha}+r-1}{j} (-1)^j \frac{1 - (1-\beta)^{n-r+j+1}}{n-r+j+1}, \binom{k}{\alpha} \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.10.)$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak;  $I_1$  integrali (3.8.), (3.9.), (3.10.) eşitliklerinden herhangi biri kullanılarak üç farklı şekilde hesaplanabilir.

$I_2$  integralinin uygun bir çözümü ise (3.5.) eşitliğinde  $(1-\beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha = u$  dönüşümü ile elde edilir. Bu dönüşüm yapılarak;

$$I_2 = \int_{\beta}^1 \left(1 - u^{1/\alpha} (1-\beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^k (1-u)^{r-1} u^{n-r} du$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte  $\left(1 - u^{1/\alpha} (1-\beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^k$  ifadesine binom açılımı uygulandığında,

$$\left(1 - u^{1/\alpha} (1-\beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j u^{j/\alpha} (1-\beta)^{j-j/\alpha}$$

olmak üzere  $I_2$  ;

$$I_2 = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (1-\beta)^{j-\frac{j}{\alpha}} B\left(1-\beta; \frac{j}{\alpha} + n - r + 1, r\right) \quad (3.11.)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (3.5.) eşitliğinde  $\left[1 - (1-\beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha\right]^{r-1}$  ifadesine binom açılımı uygulanarak;

$$\left[1 - (1-\beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha\right]^{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^i (1-\beta)^{i(1-\alpha)} (1-x)^{i\alpha}$$

olmak üzere

$$I_2 = \alpha \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^i (1-\beta)^{(1-\alpha)(i+1+n-r)} * \int_{\beta}^1 x^k (1-x)^{\alpha(i+n-r+1)-1} dx \quad (3.12.)$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^i (1-\beta)^{(1-\alpha)(i+1+n-r)} * B(1-\beta; \alpha(i+n-r+1), k+1) \quad (3.13.)$$

olarak da elde edilir. Alternatif bir başka çözüm için (3.12.) eşitliğinde  $(1-x)^{\alpha(i+n-r+1)-1}$  ifadesine binom açılımı uygulanarak,  $C = \alpha(i+n-r+1) - 1$  ve

$$(1-x)^{\alpha(i+n-r+1)-1} = (1-x)^c = \sum_{j=0}^c \binom{c}{j} (-1)^j x^j$$

olmak üzere;

$$I_2 = \alpha \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^c \binom{r-1}{i} \binom{c}{j} (-1)^{i/j} (1-\beta)^{(1-\alpha)(i+1+n-r)} \int_{\beta}^1 x^{k+j} dx$$

$$I_2 = \alpha \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^c \binom{r-1}{i} \binom{c}{j} (-1)^{i/j} (1-\beta)^{(1-\alpha)(i+1+n-r)} \frac{1-\beta^{k+j+1}}{k+j+1}$$

(3.14.)

olarak elde edilir.

Yukarıda elde edilen bu sonuçlar yardımıyla standart iki yönlü kuvvet dağılımının  $r$ . sıra istatistiğinin  $k$ . momenti sonuçlar (3.6.) da yerine koyularak hesaplanabilir.

Standart iki yönlü kuvvet dağılımının herhangi bir sıra istatistiğinin tekli momenti  $I_1$  ve  $I_2$  integrallerinin çözümü için yukarıda elde edilen tüm formüller kullanılarak hesaplanabilir. Fakat bu bağıntılara bakıldığında, bazılarının hesaplama açısından kolay olmadığı görülmektedir. Karşılaştırma yapıldığında,  $I_1$  için tamamlanmamış beta fonksiyonunu içeren (3.8.) eşitliği hesaplama açısından diğerlerinden daha kolaydır. Birçok istatistiksel yazılım ve hesaplama araçları kullanarak tamamlanmamış beta fonksiyonunun değeri kolayca hesaplanabilir. Ayrıca  $I_2$  için de  $k$ ' ya bağlı toplamı içeren (3.11.) formülü hesaplama kolaylığı açısından diğer iki seçeneğe göre daha kolaydır. Bu nedenlerle, (3.6.) eşitliğinin değerini hesaplamak için en uygun çözüm;

$$\mu_{r:n}^{(k)} = C_{r,n} \left[ \beta^{k-\frac{k}{\alpha}} B \left( \beta; \frac{k}{\alpha} + r, n - r + 1 \right) \right]$$

$$+ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (1-\beta)^{j-\frac{j}{\alpha}} B\left(1-\beta; \frac{j}{\alpha} + n - r + 1, r\right) \Bigg] \quad (3.15.)$$

olarak önerilir.

Benzer işlemler uygulanarak standart iki yönlü kuvvet dağılımının örneklem minimum ve maksimum sıra istatistiklerinin momentleri de elde edilmiştir.

### 3.1.2. Minimum Sıra İstatistiğinin Tekli Momenti

(3.1.) ve (3.2.) eşitliklerinde  $r = 1$  olarak alındığında standart iki yönlü kuvvet dağılımının minimum sıra istatistiğinin momentleri;

$$\begin{aligned} \mu_{1:n}^{(k)} &= \int_0^1 x^k f_{1:n}(x) dx = \int_0^1 x^k n [1 - F(x)]^{n-1} dx \\ \mu_{1:n}^{(k)} &= n \left[ \int_0^\beta x^k \left[1 - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]^{n-1} \alpha \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_\beta^1 x^k \left[(1-\beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha\right]^{n-1} \alpha \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1} dx \right] \end{aligned} \quad (3.16.)$$

olarak elde edilir. (3.16.) eşitliğinde yer alan integralleri bir önceki bölümdeki gibi benzer şekilde  $I_1$  ve  $I_2$  olarak parçalayıp bu integrallerin çözümü için birtakım matematiksel işlemler uygulandığında hesaplama açısından alternatif formüller elde edilmiştir.

$$I_1 = \int_0^\beta x^k \left[1 - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]^{n-1} \alpha \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} dx$$

$$I_2 = \int_{\beta}^1 x^k \left[ (1 - \beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1} \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx \quad (3.17.)$$

olmak üzere,

$$\mu_{1:n}^{(k)} = n(I_1 + I_2) \quad (3.18.)$$

olarak ifade edilir.

Öncelikle  $I_1$  integralinin çözümü için  $\beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} = u$  ve  $\alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx = du$  olmak üzere değişken değiştirme yöntemi kullanıldığında,

$$I_1 = \int_0^{\beta} u^{\frac{k}{\alpha}} \beta^{k-\frac{k}{\alpha}} (1-u)^{n-1} du = \beta^{k-\frac{k}{\alpha}} \int_0^{\beta} u^{\frac{k}{\alpha}} (1-u)^{n-1} du \quad (3.19.)$$

ve

$$\int_0^{\beta} u^{\frac{k}{\alpha}} (1-u)^{n-1} du = B\left(\beta; \frac{k}{\alpha} + 1, n\right)$$

olmak üzere;

$$I_1 = \beta^{k-\frac{k}{\alpha}} B\left(\beta; \frac{k}{\alpha} + 1, n\right) \quad (3.20.)$$

olarak elde edilir. Bir başka çözüm yolu olarak,  $I_1$  integralinde  $\left[ 1 - \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1}$  ifadesine binom açılımı uygulanarak;

$$\left[1 - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \beta^j \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha j}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \beta^{j-j\alpha} \int_0^\beta \frac{x^{\alpha j+k+\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}} dx \\ &= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \frac{\beta^{j+k+1}}{\alpha(j+1)+k} \end{aligned} \quad (3.21.)$$

olarak elde edilir. Bir diğer çözüm yolu olarak da, (3.19.) eşitliğinde  $t = (1 - u)$  dönüşümü yapılarak,

$$I_1 = \beta^{k-\frac{k}{\alpha}} \int_0^\beta u^{\frac{k}{\alpha}} (1-u)^{n-1} du = \beta^{k-\frac{k}{\alpha}} \int_{1-\beta}^1 (1-t)^{\frac{k}{\alpha}} (t)^{n-1} dt$$

şekilde ifade edilir. Bu eşitlikte  $(1-t)^{\frac{k}{\alpha}}$  ifadesine binom açılımı uygularsak;

$$(1-t)^{\frac{k}{\alpha}} = \sum_{j=0}^{k/\alpha} \binom{k/\alpha}{j} (-1)^j t^j$$

olmak üzere

$$I_1 = \beta^{k-\frac{k}{\alpha}} \sum_{j=0}^{k/\alpha} \binom{k/\alpha}{j} (-1)^j \int_{1-\beta}^1 t^{j+n-1} dt$$

$$I_1 = \beta^{k-\frac{k}{\alpha}} \sum_{j=0}^{k/\alpha} \binom{k/\alpha}{j} (-1)^j \frac{1 - (1-\beta)^{j+n}}{j+n}, \frac{k}{\alpha} \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.22.)$$

olarak ifade edilir. Benzer işlemler yapılarak  $I_2$  integrali için de uygun bağıntılar elde edilir.

Öncelikle  $I_2$  integrali

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\beta}^1 x^k \left[ (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1} \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx \\ &= \alpha (1-\beta)^{(1-\alpha)(n-1)-(\alpha-1)} \int_{\beta}^1 x^k (1-x)^{\alpha(n-1)+\alpha-1} dx \\ &= \alpha (1-\beta)^{n(1-\alpha)} \int_{\beta}^1 x^k (1-x)^{\alpha n-1} dx \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilerek,  $1-x = u$  dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^1 x^k (1-x)^{\alpha n-1} dx &= \int_0^{1-\beta} (1-u)^k u^{\alpha n-1} du \\ &= B(1-\beta; \alpha n, k+1) \end{aligned} \quad (3.23.)$$

olmak üzere;

$$I_2 = \alpha (1-\beta)^{n(1-\alpha)} B(1-\beta; \alpha n, k+1) \quad (3.24.)$$

olarak elde edilir. Alternatif olarak  $I_2$  integralinde  $(1 - \beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha = u$  ve  $\alpha \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha-1} dx = du$  olmak üzere değişken değiştirme yöntemi uygulanırsa;

$$I_2 = \int_0^{1-\beta} \left(1 - u^{\frac{1}{\alpha}}(1-\beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^k u^{n-1} du$$

olarak elde edilir. Burada  $\left(1 - u^{\frac{1}{\alpha}}(1-\beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^k$  ifadesine binom açılımı uygularsak;

$$\left(1 - u^{\frac{1}{\alpha}}(1-\beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j u^{j/\alpha} (1-\beta)^{j-j/\alpha}$$

olmak üzere  $I_2$ ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (1-\beta)^{j-j/\alpha} \int_0^{1-\beta} u^{\frac{j}{\alpha}+n-1} du \\ I_2 &= \alpha \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \frac{(1-\beta)^{j+n}}{j+\alpha n} = \alpha(1-\beta)^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \frac{(1-\beta)^j}{j+\alpha n} \\ I_2 &= \alpha(1-\beta)^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \frac{(1-\beta)^j}{j+\alpha n} \end{aligned} \quad (3.25.)$$

olarak elde edilir. Bir diğer alternatif çözüm ise (3.23.) eşitliğinde  $(1-x)^{\alpha n-1}$  ifadesine binom açılımı uygulanarak;

$$(1-x)^{\alpha n-1} = \sum_{j=0}^{\alpha n-1} \binom{\alpha n-1}{j} (-1)^j x^j \quad , (\alpha n-1) \in \mathbb{Z}^+$$

olmak üzere

$$I_2 = \alpha(1 - \beta)^{n(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{\alpha n - 1} \binom{\alpha n - 1}{j} (-1)^j \int_{\beta}^1 x^{k+j} dx$$

$$I_2 = \alpha(1 - \beta)^{n(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{\alpha n - 1} \binom{\alpha n - 1}{j} (-1)^j \frac{1 - \beta^{j+k+1}}{j + k + 1} \quad (3.26.)$$

olarak elde edilir. Herhangi bir sıra istatistiğinin momentini hesaplamak için yaptığımız yorumlara benzer olarak minimum sıra istatistiğinin momenti için elde edilen bağıntılara baktığımızda ise hesaplama kolaylığı açısından en uygun çözümün (3.20.) ve (3.24.) eşitliklerinin olduğu söylenebilir. Bu durumda STSP dağılımının minimum sıra istatistiğinin k. momentini en kolay şekilde;

$$\mu_{1:n}^{(k)} = n \left[ \beta^{k - \frac{k}{\alpha}} B\left(\beta; \frac{k}{\alpha} + 1, n\right) + \alpha(1 - \beta)^{n(1-\alpha)} B(1 - \beta; \alpha n, k + 1) \right] \quad (3.27.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir.

### 3.1.3. Maksimum Sıra İstatistiğinin Tekli Momenti

Benzer işlemler yapılarak standart iki yönlü kuvvet dağılımının maksimum sıra istatistiğinin momenti de hesaplanabilir.

(3.1.) ve (3.2.) eşitliklerinde  $r = n$  olarak alındığında standart iki yönlü kuvvet dağılımının maksimum sıra istatistiğinin momenti;

$$\mu_{n:n}^{(k)} = \int_0^1 x^k f_{n:n}(x) dx = n \int_0^1 x^k [F(x)]^{n-1} f(x) dx$$

$$\begin{aligned}\mu_{n:n}^{(k)} &= n \int_0^{\beta} x^k \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1} \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx \\ &\quad + n \int_{\beta}^1 x^k \left[ 1 - (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1} \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx\end{aligned}\quad (3.28.)$$

eşitliği kullanılarak elde edilir. Bu eşitlikte yer alan integraller önceki iki duruma benzer şekilde  $I_1$  ve  $I_2$  olarak adlandırıp aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\beta} x^k \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1} \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx \\ I_2 &= \int_{\beta}^1 x^k \left[ 1 - (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1} \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx\end{aligned}\quad (3.29.)$$

olmak üzere, standart iki yönlü kuvvet dağılımının minimum sıra istatistiğinin momentini;

$\mu_{n:n}^{(k)} = n[I_1 + I_2]$  olarak ifade edilir. Öncelikle  $I_1$  eşitliği;

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\beta} x^k \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1} \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx \\ I_1 &= \beta^{(n-1)(1-\alpha) - (\alpha-1)} \alpha \int_0^{\beta} x^{\alpha n - \alpha + \alpha - 1 + k} dx \\ I_1 &= \frac{\alpha \beta^{k+n}}{k+n\alpha}\end{aligned}\quad (3.30.)$$

olarak elde edilir.  $I_2$  eşitliği için bir takım matematiksel işlemler yapılarak

$$I_2 = \int_{\beta}^1 x^k \left[ 1 - (1 - \beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-1} \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx$$

ifadesinde  $(1 - \beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} = u$ ,  $-\alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx = du$  ve  $x = 1 - u^{1/\alpha}(1 - \beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$  olmak üzere ters dönüşüm uygulanarak;

$$I_2 = \int_0^{1-\beta} \left( 1 - u^{1/\alpha}(1 - \beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right)^k (1 - u)^{n-1} du$$

olarak elde edilir. Bu integralde yer alan  $\left( 1 - u^{1/\alpha}(1 - \beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right)^k$  ifadesine binom açılımı uygulandığında;

$$\left( 1 - u^{1/\alpha}(1 - \beta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j u^{j/\alpha} (1 - \beta)^{j-j/\alpha}$$

olduğundan dolayı

$$I_2 = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (1 - \beta)^{j-j/\alpha} \int_0^{1-\beta} u^{j/\alpha} (1 - u)^{n-1} du$$

$$I_2 = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (1 - \beta)^{j-\frac{j}{\alpha}} B\left(1 - \beta; \frac{j}{\alpha} + 1, n\right) \quad (3.31.)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla standart iki yönlü kuvvet dağılımının maksimum sıra istatistiğinin momentleri;

$$\mu_{n:n}^{(k)} = n \left[ \frac{\alpha \beta^{k+n}}{k+n\alpha} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (1-\beta)^{j-\frac{j}{\alpha}} B(1-\beta; \frac{j}{\alpha} + 1, n) \right] \quad (3.32.)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir. Bir başka alternatif çözüm ise (3.2.) bağıntısı kullanılarak elde edilir. Bu bağıntıda  $r = n$  alınır ;

$$\begin{aligned} \mu_{n:n}^{(k)} &= k \int_0^1 x^{k-1} [1 - F_{n:n}(x)] dx = k \int_0^1 x^{k-1} [1 - [F(x)]^n] dx \\ \mu_{n:n}^{(k)} &= k \left[ \int_0^1 x^{k-1} dx - \int_0^1 x^{k-1} [F(x)]^n dx \right] = 1 - k \int_0^1 x^{k-1} [F(x)]^n dx \\ \mu_{n:n}^{(k)} &= 1 - k \left[ \int_0^{\beta} x^{k-1} \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^n dx + \int_{\beta}^1 x^{k-1} \left[ 1 - (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^n dx \right] \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Burada ;

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\beta} x^{k-1} \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^n dx \\ I_2 &= \int_{\beta}^1 x^{k-1} \left[ 1 - (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^n dx \end{aligned}$$

olmak üzere matematiksel işlemler yapılırsa;

$$I_1 = \int_0^{\beta} x^{k-1} \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^n dx = \beta^{n(1-\alpha)} \int_0^{\beta} x^{\alpha n + k - 1} dx = \frac{\beta^{n+k}}{\alpha n + k}$$

olarak elde edilir.  $I_2$  ise  $\left[1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha\right]^n$  ifadesine binom açılımı uygulanarak;

$$\left[1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha\right]^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (1 - \beta)^{j(1-\alpha)} (1-x)^{\alpha n}$$

olmak üzere

$$I_2 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (1 - \beta)^{j(1-\alpha)} \int_{\beta}^1 x^{k-1} (1-x)^{\alpha n} dx$$

şeklinde elde edilir. Burada  $(1-x) = u$  dönüşümü yapılarak  $I_2$  integrali için uygun çözüm;

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (1 - \beta)^{j(1-\alpha)} \int_{\beta}^1 u^{\alpha n} (1-u)^{k-1} du \\ I_2 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (1 - \beta)^{j(1-\alpha)} B(1 - \beta; \alpha n + 1, k) \end{aligned} \quad (3.33)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla  $\mu_{n:n}^{(k)}$  için alternatif bir çözüm ise;

$$\mu_{n:n}^{(k)} = 1 - k \left[ \frac{\beta^{n+k}}{\alpha n + k} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (1 - \beta)^{j(1-\alpha)} B(1 - \beta; \alpha n + 1, k) \right] \quad (3.34.)$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak (3.32.) ve (3.34.) eşitliklerinden herhangi biri kullanılarak standart iki yönlü kuvvet dağılımının maksimum sıra istatistiğinin momenti hesaplanabilir. (3.32.) hesaplama kolaylığı sağlaması açısından daha kullanışlıdır. Her iki bağıntı kıyaslandığında  $k$  ya bağlı bir toplam  $n$  e bağlı bir toplamdan daha kolay hesaplanabilir. Çünkü büyük örneklem için bu formül uzun işlemler gerektirecektir. Bu nedenle (3.32.) hesaplama kolaylığı açısından daha uygun bir çözümdür.

Özet olarak, bu bölümde standart iki yönlü kuvvet dağılımının tekli momentleri hesaplanmıştır. Bu momentlerin hesaplanması için farklı formüller elde edilerek bu formüllerin kullanılabilirliği tartışılmıştır. Fakat bu momentleri ayrı ayrı hesaplamak zaman ihtiyacını ve işlem zorluğunu beraberinde getirmektedir. Dolayısıyla muhtemel moment yineleme bağıntıları hesaplanarak, bir alt moment biliniyorken bir üst momenti hesaplamak mümkün hale gelmektedir.

### 3.2. Tekli Momentler için Yineleme Bağıntıları

STSP dağılımı, iki parçalı bir dağılım olduğundan bu dağılımla çalışmak zordur. Bu nedenle STSP dağılımı iki parça olarak değerlendirilerek bu parçalar üzerinden sonuçlar elde edilmiştir. Dolayısıyla, dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_{STSP}$  ve dağılım fonksiyonu  $F_{STSP}$ ;

$$f_{STSP} = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases} \quad F_{STSP} = \begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases} \quad \text{olmak üzere, (2.3.) ve (2.4.) 'den}$$

$$f_1 = \alpha F_1/x \quad \text{ve} \quad f_2 = (1 - F_2)/(1 - x) \quad (3.2.1.)$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla (3.1.) eşitliği;

$$\begin{aligned} \mu_{r:n}^{(k)} &= C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^{r-1} (1 - F_1)^{n-r} dx \\ &\quad + C_{r,n} \int_{\beta}^1 x^k f_2 F_2^{r-1} (1 - F_2)^{n-r} dx \end{aligned} \quad (3.2.2.)$$

olarak ifade edilir. Burada  $f_1$ ,  $(F_1)$ ,  $f_2$ ,  $(F_2)$  tam bir yoğunluk (dağılım) fonksiyonu olmadığı için her bir integral tam bir moment ifade etmez. Bu nedenle ilk integral  $r$ . sıra istatistiğinin  $k$ . alt momenti ve ikinci integral ise  $r$ . sıra istatistiğinin  $k$ . üst momenti olarak adlandırılmış ve her biri için sırasıyla;  ${}_l\mu_{r,n}^{(k)}$  ve  ${}_u\mu_{r,n}^{(k)}$  gösterimleri kullanılmıştır. Ardından bu kısmi momentler için moment yineleme bağıntıları elde edilmiştir.

### 3.2.1. Alt Tekli Momentler için Yineleme Bağıntıları

(3.2.2.) eşitliğinde ilk integral alt tekli moment olarak adlandırılmıştır. Bu alt momente ait yineleme bağıntıları ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$${}_l\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^{r-1} (1 - F_1)^{n-r} dx \quad (3.2.3.)$$

alt tekli moment olmak üzere, bu ifade üzerinde çeşitli matematiksel işlemler yapılarak bir takım yineleme bağıntıları elde edilir.

**Teorem 3.1.1.**  $1 \leq r \leq n - 1$  ise;

$$(k + \alpha r) {}_l\mu_{r,n}^{(k)} = \alpha C_{r,n} \beta^{r+k} (1 - \beta)^{n-r} + \alpha r {}_l\mu_{r+1,n}^{(k)} \quad (3.2.4.)$$

**İspat;**

İlk olarak, (3.2.3.) eşitliğinde (3.2.1.) özel durumu kullanılarak ( $f_1 = \alpha F_1/x$ ) eşitlik

$$\begin{aligned} \mu_{r,n}^{(k)} &= C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^{r-1} (1 - F_1)^{n-r} dx \\ \mu_{r,n}^{(k)} &= \alpha C_{r,n} \int_0^{\beta} x^{k-1} F_1^r (1 - F_1)^{n-r} dx \end{aligned} \quad (3.2.5.)$$

olarak elde edilir. (3.2.5.) ifadesinde  $u = F_1^r (1 - F_1)^{n-r}$  ve  $dv = x^{k-1} dx$  olarak kısmi integrasyon uygulandığında;

$$v = x^k/k \text{ ve } du = [rF_1^{r-1}(1 - F_1)^{n-r} f_1 - (n - r)F_1^r(1 - F_1)^{n-r-1} f_1] dx$$

olmak üzere; (3.2.5.) eşitliği;

$$\begin{aligned} \mu_{r,n}^{(k)} &= \frac{\alpha C_{r,n} x^k F_1^r (1 - F_1)^{n-r}}{k} \Big|_0^{\beta} - \frac{\alpha r}{k} C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^{r-1} (1 - F_1)^{n-r} dx \\ &\quad + \frac{\alpha(n - r)}{k} C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^r (1 - F_1)^{n-r-1} dx \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^{r-1} (1 - F_1)^{n-r} dx &= \mu_{r,n}^{(k)} \\ C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^r (1 - F_1)^{n-r-1} dx &= \frac{r}{n - r} \mu_{r+1,n}^{(k)} \end{aligned}$$

olmak üzere, bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine yazılıp sadeleştirmeler yapıldığında (3.2.4.) bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.1.1 yineleme bağıntısı kullanılarak, herhangi bir alt moment hesaplanabildi takdirde diğer tüm alt momentler bu yineleme bağıntısı kullanılarak elde edilebilir.

**Teorem 3.1.2.**  $1 \leq r \leq n - 1$  ise;

$$\mu_{r,n}^{(k)} = \alpha \left[ \frac{C_{r,n} \beta^{r+k} (1 - \beta)^{n-r-1}}{k} - \frac{nr}{k(n-r)} \left( \mu_{r,n-1}^{(k)} - \mu_{r+1,n-1}^{(k)} \right) \right] - \frac{r}{n-r} \mu_{r+1,n}^{(k)} \quad (3.2.6.)$$

**İspat;**

(3.2.3.) eşitliğinde (3.2.1.) özel durumu kullanılarak  $(f_1 = \alpha F_1/x)$  eşitlik (3.2.5.) şeklinde ifade edilmiştir. (3.2.5.) ifadesinde;

$$(1 - F_1)^{n-r} = (1 - F_1)^{n-r-1} (1 - F_1) = (1 - F_1)^{n-r-1} \left( 1 - \frac{x f_1}{\alpha} \right)$$

olarak yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \mu_{r,n}^{(k)} &= \alpha C_{r,n} \int_0^{\beta} x^{k-1} F_1^r (1 - F_1)^{n-r-1} dx \\ &\quad - C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k F_1^r f_1 (1 - F_1)^{n-r-1} dx \end{aligned} \quad (3.2.7.)$$

olarak ifade edilir. Burada;

$$C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k F_1^r f_1 (1 - F_1)^{n-r-1} dx = \frac{r}{n-r} \mu_{r+1,n}^{(k)}$$

olarak ifade edilir. Eşitliğin diğer tarafında ise  $u = F_1^r (1 - F_1)^{n-r-1}$  ve  $dv = x^{k-1} dx$  olarak kısmi integrasyon uygulandığında;

$$v = x^k / k$$

$$du = [r F_1^{r-1} (1 - F_1)^{n-r-1} f_1 - (n-r-1) F_1^r (1 - F_1)^{n-r-2} f_1] dx$$

olmak üzere (3.2.7.) ifadesi;

$$\begin{aligned} \mu_{r,n}^{(k)} &= \frac{\alpha C_{r,n} x^k F_1^r (1 - F_1)^{n-r-1}}{k} \Big|_0^{\beta} \\ &\quad - \frac{\alpha r}{k} C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^{r-1} (1 - F_1)^{n-r-1} dx \\ &\quad + \frac{\alpha(n-r-1)}{k} C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^r (1 - F_1)^{n-r-2} dx \\ &\quad - \frac{r}{n-r} \mu_{r+1,n}^{(k)} \end{aligned} \tag{3.2.8.}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^{r-1} (1 - F_1)^{n-r-1} dx = \frac{n}{n-r} \mu_{r,n-1}^{(k)}$$

$$C_{r,n} \int_0^{\beta} x^k f_1 F_1^r (1 - F_1)^{n-r-2} dx = \frac{nr}{(n-r)(n-r-1)} \mu_{r+1,n-1}^{(k)}$$

olarak ifadeler (3.2.8.) de yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında, (3.2.6.) eşitliği elde edilir.

**Teorem 3.1.3.**

$$\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^i \frac{1}{i+n-r+1} \mu_{1,i+n-r+1}^{(k)} \quad (3.2.9.)$$

**İspat;** (3.2.3.) eşitliğinde yer alan  $F_1^{r-1}$  ifadesi  $[1 - (1 - F_1)]^{r-1}$  olarak ifade edilebilir. Bu ifadeye binom açılımı uygulanırsa;

$$[1 - (1 - F_1)]^{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^i (1 - F_1)^i$$

olmak üzere, (3.2.3.) eşitliği ;

$$\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^i \int_0^{\beta} x^k f_1 (1 - F_1)^{n-r} dx$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte ;

$$\int_0^{\beta} x^k f_1 (1 - F_1)^{n-r} dx = \frac{1}{i+n-r+1} \mu_{1,i+n-r+1}^{(k)}$$

olduğundan, bu ifade yerine yazıldığında (3.2.9.) eşitliği elde edilir.

**Teorem 3.1.4.**

$$i\mu_{r,n}^{(k)} = \alpha C_{r,n} \frac{1}{\beta^{r(\alpha-1)}(k + \alpha r)} \left[ \beta^{k+\alpha r} (1 - \beta)^{n-r} + i\mu_{1,n-r}^{(k+\alpha r)} \right] \quad (3.2.10)$$

**İspat;**

(3.2.3.) eşitliğinde  $F_1^{r-1}$  ifadesinde (3.2.1.) bağıntısı kullanılır ve  $f_1$  fonksiyonu yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} i\mu_{r,n}^{(k)} &= C_{r,n} \int_0^\beta x^k \left( \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} \right) \left( \frac{x f_1}{\alpha} \right)^{r-1} (1 - F_1)^{n-r} dx \\ &= \frac{\alpha C_{n,r}}{\beta^{r(\alpha-1)}} \int_0^\beta x^{k+\alpha r-1} (1 - F_1)^{n-r} dx \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada;  $x^{k+\alpha r-1} dx = dv$  ve  $(1 - F_1)^{n-r} = u$  olmak üzere kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$x^{k+\alpha r} / (k + \alpha r) = v \text{ ve } u = -[(n - r)(1 - F_1)^{n-r-1} f_1] dx$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} i\mu_{r,n}^{(k)} &= \frac{\alpha C_{n,r}}{\beta^{r(\alpha-1)}} \left[ \frac{x^{k+\alpha r} (1 - F_1)^{n-r}}{k + \alpha r} \Big|_0^\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{n - r}{k + \alpha r} \int_0^\beta x^{k+\alpha r} f_1 (1 - F_1)^{n-r-1} dx \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$\int_0^{\beta} x^{k+\alpha r} f_1 (1 - F_1)^{n-r-1} dx = \frac{1}{n-r} u\mu_{1,n-r}^{(k+\alpha r)}$$

olmak üzere gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.2.10.) eşitliği elde edilir.

### 3.2.2. Üst Tekli Momentler için Yineleme Bağlıları

(3.2.2.) eşitliğinde ikinci integral üst tekli moment olarak adlandırılmıştır. Bu üst momente ait yineleme bağlantıları ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n} \int_{\beta}^1 x^k f_2 F_2^{r-1} (1 - F_2)^{n-r} dx \quad (3.2.11.)$$

(3.2.11.) üst tekli moment olmak üzere, bu ifade üzerinde çeşitli matematiksel işlemler yapılarak bir takım yineleme bağlantıları elde edilir.

#### Teorem 3.2.1.

$$A = C_{r,n} \left[ B(1 - \beta; n - r + 1, r) + \alpha \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \beta^{j+r-1} (1 - \beta)^{n-r+1} \right]$$

$$D = \alpha(n - r + 1) \quad , \quad 2 \leq r \leq n$$

olmak üzere

$$\left(1 + \frac{D}{k}\right) u\mu_{r,n}^{(k)} = A + \frac{D}{k} u\mu_{r-1,n}^{(k)} + D \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \left( u\mu_{r-1,n}^{(i)} - u\mu_{r,n}^{(i)} \right) \quad (3.2.12.)$$

**İspat;** (3.2.11.) eşitliği (3.2.1.) bağıntısı kullanılarak ;

$${}_u\mu_{r,n}^{(k)} = \alpha C_{r,n} \int_{\beta}^1 \frac{x^k}{1-x} F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r+1} dx$$

olarak elde edilir.

$$\frac{x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \sum_{j=1}^k x^{j-1}$$

eşitliği kullanılarak  ${}_u\mu_{r,n}^{(k)}$  ;

$$\begin{aligned} {}_u\mu_{r,n}^{(k)} &= \alpha C_{r,n} \int_{\beta}^1 \frac{1}{1-x} F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r+1} dx \\ &\quad - \alpha C_{r,n} \sum_{j=1}^k \int_{\beta}^1 x^{j-1} F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r+1} dx \end{aligned} \quad (3.2.13.)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu eşitliğin ilk integralinde (3.2.1.) özel durumundan  $1/(1-x) = f_2/(\alpha(1-F_2))$  eşitliği kullanılarak ve ikinci integralde  $u = F_2^{r-1}(1-F_2)^{n-r+1}$  ve  $x^{j-1}dx = dv$  olmak üzere kısmi integrasyon uygulanarak;

$${}_u\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n} \int_{\beta}^1 F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r} f_2 dx$$

$$-\alpha C_{r,n} \sum_{j=1}^k \left( \frac{x^j F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r+1}}{j} \Big|_{\beta}^1 - \frac{r-1}{j} \int_{\beta}^1 x^j F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r+1} dx \right. \\ \left. + \frac{n-r+1}{j} \int_{\beta}^1 x^j F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r} dx \right)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla ilk integralde,  $F_2 = u$  dönüşümü uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$${}_u\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n} \int_{\beta}^1 u^{r-1} (1-u)^{n-r} du - \alpha C_{r,n} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \beta^{j+r-1} (1-\beta)^{n-r+1} \\ + \alpha C_{r,n} \frac{r-1}{j} \int_{\beta}^1 x^j F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r+1} dx \\ - \alpha C_{r,n} \frac{n-r+1}{j} \int_{\beta}^1 x^j F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r} dx$$

olarak elde edilir. Burada da ilk integralde  $1-u = k$  dönüşümü ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\int_{\beta}^1 x^j F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r+1} dx = \frac{(r-2)! (n-r+1)!}{n!} {}_u\mu_{r-1,n}^j$$

ve

$$\int_{\beta}^1 x^j F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r+1} dx = \frac{1}{C_{r,n}} {}_u\mu_{r,n}^j$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
u\mu_{r,n}^{(k)} &= C_{r,n} \left( B(1-\beta; n-r+1, r) + \alpha \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \beta^{j+r-1} (1-\beta)^{n-r+1} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha(n-r+1)}{j} u\mu_{r-1,n}^j - \alpha \frac{\alpha(n-r+1)}{j} u\mu_{r,n}^j \\
&= C_{r,n} \left( B(1-\beta; n-r+1, r) \right. \\
&\quad \left. + \alpha \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \beta^{j+r-1} (1-\beta)^{n-r+1} \right) + \frac{\alpha(n-r+1)}{k} u\mu_{r-1,n}^k \\
&\quad + \alpha(n-r+1) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i} u\mu_{r-1,n}^i - \frac{\alpha(n-r+1)}{k} u\mu_{r,n}^k \\
&\quad + \alpha(n-r+1) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i} u\mu_{r,n}^i
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada;  $D = \alpha(n-r+1)$  ve

$$A = C_{r,n} \left( B(1-\beta; n-r+1, r) + \alpha \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \beta^{j+r-1} (1-\beta)^{n-r+1} \right)$$

olmak üzere;  $2 \leq r \leq n$  durumunda kullanılabilir olan (3.2.12.) bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilmiştir;

$$\left(1 + \frac{D}{k}\right) u\mu_{r,n}^{(k)} = A + \frac{D}{k} u\mu_{r-1,n}^{(k)} + D \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \left( u\mu_{r-1,n}^{(i)} - u\mu_{r,n}^{(i)} \right)$$

**Teorem 3.2.2.**  $2 \leq r \leq n$  ise,

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{n}{r-1} \left\{ u\mu_{r-1,n-1}^{(k)} - (1-\beta)^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (-1)^i u\mu_{r-1,n-1}^{(k+i)} \right\} \quad (3.2.14.)$$

**İspat;** (3.2.11.) eşitliğinde yer alan  $F_2^{r-1}$  ifadesi  $F_2^{r-2}F_2 = F_2^{r-2} \left[ 1 - (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^\alpha \right]$  olarak parçalanılarak;

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n} \int_{\beta}^1 x^k f_2 F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r} dx - C_{r,n} (1-\beta)^{1-\alpha} \int_{\beta}^1 x^k (1-x)^\alpha f_2 F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r} dx \quad (3.2.15.)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte yer alan  $(1-x)^\alpha$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa;

$$(1-x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (-1)^i x^i$$

olduğundan, (3.2.15.) eşitliği

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n} \int_{\beta}^1 x^k f_2 F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r} dx - C_{r,n} (1-\beta)^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (-1)^i \int_{\beta}^1 x^{k+i} f_2 F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r} dx$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte;

$$C_{r,n} \int_{\beta}^1 x^k f_2 F_2^{r-2} (1 - F_2)^{n-r} dx = \frac{n}{r-1} u\mu_{r-1,n-1}^{(k)}$$

$$C_{r,n} \int_{\beta}^1 x^{k+i} f_2 F_2^{r-2} (1 - F_2)^{n-r} dx = \frac{n}{r-1} u\mu_{r-1,n-1}^{(k+i)}$$

olduğundan;

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{n}{r-1} \left\{ u\mu_{r-1,n-1}^{(k)} - (1-\beta)^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (-1)^i u\mu_{r-1,n-1}^{(k+i)} \right\}$$

olarak elde edilir.

**Teorem 3.2.3.**  $1 \leq r \leq n-1$  ise,

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{n}{n-r} (1-\beta)^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (-1)^i u\mu_{r,n-1}^{(k+i)} \quad (3.2.16.)$$

**İspat;** (3.2.11.) eşitliğinde yer alan  $(1 - F_2)^{n-r}$  ifadesi

$$(1 - F_2)^{n-r-1} (1 - F_2) = (1 - F_2)^{n-r-1} \left[ (1 - \beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]$$

olarak parçalanılarak;

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = C_{r,n}(1-\beta)^{1-\alpha} \int_{\beta}^1 x^k (1-x)^{\alpha} f_2 F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-1} dx \quad (3.2.17.)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte yer alan  $(1-x)^{\alpha}$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa;

$$(1-x)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (-1)^i x^i$$

olduğundan, (3.2.17.) eşitliği

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = (1-\beta)^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (-1)^i C_{r,n} \int_{\beta}^1 x^{k+i} f_2 F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-1} dx$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte;

$$C_{r,n} \int_{\beta}^1 x^{k+i} f_2 F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-1} dx = \frac{n}{n-r} u\mu_{r,n-1}^{(k+i)}$$

olduğundan;

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{n}{n-r} (1-\beta)^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (-1)^i u\mu_{r,n-1}^{(k+i)}$$

olarak elde edilir.

**Teorem 3.2.4.**  $2\alpha - 1 = m$  bir tamsayı ise,

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{m+1}{2(1-\beta)^{m-1}} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^{i+1}}{k+i+1} * \left[ C_{r,n} \beta^{k+i+r} (1-\beta)^{n-r-1} + \frac{n(n-1)}{n-r} \left( u\mu_{r-1,n-2}^{(k+i+1)} - u\mu_{r,n-2}^{(k+i+1)} \right) \right] \quad (3.2.18.)$$

**İspat;** (3.2.11.) eşitliğinde yer alan  $(1-F_2)^{n-r}$  ifadesi  $(1-F_2)^{n-r-1}(1-F_2)$  olarak yazılabilir. (3.2.1.) özel durumu kullanılarak  $(1-F_2) = (1-x)f_2/\alpha$  olmak üzere;

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{C_{r,n}}{\alpha} \int_{\beta}^1 x^k (1-x) f_2^2 F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-1} dx \quad (3.2.19.)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$f_2^2 = \alpha^2 \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{2(\alpha-1)}$$

olarak (3.2.19.) eşitliğinde yerine yazıldığında ;

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{\alpha C_{r,n}}{(1-\beta)^{2(\alpha-1)}} \int_{\beta}^1 x^k (1-x)^{2\alpha-1} F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-1} dx \quad (3.2.20.)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte;  $2\alpha - 1 = m$  olsun.  $(1 - x)^{2\alpha - 1} = (1 - x)^m$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa;

$$(1 - x)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i x^i$$

olduğundan

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{(m+1)C_{r,n}}{2(1-\beta)^{m-1}} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i * \int_{\beta}^1 x^{k+i} F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-1} dx \quad (3.2.21.)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte  $x^{k+i} dx = dv$  ve  $F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-1} = u$  olacak şekilde kısmi integral uygulanırsa;

$$u\mu_{r,n}^{(k)} = \frac{(m+1)C_{r,n}}{2(1-\beta)^{m-1}} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i \left[ \frac{x^{k+i+1} F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-1}}{k+i+1} \Big|_{\beta}^1 - \frac{r-1}{k+i+1} \int_{\beta}^1 x^{k+i} F_2^{r-2} (1-F_2)^{n-r-1} dx + \frac{n-r-1}{k+i+1} \int_{\beta}^1 x^{k+i} F_2^{r-1} (1-F_2)^{n-r-2} dx \right] \quad (3.2.22.)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$\int_{\beta}^1 x^{k+i+1} F_2^{r-2} (1 - F_2)^{n-r-1} dx = \frac{(r-2)! (n-r+1)!}{(n-2)!} u\mu_{r-1, n-2}^{(k+i+1)}$$

$$\int_{\beta}^1 x^{k+i+1} F_2^{r-1} (1 - F_2)^{n-r-2} dx = \frac{(r-1)! (n-r+2)!}{(n-2)!} u\mu_{r, n-2}^{(k+i+1)}$$

olduğundan, (3.2.22.) eşitliğinde bu eşitlikler yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$u\mu_{r, n}^{(k)} = \frac{m+1}{2(1-\beta)^{m-1}} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^{i+1}}{k+i+1} \left[ C_{r, n} \beta^{k+i+r} (1-\beta)^{n-r-1} + \frac{n(n-1)}{n-r} \left( u\mu_{r-1, n-2}^{(k+i+1)} - u\mu_{r, n-2}^{(k+i+1)} \right) \right]$$

eşitliği elde edilir.

### 3.3. L-Momentler

Sıra istatistiklerinin doğrusal kombinasyonları olarak kullanılan, dağılımın şeklini tanımlamaya yardımcı olan ve geleneksel moment yöntemleri ile teori ve uygulamaları açısından benzer özelliklere sahip L-momentler, Hosking (1990) tarafından tanımlanmıştır. Bir dağılımın L-momentleri, sıra istatistiklerinin beklenen değerlerinin doğrusal kombinasyonları olarak;

$$\lambda_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m-1}{i} \mu_{m-j:m} , \quad m \geq 1 \quad (3.3.1)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. Hosking (1990) ayrıca bir dağılımın beklenen değeri elde edilebiliyorsa, L-momentlerinin de çoğunlukla hesaplanabildiğini ispatlamıştır. L-momentler geleneksel momentlerle kıyaslandığında birtakım avantajlara sahiptir. Örneğin; L-momentler serideki aykırı değerlerden daha az etkilenmektedir. Ayrıca küçük örneklerle çalışıldığı durumlarda L-momentler kullanılarak daha etkin tahminler elde edilmektedir. Bunların dışında en önemli avantajı ise L-momentlerin verinin doğrusal bir fonksiyonu olmasından dolayı örneklemdeki değişimden daha az etkilenmesidir. Bu avantajlarından dolayı L-momentler verinin tanımlanması ve özetlenmesi amacıyla, parametre tahmininde ve hipotez testlerinde kullanılmaktadır. Bu yöntem özellikle hidroloji ve ekonomi gibi farklı disiplinlerde nokta ve bölge frekans analizi ve benzeri çalışmalarda kullanılmaktadır.

Nagaraja (2013)  $\lambda_m$  değerini hesaplayabilmek için,  $m$  değerinin çift tamsayı olması durumunda

$$\lambda_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (\mu_{m-j:m} - \mu_{j+1:m}) \quad (3.3.2.)$$

$m$  değerinin tek tamsayı olması durumunda;

$$\lambda_m = \frac{1}{m} \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (\mu_{m-j:m} - \mu_{j+1:m}) + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}} \mu_{\frac{m+1}{2}:m} \right\} \quad (3.3.3.)$$

eşitliklerini elde etmiştir. Bu eşitlikler, sıra istatistiklerinin momentleri elde edildiği durumlarda daha az hesaplama yapılarak L-momentlerin hesaplanmasını sağlar. Çünkü (3.3.2.) ve (3.3.3.) bağıntılarına bakıldığında daha düşük toplam değeri hesaplanmaktadır.

STSP dağılımının ilk dört L-momentini (3.3.1.) bağıntısı sıra istatistiklerinin momentleri için elde edilen formüller kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir. Birinci L-moment dağılımın ortalamasını ifade eder ve

$$\lambda_1 = E(X) = \frac{(\alpha - 1)\beta + 1}{1 + \alpha} \quad (3.3.4.)$$

olarak elde edilir. İkinci L-moment ise bir ölçek ölçümüdür. Bu moment ayrıca Gini'nin ortalama farkı değerinin yarısına denk gelmektedir. STSP için ikinci L-moment;

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (\mu_{2:2} - \mu_{1:2}) = \frac{\alpha + (1 - \alpha)(1 - \beta)\beta}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)} \quad (3.3.5.)$$

eşitliği kullanılarak elde edilir. Benzer şekilde (3.3.1.) bağıntısı ve sıra istatistiklerinin momentleri için elde edilen formüller kullanılarak 3. ve 4. L-momentler  $\lambda_3$  ve  $\lambda_4$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} (\mu_{3:3} - 2\mu_{2:3} + \mu_{1:3})$$

$$= \frac{(2\beta - 1)[\alpha - \beta(\beta - 1) + \alpha^2(-1 - \beta + \beta^2)]}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(1 + 3\alpha)} \quad (3.3.6.)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \frac{1}{4}(\mu_{4:4} - 3\mu_{3:4} + 3\mu_{2:4} - \mu_{1:4}) \\ &= \frac{\beta(\beta - 1)\{(2\alpha^3 - 2\alpha - 1)[5\beta(\beta - 1) + 1] + 6\alpha + 5\alpha^2(\beta^2 - \beta - 1)\}}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(1 + 3\alpha)(1 + 4\alpha)} \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha - 1)(2\alpha - 1)}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(1 + 3\alpha)(1 + 4\alpha)} \end{aligned} \quad (3.3.7.)$$

eşitlikleri kullanılarak elde edilir. Hosking (1990) ayrıca L-moment oranlarını da tanımlamıştır. Örneğin; değişkenlik ölçümünün boyutunu hesaplamak için L-varyasyon katsayısı (L-CV)  $\lambda_2/\lambda_1$  ve çarpıklık ve basıklık boyutunu hesaplamak için L-çarpıklık (L-CS) ve L-basıklık (L-CK) katsayısı da sırasıyla  $\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2$  ve  $\tau_4 = \lambda_4/\lambda_2$  olarak verilmiştir.

STSP dağılımının simetrik olması durumunda yani  $\beta = 0.5$  durumunda  $\mu_{r:n} = 1 - \mu_{n-r+1:n}$  olur ve bu durumda  $\lambda_3 = 0$  olarak elde edilir. Nagaraja (2013),  $m > 1$  olmak üzere çift tamsayı  $m$  değerleri için  $\lambda_m = 0$  olduğunu göstermiştir. Diğer yandan tek tamsayı  $m$  değerleri için ise (3.3.2.)' den

$$\lambda_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (1 - 2\mu_{j+1:m}) \quad (3.3.8.)$$

bağıntısı da kullanılabilir.

Çizelge 3.1' de STSP dağılımının farklı  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri için L-varyasyon (L-CV), L-çarpıklık (L-CS) ve L-basıklık (L-CK) değerleri hesaplanmıştır. Bu değerleri yorumlayacak olursak; öncelikle L-CV değeri  $\beta$  sabitken  $\alpha$  arttıkça azalmaktadır.  $\beta < 0.5$  olmak üzere sabit  $\beta$  değeri için L-CS ve L-CK değerleri  $\alpha$  değeri arttıkça artış göstermektedir ve ayrıca L-CS değeri  $\alpha > 1$  durumunda daima pozitif çıkmaktadır. Simetrik durumda ise L-CS bilindiği üzere 0 çıkmaktadır ve L-CK artan

$\alpha$  değerlerine göre artış göstermektedir.  $\beta > 0.5$  olmak üzere sabit  $\beta$  değeri için  $\alpha$  değeri arttıkça L-CS azalmakta ve L-CK değeri ise artmaktadır. Bu durumda, L-CS değeri  $\alpha < 1$  durumu dışında daima negatiftir. Diğer yandan sabit  $\alpha$  değeri için L-CV ve L-CS değeri  $\beta$  değeri arttıkça  $\alpha < 1$  durumu dışında azalış göstermektedir. L-CK değeri ise  $\beta < 0.5$  durumunda  $\beta$  arttıkça artış göstermektedir ve  $\alpha < 1$  durumu dışında  $\beta > 0.5$  durumunda  $\beta$  azaldıkça azalmaktadır.

Çizelge 3.1. STSP dağılımının bazı  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri için L-varyasyon (L-CV), L-çarpıklık (L-CS) ve L-basıklık (L-CK) değerleri

	$\beta = 0.2$			$\beta = 0.5$		
	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$
L-CV	0,3222	0,3066	0,2444	0,4166	0,2333	0,1444
L-CS	-0,1531	0,1155	0,1888	0	0	0
L-CK	-0,0441	0,0641	0,1172	-0,1	0,0901	0,1537
	$\beta = 0.7$			$\beta = 0.9$		
	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$
L-CV	0,4653	0,2105	0,1207	0,4954	0,2010	0,1120
L-CS	0,1077	-0,0839	-0,1383	0,1864	-0,1358	-0,2202
L-CK	-0,0728	0,0769	0,1349	-0,0148	0,0526	0,1016

### 3.4. Minimum ve Maksimum Sıra İstatistiklerinin Asimptotik Dağılımları

Minimum ve maksimum sıra istatistiklerinin limit dağılımları dejenere dağılım olduğundan kullanışsızdır. Bu durumun ortaya çıkardığı olumsuzluğu önlemek ve daha kullanışlı bir limit dağılımı haline getirmek için bazı doğrusal dönüşümler uygulanır. (Arnold ve ark, 1992). Bu doğrusal formların limit dağılımları Weibull, Gumbel veya Fréchet dağılımlarından biri olarak elde edilir.

#### 3.4.1. Maksimum Sıra İstatistiklerinin Asimptotik Dağılımları

Bir maksimum sıra istatistiğinin limit dağılımı dejenere dağılıma sahip olup kullanışsızdır. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırmak ve kullanışlı bir limit dağılım elde edebilmek için  $G$  nin sürekli olduğu tüm noktalarda  $a_n > 0$  ve  $b_n$  örneklem hacmi  $n$  e bağlı normalleştirme sabitleri olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad (3.4.1)$$

formunda bir doğrusal dönüşüm uygulanır. Bu dönüşüm sonucunda  $F$ ,  $G$  dejenere olmayan limit dağılımının maksimum çekimi altında dönüşüme tabi tutulmuş olur. Bu  $G$  limit dağılımı Weibull, Gumbel ve Fréchet dağılımlarından herhangi biri formunda ortaya çıkmaktadır. Bu formların her biri için gerek ve yeter koşullar David ve Nagaraja (2003) tarafından verilmiştir.

STSP dağılımının maksimum sıra istatistiklerinin limit dağılımı da Weibull dağılımının maksimum çekimi altındadır (Çetinkaya ve Genç,2016). Öncelikle bir limit dağılımının Weibull dağılımının maksimum çekimi altında ortaya çıkması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki teoremden verilmiştir (David ve Nagaraja, 2003).

**Teorem 3.4.1.** Sürekli bir kümülatif dağılım fonksiyonu olan  $F(x)$  in Weibull dağılımının maksimum çekimi altında olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

- $\xi_1 = \sup\{x|F(x) < 1\}$  ( $X$  in üst sınırı) sonlu olmalıdır.
- Her  $t > 0$  için,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-F(\xi_1-tx)}{1-F(\xi_1-x)} = t^\alpha$  .

Burada,  $a_n$  ve  $b_n$  standartlaştırma sabitleri olmak üzere

$$a_n = \xi_1 - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{ve} \quad b_n = \xi_1 \quad \text{seçilebilir.}$$

Dolayısıyla;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n:n} \leq \xi_1 + a_n x) = \exp[-(-x)^\alpha]$$

olarak elde edilir. Buradaki  $\exp[-(-x)^\alpha]$  Weibull dağılımının dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir.

Dolayısıyla, STSP dağılımı için bu gerek ve yeter koşullar incelendiğinde;

- $X$ ' in üst sınırı ,  $\xi_1 = \sup\{x|F(x) < 1\} = 1$  sonludur.
- Ayrıca her  $t > 0$  için;

olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-F(\xi_1-tx)}{1-F(\xi_1-x)} = \frac{1 - \left[1 - (1-\beta) \left(\frac{1-(1-tx)^\alpha}{1-\beta}\right)^\alpha\right]}{1 - \left[1 - (1-\beta) \left(\frac{1-(1-x)^\alpha}{1-\beta}\right)^\alpha\right]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(tx)^\alpha}{x^\alpha} = t^\alpha \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Gerek ve yeter koşullar sağlandığı için;  $F(x) \in D[W^*(x; \gamma = \alpha)]$  olarak ifade edilebilir. Burada;  $W^*(x; \gamma = \alpha)$ , şekil parametresi ( $\gamma$ ) STSP dağılımının şekil parametresine ( $\alpha$ ) eşit olan Weibull dağılımını ifade eder ve dağılım fonksiyonu;

$$W^*(x; \gamma = \alpha) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha}, & x \leq 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

şeklindedir. STSP dağılımı için standartlaştırma sabitleri  $a_n$  ve  $b_n$  değerleri ;

$$F^{-1}(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^{1/\alpha} & , 0 < x \leq \beta \\ 1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{1/\alpha} & , \beta \leq x < 1 \end{cases} \quad (3.4.2.)$$

olduğundan

$$b_n = \xi_1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \xi_1 - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \left[1 - (1 - \beta) \left(\frac{1 - (1 - \frac{1}{n})}{1 - \beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = (1 - \beta)^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Standartlaştırma sabitleri yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n:n} \leq \xi_1 + a_n x) &= \exp[-(-x)^\alpha] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n:n} \leq 1 + (1 - \beta)^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha} x) &= \exp[-(-x)^\alpha] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{X_{n:n} - 1}{(1 - \beta)^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha}} \xrightarrow{d} W^*$$

olduğundan

$$E \left[ \left( \frac{(X_{n:n} - 1)n^{1/\alpha}}{(1 - \beta)^{1-1/\alpha}} \right)^k \right] \cong E(W^k)$$

olarak ifade edilebilir. Weibull dağılımının  $k$ . momenti  $E(W^k) = (-1)^k \Gamma(1 + k/\alpha)$  olduğu bilindiğinden STSP dağılımın maksimum sıra istatistiğinin beklenen değer ve standart sapmaları Weibull dağılımının maksimum çekimi altında;

$$\begin{aligned} E(X_{n:n}) &\cong 1 - \Gamma(1 + 1/\alpha)(1 - \beta)^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha} \\ &\cong 1 - (1 - \beta)^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha} \frac{1}{\alpha} \Gamma(1/\alpha) \end{aligned} \quad (3.4.3.)$$

$$\begin{aligned} E(X_{n:n}^2) &\cong \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) (1 - \beta)^{2-\frac{2}{\alpha}} n^{-\frac{2}{\alpha}} + 1 - 2\Gamma(1 + 1/\alpha)(1 - \beta)^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha} \\ &\cong (1 - \beta)^{2-\frac{2}{\alpha}} n^{-\frac{2}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) \frac{2}{\alpha} + 1 - 2(1 - \beta)^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha} \Gamma(1/\alpha) \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.4.4.)$$

$$Var(X_{n:n}) \cong (1 - \beta)^{2-\frac{2}{\alpha}} n^{-\frac{2}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} \left[ 2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right] \quad (3.4.5.)$$

$$sd(X_{n:n}) \cong (1 - \beta)^{1-\frac{1}{\alpha}} n^{-\frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{\alpha} \left[ 2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]} \quad (3.4.6.)$$

olarak elde edilir.

Çizelge 3.2' de STSP dağılımının maksimum sıra istatistiğinin farklı  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $n$  değerlerine göre beklenen değerleri kesin ve asimptotik olarak hesaplanmış ve karşılaştırmalar yapılmıştır.  $\alpha < 1$  durumunda gerek asimptotik gerekse kesin

sonuçlarda standart hatanın oldukça büyük olduğu ve örneklem hacmi  $n$  arttıkça tüm  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri için standart hatanın azaldığı gözlemlenmektedir. Asimptotik sonuçların standart sapması, kesin değerlere ait standart sapmadan daha fazladır. Fakat örneklem hacmi arttıkça bu fark sifıra yaklaşmaktadır.  $n \geq 25$  durumunda bu fark 0.003' ten daha az olduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca  $\beta \rightarrow 0$  yaklaştıkça asimptotik sonuçların kesin sonuçlardan farkı artmaktadır. Fakat bu farklılık  $n$  arttıkça azalmaktadır. Tam tersi durumda; yani  $\beta \rightarrow 1$  yaklaştıkça asimptotik sonuçlar kesin sonuçlara küçük  $n$  değerlerinde bile yakın sonuçlar vermektedir. Dolayısıyla, STSP dağılımının maksimum sıra istatistiğinin asimptotik sonuçlarının 25 birimden daha büyük örneklem için iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir.

Çizelge 3.2. STSP dağılımının maksimum sıra istatistiğinin farklı  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $n$  değerlerine göre kesin ve asimptotik beklenen değerler ve standart hataları

			Kesin	(Std. Hatası)	Asimptotik	(Std. Hatası)
n=1	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.6	0.3425	-1.5	5.5902
		$\alpha = 2$	0.4	0.2160	0.2073	0.4143
		$\alpha = 4$	0.32	0.1424	0.2333	0.2151
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.5	0.3651	-3	8.8943
		$\alpha = 2$	0.5	0.2041	0.3733	0.3276
		$\alpha = 4$	0.5	0.1291	0.4610	0.1512
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.4	0.3425	-9	22.3607
		$\alpha = 2$	0.6	0.2160	0.6037	0.2072
		$\alpha = 4$	0.68	0.1424	0.7289	0.0760
n=3	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.8752	0.1693	0.7222	0.6211
		$\alpha = 2$	0.5911	0.1812	0.5424	0.2392
		$\alpha = 4$	0.4447	0.1372	0.4174	0.1634
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.8125	0.2327	0.5556	0.9938
		$\alpha = 2$	0.6750	0.1470	0.6382	0.1891
		$\alpha = 4$	0.6083	0.0989	0.5905	0.1149
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.7048	0.2777	-0.1111	2.4845
		$\alpha = 2$	0.7769	0.1219	0.7712	0.1196
		$\alpha = 4$	0.7899	0.0707	0.7940	0.0578
n=5	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.9405	0.0941	0.9000	0.2236
		$\alpha = 2$	0.6696	0.1554	0.6455	0.1853
		$\alpha = 4$	0.5023	0.1289	0.4873	0.1438
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.9062	0.1427	0.8400	0.3578
		$\alpha = 2$	0.7386	0.1234	0.7198	0.1465
		$\alpha = 4$	0.6500	0.0909	0.6396	0.1011
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.8243	0.2067	0.6000	0.8944
		$\alpha = 2$	0.8289	0.0897	0.8228	0.0927
		$\alpha = 4$	0.8198	0.0535	0.8187	0.0509

Çizelge 3.2. (Devamı) STSP dağılımının maksimum sıra istatistiğinin farklı  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $n$  değerlerine göre kesin ve asimptotik beklenen değerler ve standart hataları

			Kesin	(Std. Hatası)	Asimptotik	(Std. Hatası)
n=10	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.9811	0.0347	0.9750	0.0559
		$\alpha = 2$	0.7583	0.1196	0.7493	0.1310
		$\alpha = 4$	0.5754	0.1143	0.5688	0.1210
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.9697	0.0553	0.9600	0.0894
		$\alpha = 2$	0.8089	0.0945	0.8018	0.1036
		$\alpha = 4$	0.7015	0.0804	0.6969	0.0850
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.9307	0.1084	0.9000	0.2236
		$\alpha = 2$	0.8785	0.0615	0.8747	0.0655
		$\alpha = 4$	0.8494	0.0415	0.8476	0.0428
n=25	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.9964	0.0073	0.9960	0.0089
		$\alpha = 2$	0.8438	0.0798	0.8415	0.0829
		$\alpha = 4$	0.6592	0.0940	0.6571	0.0962
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.9943	0.0117	0.9936	0.0143
		$\alpha = 2$	0.8765	0.0631	0.8747	0.0655
		$\alpha = 4$	0.7605	0.0661	0.7590	0.0676
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.9858	0.0286	0.9840	0.0358
		$\alpha = 2$	0.9219	0.0399	0.9207	0.0414
		$\alpha = 4$	0.8795	0.0332	0.8788	0.0340
n=50	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.9991	0.0020	0.9990	0.0022
		$\alpha = 2$	0.8887	0.0575	0.8879	0.0586
		$\alpha = 4$	0.7126	0.0800	0.7117	0.0809
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.9985	0.0032	0.9984	0.0036
		$\alpha = 2$	0.9120	0.0455	0.9114	0.0463
		$\alpha = 4$	0.7980	0.0562	0.7973	0.0569
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.9962	0.0081	0.9960	0.0089
		$\alpha = 2$	0.9444	0.0287	0.9440	0.0293
		$\alpha = 4$	0.8984	0.0283	0.8981	0.0286

### 3.4.2. Minimum Sıra İstatistiklerinin Asimptotik Dağılımları

Maksimum sıra istatistiğine benzer şekilde minimum sıra istatistiğinin limit dağılımı dejenere dağılıma sahip olup kullanışsızdır. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırmak ve kullanışlı bir limit dağılım elde edebilmek için  $G$  nin sürekli olduğu tüm noktalarda  $c_n > 0$  ve  $d_n$  örneklem hacmi  $n$ 'e bağlı normalleştirme sabitleri olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = G(x) \quad (3.4.7.)$$

formunda bir doğrusal dönüşüm uygulanır. Bu dönüşüm sonucunda  $F$ ,  $G$  dejenere olmayan limit dağılımının minimum çekimi altında dönüşüme tabi tutulmuş olur. Bu  $G$  limit dağılımı Weibull, Gumbel ve Fréchet dağılımlarından herhangi biri formunda ortaya çıkmaktadır.

STSP dağılımının minimum sıra istatistiklerinin limit dağılımı da Weibull dağılımının minimum çekimi altındadır (Çetinkaya ve Genç,2016). Öncelikle bir limit dağılımının Weibull dağılımının minimum çekimi altında ortaya çıkması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki teoremdedir (David ve Nagaraja, 2003).

**Teorem 3.4.2.** Sürekli bir kümülatif dağılım fonksiyonu olan  $F(x)$  in Weibull dağılımının minimum çekimi altında olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

- $\xi_2 = \inf\{x | F(x) > 0\}$  ( $X$  in alt sınırı) sonlu olmalıdır.
- Her  $t > 0$  için,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(tx - \xi_2)}{F(x - \xi_2)} = t^\alpha$  .

olmalıdır. Burada  $c_n$  ve  $d_n$  standartlaştırma sabitleri olmak üzere

$$c_n = F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - \xi_2 \quad \text{ve} \quad d_n = \xi_2 \quad \text{olarak seçilebilir.}$$

Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{1:n} \leq \xi_2 + c_n x) = 1 - e^{-x^\alpha}$$

olarak elde edilir. Buradaki  $1 - e^{-x^\alpha}$  Weibull dağılımın dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir.

Dolayısıyla, STSP dağılımı için bu gerek ve yeter koşullar incelendiğinde;

- $X'$  in alt sınırı ,  $\xi_1 = \inf\{x|F(x) < 1\} = 0$  sonludur.
- Ayrıca her  $t > 0$  için;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(-\xi_2 + tx)}{F(-\xi_2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta \left(\frac{tx}{\beta}\right)^\alpha}{\beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(tx)^\alpha}{x^\alpha} = t^\alpha \text{ olarak elde edilir.}$$

Gerek ve yeter koşullar sağlandığı için;  $F(x) \in D[W^*(x; \gamma = \alpha)]$  olarak ifade edilebilir. Burada;  $W^*(x; \gamma = \alpha)$  şekil parametresi STSP dağılımının şekil parametresine eşit olan Weibull dağılımını ifade eder ve dağılım fonksiyonu;

$$W^*(x; \gamma = \alpha) = \begin{cases} 1 - e^{-x^\alpha}, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

şeklindedir. STSP dağılımı için  $a_n$  ve  $b_n$  değerleri, (3.4.2.) den;

$$d_n = \xi_2 = 0$$

$$c_n = F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - \xi_2 = \beta \left(\frac{1/n}{\beta}\right)^{1/\alpha} = \beta^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha}$$

olarak elde edilir. Standartlaştırma sabitleri yerine yazıldığında;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{1:n} \leq \xi_2 + c_n x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{1:n} \leq \beta^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha} x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{X_{1:n}}{\beta^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha}} \xrightarrow{d} W^*(x; \gamma = \alpha)$$

olduğundan

$$E \left[ \left( X_{1:n} \beta^{\frac{1}{\alpha}-1} n^{1/\alpha} \right)^k \right] \cong E(W^k)$$

olarak ifade edilebilir. Weibull dağılımının  $k$ . momentini  $E(W^k) = (-1)^k \Gamma(1 + k/\alpha)$  olduğu bilindiğinden STSP dağılımının minimum sıra istatistiğinin beklenen değer ve standart sapmaları Weibull dağılımının minimum çekimi altında;

$$\mu_{1:n}^{(k)} \cong (n\beta)^{-k/\alpha} \beta^k \frac{k}{\alpha} \Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right) \quad (3.4.8)$$

$$E(X_{1:n}) \cong \beta (n\beta)^{-1/\alpha} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad (3.4.9)$$

$$E(X_{1:n}^2) \cong \beta^2 (n\beta)^{-2/\alpha} \frac{2}{\alpha} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) \quad (3.4.10.)$$

$$Var(X_{1:n}) \cong \beta^{2(1-1/\alpha)} n^{-2/\alpha} \frac{1}{\alpha} \left[ 2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right] \quad (3.4.11.)$$

$$sd(X_{1:n}) \cong \beta^{1-1/\alpha} n^{-1/\alpha} \sqrt{\frac{1}{\alpha} \left[ 2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]} \quad (3.4.12.)$$

olarak elde edilir.

Çizelge 3.3' de STSP dağılımının minimum sıra istatistiğinin farklı  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $n$  değerlerine göre beklenen değerleri kesin ve asimptotik olarak hesaplanmış ve karşılaştırmalar yapılmıştır.  $\alpha < 1$  durumunda standart hatanın oldukça büyük olduğu ve örneklem hacmi  $n$  arttıkça tüm  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri için standart hatanın azaldığı gözlemlenmektedir.  $\alpha < 1$  ve  $n > 1$  durumunda standart hatanın oldukça

yüksek olduğu gözlemlenmektedir fakat  $\alpha > 1$  durumunda sonuçlar daha kabul edilebilir düzeydedir. Asimptotik sonuçların standart sapması, kesin değerlere ait standart sapmadan daha fazladır. Fakat örneklem hacmi arttıkça bu fark sifıra yaklaşmaktadır.  $n \geq 25$  durumunda bu fark 0.003' ten daha az olduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca  $\beta \rightarrow 1$  yaklaştıkça asimptotik sonuçların kesin sonuçlardan farkı artmaktadır. Fakat bu farklılık  $n$  arttıkça azalmaktadır. Tam tersi durumda; yani  $\beta \rightarrow 0$  yaklaştıkça asimptotik sonuçlar kesin sonuçlara küçük  $n$  değerlerinde bile yakın sonuçlar vermektedir. Dolayısıyla, STSP dağılımının maksimum sıra istatistiğinin asimptotik sonuçlarının da 25 birimden daha büyük örneklem için iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir.

Genel olarak maksimum ve minimum için asimptotik sonuçlara bakıldığında,  $n \geq 25$  ve  $\alpha > 1$  durumunda asimptotik yaklaşımın kesin değerlere yakın ve oldukça düşük standart hataya sahip sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. Bu nedenle, bu koşullar sağlandığı takdirde, asimptotik yaklaşımla elde edilen formüller kullanılarak daha kolaylıkla hesaplama yapılabilir.

Çizelge 3.3. STSP dağılımının minimum sıra istatistiğinin farklı  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $n$  değerlerine göre kesin ve asimptotik beklenen değerler ve standart hataları

			Kesin	(Std. Hatası)	Asimptotik	(Std. Hatası)
n=1	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.6	0.3425	10	22.3607
		$\alpha = 2$	0.4	0.2160	0.3963	0.2072
		$\alpha = 4$	0.32	0.1424	0.2711	0.0760
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.5	0.3651	4	8.9443
		$\alpha = 2$	0.5	0.2041	0.6267	0.3276
		$\alpha = 4$	0.5	0.1291	0.5390	0.1512
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.4	0.3425	2.5	5.5902
		$\alpha = 2$	0.6	0.2160	0.7927	0.4143
		$\alpha = 4$	0.68	0.1424	0.7667	0.2151
n=3	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.2952	0.2777	1.1111	2.4845
		$\alpha = 2$	0.2231	0.1219	0.2288	0.1196
		$\alpha = 4$	0.2101	0.0707	0.2060	0.0578
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.1875	0.2327	0.4444	0.9938
		$\alpha = 2$	0.3250	0.1470	0.3618	0.1891
		$\alpha = 4$	0.3917	0.0989	0.4095	0.1149
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.1248	0.1693	0.2778	0.6211
		$\alpha = 2$	0.4089	0.1812	0.4576	0.2392
		$\alpha = 4$	0.5553	0.1372	0.5826	0.1634
n=5	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.1757	0.2067	0.4000	0.8944
		$\alpha = 2$	0.1711	0.0897	0.1772	0.0927
		$\alpha = 4$	0.1802	0.0535	0.1813	0.0509
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.0938	0.1427	0.1600	0.3578
		$\alpha = 2$	0.2614	0.1234	0.2803	0.1465
		$\alpha = 4$	0.3500	0.0909	0.3604	0.1011
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.0595	0.0941	0.1000	0.2236
		$\alpha = 2$	0.3304	0.1554	0.3545	0.1853
		$\alpha = 4$	0.4977	0.1289	0.5127	0.1438

Çizelge 3.3. (Devamı) STSP dağılımının minimum sıra istatistiğinin farklı  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $n$  değerlerine göre kesin ve asimptotik beklenen değerler ve standart hataları

			Kesin	(Std. Hatası)	Asimptotik	(Std. Hatası)
n=10	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.0693	0.1084	0.1000	0.2236
		$\alpha = 2$	0.1215	0.0615	0.1253	0.0655
		$\alpha = 4$	0.1506	0.0415	0.1524	0.0428
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.0303	0.0553	0.0400	0.0894
		$\alpha = 2$	0.1911	0.0945	0.1982	0.1036
		$\alpha = 4$	0.2985	0.0804	0.3031	0.0850
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.0189	0.0347	0.0250	0.0559
		$\alpha = 2$	0.2417	0.1196	0.2507	0.1310
		$\alpha = 4$	0.4246	0.1143	0.4312	0.1210
n=25	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.0142	0.0286	0.0160	0.0358
		$\alpha = 2$	0.0781	0.0399	0.0793	0.0414
		$\alpha = 4$	0.1205	0.0332	0.1212	0.0340
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.0057	0.0117	0.0064	0.0143
		$\alpha = 2$	0.1235	0.0631	0.1253	0.0655
		$\alpha = 4$	0.2395	0.0661	0.2410	0.0676
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.0036	0.0073	0.0040	0.0089
		$\alpha = 2$	0.1562	0.0798	0.1585	0.0829
		$\alpha = 4$	0.3408	0.0940	0.3429	0.0962
n=50	$\beta = 0.2$	$\alpha = 0.5$	0.0038	0.0081	0.0040	0.0089
		$\alpha = 2$	0.0556	0.0287	0.0560	0.0293
		$\alpha = 4$	0.1016	0.0283	0.1019	0.0286
	$\beta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	0.0015	0.0032	0.0016	0.0036
		$\alpha = 2$	0.0880	0.0455	0.0886	0.0463
		$\alpha = 4$	0.2020	0.0562	0.2027	0.0569
	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.5$	0.0009	0.0020	0.0010	0.0022
		$\alpha = 2$	0.1113	0.0575	0.1121	0.0586
		$\alpha = 4$	0.2874	0.0800	0.2883	0.0809

### 3.5. Sıra İstatistiklerinin Çarpım Momentleri

Sıra istatistiklerinin çarpım momentleri istatistiksel tahmin problemlerinde önemli bir yer tutan konum ve ölçek parametrelerinin en iyi doğrusal yansız tahmin edicisi (BLUE) hesaplamalarında ihtiyaç duyulan kovaryansı elde ederken kullanılmaktadır.

$r < s$  olmak üzere, standart iki yönlü kuvvet dağılımının  $r$ . ve  $s$ . sıra istatistiklerinin ( $X_{r:n}$  ve  $X_{s:n}$ ) ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$g_1(x, y) = [F_1(x)]^{r-1}[F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1}[1 - F_1(y)]^{n-s}f_1(x)f_2(y)$$

$$g_2(x, y) = [F_1(x)]^{r-1}[F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1}[1 - F_2(y)]^{n-s}f_1(x)f_2(y)$$

$$g_3(x, y) = [F_2(x)]^{r-1}[F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1}[1 - F_2(y)]^{n-s}f_2(x)f_2(y)$$

ve

$$C_{r,s,n} = n!/((r-1)!(s-r-1)!(n-s)!)$$

olmak üzere;

$$f_{r,s:n}(x, y) = C_{r,s,n} \begin{cases} g_1(x, y), & 0 < x < y < \beta \\ g_2(x, y), & 0 < x < \beta < y < 1 \\ g_3(x, y), & \beta < x < y < 1 \end{cases} \quad (3.5.1.)$$

olarak ifade edilebilir. Bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla da  $r$ . ve  $s$ . sıra istatistiklerinin ( $X_{r:n}X_{s:n}$ ) çarpımının beklenen değeri;

$$\mu_{r,s:n} = E(X_{r:n}X_{s:n})$$

$$\mu_{r,s:n} = E(X_{r:n}X_{s:n}) = C_{r,s,n} \int_0^\beta \int_0^y xy g_1(x, y) dx dy +$$

$$+C_{r,s,n} \int_{\beta}^1 \int_0^{\beta} xy g_2(x,y) dx dy + C_{r,s,n} \int_{\beta}^1 \int_x^1 xy g_3(x,y) dy dx \quad (3.5.2.)$$

bağıntısı ile elde edilir. (3.5.2.) integralinin çözümü için ;

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta} \int_0^y xy g_1(x,y) dx dy &= \int_0^{\beta} \int_0^y xy [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\ &\quad * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_2(y) \\ &= \int_0^{\beta} \int_0^y xy \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{r-1} \left[ \beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha} - \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{s-r-1} \left[ 1 - \beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-s} \\ &\quad * \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} \alpha \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx dy \\ &= \int_0^{\beta} y \left[ 1 - \beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-s} \alpha \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha-1} \left[ \beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{s-r-1} \\ &\quad * \left[ \int_0^y x \left[ \beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha} \right]^{r-1} \left[ 1 - \frac{\beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha}}{\beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha}} \right]^{s-r-1} \alpha \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} dx \right] dy \end{aligned}$$

eşitliğinde öncelikle  $\frac{\beta \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha}}{\beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha}} = u$  ve ardından  $\beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^{\alpha} = w$  değişken dönüştürme

işlemleri uygulanırsa;

$$\int_0^{\beta} \int_0^y xy g_1(x, y) dx dy \quad (3.5.3.)$$

$$= \beta^{2(1-1/\alpha)} B\left(\frac{1}{\alpha} + r, s - r\right) B\left(\beta; \frac{2}{\alpha} + s, n - s + 1\right)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde;

$$\int_{\beta}^1 \int_0^{\beta} xy g_2(x, y) dx dy$$

$$= \int_{\beta}^1 \int_0^{\beta} xy [F_1(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s} f_1(x) f_2(y) dx dy$$

$$= \int_{\beta}^1 \int_0^{\beta} xy \left[ \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \right]^{r-1} \left[ 1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^{\alpha} - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \right]^{s-r-1}$$

$$* \left[ (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^{\alpha} \right]^{n-s} \alpha \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \alpha \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^{\alpha-1} dx dy$$

$$= \int_{\beta}^1 y \left[ (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^{\alpha} \right]^{n-s} \alpha \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^{\alpha-1}$$

$$* \left[ \int_0^{\beta} x \left[ \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \right]^{r-1} \left[ 1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^{\alpha} - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \right]^{s-r-1} \alpha \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} dx \right] dy$$

eşitliğinde ilk olarak

$$\left[ 1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^{\alpha} - \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \right]^{s-r-1}$$

$$= \left(1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^\alpha\right)^{s-r-1} \left[1 - \frac{\beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}{1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^\alpha}\right]^{s-r-1}$$

olarak parçalanıp  $\left[1 - \frac{\beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}{1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^\alpha}\right]^{s-r-1}$  ifadesine binom açılımı uygulandıktan

sonra  $\beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha = u$  ve ardından  $(1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^\alpha = k$  değişken değiştirme yöntemleri sırasıyla uygulandığında;

$$\begin{aligned} & \int_{\beta}^1 \int_0^{\beta} xy g_2(x, y) dx dy \\ &= \sum_{j=0}^{s-r-1} \binom{s-r-1}{j} (-1)^j \frac{\beta^{r+j+1}}{\frac{1}{\alpha} + r + j} [B(1 - \beta; n - s + 1, s - j - r) \\ & \quad - (1 - \beta)^{1 - \frac{1}{\alpha}} B(1 - \beta; \frac{1}{\alpha} + n - s + 1, s - r - j)] \end{aligned} \quad (3.5.4.)$$

olarak elde edilir. Üçüncü ve son integral için ise

$$\begin{aligned} & \int_{\beta}^1 \int_x^1 xy g_3(x, y) dy dx \\ &= \int_{\beta}^1 \int_x^1 xy [F_2(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s} f_2(x) f_2(y) dy dx \\ &= \int_{\beta}^1 \int_0^{\beta} xy \left[1 - (1 - \beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha\right]^{r-1} \\ & \quad * \left[ (1 - \beta) \left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^\alpha - (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^\alpha \right]^{s-r-1} \left[ (1 - \beta) \left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^\alpha \right]^{n-s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} \alpha \left( \frac{1-y}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dx dy \\
= & \int_{\beta}^1 x \left[ 1 - (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{r-1} \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} \\
& * \left[ (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} - (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{s-r-1} \\
& * \left[ \int_x^1 y \left[ (1-\beta) \left( \frac{1-y}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]^{n-s} \alpha \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha-1} dy \right] dx
\end{aligned}$$

eşitliğinde  $\frac{(1-\beta)\left(\frac{1-y}{1-\beta}\right)^{\alpha}}{(1-\beta)\left(\frac{1-x}{1-\beta}\right)^{\alpha}} = u$  olacak şekilde değişken dönüşürme işlemi yapıp elde

edilen ifade de  $(1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^{\alpha} = k$  olacak şekilde bir dönüşüm uygulanarak;

$$\begin{aligned}
& \int_{\beta}^1 \int_x^1 xy g_3(x,y) dy dx = B(n-s+1, s-r) \\
& * \left\{ B(1-\beta; n-r+1, r) - (1-\beta)^{1-1/\alpha} B\left(1-\beta; \frac{1}{\alpha} + n-r+1, r\right) \right\} \\
& - B\left(\frac{1}{\alpha} + n-s+1, s-r\right) \left\{ (1-\beta)^{1-1/\alpha} B\left(1-\beta; \frac{1}{\alpha} + n-r+1, r\right) \right. \\
& \left. - (1-\beta)^{2(1-1/\alpha)} B\left(1-\beta; \frac{2}{\alpha} + n-r+1\right) \right\} \tag{3.5.5}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(3.5.3.), (3.5.4.) ve (3.5.5.) eşitlikleri (3.5.2.) eşitliğinde yerine koyularak  $\mu_{r,s;n}$  değeri hesaplanabilir.

Fakat elde edilen sonuçlara bakıldığı zaman, bu hesaplamaları yapmak her zaman uzun işlemler ve zaman gerektirecektir. Bu nedenle çarpım momentleri için yineleme bağıntılarına ihtiyaç duyulmaktadır. Yineleme bağıntıları kullanılarak bir moment hesaplandığında elde edilecek olan bu bağıntılar kullanılarak diğer çarpım momentleri daha kolay hesaplanabilir.

### 3.6. Sıra İstatistiklerinin Çarpım Momentleri için Yineleme Bağıntıları

STSP dağılımı iki yönlü bir dağılım olduğundan, tekli momentlerde olduğu gibi, çarpım momentleri de hesaplama açısından bir takım zorluklar içermektedir. Çarpım momenti hesaplanırken  $X_{r:n}$  ve  $X_{s:n}$  sıra istatistiklerinin dağılımın  $\beta$  parametresine göre olası tüm sıralamaları (3.5.1.) göz önüne alınarak (3.5.2.) ifadesinde de görüldüğü üzere üç ayrı integralin toplamı şeklinde hesaplanabilmektedir. Dolayısıyla yineleme bağıntıları için her bir integral ayrı ayrı düşünülerek her bir duruma özgü (3.5.1.) yineleme bağıntıları elde edilmiştir.

Tekli momentlerde olduğu gibi  $f_1$ ,  $(F_1)$ ,  $f_2$ ,  $(F_2)$  tam bir yoğunluk (dağılım) fonksiyonu olmadığı için her bir integral tam bir moment ifade etmez. Bu nedenle (3.5.2.) eşitliğinde yer alan ilk integral  $r$ . ve  $s$ . sıra istatistiklerinin  $(k, l)$ . alt çarpım momenti, ikinci integral ise  $r$ . ve  $s$ . sıra istatistiklerinin  $(k, l)$ . orta çarpım momenti ve üçüncü integral ise  $r$ . ve  $s$ . sıra istatistiklerinin  $(k, l)$ . üst çarpım momenti olarak adlandırılmış ve her biri için sırasıyla;  $L\mu_{r,s:n}^{(k,l)}$ ,  $M\mu_{r,s:n}^{(k,l)}$  ve  $U\mu_{r,s:n}^{(k,l)}$  notasyonları kullanılmıştır. Ardından bu kısmi momentler için moment yineleme bağıntıları elde edilmiştir.

### 3.6.1. Alt Çarpım Momentleri için Yineleme Bağlıları

Standart iki yönlü kuvvet dağılımının  $0 < X_{r:n} < X_{s:n} < \beta$  durumu için  $r$ . ve  $s$ . sıra istatistiklerinin alt çarpım momentleri aşağıdaki bağıntı kullanılarak ifade edilir;

$$L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = C_{r,s;n} \int_0^\beta \int_0^y x^k y^l [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \quad (3.6.1.)$$

Burada;  $F_1(x)$  ve  $f_1(x)$   $r$ . sıra istatistiğinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonlarının alt parçasını ( $0 < x < \beta$ ),  $F_1(y)$  ve  $f_1(y)$  ise  $s$ . sıra istatistiğinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonlarının alt parçalarını ( $0 < y < \beta$ ) ifade eder. Bu alt çarpım momente dair yineleme bağıntıları ise aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

**Teorem 3.6.1.**  $1 \leq r + 1 < s \leq n$  ise

$$L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{\alpha r}{k + \alpha r} L\mu_{r+1,s;n}^{(k,l)} \quad (3.6.2.)$$

**İspat:**

$$L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = C_{r,s;n} \int_0^\beta y^l * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(y) * \left[ \int_0^y x^k [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} f_1(x) dx \right] dy \quad (3.6.3.)$$

ifadesi  $f_1(x) = \alpha F_1(x)/x$  bağıntısını kullanılarak;

$$\begin{aligned} & \int_0^y x^k [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} f_1(x) dx \\ &= \alpha \int_0^y x^{k-1} [F_1(x)]^r [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} dx \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$u = [F_1(x)]^r [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1}, \quad x^{k-1} dx = dv, \quad v = x^k/k$$

$$\begin{aligned} du &= [r[F_1(x)]^{r-1}[F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1}f_1(x) \\ &\quad - (s-r-1)[F_1(x)]^r[F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2}f_1(x)]dx \end{aligned}$$

olmak üzere, kısmi integrasyon uygulandığında;

$$\begin{aligned} \int_0^y u dv &= uv - \int_0^y v du \\ &= \frac{x^k [F_1(x)]^r [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1}}{k} \Big|_0^y \\ &\quad + \frac{(s-r-1)}{k} \int_0^y x^k [F_1(x)]^r [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2} f_1(x) dx \\ &\quad - \frac{r}{k} \int_0^y x^k [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} f_1(x) dx \\ &= \frac{(s-r-1)}{k} \int_0^y x^k [F_1(x)]^r [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2} f_1(x) dx \\ &\quad - \frac{r}{k} \int_0^y x^k [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} f_1(x) dx \end{aligned}$$

olarak elde edilerek (3.6.3.) ifadesinde yerine yazılırsa;

$${}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{\alpha C_{r,s;n}(s-r-1)}{k} \int_0^{\beta y} x^k y^l [F_1(x)]^r [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2}$$

$$\begin{aligned}
& * [1 - F_1(x)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\
& - \frac{\alpha r C_{r,s;n}}{k} \iint_{00}^{\beta y} x^k y^l [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\
& * [1 - F_1(x)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned}
& \iint_{00}^{\beta y} x^k y^l [F_1(x)]^r [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2} [1 - F_1(x)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\
& = {}_L\mu_{r+1,s;n}^{(k,l)} \frac{r!(s-r-2)!(n-s)!}{n!}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \iint_{00}^{\beta y} x^k y^l [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2} [1 - F_1(x)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\
& = {}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} / C_{r,s;n}
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
{}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= \frac{\alpha C_{r,s;n} (s-r-1)}{k} {}_L\mu_{r+1,s;n}^{(k,l)} \frac{r!(s-r-2)!(n-s)!}{n!} \\
& - \frac{\alpha r C_{r,s;n}}{k} {}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} / C_{r,s;n}
\end{aligned}$$

ifadesi düzenlenirse;

$${}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{\alpha r}{k+\alpha r} {}_L\mu_{r+1,s;n}^{(k,l)} \quad , \quad 2 \leq r < s \leq n \quad \text{bağıntısı elde edilir.}$$

**Teorem 3.6.2.**  $2 \leq r < s \leq n$  ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$${}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{\beta^{(\alpha-1)(r-1)}} {}_L\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k+\alpha,l)} \quad (3.6.4.)$$

**İspat:** (3.6.1.) eşitliğinde  $[F_1(x)]^{r-1}$  ifadesi  $[F_1(x)]^{r-2}F_1(x)$  olarak parçalanıp  $F_1(x)$  değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= C_{r,s;n} \int_0^\beta \int_0^y x^k y^l [F_1(x)]^{r-2} F_1(x) [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\
&\quad * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\
&= C_{r,s;n} \int_0^\beta \int_0^y x^k y^l [F_1(x)]^{r-2} \beta \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\
&\quad * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\
&= \frac{C_{r,s;n}}{\beta^{(\alpha-1)}} \int_0^\beta \int_0^y x^{k+\alpha} y^l [F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\
&\quad * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned}
&\int_0^\beta \int_0^y x^{k+\alpha} y^l [F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\
&= L\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k+\alpha,l)} \frac{(r-2)! (s-r-1)! (n-s)!}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= \frac{C_{r,s;n}}{\beta^{(\alpha-1)}} L\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k+\alpha,l)} \frac{(r-2)! (s-r-1)! (n-s)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{n}{\beta^{(\alpha-1)}(r-1)} L\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k+\alpha,l)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Teorem 3.6.3.**  $1 \leq r < s \leq n - 1$  ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$${}_{L}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{n-s} \left[ {}_{L}\mu_{r,s;n-1}^{(k,l)} - {}_{L}\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+\alpha)} / \beta^{\alpha-1} \right] \quad (3.6.5.)$$

**İspat:** (3.6.1.) eşitliğinde  $[1 - F_1(y)]^{n-s} = [1 - F_1(y)]^{n-s-1} [1 - F_1(y)]$  açılımı kullanılarak;

$$\begin{aligned} {}_{L}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= C_{r,s;n} \iint_{00}^{\beta y} x^k y^l [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_1(y)]^{n-s-1} \\ &\quad * \left( 1 - \beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^\alpha \right) f_1(x) f_1(y) dx dy \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} {}_{L}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= C_{r,s;n} \iint_{00}^{\beta y} x^k y^l [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\ &\quad * [1 - F_1(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_1(y) dx dy \\ &\quad - \frac{C_{r,s;n}}{\beta^{\alpha-1}} \iint_{00}^{\beta y} x^k y^{l+\alpha} [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\ &\quad * [1 - F_1(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_1(y) dx dy \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} &\iint_{00}^{\beta y} x^k y^l [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_1(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_1(y) dx dy \\ &= {}_{L}\mu_{r,s;n-1}^{(k,l)} \frac{(r-1)! (s-r-1)! (n-s-1)!}{(n-1)!} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^{\beta y} \int_0^y x^k y^{l+\alpha} [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_1(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_1(y) dx dy \\ &= {}_L\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+\alpha)} \frac{(r-1)! (s-r-1)! (n-s-1)!}{(n-1)!} \end{aligned}$$

olmak üzere;

$${}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{n-s} \left[ {}_L\mu_{r,s;n-1}^{(k,l)} - {}_L\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+\alpha)} / \beta^{\alpha-1} \right] \text{ bağıntısı elde edilir.}$$

**Teorem 3.6.4.**  $3 \leq r < s - 1 \leq n - 1$  ,  $2\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$\begin{aligned} {}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= \frac{\alpha n(n-1)}{\beta^{2(\alpha-1)}(k+2\alpha)(r-1)} \\ & * \left[ {}_L\mu_{r-1,s-2;n-2}^{(k+2\alpha,l)} - {}_L\mu_{r-2,s-2;n-2}^{(k+2\alpha,l)} \right] \end{aligned} \quad (3.6.6.)$$

**İspat:** (3.6.1.) eşitliğinde  $[F_1(x)]^{r-1}$  ifadesi  $[F_1(x)]^{r-2}F_1(x)$  olarak parçalanıp  $F_1(x)$  değeri yerine yazılıp  $(x)f_1(x) = \frac{x^{2\alpha-1}}{\beta^{2(\alpha-1)}}$  değeri yerine yazılarak;

$$\begin{aligned} {}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= C_{r,s;n} \int_0^{\beta y} \int_0^y \frac{x^{k+2\alpha-1}}{\beta^{2(\alpha-1)}} y^l [F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\ & * [1 - F_1(x)]^{n-s} f_1(y) dx dy \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ardından

$$L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{\alpha C_{r,s;n}}{\beta^{2(\alpha-1)}} \int_0^\beta y^l [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(y) \\ * \left[ \int_0^y x^{k+2\alpha-1} [F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} dx \right] dy$$

ifadesinde,  $x^{k+2\alpha-1} dx = dv$ ,  $[F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} = u$ ,  $v = \frac{x^{k+2\alpha}}{k+2\alpha}$  ve

$$[(r-2)[F_1(x)]^{r-3} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} f_1(x) \\ - (s-r-1)[F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2} f_1(x)] dx = du$$

olmak üzere, kısmi integrasyon;

$$\frac{x^{k+2\alpha} [F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1}}{k+2\alpha} \Big|_0^y \\ - \frac{r-2}{k+2\alpha} \int_0^y x^{k+2\alpha} [F_1(x)]^{r-3} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} f_1(x) dx \\ + \frac{s-r-1}{k+2\alpha} \int_0^y x^{k+2\alpha} [F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2} f_1(x) dx$$

olarak elde edilir. Bulunan ifadeler yerine yazılıp düzenlendiğinde;

$$L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{\alpha C_{r,s;n}}{\beta^{2(\alpha-1)}} \frac{s-r-1}{k+2\alpha} \iint_{00}^{\beta y} x^{k+2\alpha} y^l [F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2} \\ * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\ - \frac{\alpha C_{r,s;n}}{\beta^{2(\alpha-1)}} \frac{r-2}{k+2\alpha} \iint_{00}^{\beta y} x^{k+2\alpha} y^l [F_1(x)]^{r-3} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\ * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy$$

olarak elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} & \int_0^{\beta y} \int_0^{\beta y} x^{k+2\alpha} y^l [F_1(x)]^{r-2} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-2} [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\ &= L\mu_{r-1, s-2; n-2}^{(k+2\alpha, l)} \frac{(r-1)! (s-r-2)! (n-s)!}{(n-2)!} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^{\beta y} \int_0^{\beta y} x^{k+2\alpha} y^l [F_1(x)]^{r-3} [F_1(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(x) f_1(y) dx dy \\ &= L\mu_{r-2, s-2; n-2}^{(k+2\alpha, l)} \frac{(r-2)! (s-r-1)! (n-s)!}{(n-2)!} \end{aligned}$$

değerleri yerine yazıldığında;

$$L\mu_{r, s; n}^{(k, l)} = \frac{\alpha n(n-1)}{\beta^{2(\alpha-1)} (k+2\alpha)(r-1)} \left[ L\mu_{r-1, s-2; n-2}^{(k+2\alpha, l)} - L\mu_{r-2, s-2; n-2}^{(k+2\alpha, l)} \right],$$

ifadesi elde edilir.

**Teorem 3.6.5.**  $1 \leq r < s \leq n$  ,  $\alpha j \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$L\mu_{r, s; n}^{(k, l)} = \binom{n}{s} \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (-1)^j \frac{L\mu_{r, s; s}^{(k, l+\alpha j)}}{\beta^{j(\alpha-1)}} \quad (3.6.7.)$$

**İspat:** (3.6.1.) eşitliğinde

$$[1 - F_1(y)]^{n-s} = \left[ 1 - \beta \left( \frac{y}{\beta} \right)^\alpha \right]^{n-s} = \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (-1)^j \left( \frac{y^\alpha}{\beta^{\alpha-1}} \right)^j$$

binom açılımı uygulanarak;

$$L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = C_{r,s;n} \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (-1)^j \frac{1}{\beta^{j(\alpha-1)}} \int_0^\beta \int_0^y x^k y^{l+\alpha j} [F_1(x)]^{r-1} \\ * [F_1(y) - F_1(y)]^{s-r-1} f_1(x) f_1(y) dx dy$$

ifadesi elde edilir. Burada;

$$\int_0^\beta \int_0^y x^k y^{l+\alpha j} [F_1(x)]^{r-1} [F_1(y) - F_1(y)]^{s-r-1} f_1(x) f_1(y) dx dy \\ = L\mu_{r,s;s}^{(k,l+\alpha j)} \frac{(r-1)!(s-r-1)!}{s!}$$

ifadesi yerine yazıldığında;

$$L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \binom{n}{s} \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} (-1)^j \frac{L\mu_{r,s;s}^{(k,l+\alpha j)}}{\beta^{j(\alpha-1)}} \quad \text{bağıntısı elde edilir.}$$

**Teorem 3.6.6.**  $c = r + j$  ,  $1 \leq r < s \leq n - 1$  ,  $n \geq 2$  ,  $\alpha c \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{\alpha n!}{(r-1)!(s-r-1)!} \sum_{j=0}^{s-r-1} \binom{s-r-1}{j} (-1)^j \\ * \frac{\beta^{c(1-\alpha)}(s-c-1)!}{(n-c)!(\alpha c + 1)!} L\mu_{s-c;n-c}^{(\alpha c+2)} \quad (3.6.8.)$$

**İspat:** (3.6.1.) eşitliğinde  $[F_1(y) - F_1(y)]^{s-r-1}$  yerine binom açılımı yerine yazıldığında;

$$[F_1(y) - F_1(y)]^{s-r-1} = \sum_{j=0}^{s-r-1} \binom{s-r-1}{j} (-1)^j [F_1(y)]^{s-r-j-1} [F_1(x)]^j$$

olmak üzere;

$${}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = C_{r,s;n} \sum_{j=0}^{s-r-1} \binom{s-r-1}{j} (-1)^j \int_0^\beta \left[ \int_0^y x [F_1(x)]^{r+j-1} f_1(x) dx \right] \\ * y [F_1(x)]^{s-r-j-1} [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(y) dy$$

olarak elde edilir. Burada,  $F_1(x)$  ve  $f_1(x)$  değerleri yerine yazıldığında;

$$\int_0^y x [F_1(x)]^{r+j-1} f_1(x) dx = \frac{\alpha \beta^{c(1-\alpha)} y^{\alpha c+1}}{\alpha c + 1}$$

olmak üzere

$${}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = C_{r,s;n} \alpha \sum_{j=0}^{s-r-1} \binom{s-r-1}{j} (-1)^j \frac{\beta^{c(1-\alpha)}}{\alpha c + 1} \int_0^\beta y^{\alpha c+2} [F_1(y)]^{s-c-1} \\ * [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(y) dy$$

elde edilir. Burada;

$$\int_0^\beta y^{\alpha c+2} [F_1(y)]^{s-c-1} [1 - F_1(y)]^{n-s} f_1(y) dy \\ = {}_L\mu_{s-c;n-c}^{(\alpha c+2)} \frac{(s-c-1)! (n-s)!}{(n-c)!}$$

olmak üzere gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$${}_L\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{\alpha n!}{(r-1)! (s-r-1)!} \sum_{j=0}^{s-r-1} \binom{s-r-1}{j} (-1)^j \\ * \frac{\beta^{c(1-\alpha)} (s-c-1)!}{(n-c)! (\alpha c + 1)!} {}_L\mu_{s-c;n-c}^{(\alpha c+2)}$$

bağıntısı elde edilir.

### 3.6.2. Orta Çarpım Momentleri için Yineleme Bağlıları

STSP dağılımının  $0 < X_{r:n} < \beta < X_{s:n} < 1$  durumu için  $r.$  ve  $s.$  sıra istatistiklerinin orta çarpım momentleri aşağıdaki bağıntı kullanılarak elde edilir.

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = C_{r,s;n} \int_{\beta}^1 \int_0^{\beta} x^k y^l [F_1(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} * [1 - F_2(y)]^{n-s} f_1(x) f_2(y) dx dy \quad (3.6.9.)$$

Bu orta çarpım momentine dair yineleme bağıntıları aşağıdaki teoremlerde ifade edilmiştir.

**Teorem 3.6.7.**  $1 \leq r < s \leq n - 1$  ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{(n-s)(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j M\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+j)} \quad (3.6.10)$$

**İspat:**  $[1 - F_2(y)]^{n-s}$  ifadesi (3.6.9.) eşitliğinde;

$$[1 - F_2(y)]^{n-s-1} [1 - F_2(y)] = [1 - F_2(y)]^{n-s-1} \left[ 1 - (1-\beta) \left( \frac{1-y}{1-\beta} \right)^{\alpha} \right]$$

olarak ifade edilebilir. Bu durumda (3.6.9.) eşitliği

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{C_{r,s;n}}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \int_{\beta}^1 \int_0^{\beta} x^k y^l (1-y)^{\alpha} [F_1(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} * [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_2(y) dx dy$$

olarak elde edilir. Bu denklemde  $(1-y)^{\alpha}$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa;

$$(1-y)^\alpha = \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j y^j$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= \frac{C_{r,s;n}}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j \int_{\beta 0}^{1\beta} x^k y^{l+j} [F_1(x)]^{r-1} \\ &\quad * [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_2(y) dx dy \end{aligned} \quad (3.6.11.)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte

$$\begin{aligned} &\int_{\beta 0}^{1\beta} x^k y^{l+j} [F_1(x)]^{r-1} * [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ &= M\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+j)} \frac{(s-r-1)! (n-s-1)! (r-1)!}{(n-1)!} \end{aligned}$$

ifadesi yerine yazılıp sadeleştirmeler yapılırsa;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{(n-s)(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j M\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+j)}$$

bağıntısı elde edilir eşitliği elde edilir.

**Teorem 3.6.8.**  $2 \leq r < s - 1 \leq n - 1$  ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n(n-1)}{(n-s)(r-1)[\beta(1-\beta)]^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j M\mu_{r-1,s-1;n-2}^{(k+\alpha,l+j)} \quad (3.6.12.)$$

**İspat:** (3.6.11.) eşitliğinde  $[F_1(x)]^{r-1}$  ifadesi  $[F_1(x)]^{r-2}[F_1(x)] = [F_1(x)]^{r-2}\beta\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha$  olarak denklemde yerine yazılırsa, eşitlik;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{C_{r,s;n}}{[\beta(1-\beta)]^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j \int_{\beta_0}^{1\beta} x^{k+\alpha} y^{l+j} [F_1(x)]^{r-2} \\ * [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_2(y) dx dy$$

olarak elde edilir. Burada

$$\int_{\beta_0}^{1\beta} x^{k+\alpha} y^{l+j} [F_1(x)]^{r-2} [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ = M\mu_{r-1,s-1;n-2}^{(k+\alpha,l+j)} \frac{(s-r-1)! (n-s-1)! (r-2)!}{(n-2)!}$$

ifadesi yerine yazılıp sadeleştirmeler yapılırsa;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n(n-1)}{(n-s)(r-1)[\beta(1-\beta)]^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j M\mu_{r-1,s-1;n-2}^{(k+\alpha,l+j)}$$

bağıntısı elde edilir.

**Teorem 3.6.9.**  $2 \leq r < s \leq n$  ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{(r-1)\beta^{\alpha-1}} M\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k+\alpha,l)} \quad (3.6.13.)$$

**İspat:** (3.6.9.) eşitliğinde  $[F_1(x)]^{r-1}$  ifadesi;  $[F_1(x)]^{r-2}[F_1(x)] = [F_1(x)]^{r-2}\beta\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha$  olarak yerine yazılırsa;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{C_{r,s;n}}{\beta^{\alpha-1}} \int_{\beta 0}^{1\beta} x^{k+\alpha} y^l [F_1(x)]^{r-2} [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} * [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_1(x) f_2(y) dx dy$$

olarak elde edilir. Burada;

$$\int_{\beta 0}^{1\beta} x^{k+\alpha} y^l [F_1(x)]^{r-2} [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s} f_1(x) f_2(y) dx dy = M\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k+\alpha,l)} \frac{(s-r-1)! (n-s)! (r-2)!}{(n-1)!}$$

ifadesi yukarıdaki eşitlikte yerine yazılıp sadeleştirmeler yapılırsa;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{(r-1)\beta^{\alpha-1}} M\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k+\alpha,l)} \quad \text{bağıntısı elde edilir.}$$

**Teorem 3.6.10.**  $1 \leq r < s \leq n$  ,  $\alpha(n-s) \in \mathbb{Z}^+$  ise;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n!}{s! (n-s)! (1-\beta)^{(\alpha-1)(n-s)}} \sum_{j=0}^{\alpha(n-s)} \binom{\alpha(n-s)}{j} (-1)^j M\mu_{r,s;s}^{(k,l+j)} \quad (3.6.14.)$$

**İspat:** (3.6.9.) ifadesinde;  $[1 - F_2(y)]^{n-s} = \frac{(1-y)^{\alpha(n-s)}}{(1-\beta)^{(\alpha-1)(n-s)}}$  eşitliğinde yer alan;  $(1-y)^{\alpha(n-s)}$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa;

$$(1-y)^{\alpha(n-s)} = \sum_{j=0}^{\alpha(n-s)} \binom{\alpha(n-s)}{j} (-1)^j y^j$$

olmak üzere;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{C_{r,s;n}}{(1-\beta)^{(\alpha-1)(n-s)}} \sum_{j=0}^{\alpha(n-s)} \binom{\alpha(n-s)}{j} (-1)^j$$

$$* \int_{\beta_0}^{1\beta} \int_{\beta_0}^{1\beta} x^k y^{l+j} [F_1(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} f_1(x) f_2(y) dx dy$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte;

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_0}^{1\beta} \int_{\beta_0}^{1\beta} x^k y^{l+j} [F_1(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ &= M\mu_{r,s;s}^{(k,l+j)} \frac{(s-r-1)! (r-1)!}{s!} \end{aligned}$$

olmak üzere ;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n!}{s! (n-s)! (1-\beta)^{(\alpha-1)(n-s)}} \sum_{j=0}^{\alpha(n-s)} \binom{\alpha(n-s)}{j} (-1)^j M\mu_{r,s;s}^{(k,l+j)}$$

bağıntısı elde edilir.

**Teorem 3.6.11.**  $1 \leq r < s \leq n$  ,  $\alpha(r-1) \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n!}{(n-r+1)! (r-1)! \beta^{(\alpha-1)(r-1)}} M\mu_{1,s-r+1;n-r+1}^{(k+\alpha(r-1),l)} \quad (3.6.15.)$$

**İspat:** (3.6.9.) eşitliğinde  $[F_1(x)]^{r-1} = \left[\frac{x^\alpha}{\beta^{\alpha-1}}\right]^{r-1}$  ifadesi yerine yazılırsa;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{C_{r,s;n}}{\beta^{(\alpha-1)(r-1)}} \iint_{\beta_0}^{1\beta} x^{k+\alpha(r-1)} y^l [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} \\ * [1 - F_2(y)]^{n-s} f_1(x) f_2(y) dx dy$$

eşitliği elde edilir. Burada;

$$\iint_{\beta_0}^{1\beta} x^{k+\alpha(r-1)} y^l [F_2(y) - F_1(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s} f_1(x) f_2(y) dx dy \\ = M\mu_{r,s;n-1}^{(k+\alpha(r-1),l)} \frac{(s-r-1)! (n-s)!}{(n-r+1)!}$$

ifadesi yukarıdaki eşitlikte yerine yazılıp sadeleştirmeler yapıldığında;

$$M\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n!}{(n-r+1)! (r-1)! \beta^{(\alpha-1)(r-1)}} M\mu_{1,s-r+1;n-r+1}^{(k+\alpha(r-1),l)}$$

bağıntısı elde edilir.

### 3.6.3. Üst Çarpım Momentleri için Yineleme Bağlıları

STSP dağılımının  $\beta < X_{r:n} < X_{s:n} < 1$  durumu için  $r.$  ve  $s.$  sıra istatistiklerinin üst çarpım momentleri aşağıdaki bağıntı kullanılarak elde edilir.

$$U\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = C_{r,s;n} \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k y^l [F_2(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} \\ * [1 - F_2(y)]^{n-s} f_2(x) f_2(y) dx dy \quad (3.6.16.)$$

Bu üst çarpım momentine dair yineleme bağıntıları aşağıdaki teoremlerde ifade edilmiştir.

**Teorem 3.6.12.**  $1 \leq r < s \leq n - 1$  ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$${}_{U}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{(n-s)(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j {}_{U}\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+j)} \quad (3.6.17.)$$

**İspat:**  $[1 - F_2(y)]^{n-s} = [1 - F_2(y)]^{n-s-1} [1 - F_2(y)] = [1 - F_2(y)]^{n-s-1} \frac{(1-y)^\alpha}{(1-\beta)^{\alpha-1}}$

ifadesi (3.6.16.) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$${}_{U}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{C_{r,s;n}}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k y^l (1-y)^\alpha [F_2(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} \\ * [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_2(x) f_2(y) dx dy$$

eşitliği elde edilir. Burada  $(1-y)^\alpha$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa

$$(1-y)^\alpha = \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j y^j$$

olmak üzere

$${}_{U}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{C_{r,s;n}}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k y^{l+j} [F_2(x)]^{r-1} \\ * [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_2(x) f_2(y) dx dy$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte;

$$\begin{aligned} & \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k y^{l+j} [F_2(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s-1} f_2(x) f_2(y) dx dy \\ &= {}_{U}\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+j)} \frac{(r-1)! (s-r-1)! (n-s)!}{(n-1)!} \end{aligned}$$

ifadesi yerine yazılıp sadeleştirmeler yapıldığında;

$${}_{U}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{(n-s)(1-\beta)^{\alpha-1}} \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j {}_{U}\mu_{r,s;n-1}^{(k,l+j)}$$

bağıntısı elde edilir.

**Teorem 3.6.13.**  $2 \leq r < s \leq n$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$${}_{U}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n}{r-1} \left[ {}_{U}\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k,l)} - \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j {}_{U}\mu_{r-1,s-1;n-1}^{(k+j,l)}}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \right] \quad (3.6.18.)$$

**İspat:**  $[F_2(x)]^{r-1} = [F_2(x)]^{r-2} [F_2(x)] = [F_2(x)]^{r-2} \left[ 1 - (1-\beta) \left( \frac{1-x}{1-\beta} \right)^\alpha \right]$  olmak üzere (3.6.16.)' de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} {}_{U}\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= C_{r,s;n} \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k y^l [F_2(x)]^{r-2} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} \\ &\quad * [1 - F_2(y)]^{n-s} f_2(x) f_2(y) dx dy \\ &- (1-\beta)^{1-\alpha} C_{r,s;n} \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k (1-x)^\alpha y^l [F_2(x)]^{r-2} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} \\ &\quad * [1 - F_2(y)]^{n-s} f_2(x) f_2(y) dx dy \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integralde yer alan  $(1 - x)^\alpha$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa;

$$(1 - x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j x^j$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} & \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k y^l [F_2(x)]^{r-2} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s} f_2(x) f_2(y) dx dy \\ &= U\mu_{r-1, s-1; n-1}^{(k, l)} \frac{(r-2)! (s-r-1)! (n-s)!}{(n-1)!} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \iint_{\beta\beta}^{1y} x^{k+j} y^l [F_2(x)]^{r-2} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s} f_2(x) f_2(y) dx dy \\ &= U\mu_{r-1, s-1; n-1}^{(k+j, l)} \frac{(r-2)! (s-r-1)! (n-s)!}{(n-1)!} \end{aligned}$$

ifadeleri yerine yazılıp sadeleştirmeler yapıldığında;

$$U\mu_{r, s; n}^{(k, l)} = \frac{n}{r-1} \left[ U\mu_{r-1, s-1; n-1}^{(k, l)} - \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (-1)^j U\mu_{r-1, s-1; n-1}^{(k+j, l)}}{(1-\beta)^{\alpha-1}} \right]$$

bağıntısı elde edilir.

**Teorem 3.6.14.**  $1 \leq r < s \leq n$  ,  $\alpha (n - s) \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$U\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n!}{s!(n-s)!(1-\beta)^{(\alpha-1)(n-s)}} \sum_{j=0}^{\alpha(n-s)} \binom{\alpha(n-s)}{j} (-1)^j U\mu_{r,s;s}^{(k,l+j)} \quad (3.6.19.)$$

**İspat:** (3.6.16.) eşitliğinde  $[1 - F_2(y)]^{n-s} = \frac{(1-y)^{\alpha(n-s)}}{(1-\beta)^{(\alpha-1)(n-s)}}$  olmak üzere,  $(1-y)^{\alpha(n-s)}$  ifadesine binom açılımı uygulanırsa;

$$(1-y)^{\alpha(n-s)} = \sum_{j=0}^{\alpha(n-s)} \binom{\alpha(n-s)}{j} (-1)^j y^j$$

olmak üzere;

$$U\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{C_{r,s;n}}{(1-\beta)^{(\alpha-1)(n-s)}} \sum_{j=0}^{\alpha(n-s)} \binom{\alpha(n-s)}{j} (-1)^j \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k y^{l+j} * [F_2(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} f_2(x) f_2(y) dx dy$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte;

$$\begin{aligned} & \iint_{\beta\beta}^{1y} x^k y^{l+j} [F_2(x)]^{r-1} [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} f_2(x) f_2(y) dx dy \\ &= U\mu_{r,s;s}^{(k,l+j)} \frac{(s-r-1)!(r-1)!}{s!} \end{aligned}$$

olmak üzere gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$U\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = \frac{n!}{s!(n-s)!(1-\beta)^{(\alpha-1)(n-s)}} \sum_{j=0}^{\alpha(n-s)} \binom{\alpha(n-s)}{j} (-1)^j U\mu_{r,s;s}^{(k,l+j)}$$

bağıntısı elde edilir.

**Teorem 3.6.15.**  $2 \leq r < s \leq n$  ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  ise

$$\begin{aligned}
 {}_U\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \\
 &\quad * \frac{1}{(1-\beta)^{j(\alpha-1)}} \sum_{i=0}^{\alpha j} \binom{\alpha j}{i} (-1)^i {}_U\mu_{1,s-r+1;n-r+1}^{(k+i,l)}
 \end{aligned} \tag{3.6.20}$$

**İspat:**  $[F_2(x)]^{r-1} = \left[1 - \frac{(1-x)^\alpha}{(1-\beta)^{(\alpha-1)}}\right]^{r-1}$  değeri binom açılımı uygulanarak (3.6.16.) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\left[1 - \frac{(1-x)^\alpha}{(1-\beta)^{(\alpha-1)}}\right]^{r-1} = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \frac{(1-x)^{\alpha j}}{(1-\beta)^{j(\alpha-1)}}$$

ve bu binom açılımında yer alan  $(1-x)^{\alpha j}$  ifadesine de binom açılımı uygulanarak ;

$$(1-x)^{\alpha j} = \sum_{i=0}^{\alpha j} \binom{\alpha j}{i} (-1)^i x^i$$

olmak üzere;

$$[F_2(x)]^{r-1} = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \frac{1}{(1-\beta)^{j(\alpha-1)}} \sum_{i=0}^{\alpha j} \binom{\alpha j}{i} (-1)^i x^i$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, elde edilen  $[F_2(x)]^{r-1}$  değeri (3.6.16.) de yerine yazılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$U\mu_{r,s;n}^{(k,l)} = C_{r,s;n} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \frac{1}{(1-\beta)^{j(\alpha-1)}} \sum_{i=0}^{\alpha j} \binom{\alpha j}{i} (-1)^i \iint_{\beta\beta}^{1y} x^{k+i} y^l [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s} f_2(x) f_2(y) dx dy$$

Bu eşitlikte

$$\begin{aligned} & \iint_{\beta\beta}^{1y} x^{k+i} y^l [F_2(y) - F_2(x)]^{s-r-1} [1 - F_2(y)]^{n-s} f_2(x) f_2(y) dx dy \\ &= U\mu_{1,n-r+1:s-r+1}^{(k+i,l)} \frac{(s-r-1)! (n-s)!}{(n-r+1)!} \end{aligned}$$

eşitliği yerine yazılır gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} U\mu_{r,s;n}^{(k,l)} &= \frac{n!}{(r-1)! (n-r+1)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \\ & * \frac{1}{(1-\beta)^{j(\alpha-1)}} \sum_{i=0}^{\alpha j} \binom{\alpha j}{i} (-1)^i U\mu_{1,s-r+1:n-r+1}^{(k+i,l)} \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilmiş olur.

Özetleyecek olursak, STSP dağılımının sıra istatistiklerinin kısmi çarpım ve tekli momentleri için elde edilen yineleme bağıntıları yukarıdaki teoremlerde verilmiştir. Bu yineleme bağıntıları tekli momentler için kullanışlı olsa da, çarpım momentleri için çok da kullanışlı değildir. Bunun sebebi ise STSP dağılımının matematiksel yapısından kaynaklanmaktadır. Çarpım momentleri için elde edilen bağıntılara bakıldığında eşitliklerin her iki tarafında yer alan momentlerin derecelerinin farklı olduğu gözlemlenmektedir. Bu da hesaplama açısından bir takım zorlukları beraberinde getirdiğinden, bu bağıntıları kullanışsız hale getirebilmektedir.



#### 4. UYGULAMA

$X$  rastgele değişkeni, iki yönlü kuvvet dağılımına sahip,  $\mu$  konum parametresi ve  $\sigma$  ölçek parametresi olmak üzere  $Y = \mu + \sigma X$  dönüşümü yapılarak  $\mu$  ve  $\sigma$  nin modele dahil edildiği  $Y$  değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(y; \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sigma} \left[ \frac{(y - \mu)}{\sigma} \right]^{\alpha-1} & , \mu < y \leq \mu + \beta\sigma \\ \frac{\alpha}{\sigma} \left[ \frac{1 - (y - \mu)}{\sigma} \right]^{\alpha-1} & , \mu + \beta\sigma < y \leq \mu + \sigma \end{cases} \quad (4.1.)$$

$$-\infty < \mu < \infty \quad \text{ve} \quad \sigma > 0$$

olarak ifade edilir. Bu durumda  $X$  rastgele değişkeninin örnek uzayı  $(0,1)$  aralığından  $(\mu, \mu + \alpha)$  aralığına genişler.  $Y$  rastgele değişkeni yine de sınırlı bir dağılıma sahip olur. Bu durumda  $Y$  rastgele değişkeninin dağılımı ise  $\mu = a$  ve  $\sigma = b - a$  olmak üzere standart olmayan  $TSP(\alpha, \beta, \mu, \sigma)$  olarak ifade edilir (Kotz ve van Dorp, 2004, s97).

Bu bölümde, sıra istatistiklerinin momentlerinin bir uygulaması olarak konum ve ölçek parametrelerinin en iyi doğrusal yansız tahmin edicileri (BLUE) araştırılmıştır. STSP dağılımına ait bir  $X$  r.d. konum ve ölçek parametrelerinin bir doğrusal fonksiyonu olarak  $Y$  r.d. ifade edildikten sonra STSP için elde edilen bağıntılar kullanılarak TSP dağılımına ait sonuçlar elde edilmiştir.

Sağ üçgensel dağılım (Downtown, 1954; Sarhan ve Greenberg, 1962), güç fonksiyonu dağılımı (Sultan ve ark, 2000) gibi birçok dağılım için literatürde konum-ölçek parametreleri için BLUE değerlerinin hesaplanmasına dair çalışmalar bulunmaktadır.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ,  $STSP(\alpha, \beta, \mu, \sigma)$  dağılımından alınmış bir örneklem olmak üzere  $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}$  örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olur. Dolayısıyla

$$C = (A^T V^{-1} A)^{-1} A^T V^{-1}, \quad A = (1, \xi), \quad 1^T = (1, \dots, 1)$$

$$y^T = (y_{1:n}, \dots, y_{n:n}), \quad \xi^T = (\xi_{1:n}, \dots, \xi_{n:n}), \quad \xi_{r:n} = E(X_{r:n})$$

ve  $V$  ise  $X$  rastgele değişkenlerinin sıra istatistiklerinin varyans-kovaryans matrisi olmak üzere (tüm vektörlerin boyutu  $n * 1$ )  $\mu$  ve  $\sigma$ ' nın BLUE vektörü

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = Cy$$

olarak ele edilir. Tahminlerin varyans-kovaryans matrisi ise

$$(A^T V^{-1} A)^{-1} \sigma^2$$

ile elde edilir (Çetinkaya ve Genç, 2016).

Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2.' de simetrik STSP dağılımı ( $\beta = 0.5$ ) için  $\mu$  ve  $\sigma$  nın BLUE katsayıları  $\alpha = 0.5, 1, 1.5, \dots, 4.5$  ve  $n = 2, 3, \dots, 10$  değerleri için verilmiştir. Benzer  $\alpha$  ve  $n$  değerleri için  $\mu$  ve  $\sigma$  nın BLUE değerlerinin varyans ve kovaryans katsayıları da Çizelge 4.3.' te verilmiştir.  $X$  simetrik olduğunda;

$$\xi_{i:n} = 1 - \xi_{n-i+1:n}, \quad Var(X_{i:n}) = Var(X_{n-i+1:n}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

olur. Simetrik STSP dağılımı için simetri noktasının BLUE değerleri  $\hat{\mu} + 0.5\hat{\sigma}$  olarak elde edilir. Ayrıca,  $0 < p < 1$  olmak üzere  $\sigma$  bilindiğinde simetrik STSP dağılımının kitle kantili,  $p$ . BLUE değerleri  $\hat{\mu} + \hat{\sigma} F^{-1}(p; \alpha, \beta = 0.5)$  olarak elde edilir ( $F^{-1}$  3.4.2. de verilmiştir). Tahminin varyansı ise aşağıdaki bağıntı kullanılarak elde edilir.

$$Var(\hat{\mu}) + (F^{-1}(p; \alpha, \beta = 0.5))^2 Var(\hat{\sigma}) + 2F^{-1}(p; \alpha, \beta = 0.5) Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$$

Çizelge 4.1. Simetrik STSP dağılımına ait  $\mu$  değerinin BLUE katsayıları

$n$	$r$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3$	$\alpha = 3.5$	$\alpha = 4$	$\alpha = 4.5$
2	1	1,7	2	2,318182	2,642857	2,970588	3,3	3,630435	3,961538	4,293103
2	1	-0,7	-1	-1,318182	-1,642857	-1,970588	-2,3	-2,630435	-2,961538	-3,293103
3	1	1,349708	1,5	1,654297	1,823129	2,004815	2,196051	2,394154	2,597222	2,803943
3	2	-0,099415	0	0,115648	0,210884	0,284488	0,341232	0,385606	0,42094	0,449585
3	3	-0,250292	-0,5	-0,769945	-1,034014	-1,289303	-1,537283	-1,77976	-2,018162	-2,253528
4	1	1,254253	1,333333	1,396324	1,477334	1,577868	1,692905	1,817964	1,94993	2,086743
4	2	-0,103611	0	0,147937	0,292747	0,427135	0,553007	0,673008	0,789096	0,902566
4	3	-0,028868	0	0,030488	0,031472	0,004749	-0,042271	-0,103492	-0,174713	-0,253122
4	4	-0,121775	-0,333333	-0,574748	-0,801553	-1,009751	-1,203641	-1,38748	-1,564313	-1,736187
5	1	1,212282	1,25	1,256356	1,28445	1,338128	1,41041	1,495099	1,588046	1,686612
5	2	-0,098876	0	0,139994	0,274936	0,400294	0,519217	0,634467	0,747716	0,859903
5	3	-0,034697	0	0,076577	0,150145	0,209044	0,254405	0,289472	0,317022	0,339076
5	4	-0,0102	0	-0,002224	-0,037233	-0,098019	-0,17543	-0,263308	-0,35793	-0,45705
5	5	-0,06851	-0,25	-0,470704	-0,672298	-0,849447	-1,008602	-1,155729	-1,294854	-1,428541
6	1	1,188981	1,2	1,168799	1,162407	1,18651	1,232368	1,292352	1,361507	1,436774
6	2	-0,093897	0	0,124961	0,239994	0,344818	0,444021	0,540534	0,635855	0,730711
6	3	-0,034563	0	0,088255	0,183586	0,271292	0,350768	0,424055	0,493014	0,558965
6	4	-0,014391	0	0,038677	0,066079	0,07411	0,066086	0,046446	0,018579	-0,015185
6	5	-0,003825	0	-0,015928	-0,063536	-0,132401	-0,213153	-0,300446	-0,391449	-0,484645
6	6	-0,042305	-0,2	-0,404764	-0,588531	-0,744329	-0,880091	-1,002942	-1,117505	-1,226619
7	1	1,174069	1,166667	1,108977	1,078267	1,081969	1,1099	1,153259	1,206456	1,266113
7	2	-0,089593	0	0,111652	0,209761	0,297373	0,379945	0,460397	0,540054	0,619493
7	3	-0,033394	0	0,085298	0,177895	0,264978	0,3465	0,424268	0,499699	0,573689
7	4	-0,015085	0	0,0578	0,11977	0,170385	0,209159	0,238799	0,261822	0,280065
7	5	-0,006689	0	0,016418	0,015765	-0,004983	-0,040518	-0,085957	-0,138015	-0,194604
7	6	-0,001347	0	-0,021385	-0,072064	-0,139956	-0,216143	-0,296177	-0,37799	-0,46061
7	7	-0,02796	-0,166667	-0,358761	-0,529393	-0,669766	-0,788844	-0,894589	-0,992026	-1,084146
8	1	1,16361	1,142857	1,065397	1,016358	1,004946	1,0198	1,05113	1,092826	1,141252
8	2	-0,08605	0	0,101711	0,18757	0,262807	0,333364	0,402102	0,470217	0,538196
8	3	-0,032032	0	0,077528	0,159489	0,236363	0,309109	0,379502	0,448677	0,517257
8	4	-0,014976	0	0,06349	0,137742	0,205625	0,265446	0,319014	0,368162	0,414218
8	5	-0,007439	0	0,036167	0,069883	0,088779	0,094055	0,089278	0,077387	0,060432
8	6	-0,003314	0	0,003445	-0,012619	-0,047038	-0,093495	-0,147337	-0,205771	-0,267162
8	7	-0,000323	0	-0,023112	-0,073218	-0,137574	-0,207818	-0,280218	-0,353247	-0,426296
8	8	-0,019476	-0,142857	-0,324627	-0,485206	-0,613909	-0,720461	-0,813471	-0,898252	-0,977896
9	1	1,155843	1,125	1,032049	0,968467	0,945253	0,950052	0,972216	1,005186	1,045108
9	2	-0,083221	0	0,094713	0,171986	0,238461	0,300412	0,360669	0,420354	0,479904
9	3	-0,030707	0	0,069493	0,140537	0,206614	0,269462	0,330793	0,391526	0,452098
9	4	-0,014591	0	0,061606	0,134551	0,203324	0,266545	0,325698	0,382167	0,436888
9	5	-0,007638	0	0,046629	0,101023	0,146119	0,180507	0,206564	0,226627	0,242406

Çizelge 4.1. (Devamı) Simetrik STSP dağılımına ait  $\mu$  değerinin BLUE katsayıları

$n$	$r$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3$	$\alpha = 3.5$	$\alpha = 4$	$\alpha = 4.5$
9	6	-0,003946	0	0,020713	0,033308	0,029818	0,013217	-0,012475	-0,044327	-0,080427
9	7	-0,001695	0	-0,003854	-0,027592	-0,067292	-0,116376	-0,170694	-0,227996	-0,287071
9	8	0,000101	0	-0,023173	-0,07148	-0,131969	-0,196743	-0,262589	-0,328354	-0,393669
9	9	-0,014146	-0,125	-0,298176	-0,450799	-0,570329	-0,667075	-0,750182	-0,825184	-0,895237
10	1	1,149876	1,111111	1,005533	0,929968	0,897182	0,893953	0,908868	0,934967	0,968209
10	2	-0,081026	0	0,089852	0,161	0,221074	0,276641	0,330542	0,383866	0,437026
10	3	-0,029508	0	0,062829	0,125059	0,182398	0,237073	0,290713	0,344077	0,397482
10	4	-0,014095	0	0,05649	0,122356	0,184893	0,243499	0,299527	0,354046	0,407699
10	5	-0,00761	0	0,049878	0,112183	0,168963	0,217905	0,260678	0,299082	0,334431
10	6	-0,004212	0	0,032593	0,067617	0,090683	0,101715	0,103738	0,099403	0,09057
10	7	-0,00219	0	0,010129	0,008617	-0,008442	-0,036865	-0,072636	-0,113133	-0,156752
10	8	-0,000872	0	-0,00777	-0,034881	-0,075789	-0,124016	-0,175923	-0,229711	-0,284491
10	9	0,000264	0	-0,022531	-0,068767	-0,125724	-0,185851	-0,246312	-0,30622	-0,365377
10	10	-0,010629	-0,111111	-0,277002	-0,423151	-0,535238	-0,624054	-0,699195	-0,766377	-0,828797

Çizelge 4.2. Simetrik STSP dağılımına ait  $\sigma$  değerinin BLUE katsayıları

$n$	$r$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3$	$\alpha = 3.5$	$\alpha = 4$	$\alpha = 4.5$
2	1	-2,4	-3	-3,636364	-4,285714	-4,941176	-5,6	-6,26087	-6,923077	-7,586207
2	2	2,4	3	3,636364	4,285714	4,941176	5,6	6,26087	6,923077	7,586207
3	1	-1,6	-2	-2,424242	-2,857143	-3,294118	-3,733333	-4,173913	-4,615385	-5,057471
3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1,6	2	2,424242	2,857143	3,294118	3,733333	4,173913	4,615385	5,057471
4	1	-1,376028	-1,666667	-1,971072	-2,278888	-2,587619	-2,896546	-3,205445	-3,514244	-3,82293
4	2	0,074743	0	-0,117449	-0,261275	-0,422386	-0,595278	-0,776501	-0,963809	-1,155688
4	3	-0,074743	0	0,117449	0,261275	0,422386	0,595278	0,776501	0,963809	1,155688
4	4	1,376028	1,666667	1,971072	2,278888	2,587619	2,896546	3,205445	3,514244	3,82293
5	1	-1,280792	-1,5	-1,72706	-1,956748	-2,187574	-2,419012	-2,650828	-2,882899	-3,115152
5	2	0,088676	0	-0,142218	-0,312169	-0,498314	-0,694647	-0,897775	-1,105646	-1,316952
5	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4	-0,088676	0	0,142218	0,312169	0,498314	0,694647	0,897775	1,105646	1,316952
5	5	1,280792	1,5	1,72706	1,956748	2,187574	2,419012	2,650828	2,882899	3,115152
6	1	-1,231287	-1,4	-1,573564	-1,750938	-1,930839	-2,11246	-2,295294	-2,479012	-2,663393
6	2	0,090072	0	-0,14089	-0,30353	-0,477219	-0,657173	-0,84098	-1,027304	-1,215356
6	3	0,020172	0	-0,049578	-0,117507	-0,197181	-0,284681	-0,377609	-0,474436	-0,57415
6	4	-0,020172	0	0,049578	0,117507	0,197181	0,284681	0,377609	0,474436	0,57415
6	5	-0,090072	0	0,14089	0,30353	0,477219	0,657173	0,84098	1,027304	1,215356
6	6	1,231287	1,4	1,573564	1,750938	1,930839	2,11246	2,295294	2,479012	2,663393
7	1	-1,202028	-1,333333	-1,467738	-1,607661	-1,751735	-1,898744	-2,047848	-2,198482	-2,35026
7	2	0,088246	0	-0,133037	-0,281825	-0,437329	-0,596087	-0,756574	-0,918044	-1,080103
7	3	0,026704	0	-0,068879	-0,16213	-0,269961	-0,387018	-0,510225	-0,637714	-0,768294

Çizelge 4.2. (Devamı) Simetrik STSP dağılımına ait  $\sigma$  değerinin BLUE katsayıları

$n$	$r$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3$	$\alpha = 3.5$	$\alpha = 4$	$\alpha = 4.5$
7	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	5	-0,026704	0	0,068879	0,16213	0,269961	0,387018	0,510225	0,637714	0,768294
7	6	-0,088246	0	0,133037	0,281825	0,437329	0,596087	0,756574	0,918044	1,080103
7	7	1,202028	1,333333	1,467738	1,607661	1,751735	1,898744	2,047848	2,198482	2,35026
8	1	-1,183086	-1,285714	-1,390024	-1,501564	-1,618856	-1,74026	-1,864601	-1,991079	-2,119148
8	2	0,085726	0	-0,124823	-0,260787	-0,40038	-0,541182	-0,68232	-0,823465	-0,964492
8	3	0,028718	0	-0,074083	-0,172108	-0,283401	-0,402604	-0,526838	-0,654448	-0,784419
8	4	0,007538	0	-0,027323	-0,067859	-0,116846	-0,171391	-0,229736	-0,290775	-0,353787
8	5	-0,007538	0	0,027323	0,067859	0,116846	0,171391	0,229736	0,290775	0,353787
8	6	-0,028718	0	0,074083	0,172108	0,283401	0,402604	0,526838	0,654448	0,784419
8	7	-0,085726	0	0,124823	0,260787	0,40038	0,541182	0,68232	0,823465	0,964492
8	8	1,183086	1,285714	1,390024	1,501564	1,618856	1,74026	1,864601	1,991079	2,119148
9	1	-1,169989	-1,25	-1,330225	-1,419266	-1,515582	-1,617127	-1,722398	-1,83037	-1,940345
9	2	0,083323	0	-0,117885	-0,243465	-0,37043	-0,497155	-0,623258	-0,748708	-0,873574
9	3	0,029013	0	-0,073348	-0,168129	-0,273905	-0,385837	-0,501486	-0,619522	-0,739168
9	4	0,010644	0	-0,040893	-0,101243	-0,173506	-0,253329	-0,338172	-0,426495	-0,517316
9	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	6	-0,010644	0	0,040893	0,101243	0,173506	0,253329	0,338172	0,426495	0,517316
9	7	-0,029013	0	0,073348	0,168129	0,273905	0,385837	0,501486	0,619522	0,739168
9	8	-0,083323	0	0,117885	0,243465	0,37043	0,497155	0,623258	0,748708	0,873574
9	9	1,169989	1,25	1,330225	1,419266	1,515582	1,617127	1,722398	1,83037	1,940345
10	1	-1,160504	-1,222222	-1,282535	-1,353118	-1,43242	-1,518008	-1,608063	-1,701344	-1,797005
10	2	0,08129	0	-0,112383	-0,229767	-0,346798	-0,462493	-0,576854	-0,690087	-0,802403
10	3	0,028636	0	-0,070599	-0,15994	-0,258187	-0,361089	-0,466636	-0,573789	-0,681973
10	4	0,011905	0	-0,046361	-0,113739	-0,193336	-0,280364	-0,372163	-0,467178	-0,564451
10	5	0,003399	0	-0,017285	-0,044566	-0,07828	-0,11619	-0,156939	-0,199679	-0,243862
10	6	-0,003399	0	0,017285	0,044566	0,07828	0,11619	0,156939	0,199679	0,243862
10	7	-0,011905	0	0,046361	0,113739	0,193336	0,280364	0,372163	0,467178	0,564451
10	8	-0,028636	0	0,070599	0,15994	0,258187	0,361089	0,466636	0,573789	0,681973
10	9	-0,08129	0	0,112383	0,229767	0,346798	0,462493	0,576854	0,690087	0,802403
10	10	1,160504	1,222222	1,282535	1,353118	1,43242	1,518008	1,608063	1,701344	1,797005

Çizelge 4.3. Simetrik STSP dağılımına ait  $\mu$  ve  $\sigma$  değerinin BLUE değerlerinin vars ve kovaryansları ( $x\sigma^2$ )

$n$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3$	$\alpha = 3.5$	$\alpha = 4$	$\alpha = 4.5$
2	0,200667	0,166667	0,156375	0,153486	0,153416	0,1545	0,156045	0,157742	0,159444
2	0,536	0,5	0,511216	0,530612	0,550173	0,568	0,583777	0,597633	0,609805
2	-0,268	-0,25	-0,255608	-0,265306	-0,275087	-0,284	-0,291889	-0,298817	-0,304903
3	0,082818	0,075	0,073579	0,074099	0,075381	0,076939	0,078553	0,080121	0,0816
3	0,191619	0,2	0,221082	0,241497	0,259273	0,274424	0,287332	0,298394	0,307947
3	-0,09581	-0,1	-0,110541	-0,120748	-0,129636	-0,137212	-0,143666	-0,149197	-0,153974

Çizelge 4.3. (Devamı) Simetrik STSP dağılımına ait  $\mu$  ve  $\sigma$  değerinin BLUE değerlerinin varyans ve kovaryansları ( $x\sigma^2$ )

$n$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 3$	$\alpha = 3.5$	$\alpha = 4$	$\alpha = 4.5$
4	0,04244	0,044444	0,046344	0,047962	0,049525	0,051037	0,052466	0,05379	0,055004
4	0,092143	0,111111	0,1326	0,151124	0,166464	0,179152	0,189737	0,198665	0,206279
4	-0,046072	-0,055556	-0,0663	-0,075562	-0,083232	-0,089576	-0,094868	-0,099333	-0,10314
5	0,024052	0,029762	0,033031	0,035048	0,036643	0,038046	0,039312	0,040456	0,041488
5	0,050581	0,071429	0,091442	0,107959	0,121326	0,132213	0,141192	0,148696	0,155048
5	-0,02529	-0,035714	-0,045721	-0,05398	-0,060663	-0,066107	-0,070596	-0,074348	-0,077524
6	0,014584	0,021429	0,025236	0,027385	0,028935	0,03023	0,031366	0,032375	0,033276
6	0,030139	0,05	0,068191	0,082959	0,094776	0,104316	0,112126	0,118615	0,124081
6	-0,01507	-0,025	-0,034096	-0,041479	-0,047388	-0,052158	-0,056063	-0,059308	-0,06204
7	0,009317	0,016204	0,020167	0,022331	0,023815	0,025013	0,026044	0,02695	0,027753
7	0,019057	0,037037	0,053478	0,066776	0,077361	0,08586	0,092786	0,098516	0,103325
7	-0,009528	-0,018519	-0,026739	-0,033388	-0,03868	-0,04293	-0,046393	-0,049258	-0,051662
8	0,006211	0,012698	0,016634	0,018761	0,020174	0,021288	0,022234	0,023057	0,023782
8	0,012623	0,028571	0,043445	0,055512	0,065099	0,072772	0,079004	0,084144	0,088445
8	-0,006311	-0,014286	-0,021722	-0,027756	-0,032549	-0,036386	-0,039502	-0,042072	-0,044222
9	0,004291	0,010227	0,014048	0,016113	0,017457	0,018498	0,019373	0,02013	0,020792
9	0,008685	0,022727	0,03623	0,04726	0,056024	0,063025	0,068697	0,073363	0,07726
9	-0,004342	-0,011364	-0,018115	-0,02363	-0,028012	-0,031512	-0,034348	-0,036682	-0,03863
10	0,003057	0,008418	0,012083	0,014078	0,015356	0,016334	0,017148	0,017849	0,018461
10	0,006169	0,018519	0,030831	0,040981	0,049054	0,055496	0,060705	0,064984	0,068549
10	-0,003084	-0,009259	-0,015416	-0,02049	-0,024527	-0,027748	-0,030353	-0,032492	-0,034275

#### 4.1. Gerçek Veri Uygulaması

Kotz ve Van Dorp (2004), AbouRizk (1990) tarafından kullanılan kamyonların taşıma sürelerine (Hauling data set) ait 85 birimlik bir inşaat mühendisliği veri kümesini maksimum olabilirlik tahmin prosedürü kullanarak üçgensel, beta ve  $TSP(\alpha, \beta, a, b)$  dağılımlarına uyarlamıştır. Sonuç olarak bu veriyi  $\hat{\alpha} = 3,463$  ,  $\hat{\beta} = 0,5375$  ,  $\hat{\mu} = 1,632$  ve  $\hat{\sigma} = 7,941$  parametrelerine sahip TSP dağılımının daha iyi modellediğini gözlemlemişlerdir. Tezin bu kısmında bu veri kümesi elde edilen sonuçların uygulamasında kullanılacaktır.

Çizelge 4.4.  $\hat{\alpha} = 3,463$  ,  $\hat{\beta} = 0,5375$  ,  $\hat{\mu} = 1,632$  ,  $\hat{\sigma} = 7,941$  değerleri için STSP dağılımının  $r$ . sıra istatistiğinin beklenen değer ve standart hataları

$r$	$\mu_{r:85}$	$\sigma_{r:85}$
5	3,834005	0,2830580
15	4,698485	0,2096815
25	5,195701	0,1743802
35	5,563985	0,1485138
45	5,865758	0,1313972
55	6,162530	0,1423472
65	6,530196	0,1678546
75	7,059771	0,2068688
85	8,431520	0,3627847

Sıra istatistiklerinin momentlerinin bir uygulaması olarak TSP dağılıma uygun kamyonların taşıma sürelerinin verilerinin  $r$ . sıra istatistiğinin beklenen değer  $\mu$  ve standart hataları  $\sigma$  sonuçları hesaplanmış ve Çizelge 4.4.' de verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde,  $r = 5,10,15, \dots, 85$  değerleri için elde edilen standart hataların önce azalma gösterdiği ve sonlara doğru tekrar artışa geçtiği gözlemlenmiştir. Maksimum ve minimum sıra istatistiklerinin varyanslarının maksimum düzeyde olduğu düşünüldüğünde bu sonucun normal olduğu söylenebilir.

Ayrıca maksimum olabilirlik tahmin metodu yardımıyla elde edilen ön bilgi kullanılarak  $\alpha = 3,5$  ve  $\beta = 0,5$  olmak üzere  $\mu$  ve  $\sigma$  parametrelerinin  $\hat{\mu}$  ve  $\hat{\sigma}$  BLUE

tahminleri araştırılmıştır. Çizelge 4.5.' te verilen parametrelerin BLUE katsayıları incelendiğinde  $\hat{\mu} = 2,03896$  ve  $\hat{\sigma} = 7,129354$  olarak elde edilmiştir. Tahminlerin varyansı  $Var(\hat{\mu}) = 0,064562\sigma^2$ ,  $Var(\hat{\sigma}) = 0,050402\sigma^2$  ve kovaryansı ise  $Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = -0,060888\sigma^2$  olarak elde edilmiştir.

Verinin ortalaması hesaplandığında 5,690353 ve standart hatasının ise 0,1262923 olduğu görülmüştür. Diğer yandan,  $E(X) = E(X_{1:1}) = \frac{(\alpha-1)\beta+1}{\alpha+1}$  olduğundan, kamyonlarının taşıma sürelerinin ortalamasının BLUE tahmini ise

$$\eta = \mu + \frac{\sigma}{2} = 2,03896 + \frac{7,129354}{2} = 5,603637$$

olarak elde edilir. Tahminin varyansı ise;

$$\begin{aligned} SE(\hat{\eta}) &= \sqrt{Var(\hat{\eta})} = 0,050402 \sqrt{0,064562 + \frac{0,050402}{4} - 0,060888} \\ &= 0,006429861 \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde, BLUE sonucu elde edilen standart hatanın daha düşük olduğu gözlemlenmektedir.

Çizelge 4.5. Kamyon taşıma verilerinin  $\mu$  ve  $\sigma$  değerlerinin BLUE katsayıları

$\hat{\mu}$ katsayıları			$\hat{\sigma}$ katsayıları		
0,594347	-0,000354	-0,000014	-0,848715	0,001319	0,000088
1,021808	-0,000018	-0,000008	-2,562826	-0,001669	0,000065
0,000647	0,001223	0,000004	0,087733	-0,003167	-0,000027
-0,048396	-0,000943	0,000007	0,144628	0,014663	-0,000039
-0,008271	-0,003694	-0,000001	0,024872	0,019542	0,000013
0,000397	-0,033922	0,000002	-0,001538	0,111944	-0,000022
0,000118	-0,023476	-0,000003	-0,000569	-0,000990	0,000026
-0,000059	0,296088	0,000013	0,000192	-1,816403	-0,000093
0,000035	-0,264164	-0,000009	-0,000128	1,447715	0,000050
0,000013	-1,588769	-0,000004	-0,000041	9,662083	0,000038
0,000001	1,149333	0,000005	-0,000003	-6,464600	-0,000020
0,000003	0,055729	-0,000006	-0,000008	-0,674629	0,000034
-0,000005	-0,249308	0,000003	0,000022	1,303846	-0,000021
-0,000003	0,128723	-0,000001	0,000007	-0,617334	0,000007
0,000003	-0,014412	0,000003	-0,000008	0,099420	-0,000019
0,000001	-0,004277	0,000002	-0,000003	0,046194	-0,000018
-0,000001	-0,009532	-0,000008	0,000002	0,038013	0,000048
0,000000	-0,002639		0,000002	0,007195	
0,000002	0,003159		-0,000003	-0,014498	
0,000001	0,000045		-0,000002	0,003146	
0,000000	0,002084		0,000001	-0,014822	
0,000000	-0,001532		0,000000	0,008496	
0,000001	0,000196		0,000001	-0,001058	
0,000001	-0,000272		0,000001	0,001952	
-0,000001	0,000084		0,000000	-0,000271	
0,000000	0,000368		0,000005	-0,002378	
0,000001	-0,000198		-0,000002	0,001227	
-0,000008	0,000008		0,000009	-0,000077	
-0,000009	-0,000048		0,000034	0,000315	
-0,000002	0,000021		-0,000035	-0,000084	
-0,000017	-0,000008		0,000069	0,000036	
-0,000022	0,000003		0,000156	-0,000070	
-0,000009	0,000020		0,000060	-0,000101	
0,000079	0,000004		0,001065	-0,000039	



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İki yönlü kuvvet dağılımı sıra istatistikleri açısından çalışılarak sıra istatistiklerinin momentleri hesaplanmış ve bu momentlerin daha hızlı ve kolay hesaplanabilmesi için dağılıma özgü moment yineleme bağıntıları elde edilmiştir. Dağılımın iki yönlü bir dağılım olması nedeniyle çalışması zor olduğundan moment yineleme bağıntıları da kısmi olarak düşünülmüş ve her bir parçaya uygun sonuçlar alt, üst kısmi tekli moment ve alt, orta, üst kısmi çarpım moment olarak ayrı ayrı elde edilerek bu bağıntıların kullanılabilirliği anlatılmıştır. Elde edilen bağıntılarla sıra istatistiklerine dair tüm momentler hesaplanmıştır. Fakat yineleme bağıntıları tekli momentleri için kullanışlı olsada, çarpım momentleri için çok da kullanışlı çıkmamaktadır. Dağılımın matematiksel yapısından kaynaklı olarak yineleme bağıntıların her iki yanında yer alan momentlerin derecelerindeki farklılık bu bağıntıların kullanılmasında yer alan en büyük sorun olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu soruna alternatif bir çözüm önerisi ise daha önce sıra istatistiklerinin çarpım momentlerine dair bulunan genel teoremleri (David ve Nagaraja,2003; Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja, 1992) kullanmak olabilir, ayrıca bu çalışmalara katkı olarak ileride bu sorunun çözümüne yönelik yeni çalışmalar da ortaya çıkabilir.

Sıra istatistiklerinin momentleri yardımıyla sıra istatistiklerinin doğrusal bir fonksiyonu olan L-momentler kullanılarak veriyi özetlemek amacıyla L-varyasyon katsayısı, L-çarpıklık ve L-basıklık katsayıları incelenmiş ve elde edilen sonuçlar tablo halinde verilmiştir. Parametrelerin farklı değerlerine göre verinin değişimini L-momentler yardımıyla da nasıl incelenebileceği gösterilmiştir.

Ayrıca minimum ve maksimum sıra istatistiklerinin limit durumları incelendiğinde, bu limit dağılımların dejenere dağılıma sahip ve kullanışsız olduğu gösterilmiştir. Bu olumsuzluğu gidermek için minimum ve maksimum sıra istatistiklerinin asimptotik davranışları incelenmiş ve her iki durumda da STSP dağılımının sıra istatistiklerinin limit dağılımının Weibull dağılımının çekimi altında olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla bu ilişki kullanılarak asimptotik sonuçlar minimum ve maksimum sıra istatistikleri için ayrı ayrı elde edilmiş ve kesin değerlerle karşılaştırma yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve parametrelerin farklı

durumlarına göre kullanılabilirliği açıklanmıştır. Özellikle  $\alpha < 1$  durumunda asimptotik sonuçların hatalı çıktığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak da asimptotik sonuçların daha az standart hataya sahip olduğu ve daha sağlıklı sonuçlar verdiği sonucuna varılmıştır.

Son bölümde ise TSP dağılımının sıra istatistiklerinin momentleri yardımıyla ortalama ve standart hataların BLUE tahmin edicileri örnek olarak hesaplanmıştır. Ardından gerçek veri üzerinde bir uygulama olarak daha önce  $TSP(\alpha, \beta, a, b)$  dağılımına uygun olduğu Kotz ve van Dorp (2004) tarafından belirtilen kamyon taşıma süreleri verisi ele alınarak sıra istatistiklerinin momentleri yardımıyla  $\mu$  ve  $\sigma$  parametrelerinin en iyi doğrusal yansız tahmin edicileri (BLUE) elde edilerek sonuçlar hesaplanmıştır. Sonuç olarak da BLUE tahminlerinin daha düşük standart hataya sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Özet olarak bu çalışmada, TSP dağılımının sıra istatistiklerinin momentleri ve bu momentlere dair yineleme bağıntıları, L-momentleri ve minimum ve maksimum sıra istatistiklerinin asimptotik davranışları ele alınmıştır. Elde edilen sonuçların bir örnek üzerinde uygulaması yapılarak etkin bir kullanıma sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

## KAYNAKLAR

- ABOURIZK, S., M., 1990. Input Modeling for Construction Simulation, [doctora dissertation]. Purdue University.
- ARNOLD, B. C., BALAKRISHNAN N., NAGARAJA, H. N., 1992. A First Course in Order Statistics. Wiley, New York, 1992.
- BALAKRISHNAN, N., COHEN, A. C., 1991. Order Statistics and Inference. Academic Press, 377s.
- BEKÇİ, M., 2009. Recurrence relations for the moments of order statistics from the uniform distribution. Sci. Res. Essays, 4(11), 1302-1305.
- ÇETİNKAYA, Ç., GENÇ, A., İ., 2016. Moments of order statistics of the standard two sided power distribution. (Submitted).
- DAVID, H., A., NAGARAJA, H., N., 2003. Order Statistics, third ed. Hoboken, New Jersey, Wiley, 458s.
- DOWNTOWN, F., 1954. Least-squares estimates using ordered observations. Ann. Math. Statist, 25:303-316.
- GENÇ, A. İ., 2012. Moments of order statistics of Topp-Leone distribution. Statistical Papers, 53: 117-131.
- HOSKING, J., R., 1990. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. Journal of Royal Statistical Society, 52: 105-124.
- JODRĂ, P., 2013. On order statistics from the Gompertz-Makeham distribution and the Lampert  $W$  function. Mathematical Modelling and Analysis, 18: 432-445.
- KOTZ, S., VAN DORP, J.R., 2004. Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications. World Scientific, Singapore, 2004b.

- MIRMOSTAFAEE, S., M., T., K., 2014. On the moments of order statistics coming from the Topp-Leone distribution. *Statistics and Probability Letters*, 95: 85-91.
- NAGARAJA, H., N., 2013. Moments of order statistics and L-moments for the symmetrical triangular distribution. *Statistics and Probability Letters*, 83: 2357-2363.
- SARHAN, A., E., GREENBERG, B., G., 1962. *Contributions to Order Statistics*. Wiley, 482s.
- SULTAN, K., S., CHILDS, A., BALAKRISHNAN, N., 2000. Higher order moments of order statistics from the power function distribution and edgeworth approximate inference. In: *Advanced in Stochastic Simulation Methods*. New York, Springer, s245-282.
- THOMAS, P., Y., SAMUEL P., 2008. Recurrence relations for the moments of order statistics from a beta distribution. *Statistical Papers*, 49: 139-146.
- VAN DORP , J. R., KOTZ, S., 2002a. The standard two-sided power distribution and its properties: With applications in financial engineering. *The American Statistician*, 56: 90-99.
- VAN DORP , J. R., KOTZ, S., 2002b. A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation. *The Statistician*, 51: 63-79.

## ÖZGEÇMİŞ

20/10/1985 yılında Ceyhan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Mersin'de tamamladı. 2003 yılında başladığı Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. 2010 yılında Mersin Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İşletme (Tezsiz) Anabilimdalı'nda yüksek lisansa başladı ve 2011 yılında tamamladı. 2012 yılında Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı (ÖYP) kapsamında Bingöl Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atanıp, ardından 2547 sayılı Yükseköğretim Kanunu'nun 35. Maddesi gereği yüksek lisans eğitimine Çukurova Üniversitesi'nde başladı. Halen burada araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.