T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YALINKAT FONKSİYONLARDA KATSAYI PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sercan KOCUROĞLU

Anabilim Dalı : Matematik Bilgisayar
Programı : Matematik Bilgisayar

Tez Danışmanı : Yar.Doç.Dr. Yaşar POLATOĞLU

Temmuz 2003

ÖNSÖZ

Yalınkat fonksiyonlarda katsayı problemlerinin çözümlerinin farklı yollardan ele alındığı ve p – Fold Kompleks mertebeden yıldızıl Janowski Fonksiyonlar Sınıfı için bir katsayı probleminin incelendiği bu tez çalışmasında

Fikirleriyle teze yön veren, desteğini esirgemeyen Sayın Yar. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU'na ve emeği geçen herkese sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bugüne kadar bana destek olan ve beni yalnız bırakmayan Aileme teşekkür ederim.

Sercan KOCUROĞLU

Temmuz 2003

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

İÇİNDEKİLER i

ÖZET iii

SUMMARY iv

BÖLÜM I.

1. Analitik Fonksiyonlar 1
   Bölgelerin Tanımı 1

2. Yalınkat Fonksiyonlar 21
   Küresel Metrik 25

3. Yalınkat Fonksiyonlar İçin
   Klasik Distorsiyon Teoremi 35

4. Kuvvet Serilerinde Bazı Teoremler 62
   Alan Teoremi İçin Katsayılar 62
   Katsayılar İçin Kesin Sınırlar 68

5. Pozitif Reel Kısmı Haiz
   Fonksiyonlar Sınıfı 73
   Katsayı Eşitsizliği 73

6. Spiral Fonksiyonlar 76

7. Spirallike Fonksiyonlar 82
   Giriş 82
   Katsayı Eşitsizliği 86

8. α' ıncı Mertebeden Sınırlı p –Valent

Robertson Fonksiyonları 95

Giriş 96

$F_M(\lambda,\alpha,p)$ ve $G_M(\lambda,\alpha,p)$ Sınıfları İçin

Gösterilim Formülleri 100

$F_M(\lambda,\alpha,p)$ ve $G_M(\lambda,\alpha,p)$ Sınıfları İçin

Katsayı Eşitsizlikleri 102

$G_M(\lambda,\alpha,p)$ Sınıfı İçin Distorsiyon ve

Rotasyon Teoremleri 117

$G_M(\lambda,\alpha,p)$, $M>1$ Sınıfı İçin Konvekslik

Yarıçapı 118

BÖLÜM II 122

p – Fold Kompleks Mertebeden Yıldızıl

Janowski Fonksiyonlar Sınıfı 122

KAYNAKLAR 131

ÖZGEÇMİŞ 134

ÖZET

Yalınkat fonksiyonların ve bu fonksiyonlardaki katsayı problemlerinin ele alındığı bu çalışmada, analitik fonksiyon kavramı ele alınarak analitik fonksiyonların temel özellikleri verildikten sonra, yalınkat fonksiyonlar ele alınıp bu fonksiyonlara ait temel özellikler incelenmiştir. Daha sonra bugüne dek yalınkat fonksiyonlarda katsayı eşitsizlikleri için çeşitli yazarlar tarafından yapılan çalışmaların bir kısmı incelenmiştir.

En son bölümde değerli hocalarım Yaşar Polatoğlu, Metin Bolcal ve Arzu Şen tarafından geliştirilen ve tezin kaynaklar bölümünde verilen bir makaledeki metod uygulanarak p – Fold kompleks mertebeden yıldızıl Janowski fonksiyonlar sınıfı için kesin katsayı eşitsizliği verilmiştir. $p = 1$ hali için söz konusu hocalarım tarafından 2003'te yayınlanmış olan katsayı eşitsizliği elde edilmekle birlikte bu sınıfın p parametresinin değişik değerleri için ihtiva ettiği sınıflara ait kesin katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir. $p = 2$ hali için söz konusu sınıflara ait tek fonksiyonların kesin katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir.

SUMMARY

In this study about the univalent functions and the coefficient problems in these functions, after considering the concept of analytic function and giving the basic properties of these functions, univalent function are considered and the basic properties of the univalent functions are studied. Then, some of the studies made to date by several authors about the univalent functions are inspected.

In the last chapter, the sharp coeficient inequation for the class of p – fold starlike Janowski functions of complex order is presented by applying the method which was developed by dear lecturers Yaşar Polatoğlu, Metin Bolcal and Arzu Şen and was given in an article introduced in the "References" part of this thesus. Beside obtaining the coefficient inequation for the case p = 1 which was published by above lecturers in 2003, the sharp coefficient inequations for the classes that this class contains for different values of the parameter p is also obtained. Finally, yhe sharp cofficient inequations of the odd functions of above mentioned classes for the case p = 2 is obtained.

ANALİTİK FONKSİYONLAR

Bölgelerin Tanımı

Tanım1.1.(Basit Bağlantılı Açık Eğri): Başlangıç ve bitim noktası farklı, kendi kendini kesmeyen eğriye basit bağlantılı açık eğri denir.

Tanım1.2.(Çok Bağlantılı Açık Eğri): Başlangıç ve bitim noktası farklı ve kendi kendini kesen eğriye çok bağlantılı açık eğri denir.

Tanım1.3.(Basit Bağlantılı Kapalı Eğri ve Basit Bağlantılı Bölge): Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan, kendi kendini kesmeyen eğriye basit bağlantılı kapalı eğri denir ve bu eğrinin kapattığı bölgeye de basit bağlantılı bölge denir.

Tanım1.4.(Çok Bağlantılı Kapalı Eğri ve Çok Bağlantılı Bölge): Başlangıç ve bitim noktası aynı olan ve kendi kendini kesen eğriye çok bağlantılı kapalı eğri denir ve bu eğrinin kapattığı bölgeye de çok bağlantılı bölge denir.

Tanım1.5.(Konveks Bölge): Bölge içinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası tamamen bölge içinde kalıyorsa, bu bölgeye konveks bölge denir. Aksi halde bölge konveks değildir.

Orjinden çıkan doğrular bölgenin sınırını en fazla bir noktada keserse bölge, orjine göre yıldızıl bölge adını alır.

NOT : Konveks bir bölge her noktasına göre yıldızıl bir bölgedir.

Tanım1.6.(Süreklilik): $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlanmış olsun. Bu D bölgesinde bir z_0 noktasının $\delta -$civarında aşağıdaki üç koşul gerçeklenirse fonksiyon z_0 noktasında süreklidir.

(i) $f(z)$ $z = z_0$ noktasında tanımlı olmalı.

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ varolmalıdır.

(iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L = f(z_0)$ eşitliği gerçeklenmelidir.

Örnek : $w = f(z) = z^2$ fonksiyonu $z = i$ noktasında süreklidir.

(i) $f(i) = i^2 = -1$

(ii) Limit tanımından, $\lim\limits_{z \to i} z^2 = -1$ bulunur.

(iii) $\lim\limits_{z \to i} z^2 = -1 = f(i)$ eşitliği gerçeklenir.

NOT : $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış tek değerli fonksiyon olsun. Eğer bu fonksiyon D bölgesinin bütün noktalarında sürekli ise bu fonksiyona D bölgesinde sürekli denir.

NOT : Limit teoremlerinden dolayı, süreklilik hakkında aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem1.1. $w = f(z)$ ve $w = g(z)$ fonksiyonları basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış tek değerli fonksiyonlar olsun. $z_0 \in D$ olmak üzere $w = f(z)$ ve $w = g(z)$ fonksiyonları $z = z_0$ noktasında sürekli fonksiyonlar ise,

(i) $(f(z) + g(z))$ fonksiyonu da z_0 noktasında süreklidir.

(ii) $(f(z) - g(z))$ fonksiyonu da z_0 noktasında süreklidir.

(iii) $(f(z) \cdot g(z))$ fonksiyonu da z_0 noktasında süreklidir.

(iv) $g(z_0) \neq 0$ koşulu ile $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)$ fonksiyonu da z_0 noktasında süreklidir.

Tanım1.7.(Sınırlı Fonksiyon): $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış tek değerli fonksiyon olmak üzere $\forall z \in D$ için $|f(z)| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı bulunabilirse $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde sınırlı fonksiyon denir.

Teorem1.2. $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış sürekli ve tek değerli fonksiyon olsun. Eğer fonksiyon D bölgesindeki bütün noktalarda sürekli ise, fonksiyon D'de sınırlıdır. (Eğer f(z) fonksiyonu, herhangi bir z değeri için birtek f(z) değeri alıyorsa, buna tek değerli fonksiyon denir.)

$$\left(\lim_{z \to z_0} f(z) = L \;\Rightarrow\; |f(z)| < |L| + 1 = M \text{ den dolayı} \right)$$

Teorem1.3. $w = f(z)$ ve $z = g(\varsigma)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım:

$w = f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında sürekli ve

$z = g(\varsigma)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında sürekli olsun. Bu takdirde $W = g(f(z))$ $z = z_0$ noktasında süreklidir.

Tanım1.8.(Düzgün Süreklilik): $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış ve tek değerli fonksiyon olsun. $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $|z_1 - z_2| < \delta$ olduğu takdirde $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ eşitsizliği daima gerçekleniyorsa, fonksiyon D bölgesinde düzgün süreklidir denir.

Örnek : $f(z) = z^2$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z| < 1\}$ bölgesinde düzgün sürekli midir?

$z_1, z_2 \in D \;\Rightarrow\; |z_1| < 1$ ve $|z_2| < 1$ 'dir. Buradan,

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1^2 - z_2^2| = |(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)| \le |z_1 - z_2| + |z_1 + z_2|$$

$$\le |z_1 - z_2|(|z_1| + |z_2|) < |z_1 - z_2| \cdot 2 \;\Rightarrow\; |f(z_1) - f(z_2)| < |z_1 - z_2| \cdot 2 \;\Rightarrow$$

$|f(z_1)-f(z_2)| < 2\delta = \varepsilon$ olduğundan fonksiyon $D=\{z \mid |z|<1\}$ bölgesinde düzgün süreklidir.

Tanım1.9.(Dallanma Noktası): $w=f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $z_0 \in D$ olmak üzere fonksiyonun z_0 noktasındaki değeri birden fazla ise (yani z_0 noktası fonksiyonun çok değerli olduğu bir nokta ise) z_0 noktasına $f(z)$ 'nin dallanma noktası denir.

Tanım.1.10.(Türev): $w=f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış olsun. Eğer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ varsa bu limit değerine fonksiyonun türevi denir ve $f'(z)=\dfrac{df}{dz}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ şeklinde yazılır.

Örnek : $w=f(z)=z^2$ fonksiyonunun türevini, türev tanımından hareket ederek, hesaplayınız.

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{z^2+2hz+h^2-z^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(2z+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2z+h)=2z$$

olarak bulunur.

Türev Üzerine Temel Teoremler

Teorem1.4. $w=f(z)$ ve $w=g(z)$ olmak üzere

(i) $F(z)=f(z)+g(z) \Rightarrow F'(z)=f'(z)+g'(z)$

(ii) $F(z)=f(z)-g(z) \Rightarrow F'(z)=f'(z)-g'(z)$

(iii) $F(z)=f(z)\cdot g(z) \Rightarrow F'(z)=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z)$

(iv) $F(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)} \quad \Rightarrow \quad F'(z)=\dfrac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)} \quad , g(z)\neq 0$

eşitlikleri vardır.

İspat:(i)

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\big(f(z+\Delta z)+g(z+\Delta z)\big)-\big(f(z)+g(z)\big)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]+[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z}+\frac{[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}\right]$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z}+\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}=f'(z)+g'(z)$$

(ii)

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\big(f(z+\Delta z)-g(z+\Delta z)\big)-\big(f(z)-g(z)\big)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]-[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z}-\frac{[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}\right]$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z}-\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}=f'(z)-g'(z)$$

(iii) $F'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\big(f(z+\Delta z)\cdot g(z+\Delta z)\big)-\big(f(z)\cdot g(z)\big)}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)\cdot g(z+\Delta z)-f(z)\cdot g(z+\Delta z)+f(z)\cdot g(z+\Delta z)-f(z)\cdot g(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z)[f(z+\Delta z) - f(z)] + f(z)[g(z+\Delta z) - g(z)]}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{g(z+\Delta z)[f(z+\Delta z) - f(z)]}{\Delta z} + \frac{f(z)[g(z+\Delta z) - g(z)]}{\Delta z} \right]$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z)[f(z+\Delta z) - f(z)]}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z)[g(z+\Delta z) - g(z)]}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} g(z+\Delta z) \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[f(z+\Delta z) - f(z)]}{\Delta z} + f(z) \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[g(z+\Delta z) - g(z)]}{\Delta z}$$

$$= f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

(iv) $F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\dfrac{f(z+\Delta z)}{g(z+\Delta z)} - \dfrac{f(z)}{g(z)}}{\Delta z}$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) \cdot g(z) - g(z+\Delta z) \cdot f(z)}{g(z+\Delta z) \cdot g(z) \cdot \Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) \cdot g(z) - g(z+\Delta z) \cdot f(z) + f(z)g(z) - f(z)g(z)}{g(z+\Delta z) \cdot g(z) \cdot \Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z)[f(z+\Delta z) - f(z)] - f(z)[g(z+\Delta z) - g(z)]}{g(z+\Delta z) \cdot g(z) \cdot \Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z)[f(z+\Delta z) - f(z)]}{g(z+\Delta z) \cdot g(z) \cdot \Delta z} - \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z)[g(z+\Delta z) - g(z)]}{g(z+\Delta z) \cdot g(z) \cdot \Delta z}$$

$$= \frac{g(z)}{g(z)} \left(\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{g(z+\Delta z)} \right) \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[f(z+\Delta z) - f(z)]}{\Delta z}$$

$$- \frac{f(z)}{g(z)} \left(\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{g(z+\Delta z)} \right) \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[g(z+\Delta z) - g(z)]}{\Delta z}$$

$$= \frac{g(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{g(z)} f'(z) - \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{g(z)} g'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - g'(z) \cdot f(z)}{(g(z))^2}$$

Teorem1.5.(Cauchy – Riemann Denklemleri) $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış ve türevi haiz bir fonksiyon olsun. Bu takdirde:

$$w = u(x,y) + i \cdot v(x,y) = f(z) \quad \Rightarrow (*) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

eşitlikleri vardır. (*) eşitliklerine Caucy – Riemann denklemleri denir.

İspat : $f'(z) = \underset{\Delta z \to 0}{Lim} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

$$= \underset{\Delta z + i\Delta y \to 0}{Lim} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + i \cdot v(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y) - i \cdot v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{Lim} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{Lim} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} \quad \Rightarrow \text{ sonuçta;}$$

$$\textbf{(1)} \quad f'(z) = \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{Lim} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{Lim} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte iki durum ayrı ayrı ele alınarak:

I.DURUM: $\left.\begin{array}{l} \Delta y = 0 \\ \Delta x \to 0 \end{array}\right\}$ alınırsa (1) eşitliği

$$\textbf{(2)} \quad f'(z) = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

II.DURUM: $\left.\begin{array}{l}\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0\end{array}\right\}$ alınırsa (1) eşitliği

$$\textbf{(3)}\ f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y} + i\frac{1}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$f(z)$ fonksiyonunun (2) ve (3) eşitlikleri ile elde edilen türevleri birbirine eşit olacağından

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{i}{i^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow$$

$$\textbf{(4)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

reel ve sanal kısımların eşitliğinden $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ve $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ bulunur.

Tanım1.11.(Analitik Fonksiyon): $f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış türevi haiz bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde analitik fonksiyon denir.

Tanım1.12.(Harmonik Fonksiyon): $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış türevi haiz bir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ diferansiyel denklemini gerçekliyorsa, bu fonksiyona harmonik fonksiyon denir.

Teorem:1.6. $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde bu fonksiyonun, hem reel hem de sanal kısımları harmonik fonksiyondur.

İspat: $w = u(x,y) + i.v(x,y) = f(z)$ şeklindedir. Burada Cauchy – Riemann denklemlerinden;

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

eşitlikleri yazılabilir. Schwarz teoreminden,

(2) $$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (u(x,y)\text{ harmonik})$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ &\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (u(x,y)\text{ harmonik})$$

oldukları görülür. Bu da ispatı istenen ifadedir.

Teorem:1.7. $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde; $f'(z), f''(z), f'''(z), \ldots, f^{(n)}(z)$ türevleri mevcuttur.

Teorem:1.8. $w = f(z)$ fonksiyonu C kapalı eğrisinin kapattığı bölgede ve C üzerinde tanımlı, regüler ve analitik olmak üzere, $|f(z)| \le M(r)$ eşitsizliğini gerçeklesin. Bu takdirde,

$$|f^n(a)| \le \frac{M(r)1.2.3....(n-1)n}{r^n}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $f(z)$ fonksiyonu $z = a$ noktasında TAYLOR AÇILIMI'na sahiptir.

(1)

$$w = f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n$$

şeklinde yazılabilir. $z = a$ noktası civarındaki a_n katsayısının

(2) $$a_n = \frac{f^n(a)}{1.2.3....(n-1).n} = \frac{f^n(a)}{n!}$$

olduğu görülür. Buradan,

(3) $$f^n(a) = a_n n!$$

yazılır. Ve ayrıca

(4) $$|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}$$

olduğunu biliyoruz. (3) ve (4) ifadelerinden

$$\left|f^{n}(a)\right| = \left|a_n n!\right| \leq \frac{M(r).n!}{r^n} = \frac{M(r)1.2.3....(n-1).n}{r^n} \Rightarrow$$

$$\left|f^{n}(a)\right| \leq \frac{M(r)1.2.3....(n-1).n}{r^n}$$

bulunur ki bu da ispatı istenen ifadedir.

Teorem:1.9. $w = f(z)$ fonksiyonu $\Omega = \left\{ z \middle| \; |z-a| \leq R \right\}$ bölgesinde tanımlanmış, regüler ve analitik olsun. Bu fonksiyonun Ω bölgesinde

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

şeklinde bir seriye açılabileceğini gösteriniz ve bu açılımdaki a_n katsayısının

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

olduğunu gösteriniz.

İspat: $(\zeta - a)^{-1} = \dfrac{1}{\zeta - a}$ fonksiyonu z – düzleminde ζ noktasını ihtiva etmeyen her bölgede yakınsak bir kuvvet serisine açılabileceğinden,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z + a - a} = \frac{1}{(\zeta - a) + (a - z)}$$

$$= \frac{1}{(\zeta - a)\left[1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right]} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)}$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

açılımını elde ederiz. Geometrik seri, değişkenin birden küçük olması ile yakınsaktır.

Dolayısıyla,

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-a|<|\zeta-a|$$

koşulu gerçeklendiği zaman yakınsaktır. Bu ise yukarıda bulunan açılımın, merkezi a'da bulunan ve ζ noktasından geçen her C dairesinin içinde yakınsak olduğunu belirtir. Dolayısıyla Cauchy – Integral formülünden hareketle,

$$f^{n}(a)=\frac{n!}{2i\pi}\int\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \Rightarrow$$

$$w=f(z)=\frac{0!}{2i\pi}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{0+1}}d\zeta=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z+a-a}d\zeta=\frac{1}{2i\pi}\int_C f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right](z-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-a)^n=f(z)$$

bulunur. Bu da gösterilmesi istenen ifadedir. Diğer taraftan $(z-a)^n$ teriminin katsayısı gözönüne alınırsa,

$$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

olduğu görülür.

Teorem:1.10. $w=f(z)$ fonksiyonu $\Omega=\left\{z \mid |z|\leq r\right\}$ bölgesinde analitik olsun. $|z|=r$ çemberlerinin resmi olan eğrinin uzunluğu L ise,

$$L\geq 2r\pi.|f'(0)|$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

İspat: Cauchy – Türev formülü,

(1)
$$f^{n}(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

idi. Buradan,

(2)
$$f'(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^{2}}dz$$

ifadesini yazabiliriz. (2) ifadesinde $a=0$ alırsak,

(3)
$$f'(0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(z)}{z^{2}}dz$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten,

(4)
$$|f'(0)|=\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C}\frac{f(z)}{z^{2}}dz\right|\leq\left|\frac{1}{2i\pi}\right|\left|\int_{C}\frac{f(z)}{z^{2}}dz\right|=\left|\frac{1}{2i\pi}\right|\int_{C}|f(z)|\left|\frac{1}{z^{2}}\right||dz|$$

eşitsizliği bulunur. Burada,

$z=re^{i\theta}\Rightarrow\ dz=ire^{i\theta}$ ifadelerini kullanırsak (4) eşitsizliği,

$$|f'(0)|\leq\frac{1}{2i\pi}\int_{C}|f(re^{i\theta})|\left|\frac{1}{(re^{i\theta})^{2}}\right||ire^{i\theta}d\theta|$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{C}|f(re^{i\theta})|\frac{1}{|re^{i\theta}|^{2}}i|re^{i\theta}d\theta|$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{C}|f(re^{i\theta})|\frac{1}{r^{2}}ir|d\theta|=\frac{i}{2i\pi}\int_{C}\frac{|f(re^{i\theta})d\theta|}{r}=\frac{1}{2r\pi}\int_{C}|f(z)dz|\Rightarrow$$

(5)
$$|f'(0)|\leq\frac{1}{2r\pi}\int_{C}|f(z)dz|\frac{1}{2r\pi}L$$

eşitsizliğine dönüşür. Bulunan bu son eşitsizlik aynı zamanda,

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2r\pi}L \quad \Leftrightarrow \quad |f'(0)|2r\pi \leq L$$

şeklinde yazılır ki bu da ispatı istenen ifadedir.

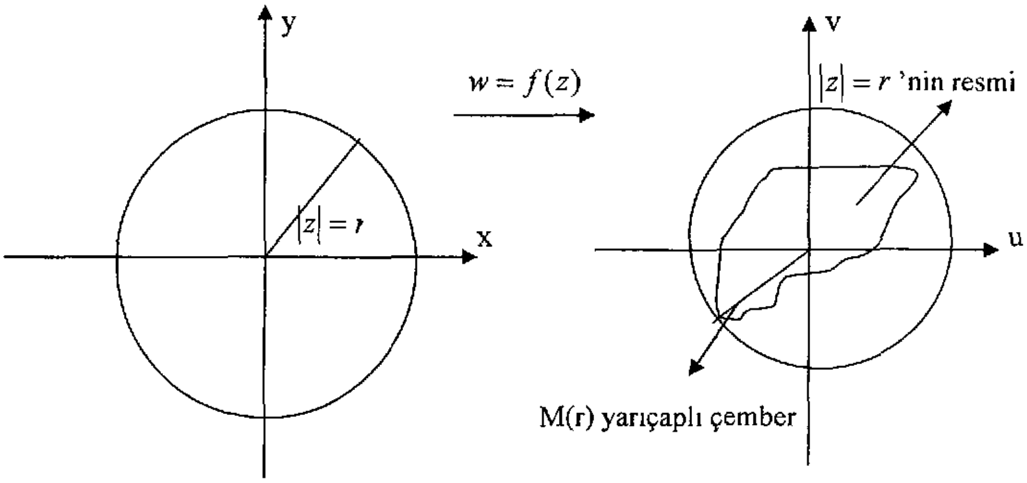
Teorem:1.11. $w = f(z)$ fonksiyonu $D = \left\{ z \,\middle|\, |z| \leq 1 \right\}$ basit bağlantılı bölgesinde tanımlanmış, analitik ve $|f(z)| \leq M(r)$ eşitsizliğini gerçeklesin. Bu takdirde $|z| = r$ çemberinin w = f(z) fonksiyonu ile yapılan tasvirinde elde edilen resim bölgesinin A alanının

$$\text{Alan A} \leq \pi(M(r))^2$$

eşitsizliğini gerçeklediğini gösteriniz.

İspat:

I.ÇÖZÜM:



Şekilde görüldüğü gibi $D_r = \left\{ z \,\middle|\, |z| < r \right\}$ bölgesi $w = f(z)$ fonksiyonu ile $f(D_r)$ resim bölgesi üzerine resmedilir. Öte yandan, $|f(z)| \leq M(r)$ eşitsizliği gerçeklendiğinden dolayı M(r) yarıçaplı çember $f(D_r)$ resim bölgesini ihtiva edecektir. Bu ise bize $f(D_r)$ resim bölgesinin alanının M(r) yarıçaplı çemberin alanından daha küçük olduğunu gösterir, bu ise

$$Alan f(D_r) = A \leq \pi (M(r))^2$$

olduğunu gösterir.

II.ÇÖZÜM:

Resim bölgesinin alanının

$$\textbf{(1)} \qquad \text{Alan } f(D_r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 d\phi$$

olduğunu daha önce göstermişik. Ayrıca, $z = \mathrm{Re}^{i\phi}$ alınırsa;

$$\textbf{(2)} \qquad \left|f(\mathrm{Re}^{i\phi})\right| = R \quad \Rightarrow \quad \left|f(\mathrm{Re}^{i\phi})\right|^2 = R^2$$

bulunur. Diğer yandan;

$$\textbf{(3)} \qquad |f(z)| = \left|f(\mathrm{Re}^{i\phi})\right| \leq M(r) \quad \Rightarrow \quad \left|f(\mathrm{Re}^{i\phi})\right|^2 \leq (M(r))^2$$

dir. (2) ve (3)' ten

$$\textbf{(4)} \qquad R^2 \leq (M(r))^2$$

elde edilir. Bulduğumuz (4) ifadesini (1)'de yerine yazacak olursak;

$$\textbf{(5)} \quad \left\{ \begin{aligned} & Alan f(D_r) = A \\ & \quad = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 d\phi \leq (M(r))^2 \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi = (M(r))^2 \frac{1}{2} 2\pi = \pi (M(r))^2 \Rightarrow \\ & Alan f(D_r) = A \leq \pi (M(r))^2 \end{aligned} \right.$$

eşitsizliğini elde ederiz ki, bu da ispatı istenen ifadedir.

Teorem:1.12. w = f(z) fonksiyonu basit bağlantılı $\Omega = \left\{ z \,\middle|\, |z| < 1 \right\}$ bölgesini Ω^* bölgesi üzerine resmetsin. w = f(z) fonksiyonu aynı zamanda Ω bölgesinde analitik ise,

$$Alanf(\Omega) = Alan\Omega^* = \iint_{\Omega} |f'(z)| dz$$

olduğunu gösteriniz.

İspat: w – düzleminde bir bölgenin alanının

$$\textbf{(1)} \qquad Alanf(\Omega) = Alan\Omega^* = \iint_{f(\Omega)} dudv = \iint_{\Omega^*} dudv$$

olduğunu Analiz derslerinden biliyoruz. Öte yandan,

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned} \right\} \text{ dir.}$$

f(z) Ω bölgesinde analitik olduğundan Cauchy – Riemann denklemlerini gerçekler. Yani,

$$\textbf{(2)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

eşitliklerini gerçekler. Burada dönüşümleri uygularsak,

$$\textbf{(3)} \quad \left\{ \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} du + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} du + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy$$

bulunur. (2) eşitliklerini (3)'te kullanırsak;

(4)

$$dudv = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} dxdy = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dxdy = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan f analitik olduğundan,

(5) $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca,

(6) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2$$

dir. (4), (5) ve (6)'dan;

$$dudv = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dxdy = \left| f'(z) \right|^2 dxdy \qquad \Rightarrow$$

(7) $$dudv = \left| f'(z) \right|^2 dxdy$$

eşitliğini elde ederiz. Bulduğumuz bu ifadeyi (1) eşitliğinde yerine yazılacak olursa,

(8) $$Alanf(\Omega) = Alan\Omega^* = \iint_{\Omega^*} dudv = \iint_{\Omega^*} \left| f'(z) \right|^2 dxdy$$

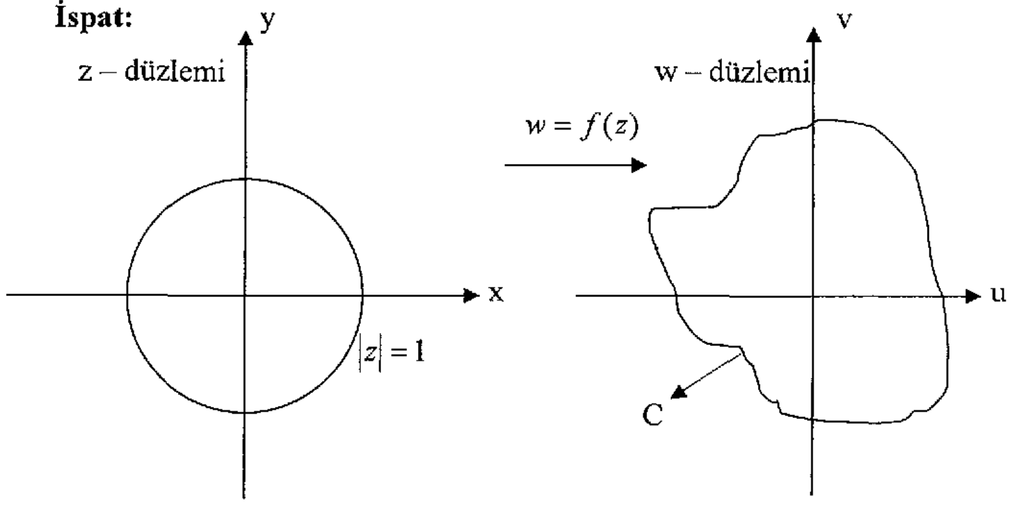
bulunur ki bu da ispatı istenen ifadedir.

Teorem:1.13. $w = f(z)$ fonksiyonu $|z| = 1$ çemberini C kapalı eğrisi üzerine resmetsin. Bu takdirde, C eğrisinin uzunluğunun,

$$UzunlukC = \int_C \left| f'(z) \right| dz$$

eşitliği ile verileceğini ispatlayınız.

İspat:



w düzlemindeki bir yayın uzunluğu

$$UzunlukC = L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

eşitliği ile verilir. Burada,

$$u = u(t) \quad , \quad v = v(t)$$

dir. Diğer taraftan,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

fonksiyonu analitik olduğundan ve

$$u = u(x, y) \quad , \quad v = v(x, y)$$

parametrelenişinden dolayı

(1) $$u = u(x, y)\ ,\ v = v(x, y) \Rightarrow x = x(t)\ ,\ y = y(t)$$

ifadeleri yazılabilir. Şimdi $u = u(x, y)$ ve $v = v(x, y)$' nin total diferansiyellerini yazalım:

(2) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad , \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy .$$

Ayrıca,

(3) $$\begin{cases} x = x(t) & \Rightarrow \quad dx = x'(t)dt \quad \text{ve} \\ y = y(t) & \Rightarrow \quad dy = y'(t)dt \quad \text{dir.} \end{cases}$$

(3) eşitlikleri (2)'de kullanılırsa,

(4) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}x'(t)dt + \frac{\partial u}{\partial y}y'(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}y'(t)$$

ve

(5) $$dv = \frac{\partial v}{\partial x}x'(t)dt + \frac{\partial v}{\partial y}y'(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}y'(t)$$

olur. $f(z)$ analitik olduğundan, Cauchy – Riemann,

(6) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

denklemleri gerçeklenir. Buradan,

(7)
$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = (x'(t))^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (y'(t))^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + (x'(t))^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + (y'(t))^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$= (x'(t))^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + (y'(t))\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

yazılır. Ayrıca,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

olduğu daha önceki problemden biliniyor. O zaman (7)'den ;

(8)

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=(x'(t))^2|f'(z)|^2+(y'(t))^2|f'(z)|^2=|f'(z)|^2\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$z(t)=x(t)+iy(t) \quad \Rightarrow \quad z'(t)=(x'(t)+iy'(t))dt \quad \Rightarrow$$

(9)
$$|z'(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=|dz|$$

bağıntısını yazabiliriz. (8) ve (9)'dan hareketle,

(10)
$$\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=\sqrt{|f'(z)|^2\left[(x'(t))^2+(y'(t))^2\right]}dt\\[2ex] =|f'(z)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=|f'(z)||dz|\end{cases}$$

elde ederiz. Son ifadenin, uzunluk ifadesinde yerine konulması ile,

(11)
$$UzunlukC=L=\int_C\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}|f'(z)||dz|$$

bulunur ki bu da ispatı istenen ifadedir.

YALINKAT FONKSİYONLAR

2.1.Tanım: Bir f(z) fonksiyonu, genişletilmiş düzlemde bulunan, bir Ω bölgesinde, var olabilen bir kutup noktası dışında, analitik ve $z_1, z_2 \in \Omega$ olmak üzere

$$z_1 \neq z_2 \text{ için } f(z_1) \neq f(z_2)$$

injektiflik koşulu gerçeklenirse, f(z) fonksiyonuna Ω bölgesinde YALINKAT'tır denir. Ω bölgesinde yalınkat olan bir f(z) fonksiyonu, Ω bölgesinin her alt bölgesinde de yalınkattır.

2.2.Özellik: Yalınkat iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

İspat: Bu ispatı yapmak için, iki ayrı ispat yapmalıyız. Önce, injektif iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da injektif olduğunu göstermeliyiz. Daha sonra ise, analitik iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da analitik olduğunu ispatlamalıyız. Böylece ispat tamamlanmış olacaktır.

(i) İnjektif iki fonksiyonun bileşke fonksiyonu da injektiftir.

$f:\Omega \to G$ injektif ve $g:G \to H$ injektif olsun.

Bu takdirde; $g \circ f:\Omega \to H$ injektiftir.

Gerçekten, $z_1, z_2 \in \Omega$ ise, f(z) fonksiyonunun injektifliğinden,

$$z_1 \neq z_2 \quad \Rightarrow \quad f(z_1) \neq f(z_2) \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, g(z) fonksiyonu G'de injektif olduğundan,

$$f(z_1) \neq f(z_2) \quad \Rightarrow \quad g(f(z_1)) \neq g(f(z_2)) \text{ dir.}$$

Bu da bize $g \circ f$ fonksiyonunun injektif olduğunu gösterir.

(ii) Şimdi ispatı tamamlamak için, analitik iki fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da analitik olduğunu gösterelim.

f(z) ve g(z) fonksiyonları analitik iki fonksiyon olsun.

$$(\mathrm{I}) \quad \lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}\,\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-f(z_0)}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}\,\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$w=f(z)$ dersek $w_0=f(z_0)$ olur. $f(z)$ in sürekliliğinden $z\to z_0$ olurken $w\to w_0$ olur ve

(**II**) $g(z)$ in analitik olması nedeni ile $\lim_{w\to w_0}\dfrac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=g'(w_0)$ dır.

(**III**) $f(z)$ in analitik olması nedeni ile $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$ dır.

Bulduğumuz bu sonuçları (I) ifadesinde yerine koyarsak,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=g'(w_0)f'(z_0)$$

bulunur.Bu da bize analitik iki fonksiyonun bileşke fonksiyonun analitik olduğunu gösterir.

2.3.Özellik: $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun yalınkat olması için gerek ve yeter koşul, $f(z)$ in yalınkat olmasıdır.

İspat: *Gereklik:* $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonu yalınkat olsun. Bu takdirde $g(z)=\dfrac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonu alınırsa, 2.2. Özelliğinden $g\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)$ fonksiyonu da yalınkattır.

Yani,

$g\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)=f(z)$ fonksiyonu da yalınkattır.

Yeterlik: $f(z)$ fonksiyonu yalınkat olsun. 2.2 Özelliğinden, $g(f(z))$ fonksiyonu da yalınkattır, yani $g(f(z))=\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonu da yalınkattır.

2.4.Tanım: z noktasının her civarında, A cümlesine ait z'den başka ancak sonlu sayıda eleman varsa, z noktasına, A cümlesinin bir İZOLE noktası denir.

2.5.Özellik: Analitik bir fonksiyon, bir noktanın bir civarında yalnız ve yalnız bu noktada sıfır olmayan bir türeve haiz ise, injektiftir. Dolayısıyla bir Ω bölgesinde yalınkat olan $f(z)$ fonksiyonu için $f'(z)\neq 0$ dır. Fakat tersi doğru değildir.

İspat: *Gereklik:* $w=f(z)$ fonksiyonu $z=z_0$ noktasında analitik olsun ve dahası $f'(z)\neq 0$ koşulunu gerçeklesin.

Şimdi $F(z)=f(z)-w_0$ fonksiyonunu tanımlayalım. Tanımdan dolayı $F(z)$ fonksiyonu z_0 da analitik ve $F'(z_0)=f'(z_0)\neq 0$ dır. O halde z_0 noktası için $F(z)$ fonksiyonun basit bir sıfırı vardır. Zira analitik fonksiyon için bir z_0 noktası,

$$F^{n}(z_0)\neq 0 \quad , \quad F^{n-1}(z_0)=0 \qquad (n=1,2,...)$$

olması halinde, n katlı bir sıfırdır. Taylor teoreminin neticelerinden hemen gösterilebilir ki analitik $F(z)$ fonksiyonunun sıfır noktası z_0, bir izole noktadır. $F(z)$'nin içinde ve onun üzerinde analitik ve $F'(z_0)\neq 0$ olduğu bir $|z-z_0|\leq\varepsilon$ civarı vardır. $f[\{|z-z_0|<\varepsilon\}]=\Gamma$ dersek, $w_0=f(z_0)$ noktası metrik topolojide bir kapalı cümle olan bu Γ eğrisinin tamamlayıcısında bulunacaktır. Bir açık cümle olan bu tamamlayıcı w_0'ın uygun bir $|w-w_0|<\delta$ açık civarını da ihtiva edecektir. $\left(\delta=\inf_{w\in\Gamma}|w-w_0|\right)$

Şimdi bir $a\in\{|w-w_0|<\delta\}$ alalım ve $G(z)=f(z)-a$ fonksiyonunu tanımlayalım. Tanımdan, $G(z)$ fonksiyonu da $\{|z-z_0|\le\varepsilon\}$'da analitiktir.

$$F(z)-G(z)=f(z)-w_0-f(z)+a \quad , \quad \varsigma=z_0+e^{i\theta}\varepsilon \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad \Rightarrow$$

$$|F(\varsigma)-G(\varsigma)|=|a-w_0|<\delta\le|f(\varsigma)-a|=|G(\varsigma)|$$

bulunur ki ROUCHE TEOREMİ'ne göre $G(z)$ ile $F(z)$'in $|z-z_0|<\varepsilon$ içinde birer tane sıfırı vardır.Yani $|a-w_0|<\delta$ koşulunu gerçekleyen $\forall a\in C$ için $f(z)-a=0$ olacak şekilde bir tek $z\in\{|z-z_0|<\varepsilon\}$ kompleks sayısı vardır. Dolayısıyla $f(z)$, z_0'ın bir

$$\Delta=f^{-1}\left[\{|w-w_0|<\delta\}\right]$$

dolayında injektiftir.

Yeterlik: $f(z)$ fonksiyonu z_0'ın bir dolayında injektif olsun. Bu takdirde $f(z)-a=0$'ın bir tek kökü bulunacaktır. $f(z)-w_0$'ın da bir tek kökü vardır ve bu basit bir sıfırdır. Yani, $f'(z_0)\neq 0$'dır. Fakat tersi doğru değildir. Bunu bir aksi örnekle ispatlayalım.

$w=e^{2\pi z}$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon $|z|<1$'de sıfır olmayan türevlere haiz olduğu halde yalınkat değildir. Gerçekten;

$\forall z\in\{|z|<1\}$ için $\left(e^{2\pi z}\right)'=2\pi e^{2\pi z}\neq 0$'dır, fakat injektif değildir. Zira,

$$\frac{i}{2},-\frac{i}{2}\in\{|z|<1\} \Rightarrow e^{2\pi\frac{i}{2}}=e^{i\pi}=-1=e^{2\pi\frac{-i}{2}}=e^{-i\pi}$$

dir. Yani $\frac{i}{2}\neq-\frac{i}{2}$ olduğu halde $e^{2\pi\frac{i}{2}}=e^{2\pi\frac{-i}{2}}$ dir. Yani injektif değildir.

2.6.Özellik : z_0 noktası yalınkat $f(z)$ fonksiyonunun bir kutbu ise, $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonu z_0 ın bir civarında analitiktir ve yalınkattır.

İspat : z_0 noktası $f(z)$ yalınkat fonksiyonunun kutbu olduğundan $\dfrac{1}{f(z_0)} = 0$ dır. O halde 2.5. özelliğinden, z_0 noktası $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun basit bir sıfırıdır ve z_0 ın bir civarında injektiftir. Dolayısıyla z_0 ın bir civarında yalınkattır.

2.7.Özellik : Yalınkat $f(z)$ fonksiyonu $\Omega \subset C \cup \{\infty\}$ bölgesini $f(A) \subseteq C \cup \{\infty\}$ üzerine birebir olarak resmeder. Küresel simetriye göre de süeklidir.

İspat : Bu ispatı yapabilmek için önce küresel metriği tanımlamamız gerekmektedir.

KÜRESEL METRİK (STEREOGRAFİK İZDÜŞÜM)

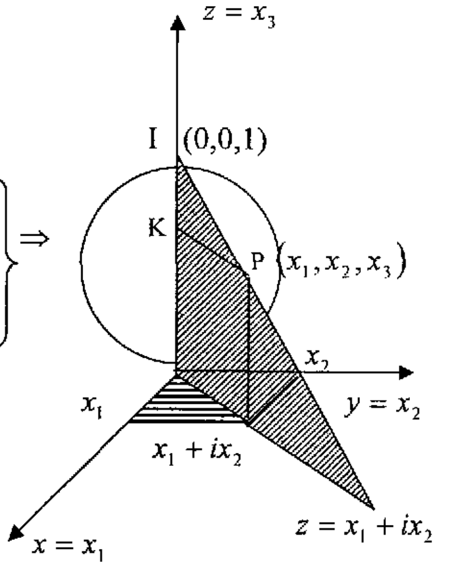
Büyük taralı üçgenden,

$\dfrac{IK}{IO} = \dfrac{KP}{OZ}$ yazabiliriz.

$$\left.\begin{aligned} IK &= 1 - x_3 \\ IO &= 1 \\ KP &= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (x_3 - x_3)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ OZ &= |z| \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{IK}{IO} = \frac{KP}{OZ} \Rightarrow \frac{1 - x_3}{1} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{|z|} \Rightarrow$$

$$(\text{I}) \quad |z| = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 - x_3} \quad \text{bulunur.}$$



Fakat diğer taraftan kürenin denklemi:

$$(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_3\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_3=0 \Rightarrow$$

$$x_1^2+x_2^2=x_3-x_3^2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2=x_3(1-x_3)$$

bulunur. Bunu (I) ifadesinde yerine koyarsak,

$$|z|=\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{1-x_3}=\frac{\sqrt{x_3(1-x_3)}}{1-x_3}=\frac{\sqrt{x_3}\sqrt{1-x_3}}{1-x_3}$$

$$=\frac{\sqrt{x_3}\sqrt{1-x_3}\sqrt{1-x_3}}{(1-x_3)\sqrt{1-x_3}}=\frac{\sqrt{x_3}(1-x_3)}{(1-x_3)\sqrt{1-x_3}}=\frac{\sqrt{x_3}}{\sqrt{1-x_3}} \Rightarrow$$

$$|z|=\sqrt{\frac{x_3}{1-x_3}}$$

bulunur. Diğer taraftan küçük, taralı üçgenden,

$$\left.\begin{aligned} Sin\theta &= \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ Cos\theta &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{aligned}\right\}$$

bulunur. Fakat kompleks sayıların diğer yazılışları da göz önüne alınacak olursa,

$z=x+iy=x_1+ix_2=|z|(Cos\theta+iSin\theta)$ dan hareket edersek ve

$$|z|=\sqrt{\frac{x_3}{1-x_3}} \quad \text{ve} \quad \sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{x_3(1-x_3)}$$

eşitlikleri de göz önüne alınacak olursa;

$$z=|z|(Cos\theta+iSin\theta)$$

$$=\sqrt{\frac{x_3}{1-x_3}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+i\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)=\sqrt{\frac{x_3}{1-x_3}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_3(1-x_3)}}+i\frac{x_2}{\sqrt{x_3(1-x_3)}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x_3}\,x_1}{\sqrt{1-x_3}\sqrt{x_3}\sqrt{1-x_3}} + i\frac{\sqrt{x_3}\,x_2}{\sqrt{1-x_3}\sqrt{x_3}\sqrt{1-x_3}} = \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}$$

bulunur ki bu da tekabülün 1-1 olduğunu gösterir. Gerçekten,

$$|z| = \sqrt{\frac{x_3}{1-x_3}} \quad \Rightarrow \quad |z|^2 = \frac{x_3}{1-x_3} \quad \Rightarrow$$

$$|z|^2(1-x_3) = x_3 \quad \Rightarrow \quad |z|^2 - |z|^2 x_3 = x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 + |z|^2 x_3 = |z|^2 \quad \Rightarrow \quad x_3\left(1+|z|^2\right) = |z|^2$$
$$\Rightarrow$$

$$x_3 = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad \Rightarrow \quad 1 - x_3 = 1 - \frac{|z|^2}{1+|z|^2} = \frac{1+|z|^2-|z|^2}{1+|z|^2} = \frac{1}{1+|z|^2}$$

bulunur. Bunu z nin eşitliğinde kullanırsak,

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3} = \frac{x_1+ix_2}{\dfrac{1}{1+|z|^2}} = \left(1+|z|^2\right)\left(x_1 + ix_2\right)$$

buluruz. O halde

$$\left.\begin{aligned} z &= \left(1+|z|^2\right)\left(x_1+ix_2\right) \\ \\ z &= \left(1+|z|^2\right)\left(x_1-ix_2\right) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}\right), \qquad x_1 = \frac{1}{2i}\left(\frac{z-\bar{z}}{1+|z|^2}\right)$$

bulunur. Küre üzrindeki noktalar ; (x_1, x_2, x_3) ve (x_1', x_2', x_3') ise,

$$d(z,z') = \sqrt{(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2 + (x_3-x_3')^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_1' + x_1'^2 + x_2^2 - 2x_2x_2' + x_2'^2 + x_3^2 - 2x_3x_3' + x_3'^2}$$

$$\Rightarrow \qquad d(z,z') = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\left(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'\right) + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$$

fakat, z ve z' noktaları küre üzerinde olduklarından kürenin denklemini gerçeklerler. Yani,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3 = 0 \quad , \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_3' = 0 \text{ dır. Dolayısıyla,}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_3 \quad \text{ve} \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_3' \text{ dür.}$$

Bu ifadeleri $d(z,z')$ eşitliğinde yerine koyalım :

$$\begin{aligned} d(z,z') &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3') + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} \\ &= \sqrt{x_3' + x_3 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')} \end{aligned} \quad \ldots(*)$$

haline gelir. Diğer taraftan,

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}\right) \quad , & x_1' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z'+\bar{z}'}{1+|z'|^2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z-\bar{z}}{1+|z|^2}\right) \quad , & x_2' = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z'-\bar{z}'}{1+|z'|^2}\right) \\ x_3 = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad , & x_3' = \dfrac{|z'|^2}{1+|z'|^2} \end{array}\right\} \text{ bağıntıları göz önünde bulundurulacak olursa;}$$

$$2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3') = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{z'+\bar{z}'}{1+|z'|^2}\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{z-\bar{z}}{1+|z|^2}\right)\frac{1}{2i}\left(\frac{z'-\bar{z}'}{1+|z'|^2}\right) + \left(\frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right)\left(\frac{|z'|^2}{1+|z'|^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left[(z+\bar{z})(z'+\bar{z}')-(z-\bar{z})(z'-\bar{z}')+4|z|^2|z'|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left[z.z'+z.\bar{z}'+\bar{z}.z'+\bar{z}.\bar{z}'-\left(z.z'-z.\bar{z}'-\bar{z}.z'+\bar{z}.\bar{z}'\right)+4|z|^2|z'|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left[z.z'+z.\bar{z}'+\bar{z}.z'+\bar{z}.\bar{z}'-z.z'+z.\bar{z}'+\bar{z}.z'-\bar{z}.\bar{z}'+4|z|^2|z'|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left[2z.\bar{z}'+2\bar{z}.z'+4|z|^2|z'|^2\right]$$

Yani ,sonuçta

$$(**) \qquad 2\left(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'\right)=\frac{1}{2\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left(2z.\bar{z}'+2\bar{z}.z'+4|z|^2|z'|^2\right)$$

bulunur.

(***)

$$x_3+x_3'=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}+\frac{|z'|^2}{1+|z'|^2}=\frac{|z|^2\left(1+|z'|^2\right)+|z'|^2\left(1+|z|^2\right)}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}=\frac{|z|^2+2|z|^2|z'|^2+|z'|^2}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}$$

bulunur. (**) ve (***) bağıntıları (*) bağıntısında kullanılırsa,

$$d(z,z')=\sqrt{x_3'+x_3-2\left(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'\right)} \Rightarrow$$

$$d(z,z')^2=x_3'+x_3-2\left(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'\right)$$

$$d(z,z')^2=\frac{|z|^2+2|z|^2|z'|^2+|z'|^2}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}-\frac{z.\overline{z'}+\bar{z}.z'+2|z|^2|z'|^2}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left(|z|^2+2|z|^2|z'|^2+|z'|^2-z.\overline{z'}-\bar{z}.z'-2|z|^2|z'|^2\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left(|z|^2+|z'|^2-z.\overline{z'}-\overline{z}.z'\right)=\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left(z.\overline{z}+.z'.\overline{z'}-z.\overline{z'}-\overline{z}.z'\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}\left[\overline{z}(z-z')-\overline{z'}(z-z')\right]=\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}(z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right)$$

$$=\frac{(z-z')\overline{(z-z')}}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}=\frac{|z-z'|^2}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}$$

Yani sonuçta;

$$d(z,z')^2=\frac{|z-z'|^2}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)} \quad \Rightarrow$$

$$d(z,z')=\frac{|z-z'|}{\sqrt{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}}$$

bulunur. Buna da Küresel Metrik (Stereografik İzdüşüm) denir. Diğer taraftan,

$$d(z,z_0)=\frac{|z-z_0|}{\sqrt{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z_0|^2\right)}}\leq|z-z_0|$$

olduğundan dolayı, yalınkat $f(z)$ fonksiyonu da göz önüne alınırsa,

$\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta>0$ sayısı bulunabilir ki $|z-z_0|<\delta$ olduğu müddetçe, $d(z,z_0)\leq|z-z_0|$ koşulunu gerçekleyen her z için $d(f(z)-f(z_0))<\varepsilon$ olur. Bu da bize $f(z)$ fonksiyonunun küresel metriğe göre de sürekli olduğunu gösterir. Ters fonksiyon da meromorf olacağından f,Ω nın $f(\Omega)$ üerine bir homeomorfizmasıdır. Gerçekten,

$$\lim_{w\to w_0}\frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)}{w-w_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}$$

olduğundan, $w = f(z)$ analitik ve yalınkat olduğundan $w' = f'(z) \neq 0$ dır. Dolayısıyla $w \to w_0$ olurken, süreklilikten dolayı, $z \to z_0$ olur. Buradan $z = f^{-1}(w)$ da analitik olur. Böylece konnektiflik gibi topolojik invaryantlar yalınkat fonksiyonlarca korunurlar. Örneğin, $\{z_k\}$ dizisi $(z_k \in \Omega)$, $\partial\Omega$ sınırına yakınsarsa (bu demektir ki Ω'da limiti yoktur) görüntüler dizisi $\{f(z_k)\}$ da $\partial f(\Omega)$'ya yakınsar. Gerçekten, $A \subset f(\Omega)$ kompakt bir alt cümle olsun. $f^{-1}(A) \subset \Omega$ da kompakttır. Bu kompakt cümle $\{z_k\}$ dizisinden en fazla sonlu sayıda nokta ihtiva etmek zorundadır. Aksi takdirde, $\{z_k\}$ dizisinin Ω'nın bir iç noktasında limiti olurdu. Yani,

$$\exists k \in \mathrm{N} \, |\forall k > k_0 \text{ için } z_k \notin f^{-1}(A) \text{ dır.}$$

Bu durumda $\forall k > k_0$ için $f(z_k) \notin A$ dır. Buradan, $\{f(z_k)\}$'nın da $f(\Omega)$'da limiti yoktur.

2.8.Özellik : $c : z(t) = x(t) + iy(t) \quad \alpha \le t \le \beta$, Ω'da düzgün bir Jordan yayı ise, (kırık olmayan, $z'(t) \neq 0$ ve $z(t)$ sürekli) $f(c)$'de $f(\Omega)$'da düzgün bir Jordan yayıdır. $z_0 = z(t_0)$ olmak üzere $f(z_0)$ noktasındaki $f(c)$'nin teğeti ile pozitif reel eksen arasındaki açı,

$$Arg\frac{df}{dt}(z_0) = Arg\left(\frac{df}{dt}(z_0)\frac{dz}{zt}(t_0)\right) = Argf'(z_0) + Argz'(t_0)$$

ile belirtilir ($z_0 = \infty$ ya da $f(z_0) = \infty$ durumları hariç). Bu ise iki eğrinin aynı bir z_0 noktasından geçtikleri zaman, bu iki eğrinin arasındaki açının, görüntü eğrileri arasındaki açıya eşit olduğunu gösterir. O halde yalınkat fonksiyonlar, birer konform homeomorfizmalardır.

İspat : $c_1 = z(t)$, $c_2 = z(s)$ iki eğri olsun. Öyleki $\alpha \le t \le \beta$, $\alpha_1 \le s \le \beta_1$ olsun. Üstelik $z_0 = z(t) = z(s_0)$ olsun. Yani, c_1 ve c_2 eğrileri aynı bir z_0 noktasından geçsinler. $w = f(z)$ fonksiyonu da yalınkat olsun.

$f(c_1)$ ve $f(c_2)$ düzgün Jordan Yayı olduklarından, sırasıyla,

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$$

ve

$$w'(s_0) = f'(z_0)z'(s_0) \neq 0$$

dır. Buradan;

$$\left.\begin{array}{l} Argw_t'(t_0) = Argf'(z_0).z_t'(t_0) = Argf'(z_0) + Argz_t'(t_0) \\ \\ Argw_s'(s_0) = Argf'(z_0).z_s'(s_0) = Argf'(z_0) + Argz_s'(s_0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$Argw_t'(t_0) - Argw_s'(s_0) = Argf'(z_0) + Argz_t'(t_0) - Argf'(z_0) - Argz_s'(s_0) \quad \Rightarrow$$

$$Argw_t'(t_0) - Argw_s'(s_0) = Argz_t'(t_0) - Argz_s'(s_0)$$

bulunur ki bu da bize açıların korunduğunugösterir.

2.9.Özellik : $A \subset C$, Ω'nın kompakt bir alt cümlesi olsun. Üstelik f'nin kutup noktasını ihtiva etmesin. Bu takdirde resminin Euclidyen alanı

$$Alanf(A) = \int_A |f'(z)|^2 d\Omega$$

dır.

İspat : $f(z)$ Ω'da yalınkat olduğundan analitiktir. Dolayısıyla $f(z)$ Cauchy – Riemann denklemlerini gerçekler.Yani,

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow$$

$$(*) \qquad |f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$$

bağıntısını yazabiliriz. Diğer taraftan,

$$(**) \qquad Alanf(A)=\iint_{f(A)}du.dv$$

dir. Fakat çokkatlı integrallerdeki değişken dönüşümünden dolayı

$$(***) \qquad du.dv=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}dx.dy$$

dir. O halde (*) ve (***) eşitlikleri karşılaştırılırsa,

$$(****) \qquad du.dv=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}dx.dy=|f'(z)|^2\,dx.dy$$

bulunur. $dx.dy=d\Omega$ alan elemanı olarak yazılırsa ve (****) bağıntısı (**) bağıntısında yerine konursa;

$$Alan f(A) = \iint_{f(A)} du.dv = \iint_A \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dx.dy = \iint_A |f'(z)|^2 dx.dy = \iint_A |f'(z)|^2 d\Omega \quad \Rightarrow$$

$$Alan f(A) = \iint_A |f'(z)|^2 d\Omega$$

bulunur.

YALINKAT FONKSİYONLAR İÇİN KLASİK DİSTORSİYON TEOREMİ

3.1.Gösterimler :

$D = \left\{ z \middle| \; |z| < 1 \right\}$ birim dairenin içi

$\Delta = \left\{ z \middle| \; |z| > 1 \right\}$ birim dairenin dışı

$\partial D = \partial \Delta = \{ |z| = 1 \}$ birim dairenin sınırı

3.2.Tanım :

$$S = \left\{ f(z) \middle| \; f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, f(0) = 1, f(0) = 0, f(z) \quad D'de \quad yalinkat \right\}$$

cümlesini S sınıfı olarak adlandıracağız.

3.3.Tanım :

$$\Sigma = \left\{ g(z) \middle| \; g(z) = z + +b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots, g(z) \quad \Delta' da \quad yalinkat \right\}$$

cümlesini Σ sınıfı olarak adlandıracağız ve $E = E(g) = C / g(A)$ 'da $g(z) \in \Sigma$ fonksiyonuyla yapılan tasvirde, resim bölgesinin kompakt tamlayıcısıdır. Ayrıca b_0 katasyısına $E(g)$ 'nin KONFORM MERKEZİ denir ve

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) d\theta$$

dir.

3.4.Teorem(Alan Teoremi) : $g \in \Sigma$ alalım. Buradan,

$$AlanE = \pi\left(1 - \sum_{\eta=1}^{\infty} \eta |b_\eta|^2\right)$$

dir. Bu alan, E kompakt cümlesinin, iki boyutlu LEBESGUE ölçümünü

$$H(r) = C / \left\{ g(z) \middle| \; |z| > r \right\} \qquad (r > 1)$$

alalım. $H(r)$ analitik Jordan eğrisi olan

$$C(r) = \left\{ g(re^{it}) \middle| \; 0 \le t \le 2\pi \right\}$$ ile sınırlıdır. E, $r \to 1$ olurken genişleyen $H(r)$

cümlelerinin arakesiti olduğundan,

$$AlanE = \lim_{r \to 1} AlanH(r)$$

tanımını yapabiliriz. Böylece $AlanE$'yi hesaplamak için, LEBESQUE teorisine başvurmaktan kaçınmış oluruz.

İspat : Analitik GREEN formülünden,

(I) $$\frac{1}{2\pi} \int_{C(r)} \overline{h(w)}.h'(w)dw = \frac{1}{\pi} \iint_{H(r)} |h'(w)|^2 d\Omega$$

dir. $h(w) = w$ alırsak $\Rightarrow \overline{h(w)} = \overline{w}$ olur. O halde $h(w) = w \;\; \Rightarrow \;\; h'(w)dw = dw$ bulunur. Diğer taraftan,

$$\left.\begin{aligned} w &= g(z) \\ \overline{w} &= \overline{g(z)} \end{aligned}\right\}$$ yazılışları da gözönünde bulundurulursa

$$dw = g'(z)dz$$

eşitliğini buluruz. Buradan da

$$dw = g'(z)dz = h'(w)dw$$

yazabiliriz. Bu adımda kutupsal koordinatlara geçersek,

$$z = re^{it} \quad \Leftrightarrow \quad dz = ire^{it}dt$$

bulunur. Buraya kadar bulduğumuz bütün sonuçları birleştirirsek

$$\left.\begin{aligned} dw &= g'(z)dz = g'(re^{it})ire^{it}dt \\ \overline{w} &= \overline{g(re^{it})} \end{aligned}\right\} \text{ buluruz.}$$

Bulunan bu sonuçlar (I)'de yerine konulursa,

$$\frac{1}{\pi}AlanH(r) = \frac{1}{\pi}\iint_{H(r)}|h'(w)|^2 d\Omega = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(r)}\overline{h(w)}h'(w)dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(r)}\overline{w}dw$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(r)}\overline{g(z)}g'(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} ire^{it}g'(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}g'(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt$$

elde edilir. Sonuçta,

$$\textbf{(II)} \qquad \frac{1}{\pi}AlanH(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}g'(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt$$

buluruz. Fakat $g \in \Sigma$ olduğundan, Σ sınıfının tanımından dolayı

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \Rightarrow \overline{g(z)} = \overline{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n}\,\overline{z}^{-n}$$

dir. Bunları kutupsal koordinatlarda yazacak olursak,

$$\left.\begin{aligned} g(re^{it}) &= re^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n}e^{-\text{int}} \\ \overline{g(re^{it})} &= re^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n}e^{\text{int}} \end{aligned}\right\} \text{ buluruz. Bu yazılışlardan hareket edersek,}$$

$$g'(re^{it}) = \left(ire^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} (-in) b_n r^{-n} e^{-\text{int}} \right) = i\left(re^{it} - \sum_{n=0}^{\infty} nb_n r^{-n} e^{-\text{int}} \right)$$

ve buradan

$$g'(re^{it}).\overline{g(re^{it})} = i\left(re^{it} - \sum_{n=0}^{\infty} nb_n r^{-n} e^{-\text{int}} \right).\left(re^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{\text{int}} \right)$$

buluruz. O halde

$$\frac{1}{\pi} Alan H(r) = \frac{1}{\pi} \iint_{H(r)} |h'(w)|^2 d\Omega = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} ire^{it} g'(re^{it}) \overline{g(re^{it})} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{it} g'(re^{it}) \overline{g(re^{it})} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{it} i\left(re^{it} - \sum_{n=0}^{\infty} nb_n r^{-n} e^{-\text{int}} \right).\left(re^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{\text{int}} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ire^{it} \left(re^{it} re^{-it} + re^{it} \sum_{n=o}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{-\text{int}} - re^{it} \sum_{n=o}^{\infty} nb_n r^{-n} e^{-\text{int}} - re^{it} \sum_{n=o}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{\text{int}} re^{it} \sum_{n=o}^{\infty} nb_n r^{-n} e^{-\text{int}} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ire^{it} \left(r^2 e^{it-it} + \sum_{n=o}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} e^{it-\text{int}} - \sum_{n=o}^{\infty} nb_n r^{-n+1} e^{it-\text{int}} - \sum_{n=o}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} e^{it+\text{int}} \sum_{n=o}^{\infty} nb_n r^{-n+1} e^{it-\text{int}} \right) dt$$

$\Rightarrow$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ire^{it} \left(r^2 + \sum_{n=o}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} e^{-i(n+1)t} - \sum_{n=o}^{\infty} nb_n r^{-n+1} e^{-i(n+1)t} - \sum_{n=o}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} e^{i(n+1)t} nb_n r^{-n+1} e^{-i(n+1)t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ire^{it} \left(r^2 + \sum_{n=o}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} e^{-i(n+1)t} - \sum_{n=o}^{\infty} nb_n r^{-n+1} e^{-i(n+1)t} - \sum_{n=o}^{\infty} n.\overline{b_n} b_n r^{-2n} \right) dt$$

$\Rightarrow$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ire^{it} \left(r^2 + \sum_{n=o}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} e^{-i(n+1)t} - \sum_{n=o}^{\infty} nb_n r^{-n+1} e^{-i(n+1)t} - \sum_{n=o}^{\infty} n.|b_n|^2 r^{-2n} \right) dt$$

$\Rightarrow$

$$=\frac{1}{2\pi}ire^{it}\int_0^{2\pi}\left(r^2-\sum_{n=o}^{\infty}n.|b_n|^2r^{-2n}\right)dt+\frac{1}{2\pi}ire^{it}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=o}^{\infty}\overline{b_n}r^{-n+1}e^{-i(n+1)t}-\sum_{n=o}^{\infty}nb_nr^{-n+1}e^{-i(n+1)t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}ire^{it}\int_0^{2\pi}\left(r^2-\sum_{n=o}^{\infty}n.|b_n|^2r^{-2n}\right)dt+\frac{1}{2\pi}ire^{it}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=o}^{\infty}\overline{b_n}r^{-n+1}\right)e^{-i(n+1)t}dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}ire^{it}\int_0^{2\pi}\left(-\sum_{n=o}^{\infty}nb_nr^{-n+1}\right)e^{-i(n+1)t}dt$$

buluruz. Fakat,

$$\int_0^{2\pi}e^{ikt}dt=\begin{cases}0, & k=\pm1,\pm2,...\\ 2\pi, & k=0\end{cases}$$

olduğunu burada kullanırsak, son eşitlikteki, son iki integralin sıfır olduğunu görürüz. O halde,

$$\frac{1}{\pi}AlanH(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ire^{it}\left(r^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}\right)dt$$

bulunur. Fakat alan pozitif bir büyüklük olduğundan

$$\frac{1}{\pi}AlanH(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ire^{it}\left(r^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}\right)dt\geq0$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{1}{\pi}AlanH(r)=\frac{1}{2\pi}ire^{it}\int_0^{2\pi}r^2dt-\frac{1}{2\pi}ire^{it}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}dt\geq0$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{1}{\pi}AlanH(r)=\frac{1}{2\pi}r^3|t|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}|t|_0^{2\pi}\geq0$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{1}{\pi}AlanH(r)=\frac{1}{2\pi}r^3(2\pi-0)-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}(2\pi-0)\geq0$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{1}{\pi}AlanH(r)=\frac{1}{2\pi}r^3 2\pi-\frac{1}{2\pi}2\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}\geq0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\pi} AlanH(r) = r^3 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n} \geq 0$$

olduğunu buluruz. Fakat

$$AlanE = \pi \lim_{r \to 1} AlanH(r)$$

olduğunu da burada kullanacak olursak,

$$AlanE = \pi \lim_{r \to 1} AlanH(r) = \lim_{r \to 1} \left(r^3 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad AlanE = \pi\left(1 - \sum n|b_n|^2\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad 1 - \sum n|b_n|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

bulunur.q.e.d.

3.5. Sonuç: $g \in \Sigma$ alalım. Buradan $|b_1| \leq 1$ dir. Bu eşitsizlikte, eşitlik durumu ancak ve ancak

$$g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1} \quad (b_0 \in C, \beta \in \Re)$$

olması ile mümkündür. Fakat, burada açıklamak gerekir ki, verilen bir eşitsizlikte eşitliği gerçekleyen fonksiyona extremal fonksiyon adı verilir.

İspat: Yukarıda ispatladığımız alan teoreminde, yani $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ ' de,

$$b_2 = b_3 = \ldots = b_n = \ldots = 0$$

ise, $|b_1| \leq 1$ bulunur. Bu halde $g \in \Sigma$ fonksiyonu, $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1}$ haline gelir. Fakat, $|b_1| = 1$ ise, $b_1 = e^{2i\beta}$ alabiliriz. Zira $|b_1| = |e^{2i\beta}| = 1$ ' dir. Yine alan teoremi kullanılırsa, $|b_1| = 1$ koşulu altında, $g(z)$ fonksiyonu, $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$ haline gelir. Bu fonksiyon, bir eşitsizlikte eşitliği gerçeklediği için, extremal fonksiyondur. Bu fonksiyon $|z| > 1$ ' i, göz önüne alınan düzlemde, reel eksenle β açısı yapan doğrusal kesit üzerine resmeder.

Gerçekten; $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$ fonksiyonunda b_0 sabitini şimdilik ihmal edebiliriz. Zira bu fonksiyonla yapılan tasvirde, b_0 sabiti sadece bir parelel kayma verecektir, dolayısıyla, $f(z) = z + e^{2i\beta} z^{-1}$ fonksiyonunu inceleyelim.

$z = re^{i\theta}$ alalım $\Rightarrow$ $f(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + e^{2i\beta} re^{-i\theta}$

$$= re^{i\beta}\left(e^{i\theta}e^{-i\beta} + e^{-i\theta}e^{i\beta}\right) = 2re^{i\beta}\frac{\left(e^{i(\theta-\beta)} + e^{-i(\theta-\beta)}\right)}{2}$$

$$= 2e^{i\beta}Cos(\theta - \beta) = e^{i\beta}2Cos(\theta - \beta)$$

bulunur. $-2 \leq 2Cos(\theta - \beta) \leq 2$ olduğundan, $|z| > 1$ bölgesi reel eksenle β açısı yapan doğrusal kesit üzerine resmeder. b_0 kadar kayma verirsek asıl neticeyi elde ederiz.

3.6.Lemma: Eğer $g \in \Sigma$ ve $w \in E$ ise, buradan

$$g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - w} = z + \frac{1}{z}(b_0 - w)z^{-1} + \ldots \quad , \quad (|z| > 1)$$

fonksiyonu Σ'da tek bir fonksiyondur. Eğer $f \in S$ ise $\sqrt{f(z^2)}$ S'de tek bir fonksiyondur.

İspat: $g \in \Sigma$ olduğundan dolayı tanımdan hareket edersek,

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \ , \ (|z| > 1) \quad \Rightarrow \quad g(z^2) = z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-2n} \quad \Rightarrow$$

$$g(z)^2 - w = z^2 - w + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-2n} \quad \Rightarrow$$

$$z^{-2}\left(g(z^2)-w\right)=1-wz^{-2}+z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^{-2n}=1-wz^{-2}+z^{-2}\left(b_0+b_1z^{-2}+b_2z^{-4}+\ldots\right)$$

$$=1-wz^{-2}+b_0z^{-2}+b_1z^{-4}+b_2z^{-6}+\ldots$$

$$=1+(b_0-w)z^{-2}+b_1z^{-4}+b_2z^{-6}+\ldots$$

fonksiyonu da Δ'da analitik ve çift bir fonksiyondur.Gerçekten, açılımdan dolayı analitiktir, Δ'da daima sıfırdan farklıdır ve çift fonksiyon oluşu da

$F(z)=z^{-2}\left(g(z^2)-w\right)$ dersek;

$$F(-z)=\frac{1}{(-z)^2}\left(g\left((-z)^2\right)-w\right)=\frac{1}{z^2}\left(g\left(z^2\right)-w\right)=z^{-2}\left(g\left(z^2\right)-w\right)=F(z)\quad\Rightarrow$$

$$F(-z)=F(z)$$

dir. Bu da iddianın doğruluğunu gösterir. Şimdi de $g^*(z)=z\left[z^{-2}(g(z^2)-w)\right]^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonunu düşünüyoruz. Bu fonksiyon,

$$g^*(z)=z\left[z^{-2}(g(z^2)-w)\right]^{\frac{1}{2}}=z+\frac{1}{2}(b_0-w)z^{-1}+\ldots\quad,\ (|z|>1)$$

açılımına haizdir. Gerçekten

$$(*)\qquad\left[z^{-2}(g(z^2)-w)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[1+(b_0-w)z^{-2}+b_1z^{-4}+b_2z^{-6}+\ldots\right]^{\frac{1}{2}}$$

olduğunu ispatlamıştık. Bu ifadede $z^{-2}=\zeta$ dersek, ikinci taraf ;

$$1+(b_0-w)\zeta+b_1\zeta^2+b_2\zeta^4+\ldots=\left(1+c_1\zeta+c_2\zeta^2+c_3\zeta^3+\ldots\right)^2$$

$$=1+c_1^2\zeta^2+c_2^2\zeta^4+c_3^2\zeta^6+\ldots+2c_1\zeta+2c_2\zeta^2+2c_3\zeta^3+\ldots+2c_1c_2\zeta^3+2c_1c_3\zeta^4+\ldots$$

$$= 1 + 2c_1\zeta + \left(c_1^2 + 2c_2\right)\zeta^2 + \ldots \qquad \Rightarrow$$

katsayıkarı karşılaştırırsak,

$$b_0 - w = 2c_1\zeta \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{1}{2}(b_0 - w)$$

olur. O halde bunları (*) ifadesinde yerine koyarsak,

$$\left[z^{-2}(g(z^2) - w)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(1 + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-2} + \ldots\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-2} + \ldots$$

ve bu eşitlik z ile çarpılırsa ;

$$g^*(z) = z\left[z^{-2}(g(z^2) - w)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g(z^2) - w} = z + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-1} + \ldots$$

ifadesine ulaşılır. Bu da iddianın doğruluğunu gösterir. Bu fonksiyon tektir. Gerçekten ;

$$g^*(z) = z\left[z^{-2}(g(z^2) - w)\right] \quad \Rightarrow \quad g^*(-z) = (-z)\left[z^{-2}(g(z^2) - w)\right] = -g^*(z)$$

olduğunda bu da iddianın doğruluğunu gösterir. Şimdi fonksiyonun yalınkat olduğunu gösterelim. Bu fonksiyon $1 < |z| < \infty$ bölgesi fonksiyonun hiçbir singüleritesini bulundurmaz. Dolayısıyla bu fonksiyon $|z| > 1$'de analitiktir. İnjektiftir. Gerçekten ;

$$g^*(z_1) = g^*(z_2) \quad \Rightarrow \quad z_1\sqrt{z_1^{-2}\left(g(z_1^2) - w\right)} = z_2\sqrt{z_2^{-2}\left(g(z_2^2) - w\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad z_1^2\left(z_1^{-2}\left(g(z_1^2) - w\right)\right) = z_2^2\left(z_2^{-2}\left(g(z_2^2) - w\right)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left(g(z_1^2) - w\right) = \left(g(z_2^2) - w\right) \quad \Rightarrow \quad g(z_1^2) = g(z_2^2)$$

$\Rightarrow$ ($g(t)$ yalınkat olduğundan) $\quad z_1^2 = z_2^2 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \pm z_2$

bulunur. Fakat $g^*(z)$ tek olduğundan, $g^*(z_1) \neq g^*(-z_2) \Rightarrow z_1 \neq -z_2$ dir. O halde $z_1 = z_2$ bulunur ki, bu da iddianın doğruluğunu gösterir. Buraya kadar bulmuş olduğumuz sonuçları toplarsak ; $g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - w}$ fonksiyonu da Σ'da tek bir fonksiyondur.

$f \in S$ olsun. Buradan,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \quad , \quad (|z| < 1) \quad \text{dir.}$$

$f(z)$ yalınkattır.

$f(z^2) = z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots \Rightarrow \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots}$ fonksiyonu S'de tek fonksiyondur. Gerçekten :

$$\sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots} = \sqrt{z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots)} = z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots}$$

burada;

$1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots$ ifadesi $1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots$ ifadesinin karesi olsun. Bu durumda,

$$1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots = (1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots)^2$$

$$= 1 + \beta_1^2 z^2 + \beta_2^2 z^4 + \ldots + 2\beta_1 z + 2\beta_2 z^2 + \ldots + 2\beta_1 \beta_2 z^3 + \ldots$$

$$= 1 + 2\beta_1 z + (\beta_1 + 2\beta_2) z^2 + 2\beta_1 \beta_2 z^3 + \ldots$$

olur. Bu ifadede her iki tarafın katsayıları eşitlenirse

$$\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 + 2\beta_2 = a_2 \Rightarrow 2\beta_2 = a_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{2} a_2$$

bulunur.

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots} = \sqrt{z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots)}$$

$$= z\sqrt{1+a_2z^2+a_3z^4+\dots} = z\sqrt{(1+\beta_1 z+\beta_2 z^2+\dots)^2} = z\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}a_2z^2+\dots\right)^2}$$

$$= z\left(1+\frac{1}{2}a_2z^2+\dots\right) = z+\frac{1}{2}a_2z^3+\dots \qquad \Rightarrow$$

$$F(z) = z+\frac{1}{2}a_2z^3+\dots$$

bulunur. Burada,

$$F(-z) = (-z)+\frac{1}{2}a_2(-z)^3+\dots = -z-\frac{1}{2}a_2z^3-\dots = -\left(z+\frac{1}{2}a_2z^3+\dots\right) = -F(z)$$

$\Rightarrow$

$$F(-z) = -F(z)$$

olduğundan $F(z)$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

$F(0)=0$ ve $F'(z)=1+\frac{3}{2}a_2z^2+\dots$ olduğundan, $F'(0)=1$'dir. İnjektiftir.

$$\left.\begin{aligned} F(z_1) &= \sqrt{f(z_1^2)} \\ F(z_2) &= \sqrt{f(z_2^2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad F(z_1)=F(z_2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{f(z_1^2)} = \sqrt{f(z_2^2)} \quad \Rightarrow$$

$f(z_1^2) = f(z_2^2) \quad \Rightarrow \quad f(z)$ yalınkat olduğundan injektiftir.

Buradan $z_1 = \pm z_2$, fakat $F(z)$ tek fonksiyon olduğundan, $z_1 \neq -z_2$ dir. O halde, $z_1 = z_2$ bulunur ki bu da $F(z)$'in D'de injektifliğini gösterir. $F(z)$'in $|z|<1$'de analitik olduğu açıktır. O halde buraya kadar bulduğumuz sonuçları toplarsak, $F(z)=\sqrt{f(z^2)}$ S'de tek bir fonksiyondur.

3.7.Teorem : $g \in \Sigma$ alalım. Buradan, $E \subset \{|w-b_0| \leq 2\}$ 'dir. Eşitlik ancak ve ancak E'nin dört birim uzunluğunda bir parça olması ile gerçeklenir.

İspat : $g^*(z)=\sqrt{g(z^2)-w}=z+\frac{1}{2}(b_0-w)z^{-1}+\ldots$ fonksiyonu Σ'da tek fonksiyon olduğundan $w\in E$ için 3.5 Sonucunu bu fonksiyona uygularsak,

$$\left|\frac{1}{2}(b_0-w)\right|\le 1 \Rightarrow \frac{1}{2}|(b_0-w)|\le 1 \Rightarrow |(b_0-w)|\le 2$$

bulunur. Şimdi eşitlik durumunu inceleyelim. Yine 3.5.Sonucundaki eşitlik durumu buraya uygulanırsa,

$g(z)=z+\frac{1}{2}(b_0-w)z^{-1}$ bulunur. Buradan, eşitlik durumu yazılırsa;

$$\left|\frac{1}{2}(b_0-w)\right|=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}(b_0-w)=-e^{i\beta}$$

alabiliriz.Bu halde fonksiyonumuz

$$g(z)=z-e^{i\beta}z^{-1}$$

haline gelir. Fakat diğer taraftan

$$\left|\frac{1}{2}(b_0-w)\right|=1 \Rightarrow \frac{1}{2}(b_0-w)=-e^{i\beta} \Rightarrow b_0-w=-2e^{i\beta} \Rightarrow b_0=w-2e^{i\beta}$$

buluruz. Bu b_0 sabitini de 3.5.Sonucunda eşitlik halinde bulduğumuz fonksiyona uygularsak,

$$g(z)=z+b_0+e^{2i\beta}z^{-1} \Rightarrow g(z)=z+\left(w-2e^{i\beta}\right)+e^{2i\beta}z^{-1}$$

buluruz. Burada $b_0=w-2e^{i\beta}$ sabitini göz önüne almazsak, $g(z)=z+e^{2i\beta}z^{-1}$ bulunur. Buradan, $z=e^{i\theta}$ dersek

$$g(e^{i\theta})=e^{i\theta}+e^{2i\beta}e^{-i\theta}=e^{i\theta}+e^{i\beta}e^{i\beta}e^{-i\theta}=e^{i\beta}\left(e^{i\theta}e^{-i\beta}+e^{i\beta}e^{-i\theta}\right)$$

$$=e^{i\beta}\left(e^{-i(\theta-\beta)}+e^{-i(\theta-\beta)}\right)=e^{i\beta}2Cos(\theta-\beta) \qquad \Rightarrow$$

$g(e^{i\theta}) = e^{i\beta} 2Cos(\theta - \beta)$'den ($-2 \le 2Cos(\theta - \beta) \le 2$) E, dört birim uzunluğunda bir parça ise gerçeklendiğini gösterir.

3.8.Sonuç : Eğer $g \in \Sigma_0$ ise, $|z| > 1$ için $|g(z)| \le 2|z|$ ' dir.

İspat : Σ_0 sınıfındaki fonksiyonlar $g(z) = z + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots$ $(|z| > 1)$ şeklinde olduklarından, (Zira burada $b_0 = 0$ 'dır.)

$$g_1(t) = \frac{g(z)}{z} = \frac{z + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{z} = 1 + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3} + \dots$$

fonksiyonu ∞ noktası civarında analitiktir. Madem ki E alan teoreminde izah ettiğimiz gibi, $|z| > r$ için $r \to 1$ olurken E, genişleyen $H(r)$ cümlelerinin arakesitidir. Dolayısıyla $|z| \to 1$ için bütün limit noktaları E üzerindedir. Burada bir evvelki teoremi kullanacak olursak;

$$\left|\frac{g(z)}{z}\right| = \underset{|z|\to 1}{Lim\,Sup}\left|\frac{g(z)}{z}\right| = Max|w| \le 2 \implies \left|\frac{g(z)}{z}\right| \le 2 \implies |g(z)| \le 2|z|$$

bulunur, bu da ispatı istenen ifadedir.

3.9.Teorem : $f \in S$ alalım. Buradan $|a_2| \le 2$ ve $|a_2^2 - a_3| \le 1$ ' dir. $|a_2| = 2$ olması ancak ve ancak $f(z)$ fonksiyonunun, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması ile mümkündür. Ayrıca $f(z)$ tek fonksiyon ise, bu durumda $|a_3| \le 1$ 'dir. Eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = z\left(1 - e^{2i\beta} z^2\right)^{-1}$$

olması ile mümkündür.

İspat : $f \in S$ olduğundan, S sınıfının tanımı gereği $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$' dir.

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \dots$$

olduğundan, bu fonksiyon da S sınıfına aittir. Dolayısıyla,

$$g(z)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{2}a_2\frac{1}{z^3}+\ldots}=\frac{1}{\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{2}a_2\frac{1}{z^2}+\ldots\right)}=\frac{1}{\frac{1}{z}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}a_2z^{-2}+\ldots}$$

$$=z\left(1-\left(\frac{1}{2}a_2z^{-2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2}a_2z^{-2}+\ldots\right)^2+\ldots\right)=z-\frac{1}{2}a_2z^{-1}+\ldots$$

fonksiyonu da Σ sınıfına ait olacaktır. O halde $b_1\leq 1$ eşitsizliği bu fonksiyona uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{2}a_2\right|\leq 1 \quad \Rightarrow \quad |a_2|\leq 2$$

bulunur. Bu da istenen ifadedir. Diğer taraftan $f(z)=z+a_2z^{-2}+\ldots\in S$ ise,

$$G(z)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{z}+a_2\frac{1}{z^2}+\ldots}=\frac{1}{\frac{1}{z}\left(1+a_2\frac{1}{z}+\ldots\right)}=\frac{1}{\frac{1}{z}}\times\frac{1}{1+a_2z^{-1}+a_3z^{-2}\ldots}$$

$$=z\frac{1}{1+\left(a_2z^{-1}+a_3z^{-2}+\ldots\right)}=z\left(1-a_2z^{-1}-a_3z^{-2}+\ldots+a_2^2z^{-2}+a_3^2z^{-4}+\ldots\right)$$

$$=z-a_2-a_3z^{-1}-\ldots+a_2^2z^{-1}+a_3^2z^{-3}+\ldots=z-a_2+\left(a_2^2-a_3\right)z^{-1}+\ldots$$

fonksiyonu da Σ sınıfına aittir. Bu fonksiyona da alan teoreminin sonucu olan $b_1\leq 1$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left(a_2^2-a_3\right)\leq 1$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da istenen ifadedir. Şimdi $|a_2|=2$ olması halini ele alalım. Bunun için aşağıdaki durumları göz önünde bulunduralım.

"Sonuç: $g\in\Sigma$ alalım. Buradan, $b_1\leq 1$' dir. Eşitlik ancak ve ancak $g(z)=z+b_0+e^{2i\beta}z^{-1}$ olması ile mümkündür."

"Lemma: $g \in \Sigma$ ve $w \in E$ ise $g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - w} = z + \frac{1}{2}(b_0 + w)z^{-1} + \ldots$ fonksiyonu Σ sınıfında tek bir fonksiyondur. Eğer $f \in S$ ise $F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \ldots$ fonksiyonu S'de tek bir fonksiyondur."

"Teorem: $g \in \Sigma$ alalım. $E \subset \{|w - b_0| \leq 2\}$' dir. Eşitlik ancak ve ancak E'nin dört birim uzunluğunda bir parça olması halinde gerçeklenir."

Bu ifadelerin sonucunda

$$f \in S \quad \Rightarrow \quad f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \ldots \in S \text{ ve}$$

tek fonksiyondur. Buradan,

$$g^*(z) = \frac{1}{F(z)} = z + \frac{1}{2}a_2 z^{-1} + \ldots \in \Sigma \text{ dır. Ve buradan } \left|\frac{1}{2}a_2\right| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |a_2| \leq 2$$

dir.

Eşitliğin ancak ve ancak $g^*(z) = z + \frac{1}{2}a_2 z^{-1}$ olması durumunda gerçeklendiğini yukarıda ispatlamıştık. O halde

$$|a_2| = |b_0 - w| \quad \Rightarrow \quad |w - b_0| = 2 \quad \Rightarrow \quad w - b_0 = 2e^{i\beta}$$

alabiliriz. Bu halde $w = b_0 + 2e^{i\beta}$ olur. Burada ($g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta}z^{-1}$ fonksiyonuyla karşılaştırarak) sonucu kullanırsak,

$$g^*(z) = z + b_0 + e^{2i\beta}z^{-1} \quad \Rightarrow \quad g^*(z) = z + \left(w - 2e^{i\beta}\right) + e^{2i\beta}z^{-1}$$

bulunur. Fakat $w \in E$ olduğundan $w = 0$ alabiliriz. Bu halde

$$g^*(z) = z - 2e^{i\beta} + e^{2i\beta}z^{-1} = z\left(1 + 2e^{i\beta}z^{-1} + e^{2i\beta}z^{-2}\right) = z\left(1 + e^{i\beta}z^{-1}\right)^2$$

bulunur.

$g^*(z) \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{g^*(1/z)} = \dfrac{1}{\frac{1}{z}\left(1+e^{i\beta}z\right)^2} = \dfrac{z}{\left(1+e^{i\beta}z\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{i(n-1)\beta} z^n \in \Sigma$ dir, bu da tanım gereği Koebe fonksiyonunun rotasyonudur. $f \in S$ tek ise, $|a_3| \leq 1$ olduğunu ispatlayalım.

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \ldots$$

S'de tek fonksiyon (bunu daha önce de ispatlamıştık) ve ikinci terimin katsayısı sıfırdır. O halde bunu da $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ eşitsizliğinde kulanırsak buradan,

$$a_2 = 0 \text{ alınırsa} \quad \Rightarrow \quad |0 - a_3| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |a_3| \leq 1$$

bulunur. Bir başka ispatta,

$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \dfrac{1}{2}a_2 z^3 + \ldots \quad \Rightarrow \quad a_3 = \dfrac{1}{2}a_2 \quad \Rightarrow \quad |a_3| = \left|\dfrac{1}{2}a_2\right| \leq 1 \quad \Rightarrow$

$|a_3| \leq 1$

bulunur.

3.10.Hazırlık: $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \in S$ alalım. Buradan,

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

ve

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + \ldots \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2a_2$$

olduğunu buluruz.

$$f''(0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad |f''(0)| = 2|a_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{|f''(0)|}{2} = |a_2| \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{|f''(0)|}{2} \leq 2$$

buluruz. Bizim bu fikri, sıfır noktasından herhangi bir $z_0 \in D$ noktasına taşımamız halinde

$$f\left(\frac{\varsigma + z_0}{1+\varsigma.\overline{z_0}}\right) = f(z_0) + \left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)\varsigma + \frac{1}{2}\left[\left(1-|z_0|^2\right)^2 f''(z_0) - 2\overline{z_0}\left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)\right]\varsigma^2 + \dots$$

fonksiyonu da D'de analitik ve yalınkattır, fakat S sınıfına ait değildir. Zira normalize edilmemiştir. O halde bu fonksiyonun S sınıfına ait olması için normalize edilmesi gerekir. Bunun için de

$$h(\varsigma) = \frac{f\left(\frac{\varsigma + z_0}{1+\varsigma.\overline{z_0}}\right) - f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)} = \varsigma + \left[\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right]\varsigma^2 + \dots$$

fonksiyonu $\left.\begin{matrix} h(0)=0 \\ h'(0)=1 \end{matrix}\right\}$ koşullarını gerçeklediğinden S sınıfına aittir.

$h(\varsigma)$ fonksiyonu z_0 noktasına nazaran $f(z)$ fonksiyonunun Koebe transformasyonu olarak adlandırılır.

3.11.Lemma: Eğer $f \in S$ ise buradan

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2} \qquad (|z|<1)$$

dir.

İspat : Yukarıdaki hazılıktan hareket edersek

$$h(\varsigma) = \frac{f\left(\frac{\varsigma + z_0}{1+\varsigma.\overline{z_0}}\right) - f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)} = \varsigma + \left[\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right]\varsigma^2 + \dots$$

fonksiyonu S sınıfına ait olduğundan ikinci terimin katsayısı 2'den küçüktür. Bu durumda,

$$\left|\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right|\leq 2$$

olur. Bu ifadeyi de

$$\frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}=\left|\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right|$$

ile çarparsak

$$\left[\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right]\cdot\left|\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right|\leq\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}\quad\Rightarrow$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right)\left(\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right)\right]\leq\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}\quad\Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}-\overline{z_0}\frac{2z_0}{1-|z_0|^2}\right]\leq\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}\quad\Rightarrow$$

$$\left[z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}\right]\leq\frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

bulunur. Bu ifadede z_0 ile z'i yer değiştirirsek;

$$\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right]\leq\frac{4|z|}{1-|z|^2}\qquad(|z|<1)$$

elde edilir.

3.12.Teorem ($\frac{1}{4}$ Distorsiyon Teoremi) : $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S$ fonksiyonunun tasvirindeki, sınır noktalarının $w = 0$ noktasına olan uzaklıkları $\frac{1}{4}$' ten küçük olamaz.

İspat: c noktası D'nin dışındaki bir nokta olsun.

$\dfrac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \dfrac{1}{c}\right)z^2 + \ldots$ fonksiyonu da S sınıfına aittir. İkinci terimin modülü

2'den küçük olacağına göre

$$\left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2$$

dir. Diğer taraftan, $|a_2| \leq 2$ dir ve

$$\left|\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{c} + a_2 - a_2\right| \leq \left|\frac{1}{c} + a_2\right| + |-a_2| = \left|\frac{1}{c} + a_2\right| + |a_2| \leq 2 + 2 = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|c|} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad |c| \geq \frac{1}{4}$$

bulunur ki bu da iddianın doğruluğunu gösterir.

3.13.Teorem: α ve β D'nin içinde $f(z) \in S$ fonksiyonunun alamadığı herhangi iki değer olsun. Bu halde

$$F(z) = \frac{f(z)}{1 - \dfrac{f(z)}{\alpha}}$$

fonksiyonu da D'de yalınkat olup

$$\frac{\beta}{1 - \beta/\alpha}$$

değerini alamaz.

İspat: $f(z)$ D'de yalınkat olduğundan ve α değerini alamadığından $\frac{f(z)}{\alpha} \neq 1$'dir. Dolayısıyla $F(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}}$ fonksiyonu D'de analitiktir.

$$F(z_1) = F(z_2) \Rightarrow \frac{f(z_1)}{1 - \frac{f(z_1)}{\alpha}} = \frac{f(z_2)}{1 - \frac{f(z_{21})}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\frac{f(z_1)}{\frac{\alpha - f(z_1)}{\alpha}} = \frac{f(z_2)}{\frac{\alpha - f(z_2)}{\alpha}} \Rightarrow \frac{\alpha f(z_1)}{\alpha - f(z_1)} = \frac{\alpha f(z_2)}{\alpha - f(z_2)} \Rightarrow \frac{f(z_1)}{\alpha - f(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\alpha - f(z_2)}$$

$\Rightarrow$

$$(\alpha - f(z_2))f(z_1) = (\alpha - f(z_1))f(z_2) \Rightarrow \quad \alpha f(z_1) - f(z_1)f(z_2) = \alpha f(z_2) - f(z_1)f(z_2)$$

$\Rightarrow$

$$\alpha f(z_1) = \alpha f(z_2) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$$

ve $f(z)$, D'de yalınkat olduğundan $z_1 = z_2$ olur. O halde $F(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\alpha}}$ fonksiyonu D'de injektiftir. Bu durumda $F(z)$ fonksiyonunun D'de yalınkat olduğunu ispatlamış oluyoruz.

$\frac{\beta}{1 - \beta/\alpha}$ sayısının tersinin modülünü düşünelim:

$$\left|\frac{1 - \frac{\beta}{\alpha}}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right|$$

buluruz. Fakat bir evvelki teoremden dolayı

$$(*) \qquad \left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right| \leq 4$$

bulunur, bu da bize teoremin ispatını verir. Diğer taraftan, α ve β noktalarını birleştiren doğru parçası orjinden geçsin. Bu halde

$$\beta = |\beta|e^{i\theta} \quad , \quad \alpha = |\alpha|e^{i\theta}$$

yazabiliriz. (*) ifadesinden;

$$\left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right| \leq 4 \Rightarrow \left|\frac{1}{|\beta|e^{i\theta}} - \frac{1}{|\alpha|e^{i\theta}}\right| \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{|\beta|} + \frac{1}{|\alpha|} \leq 4$$

buluruz. Bu eşitsizlik de bize $|\alpha|$ ve $|\beta|$ sayılarından en az birinin $\frac{1}{2}$'den büyük olduğunu veyahutta $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$ olduğunu gösterir.

Sonuç olarak şunu söyleyebiliriz ki, α ve β, $f \in S$ fonksiyonu tarafından alınmayan herhangi iki değer ise ve bu noktaları birleştiren doğru parçası orjinden geçerse, α ve β noktalarından, en az birinin diğerinden uzaklığı $\frac{1}{2}$'den büyüktür veya her iki uzaklık $\frac{1}{2}$'ye eşittir.

3.14.Teorem: $f \in S$ ise,

(i) $$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

(ii) $$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

(iii) $$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

dir. Bu eşitsizliklerde eşitlik, ancak ve ancak $f(z)$, Koebe fonksiyonunun uygun bir rotasyonu ise gerçeklenir.

İspat: 3.11.Lemma'da ispatladık ki

$$(*)\qquad \left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

dir. Diğer taraftan bir kompleks sayının reel kısmı ile modülü arasındaki $-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z|$ bağıntısından hareket edersek, (*) bağıntısını

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \le \operatorname{Re}\left\{ z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradan da

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \le \operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} \le \frac{4|z|}{1-|z|^2} + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \quad \Rightarrow$$

$$(**)\qquad \frac{2|z|^2 - 4|z|}{1-|z|^2} \le \operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} \le \frac{4|z| + 2|z|^2}{1-|z|^2}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \log z} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \log z} \right\}$$

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow dz = e^{i\theta} d\rho \Rightarrow \frac{dz}{d\rho} = e^{i\theta} \quad , \quad \log \rho e^{i\theta} = t \Rightarrow \frac{e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\rho = dt \Rightarrow$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho$$

olduğundan

$$\operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \log z} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \rho \cdot \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} \right\}$$

$$= \rho \operatorname{Re} \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)|$$

bulunur. Bunları (**) eşitsizliğinde yerine koyarsak, (**) eşitsizliği,

$$\frac{2\rho^2 - 4\rho}{1-\rho^2} \leq \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)| \leq \frac{2\rho^2 + 4\rho}{1-\rho^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\rho(2\rho - 4)}{1-\rho^2} \leq \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)| \leq \frac{\rho(2\rho + 4)}{1-\rho^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2\rho - 4}{1-\rho^2} \leq \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)| \leq \frac{2\rho + 4}{1-\rho^2}$$

haline gelir. Bu da 0'dan ρ 'ya kadar integre edilirse

$$\int_0^\rho \frac{2\rho - 4}{1-\rho^2} d\rho \leq \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(z)| d\rho \leq \int_0^\rho \frac{2\rho + 4}{1-\rho^2} d\rho \Rightarrow$$

$$\log \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq \log |f'(z)| \leq \log \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} \Rightarrow$$

$\dfrac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq |f'(z)| \leq \dfrac{1+\rho}{(1-\rho)^3}$, $|z| = \rho$ olduğundan,

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

bulunur ki bu da (i) eşitsizliğidir.

(ii) eşitsizliği ispatlanırken, (i)'nin sağ tarafı ile orjini birleştiren doğru boyunca integre edilirse

$$|f(z)| = \left|\int_0^{|z|} f'(z)dz\right| \leq \int_0^{\rho} |f'(z)|d\rho \leq \int_0^{\rho} \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \Rightarrow$$

(I) $$|f(z)| \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

bulunur. $|f(z)|$ için bir alt sınır elde etmek üzere, $f(z)$ noktası ile orjini birleştiren doğru parçası $|z|<1$ içinde, tamamen $f(z)$'in değerleriyle örtülür. Eğer L, $w=f(z)$ fonksiyonuyla bu doğru parçası üzerine tasvir edilen, $|z|<1$'de bir yay ise, L boyunca $dw = f'(z)dz > 0$'dır. Böylece

$$|f(z)| = \left|\int_L f'(z)dz\right| = \int_L |f'(z)|d\rho \geq \int_0^{\rho} \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3}d\rho = \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \Rightarrow$$

(II) $$\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \leq |f(z)|$$

buluruz. (I) ve (II) ifadeleri birleştirilirse

$$\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

bulunur. $|z| = \rho$ alınırsa,

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

bulunur ki, bu da (ii) eşitsizliğidir.

Bundan önce,

$$h(\varsigma) = \frac{f\left(\frac{\varsigma + z_0}{1+\varsigma.\overline{z_0}}\right) - f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)} = \varsigma + \left[\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right]\varsigma^2 + \dots$$

fonksiyonunun S sınıfına ait olduğunu ispatlamıştık. Bu fonksiyonda $\varsigma = -z_0$ alınırsa,

$$h(-z_0) = \frac{f\left(\dfrac{-z_0 + z_0}{1+(-z_0).\overline{z_0}}\right) - f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)} = -\frac{1}{1-|z_0|^2} \cdot \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$$

bulunur. Zira $f(0) = 0$ 'dır.Buradan,

$$-(1-|z_0|^2)\cdot h(-z_0) = \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{(1-|z_0|^2)\cdot h(-z_0)} = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{z_0}{(1-|z_0|^2)\cdot h(-z_0)} = z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \quad \Rightarrow$$

$$(*) \qquad \left| z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right| = \frac{1}{(1-|z_0|^2)} \cdot \left| \frac{z_0}{h(-z_0)} \right|$$

buluruz. (ii) eşitsizliğinde $|f(z)|$ yerine $\dfrac{1}{(1-|z_0|^2)} \cdot \left| \dfrac{z_0}{h(-z_0)} \right|$ konursa,

$$\frac{|z_0|}{(1+|z_0|)^2} \le \frac{1}{(1-|z_0|^2)} \cdot \left| \frac{z_0}{h(-z_0)} \right| \le \frac{|z_0|}{(1-|z_0|)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(1-|z_0|^2)|z_0|}{(1+|z_0|)^2} \le \left| \frac{z_0}{h(-z_0)} \right| \le \frac{(1-|z_0|^2)|z_0|}{(1-|z_0|)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(1-|z_0|)(1+|z_0|)|z_0|}{(1+|z_0|)^2} \le \left| \frac{z_0}{h(-z_0)} \right| \le \frac{(1-|z_0|)(1+|z_0|)|z_0|}{(1-|z_0|)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(1-|z_0|)|z_0|}{(1+|z_0|)} \le \frac{|z_0|}{|h(-z_0)|} \le \frac{(1+|z_0|)|z_0|}{(1-|z_0|)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|} \leq \left|\frac{1}{h(-z_0)}\right| \leq \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

(*) eşitsizliğinden dolayı

$$\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|} \leq \left|z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leq \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$$

bulunur. z ile z_0 yer değiştirilirse

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|z \frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

bulunur ki, bu da (iii) eşitsizliğidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.15.Sonuç: $f(z)$, D'de analitik, yalınkat ve $F = f(0)$ olsun. Buradan

(i) $$\frac{1}{4}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \leq dist(f(z), \partial F) \leq \left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \quad (|z|<1)$$

dir Bu eşitsizlikler en iyi sınırlardır. Özellikle $f \in S$ ise, buradan

(ii) $$\frac{1}{4} \leq dist(0, \partial F) \leq 1$$

dir.

İspat: İlk olarak (ii) eşitsizliğini ispatlayalım. Madem ki $f \in S$ dir, o halde

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

eşitsizliğinden,

(*) $$dist(0, \partial F) = \underset{|z|\to 1}{Lim} \inf |f(z)| \geq \underset{|z|\to 1}{Lim} \frac{|z|}{(1+|z|)^2} = \frac{1}{4} \leq 1$$

bulunur. Diğer taraftan (distorsiyon teoreminden)

$$(**) \qquad dist(0,\partial F)\geq \frac{1}{4}$$

idi. (*) ve (**) bağıntıları birleştirilirse,

$$\frac{1}{4}\leq dist(0,\partial F)\leq 1$$

dir. Bu da (ii) eşitsizliğidir.

$z^{-1}f(z)=1+a_2z^2+a_3z^2+\ldots$ D'de analitik ve sıfırdan farklıdır. Minimum prensibi gösterir ki

$$dist(0,\partial F)=\underset{|z|\to 1}{Lim}\inf|f(z)|\geq \underset{|z|\to 1}{Lim}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leq 1$$

dir. Şimdi $\frac{1}{4}\leq dist(0,\partial F)\leq 1$ eşitsizliğini

$$h(\varsigma)=\frac{f\left(\dfrac{\varsigma+z_0}{1+\varsigma.\overline{z_0}}\right)-f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)}=\varsigma+\left[\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\overline{z_0}\right]\varsigma^2+\ldots$$

fonksiyonuna uygularsam, (bunu yapabilirim. Zira $f(z)$ normalize edilmemiş bile olsa $h(\varsigma)$ fonksiyonu S sınıfına aittir)

$$dist(f(z_0),\partial F)=dist[0,\partial h(0)]\left(1-|z_0|^2\right)|f'(z_0)|$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{4}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|\leq dist(f(z),\partial F)\leq\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|$$

elde ederiz. Bu da (i) eşitliğidir.

KUVVET SERİLERİNDE BAZI TEOREMLER

1.ALAN TEOREMİ İÇİN KATSAYILAR.

$$\textbf{(1)} \qquad \phi(\zeta) = \frac{1}{[f(1/\zeta^2)]^{1/2}} = \zeta + c_1 \frac{1}{\zeta} + c_2 \frac{1}{\zeta^3} + \ldots$$

transformasyonunun, Alan Teoremi ile birleştirildiğinde S sınıfı için, $|a_2| < 2$ olduğunun ispatlanmasında çok faydalı olduğunu biliyoruz. Bu halde (1) eşitliğinin sağ tarafındaki diğer katsayılarında faydalı sonuçlar verip vermeyeceğini sormak doğaldır. Dahası, $k \neq 2$ pozitif tamsayıları için $\left[f(z^k)\right]^{\frac{1}{k}}$ ele alınabilir. Elbette bu durumda yeni eşitsizlikler elde edilir. Ancak $a_2, a_3, \ldots$' lere bağlı fonksiyonlar olarak ifade edilebilen c_n katsayılarının karmaşıklığından dolayı bu metod umulduğu kadar verimli değildir.

4.1.Teorem: k$\neq$ 0 bir tamsayı olmak üzere

$$\textbf{(2)} \qquad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

'in E'de, orjindeki hariç, hiçbir sıfırının* bulunmadığını varsayalım. $\phi(\zeta)$ fonksiyonunu,

$$\textbf{(3)} \qquad \phi(\zeta) \equiv \frac{1}{[f(1/\zeta^k)]^{1/k}} = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{nk-1}}{\zeta^{nk-1}}$$

olarak tanımlayalım.

$$\gamma(k,m) = (k+1)(2k+1)(3k+1)\ldots(mk+1) = \prod_{j=1}^{m}(jk+1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\gamma(k,0) = 1$ olduğu genel kabuldür. Bu durumda

$$(4) \qquad c_{nk-1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m \gamma(k,m-1)}{k^m} \sum_{\sigma_m(n)} \frac{a_2^{r_1} a_3^{r_2} \ldots a_{n+1}^{r_n}}{r_1! r_2! \ldots r_n!}$$

dır. Burada;

$$(5) \qquad r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \ldots nr_n = n$$

ve

$$(6) \qquad r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = m \qquad \text{olmak üzere;}$$

$\sigma_m(n)$ negatif olmayan tamsayılardan oluşan $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n)$ n- lilerinin cümlesidir. (4) ifadesindeki 2. toplam bu $\sigma_m(n)$ ' deki n- liler üzerinden yapılmaktadır.

(*) Bu teoremlerde yalınkatlığın katsayılar arasındaki bağıntılarla bir ilgisi yoktur. Hiçbir sıfır içermeme hipotezi bir yakınsaklık tanım bölgesini garanti eder. Dolayısıyla bu tür koşulları görmezden geleceğiz.

İspat: Bu teorem daha çok multinomial teoreminin sonsuz bir seriye uygulanışının yeniden formülasyonudur. Alan Teoremi ile uyumlu olacak şekilde ifade edilmiştir.

Teoremde ilk 6 hal (n = 2,3,4,5,6,7) aşağıdaki formülleri verir :

$n = 1$ için :

$$c_{k-1} = \sum_{m=1}^{1} \frac{(-1)^m \gamma(k,m-1)}{k^m} \left(\sum_{\sigma_m(1)} \frac{a_2^{r_1}}{r_1!} \right) = \frac{(-1)^1 \gamma(k,1-1)}{k^1} \left(\sum_{\sigma_m(1)} \frac{a_2^{r_1}}{r_1!} \right) = -\frac{\gamma(k,0)}{k} \left(\sum_{\sigma_m(1)} \frac{a_2^{r_1}}{r_1!} \right)$$

bulunur. Burada $\sigma_m(n)$ 'in tanımından (yukarıda verildi.), $r_1 = 1$ bulunur. Bu durumda;

$$c_{k-1} = -\frac{\gamma(k,0)}{k} \left(\sum_{\sigma_m(1)} \frac{a_2^{r_1}}{r_1!} \right) = -\frac{1}{k} \left(\frac{a_2^1}{1!} \right) = -\frac{1}{k} a_2 \quad \Rightarrow$$

$$(7) \qquad c_{k-1} = -\frac{1}{k} a_2$$

eşitliği elde edilir.

$n=2$ için :

$$c_{2k-1}=\sum_{m=1}^{2}\frac{(-1)^m\gamma(k,m-1)}{k^m}\left(\sum_{\sigma_m(2)}\frac{a_2^{r_1}a_3^{r_2}}{r_1!r_2!}\right)\Rightarrow$$

$$c_{2k-1}=\frac{(-1)^1\gamma(k,1-1)}{k^1}\sum_{\sigma_1(2)}\frac{a_2^{r_1}a_3^{r_2}}{r_1!r_2!}+\frac{(-1)^2\gamma(k,2-1)}{k^2}\sum_{\sigma_2(2)}\frac{a_2^{r_1}a_3^{r_2}}{r_1!r_2!}$$

bulunur. Yine $\sigma_m(n)$ 'in tanımından,

$\sigma_1(2)$: $r_1+2r_2=2$, $r_1+r_2=1$ dir. Buradan, $r_1=0$ ve $r_2=1$ olduğu görülür.

$\sigma_2(2)$: $r_1+2r_2=2$, $r_1+r_2=2$ dir. Buradan, $r_1=2$ ve $r_2=0$ olduğu görülür. Bu bulunan ifadeler yukarıdaki c_{2k-1} ifadesinde yerine konularak;

$$c_{2k-1}=-\frac{1}{k}a_3+\frac{\gamma(k,1)}{k^2}\frac{a_2^2}{2!}=-\frac{1}{k}a_3+\frac{k+1}{2k^2}a_2^2\Rightarrow$$

(8) $$c_{2k-1}=-\frac{1}{k}a_3+\frac{k+1}{2k^2}a_2^2$$

ifadesine ulaşılır. (Burada $\gamma(k,1)$ değeri, yukarıda verilen tanımdan, $k+1$ olarak bulunup yerine yazılmıştır.) Bu şekilde devam ederek $n=3,4,5,6$ için sırasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

(9) $$c_{3k-1}=-\frac{1}{k}a_4+\frac{k+1}{k^2}a_2a_3-\frac{(2k+1)(k+1)}{6k^3}a_2^3$$

(10) $$c_{4k-1}=-\frac{1}{k}a_5+\frac{k+1}{k^2}a_2a_4+\frac{k+1}{2k^2}a_3^2-\frac{(2k+1)(k+1)}{2k^3}a_2^2a_3$$
$$+\frac{(3k+1)(2k+1)(k+1)}{24k^4}a_2^4$$

(11) $$c_{5k-1} = -\frac{1}{k}a_6 + \frac{k+1}{k^2}a_2a_5 + \frac{k+1}{k^2}a_3a_4 - \frac{\gamma(k,2)}{2k^3}\left(a_2^2a_4 + a_2a_3^2\right)$$

$$+\frac{\gamma(k,3)}{6k^4}a_2^3a_3 - \frac{\gamma(k,4)}{120k^5}a_2^5$$

(12)

$$c_{6k-1} = -\frac{1}{k}a_7 + \frac{k+1}{2k^2}\left(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2\right) - \frac{\gamma(k,2)}{6k^3}\left(3a_2^2a_5 + 6a_2a_3a_4 + a_3^3\right)$$

$$+\frac{\gamma(k,3)}{12k^4}\left(2a_2^3a_4 + 3a_2^2a_3^2\right) - \frac{\gamma(k,4)}{24k^5}a_2^4a_3 + \frac{\gamma(k,5)}{720k^6}a_2^6$$

c_{nk-1} katsayılarını determinantlar cinsinden ifade edebiliriz. Gerçekten, (3) ifadesinden türev alınırsa;

$$-\frac{1}{k}\cdot\frac{f'\left(\frac{1}{\zeta^k}\right)\left(\frac{1}{\zeta^k}\right)'\left[f\left(\frac{1}{\zeta^k}\right)\right]^{\frac{1}{k}}}{\left(\left[f\left(\frac{1}{\zeta^k}\right)\right]^{\frac{1}{k}}\right)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(nk-1)\zeta^{nk-2}c_{nk-1}}{(\zeta^{nk-1})^2} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{k}f'(1/\zeta^k)\frac{(-k)\zeta^{k-1}}{\zeta^{2k}}\frac{1}{[f(1/\zeta^k)]^{\frac{2}{k}-\frac{1}{k}+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-nk)c_{nk-1}}{\zeta^{2nk-2+2-nk}} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{k}\frac{f'(1/\zeta^k)}{[f(1/\zeta^k)]^{1+\frac{1}{k}}}\frac{(-k)}{\zeta^{k+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-nk)c_{nk-1}}{\zeta^{nk}} \quad \Rightarrow$$

(13) $$\frac{f'(1/\zeta^k)}{[f(1/\zeta^k)]^{1+\frac{1}{k}}}\frac{1}{\zeta^{k+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-nk)c_{nk-1}}{\zeta^{nk}}$$

bulunur. Eşitliğin sol tarafında,

$$\textbf{(14)}\qquad \frac{1}{\zeta}\frac{1}{[f(1/\zeta^k)]^{1/k}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{nk-1}}{(\zeta^k)^n}$$

ve

$$\textbf{(15)}\qquad \frac{1}{\zeta^k}f'(\frac{1}{\zeta^k})=\frac{1}{\zeta^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n}{(\zeta^k)^n}$$

özdeşliklerini kullanalım.

$$\frac{1}{\zeta^k}f'(1/\zeta^k)\frac{1}{\zeta}\frac{1}{[f(1/\zeta^k)]^{1/k}f(1/\zeta^k)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-nk)c_{nk-1}}{\zeta^{nk}}\quad\Rightarrow$$

$$(\frac{1}{\zeta^k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n}{(\zeta^k)^n})(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{nk-1}}{(\zeta^k)^n})=f\left(\frac{1}{\zeta^k}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-nk)c_{nk-1}}{\zeta^{nk}}\right)$$

Burada $1/\zeta^k$ yerine z koyarsak ve $a_1=1$ ve $c_{-1}=1$ genel kabulünü uygularsak; (13) ifadesinden

$$(z+\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^n)(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_{nk-1}z^n)=(z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n)(1+\sum_{n=1}^{\infty}(1-nk)c_{nk-1}z^n)\quad\Rightarrow$$

$$\textbf{(16)}\qquad (\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^n)(\sum_{n=1}^{\infty}c_{nk-1}z^n)=(\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n)(\sum_{n=0}^{\infty}(1-nk)c_{nk-1}z^n$$

bulunur. $(n+1)$ inci terim için (16) eşitliğinin her iki tarafında z^{n+1} in katsayılarını eşitlersek;

$$((n+1-j)a_{n+1-j})(c_{jk-1})z^{n+1-j}z^j=(a_{n+1-j})(1-jk)(c_{jk-1})z^{n+1-j}z^j\quad\Rightarrow$$

$$n+1-jk=1-jk\quad\Rightarrow\quad jk+n-j=0\quad\Rightarrow$$

$$\textbf{(17)}\qquad \sum_{j=0}^{n}(jk+n-j)a_{n+1-j}c_{jk-1}=0\qquad,\quad n=1,2,3,\ldots \text{ bulunur.}$$

Bu denklem sistemine $c_{-1}=1$ aşikar eşitliğini de ekleyelim. Bu halde ilk $n+1$ eşitlik $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{nk-1}$ değişkenlerine bağlı lineer denklemler olacaktır. Cramer kuralından aşağıdaki ifadeye ulaşılır ki bu da ispatı istenen ifadedir.

(18)

$$c_{nk-1}=\frac{(-1)^n}{n!k^n}\begin{vmatrix} a_2 & k & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 2a_3 & (k+1)a_2 & 2k & \ldots & \ldots & : \\ 3a_4 & (k+2)a_3 & (2k+1)a_2 & \ldots & \ldots & : \\ : & : & : & \ldots & \ldots & : \\ : & : & : & \ldots & \ldots & (n-1)k \\ na_{n+1} & (k+n-1)a_n & (2k+n-2)a_{n-1} & \ldots & \ldots & [(n-1)k+1]a_2 \end{vmatrix}$$

4.2.Teorem: Önceki teoremde $k \neq 0$ pozitif bir tamsayı, c_{nk-1} (3) eşitliğindeki gibi tanımlanırsa, c_{nk-1} (18) determinantı ile ifade edilebilir. (18)' de A_{ij} şöyle verilir:

$$\textbf{(19)}\quad A_{ij}=\begin{Bmatrix} [i+(j-1)(k-1)a_{2+i-j}] & , & i+1 \geq j \\ 0 & , & i+1<j \end{Bmatrix} \qquad \text{ve } a_1=c_{-1}=1.$$

(3) ifadesinin (18) ifadesinde verilen determinantın (tek türlü) hesaplanmasını temsil ettiği açıktır. (3)'te k yerine –K koyarsak katsayılar için aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\textbf{(20)}\qquad g(z)\equiv[f(z^K)]^{1/K}=z+\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK+1}z^{nK+1}.$$

Böylece (4) veya (18) ifadelerinde k yerine –K alınarak b_{nK+1} bulunur ve c_{nk-1} yerine b_{nK+1} yazılır. Teorem 1'de verilen formülün, k'nın tamsayı olmama durumunda bir anlam ifade edip, etmeyeceği sorusu akla gelebilir. Görüldüğü gibi hiçbir anlamı yoktur, ancak küçük bir değişiklikle anlamlı hale gelebilir. Ve Parwitz eşitsizliğiyle birlikte faydalı olabilir. Eğer $f(z)$ S' de ise, $\frac{f(z)}{z}$' in E' de hiçbir sıfırının olmadığını gözlemliyoruz. Bu halde herhangi bir α reel sayısı için

$$(21) \qquad h(z) \equiv [\frac{f(z)}{z}]^{-\alpha/2} = [\frac{z}{f(z)}]^{\alpha/2} \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonunu ele alabiliriz.(Sağ taraftaki toplam E' de yakınsaktır.) Her iki tarafı da $z^{\frac{\alpha}{2}}$'ye bölüp,

$$(22) \qquad \frac{1}{(f(z))^{\alpha/2}} = \frac{1}{z^{\alpha/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-\frac{\alpha}{2}}$$

sonucunu, (3) ifadesinde $\frac{1}{\zeta^k}$ yerine z koyduğumuz haliyle kıyaslayalım.

$$(23) \qquad \frac{1}{[f(z)]^{1/k}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk-1} z^{n-\frac{1}{k}}$$

$\frac{1}{k} = \frac{\alpha}{2}$ alırsak (22) ve (23) ifadelerindeki serilerin özdeş olacağı açıktır.

KATSAYILAR İÇİN KESİN SINIRLAR

4.3.Teorem:

$$(22) \qquad f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \quad ,$$

fonksiyonu ST' ye ait ise, her $n \in Z^+$, için

$$(23) \qquad |a_n| \leq n$$

dir. Ayrıca, bu eşitsizlik herbir n indisi için kesindir ve eşitlik yalnızca birtek $n \geq 2$ için sözkonusu ise, $f(z)$ Koebe Fonksiyonunun bir rotasyonudur (dönmesidir).

İspat: $f(z)$, ST' ye ait ise, Teorem1 ve Teorem4* ten , $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ P dedir.

Böylece,

$$\textbf{(24)} \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \equiv g(z)\ , \quad (|b_k| \leq 2, \quad k = 1,2,3,...)$$

$b_1 = 2$ olması için gerek ve yeter koşulun $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ olması olduğunu biliyoruz.

(22) ve (24) ifadelerinden aşağıdaki sonuçlara ulaşılır. (22)' den türev alınırsa,

$$f'(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^{k-1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{z(1+\sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^{k-1})}{(z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k)} = \frac{z+\sum_{k=2} k a_k z^k}{z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k} = (1+\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k)$$

$$\Rightarrow \qquad \textbf{(25)} \quad z + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^k = (z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k)(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k)$$

bulunur. (25) ifadesinde z^n in katsayılarını eşitleyerek,

$$n a_n = \sum_{k=n-1} b_k z^{k+1} + \sum_{k=n} a_k z^k + \sum_{k=1}^{n-2} a_k z^k \sum_{j=1}^{n-2} b_j z^j \Rightarrow$$

$$n a_n = b_{n-1} + a_n + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k$$

$$\textbf{(26)} \qquad n a_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k + b_{n-1}$$

ifadesine ulaşılır. $n = 2$ için

$$2a_2 = a_2 + b_1 \tag{27}$$

olur ve bu durumda $|a_2| = b_1 \leq 2$ dir. Ayrıca eşitlik ancak ve ancak $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ olması durumunda mümkündür. $k = 2,3,...,n-1$ için $|a_k| \leq k$ olduğunu varsayalım. O zaman (26) ifadesinden,

$$\begin{aligned} |na_n - a_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k + b_{n+1}\right| \Rightarrow |(n-1)a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k + b_{n+1}\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-2} 2|a_{n-k}| + 2 \leq 2(1 + \sum_{k=2}^{n-1} k) = 2\frac{(n-1)n}{2} = n(n-1). \end{aligned} \tag{28}$$

elde edilir. Bu yüzden $|a_n| \leq n$ dir. Bununla birlikte $b_1 < 2$ ise, (28) ifadesi eşitsizlik halini alacaktır.Böylece $b_2 = 2$ ve $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ değilse, $|a_n| < n$' dir. Fakat bu durumda herbir $n > 1$ için $a_n = n$ olur ve bu sebeple Koebe Fonksiyonudur.

4.4.Teorem: (22) ifadesinde verilen $f(z)$ CV' ye ait ise, herbir $n \in Z^+$ için

$$|a_n| \leq 1 \tag{29}$$

dir. Ayrıca, bu eşitsizlik herbir n indisi için keskindir. Ve sadece birtek $n \geq 2$ için eşitlik sözkonusu ise $f(z)$, $\dfrac{z}{1-z}$' in bir rotasyonudur.

İspat: $f(z)$, CV' ye ait ise, Teorem 5** ten

$$zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n \tag{30}$$

ST' ye aittir. Teorem 6***' dan $n|a_n| \leq n$ olduğunu biliyoruz; bu yüzden $|a_n| \leq 1$ dir. $\dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + ...$ olduğundan $|a_n| \leq 1$ sınırı keskindir. Ayrıca, $|a_n| = 1$ yalnızca birtek $n \geq 2$ için doğruysa, $zf'(z)$, Koebe Fonksiyonunun bir rotasyonudur. Buradan, $f(z)$ in $\dfrac{z}{1-z}$ in bir rotasyonu olduğu sonucuna varılır. Bu da ispatı istenen ifadedir.

(*)Teorem:1. $f(z)$, $\overline{E}_R$: $|z| \leq R$ kapalı diskinde regüler ve yalınkat bir fonksiyon olsun. Bu halde $f(z)$ in $\overline{E}_R$ den bir konveks bölge üzerine bir tasvir olması için gerek ve yeter koşul

$$\textbf{(9)} \qquad \operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0 \ , \qquad C_R : |z| = R .$$

dır. Ayrıca $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde $f(z)$ in E_R yi $\omega = 0$ a göre yıldızıl bir bölge üzerine resmetmesi için gerek ve yeter koşul

$$\textbf{(10)} \qquad \operatorname{Re}\left[1+\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0 \ , \qquad C_R : |z| = R .$$

dır.

Teorem:4. $f(z) \in S$ olsun. Eğer $f(E)$ konveks bir bölge ise, herbir $r < 1$ pozitif reel sayısı için $f(E_R)$' de konveks bir bölgedir. Bununla birlikte $f(E)$ orjine göre yıldızıl bir bölge ise,herbir $r < 1$ pozitif reel sayısı için $f(E_R)$ de orjine göre yıldızıl bir bölgedir.

(**) Teorem:5. $f'(z) \neq 0$ ve $f'(z) \in E_R$ olsun. Bu takdirde, $f(z)$ ancak ve ancak

$$F(z) \equiv zf'(z)$$

E_R' de yıldızıl ise konvekstir.

Tanım(CV): E' de yalınkat olan ve E' yi konveks bir bölge üzerine resmeden bütün normalize fonksiyonların cümlesini CV ile gösteriyoruz.

Tanım(ST): E' de yalınkat olan ve E' yi orjine göre yıldızıl bir bölge üzerine resmeden bütün normalize fonksiyonların cümlesini ST ile gösteriyoruz.

Bu halde Teorem 5' i aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz.

Teorem:5. $f(z) \in CV$ ise, $zf'(z) \in ST$

$$F(z) \in ST \text{ ise, } \int_0^z \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta \in CV \text{ dir.}$$

(***)Teorem:6. Eğer

(22) $$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

ST'de ise, her n pozitif tamsayısı için

(23) $$|a_n| \leq n$$

dir. Dolayısıyla, bu eşitsizlik her n sayısı için kesindir ve eğer eşitlik yalnız bir tane $n \geq 2$ için gerçekleniyorsa ozaman, $f(z)$ fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur.

POZİTİF REEL KISMI HAİZ FONKSİYONLAR SINIFI

5.1.Tanım: E'de regüler olan ve $z \in E$ için

(1) $$\mathrm{Re}(f(z)) > 0$$

koşulunu gerçekleyen

(2) $$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

formundaki tüm fonksiyonların cümlesine P diyoruz. P'deki herhangi bir fonksiyona, **E'de pozitif reel kısma haiz fonksiyon** denir.

KATSAYI EŞİTSİZLİĞİ

5.2.Teorem: $N \geq 1$ ve N belirli bir tamsayı olsun. (2)' de verilen $f(z)$ P'ye ait ise,

(3) $$|p_N| \leq 2$$

dır. Bu eşitsizlik kesindir. Eğer $\eta = e^{2\pi i / N}$ ve

(4) $$F(z) \equiv \sum_{k=1}^{N} \mu_k \frac{1 + \eta^k z}{1 - \eta^k z} \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_N z^N \quad ,$$

ise, o zaman $F(z)$, P' dedir ve $p_N = 2$ ' dir. Burada $\mu_k \geq 0$, $k = 1,2,\ldots,N$ ve

(5) $$\sum_{k=1}^{N} \mu_k = 1$$ ' dir.

İspat: Her zaman $P_N e^{i\alpha N} \geq 0$ olacak şekilde $f(e^{i\alpha} z)$' de bir $\alpha \in \Re$ seçebiliriz. Bu nedenle $p_N \geq 0$ olduğunu varsayabiliriz.

$$(6) \qquad I(r) \equiv \int_0^{2\pi} (1 - CosN\theta) f(re^{i\theta}) d\theta \quad , \qquad 0 \leq r < 1$$

integralini ele alalım. Burada f, fonksiyonu reel kısma haiz fonksiyon olduğundan (hipoteze göre $f(z) \in P$) $\mathrm{Re}(f(re^{i\theta})) > 0$ ve bu nedenle $\mathrm{Re}(I(r)) > 0$' dır. Diğer taraftan, trigonometrik fonksiyonların ortogonalliğinden;

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \Rightarrow f(re^{i\theta}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k (re^{i\theta})^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k r^k e^{ik\theta} \Rightarrow$$

$$I(r) = \int_0^{2\pi} (1 - Cos\theta) f(re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - Cos\theta)(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k r^k e^{ik\theta}) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - Cos\theta)(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k r^k (Cos\theta + iSin\theta) d\theta$$

$$= 2\pi - \pi r^n p_N$$

$F(z)$' in P'de olduğunu göstermek için sadece (4) ifadesinin Stieltjets (*) integral gösteriminin özel bir hali olduğunu görmek yeterlidir.

$$\left((*) \quad f(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\phi}}{1 - ze^{-i\phi}} d\mu(\phi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_0(e^{-i\phi} z) d\mu(\phi) \quad \right)$$

Sonuçta, $F(z)$'in N inci katsayılarını kolayca görebiliriz :

$$(7) \qquad p_N = 2\sum_{k=1}^{N} \mu_k (\eta^k)^N = 2\sum_{k=1}^{N} \mu_k (\eta^N)^k = 2\sum_{k=1}^{N} \mu^k = 2 \quad .$$

Sıralı N – lilerin iki farklı seçiminden $F_1(z)$ ve $F_2(z)$ gibi iki farklı fonklsiyon elde ederiz. Gerçekten ; bu iki fonksiyon aynı kutuplara sahip olabilir fakat, en az bir kutbu vardır ki bu noktada bu iki fonksiyonun rezidüleri farklıdır. Bu yüzden (4)'te tanımlanan fonksiyonlar cümlesi N – 1 tane bağımsız reel parametreye bağlıdır. (3) ifadesinde eşitlik halinde $f(z)$, (4) ve (5) eşitliklerinde tanımlanan türden fonksiyonlar için $F\left(e^{i\alpha}\right)$ formuna sahip olması gerektiği gösterilebilir.

(*)'da (Stieltjets gösterimi) integrali alınan ifadeyi sonsuz bir seri olarak yazarsak ve terim terime integre edersek $\left(|z| \leq 1\right)$ (1) ifadesindeki katsayıları şöyle ifade edebiliriz :

(8) $$p_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} \, d\mu(\phi) \; .$$

Böylece (*) ve (8) eşitlikleri bize $|p_N| \leq 2$ şeklinde yeni bir ispatı verir.

SPİRAL FONKSİYONLAR

6.1.Tanım (Spiral Fonksiyonlar):

(1) $$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

normalizasyonuna sahip $f(z)$ fonksiyonu E'de regüler ve E'de

(2) $$\mathrm{Re}(e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)}) > 0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(z)$'e E'de **α – spiral fonksiyon** denir. Böyle $f(z)$' lerin cümlesini $SP(\alpha)$ ile göstereceğiz. Aynı zamanda $\alpha \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ koşulunu gerçekleyen her α için $SP \equiv \bigcup SP(\alpha)$' dır.

6.2.Teorem:11. $f(z) \in SP(\alpha)$ ise,

(3) $$|a_n| \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|k + 2s - 1|}{k} = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} ((k-1)^2 + 4k\cos^2\alpha)^{1/2}$$

dir ve $n \geq 2$ koşulunu sağlayan herbir n değeri için bu eşitsizlik kesindir.

İspat:

(4) $$f(z) = ze^{I(z)}$$

ve

(5) $$I(z) = (e^{-i\alpha}\cos\alpha)\int_0^z \frac{p(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta$$

eşitliklerinden

(veya ; (*) $\frac{1}{\cos\alpha}[e^{-i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)} - i\sin\alpha] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \equiv p(z)$ eşitliğinden)

$$f'(z) = 1e^{I(z)} + I'(z)e^{I(z)}z \Rightarrow zf'(z) = ze^{I(z)} + I'(z)e^{I(z)}z^2 = ze^{I(z)}(1 + I'(z)z) \Rightarrow$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{ze^{I(z)}(1 + I'(z)z)}{ze^{I(z)}} = 1 + I'(z)z$$

elde edilir.

$$I(z) = e^{-i\alpha}\cos\alpha\int_0^z \frac{p(\zeta)-1}{\zeta}d\zeta \ , \quad p(z) = \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow p(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \Rightarrow$$

$$p(\zeta) - 1 = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - \frac{1-\zeta}{1-\zeta} = \frac{2\zeta}{1-\zeta} \Rightarrow \frac{p(\zeta)-1}{\zeta} = \frac{2\zeta}{1-\zeta}\frac{1}{\zeta} = \frac{2}{1-\zeta} \Rightarrow$$

$$I(z) = (e^{-i\alpha}\cos\alpha)2\int_0^z \frac{1}{1-\zeta}d\zeta = (e^{-i\alpha}\cos\alpha)2\left|-\log(1-\zeta)\right|_0^z \Rightarrow$$

$$I(z) = e^{-i\alpha}Cos\alpha 2(-\log(1-z) + \log 1) \Rightarrow$$

$$I(z) = e^{-i\alpha}Cos\alpha(-2\log(1-z)) = -2e^{-i\alpha}Cos\alpha\log(1-z) \Rightarrow$$

$$I'(z) = -2e^{-i\alpha}Cos\alpha\frac{(-1)}{1-z} = \frac{2}{1-z}e^{-i\alpha}Cos\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + I'(z) = 1 + \frac{2z}{1-z}e^{-i\alpha}Cos\alpha$$

Burada, $s = e^{-i\alpha}Cos\alpha$ olarak tanımlanıyor.

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+s\frac{2z}{1-z}$$

ayrıca; $p(z)=\dfrac{1+z}{1-z} \Rightarrow p(z)-1=\dfrac{1+z}{1-z}-1=\dfrac{1+z-1+z}{1-z}=\dfrac{2z}{1-z}$

idi. O zaman,

$$\text{(6)} \qquad \frac{zf'(z)}{f(z)}=1+s(p(z)-1)$$

sonucunu elde ederiz. $p(z)\in P$ olduğundan, Schwarz Lemmasının koşullarını ve

$$\text{(7)} \qquad p(z)=\frac{1+b(z)}{1-b(z)} \quad veya \quad p(z)-1=\frac{2b(z)}{1-b(z)}$$

eşitliklerini sağlayan bir $b(z)$ fonksiyonu vardır. Burada (6) eşitliğini kullanarak;

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+s\frac{2b(z)}{1-z} \Rightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1-b(z)+2sb(z)}{1-b(z)} \Rightarrow$$

$$zf'(z)(1-b(z))=f(z)(1-b(z)+2sb(z)) \Rightarrow$$

$$zf'(z)-zf'(z)b(z)=f(z)-f(z)b(z)+2sf(z)b(z) \Rightarrow$$

$$zf'(z)-f(z)=zf'(z)b(z)-f(z)b(z)+2sf(z)b(z) \Rightarrow$$

$$zf'(z)-f(z)=zf'(z)b(z)+f(z)b(z)(2s-1) \Rightarrow$$

$$zf'(z)-f(z)=b(z)[zf'(z)+(2s-1)f(z)]$$

ifadesine ulaşılır. Eğer $b(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ ve $f(z)$, (1) eşitliğindeki gibi ise,

$$f'(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1} \Rightarrow zf'(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n \Rightarrow zf'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} ka_k z^k$$

olarak yazabiliriz.

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k \quad\Rightarrow\quad (2s-1)f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(2s-1)a_kz^k \quad\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^k+\sum_{k=1}^{\infty}(2s-1)a_kz^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^k-\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k \quad\Rightarrow$$

(8) $$\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+2s-1)a_kz^k\right)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)a_kz^k\right)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\sum_{k=1}^{n-1}|k+2s-1|^2|a_k|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}(k+2s-1)a_kz^k\right|^2d\theta$$

$$\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}(k+2s-1)a_kz^k\right|^2|b(z)|^2d\theta$$

$$\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|b(z)\sum_{k=1}^{n-1}(k+2s-1)a_kz^k\right|^2d\theta\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}(k-1)a_kz^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_kz^k\right|^2d\theta$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2|a_k|^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|^2\geq\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)^2|a_k|^2$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2|a_k|^2\leq\sum_{k=1}^{n-1}|k+2s-1|^2|a_k|^2$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)^2|a_k|^2+(n-1)^2|a_n|^2\leq\sum_{k=1}^{n-1}|k+2s-1|^2|a_k|^2 \quad\Rightarrow$$

$$(n-1)^2|a_n|^2 \le \sum_{k=1}^{n-1}|k+2s-1|^2|a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)^2|a_k|^2 \quad \Rightarrow$$

$$(n-1)^2|a_n|^2 \le \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ |k+2s-1|^2-(k-1)^2\ \right]|a_k|^2 \quad \Rightarrow$$

ya da

$$(9) \qquad |a_n|^2 \le \frac{4Cos^2\alpha}{(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}k|a_k|^2$$

eşitsizliği bulunur. $a_1 = 1$ olduğundan, (9) eşitsizliği aşağıdaki sınırları verir:

$$|a_2|^2 \le \frac{4Cos^2\alpha}{(2-1)^2}\sum_{k=1}^{2-1}k|a_k|^2 = \frac{4Cos^2\alpha}{1^2}\left[1|a_1|^2\right] = 4Cos^2\alpha 1^2 = 4Cos^2\alpha \Rightarrow |a_2| \le 2Cos\alpha$$

ve

$$|a_3|^2 \le \frac{4Cos^2\alpha}{(3-1)^2}\sum_{k=1}^{3-1}k|a_k|^2 = \frac{4Cos^2\alpha}{2^2}\sum_{k=1}^{2}k|a_k|^2 = Cos^2\alpha\left[1|a_1|^2+2|a_2|^2\right]$$

$$\le Cos^2\alpha\left(1^2+2\left(4Cos^2\alpha\right)\right) \Rightarrow |a_3|^2 \le Cos^2\alpha\left(1+8Cos^2\alpha\right) \Rightarrow |a_3| \le Cos\alpha\left(1+8Cos^2\alpha\right)^{1/2}.$$

Bu sınırlar teoremde verilen sınırlarla uyumludur. Şimdi matematiksel indüksiyonu kullanarak $n \ge 2$ koşulunu gerçekleyen bütün n değerleri için (3)'te verilen sınırın doğru olduğunu gösterebiliriz. Burada, $m = 2,3,...n-1$ için

$$|a_m| \le \prod_{k=1}^{m-1}\frac{|k+2s-1|}{k}$$ olduğunu varsayalım ve (9) eşitsizliğindeki $|a_k|$ ile yer

değiştirirse ve $m = n-1$ için yazarsak;

$$(10)\; |a_{n-1}|^2 \leq \prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{|k+2s-1|}{k}\right)^2 = \frac{4Cos^2\alpha}{(n-2)^2}\left[1+\sum_{k=2}^{n-2}k\prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{|j+2s-1|}{j}\right)^2\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. İndüksiyon hipotezine ve (9)'a göre, a_n için;

$$|a_n|^2 \leq \frac{4Cos^2\alpha}{(n-1)^2}\left[1+\sum_{k=2}^{n-2}k\prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{|j+2s-1|}{j}\right)^2\right]+\frac{4Cos^2\alpha}{(n-1)^2}(n-1)\prod_{k=1}^{n-2}\left(\frac{|k+2s-1|}{k}\right)^2$$

elde edilir.

$k = n-1$ alırsak:

$$\left[\frac{(n-2)^2+4(n-1)Cos^2\alpha}{(n-1)^2}\right] = \frac{(k-1)^2+4kCos^2\alpha}{k^2}$$

olur. Bu durumda (3) elde edilir. Sınırların kesin olduğunu görmek için her $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ olan her α için $F(z) = \frac{z}{(1-z)^{2s}}$ ' nin $SP(\alpha)$ 'ya ait olduğunu ve

$$(11) \qquad \frac{z}{(1-2s)^{2s}} = z + \sum_{n=2}^{\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+2s-1}{k}z^n$$

eşitliğini görmeliyiz.

SPiRALLİKE FONKSİYONLAR

7.1.Giriş: f fonksiyonu açık birim çemberde, yani $D=\{z|\ |z|<1\}$ 'de, regüler ve orjinde bir basit sıfırı olsun ve başka hiçbir sıfırı olmasın. f ' in D'de yalınkat olması için gerek ve yeter koşulun $0<r<1, 0<t_2-t_1\leq 2\pi$ olan r,t_1 ve t_2 için

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}e^{i\theta}d\theta\neq 0$$

olması olduğu Špaček tarafından gösterilmişti. Dolayısıyla burada

(1.1) $$\operatorname{Re}\left[\zeta\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\right]>0 \quad , \quad z\in D$$

koşulunu gerçekleyen bir ζ kompleks sayısı var ise o zaman,

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}e^{i\theta}d\theta=\frac{1}{\zeta}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\zeta f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}e^{i\theta}d\theta\neq 0$$

dır. Bu yüzden f, D'de yalınkattır.

Špaček'in (1.1) koşulunu sağlayan fonksiyonlara spiral – like fonksiyonlar denmektedir ve son yıllarda geometrik fonksiyonlar teorisinde birçok faydalı ve önemli tipik problemlerin çözümünde kaynaklık etmektedir.

Spiral–like fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfın tasvir özellikleri aşağıda tanımlandı. Yalınkat fonksiyonların bazı aileleri için β - spiral yarıçapı tanımlandı ve hesaplandı. Katsayıların kesin sınırları saptandı.

7.2.Hazırlık Çalışmaları:

(2.1) $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$

koşullarıyla normalize edilen, D'de regüler ve yalınkat olan bütün f fonksiyonlarının oluşturduğu fonksiyonlar ailesini $\mathfrak{S}$ ile gösterelim.

7.3.Tanım: f, D'de regüler olsun ve (2.1) koşullarını gerçeklesin.f'in bir α - spiral fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul

$$\textbf{(2.2)} \quad \mathrm{Re}\left[e^{i\alpha}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\right] > 0 \quad , \quad z \in D$$

olacak şekilde bir $\alpha \in \Re$ sayısı var olmasıdır.

Špaček'in yukarıda tanımladığımız sonuçları $\Im_\alpha \subset \mathfrak{S}$ olduğunu göstermektedir.

f(z) = z birim fonksiyonu için $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ *ve* $|\alpha| = \frac{\pi}{2}$ olduğu aşikardır. Bu yüzden bu haller üzerinde durulmayacaktır.

(2.2)' nin bir geometrik yorumu aşağıdaki şekilde yapılabilir:

f, $0 < r < 1$ *ve* $\theta \in \Re$ için $z = re^{i\theta}$ çemberinde (2.2) koşulunu gerçeklesin ve C(r) bu çemberin f'deki resmi olsun. $T(r,\theta)$ ile artan θ değerlerinin belirlediği yönde $f(re^{i\theta})$ noktasından C(r)'ye çizilen teğet vektörünü gösterelim. O zaman, argümanların uygun seçimi ile (2.2) aşağıdaki eşitsizliğe denk olur.

$$\textbf{(2.3)} \qquad 0 < \arg\left[ie^{i\alpha}\left\{re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\}\right] < \pi$$

ve

$$\arg\left\{ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})\right\} = \arg\{T(r,\theta)\}$$

olduğundan (2.3)' ü

$$\textbf{(2.4)} \qquad 0 < \arg\{T(r,\theta)\} - \left[\arg\left\{f(re^{i\theta})\right\} - \alpha\right] < \pi$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla $T(r,\theta)$ vektörünün yönü, sınırları

$$(2.5) \qquad \omega = f(re^{i\theta}) + t\exp i\left[\arg\{f(re^{i\theta})\} - \alpha\right] \quad , \quad t \in \Re$$

eşitliği ile verilen açık yarı düzlem içine doğrudur. Bu yarı düzlem α > 0 için orjini kapsamaz, fakat α < 0 için orjin yarı düzlemin içine düşer. (2.5) ile verilen doğrunun $\rho = ke^{\phi Cot(-\alpha)}$ spiralinin (ρ,ϕ) noktasındaki teğet doğrusuna paralel olduğu kolayca gösterilebilir. (Spiral ve nokta, kutupsal koordinatlar civarında verilmiştir; yarıçap vektörünün yönü $\arg\left[f(re^{i\theta})\right]$' nın yönüyle belirlenir.) S.Ozaki f'in çokkatlı olması hali için birçok fikir ileri sürmüştür.

Pozitif reel kısımlı, normalize edilmiş holomorfik fonksiyonlar sınıfını, β ile gösterelim. Yani, P ∈ β olması için gerek ve yeter koşul P'nin D'de holomorfik olması, $z \in D$ için $\mathrm{Re}\{P(z)\} > 0$ *ve* $P(0) = 1$ olmasıdır.

$f \in \Im_\alpha$ ise, uygun normalizasyon faktörlerinin tanımlanması

$$\sec\alpha\left[e^{i\alpha}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} - i\sin\alpha\right]_{z=0} = 1$$

olmasını mümkün kılar. Bu yazılış $\Im_\alpha$ 'nın elemanlarının β'daki fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesi için faydalı temsil formülleri bulmamızı sağlar.

f ancak ve ancak, β'ya ait

$$(2.6) \qquad \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{\cos\alpha P(z) + i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} \quad , \quad z \in D$$

veya buna denk olan

$$(2.7) \qquad f(z) = z\exp\left\{\cos\alpha e^{-i\alpha}\int_0^z \frac{P(t)-1}{t}dt\right\} \quad , \quad z \in D$$

eşitliğini sağlayan bir P fonksiyonunun var olması halinde, bir α - spiral fonksiyondur.

α - spiral fonksiyonların birçok geometrik ve analitik özellikleri (2.6) ve (2.7) eşitliklerinden ve β sınıfının bilinen özelliklerinden elde edilebilir. Bu sonuçlar β'nın uygun bir şekilde alt sınıflarına inceltilmesi ile daha da keskinleştirilebilir.

7.4.Tanım: P, ancak ve ancak $z \in D$ için $P \in \beta$ ve $\mathrm{Re}\{P(z)\} \geq \rho$, koşullarını gerçekliyorsa; $0 \leq \rho \leq 1$ için ρ uncu mertebeden pozitif reel kısmı haiz bir fonksiyondur. Yani, $P \in \beta_\rho$. Burada $\rho \leq \sigma$ için $\beta_\rho \subset \beta_\sigma$ 'dır. Bundan dolayı, her ρ için $\beta_\rho \subset \beta_0 = \beta$'dır. Dahası, bazı $P \in \beta$'lar için $Q(z) = (1-\rho)P(z) + \rho$ oluyorsa, $Q \in \beta_\rho$'dur ve tersi de doğrudur. β'nın özel bir elemanı olan P_0 fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\textbf{(2.8)} \qquad P_0(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad , \quad z \in D.$$

Uyumluluğu sağlamak için $P_\rho(z)$'leri

$$\textbf{(2.9)} \qquad P_\rho(z) = (1-\rho)P_0(z) + \rho = \frac{\{1+(1-2\rho)z\}}{1-z}$$

şeklinde tanımlayalm.

7.5.Tanım: $f \in \Im_{\alpha,\rho}$ yani, f'in ρ uncu mertebeden bir α - spiral fonksiyon olması ancak ve ancak $P \in \beta_\rho$ olmak üzere, f'in (2.7)'deki gibi tanımlanması mümkündür.

$\rho = 0$ için Definition 1 'deki fonksiyon cümlelerini elde ederiz. Ve $\Im_{\alpha,0} = \Im_\alpha$ yazarız. Diğer taraftan $\alpha = 0$ aldığımızda orjine göre ρ uncu mertebeden yıldızıl olan ve genelde $\mathfrak{S}^*$ ile gösterilen fonksiyonları elde ederiz. ($\mathfrak{S}^*_\rho = \Im_{0,\rho}$). Bütün yıldızıl fonksiyonların sınıfı genellikle $\mathfrak{S}^*$ ile gösterilir. Bütün α - spiral fonksiyonları da $\Im$ ile gösteririz. Yani, $0 \leq \rho \leq 1$ *ve* $-\frac{1}{2}\pi \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ olmak üzere $\Im = \bigcup_{\alpha,\rho} \Im_{\alpha,\rho}$ ' dur.

Yalınkat fonksiyonlar sınıfı için konvekslik yarıçapı ve yıldızıllık yarıçapı kavramları yararlı ve araştırmacıları çeken bir konudur. Kısa bir süre önce Krzyž, orjin merkezli б' nin her elemanı ile tasviri konveks'e yakın olan en büyük çemberin yarıçapını elde etmiştir.

7.6.Tanım: $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ ve $f \in б$ ise, o zaman, f'in β - spiral yarıçapı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\beta\text{ - s.r.}\{f\} = \sup\left[r : \mathrm{Re}\left\{e^{i\beta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0\,, |z| < r\right]$$

7.7.Tanım: $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ ve $U \subset б$ ise, U'nun β - spiral yarıçapı,

$$\beta\text{ - s.r.U} = \inf_{f\in U}\{\beta\text{ - s.r.}\{f\}\}$$

şeklinde tanımlanır.

KATSAYI EŞİTSİZLİĞİ

7.8.Teorem: Eğer $f \in L_{\alpha,\rho}$ ve

(3.1) $$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad , \; z \in D, \text{ ise}$$

(3.2) $$|a_n| \le \prod_{k=0}^{n-2} \frac{|2(1-\rho)Cos\,\alpha|e^{i\alpha} + k|}{k+1} \quad , \; n = 2,3,4,\ldots$$

ve bu sınır bütün uygun α ve ρ'lar için ve n'in herbir değeri için keskindir.

İspat : ω , D'de Schwarz Lemmasının koşullarını gerçekleyen bir holomorfik fonksiyon olsun (13). Ve

(3.3) $$P(z) = \{1 + (1-2\rho)\omega(z)\}/\{1-\omega(z)\} \quad , \; z \in D, \text{ ise}$$

$P \in \beta_\rho$' dir ve tersi de doğrudur. Dolayısıyla, bu $P(z)$' i (2.6)'da kullanırsak, (2.6) temsilini

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{Cos\alpha.P(z) + iSin\alpha}{Cos\alpha + iSin\alpha} \quad \Rightarrow \quad z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{Cos\alpha\frac{(1-2\rho)\omega(z)+1}{1-\omega(z)} + iSin\alpha}{Cos\alpha + iSin\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$(Cos\alpha + iSin\alpha)z\frac{f'(z)}{f(z)} = Cos\alpha.\frac{1+(1-2\rho)\omega(z)}{1-\omega(z)} + iSin\alpha \quad \Rightarrow$$

$$e^{i\alpha}z.\frac{f'(z)}{f(z)} - iSin\alpha = Cos\alpha\frac{(1-2\rho)\omega(z)+1}{1-\omega(z)} + iSin\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\frac{e^{i\alpha}z\frac{f'(z)}{f(z)} - iSin\alpha}{Cos\alpha} = \frac{1+(1-2\rho)\omega(z)}{1-\omega(z)} \quad \Rightarrow$$

$$e^{i\alpha}z\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{1}{Cos\alpha} - i\frac{Sin\alpha}{Cos\alpha} = \frac{1+(1-2\rho)\omega(z)}{1-\omega(z)} \Rightarrow$$

(3.4) $$e^{i\alpha}Sec\alpha z\frac{f'(z)}{f(z)} - iTan\alpha = \frac{1+(1-2\rho)\omega(z)}{1-\omega(z)}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in D$$

idi. Buradan ;

$$f'(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1} \Rightarrow zf'(z) = z\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$$

bulunur. (3.4) eştliğini tekrar ele alalım :

$$e^{i\alpha}Sec\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}-iTan\alpha=\frac{1+(1-2\rho)\omega(z)}{1-\omega(z)}\Rightarrow$$

$$\left(1-\omega(z)\right)\left(e^{i\alpha}Sec\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}-iTan\alpha\right)=1+(1-2\rho)\omega(z)\Rightarrow$$

$$e^{i\alpha}Sec\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}-iTan\alpha=\frac{1+(1-2\rho)\omega(z)}{1-\omega(z)}\Rightarrow$$

$$\left(1-\omega(z)\right)\left(e^{i\alpha}Sec\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}-i\frac{f(z)Tan\alpha}{f(z)}\right)=\frac{\left[1+(1-2\rho)\omega(z)\right]f(z)}{f(z)}\Rightarrow$$

$$\frac{\left(1-\omega(z)\right)}{f(z)}\left(e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)-if(z)Tan\alpha\right)=\frac{f(z)+(1-2\rho)f(z)\omega(z)}{f(z)}\Rightarrow$$

$$e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)-if(z)Tan\alpha-e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)\omega(z)+if(z)\omega(z)Tan\alpha=f(z)+(1-2\rho)f(z)\omega(z)\Rightarrow$$

$$e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)-if(z)Tan\alpha-f(z)=e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)\omega(z)+(1-2\rho)f(z)\omega(z)-if(z)Tan\alpha\omega(z)\Rightarrow$$

$$e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)-if(z)Tan\alpha-f(z)=\left(e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)+(1-2\rho)f(z)-if(z)Tan\alpha\right)\omega(z)\Rightarrow$$

$$e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)-(1+iTan\alpha)f(z)=\left(\left(e^{i\alpha}Sec\alpha zf'(z)+(1-2\rho-iTan\alpha\right)f(z)\right)\omega(z)\Rightarrow$$

$$\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}ka_kz^k\right)e^{i\alpha}Sec\alpha-\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k\right)\left(1+iTan\alpha\right)=$$

$$\left[\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}ka_kz^k\right)e^{i\alpha}Sec\alpha+\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k\right)\left(1-2\rho-iTan\alpha\right)\right]\omega(z)\Rightarrow$$

$e^{i\alpha}Cos\alpha+iSin\alpha$ ve $Sec\alpha=\dfrac{1}{Cos\alpha}$ olduğundan

$$e^{i\alpha}Sec\alpha=\left(Cos\alpha+iSin\alpha\right).\frac{1}{Cos\alpha}=\frac{Cos\alpha}{Cos\alpha}+i\cdot\frac{Sin\alpha}{Cos\alpha}=1+iTan\alpha\qquad\Rightarrow$$

$$(1+iTan\alpha)\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}ka_kz^k\right)-\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k-\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^kiTan\alpha-z-i\cdot zTan\alpha$$

$$=\left[(1+iTan\alpha)\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}ka_kz^k\right)+\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k\right)(1-2\rho-iTan\alpha)\right]\cdot w(z) \Rightarrow$$

$$z+\sum_{k=2}^{\infty}ka_kz^k+izTan\alpha+\sum_{k=2}^{\infty}iTan\alpha ka_kz^k-\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k-\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^kiTan\alpha-z-i\cdot zTan\alpha$$

$$=\left[(1+iTan\alpha)\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}ka_kz^k\right)+\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k\right)(1-2\rho-iTan\alpha)\right]\cdot w(z) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(1+iTan\alpha)a_kz^k-\sum_{k=2}^{\infty}(1+iTan\alpha)a_kz^k$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^ke^{i\alpha}Sec\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k(1-2\rho-iTan\alpha)\right]\cdot w(z)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}ke^{i\alpha}Sec\alpha a_kz^k-\sum_{k=2}^{\infty}(1+iTan\alpha)a_kz^k$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^ke^{i\alpha}Sec\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k(1-2\rho-iTan\alpha)\right]\cdot w(z)$$

(3.5)

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[ke^{i\alpha}Sec\alpha-(1+iTan\alpha)\right]a_kz^k=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[ke^{i\alpha}Sec\alpha+(1-2\rho-iTan\alpha)\right]a_kz^k\right\}\cdot w(z)$$

elde edilir. Ya da

(3.6)

$$\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[ke^{i\alpha}Sec\alpha+(1-2\rho-iTan\alpha)\right]a_kz^k\right\}\cdot w(z)=\sum_{k=2}^{n}\left[ke^{i\alpha}Sec\alpha-(1+iTan\alpha)\right]a_kz^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}b_kz^k$$

dır. $z=re^{i\theta}$, $0<r<1$, $0\le\theta\le2\pi$ olarak alalım. O zaman

(3.7)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|ke^{i\alpha}Sec\alpha+(1-2\rho-iTan\alpha)\right|^2|a_k|^2z^{2k}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left[ke^{i\alpha}Sec\alpha+(1-2\rho-iTan\alpha)\right]a_kr^ke^{i\theta k}\right|^2d\theta$$

$$\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left[ke^{i\alpha}Sec\alpha+(1-2\rho-iTan\alpha)\right]a_kr^ke^{i\theta k}\right|^2\left|w(re^{i\theta})\right|^2d\theta$$

$$\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=2}^{n}\left[ke^{i\alpha}Sec\alpha-(1+iTan\alpha)\right]a_kr^ke^{i\theta k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}b_kr^ke^{i\theta k}\right|^2d\theta$$

$$\geq\sum_{k=2}^{n}\left|ke^{i\alpha}Sec\alpha-(1+iTan\alpha)\right|^2|a_k|^2r^{2k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|^2r^{2k}$$

$$\geq\sum_{k=2}^{n}\left|ke^{i\alpha}Sec\alpha-(1+iTan\alpha)\right|^2|a_k|^2r^{2k}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliği $r\to 1$ için tekrar yazarsak

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left|ke^{i\alpha}Sec\alpha+(1-2\rho-iTan\alpha)\right|^2-\left|ke^{i\alpha}Sec\alpha-(1+iTan\alpha)\right|^2\right\}|a_k|^2$$

(3.8)

$$\geq\left|ne^{i\alpha}Sec\alpha-(1+iTan\alpha)\right|^2|a_n|^2$$

bazı basit hesaplamalarla,

(3.9) $$4(1-\rho)\sum_{k=1}^{n-1}(k-\rho)|a_k|^2\geq(n-1)^2Sec^2\alpha|a_n|^2$$

elde edilir. $n=2$ için (3.9)' u

$$4(1-\rho)^2\geq Sec^2\alpha|a_2|^2$$

şeklinde veya

$$|a_2|^2 \le \frac{4(1-\rho)^2}{Sec^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad |a_2|^2 \le 4(1-\rho)^2 Cos^2\alpha \quad \Rightarrow$$

(3.10) $$|a_2| \le 2(1-\rho)Cos\alpha$$

diye yazabiliriz. Genel halde

(3.11) $$|a_n|^2 \le \frac{4(1-\rho)Cos^2\alpha}{(n-1)^2}\left\{(1-\rho)+\sum_{k=2}^{n-1}(k-\rho)\prod_{j=0}^{k-2}\frac{\left|2(1-\rho)Cos\alpha e^{-i\alpha}+j\right|^2}{(j+1)^2}\right\}$$

dir. Burada (3.11)'in sağ tarafındaki ifadenin (3.2)'nin sağ tarafındaki ifadenin karesi olduğunu görürüz. Bu da

(3.12) $$\prod_{j=0}^{m-2}\frac{\left|2(1-\rho)Cos\alpha e^{-i\alpha}+j\right|^2}{(j+1)^2}$$

$$= \frac{4(1-\rho)Cos^2\alpha}{(m-1)^2}\left\{(1-\rho)+\sum_{k=2}^{m-1}(k-\rho)\left[\prod_{j=0}^{k-2}\frac{\left|2(1-\rho)Cos\alpha e^{-i\alpha}+j\right|}{j+1}\right]^2\right\}$$

eşitliğini verir. Burada $m = 3,4.5,...$ dir.

7.9.Sonuç: $f \in \Im_\alpha$ ve (3.1) temsiline sahipse,

(3.14) $$|a_n| \le \prod_{j=0}^{n-2}\frac{\left|2e^{-i\alpha}Cos\alpha + j\right|}{j+1} \quad , \quad n = 2,3,...$$

dir. $\alpha = 0$ alırsak, Schild'in de(20) yakın bir zamanda ispatladığı, Robertson'un(17) bir teoremini elde ederiz.

7.10.Sonuç: f, ρ uncu mertebeden yıldızıl bir fonksiyon ve (3.1)'deki gibi MacLaurin serisine sahipse,

$$|a_n| \le \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-2\rho)}{(n-1)!} \quad , \quad n=2,3,... \tag{3.15}$$

olur. (3.7)'deki integrasyon tekniği Clunie'ye(3) aittir. Aynı metodun (3.3)'e uygulanması β_ρ'daki fonksiyonlarda katsayıların tahmin edilebilmesine imkan sağlar.

7.11.Teorem: Eğer

$$P(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \in \beta_\rho$$

ise

$$|p_k| \le 2(1-\rho) \quad , \quad k = 1,2,...$$

olur. (2.9)'da verilen P_ρ, sınırları kesinleştirir. $\rho = 0$ için Caratheodory'nin klasik teoremini elde ederiz ve bunun Clunie'nin metodundan bir ispatını da Libera başka bir yerde veriyor.(11, Lemma 3.2)

7.12. β **- spirallik yarıçapı:** Eğer $f \in \Im_{\alpha,\rho}$ ise, Definition 3, 5 ve (2.6)'yı kullanrak, β - spiral yarıçapının β_ρ'daki $|z| < r$ olan bazı p'ler için olduğu gibi, en büyük r sayısı olduğunu görürüz.

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i(\beta-\alpha)}\left[Cos\alpha \cdot P(z) + iSin\alpha\right]\right\} \ge 0 \tag{4.1}$$

(2.8) ve (3.3)'ün sonucu olarak β'nın her elemanının P_0'a sabordine olduğu iyi bilinmektedir(13). Bundan dolayı β_ρ'daki her fonksiyon P_0'a sabordinedir. Dolayısıyla (4.1) eşitsizliği P_ρ için gerçekleniyorsa, β_ρ'daki bütün p'ler için de gerçeklenir.

$$\begin{aligned} B(z) &= e^{i(\beta-\alpha)}\left[Cos\alpha \cdot P_\rho(z) + iSin\alpha\right] \\ &= e^{i(\beta-\alpha)}\left\{Cos\alpha\left[\frac{1+(1-2\rho)z}{1-z}\right] + iSin\alpha\right\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

alalım. $B(z)$, $|z| \leq r$ çemberini, merkezi

$$(4.3) \qquad e^{i(\beta-\alpha)}\left\{Cos\alpha\left[\frac{1+(1-2\rho)r^2}{1-r^2}\right]+iSin\alpha\right\}$$

ve yarıçapı

$$(4.4) \qquad \left|e^{i(\beta-\alpha)}Cos\alpha\cdot\frac{2(1-\rho)r}{1-r^2}\right|$$

olan bir çember üzerine resmeder. Bu yüzden, $\mathrm{Re}\{B(z)\} \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(4.5) \qquad \mathrm{Re}\left\{e^{i(\beta-\alpha)}Cos\alpha\left[\frac{1+(1-2\rho)r^2}{1-r^2}\right]+iSin\alpha\right\} \geq Cos\alpha\cdot\frac{2(1-\rho)r}{1-r^2}$$

veya

$$(4.6) \qquad Cos\beta\cdot(1-r^2)+2(1-\rho)r^2Cos(\beta-\alpha)Cos\alpha \geq Cos\alpha\cdot 2(1-\rho)r$$

eşitsizliğinin gerçeklenmesidir. Bu sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

7.13.Teorem: $\Im_{\alpha,\rho}$'nun β - spiral yarıçapı;

$$(4.7) \qquad [2(1-\rho)Cos(\beta-\alpha)Cos\alpha-Cos\beta]r^2-2(1-\rho)Cos\alpha\cdot r+Cos\beta=0$$

eşitliğinin en küçük pozitif köküdür. (3.13) 'te tanımlanan $F_{\alpha,\rho}$, bu sonuçların kesin olduğunu gösterir.

7.14.Sonuç: $\Im_\alpha$ 'nın yıldızıllık yarıçapı,

$$(4.8) \qquad 0-s.r.\Im_\alpha=\frac{1}{(Cos\alpha+|Sin\alpha|)}$$

dır. Bu sonuç M.S.Robertson(18) tarafından yakın bir geçmişte bulunmuştu.

7.15.Sonuç: $б_{\rho}^{*}$'nun β - spiral yarıçapı

(4.11) $$Cos\beta \cdot (1-2\rho)r^2 - 2(1-\rho)r + Cos\beta = 0$$

eşitliğinin en küçük pozitif köküdür.

7.16.Sonuç: β - s.r.$\Re = Cos\beta$.

α ' ıncı MERTEBEDEN SINIRLI p – VALENT ROBERTSON FONKSİYONLARI

$$\left|\frac{e^{i\lambda}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha Cos\lambda-ipSin\lambda}{(p-\alpha)Cos\lambda}-M\right|<M$$

ve

$$z=re^{i\theta}\in U$$

koşullarını gerçekleyen belirli M'ler için

$$f(z)=z^{p}+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_{n}z^{n}$$

formunda ve $U=\{z\,|\,|z|<1\}$'de analitik f(z) fonksiyonlarının sınıfını, $F_{M}(\lambda,\alpha,p)$ ile;

$\left(M>\frac{1}{2},\quad |\lambda|<\frac{\pi}{2},\quad 0\leq\alpha<p\right).$

$$\left|\frac{e^{i\lambda}\left(1+\dfrac{zg''(z)}{g'(z)}\right)-\alpha Cos\lambda-ipSin\lambda}{(p-\alpha)Cos\lambda}-M\right|<M$$

ve

$$z=re^{i\theta}\in U$$

koşullarını gerçekleyen belirli M'ler için

$$g(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

formunda ve $U = \{z \mid |z| < 1\}$'de analitik g(z) fonksiyonlarının sınıfını ise,

$G_M(\lambda,\alpha,p)$ ile gösterelim $\left(M > \frac{1}{2}, \quad |\lambda| < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \alpha < p\right)$.

GİRİŞ

$U = \{z \mid |z| < 1\}$'de analitik $f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonlarının sınıfını A_p ile gösterelim (p, 0'dan büyük belirli bir tamsayı). $z \in U$ için $|w(z)| \le |z|$ ve $w(0) = 0$ koşullarını gerçekleyen U'daki analitik w(z) fonksiyonlarının katsayılarının sınıfına Ω diyelim.

p, 0'dan büyük belirli bir tamsayı olmak üzere;

$z \in U$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ ve $0 \le \alpha < p$ için

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{Re} e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha \operatorname{Cos}\lambda$$

koşullarını gerçekleyen $f(z) \in A_p$ fonksiyonlar sınıfını $F(\lambda,\alpha,p)$ ile gösterelim. Bu durumda ; $F(\lambda,\alpha,p)$'nin elemanı olan fonksiyonlara, α ıncı mertebeden p – valent λ - spirallike fonksiyonlar denir. $F_M(\lambda,\alpha,p)$ sınıfı Patil ve Thakare tarafından ortaya konmuştu.

Biz burada, $F_M(\lambda,\alpha,p)$ ve $G_M(\lambda,\alpha,p)$ sınıflarının bazı özelliklerini inceleyeceğiz. $\left(M > \frac{1}{2}, |\lambda| < \frac{\pi}{2}, 0 \le \alpha < p\right)$ $F_M(\lambda,\alpha,p)$ ve $G_M(\lambda,\alpha,p)$'nin tanımları aşağıdaki gibidir.

8.1.Tanım: $f \in A_p$ ise, f'e mertebesi α olan, sınırlı, p-katlı α-spirallike fonksiyonların $F_M(\lambda,\alpha,p)$ $\left(M > \frac{1}{2}, |\lambda| < \frac{\pi}{2}, 0 \le \alpha < p\right)$ sınfına aittir deriz. Yani $f \in F_M(\lambda,\alpha,p)$ olması için gerek ve yeter koşul, belirli bir M sayısı için,

$$\textbf{(1.2)} \qquad \left| \frac{e^{i\lambda}\dfrac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha Cos\lambda - ipSin\lambda}{(p-\alpha)Cos\lambda} - M \right| < M \quad , z \in U ,$$

olmasıdır.

8.2.Tanım: $g \in A_p$ ise, g'ye $G_M(\lambda,\alpha,p)$ sınıfına aittir deriz. $\left(M > \frac{1}{2}, |\lambda| < \frac{\pi}{2}, 0 \le \alpha < p\right)$ Yani $g \in G_M(\lambda,\alpha,p)$ olması için gerek ve yeter koşul, belirli bir M sayısı için,

$$\textbf{(1.3)} \qquad \left| \frac{e^{i\lambda}\left(1 + \dfrac{zg''(z)}{g'(z)}\right) - \alpha Cos\lambda - ipSin\lambda}{(p-\alpha)Cos\lambda} - M \right| < M \quad , z \in U ,$$

olmasıdır. (1.2) ve (1.3)'ten $g(z)$'in ancak ve ancak $\frac{zg'(z)}{p} \in F_M(\lambda,\alpha,p)$ ise, $G_M(\lambda,\alpha,p)$'ye ait olduğu sonucu çıkar.

Burada M,λ,α ve p'ye uygun değerler vererek bazı önemli alt sınıfların elde edilebileceğine dikkat edelim:

(i) $F_1(0,0,1) = F(1,1)$, Singh(22) tarafından incelenen bir yıldızıl fonksiyonlar sınıfındadır. $F_M(0,0,1) = F(1,M)$, Singh(22) ve Singh(23) tarafından incelenen bir sınırlı yıldılzıl fonksiyonlar sınıfıdır. $F_M(\lambda,0,1) = F_{\lambda,M}$ ve $G_M(\lambda,0,1) = G_{\lambda,M}$ sınıfları Kulshrestha(9) 'nın incelediği, sırasıyla, sınırlı spirallike fonksiyonların ve Robertson fonksiyonlarının sınıflarıdır.

(ii) $F_\infty(0,0,1) = S^*$ ve $G_\infty(0,0,1) = C$, sırasıyla, meşhur yıldızıl fonksiyonlar sınıfı ve meşhur konveks fonksiyonlar sınıfıdır. $F_\infty(0,\alpha,1) = S(\alpha)$ ve $G_\infty(0,\alpha,1) = C(\alpha)$, yine sırasıyla, mertebesi α olan yıldızıl fonksiyonlar sınıfı ve mertebesi α olan konveks fonksiyonlar sınıfı olup, Robertson(17) tarafından bulunmuştur. Spacek(25)'in bulduğu $F_\infty(\lambda,0,1) = S^\lambda$ ve Robertson(19)'un bulduğu $G_\infty(\lambda,0,1) = C^\lambda$ sınıfları, sırayla, λ -spirallike fonksiyonların sınıfı ve $zg'(z)$ λ -spirallike olmak üzere g fonksiyonlarının sınıfıdır. $F_\infty(\lambda,\alpha,1) = S_\alpha^\lambda$ ve $G_\infty(\lambda,\alpha,1) = C_\alpha^\lambda$ sınıfları, sırasıyla, Libera(10) 'nın ortaya koyduğu mertebesi α olan λ -spirallike fonksiyonların sınıfı ve Chicra(2) ve Sizuk(24) 'un bulmuş olduğu, $zg'(z)$ λ -spirallike olmak üzere, mertebesi α olan g fonksiyonlarının sınıfıdır.

(iii) Goodman(6) 'in incelediği $F_\infty(0,0,p) = S(p)$ ve $G_\infty(0,0,p) = C(p)$, sırasıyla, p–katlı yıldızıl fonksiyonların ve p–katlı konveks fonksiyonların sınıfıdır. $F_\infty(0,\alpha,p) = S_\alpha(p)$ ve $G_\infty(0,\alpha,p) = C_\alpha(p)$, sırasıyla, Goluzina(5) 'nın bulduğu mertebesi α olan p–katlı yıldızıl fonksiyonların sınıfı ve mertebesi α olan konveks fonksiyonların sınıfıdır. $F_\infty(\lambda,0,p) = S^\lambda(p)$ ve $G_\infty(\lambda,0,p) = C^\lambda(p)$, sırasıyla, p–katlı λ -spirallike fonksiyonlar sınıfı ve $\frac{zg'(z)}{p}$ λ -spirallike olmak üzere p–katlı g fonksiyonlarının sınıfıdır. Son olarak, $F_\infty(\lambda,\alpha,p) = F(\lambda,\alpha,p)$ ' dir ve $G_\infty(\lambda,\alpha,p) = G(\lambda,\alpha,p)$, $\frac{zg'(z)}{p}$ λ -spirallike olmak üzere, α ıncı mertebeden p–katlı g fonksiyonlarının sınıfıdır.

8.3.Lemma: $w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \in \Omega$ şeklinde tanımlansın. ν herhangi bir kompleks sayı olmak üzere,

$$\textbf{(1.5)} \quad |b_2 - \nu b_1^2| \le \max\{1, |\nu|\}$$

dür. Burada eşitlik, $w(z) = z^2$ ve $w(z) = z$ için sağlanır.

8.4.Lemma: **(i)** $f_2(z)$, ancak ve ancak, $z \in U$ için

(1.6) $$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1+\left[(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}-\lambda\right]w(z)}{1-\sigma w(z)},$$

(burada, $w \in \Omega$, $r=1-\frac{1}{M}$ ' dir.) koşulunu gerçekliyorsa, $f_2(z) \in F_M(\lambda,0,1)$ olur.

(ii) $g_2(z)$, ancak ve ancak, $z \in U$ için

(1.7) $$\frac{zg''(z)}{g(z)}=\frac{(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}w(z)}{1-\sigma w(z)},$$

(burada, $w \in \Omega$, $r=1-\frac{1}{M}$ ' dir.) koşulunu gerçekliyorsa, $g_2(z) \in G_M(\lambda,0,1)$ olur.

8.5.Lemma: **(i)** $f_2(z) \in F(\lambda,0,1)$ ve $a \in U$ ise,

(1.8) $$F_2(z)=\frac{\sigma azf_2\left(\frac{z+\sigma a}{1+\sigma\bar{a}z}\right)}{f_2(\sigma a)(z+\sigma a)(1+\sigma\bar{a}z)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}-1}, \quad z \in U \quad \text{için},$$

dir. Ve M > 1 için $F_2(z) \in F_M(\lambda,0,1)$ 'dir.

(ii) $g_2(z) \in G(\lambda,0,1)$ ve $a \in U$ ise,

(1.9) $$G_2'(z)=\frac{g_2'\left(\frac{z+\sigma a}{1+\sigma\bar{a}z}\right)}{g_2'(\sigma a)(1+\sigma\bar{a}z)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}}, \quad z \in U \quad \text{için},$$

dir. Ve M > 1 için $G_2'(z) \in G_M(\lambda,0,1)$ 'dir.

$F_M(\lambda,\alpha,p)$ ve $G_M(\lambda,\alpha,p)$ SINIFLARI İÇİN GÖSTERİLİM FORMÜLLERİ

8.6.Lemma: $f \in F_M(\lambda,\alpha,p)$ olması için gerek ve yeter koşul, $z \in U$ için

(i) $f_1 \in F_M(0,0,1)$ için

$$\textbf{(2.1)} \qquad f(z) = z^p\left[\frac{f_1(z)}{z}\right]^{(p-\alpha)Cos\lambda e^{-i\lambda}} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

olmasıdır.

(ii) $f_2 \in F_M(\lambda,0,1)$ için,

$$\textbf{(2.2)} \qquad f(z) = z^p\left[\frac{f_2(z)}{z}\right]^{(p-\alpha)} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

olmasıdır.

İspat: (i) $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \in F_M(0,0,1)$, $z \in U$. için

$$f(z) = z^p\left[\frac{f_1(z)}{z}\right]^{(p-\alpha)Cos\lambda e^{-i\lambda}} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

olsun. Direkt hesaplama sonucunda

$$\frac{e^{i\lambda}\dfrac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha Cos\lambda - ipSin\lambda}{(p-\alpha)Cos\lambda} = \frac{zf_1'(z)}{f_1(z)}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (1.2) ifadesinden, (2.1) eşitliğine ulaşılır.

(ii) $f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} d_n z^n \in F_M(\lambda,0,1)$, $z \in U$. için

$$f(z) = z^p \left[\frac{f_2(z)}{z}\right]^{(p-\alpha)} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

olsun. Direkt hesaplama sonucunda

$$\frac{e^{i\lambda}\dfrac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha Cos\lambda - ipSin\lambda}{(p-\alpha)Cos\lambda} = \frac{e^{i\lambda}\dfrac{zf_1'(z)}{f_1(z)} - iSin\lambda}{Cos\lambda}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (1.2) ifadesinden, (2.2) eşitliğine ulaşılır.

8.7.Teorem: f, $z \in U$ için, $w \in \Omega$ ve $\sigma = 1 - \frac{1}{M}$ olmak üzere

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{p(1-\sigma w(z)) + (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} w(z)}{1-\sigma w(z)}$$

koşulunu gerçekliyorsa, $f \in F_M(\lambda,\alpha,p)$' dir.

8.8.Sonuç: $g \in G_M(\lambda,\alpha,p)$ olması için gerek ve yeter koşul $z \in U$ için

(i) $g_1 \in G_M(0,0,1)$ için

$$g'(z) = pz^{p-1}\left[g_1'(z)\right]^{(p-\alpha)Cos\lambda e^{-i\lambda}} = pz^{p-1} + \sum_{n=p+1}^{\infty} ne_n z^{n-1}$$

(ii) $g_2 \in G_M(\lambda,0,1)$ için

$$g'(z) = pz^{p-1}\left[g_2'(z)\right]^{(p-\alpha)} = pz^{p-1} + \sum_{n=p+1}^{\infty} ne_n z^{n-1}$$

(iii) $w \in \Omega, \qquad \sigma = 1 - \frac{1}{M}$ için

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} = \frac{(p-1)(1-\sigma w(z)) + (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} w(z)}{1-\sigma w(z)}$$

olmasıdır.

$F_M(\lambda,\alpha,p)$ ve $G_M(\lambda,\alpha,p)$ SINIFLARI İÇİN KATSAYI EŞİTSİZLİKLERİ

8.9.Teorem: Eğer, M > 1 olmak üzere

$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \in F_M(\lambda,\alpha,p)$ ve μ herhangi kompleks sayı ise,

$$\left|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| \le (p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{2\sigma}\right) Cos\lambda \max\left\{1, \left|(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right) Cos\lambda e^{-i\lambda}(2\mu-1) - 1\right|\right\}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik her μ için keskindir.

İspat: Teorem 1' den , $f \in F_M(\lambda,\alpha,p)$ olduğundan dolayı

$$w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \in \Omega \qquad ve \qquad \sigma = 1 - \frac{1}{M}$$

olmak üzere

(3.2) $$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p(1-w(z)\sigma) + (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} w(z)}{1-w(z)\sigma}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitlikten w(z) ifadesini çekersek;

$$zf'(z)(1-w(z)\sigma)=pf(z)(1-w(z)\sigma)+f(z)(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}w(z) \qquad \Rightarrow$$

$$zf'(z)-zf'(z)w(z)\sigma=pf(z)-pf(z)w(z)\sigma+(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}w(z)f(z) \qquad \Rightarrow$$

$$pf(z)w(z)\sigma-zf'(z)w(z)\sigma-\left[(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}\right]f(z)w(z)=pf(z)-zf'(z) \qquad \Rightarrow$$

$$w(z)\left[pf(z)\sigma-zf'(z)\sigma-\left[(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}\right]f(z)\right]=pf(z)-zf'(z) \qquad \Rightarrow$$

$$w(z)\left[-zf'(z)\sigma-\left[(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}-p\sigma\right]f(z)\right]=pf(z)-zf'(z) \qquad \Rightarrow$$

$$w(z)=\frac{pf(z)-zf'(z)}{-\left(zf'(z)\sigma+\left[(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda-p\sigma\right]f(z)\right)} \qquad \Rightarrow$$

$$w(z)=-\frac{pf(z)-zf'(z)}{\left(zf'(z)\sigma+\left[(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda-p\sigma\right]f(z)\right)}$$

eşitliğini buluruz. Burada;

$f(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}a_k z^k$ olduğunu gözönüne alalım ve hesapları yapalım:

$$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+a_{p+3}z^{p+3}+\ldots \qquad \Rightarrow$$

$$pf(z)=pz^p+pa_{p+1}z^{p+1}+pa_{p+2}z^{p+2}+pa_{p+3}z^{p+3}+\ldots$$

ve

$$f'(z)=pz^{p-1}+(p+1)a_{p+1}z^p+(p+2)a_{p+2}z^{p+1}+(p+3)a_{p+3}z^{p+2}+\ldots \qquad \Rightarrow$$

$$zf'(z)=pz^p+(p+1)a_{p+1}z^{p+1}+(p+2)a_{p+2}z^{p+2}+(p+3)a_{p+3}z^{p+3}+\ldots$$

olduğundan

$$pf(z)-zf'(z)=\left(pz^{p}+pa_{p+1}z^{p+1}+pa_{p+2}z^{p+2}+pa_{p+3}z^{p+3}+\ldots\right)$$
$$-pz^{p}-(p+1)a_{p+1}z^{p+1}-(p+2)a_{p+2}z^{p+2}-(p+3)a_{p+3}z^{p+3}-\ldots$$
$$pf(z)-zf'(z)=(p-p-1)a_{p+1}z^{p+1}+(p-p-2)a_{p+2}z^{p+2}+(p-p-3)a_{p+3}z^{p+3}+\ldots\Rightarrow$$
$$pf(z)-zf'(z)=-a_{p+1}z^{p+1}-2a_{p+2}z^{p+2}-3a_{p+3}z^{p+3}-\ldots=-\sum_{k=1}^{\infty}ka_{p+k}z^{p+k}$$

bulunur. Paydadaki ifadenin hesabını yapmak için öncelikle,

$$A=(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda$$

alalım. Şimdi hesabı yapalım:

$$zf'(z)\sigma+\left[A-p\sigma\right]f(z)=zf'(z)\sigma+Af(z)-pf(z)\sigma \quad\Rightarrow$$
$$\sigma\left(zf'(z)-pf(z)\right)+Af(z)=\sigma\sum_{k=1}^{\infty}ka_{p+k}z^{p+k}+A\left(z^{p}+\sum_{k=p+k}^{\infty}a_{k}z^{k}\right)$$
$$=\sigma\sum_{k=1}^{\infty}ka_{p+k}z^{p+k}+Az^{p}+A\sum_{k=p+k}^{\infty}a_{k}z^{k}=\sigma\sum_{k=1}^{\infty}ka_{p+k}z^{p+k}+Az^{0}+A\sum_{k=1}^{\infty}a_{p+k}z^{p+k}$$
$$=A+\sum_{k=1}^{\infty}(A+k\sigma)a_{p+k}z^{p+k}$$
$$=(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left\{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda+k\sigma\right\}a_{p+k}\right]z^{p+k}$$

sonucuna ulaşılır.

$$w(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_{k}z^{k}$$

biçiminde olduğundan yukarıda bulmuş olduğumuz ifadeleri bu gösterime benzetmek için z' in üzerini p + k yerine k olarak alırız.

$$w(z)=-\frac{-\sum_{k=1}^{\infty}ka_{p+k}z^{k}}{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left\{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda+k\sigma\right\}a_{p+k}\right]z^{k}}$$

ifadesinde işlem kolaylığı için;

$$(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda = A$$

ve

$$(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda + k\sigma = B_k$$

diyelim. Buradan ,

$$w(z) = \frac{a_{p+1}z + 2a_{p+2}z^2 + 3a_{p+3}z^3 + \dots}{A + B_1 a_{p+1}z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots}$$

$$= \left(a_{p+1}z + 2a_{p+2}z^2 + 3a_{p+3}z^3 + \dots\right)\frac{1}{A\left(1 + \frac{B_1}{A}a_{p+1}z + \frac{B_2}{A}z^2 + \frac{B_3}{A}z^3 + \dots\right)}$$

$$= \left(a_{p+1}z + 2a_{p+2}z^2 + 3a_{p+3}z^3 + \dots\right)\frac{1}{A}\frac{1}{\left(1 + \frac{B_1}{A}a_{p+1}z + \frac{B_2}{A}z^2 + \frac{B_3}{A}z^3 + \dots\right)}$$

$$= \left(a_{p+1}z + 2a_{p+2}z^2 + 3a_{p+3}z^3 + \dots\right)\frac{1}{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda}\frac{1}{\left(1 + \frac{B_1}{A}a_{p+1}z + \frac{B_2}{A}z^2 + \frac{B_3}{A}z^3 + \dots\right)}$$

$$= \left(a_{p+1}z + 2a_{p+2}z^2 + 3a_{p+3}z^3 + \dots\right)\frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)}\left[1 - \frac{B_1}{A}a_{p+1}z + \dots\right]$$

$$= \left(a_{p+1}z + 2a_{p+2}z^2 + 3a_{p+3}z^3 + \dots\right)\frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)}\left[1 - \frac{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda + \sigma}{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda}a_{p+1}z + \dots\right]$$

$$= \frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)}\left(a_{p+1}z + 2a_{p+2}z^2 + 3a_{p+3}z^3 + \dots\right)\left[1 - \frac{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda + \sigma}{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda}a_{p+1}z + \dots\right]$$

$$= \frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)}a_{p+1}z + \frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)}2a_{p+2}z^2 - \frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)}\frac{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda + \sigma}{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda}a_{p+1}^2 z^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k = \frac{e^{-i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)} a_{p+1} z + \frac{e^{-i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)} \left[2a_{p+2} - \frac{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda + \sigma}{(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda} a_{p+1}^2 z \right] z^2 \ldots$$

eşitliği elde edilir. Burada her iki tarafta z ve z^2'nin katsayıları eşitlenirse;

$$\textbf{(3.3)} \qquad b_1 = \frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)} a_{p+1}$$

ve

(3.4)

$$b_2 = \frac{2e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)} a_{p+2} - \frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)^2(1+\sigma)^2} \left[(p-\alpha)(1+\sigma) + \sigma e^{i\lambda}Sec\lambda \right] a_{p+1}^2$$

yazılır. Buradan,

$$\textbf{(3.5)} \qquad a_{p+1} = \frac{(p-\alpha)(1+\sigma)}{e^{i\lambda}Sec\lambda} b_1$$

ve

$$\frac{2e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)} a_{p+2} = b_2 + \frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)^2(1+\sigma)^2} \left[(p-\alpha)(1+\sigma) + e^{i\lambda}Sec\lambda\sigma \right] a_{p+1}^2 \quad \Rightarrow$$

$$a_{p+2} e^{i\lambda} 2Sec\lambda = (p-\alpha)(1+\sigma) b_2 + \frac{e^{i\lambda}Sec\lambda}{(p-\alpha)(1+\sigma)} \left[(p-\alpha)(1+\sigma) + e^{i\lambda}Sec\lambda\sigma \right] a_{p+1}^2 \Rightarrow$$

$$\textbf{(3.6)} \quad a_{p+2} = \frac{(p-\alpha)(1+\sigma)}{2e^{i\lambda}Sec\lambda} b_2 + \left[\frac{(p-\alpha)(1+\sigma) + \sigma e^{i\lambda}Sec\lambda}{2(p-\alpha)(1+\sigma)} \right] a_{p+1}^2$$

bulunur. Burada (1.5), (3.5) ve (3.6) eşitliklerini kullanarak, (3.1) eşitliğini elde ederiz. (1.5) kesin olduğu için, (3.1) de kesindir.

8.10.Sonuç: $M > 1$ olmak üzere eğer,

$$f(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}a_k z^k \in F_M(\lambda,\alpha,p)$$

ise,

(3.7)
$$|a_{p+1}|\le (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda$$

ve

(3.8)
$$|a_{p+2}|\le (p-\alpha)\frac{(1+\sigma)}{2\sigma}Cos\lambda \max\left\{1,\left|(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}+1\right|\right\}$$

dir. (3.7) ve (3.8)'deki sınırları

(3.9)
$$f^*(z)=z^p(1-z\sigma)^{-(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}}$$

şeklinde tanımlanan $f^*(z)$ fonksiyonu alır.

İspat: (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri, sırasıyla, (3.5) ve (3.1)'den direkt olarak elde edilebilirler.

8.11.Sonuç: $M>1$ ve μ herhangi bir kompleks sayı olmak üzere, eğer

$$g(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}e_k z^k \in G_M(\lambda,\alpha,p)$$

ise,

(3.10)
$$|e_{p+2}-\mu e_{p+1}^2|\le \frac{p(p-\alpha)}{2(p+2)}\left(\frac{1+\sigma}{2\sigma}\right)Cos\lambda.\max\left\{1,\right.$$
$$\left.\left|1-(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda\left[\frac{2p(p+2)\mu-(p+1)^2}{(p+1)^2}\right]\right|\right\}$$

dir. Bu eşitsizlik herbir μ için kesindir.

8.12.Sonuç: $M>1$ olmak üzere eğer,

$$g(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}e_k z^k\in G_M(\lambda,\alpha,p)$$

ise,

$$\text{(3.11)}\qquad \left|e_{p+1}\right|\le\frac{p(p-\alpha)(1+\sigma)}{(p+1)}Cos\lambda$$

ve

$$\text{(3.12)}\qquad \left|e_{p+2}\right|\le\frac{p(p-\alpha)}{(p+2)}\frac{(1+\sigma)}{2\sigma}Cos\lambda\max\left\{1,\left|1+(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}\right|\right\}$$

dir. (3.11) ve (3.12)'deki sınırları

$$\text{(3.13)}\qquad g'^{*}(z)=pz^{p-1}(1-z\sigma)^{-(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}}$$

şeklinde tanımlanan $g'^{*}(z)$ fonksiyonu alır.

8.13.Lemma: p ve m sıfırdan büyük tamsayılar olmak üzere, $0\le\alpha<p$ ve $|\lambda|<\frac{\pi}{2}$ ise,

$$\text{(3.14)}\qquad \prod_{j=0}^{m-1}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}$$

$$=\frac{(1+\sigma)}{m^2}\Bigg\{(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\left((p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda+k^2(\sigma-1)+2k(p-\alpha)\sigma Cos^2\lambda\right)$$

$$\times\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}\Bigg\}$$

olur.

İspat: Bu ispatı m üzerineden indüksiyon ile yapacağız. $m = q$ için Lemma aşikardır.

$m = q - 1$ için doğru kabul edelim. Yani,

$$(*) \qquad \prod_{j=0}^{q-2} \frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sigma j\right|^2}{(j+1)^2}$$

$$= \frac{(1+\sigma)}{(q-1)^2}\Bigg\{(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda$$

$$+\sum_{k=1}^{q-2}\left((p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda + k^2(\sigma-1) + 2k(p-\alpha)\sigma Cos^2\lambda\right)$$

$$\times \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sigma j\right|^2}{(j+1)^2}\Bigg\}$$

olduğunu kabul edelim. Şimdi, $m = q$ için ispatlayalım.

$$= \frac{(1+\sigma)}{q^2}\Bigg\{(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda$$

$$+\sum_{k=1}^{q-1}\left((p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda + k^2(\sigma-1) + 2k(p-\alpha)\sigma Cos^2\lambda\right)$$

$$\times \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sigma j\right|^2}{(j+1)^2}\Bigg\}$$

$$= \frac{(1+\sigma)}{q^2}\Bigg\{$$

$$(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda + \left[(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda + (q-1)^2(\sigma-1) + 2(q-1)(p-\alpha)Cos^2\lambda\sigma\right]$$

$$\times \prod_{j=0}^{q-2} \frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sigma j\right|^2}{(j+1)^2} +$$

$$\sum_{k=1}^{q-2}\left((p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda + k^2(\sigma-1) + 2k(p-\alpha)\sigma Cos^2\lambda\right)$$

$$\times\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}\Bigg\}$$

$$=\frac{(1+\sigma)}{q^2}\Bigg\{\quad(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda+$$

$$\sum_{k=1}^{q-2}\left((p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda+k^2(\sigma-1)+2k(p-\alpha)\sigma Cos^2\lambda\right)$$

$$\times\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}$$

$$+\left[(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda+(q-1)^2(\sigma-1)+2(q-1)(p-\alpha)Cos^2\lambda\sigma\right]$$

$$\times\prod_{j=0}^{q-2}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}\Bigg\}$$

bulunur. (*) ifadesinden ;

$$=\frac{(1+\sigma)}{q^2}\Bigg\{(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda+$$

$$\sum_{k=1}^{q-2}\left((p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda+k^2(\sigma-1)+2k(p-\alpha)\sigma Cos^2\lambda\right)$$

$$\times\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}$$

$$+\left[(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda+(q-1)^2(\sigma-1)+2(q-1)(p-\alpha)Cos^2\lambda\sigma\right]$$

$$\times\prod_{j=0}^{q-2}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}\Bigg\}$$

$$=\frac{(q-1)^2}{q^2}\times\prod_{j=0}^{q-2}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}+$$

$$+\frac{\left[(p-\alpha)^2(1+\sigma)^2Cos^2\lambda+(q-1)^2(\sigma^2-1)+2(q-1)(1+\sigma)(p-\alpha)Cos^2\lambda\sigma\right]}{q^2}$$

$$\left.\times\prod_{j=0}^{q-2}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}\right\}$$

$$=\prod_{j=0}^{q-2}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}\times$$

$$\frac{\left[(q-1)^2\sigma^2+(p-\alpha)^2(1+\sigma)^2Cos^2\lambda+2(q-1)(1+\sigma)(p-\alpha)Cos^2\lambda\sigma\right]}{q^2}$$

$$=\prod_{j=0}^{q-1}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}+\sigma j\right|^2}{(j+1)^2}$$

ifadesine ulaşılır ki, bu da gösterilmek istenen ifadedir.

8.14.Teorem: Eğer

$$f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_nz^n\in F_M(\lambda,\alpha,p)$$

ise, $n\geq p+1$ için

$$\textbf{(3.15)}\qquad |a_n|\leq\prod_{k=0}^{n-(p+1)}\frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda}Cos\lambda+k\sigma\right|}{k+1}$$

eşitsizliği sağlanır ve bu sınırlar

$$\textbf{(3.16)}\qquad f^*(z)=\begin{cases} z^p(1-z\sigma)^{-(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}} & ,\quad \alpha\neq 0\\ z^pe^{(p-\alpha)Cos\lambda e^{-i\lambda}z} & ,\quad \alpha=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f^*(z)$ fonksiyonu için kesindir.

İspat : $f \in F_M(\lambda, \alpha, p)$ olduğundan, Teorem 8.7'den dolayı,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{p(1-\sigma w(z)) + (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} w(z)}{1-w(z)}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliği düzenleyecek olursak,

$$(1-w(z))zf'(z) = \left[p(1-\sigma w(z)) + (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} w(z)\right] f(z) \Rightarrow$$

$$zf'(z) - zf'(z)\sigma w(z) = \left[p - p\sigma w(z) + (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} w(z)\right] f(z) \Rightarrow$$

$$zf'(z) - zf'(z)\sigma w(z) = pf(z) - p\sigma w(z) f(z) + (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} w(z) f(z) \Rightarrow$$

$$zf'(z)\sigma w(z) - p\sigma w(z) f(z) + (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} w(z) f(z) = zf'(z) - pf(z) \Rightarrow$$

$$(*) \quad \left\{zf'(z)\sigma + \left[(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} - p\sigma\right] f(z)\right\} w(z) = zf'(z) - pf(z)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $f(z)$' in tanımından,

$$(**) \qquad f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \in F_M(\lambda, \alpha, p) \Rightarrow$$

$$f'(z) = pz^{p-1} + \sum_{n=p+1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \Rightarrow$$

$$(***) \qquad zf'(z) = pz^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} n a_n z^n$$

eşitlikleri elde edilir. (**) ve (***) eşitlikleri (*) eşitliğinde yerlerine konacak olursa;

$$\left\{\sigma pz^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \sigma n a_n z^n + \left[(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} - p\sigma\right]\left(z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n\right)\right\} w(z)$$

$$= \left\{pz^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} n a_n z^n - pz^p - \sum_{n=p+1}^{\infty} p a_n z^n\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$\left\{\sigma p z^p + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(p+k) a_{p+k} z^{p+k} + \left[(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} - p\sigma\left(z^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}\right)\right]\right\} w(z)$$

$$= \left\{pz^p + \sum_{k=1}^{\infty}(p+k)a_{p+k}z^{p+k} - pz^p - \sum_{k=1}^{\infty} pa_{p+k}z^{p+k}\right\} \qquad \Rightarrow$$

(burada işlem kolaylığı için $A = (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}$ alalım.)

$$\left\{\sigma p z^p + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(p+k) a_{p+k} z^{p+k} + Az^p - \sigma p z^p - \sigma p \sum_{k=1}^{\infty} a_{p+k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} A a_{p+k} z^k\right\} w(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(p+k-p)a_{p+k}z^k \qquad \Rightarrow$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma p + \sigma k - \sigma p)a_{p+k}z^{p+k} + Az^p + \sum_{k=1}^{\infty} A a_{p+k} z^k\right\} w(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_{p+k} z^k \qquad \Rightarrow$$

$$\left\{(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}\left((p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sigma k\right)a_{p+k}z^k\right\} w(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_{p+k} z^k \qquad \Rightarrow$$

bu eşitlik şu şekilde de yazılabilir ;

(3.17) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left((p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sigma k\right)a_{p+k}z^k\right] w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_{p+k} z^k \quad ,$$

burada $a_p = 1$ ve $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} z^{k+1}$ dir.

(3.17) eşitliğinin her iki tarafındaki z^m terimlerinin katsayılarını eşitlersek ;

$$\sum_{k=0}^{m-1}(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}a_{p+k}b_{m-k}=ma_{p+m}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu da bize sağ taraftaki a_{p+m} katsayısının, sadece sol taraftaki $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_{p+(m-1)}$ ' lere bağlı olduğunu gösterir. Bundan dolayı $k \geq 0$ için

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left[\left\{\sigma k+(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}\right\}a_{p+k}z^k\right]w(z)=\sum_{k=0}^{m}ka_{p+k}z^k+\sum_{k=m+1}^{\infty}A_kz^k$$

eşitliğini yazabiliriz. ($m=1,2,\ldots$ ve uygun seçilen bir A_k için)

Şimdi $0<r<1$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ ve $z=re^{i\theta}$ alalım, o zaman

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left|\sigma k+(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}\right|^2\left|a_{p+k}\right|^2r^{2k}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sigma k+(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}\right\}a_{p+k}r^ke^{i\theta k}\right|^2d\theta$$

$$\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sigma k+(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}\right\}a_{p+k}r^ke^{i\theta k}\right|^2\left|w(re^{i\theta})\right|^2d\theta$$

$$\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}ka_{p+k}r^ke^{i\theta k}+\sum_{k=m+1}^{\infty}A_kr^ke^{i\theta k}\right|^2d\theta$$

$$\geq\sum_{k=0}^{m}k^2\left|a_{p+k}\right|^2r^{2k}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\left|A_k\right|^2r^{2k}\geq\sum_{k=0}^{m}k^2\left|a_{p+k}\right|^2r^{2k} \qquad \ldots\textbf{(3.18)}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.18) eşitliğinde $r\to 1$ iken

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\left|\sigma k+(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda}\right|^2-k^2\right\}\left|a_{p+k}\right|^2\geq m^2\left|a_{p+m}\right|^2 \qquad \ldots\textbf{(3.19)}$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.19)'da bir basitleştirme ile

$$\left|a_{p+m}\right|^2\leq\frac{(1+\sigma)}{m^2}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{(p-\alpha)Cos^2\lambda\left[(p-\alpha)(1+\sigma)+2\sigma k\right]+(\sigma-1)k^2\right\}\left|a_{p+k}\right|^2 \qquad \ldots\textbf{(3.20)}$$

eşitliğine ulaşırız. (3.20) eşitliğinde $p+m$ yerine n yazarsak, $n \geq p+1$ olmak üzere,

$$|a_n|^2 \leq \frac{(1+\sigma)}{(n-p)^2} \sum_{k=0}^{n-(p+1)} \left\{(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda + (\sigma-1)k^2 + 2k(p-\alpha)\sigma Cos^2\lambda\right\}|a_{p+k}|^2 \quad \textbf{(3.21)}$$

eşitliğini elde ederiz. $n = p+1$ için (3.21) eşitliğini

$$|a_{p+1}|^2 \leq (p-\alpha)^2(1+\sigma)^2 Cos^2\lambda$$

veya

$$|a_{p+1}| \leq (p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda$$

şeklinde yazarız. Bu eşitlik (3.15) eşitliği ile denktir. (3.15) eşitliğini $n > p+1$ koşulunu gerçeklerken yazmak için bir indüksiyon argümanı kullanırız.

$n \geq p+2$ koşulunu gerçekleyenbelirli bir sayı olmak üzere $k = 1,2,...,n-(p+1)$ için (3.15) eşitliğinin gerçeklendiğini varsayalım. O zaman

$$|a_n|^2 \leq \frac{(1+\sigma)}{(n-p)^2}\left\{(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda + \sum_{k=0}^{n-(p+1)}\left[(p-\alpha)^2(1+\sigma)Cos^2\lambda + k^2(\sigma-1)\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2k(p-\alpha)\sigma Cos^2\lambda\right] \times \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sigma_j\right|^2}{(j+1)^2}\right\} \quad \textbf{(3.23)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu sonuçta (3.21), (3.23), Lemma 8.13. ve $m = n-p$ olduğu kullanılırsa,

$$|a_n|^2 \leq \prod_{j=0}^{n-(p+1)} \frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda e^{-i\lambda} + \sigma_j\right|^2}{(j+1)^2}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Böylece (3.15)'in ispatı tamamlanmış olur.

8.15.Sonuç: Eğer

$$g(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} e_n z^n \in G_M(\lambda,\alpha,p)$$

ise, $n \geq p+1$ için

$$(3.24) \qquad |e_n| \leq \frac{p}{n} \prod_{k=0}^{n-(p+1)} \frac{\left|(p-\alpha)(1+\sigma)e^{-i\lambda} Cos\lambda + k\sigma\right|}{k+1}$$

eşitsizliği sağlanır ve bu sınırlar $g^*(z)$ fonksiyonundan elde edilen

$$(3.25) \qquad g'^*(z) = \begin{cases} pz^{p-1}(1-z\sigma)^{-(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}} & , \quad \sigma \neq 0 \\ pz^{p-1}e^{(p-\alpha)Cos\lambda e^{-i\lambda} z} & , \quad \sigma = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için kesindir.

$G_M(\lambda,\alpha,p)$ SINIFI İÇİN DİSTORSİYON VE ROTASYON TEOREMLERİ

$g(z)\in G_M(\lambda,0,1)$, $M\neq 1$ için

(4.1) $$\phi_1(r)=\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)\cdot Cos\lambda\cdot\left\{-Cos\lambda\cdot\log\left(\left(1-\sigma^2r^2Sin^2\lambda\right)^{1/2}+\sigma rCos\lambda\right)-Sin\lambda arcSin(\sigma r\cdot Sin\lambda)\right\}$$

(4.2) $$\phi_2(r)=\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)\cdot Cos\lambda\cdot\left\{-Cos\lambda\cdot\log\left(\left(1-\sigma^2r^2Sin^2\lambda\right)^{1/2}-\sigma rCos\lambda\right)+Sin\lambda arcSin(\sigma r\cdot Sin\lambda)\right\}$$

(4.3) $$\psi_1(r)=\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)\cdot Cos\lambda\cdot\left\{Sin\lambda\cdot\log\left(\left(1-\sigma^2r^2Cos^2\lambda\right)^{1/2}-\sigma rSin\lambda\right)-Cos\lambda arcSin(\sigma r\cdot Cos\lambda)\right\}$$

(4.4) $$\psi_2(r)=\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)\cdot Cos\lambda\cdot\left\{Sin\lambda\cdot\log\left(\left(1-\sigma^2r^2Cos^2\lambda\right)^{1/2}+\sigma rSin\lambda\right)+Cos\lambda arcSin(\sigma r\cdot Cos\lambda)\right\}$$

olmak üzere

(4.5) $$\phi_1(r)\le\log|g_2'|\le\phi_2(r)$$

ve

(4.6) $$\psi_1(r)\le\arg\{g_2'(z)\}\le\psi_2(r)$$

olduğu gösterilmişti.[3]

8.16.Teorem: Eğer $g\in G_M(\lambda,\alpha,p)$ ise, $M\neq 1$ için

(4.7) $$(p-\alpha)\phi_1(r)\le\log\left|\frac{g'(z)}{pz^{p-1}}\right|\le(p-\alpha)\phi_2(r)$$

(4.8) $$(p-1)\theta+(p-\alpha)\psi_1(r)\le\arg\{g'(z)\}\le(p-1)\theta+(p-\alpha)\psi_2(r)$$

(3.13) 'te tanımlanan $g^{*}(z)$ fonksiyonu için (4.7) ve (4.8) eşitsizlikleri, eşitlik olarak alınır.

$G_M(\lambda,\alpha,p)$, $M>1$ SINIFI İÇİN KONVEKSLİK YARIÇAPI

8.17.Lemma: Eğer $f \in F_M(\lambda,\alpha,p)$, $a \in U$ ise,

$$(5.1) \qquad F_a(z) = \frac{(\sigma a z)^p f\left(\dfrac{z+\sigma a}{1+\sigma \bar{a} z}\right)}{f(\sigma a)(z+\sigma a)^p (1+\bar{a}z)^{(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}-p}}, \quad z \in U$$

eşitliğini ve $F_a(0)=0$ eşitliğini sağlayan F_a transformasyonu, her $|a|<1$ için, $F_M(\lambda,\alpha,p)$ 'ye aittir $(M>1)$.

İspat: Lemma 8.6. (ii) 'den,

$$(5.2) \qquad f(z) = z^p\left[\frac{f_2(z)}{z}\right]^{(p-\alpha)} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

olacak şekilde $f_2 \in F_M(\lambda,0,1)$ vardır. Lemma 8.6. (ii) ve (1.8) ifadesini kullanarak,

$$(5.3) \qquad F_a(z) = z^p\left[\frac{F_2(z)}{z}\right]^{(p-\alpha)} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} A_n z^n$$

eşitliğini sağlayan bir F_a, $M>1$ için $F_M(\lambda,\alpha,p)$ 'ye aittir. Son olarak (5.2) 'den

$$(5.4) \qquad \begin{cases} f(a\sigma) = (a\sigma)^p\left[\dfrac{f_2(a\sigma)}{a\sigma}\right]^{(p-\alpha)} \\[2ex] f\left(\dfrac{z+a\sigma}{1+\bar{a}z\sigma}\right) = \left(\dfrac{z+a\sigma}{1+\bar{a}z\sigma}\right)^p\left[\dfrac{f_2\left(\dfrac{z+a\sigma}{1+\bar{a}z\sigma}\right)}{\dfrac{z+a\sigma}{1+\bar{a}z\sigma}}\right]^{(p-\alpha)} \end{cases}$$

elde edilir. Şimdi (5.3) ve (5.4) 'ten (5.1) 'e ulaşırız.

8.18.Sonuç: Eğer $g \in G_M(\lambda,\alpha,p)$, $(a \in U)$ ise,

$$(5.5) \qquad G'_a(z) = \frac{p(az\sigma)^{p-1} g'\left(\dfrac{z+a\sigma}{1+\bar{a}z\sigma}\right)}{g'(a\sigma)(z+a\sigma)^{p-1}(1+\bar{a}z\sigma)^{(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}-p+1}}$$

ve $G_a(0)=0$ eşitlikleriyle verilen G_a transformasyonu da, her $|a|<1$ için, $G_M(\lambda,\alpha,p)$ 'nin elemanıdır $(M>1)$.

8.19.Lemma: $|z| \le r$ ve $G_M(\lambda,\alpha,p), M>1$ 'e ait olan g 'ler için, $\dfrac{zg''(z)}{g'(z)}$ değerlerinin tanım cümlesi,

$$\left(\frac{\left[(p-\alpha)\left(\dfrac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos^2\lambda - p+1\right]r^2 + (p-1)}{1-r^2}, \frac{-(p-\alpha)\left(\dfrac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda Sin\lambda r^2}{1-r^2} \right)$$

diski olup yarıçapı

$$\frac{p(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda r}{1-r^2}$$

dir.

İspat: $g(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} e_n z^n \in G_M(\lambda,\alpha,p)$ olduğunda

$$\lim_{z\to 0}\left\{\frac{g''(z)-p(p-1)z^{p-2}}{z^{p-3}}\right\} = p(p+1)e_{p+1}$$

olur. $g \in G_M(\lambda,\alpha,p)$ ve $|a|<1$ için Sonuç8.18. 'den

$G_a(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} E_n z^n \in G_M(\lambda,\alpha,p)$, $M > 1$ olsun. Direkt hesaplama sonucu,

(5.6) $$p(p+1)E_{p+1} = p\left(1-\sigma^2|a|^2\right)\frac{g''(a\sigma)}{g'(a\sigma)}$$

$$-\frac{p\left[(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda} - p + 1\right]\sigma^2|a|^2 + p(p-1)}{a\sigma}$$

bulunur. (3.11) ve (5.6) 'yı birlikte ele alırsak,

(5.7) $$\left|\frac{z.g''(a\sigma)}{g'(a\sigma)} - \frac{\left[(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda} - p + 1\right]\sigma^2|a|^2 + (p-1)}{a\sigma\left(1-\sigma^2|a|^2\right)}\right|$$

$$\leq \frac{p(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda}{\left(1-\sigma^2|a|^2\right)}$$

elde ederiz. (5.7) 'den, $|z| = r < 1$ için:

(5.8) $$\left|\frac{z.g''(a\sigma)}{g'(a\sigma)} - \frac{\left[(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda} - p + 1\right]r^2 + (p-1)}{\left(1-r^2\right)}\right|$$

$$\leq \frac{p(p-\alpha)(1+\sigma)rCos\lambda}{\left(1-r^2\right)}$$

sonucuna ulaşırız ve ispatı tamamlamış oluruz.

8.20.Teorem: $G_M(\lambda,\alpha,p)$, $M > 1$ sınıfının konvekslik keskin yarıçapı,

(5.9) $$r_c = 2p\Big\{p(p-\alpha)(1+\sigma)Cos\lambda + p^2(p-\alpha)^2(1+\sigma)^2 Cos^2\lambda$$

$$-4p\left[(p-\alpha)((1+\sigma)/\sigma)Cos^2\lambda - p\right]^{\frac{1}{2}}\Big\}^{-1}$$

ile verilir.

İspat: (5.8) 'den, $|z| = r$ için

(5.10)

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{z.g''(z)}{g'(z)}\right\} \geq \frac{p-p(p-\alpha)(1+\sigma)rCos\lambda+\left[(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos^2\lambda-p\right]r^2}{1-r^2}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (5.9) 'da verilen r_c için,

$|z| < r_c$ olduğunda; $\qquad \operatorname{Re}\left\{1+\dfrac{z.g''(z)}{g'(z)}\right\} > 0$

dir. (5.9) 'un keskin olduğunu göstermek için

$$g'^{*}(z) = pz^{p-1}(1-\sigma z)^{-(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda e^{-i\lambda}}$$

ve

$$w = \frac{r\left[r-p\sigma e^{i\lambda}\right]}{\sigma\left[1-pre^{i\lambda}\right]}$$

alırız ve

$$1+\frac{w.g''^{*}(z)}{g'^{*}(z)} = \frac{p-p(p-\alpha)(1+\sigma)rCos\lambda+\left[(p-\alpha)\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)Cos\lambda-p\right]r^2}{1-r^2}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadenin (5.9) 'da verilen r 'de bir reel sıfır kısmı vardır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM II

p – FOLD KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL JANOWSKİ FONKSİYONLAR SINIFI

Bu bölümde 1973 yılında W.Janowski [27] tarafından tanımlanan birim diskte tanımlı P(A,B) sınıfını ve buna bağlı olarak

$$f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots$$

açılımına sahip birim diskte tanımlı analitik fonksiyonların sınıfında katsayı problemini ele alıp inceleyeceğiz. Bunun için aşağıdaki tanımlara ihtiyaç vardır.

Tanım:1. $w(z)$, $D = \{z \mid |z| < 1\}$'de tanımlanmış analitik, $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen fonksiyon olsun. Bu koşulu gerçekleyen fonksiyonlar sınıfını Ω ile göstereceğiz.

Tanım:2. $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n$ fonksiyonu D'de tanımlanmış analitik fonksiyon olsun. $-1 \le B \le A \le 1$ koşulunu gerçekleyen reel sayılar olmak üzere $p(z) \in P(A,B)$' dir, ancak ve yalnız

$$p(z) = \frac{1 + A \cdot w(z)}{1 + B \cdot w(z)} .$$

Tanım:3. $b \neq 0$ kompleks sayı olmak üzere

$$f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots$$

fonksiyonu D'de tanımlanmış analitik bir fonksiyon olsun. $f(z) \in S_p(A,B,p,b)$ dir, ancak ve yalnız

$$1 + \frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) = p(z) , \quad p(z) \in P(A,B) .$$

Bu sınıfa p – fold kompleks mertebeden yıldızıl Janowski fonksiyonlar sınıfı denir.

Teorem: $f(z) \in S_p(A,B,b,p)$ ise,

$$|a_{np+1}| \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{|pk+2b|}{p(k+1)}$$

dır.

İspat: $f(z) \in S_p(A,B,b,p)$ olduğundan;

$$1+\frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)=p(z)=1+p_1 z+p_2 z^2+\ldots+p_n z^n+\ldots \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)=1+p_1 z+p_2 z^2+\ldots+p_n z^n+\ldots-1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)=p_1 z+p_2 z^2+\ldots+p_n z^n+\ldots \quad \Rightarrow$$

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}-1=bp_1 z+bp_2 z^2+\ldots+bp_n z^n+\ldots \quad \Rightarrow$$

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=1+bp_1 z+bp_2 z^2+\ldots+bp_n z^n+\ldots \quad \Rightarrow$$

dır.

$$f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{2p+1}z^{2p+1}+\ldots+a_{np+1}z^{np+1}+\ldots$$

şeklinde idi. Buradan,

$$f'(z)=1+(p+1)a_{p+1}z^{p}+(2p+1)a_{2p+1}z^{2p}+\ldots+(np+1)a_{np+1}z^{np}+\ldots \quad \Rightarrow$$

$$zf'(z) = z + (p+1)a_{p+1}z^{p+1} + (2p+1)a_{2p+1}z^{2p+1} + \ldots + (np+1)a_{np+1}z^{np+1} + \ldots \quad \Rightarrow$$

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z + (p+1)a_{p+1}z^{p+1} + (2p+1)a_{2p+1}z^{2p+1} + \ldots + (np+1)a_{np+1}z^{np+1} + \ldots}{z + a_{p+1}z^{p+1} + a_{2p+1}z^{2p+1} + \ldots + a_{np+1}z^{np+1} + \ldots}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\frac{z + (p+1)a_{p+1}z^{p+1} + (2p+1)a_{2p+1}z^{2p+1} + \ldots + (np+1)a_{np+1}z^{np+1} + \ldots}{z + a_{p+1}z^{p+1} + a_{2p+1}z^{2p+1} + \ldots + a_{np+1}z^{np+1} + \ldots} \quad \Rightarrow$$

$$= 1 + bp_1 z + bp_2 z^2 + \ldots + bp_n z^n + \ldots$$

$$z + (p+1)a_{p+1}z^{p+1} + (2p+1)a_{2p+1}z^{2p+1} + \ldots + (np+1)a_{np+1}z^{np+1} + \ldots$$

$$= (1 + bp_1 z + bp_2 z^2 + \ldots + bp_n z^n + \ldots)(z + a_{p+1}z^{p+1} + a_{2p+1}z^{2p+1} + \ldots + a_{np+1}z^{np+1} + \ldots)$$

eşitliği elde edilir. Burada parantezler açılıp, birbirine eşitlenirse aşağıdaki katsayılar elde edilir ve bu durumda

$$|a_{np+1}| = \frac{2|b|}{np}\sum_{k=0}^{n-1}|a_{kp+1}| \quad , \quad |a_1| = 1$$

eşitlik elde edilir. Bu eşitlik bize

$$|a_{np+1}| \leq \prod_{k=0}^{n-1}\frac{|pk + 2b|}{p(k+1)}$$

eşitsizliğini verir. Bu iddiayı Matematik Indüksiyon ile aşağıdaki şekilde doğrularız.

$$|a_{np+1}| \leq \frac{2|b|}{np}\sum_{k=0}^{n-1}|a_{kp+1}| \quad , \quad |a_1| = 1$$

eşitsizliğinin sağ tarafı ile

$$\left|a_{np+1}\right| \le \prod_{k=0}^{n-1} \frac{|pk+2b|}{p(k+1)}$$

eşitsizliğinin sağ tarafının eşit olduğunu (Matematik İndüksiyon Hipotezi ile) gösterelim.

$n=1$ için : $\left|a_{np+1}\right| \le \dfrac{2|b|}{np} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_{kp+1}\right|$, $|a_1|=1$ $\Rightarrow$

$$\left|a_{p+1}\right| \le \frac{2|b|}{p} \cdot |a_1| = \frac{2|b|}{p} \Rightarrow$$

(7) $$\left|a_{p+1}\right| \le \frac{1}{p} \cdot 2|b|$$

$$\left|a_{np+1}\right| \le \prod_{k=0}^{n-1} \frac{|pk+2b|}{p(k+1)} \Rightarrow$$

(8) $$\left|a_{p+1}\right| \le \frac{1}{p} \cdot 2|b|$$

$n=2$ için : $\left|a_{np+1}\right| \le \dfrac{2|b|}{np} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_{kp+1}\right|$, $|a_1|=1$ $\Rightarrow$

$$\left|a_{2p+1}\right| \le \frac{2|b|}{2p} \cdot \left(1+|a_1|\right) = \frac{|b|}{p}\left(1+\frac{1}{\mathrm{p}} \cdot 2|b|\right) \Rightarrow$$

(9) $$\left|a_{2p+1}\right| \le \frac{1}{p} \cdot |b| + \frac{1}{p^2} \cdot 2|b|^2$$

$$\left|a_{np+1}\right| \le \prod_{k=0}^{n-1} \frac{|pk+2b|}{p(k+1)} \Rightarrow$$

$$\left|a_{2p+1}\right| \le \frac{2|b|}{p} \cdot \frac{|p+2b|}{2p} = \frac{1}{p^2} \cdot |b| \cdot \left[p + 2|b|\right] \qquad \Rightarrow$$

(10) $$\left|a_{2p+1}\right| \le \frac{1}{p} \cdot |b| + \frac{1}{p^2} \cdot 2|b|^2$$

$n = 3$ için : $\left|a_{np+1}\right| \le \dfrac{2|b|}{np} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_{kp+1}\right|$, $|a_1| = 1$ $\Rightarrow$

$$\left|a_{2p+1}\right| \le \frac{2|b|}{3p} \cdot \left(1 + \left|a_{p+1}\right| + \left|a_{2p+1}\right|\right) = \frac{2|b|}{3p}\left(1 + \frac{1}{p} \cdot 2|b| + \frac{1}{p} \cdot |b| + \frac{1}{p^2} \cdot 2|b|^2\right) \qquad \Rightarrow$$

$$= \frac{2|b|}{3p}\left(1 + \frac{1}{p} \cdot 3|b| + \frac{1}{p^2} \cdot 2|b|^2\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} \cdot |b| + \frac{1}{p^2} \cdot 2|b|^2 + \frac{1}{p^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot |b|^3 \qquad \Rightarrow$$

(11) $$\left|a_{3p+1}\right| \le \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{3} \cdot |b| + \frac{1}{p^2} \cdot 2|b|^2 + \frac{1}{p^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot |b|^3$$

$$\left|a_{np+1}\right| \le \prod_{k=0}^{n-1} \frac{|pk + 2b|}{p(k+1)} \qquad \Rightarrow$$

$$\left|a_{3p+1}\right| \le \frac{2|b|}{p} \cdot \frac{|p+2b|}{2p} \cdot \frac{|2p+2b|}{3p} = \frac{2|b|}{p} \cdot \left[\left(\frac{p}{2p} + \frac{|2b|}{2p}\right)\left(\frac{2p}{3p} + \frac{|2b|}{3p}\right)\right] \qquad \Rightarrow$$

$$= \frac{|2b|}{p} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{|b|}{p}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2|b|}{3p}\right)\right] = \frac{|2b|}{p} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{|b|}{p} + \frac{2}{3} \cdot \frac{|b|}{p} + \frac{2}{3} \cdot \frac{|b|^2}{p^2}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$= \frac{|2b|}{p} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3|b|}{3p} + \frac{2}{3} \cdot \frac{|b|^2}{p^2}\right) = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{3} \cdot |b| + \frac{1}{p^2} \cdot 2|b|^2 + \frac{1}{p^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot |b|^3 \qquad \Rightarrow$$

$$(12) \qquad \left|a_{3p+1}\right| \le \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{3}\cdot|b| + \frac{1}{p^2}\cdot 2|b|^2 + \frac{1}{p^3}\cdot\frac{4}{3}\cdot|b|^3$$

Buradan görüyoruz ki, (7) – (8), (9) – (10) ve (11) – (12) eşitsizlikleri birbirine eşittir.

Şimdi;

$n = m$ için doğru olsun. (Matematik Indüksiyon Hipotez Adımı) Yani,

$$\left|a_{np+1}\right| \le \frac{2|b|}{np}\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_{kp+1}\right| \qquad , \quad |a_1| = 1$$

ve

$$\left|a_{np+1}\right| \le \prod_{k=0}^{n-1}\frac{|pk+2b|}{p(k+1)}$$

eşitsizliklerinin sağ tarafları aynı olsun. Bu demektir ki,

$$(*) \qquad \frac{2|b|}{mp}\sum_{k=0}^{m-1}\left|a_{kp+1}\right| = \frac{2|b|}{mp}\left(|a_1| + |a_{p+1}| + |a_{2p+1}| + \ldots + |a_{(m-1)p+1}|\right)$$

$$(**) \qquad \prod_{k=0}^{n-1}\frac{|pk+2b|}{p(k+1)} = \frac{|2b|}{p}\cdot\frac{|p+2b|}{2p}\cdot\frac{|2p+2b|}{3p}\cdot\ldots\cdot\frac{|(m-1)p+2b|}{mp}$$

bağıntılarının sağ tarafları eşittir. Yani,

$$\frac{2|b|}{mp}\left(|a_1| + |a_{p+1}| + |a_{2p+1}| + \ldots + |a_{(m-1)p+1}|\right)$$

$$= \frac{|2b|}{p}\cdot\frac{|p+2b|}{2p}\cdot\frac{|2p+2b|}{3p}\cdot\ldots\cdot\frac{|(m-1)p+2b|}{mp}$$

eşitliği vardır.

$n=m+1$ için doğruluk ispatı:

$$\left|a_{mp+1}\right| \le \frac{|2b|}{p}\cdot\frac{|p+2b|}{2p}\cdot\frac{|2p+2b|}{3p}\cdot\ldots\cdot\frac{|(m-1)p+2b|}{mp}$$

$$=\frac{|2b|}{m!\,p^{m}}\left(|p+2b|\cdot|2p+2b|\ldots|(m-1)p+2b|\right)$$

$$\le\frac{|2b|}{m!\,p^{m}}\left((p+2|b|)\cdot(2p+2|b|)\ldots((m-1)p+|2b|)\right) \quad , \quad 2|b|=x \quad \text{dersek}$$

$$\left|a_{mp+1}\right| \le \frac{x}{m!\,p^{m}}\left((p+x)\cdot(2p+x)\ldots((m-1)p+x)\right)$$

olduğundan;

(I)

$$\frac{x}{mp}\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|\right)=\frac{x}{m!\,p^{m}}\left((p+x)\cdot(2p+x)\ldots((m-1)p+x)\right)$$

eşitliği yazılabilir. (I) eşitliği, $2|b|=x$ ile sadeleştirilirse,

(II)

$$\frac{1}{mp}\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|\right)=\frac{1}{m!\,p^{m}}\left((p+x)\cdot(2p+x)\ldots((m-1)p+x)\right)$$

şeklinde ifade edilebilir. (II) eşitliğinin her iki tarafını $\frac{1}{(m+1)p}\cdot(x+mp)$ ile çarparsak;

$$\frac{1}{(m+1)p}\cdot(x+mp)\cdot\frac{1}{mp}\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$=\frac{1}{(m+1)p}\cdot(x+mp)\cdot\frac{1}{m!\,p^{m}}((p+x)\cdot(2p+x)\ldots((m-1)p+x))$$

$$\frac{1}{(m+1)p}\cdot\left(\frac{x}{mp}+1\right)\cdot\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$=\frac{1}{(m+1)!\,p^{m+1}}\cdot((p+x)\cdot(2p+x)\ldots((m-1)p+x)\cdot(x+mp))$$

$$\frac{1}{(m+1)p}\cdot\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|\right)$$

$$+\frac{1}{(m+1)p}\cdot\frac{x}{mp}\cdot\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{(m+1)!\,p^{m+1}}\cdot((p+x)\cdot(2p+x)\ldots((m-1)p+x)\cdot(mp+x))$$

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned}&\frac{1}{(m+1)p}\cdot\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|+\left|a_{mp+1}\right|\right)\\&=\frac{1}{(m+1)!\,p^{m+1}}\cdot((p+x)\cdot(2p+x)\ldots((m-1)p+x)\cdot(mp+x))\end{aligned}$$

bulunur. (III) eşitliğinin her iki tarafını $2|b|=x$ ile çarparsak;

$$\frac{x}{(m+1)p}\cdot\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|+\left|a_{mp+1}\right|\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$=\frac{x}{(m+1)!\,p^{m+1}}\cdot((p+x)\cdot(2p+x)\ldots((m-1)p+x)\cdot(mp+x))$$

$$\frac{2|b|}{(m+1)p}\cdot\left(1+\left|a_{p+1}\right|+\left|a_{2p+1}\right|+\ldots+\left|a_{(m-1)p+1}\right|+\left|a_{mp+1}\right|\right)$$

$$=\frac{2|b|}{(m+1)!\,p^{m+1}}\cdot\left((p+2|b|)\cdot(2p+2|b|)\ldots((m-1)p+2|b|)\cdot(mp+2|b|)\right)$$

bulunur ki bu da $n=m+1$ için doğruluğu gösterir. Böylece teoremin ispatını tamamlamış oluruz.

$p=1$ için kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonlar için katsayı eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik Yaşar POLATOĞLU, Metin BOLCAL ve Arzu ŞEN tarafından bulunmuştur. Mathematical Sciences adlı dergide (2003) 36. ciltte yayınlanmıştır.[26]

KAYNAKLAR

[1] Ahlfors W. Compleks Analysis. International Student Series. 1950 New – York.

[2] P.N. Chichra, Proc. Am. Math. Soc. 49(1975) 151 – 60.

[3] J. Clunie, On Meromorphic Schlicht Functions, J. London Math. Soc., 34(1959) 215 – 16.

[4] P.T. Duren Univalent Functions. Springer – Verlak, 1986 – London.

[5] E.G. Goluzina, J. Sov. Math. (2) 6(1974) 606 – 17.

[6] A.W. Goodman, Trans. Am. Math. Soc. 68(1950) 204 – 23.

[7] A.W. Goodman Univalent Function Volume 1, 2 Mariner Company. 1984 Tampa Florida.

[8] Konard Knop Analytic Functions Theory Volume 1, 2, 3 Problem Books Dover Publications. 1940 New – York (Türkçe Çeviri Nazım Terzioğlu Analitik Fonksiyonlar Teorisi. 1954 İstanbul Üniversitesi Yayınları).

[9] P.K. Kulshrestha, R. Di Mathematica 9(1936).

[10] R.J. Libera, Canadian Journal Mathematics 19(1967) 449 – 56.

[11] R.J. Libera, Some Radius of Convexity Problems, Duke Math. J. 31(1964), 143 – 58.

[12] Murray Spigel Complex Variables. Schoum's Outline Series. 1968 New – York.

[13] Zeew Nehari Conformal Mapping. New – York 1952.

[14] Zeew Nehari Conformal Mapping. Dover Publications. 1960 New – York.

[15] Zeew Nehari Introduction to Complex Analysis. International Student Series. 1946 New –York.

[16] C.H. Pommerenke. Univalent Function Vandenhock, Göttingen 1976.

[17] M.S. Robertson, On The Theory of Univalent Functions, Ann. Of Math., 37(1936), 374 – 408.

[18] M.S. Robertson, Variational Methods for Functions With Pozitive Real Part, Trans. Amer. Math. Soc., 102(1962), 82 – 93.

[19] M.S. Robertson, Mich. Math. J. 16(1969), 97 – 101.

[20] A. Schild, On Starlike Functions of Order α, Amer. J. Math. Soc., 16(1965).

[21] Richard Silverman Analitic Function Theory Bover Publications. 1980 New – York.

[22] R.Singh, J.Indian Math. Soc. 32(1968), 208 – 13.

[23] R.Singh and V.Singh, Indian J. Pure Appl. Math. 5(1974), 733 – 54.

[24] P.I. Sizuk, Sibirsk. Math. Z. 16(1975), 1286 – 90, 1371MR14264.

[25] L. Špăcěk, Časopis Pěst. Math. Fys. 62(1933), 12 – 19.

[26] Y.Polatoğlu, M.Bolcal and A.Şen, Equaficient Qualty for The Class of Analytic Functions in The Unit disc, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 36 (2003).

[27] W. Janowski, Some Extremal Problems for Certain Families of Analytic Functions I,Annales Polonici Mathematici XXVIII (1973).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Doğum Tarihi: 24 / 08 / 1981

Doğum Yeri: İstanbul

Eğitim Durumu

1986–1991	Kadırga İlkokulu	İstanbul
1991–1994	Kadırga İlköğretim Okulu	İstanbul
1994–1997	Cibali Lisesi	İstanbul
1997–2001	İstanbul Kültür Üniversitesi	İstanbul