

170621



**DNA VE DÜĞÜMLER**

Melike KARTA

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç.Dr.Ahmet KÜÇÜK

Matematik Anabilim Dalı

2005

Her hakkı saklıdır

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜĞÜMLER VE DNA

Melike KARTA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2005

Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. Ahmet Küçük danışmanlığında, Melike KARTA tarafından hazırlanan bu çalışma 31.../05/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Ahmet Küçük

İmza:

Üye : Doç. Dr. Abdullah Koprulu

İmza:

Üye : Y. Doç. Dr. Tamer Ufuk

İmza:

Üye : .....

İmza:

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

Prof. Dr. Mehmet ERTUĞRUL  
Enstitü Müdürü  
(imza)



**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÜĞÜMLER VE DNA

Melike KARTA

Atatürk Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK

Tez çalışmasında, düğüm teorisinin esas kavramları ve problemlerin üzerinde durularak DNA molekülü ile düğümler arasındaki ilişkiye yardımcı kavram olan tangle'ler üzerinde duruldu. Daha sonra tek bir kenar ya da bir çift sarmalın içinde sarılmış iki kenardan oluşan halka şeklinde ki DNA bir matematiksel modelle geniş bir şekilde incelendi.

**2005, 46 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Düğümler, halkalar, tangle'ler, enzim, DNA

## **ABSTRACT**

Master Thesis

KONTS AND DNA

Melike KARTA

Atatürk University  
Faculty of Arts and Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor. Assoc. Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK

In this thesis, tangles helping the relation between DNA molecules and the knots were examined, being studied on the knot theory's principal concepts and its problems. Then, link DNA was examined with a mathematical model which twedges being only an edge and single spiral in surrounded.

**2005, 46 pages**

**Keywords:** Knots, links, tangles, enzyme, DNA

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alıŐma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümün’de yapılmıŐtır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı gösteren ve yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK’e teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca gerekli yardımı ve ilgiyi esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Abdullah KOPUZLU’ya ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Tamer UĐUR’a teşekkür ederim.

Bu tezi bitirmem için hep bir neden bulup, beni teŐvik edip desteklerini esirgemeyen canım aileme sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Melike KARTA

Mayıs – 2005

## SİMGELER DİZİNİ

$br(\Delta)$	K düğümünün herhangi bir diyagramındaki köprü sayısı
$B^n$	n – boyutlu top
c	Geçit noktası
C	Eğri
$c(D)$	K düğümünün herhangi bir regüler diyagramındaki geçit sayısı
$c(K)$	K düğümünün bütün regüler diyagramındaki geçit sayılarının minimumu
D	K düğümünün standart regüler diyagramı
DNA	Deoksiribonükleik asit
$D(T)$	T tangle'nin denminatö'ü
K	herhangi bir düğüm
$K \cong K'$	K ve $K'$ düğümlerinin denkliği
$K^* = \phi(K)$	K düğümünün ayna görüntüsü
$\hat{K} = K \neq K'$	K ve $K'$ düğümlerinin bağlantılı toplamı
$\ell_K(K_1, K_2)$	İki düğümün halkalanma sayısı
L	Herhangi bir halka
$N(T)$	T tangle'nin numaratorü
$P(K)$	Düğüm sabiti
$R^3$	3 Boyutlu Eczlid uzayı
$R = T(r)$	Tam tangle
$S^1$	1 – Boyutlu Küre
$S^2$	Küre
$S^3$	$R^3 \cup \{\infty\}$ şeklinde oluşturulan uzay
$S^1 \times [-1,1]$	Şerit
$Sign(c)$	C Geçit noktasının işareti
T	Tangle
$T_1 + T_2$	$T_1$ $T_2$ tangle'lerin toplamı
$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$	n defa peş peşe yapılan yatay ve dikey dönme

$T_w(B)$	B şeridinin bükülme sayısı
$T_n^3$	katalizör görevi yapan enzim
$\Omega_i$	$i = 1, 2, 3$ , için Reidemeister Hareketleri



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.1. Aşıkâr düğüm.....	2
Şekil 2.2.1 Basit düğüm hareketleri (1) ve (1)' .....	3
Şekil 2.2.2. Basit düğüm hareketleri (2) ve (2)' .....	3
Şekil 2.2.3. Düğümlerin denkliği.....	4
Şekil 2.2.4. Düğümlerin yönlendirilmesi .....	4
Şekil 2.2.5. Düğümlerin ayna görüntüsü.....	5
Şekil 2.2.6. Halkaların denkliği .....	6
Şekil 2.2.7. Düğümlerin bağlantılı toplam.....	7
Şekil 2.2.8. Regüler izdüşümü .....	7
Şekil 2.2.9. Trefail düğümler .....	8
Şekil 2.2.10. Regüler diyagramlar .....	8
Şekil 2.3.1. Trefail düğümler .....	10
Şekil 2.3.2. Sekiz şekilli düğüm.....	11
Şekil 2.3.3. Bir düğümün bir ekseninde döndürülmesi .....	12
Şekil 2.4.1. Reidemeister hareketleri .....	13
Şekil 2.4.2. $\Omega$ . Hareketi.....	13
Şekil 2.4.3. Düğümlerin geçit noktalarının minimum sayısı .....	14
Şekil 2.4.4. Düğümlerin köprü sayısı.....	14
Şekil 2.4.5. Regüler diyagramların köprü sayısı .....	15
Şekil 2.4.6. Düğümlenme sayısı.....	16
Şekil 2.4.7. Halkalanma sayısı .....	16
Şekil 2.4.8. halkalanma sayısının hesabı.....	17
Şekil 3.1.1. (1,1) – Tangle .....	18
Şekil 3.1.2. Aşıkâr (1,1) – Tangle'ler .....	19
Şekil 3.1.3. Bir küre üzerinde dört noktanın gösteriliği.....	20
Şekil 3.1.4. Bir Tangle'nin regüler diyagramı .....	20
Şekil 3.1.5. Bir Tangle'nin numarator'ü ve demminatör'ü .....	21
Şekil 3.2.1. Rasyonel Tangle'ler.....	22
Şekil 3.2.2. Bir rasyonel Tangle'nin $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesi .....	23

Şekil 3.2.3. Kürenin z ve y eksenleri etrafında döndürülmesi .....	24
Şekil 3.2.4. Pozitif ve Negatif dönmeler .....	25
Şekil 3.2.5. Yatay ve dikey dönmeler sonunda elde edilen iki tangle örneği .....	26
Şekil 3.2.6. İki rasyonel tangle'nin toplanın rasyonel olmadığına gösterimi .....	27
Şekil 4.1.1. $C_1$ ve $C_2$ Eğrilerinin halkalanması.....	29
Şekil 4.1.2. DNA molekülündeki topizomerase hareketleri .....	30
Şekil 4.2.1. Enzim vasıtasıyla DNA molekülünün iki şeridinin birbirine bağlanması.....	32
Şekil 4.2.2. Enzim yoluyla DNA molekülünün iki şeridinin farklı üç şekilde bağlanması.....	33
Şekil 4.2.3. 3 – Top içindeki bir enzim ile oluşturulmuş ters düz kompleks (2,2) – tangle.....	34
Şekil 4.2.4. S ve R Tangle'lerin Toplamı .....	35
Şekil 4.2.5. Bir Tangle'den iki tanglenin oluşu .....	35
Şekil 4.3.1. $Tn^3$ resolvase hareketinin sonuçları .....	37
Şekil 4.3.2. S ve R Enzimlerinin değişik şekillerde sıralanmasıyla oluşan düğüm ve halkalar .....	38
Şekil 4.3.3. S ve R Enzimlerinin 4.3.1.'deki sıralanma sonucu oluşan tangleler .....	39
Şekil 4.3.4. $Tn^3$ Yeniden birleşme yoluyla oluşan düğümler.....	39
Şekil 4.3.5. S'nin bir (0,0) – tangle olması halinde $N(S+R+R)$ 'nin durumu .....	40
Şekil 4.3.6. R'nin bir (0,0) – tangle olmaması halinde $N(S+R+R)$ 'nin durumu.....	41

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ .....	iv
ŞEKİLER DİZİNİ .....	vi
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER .....</b>	<b>2</b>
2.1. Düğüm .....	2
2.2. Düğüm Teorisinin Esas Kavramları .....	2
2.2.1. Basit Düğüm Hareketleri .....	2
2.2.2. Dğümlerin Denkliği .....	3
2.2.3. Halkların Denkliği .....	5
2.2.4. Dğümlerin Bağlantılı Toplamı .....	6
2.2.5. Regüler Diyagramlar .....	7
2.3. Dğüm Teorisinin Esas Problemleri .....	9
2.3.1. Global Problemler .....	9
2.3.2. Lokal Problemler .....	10
2.4. Klasik Dğüm Sabitleri .....	12
2.4.1. Reidemeister Hareketleri .....	12
2.4.2. Geçit Noktalarının Minimum Sayısı .....	13
2.4.3. Köprü Sayısı .....	14
2.4.4. Dğümlememe Sayısı .....	15
2.4.5. Halkalanma Sayısı .....	16
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM .....</b>	<b>18</b>
3.1. Tangle .....	18
3.1.1. Tangle'lerin Regüler Diyagramı .....	19
3.1.2. İki Tangle'nin Toplamı .....	21
3.2. Aşık Tangle'ler (rasyonel tangle'ler) .....	22

<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA</b> .....	28
4.1. DNA.....	28
4.2. Özel Alan (site-specific) Yeniden Birleşme .....	31
4.2.1. Özel Alan Yeniden Birleşme İçin Bir Model .....	34
4.3. Tn3 Resolvase Yoluyla Yeniden Birleşme .....	36
<b>5. SONUÇLAR</b> .....	45
KAYNAKLAR .....	46
ÖZGEÇMİŞ	



## 1.GİRİŞ

Düğüm teorisinin tarihi 1800'lerin çok başlarında Alman matematikçi J.F.C. Gauss'un düğüm fikrini ortaya atmasıyla başlamıştır. 1800'lerin sonlarına kadar hiç kimse düğüm fikri ile ilgilenmemiştir. Ancak W. Thomson olarak bilinen İngiliz bilim adamı L.Kelvin Glosgow Üniversitesinde düğümler hakkında ders vermiştir. Düğüm teorisi kısa bir süre içinde 1950 lere kadar ortadan kaybolmuştur

Bütün dünya deoksiribonükleik asit (DNA) nın şeklini keşfetmek için yarışmıştır. Sonunda düğüm 1953 lerde, James Watson ve Francis Crick DNA'nın çift sarmal şeklini keşfetmişlerdir. Bu kavram birçok yerde düğümlenmiş DNA parçalarının keşfine neden oldu. Bu bilim adamlarının her ikisinin de yardımıyla düğüm teorisini. Tüm yaşayan canlıların oluşumunu anlamak ve hastalıklarla mücadele etmede yeni fikirler üreten bilim adamlarının yeniden aklına gelmiştir.

Düğüm teorisi için bütün mesele, bir düğümün var olup olmadığını kanıtlamaktı. Düğüm teorisinin ilk günlerinde, insanlar onların şeklini bozarak ve bükerek düğümleri ayırt etmeyi denemiştir. Eğer bir düğüm diğerine dönüştürülürse, onlar aynı olurdu. Aksi takdirde farklı düğümler elde edilirdi. Böylece, düğümlerin denkliği ortaya atılmıştır. Daha sonra deneme-yanılma yollarına devam edilerek düğümlerin problemleri (global-lokal) ve diğer düğüm kavramları keşfedilmiştir.

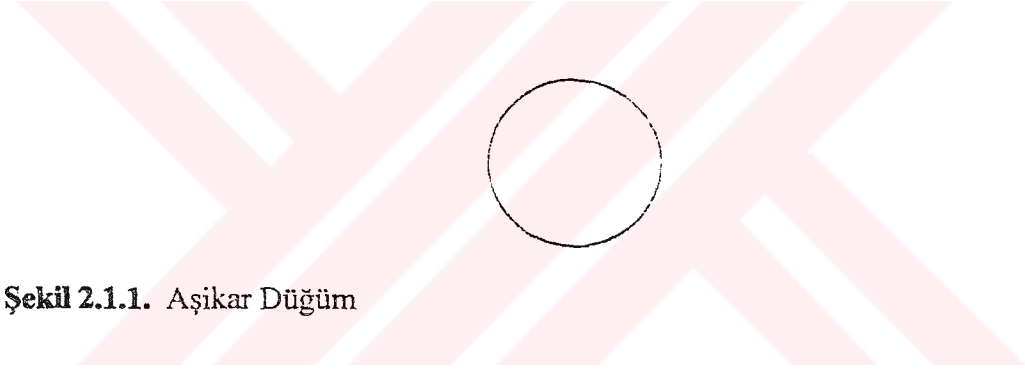
Tez çalışmasında, önce düğüm kavramları ve uygulamaları üzerinde durulup, düğümler ve DNA molekülüne yardımcı olan tangle'ler hakkında bilgi verilmiştir. Sonra ise, DNA molekülü ile düğümler arasında bir ilişki kurulup DNA'nın çift sarmal yapısıyla ilgili bir model verilmeye çalışılmıştır.

## 2.KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. Dügüm

**Tanım:** Bir düğüm sezgisel olarak uzayda kendi kendisini kesmeyen kapalı bir eğri veya bir ilmek olarak düşünülebilir. Ancak matematiksel olarak bir düğüm  $S^1$  çemberinin  $R^3$  içerisine gömülmesidir (Murasugi 1996).

**Tanım:** Dügümlenmeme yapılmadan 10 cm. uzunluğundaki bir ipin uçları birleştirilerek elde edilen düğümüne aşikar düğüm veya düğümlenmemiş düğüm denir (Murasugi 1996).



Şekil 2.1.1. Aşikar Dügüm

### 2.2. Dügüm Teorisinin Esas Kavramları

#### 2.2.1 Basit Dügüm Hareketleri

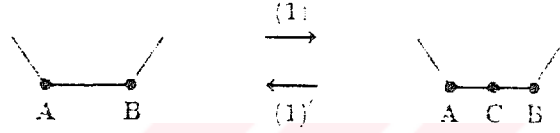
K düğümü üzerinde aşağıdaki dört işlem uygulanarak basit düğüm hareketleri yapılır.

(1) şekil 2.2.1' de görüldüğü gibi bir K düğümü üzerindeki AB kenarını, bir C kenarı referans alınarak AC ve CB şeklinde iki kenara bölebiliriz.

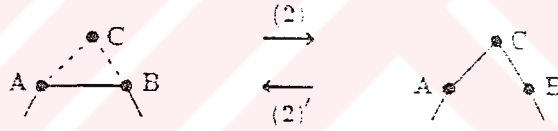
(2) ((1)'in tersi ) şekil 2.2.1. de görüldüğü gibi bir K düğümü üzerinde bitişik AC ve CB kenarlarından oluşan bir doğru varsa bu C kenarı silinerek bir AB kenarı elde edilebilir.

(3) K düğümü üzerinde bulunmayan bir C noktasını düşünelim. AB ve C ile biçimlendirdiğimiz ABC üçgeni AB kenarı hariç K düğümünü kesmezse bu durumda AB kenarını ortadan kaldırabilir ve AC ve CB kenarlarını ekleyebiliriz (şekil 2.2.2).

(4) ((3) ün tersi) K düğümü üzerinde K'nın AC ve CB bitişik iki kenarını ihtiva eden bir ABC üçgeni mevcutsa ve bu üçgen AC ve CB kenarları hariç K düğümünü kesmezse şekil 2.3 de görüldüğü gibi AC ve CB kenarlarını silebilir ve AB kenarlarını ekleyebiliriz (Murasugi 1996).



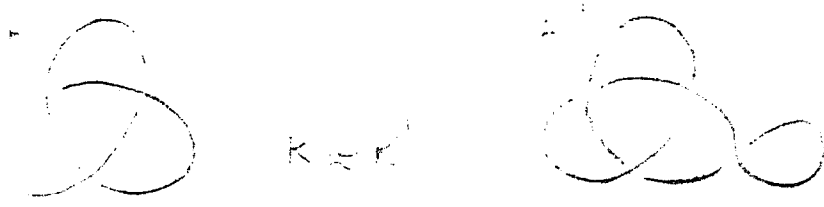
**Şekil 2.2.1.** Basit Düğüm Hareketleri (1) ve (1)'



**Şekil 2.2.2.** Basit Düğüm Hareketleri (2) ve (2)'

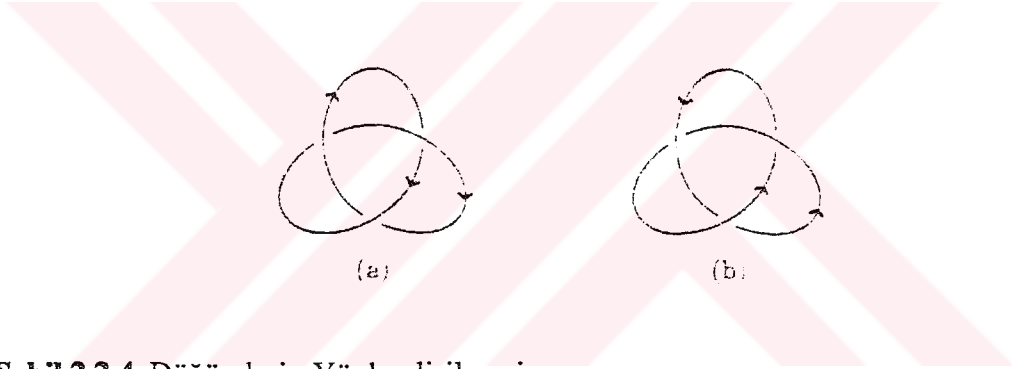
## 2.2.2 Düğümlerin Denkliği

Basit düğüm hareketlerini sonlu kez uygulayarak K düğümünden K' düğümü elde ediliyorsa K düğümünün K' düğümüne denk olduğu söylenir. Örneğin şekil 2.2.3 deki iki düğüm denktir.



**Şekil 2.2.3.** Dügümlerin Denkliği

Bir düğüm başlangıç ve bitiş noktasına sahip değildir. Bu yüzden eğriye bir yönlendirme verebiliriz. Bir düğümün yönlendirmesini bir ok vasıtasıyla göstereceğiz. Herhangi bir düğümün yönlendirmesinin iki türlü olacağı, şekil 2.2.4 de görüldüğü gibidir.



**Şekil 2.2.4.** Dügümlerin Yönlendirilmesi

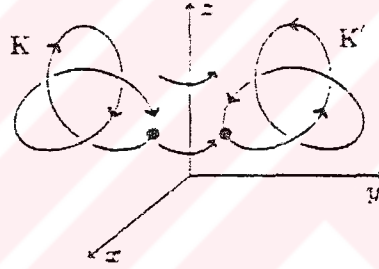
Eğer yönlendirilmiş  $K$  ve  $K'$  düğümleri, yönlendirilmiş basit düğüm hareketleri vasıtasıyla birbirlerine dönüştürülebiliyorsa  $K$  ve  $K'$  düğümlerin yönlendirmeleri korunarak denk oldukları söylenir ve  $K \cong K'$  şeklinde gösterilir (Murasugi 1996).

**Tanım:**  $f$  bir  $X$  topolojik uzayından  $Y$  topolojik uzayına bir dönüşüm olsun. Eğer  $f$  bire-bir, üzerine bir dönüşüm ise,  $f^{-1}:Y \rightarrow X$  ters dönüşümünü tanımlayabiliriz. Ayrıca hem  $f$  hem de  $f^{-1}$  sürekli dönüşümler ise, bu durumda  $X$  den  $Y$  ye  $f$  dönüşümü, homeomorfizm olarak adlandırılır (Bozhöyük 1984).

$K_1$  ve  $K_2$  iki düğüm olmak üzere,  $K_1$  i  $K_2$  ye dönüştüren  $R^3$ 'ün yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizmi varsa,  $K_1$  ve  $K_2$  nin denk olduğunu söyleriz.

$K_1$  ve  $K_2$  iki düğüm olmak üzere,  $K_1$  i  $K_2$  ye dönüştüren  $R^3$ 'ün yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizmi varsa,  $K_1$  ve  $K_2$  nin denk olduğunu söyleriz.

**Tanım:**  $R^3$  deki bir keyfi noktayı  $E$  düzlemine göre bu noktanın yansıması olan noktaya dönüştürebiliyorsak, bir  $\emptyset$  dönüşümün  $E$  düzlemine göre bir ayna görüntü (veya bir simetri) olduğunu söyleyebiliriz.  $K$  düğümü üzerinde  $\emptyset$  ayna görüntüsünün etkisiyle elde edilen  $\emptyset(K)$  görüntüsüne  $K$  nın ayna görüntüsü denir (Murasugi 1996).



**Şekil 2.2.5.** Düğümlerin Ayna Görüntüsü

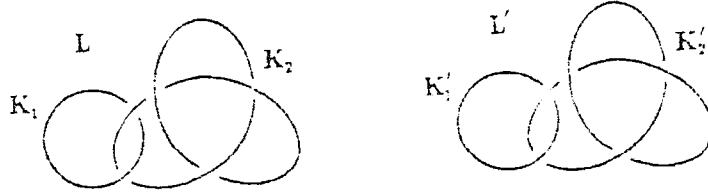
**Tanım:** Bir halka biri diğerini kesmeyen düğümlerin sonlu ve sıralanmış bir koleksiyonudur. Her bir  $K_i$  düğüme halkanın bir bileşeni adı verilir.

### 2.2.3 Halkaların Denklığı

Eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa  $L$  ve  $L'$  halkaları denktirler.

$m=n$  yani  $L$  ve  $L'$  aynı sayıda bileşene sahiptir.

1. Sonlu sayıda basit düğüm hareketini uygulayarak  $L$  ve  $L'$  ne dönüştürebiliriz. Şekil 2.2.6 deki  $L$  ve  $L'$  halkaları tamamen aynı olduğundan, bu halkalar denktir (Murasugi 1986).

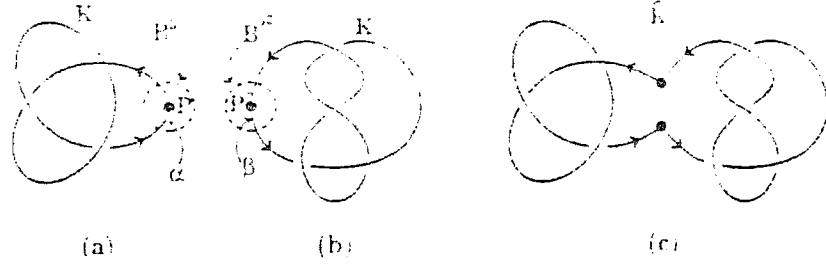


**Şekil 2.2.6.** Halkaların Denkliği

Halkaların yönlendirilmesi düğümlerin yönlendirilmesiyle aynıdır.

#### 2.2.4. Düğümlerin Bağlantılı Toplamı

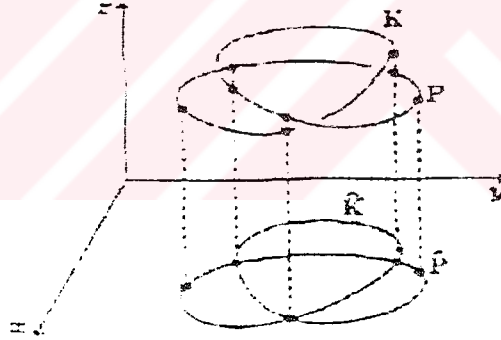
Bir 3- boyutlu  $S^3$  küresinde bir başka  $K'$  düğümü üzerinde bir  $P$  noktası seçelim.  $B'^3$  topu şekil 2.2.7. (b) de, görüldüğü gibi bir  $\beta$  aşık (1,1)- tangle,  $K$  dan elde edilir. (Tangle'ler üçüncü bölümde açıklanacak). Doğal bir şekilde  $K$  ve  $K'$  den elde edilen sırasıyla  $\alpha$  ve  $\beta$ , (1,1)- tangle'leri için bir yönlendirme tayin edilebilir.  $\bar{B}^3$ ,  $B^3$ 'ün iç noktalarını  $S^3$  den çıkararak elde edilen top olsun. Benzer olarak  $B'^3$  de  $B^3$  ün iç noktalarının  $S^3$  den çıkarılmasıyla elde edilen top olsun. Bu topların her birinin yüzeyi bir (2-boyutlu) küredir. Eğer bu iki topun sınır kümesinin yönlendirmeyi ters çeviren bir homeomorfizm uygulayarak küre boyunca bu iki topu yapıştırırsak 3- boyutlu  $S^3$  küresi elde edilmiş olur. Bu yapıştırma işlemi  $\alpha$  ve  $\beta$  nin uç noktalarını birleştirir. Böylece bu yeni yönlendirilmiş  $\hat{K}$  düğümü bu 3- boyutlu  $S^3$  küresinde biçimlenir (şekil 2.2.7 (c)). Bu işlemle meydana gelen  $\hat{K}$  düğümü  $K$  ve  $K'$  düğümünün bağlantılı toplamı olarak adlandırılır ve  $K \# K'$  ile gösterilir (Murasugi 1996).



Şekil 2.2.7. Dügümlerin Bağlantılı Toplamı

### 2.2.5. Regüler Diyagramlar

$\mathbb{R}^3$  deki  $P(x,y,z)$  noktasını Şekil 2.2.8 da görüldüğü gibi  $xy$ - düzlemindeki  $\hat{P}(x,y,0)$  noktasına izdüşüren dönüşüm  $p$  ile gösterilsin.



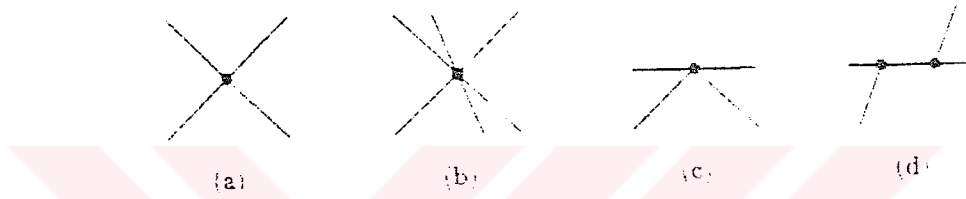
Şekil 2.2.8. Regüler İzdüşümü

Eğer  $K$  bir düğüm ise  $p(K) = \hat{K}$  ya  $K$  nın izdüşümü denir.  $\hat{K}$  birkaç arakesit noktasına sahip olduğundan düzlemde basit kapalı bir eğri değildir.  $\hat{K}$  düğümü üzerinde birkaç basit düğüm hareketi yapmak suretiyle aşağıdaki şartlar verilebilir.

1.  $\hat{K}$  sonlu sayıda arakesit noktasına sahiptir.

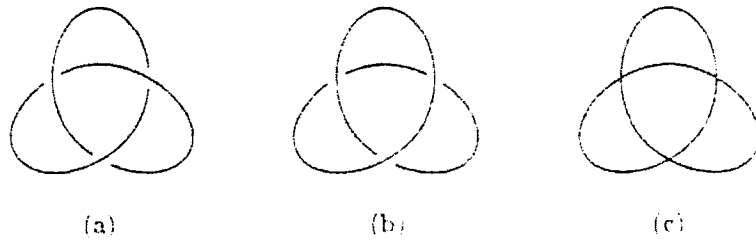
2. Eğer  $Q$ ,  $\hat{K}$ 'nin bir arakesit noktası ise  $Q$ 'nun  $p^{-1}(Q) \cap \hat{K}$  ters görüntüsü  $K$ 'de iki noktaya sahiptir. Yani  $Q$ ,  $\hat{K}$ 'nin bir katlı noktasıdır (bakınız şekil 2.2.9 (a)). Şekil 2.2.9 (b) de gösterildiği gibi ikiden fazla noktaya müsaade edilmez.

3.  $K$  düğümü poligonal olarak düşünüldüğünde  $K$ 'nin bir köşesi  $\hat{K}$ 'nin katlı noktasına dönüşmez. Şekil 2.2.9 (c) ve (d) deki örneklerin ikisinde de, bir poligonal doğru  $K$ 'nin bir köşesine izdüşmüştür. Bu durumların ikisine de müsaade edilmez.



**Şekil 2.2.9.** Katlı Noktalar

Yukarıdaki şartları sağlayan  $K$  düğümünün izdüşümünün bir regüler izdüşüm olduğu söylenir. Ancak izdüşümlerle çalışmalarda katlı noktalardan doğan bazı önemli belirsizlikler ortaya çıkar. İzdüşümün katlı noktasında düğümün kendi kendisinin altından mı üstünden mi geçtiği belli değildir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için düğümün kesim noktası işaretlenerek, katlı nokta civarında düğüm bir miktar değiştirilebilir. Böylece düğümün geçit noktasının alttan mı üstten mi olduğu konusunda orijinaline uymasa da gerçek görüntü çizilebilir. Böyle değiştirilmiş izdüşümler bir regüler diyagram olarak adlandırılır şekil 2.2.10 (a), (b).



**Şekil 2.2.10.** Regüler Diyagramlar

Bir regüler diyagram aslında düğümün üç boyutlu uzayda nasıl bulunduğunu verir. Yani düzlemde uzaysal bir çizimin verilebilmesine imkan tanır. Dahası izdüşümde kaybolan bilgiyi elde etmek için regüler diyagram kullanılır. Örneğin şekil 2.2.10 (c), şekil 2.2.10 (a) ve (b) deki farklı iki düğümün regüler izdüşümüdür (Murasugi 1996).

## 2.3 Düğüm Teorisinin Esas Problemleri

Düğüm teorisi çalışmalarında ortaya çıkan problemler esasen iki kısma bölünür. Bunlar global problemler ve lokal problemlerdir. Global problemler bütün düğümler kümesinin kendisinin nasıl davrandığını inceler. Tersine lokal problemler ise verilen bir düğümün sırf kendisi ile ilgilenir.

### 2.3.1 Global Problemler

1. Sınıflandırma Problemi: Sınıflandırma problemi, en azından tanım olarak, tam bir düğüm tablosu meydana getirmek isteyip de bir isim önerildiğinde oldukça açıklayıcıdır. Bütün bir tabloyla anlatılmak istenen önce iki düğümün asla denk olmamasının ve ikinci olarak keyfi bir düğümün bu tablodaki bazı düğümlere denk olduğunun tam olarak ne anlama gelmesidir.

2. Esas Tahmin: Esas tahmin doğrudan doğruya şu şekilde ifade edilebilir;  $K_1$  ve  $K_2$  düğümleri için, genellikle tümleyen uzayları olarak adlandırılan  $S^3 - K_1$  ve  $S^3 - K_2$ , eğer homeomorf ise bu taktirde düğümler denktir.

3. Düğüm Sabitleri: İki düğümün denk olup olmadığını tayin etmenin bir yolu olarak düğüm sabitleri çok önemli bir rol oynar. Her  $K$  düğümünü, özel bir  $p(K)$  niceliği ile işaretlediğimizi farz edelim. Eğer iki denk düğüm için işaretlediğimiz nicelik daima denkse, böyle  $p(K)$  niceliği düğüm sabiti olarak adlandırılır.

$K$  ve  $K'$  düğümleri denkse, bu durumda  $K$  düğümüne sonlu sayıda basit düğüm hareketini uygulayarak  $K$  düğümünü  $K'$  düğümüne dönüştürebilmenin mümkün olduğunu gördük. Böylece, düğüm sabiti olan  $p(K)$  niceliğinin,  $K$  düğümüne uygulanan sonlu sayıda basit düğüm hareketinden sonra değişmemesi gerekir. Örneğin bir düğümün kenar sayısının bir düğüm sabiti olmadığı bundan dolayı görülebilir (Murasugi 1996).

### 2.3.2 Lokal Problemler

1. Bir  $K$  düğümü ve onun ayna görüntüsü  $K^*$  düğümü ne zaman denktir?  $K$  ve  $K^*$  denkse  $K$ 'nin bir amphichiral (achiral) olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin şekil 2.3.1 (a) daki sağ – el trefoil düğümü ve onun ayna görüntüsü olan şekil 2.3.1 (b) deki sol – el trefoil düğümü denk olmadığı için trefoil düğümü amphichiral değildir. Öte yandan şekil 2.3.2 deki sekiz şekilli düğüm amphicherialdir.



**Şekil 2.3.1.** Trefoil Düğümler

(a)

(b)

### Şekil 2.3.2. Sekiz Şekilli Düğüm

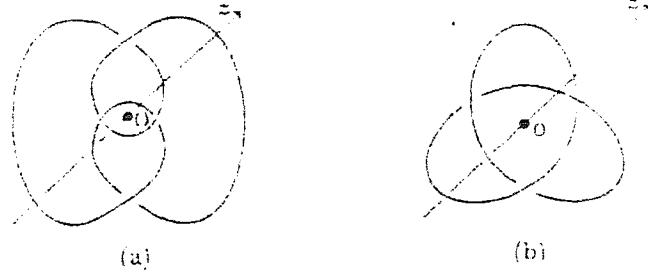
2. Verilen bir düğüm ne zaman asaldır: Şekil 2.3.2 da gösterildiği şekilde,  $K$  ve  $K'$  nin bağlantılı toplamı olan  $K \# K'$  nin regüler diyagramı  $K$  ve  $K'$  nin regüler diyagramlarını yan yana koyarak ve daha sonra onları iki paralel daire parçası vasıtasıyla bağlayarak yapabiliriz. Bu yüzden bir  $\hat{K}$  düğümü  $K$  ve  $K'$  ye ayrılabilirse o zaman  $\hat{K}$  düğümü şekil 2.3.2 da, gösterilen regüler diyagram tipine sahip olur. Üstelik bu uygulanmada bulunmasına rağmen asal olmayan düğümlerin diyagramları, genel olarak böyle bulunmadığı için bir düğümün asal olup olmadığı regüler diyagramdan çıkaramayız. Eğer bir  $K$  düğümü iki düğümün bağlantılı toplamı olarak yazılamıyorsa asaldır.

3. Bir düğüm ne zaman ters çevrilir: Zıt yönlü olan iki farklı düğümü işaretleyebiliriz. Bu düğümlerin birini  $K$  ile diğerini de  $-K$  ile gösterelim. Biz  $K$  ve  $-K$  nin denk olup olmadığını belirlemeyi istiyoruz.  $K$  ve  $-K$  denk olduğu zaman  $K$  nin ters çevrilebilir olduğu söylenir. Az sayıda geçit noktasına sahip düğümler genelde ters çevrilebilirlerdir.

4. Bir düğümün periyodu nedir?  $z$ -ekseni etrafında  $\pi$  açısıyla şekil 2.3.3 (a) daki sekiz şekilli düğümü döndürürsek, şekil orijinal şekline dönecektir. Böylece bu düğümün 2 periyoda sahip olduğu söylenebilir. Şekil 2.3.3 (b) de ki sol - el trefoil düğümü  $z$  - eksteni etrafında  $\frac{2\pi}{3}$  açısıyla döndürülürse o zaman orijinal şekle dönecektir.

Genelde, düğümün orijinal şeklini elde etmek için belirli bir eksen etrafında  $\frac{2\pi}{n}$

açısıyla döndürürsek, bu düğümün  $n$  periyoda sahip olduğunu söyleriz. Bu durumda, lokal problem verilen bir düğüm için bütün periyotları belirlemektedir (Murasugi 1996).

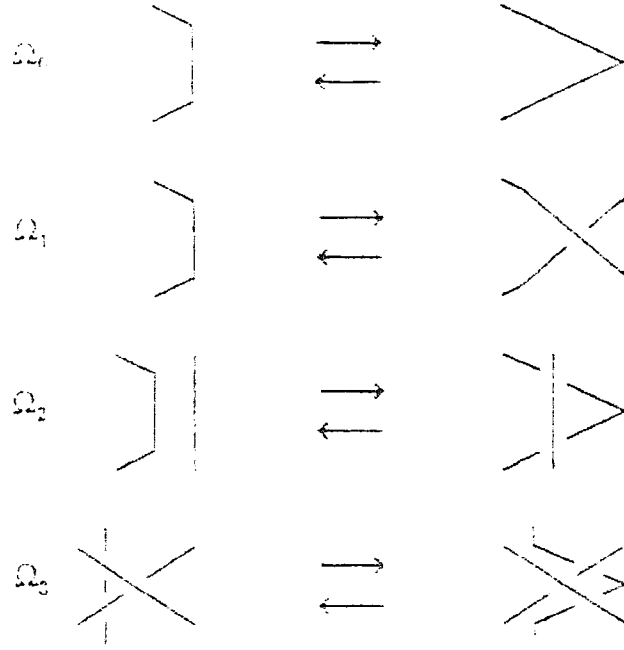


**Şekil 2.3.3.** Bir Düğümün Bir Eksen Etrafında Döndürülmesi

## 2.4 Klasik Düğüm Sabitleri

### 2.4.1 Reidemeister Hareketleri

Reidemeister düğümler (halkalar) için bir denklik bağlantısı tanımlar. İki düğüm diyagramı şekil 2.4.1 da gösterilen Reidemeister hareketleri ile birbirleri üzerine dönüştürülebiliyorsa denktir. Örneğin  $\Omega$  şekil 2.4.2 de gösterildiği gibi,  $AC \cup CB$  ile  $AB$  yi yer değiştiren regüler diyagram üzerinde bir basit düğüm hareketine karşılık gelen hareket olarak düşünülebilir.



**Şekil 2.4.1.** Reidemeister Hareketleri

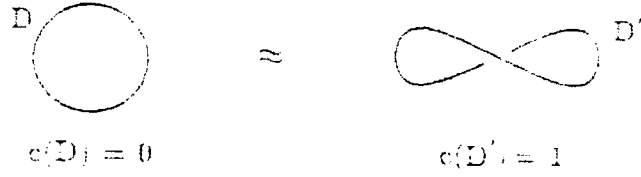


**Şekil 2.4.2.**  $\Omega_1$  Hareketi

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  ve onların terslerine Reidemeister Hareketleri denir (Burde, Zieschang 1985).

#### 2.4.2 Geçit Noktalarının Minimum Sayısı

Bir  $K$  düğümünün regüler diyagramı sonlu sayıda geçit noktasına sahiptir. Bununla beraber  $c(D)$  geçit sayısı bir düğüm sabiti değildir. Örneğin aşıkâr düğüm  $D$  ve  $D'$  diyagramları gibi farklı geçit noktaları olan iki regüler diyagrama sahiptir.



**Şekil 2.4.3.** Düğümlerin Minimum Geçit Noktalarının Sayısı

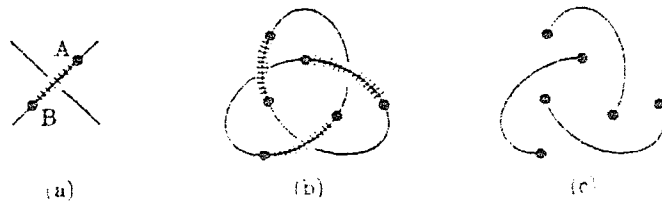
Bunun yerine  $K$  nın regüler diyagramlarını göz önüne alalım ve  $c(K)$  da tüm regüler diyagramların tümünün geçit noktalarının minimum sayısı olsun. Bu şekildeki  $c(K)$  bir düğüm sabitidir.  $K$  düğümünün tüm regüler diyagramlarının kümesi  $D$  olsun. Bir düğüm sabiti olan

$$c(K) = \min_D c(D)$$

$K$  nın geçitlerinin minimum sayısı olarak adlandırılır. Örneğin  $K$  aşık düğüm ise  $c(K) = 0$  dır (Murasugi 1996).

### 2.4.3 Köprü Sayısı

Bir  $K$  düğümünün regüler bir  $D$  diyagramının her bir geçit noktasında, geçit noktasından geçen oldukça küçük  $AB$  parçasını  $D$  den hareket ettirelim. Bu kısımları ortadan kaldırmanın sonucu poligonal eğri ile bağlantısız bir koleksiyon olur (şekil 2.4.4 (a)~(c)). Orijinal regüler diyagram  $D$  yi  $AB$  kısmını düzlem üzerinde bağlantısız poligonal eğrilerin son noktalarına birleştirdiğimizde oluşan son diyagram olarak düşünebiliriz (Murasugi 1996).



**Şekil 2.4.4.** Düğümlerin Köprü Sayısı

Bu  $AB$  parçaları düzlem üzerindeki kısımların üstünden geçtiğinden, bu parçalar köprü olarak adlandırılır. Verilen  $D$  için köprülerin sayısına köprü sayısı denir  $br(D)$  ile gösterilir.

Örneğin şekil 2.4.5 de gösterilen regüler diyagramların köprü sayısı sırasıyla,

$$br(D_1) = 3, br(D_2) = 2, br(D_3) = 2$$

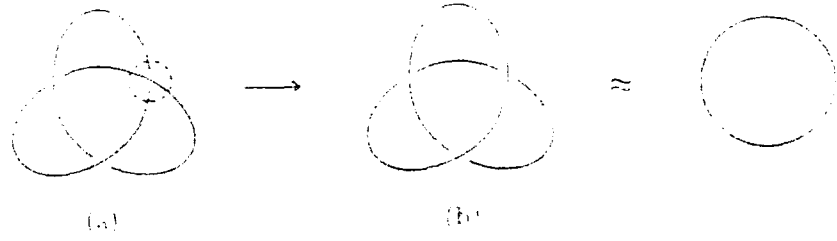
dir.



**Şekil 2.4.5.** Regüler Diyagramların Köprü Sayısı

#### 2.4.4 Düğümlememe Sayısı

Herhangi bir düğümün (veya halkanın) regüler  $D$  diyagramını,  $D$  nin birkaç geçit noktasında (bunun için Reidemeister hareketlerinin kullanımı da gerekli olabilir) alt geçit bileşenleri ile üst geçit bileşenlerini değiştirerek aşık düğümün regüler diyagramı elde edilebilir. Bu şekilde şekil 2.4.6 de görüldüğü gibi alt geçit ve üst geçit kısımlarının, geçit noktasındaki geçiş operasyonuna düğümlememe operasyonu adı verilir.

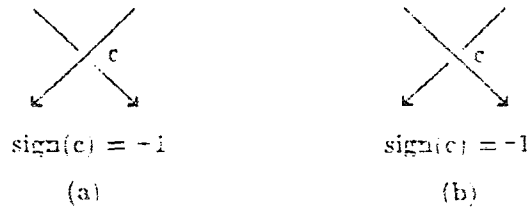


**Şekil 2.4.6.** Dügümlememe Sayısı

Şekil 2.4.6 (a) da eğer küçük bir çember içindeki alt ve üst geçit kısımları değiştirirsek aşikar düğümün regüler diyagramının elde edildiği kolayca görülebilir şekil 2.4.6 (b).

#### 2.4.5 Halkalanma Sayısı

İlk olarak yönlendirilmiş bir düğüm ya da halkanın bir regüler diyagramının her bir geçit noktasını ya 1 yada -1 ile işaretleyelim. Şekil 2.4.7 de görüldüğü gibi yönlendirilmiş bir regüler diyagramın bir  $c$  geçit noktasında iki sınıflandırmaya sahip oluruz. (b) durumunda geçit noktasına  $\text{sign}(c) = -1$  ile işaretlerken, (a) durumunda  $\text{sign}(c) = +1$  ile işaretleriz. (b) deki geçit noktasının negatif olduğu söylenirken (a) daki geçit noktasına pozitif deriz.



**Şekil 2.4.7.** Halkalanma Sayısı

Şimdi  $D$  nin iki bileşenli  $L = \{K_1, K_2\}$  halkasının yönlendirilmiş bir regüler diyagramı olduğunu farz edelim. Üstelik  $K_1$  ve  $K_2$  nin izdüşümlerinin arakesit olduğu  $D$  nin geçit noktalarının  $c_1, c_2, \dots, c_m$  olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

$$\frac{1}{2}\{sign(c_1) + sign(c_2) + \dots + sign(c_m)\}$$

ifadesi  $K_1$  ve  $K_2$  nin halkalanma sayısı olarak adlandırılır ve  $lk(K_1, K_2)$  olarak gösterilir. Örneğin şekil 2.4.8 (a) ve (b) deki  $L$  ve  $L'$  nün halkalanma sayısını hesaplayalım:



**Şekil 2.4.8.** Halkalanma Sayısının Hesabı

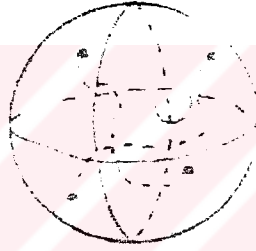
1. Sadece  $c_1, c_2, c_3, c_4$  geçit noktalarındaki işaretleri hesaplamamız gerekir. Her bir geçit noktasındaki işaret  $-1$  olduğundan,  $lk(K_1, K_2) = -2$  elde ederiz.

2. Benzer olarak  $sign(c_2) = sign(c_3) = -1$  iken  $sign(c_1) = sign(c_4) = +1$  olduğunu göstermek kolaydır (Murasugi 1996).

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1.Tangle

Bir  $B^3$ ,3- topunun sınırı olan  $S^2$  küresi üzerinde  $2n$  tane nokta yerleştirelim. Bir  $T$ ,  $(n,n)$  tangle'si,  $B^3$  içinde bu  $2n$  noktaya bağlanmış hiçbiri diğerini kesmeyen eğriler ile teşkil edilmiştir. Şekil 3.1.1 de görüldüğü gibi (aslında bu eğriler poligonlarda olabilir).

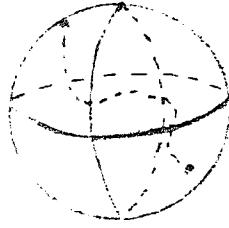


Şekil 3.1.1. (1,1)-Tangle

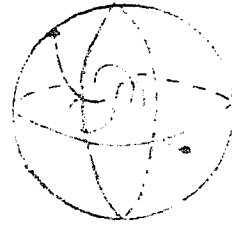
Bir tangle'yi açıkça ifade etmek için  $(B_3, T)$  notasyonunu kullanacağız. Bununla beraber çoğu zaman bir tangle basitçe  $T$  ile gösterilir (Murasugi 1996).

**Tanım:** Eğer  $S^2$  üzerinde iki nokta işaretlenmiş ve bu iki nokta bir poligonal eğri ile birleştirilmiş ise, buna  $(1,1)$  – tangle denir. Şekil 3.1.2 (a)

Bu  $(1,1)$  – tangle'ye aşikar tangle denir. Eğer  $(1,1)$  – tangle şekil 3.1.2 (b) deki gibi ise, bu tangle aşikar tangle değildir.



(a)



(b)

**Şekil 3.1.2.** Aşıkâr (1,1) - Tangle'ler

### 3.1.1. Tangle'lerin regüler diyagramı

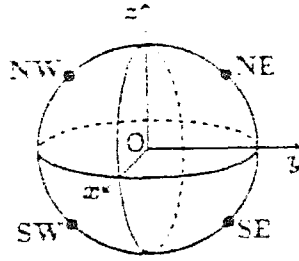
Şekil 3.1.2 de görüldüğü gibi  $S^2$  küresi üzerinde NW,SW,SE noktalarını işaretleyelim.

Hatta bu noktaları  $R^3$  içinde bir  $S^2$  küresi üzerinde

$$NE = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad NW = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

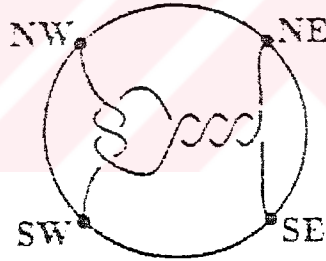
$$SE = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad SW = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak şekilde işaretleyebiliriz.



**Şekil 3.1.3.** Bir Küre Üzerinde Dört Noktanın Gösterilişi

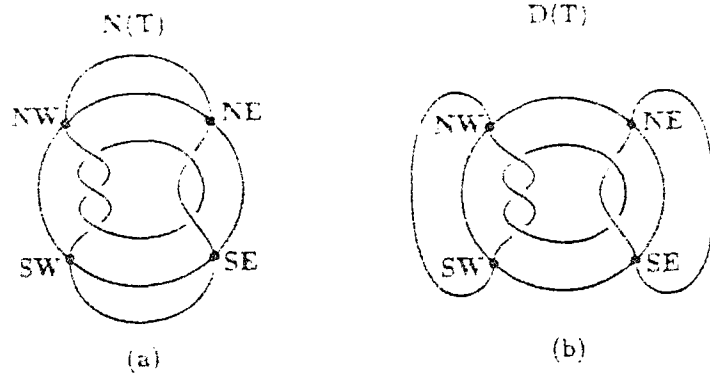
yz- düzleminde bulunan bu dört noktayı  $B^3$  içindeki iki poligonal eğrinin uç noktaları olacak şekilde bu eğrilerle birleştirelim. Sonra elde edilen bu tangle'nin yz – düzlemine izdüşümünü, bir düğümde olduğu gibi alırsak, bu tangle'nin regüler diyagramını bulmuş oluruz şekil 3.1.4.



**Şekil 3.1.4.** Bir Tangle'nin Regüler Diyagramı

Şekil 3.1.4 de görülen tangle'nin regüler diyagramında NW ve NE ile SW ve SE noktalarını şekil 3.1.5 (a) da olduğu gibi  $B^3$  ün dışında basit bir eğriye birleştirelim, tangle'nin  $N(T)$  ile gösterilen numerator'unu elde etmiş oluruz.

Benzer şekilde eğer bu işlemi,  $B^3$  dışında, NW ile SW ve NE ile SE noktalarını basit eğrilerle birleştirelim şekil 3.1.5 (b) de olduğu gibi tangle'nin  $DT$  ile gösterilen denominator'unu elde etmiş oluruz (Murasugi 1996).

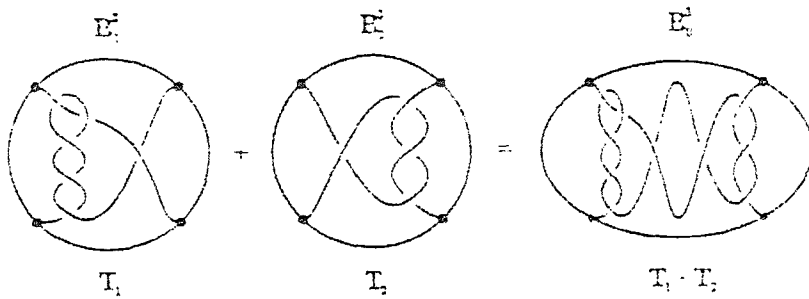


**Şekil 3.1.5.** Bir Tangle'nin Numeratör'ü ve Denominatör'ü

İki tangle'nin denkliği tanımı iki düğümün denkliği tanımı gibidir.

### 3.1.2. İki tangle'nin toplamı

Şekil 3.1.6 da görüldüğü gibi  $B_1^3$  topu içindeki  $T_1$  tangle ile,  $B_2^3$  topu içindeki  $T_2$  tangle yan yana getirilir.  $T_1$  tangle'nin NE uç noktası  $T_2$  tangle'nin NW uç noktasına,  $T_1$  tangle'nin SE uç noktasında  $T_2$  tangle'nin SW uç noktasına birleştirilir ve böylece iki tangle'yi kapsayan  $B^3$  topu içinde yeni bir tangle bulunmuş olur. Bu yeni tangle'ye  $T_1$  ve  $T_2$  Tangle'lerinin toplamı denir. ve  $T_1+T_2$  ile gösterilir.



**Şekil 3.1.6.** Tangle'lerin Toplamı

Tangle'lerin toplama, düğümlerin toplama gibi görünse bile, gözardı edilemeyecek farklılıklar vardır (Murasugi 1996). Bunlar aşağıdaki örnek ve alıştırmada görülür.

**Örnek:**  $N(T_1), T_1$  in numaratorü ve  $N(T_2)$  de  $T_2$  nin numaratorü olsun.  $N(T_1)$  ve  $N(T_2)$  nin her ikisi de aşikar olmayan düğüm olsa bile  $N(T_1 + T_2)$  nin aşikar düğüm olma ihtimali oldukça kuvvetlidir.

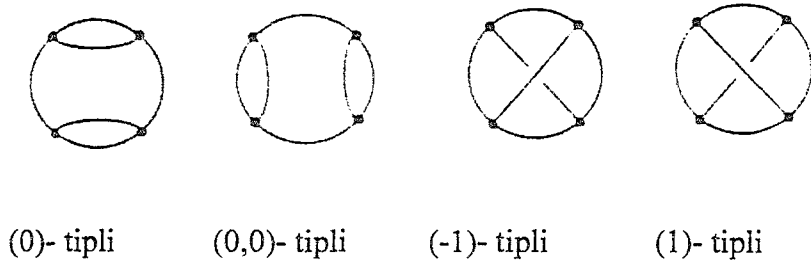
Bu rasyonel tangle'ler için her zaman olur.

**Alıştırma:** Şekil 3.1.6 daki  $N(T_1)$  ve  $N(T_2)$  düğümlerinin aşikar düğüm olmadığı halde  $N(T_1 + T_2)$  nin aşikar düğüm olduğunu gösteriniz.

Yukarıdaki örnek ve alıştırma (Murasugi 1996)

### 3.2. Aşikar Tangle'ler (rasyonel tangle'ler)

Şekil 3.2.1 deki basit tangle'leri göz önüne alalım. Soldan başlayarak sırasıyla (0)-tipli, (0,0)- tipli, (-1)-tipli, (1)-tipli tangle'ler diyeceğiz.



**Şekil 3.2.1.** Rasyonel Tangle'ler

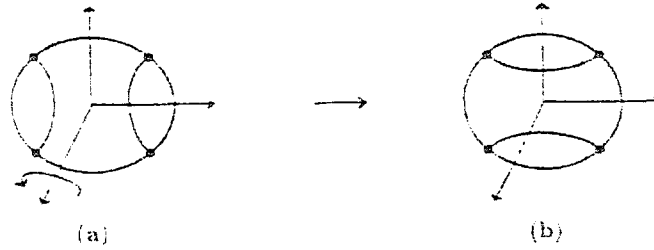
(0,0)- tipli tangle'sine çoğu zaman  $(\infty)$ - tipli tangle denir. Topluca, bu tangle'lere istisnai tangle'ler denir (Murasugi 1996).

**Alıştırma:** İstisnai tangle'lerin numaratör ve denominatorü olan düğümleri belirtiniz.

Eğer, kendimizi sadece (1,1)- tangle'ine kısıtlarsak (1,1)- tangle'nin bir aşikar tangle olacağı açıktır. Bununla beraber, bir aşikar (2,2)- tangle'ini düşünmeden bunu söyleme tamamen doğru değildir. Örneğin, istisnai tangle'lerin hepsi “aşikar tangle”dir diyebiliriz. Ancak bu aşikar (2,2)- tangle'lerin mümkün olan hepsini kapsamaz. Böylece, aşikar tangle'nin bir formal tanımına ihtiyaç duyarız.

**Tanım:**  $f$  nin bir homeomorfizm olduğunu farz edelim.  $B^3$  topunu kendi üzerine,  $\{NW, NE, SW, SE\}$  dört nokta kümesinde kendi üzerine dönüştürsün. Fakat özdeşlik dönüşümü olmasına gerek yoktur. (Yani  $f$  nin NW'yi NW'ye dönüştürmesine gerek yoktur). Bu durumda, aşikar tangle, bu  $f$  homeomorfizmi altında, (0,0)- tangle'nin bir görüntüsüdür.

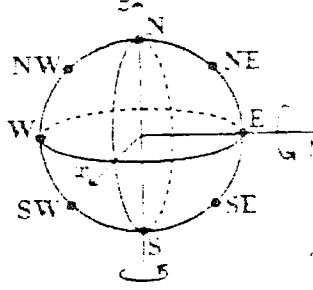
**Örnek:** Eğer şekil 3.2.2 de olduğu gibi,  $R^3$  x- ekseni etrafında  $\frac{\pi}{2}$  açısı kadar döndürülürse (0,0)- tipli T(0,0)- tangle, (0)- tipli T(0)- tangle'ye dönüşür.



**Şekil 3.2.2.** Bir Rasyonel Tangle'nin  $\frac{\pi}{2}$  Kadar Döndürülmesi

Bununla beraber böyle “aşikar” olanlar sadece yukarıda olduğu gibi aşikar tangle'ler değildir. Aslında böyle homeomorfizmler çoktur. Aşağıdaki iki örnek bunu en iyi şekilde karakterize eder. Birincisi, z- ekseni etrafında küre döndürülsün. Ancak, küre

nin kuzey yarım küre ve güney kutup noktası öyle bir dönme yapar ki bu durumda SE ve SW yer değişirler.



**Şekil 3.2.3.** Kürenin z ve y Eksenleri Etrafında Döndürülmesi

İkincisi, kürenin y- ekseni etrafında döndürüldüğünü düşünelim. Ancak, bu durumda, batı yarım küre ve ekvator üzerindeki  $(0,1,0)$  noktası sabit kalsın. Bu durumda doğu yarım küre bir dönme yapar ve NE, SE noktaları yer değişir (şekil 3.2.3). Önceki dönme vertical (dikey) dönme (twist), sonraki dönme de horizontal (yatay) dönme (twist) adını vereceğiz.

Daha ileri gidilerek dönmelere bir yön verebiliriz. Bir vertical twist, pozitif yöndeki bir dönme sağ dönme, [şekil 3.2.4 (a)] bir horizontal dönme için ise, bir pozitif dönme bir sol dönme deriz [şekil 3.2.4 (b)]. Sırasıyla bu dönmelerin terslerine negatif dönmeler denir.



**Şekil 3.2.4.** Pozitif ve Negatif Dönmeler

**Örnek:**  $T(0,0)$  tangle'inde 3-fold (bükme) vertical twist ve ardından (-4)- fold horizontal twist uygulanırsa şekil 3.1.3 deki tangle'yi elde ederiz. Buda bir aşikar tangle'dir. Özellikle  $T(1)$  ve  $T(-1)$  tangle'leri aşikar tangle'lerdir.

**Örnek:** Önce  $T(0,0)$  tangle'yi  $T(0)$  tangle'ye göndererek ve sonra 2- horizontal twist, 3 vertical twist ve son olarak 1- horizontal twist icra etmek suretiyle şekil 3.1.5 deki  $T_1$  tangle'yi elde edebiliriz. Bu sebepten  $T_1$  de bir aşikar tangle'dir.

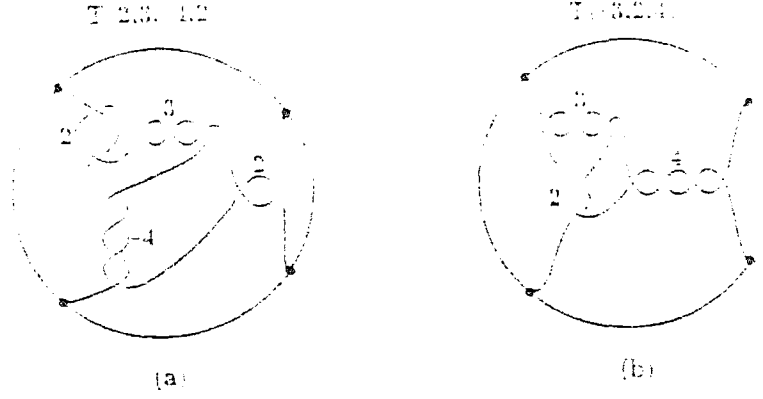
Vertical ve horizontal hareketlere bağlı olarak elde ettiğimiz aşikar tangle'leri aşağıdaki önerme ile formüle etmek mümkündür.

Yukarıdaki alıştırma ve örnekler (Murasugi 1996)

**Önerme:** Bir aşikar tangle,  $T(0)$  veya  $T(0,0)$  tangle'lerine vertical ve horizontal twist'lerin sonlu bir dizisini tatbik etmek suretiyle elde edilebilir.

Yukarıdaki önerme aşikar tangle'lerin kesin olarak nasıl belirtileceğini birkaç vertical ve horizontal twist'i peşpeşe yapmamıza bağlı olarak görebiliriz.

Peşpeşe yapılan twistleri  $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  ile belirtilsin ve bu işlemin nasıl olduğunu biraz daha detaylı açıklayalım.



**Şekil 3.2.5.** Yatay ve Dikey Dönmeler Sonunda Elde Edilen İki Tangle Örneği

Eğer  $n$  tek ise, ilk olarak  $T(0)$ 'a  $\alpha_1$  horizontal twistini uygulayarak uygun bir tangle elde edebiliriz; sonra  $\alpha_2$  vertical twistini, peşine  $\alpha_3$  horizontal twistini ve böyle devam ederek en sonunda  $\alpha_n$  inci twist horizontal twist oluncaya kadar sırasıyla bir horizontal bir vertical twisti elde ederiz. Şekil 3.2.5 (b) de bir örnek verilmiştir.

Eğer  $n$  çift ise, ilk olarak  $T(0,0)$  üzerine bir  $\alpha_1$  vertical twistini, sonra  $\alpha_2$  horizontal twistini, böyle devam ederek en son  $\alpha_n$  vertical twistini yaparız. Bununla ilgili örnek şekil 3.2.5 (a) da verilmiştir (Murasugi 1996).

**Alıştırma:**  $T(2, -3, 0, 2, 1, -2)$  ve  $T(2, -1, 1, -2)$  tangle'lerinin denk olduğunu gösteriniz. Sayılar teorisinin iyi bir yanı, bir reel sayının sürekli bir kesir olarak belirtilmiş olmasıdır. Böyle bir sürekli kesir örneği

$$2 + \frac{3}{4 + \frac{2}{5}}$$

dir. Kesirden, belirttiği reel sayıyı en son kesirden başlayarak hesaplayabiliriz.

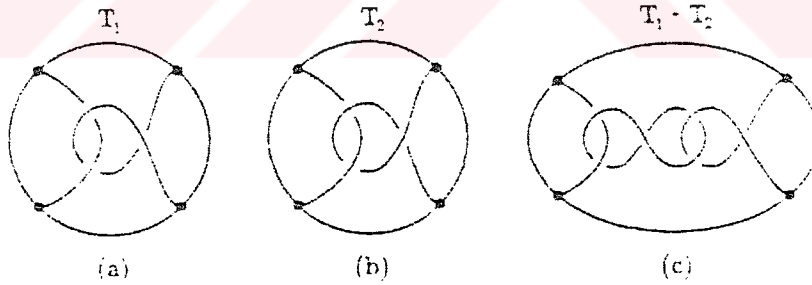
$$2 + \frac{3}{4 + \frac{2}{5}} = 2 + \frac{3}{\frac{22}{5}} = 2 + \frac{15}{22} = \frac{59}{22}$$

olur.

**Teorem:** Bütün rasyonel sayılar kümesi ve aşıkâr tangle'lerin denklik sınıfları arasında 1-1 bir tekabül vardır. Başka bir ifadeyle eğer,  $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  ve  $T(b_1, b_2, \dots, b_n)$  tangle'leri denk iseler, bu durumda onların  $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1]$  ve  $[b_m, b_{m-1}, \dots, b_2, b_1]$  sürekli kesir ifadeleri birbirlerine eşittir. Bu teoremin terside doğrudur.

İki rasyonel tangle'nin toplamının rasyonel tangle olması gerekmez.

Şekil 3.2.6 (c) de iki rasyonel tangle'nin toplamıdır, ancak kendisi bir rasyonel tangle değildir.



**Şekil 3.2.6.** İki Rasyonel Tangle'nin Toplamının Rasyonel Olmadığının Gösterimi

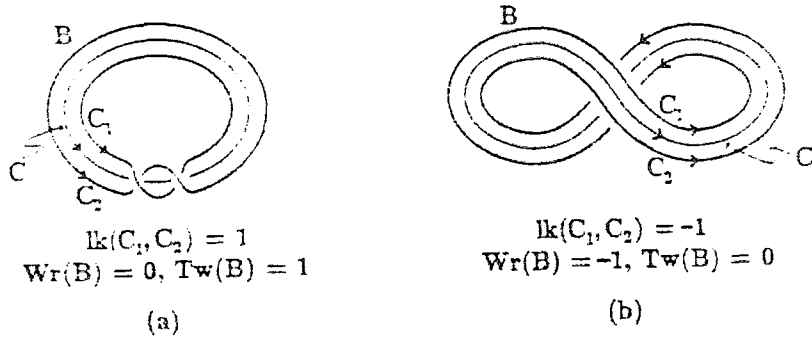
## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

### 4.1. DNA

**Tanım:** DNA bütün hücrelerin genetik materyalidir, hücrenel moleküler ile ilgili kodlanmış bilgileri içerir. DNA çoğunlukla doğrusal bir eksen boyunca iki karşılıklı kenarın oluşturduğu bir çift sarmal yapıya sahiptir. Bu DNA için tek olası yapı tanımı değildir. Bazı durumlarda, DNA'nın ya tek bir kenar ya da bir çift sarmalın içinde sarılmış iki kenardan oluşan bir halka şeklinde olduğu bulunmuştur. Bu tek kenar DNA, düğümlenmiş olabilir, yani bu bölüme kadar açıkladığımız düğümler ve halkalar bir dereceye kadar soyut idi ama DNA'yı oluşturan bu düğümler ve halkalar elektron mikroskobu altında görülebilirler (Hesieh 1983).

DNA molekülünün taşıdığı bilgi, yani nükleotit taban çiftlerinin düzeni, onun nasıl düğümlendiği ile ilgili değildir. Böylece, düğümü moleküler biyolojide kullanışlı bir şey olarak gözden kaçırabiliriz. Bu sebepten son araştırmalar DNA molekülünün düğüm tipinin, hücredeki DNA molekülünün normal fonksiyonu üzerinde önemli etkisi olduğunu göstermiştir. Bu yüzden düğüm teorisi tekniklerini kullanmak, DNA molekülünün yapısını daha iyi anlamak için, mümkün olabilir.

**Tanım:** DNA molekülünün matematiksel olarak tanımlarsak; DNA molekülü için matematiksel model genellikle ince, uzun ve dar merkezli bükülmüş bir şerit halindedir. şekil 4.1.1 şekli  $S^1 \times [-1,1]$ 'e homeomorftur fakat Möbius şeriti değildir.



**Şekil 4.1.1.**  $C_1$  ve  $C_2$  Eğrilerinin Halkalanması

$C_1$  ve  $C_2$  eğrileri, kenarlarını gösteren kapalı DNA'yı temsil eden B şeridinin kenarlarını oluşturur. B'nin eksenini oluşturan C eğrisine bir sabit yön verebiliriz. (yani: merkez eğri  $S^1 \times \{0\}$ ). C üzerindeki bu yönlendirme, B'nin sınırları olan  $C_1$  ve  $C_2$  içinde aynı yönlendirmeleri içerir. Aslında  $C_1$  ve  $C_2$  arasındaki halkalanma sayısı  $[lk(C_1, C_2)]$  değişmez ve bu değişim DNA molekülü üzerinde yapısal önemli bir etkiye sahip olur. Örneğin, çift kenarlı bir DNA'nın halkalanma sayısını azaltırsak bunun DNA molekülünden bir bükülme ve halkalanmasına neden olacağı bilinir hem bükülme hem de halkalanma olayına birlikte Supercoiling adı verilir. DNA molekülünün halkalanma sayısındaki olası bu azalma DNA molekülündeki bir topoizomor hareketi ile oluşturulabilir.

DNA kenarları üzerindeki yönlendirmeler karşılıklı olarak terstir. Bu yüzden  $C_1$  ve  $C_2$  ye birbirine tamamen zıt yönlendirmeler vermeliyiz.  $C_1$  ve  $C_2$  den oluşan bir halka durumunda biyolojide, DNA molekülü üzerinde tanımlanmış halkalanma sayısı, matematiksel modelden faydalanılarak hesaplanmış halkalanma sayısı ile aynıdır. Rakamsal bir açıdan da bakıldığında bir uyumsuzluk görülmez (Hesieh 1983).

**Tanım:** C eksenini boyunca B şeridinin sahip olduğu bükülmelerinin sayısına "bükülme sayısı" adı verilir ve  $Tw(B)$  şeklinde gösterilir.

İki şeridin birbiri etrafında dönmesine kıvrılma sayısı denir. Bu  $wr(B)$  ile gösterilir. Bu  $wr(B)$  ve  $Tw(B)$  sayıları sabittir. DNA molekülünden elde edilen düğüm yada halkanın sabitleri değil ancak uzaydaki bir yüzey olarak B şeridinin diferansiyel geometri ile

ilgili sabitleridir. (Eğer C bir düzlemsel eğri ise  $W_r(B)=0$  olur.  $W_r(B)$  ve  $T_w(B)$  sayılarının tamsayı olmaları gerekmez). Bu sabitler;

$$lk(C_1, C_2) = T_w(B) + W_r(B)$$

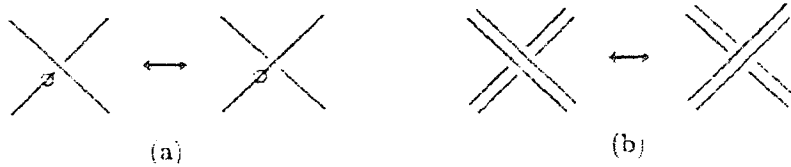
formülü ile gösterilirler (Dean, Stasiak, 1985).

**Sonuç:** DNA molekülünün yan kenarlarından birinde bir kesme yapıştırma suretiyle birkaç dönme yapıldığında çift katlı heliks çözüldüğü zaman, DNA molekülünün çift katlı heliksinin ekseni bir helikse bükülür. Böylece DNA supercoling'e neden olur.

**Tanım:** Kimyasal olarak, aynı kimyevi oluşuma fakat farklı yapıya sahip iki molekülü izomar adı verilir. Buradan taban çiftleri aynı fakat halkalanma sayıları farklı olan iki DNA molekülüne izomar adı verildiği anlaşılır.

Halkalanma sayılarının farklılığından bu iki DNA molekülü topolojik olarak denk değildirler. Böylece denk olmayan DNA molekülleri topoizomar olarak adlandırılır. Halkalanma sayısını değiştiren enzime topoisomerase adı verilir (Roca, Berger 1983).

Mutasyon süreci topoisomerase'ye bağlı olarak basit terimlerle aşağıdaki gibi açıklanabilir: Önce DNA'nın bir kenarı herhangi bir yerinden kesilir, sonra DNA'nın bir parçası bu kesikten geçer ve sonuç olarak DNA kendi kendine bağlanır.



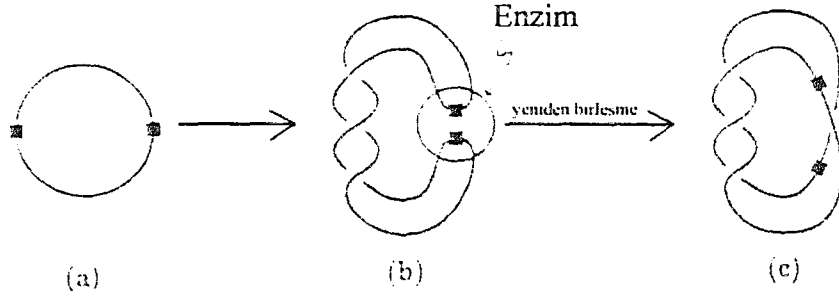
**Şekil 4.1.2.** DNA Molekülündeki Topoizomerase Hareketleri

Şekil 4.1.2 de DNA molekülü üzerindeki topoisomerase hareketine dair iki örnek verildi. Kenar üzerinde kesik yapılan yer “o” işareti ile belirtilmiştir. Şekil 4.1.2 (a),(b) şekilleri gayet anlaşılırdır. Şekil 4.1.2 (a) daki tek kenar topoisomerase’sine bağlı olarak sadece bir kesik taşır ve DNA bu kesikten geçerek kendini yeniden bağlar ki buna 1. Tip topoizomar adı verilir. Şekil 4.1.2 (b) de yine bir topoizomora bağlı olarak DNA nın çift kenarında oluşan kesik bir çift kenar DNA nın içinden geçip yeniden bağlanmasını sağlar ki buna da 2. Tip topoizomar adı verilir. Böyle bir topoizomar bulma bakteriden bir insana, büyük küçük her organizmada bulunduğu oldukça açıktır.

#### **4.2. Özel Alan (site-specific) Yeniden Birleşme**

Özel alan yeniden birleşme bölgesel bir işlemdir. Bir DNA molekülü üzerindeki yeniden birleştirme işi hem DNA molekülünün bir parçasını kendi içerisinde başka bir yere taşımak ya da yabancı bir DNA molekülü parçasını onun içine taşımaktır. Sonuç olarak gen kendi kendisinin şeklini değiştirir. Bizim birer örnek olduğumuz oldukça gelişmiş organizmalarda bu çeşitli antikör (kana dışardan giren maddeleri karşılayan madde) DNA molekülünün özel alan yeniden birleşmesi sayesinde oluşur.

Özel alan yeniden birleşmesi asıl sürecini anlamak oldukça kolaydır. Önce, farklı ya da aynı DNA molekülü üzerinde iki nokta işaretlenir, bu işaretleme rastgele olabileceği gibi bir düzen içinde de olabilir. Bu iki noktadan tutularak DNA bükülür ve iki nokta karşı karşıya getirilir. (enzim vasıtasıyla) Noktaların bulunduğu yerlerden DNA kesilerek karşılıklı kollar şekil 4.2.1 (c) de görüldüğü gibi yeniden birleştirilir. Böylece yeniden birleşme olayı gerçekleşmiş olur (Hesieh 1983).

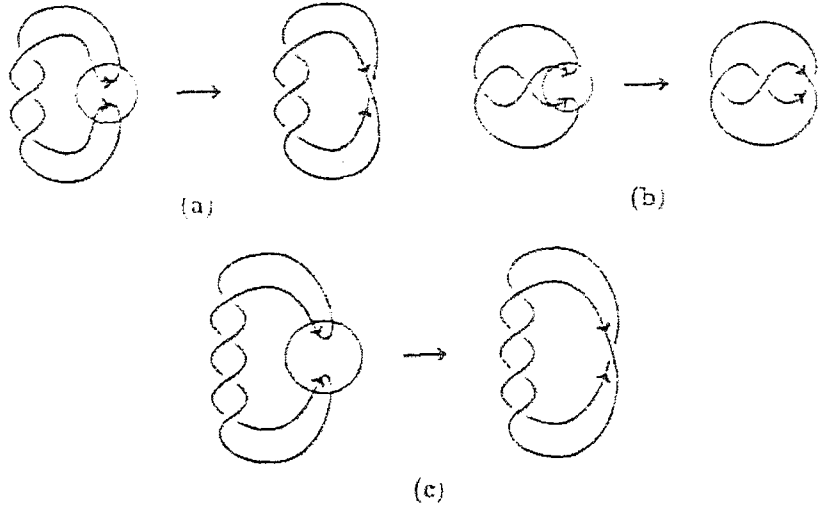


**Şekil 4.2.1.** Enzim Vasıtasıyla DNA Molekülün İki Şeridinin Birbirine Bağlanması

**Tanım:** Yeniden birleşme hareketinden önce, DNA molekülüne (aşılma dönemi) mayalanma denir. Yeniden birleşme işleminden sonra DNA molekülüne olgunlaşma (ürün) denir. DNA molekülünün başlangıçtan iki parçaya bölünmesine kadar geçen işlemine bükülme işlemi adı verilir.

Şekil 4.2.1 (a) ve (b) mayalanma ile yeniden birleşme işlemi devam ederken ortaya çıkan birleşme komplekse, synaptik kompleks (kromazonların birleşmesi karmaşığı) adı verilir. Şekil 4.2.1 (b) Synaptik kompleks içinde, DNA molekülünün küçük parçaları üzerinde yönlendirmeler yapabiliriz (şekil 4.2.2 (a),(b) de daire içinde görüldüğü gibi).

Eğer DNA molekülü üzerindeki yönlendirmeler ve bu lokal yönlendirmelerin sebep olduğu yönlendirmeye direct repeat (doğrudan tekrar) denir. Şekil 4.2.2 (a). Diğer taraftan uyumsuzlarsa o zaman bu düzenlemeye inverted repeat (ters-düz tekrar) denir şekil 4.2.2.(c) (Dean, Stasiak 1985).



**Şekil 4.2.2.** Enzim Yoluyla DNA Molekülünün İki Şeridinin Farkı Üç Şekilde Bağlanması

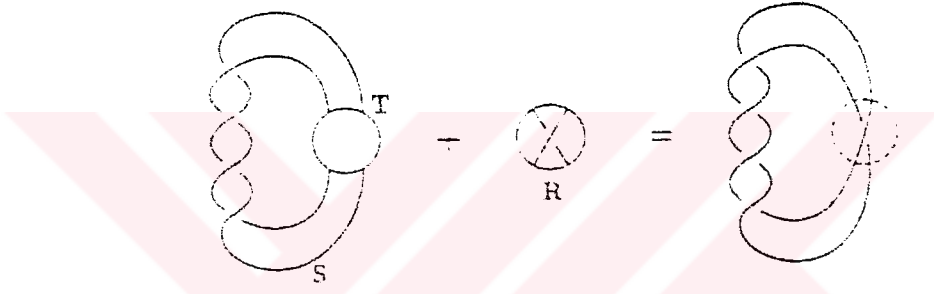
**Sonuç:** 1. Eğer mayalanma (çoğalma) bir DNA düğümü ise ve düzenleme doğrudan tekrar ise, o zaman ürün 2 bileşenli DNA halkaları olur. Şekil 4.2.2 (a). Eğer düzenleme ters-düz tekrar ise o zaman ürün DNA düğümü olur şekil 4.2.2 (c).

2. Eğer mayalanma (çoğalma) bir DNA halkası ise (örneğin, iki DNA molekülü dolaşmış) o zaman yeniden birleşmeden sonra ürün DNA düğümü olur şekil 4.2.2 (b).

#### 4.2.1. Özel Alan Yeniden Birleşme İçin Bir Model

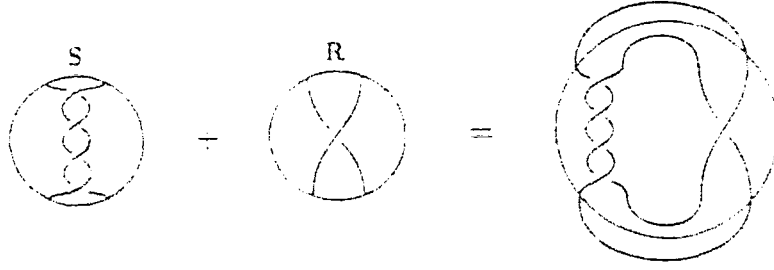
**Önerme:** 1. Aşık düğüm çoğalmalarının özel-alan yeniden birleşmesi ile elde edilen ürünlerin çoğu rasyonel düğümlerdir (ya da halkalar) Yani 2 köprü düğümler veya halkalardır.

2. Matematiksel olarak 3 top içindeki, bir enzim ile oluşturulmuş ters-düz kompleksin parçası bir (2,2) tangle'dir (şekil 4.2.3).



**Şekil 4.2.3.** 3- Top İçindeki Bir Enzim İle Oluşturulmuş Ters Düz Kompleks (2,2) - Tangle

Bu yüzden, sonuç bir (2,2)- tangle'nin diğer bir (2,2)- tangle ile yer değiştirmesidir. Örneğin Şekil 4.2.3 de gösterilen T çemberi ile (2,2)- tangle bir çarpımı göstermek için R tangle ile yer değiştirmiştir. Matematiksel açıdan içeri dışarı; dışarı içeri olabilir. Matematiksel olarak S'nin T içinde bir (2,2)-tangle olarak değerlendirilmesi oldukça mantıklıdır. S ve R nin toplamının sayısı bir sonuç olarak ortaya çıkar.

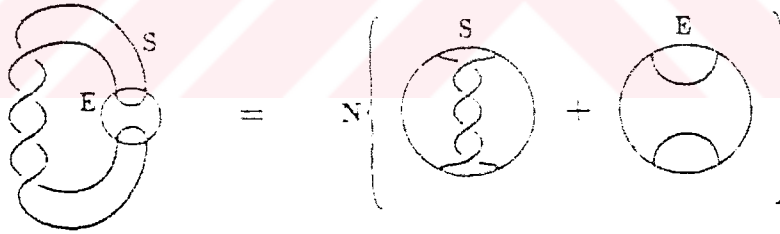


**Şekil 4.2.4.** S ve R Tangle'lerin Toplamı

Böylece aşağıdaki eşitlik oluşur:

$$N(S+R) = \text{Sonuç} \quad (4.2.1)$$

Çoğalma, E ve S nin toplam sayısı olduğundan, çoğalmayı iç tangle E ve dış tangle S ye bölebiliriz.



**Şekil 4.2.5.** Bir Tangle'den İki Tangle'nin Oluşu

Böylece şu eşitlik oluşur:

$$N(S+E) = \text{Çoğalma} \quad (4.2.2)$$

(Wang, 1982)

Eğer çoğalma ve sonucu gözlemlenmek mümkün ise o zaman durum (2) ve (3) olası eşitliklerinden S, E ve R olmak üzere üç bölüme ayrılabilir. Matematiksel olarak, sadece iki denklem ve üç bilinmeyen olduğu için daha fazla varsayım kurmadan bu bilinmeyenleri tanımlamak mümkün olmaz.

Böylece, deneysel sonuçlara geri dönerek gelişim kaydetmek zorundayız. Son olarak aşağıdakiler gözlemlenmiştir.

**Önerme:** Enzimin etkisi, yani, E tangle'den R tangle'ye geçmek için bu enzim vasıtasıyla oluşan değişme sadece orijinal enzime bağlıdır. Böylece değişim pozisyona, biçimine ve çoğalmanın boyutuna bağlı değildir.

Herbir yeniden birleşme için yukarıda olduğu gibi bir olası eşitlik elde ederiz.

4.2.5. Önermeden dolayı hiçbir yeni bilinmeyen olmayacak, bilinmeyen daima R olacaktır. Böylece denklemlerin sayısı çoğalmakla beraber, bilinmeyen sayısı sabit kalır. Matematiksel olarak bunun anlamı şudur: Ortak denklemleri çözmeye ihtimali vardır. Deneysel gözlemlerden çıkan başka bir kabulde, özel-alan yeniden birleşme tekrarı tangle'lerin toplamı olarak belirtilmiş olabileceğidir.

**Önerme:** Özel-alan yeniden birleşmelerinin bir serisinin sonucu tangle'lerin toplamının bir sayısı olarak belirtilmiş olabilir. Yani sonuç

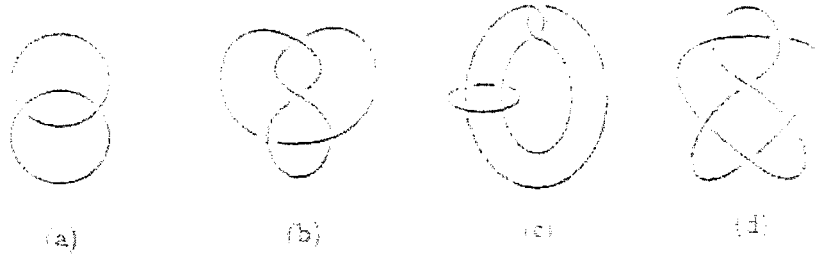
$$N(S+R+R+ \dots + R) \quad (4.2.3)$$

formundadır (Wang 1982).

### 4.3. Tn3 Resolvase Yoluyla Yeniden Birleşme

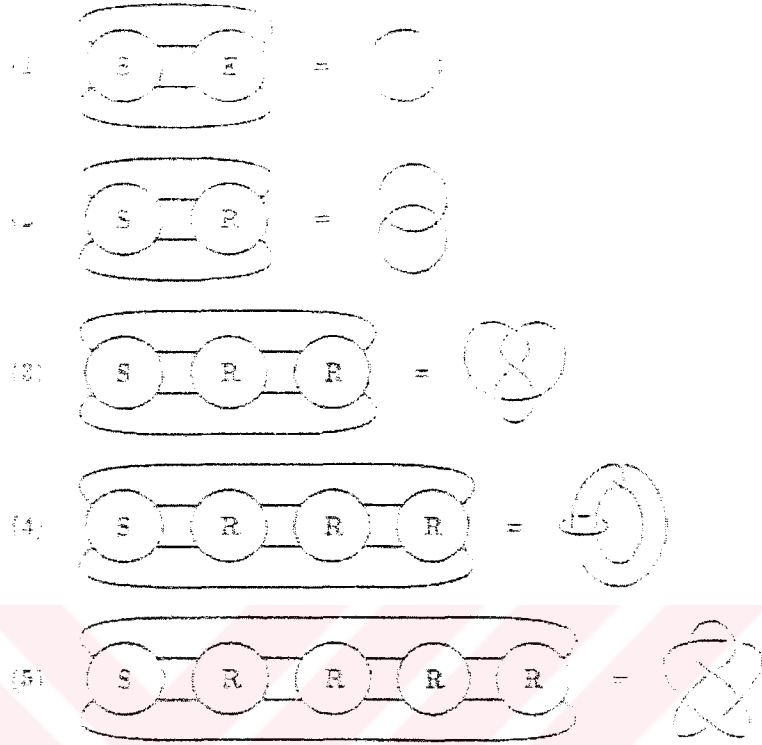
Tn3 öyle bir enzimidirki, o direkt tekrarlanmış yeniden birleşen bölgeler ile, mayalanmış bir DNA çember üzerinde özel-alan yeniden birleşmeleri arasında bir katalizör (çabuklaştıran) vazifesi görür. Mayalanmış DNA çemberi üzerinde bu Tn3 resolvase olduğu zaman, biz ona supercolid ve düğümlenmemiş deriz, ortaya çıkan sonuç bir halka olur.

Bir çok durumda, bu halka şekil 4.3.1 (a) da gösterilen Hopy halkasıdır. Eğer DNA molekülünün bir yönlendirmesi söz konusu ise, o zaman DNA molekülünün halkalanma sayısı -1 olarak düşünülebilir.



**Şekil 4.3.1.** Tn3 Resolvase Hareketinin Sonuçları

Eğer resolvase bir ileri yeniden birleşmeye sebebiyet verirse, o zaman ardından çıkacak sonuç 8 şekilli düğüm olacaktır. Şekil 4.3.1 (b). Böyle devam ederek, bir sonraki yeniden birleşme whitehead halkasını üretir. Şekil 4.3.1 (c). Tn3 resolvase yoluyla elde edilmiş yeniden birleşme işlemlerinin uygunluğu deneysel olarak gösterilmiştir. Dikkatli bir gözlem ile 4. yeniden birleşme işleminin sonucunda bir düğüm olduğu gösterilmiştir. Şekil 4.3.1 (d). Bununla beraber S,E ve R orjinallerini bulmak için, bu 4. yeniden birleşme işleminin gereksiz olduğunu göstereceğiz ve sadece ilerde oluşturacağımız model için bunu bir kontrol aracı olarak kullanmış olacağız. Böylece önermelerinin doğruluğunu kabul ederek şekil 4.3.2 daki diyagramları çizebiliriz (Wang 1982).



**Şekil 4.3.2.** S ve R Enzimlerin Değişik Şekillerde Sıralanmasıyla Oluşan Düğüm ve Halkalar

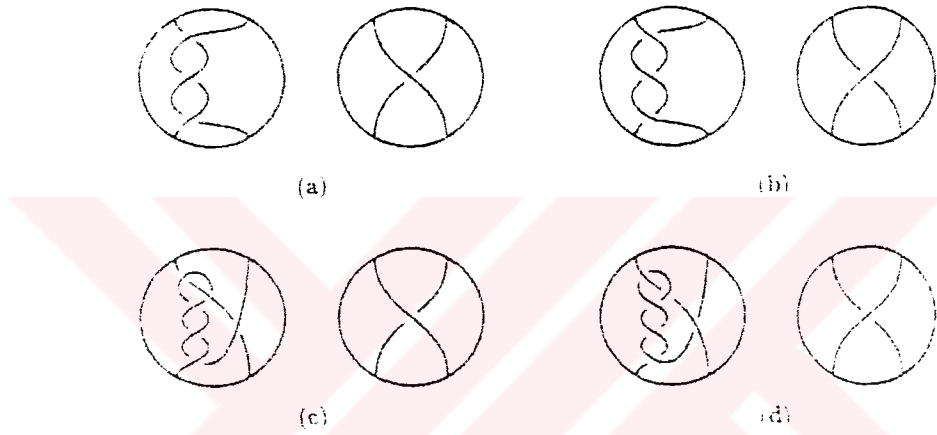
Şekil 4.3.2'deki eşitliklerin sağ taraflarındaki düğümler ve halkalar 2-köprülü düğümler ve halkalar olduğundan bir matematiksel formül yazabiliriz:

1.  $N(S+E)=C(1)$
2.  $N(S+R)=C(2)$
3.  $N(S+R+R)=C(2,1,1)$
4.  $N(S+R+R+R)=C(1,1,1,1,1)$
5.  $N(S+R+R+R+R)=C(1,1,1,2,1)$  (4.3.1)

Bu eşitliklere dikkatle bakmak suretiyle S ve R tangle'lerini belirtebiliriz.

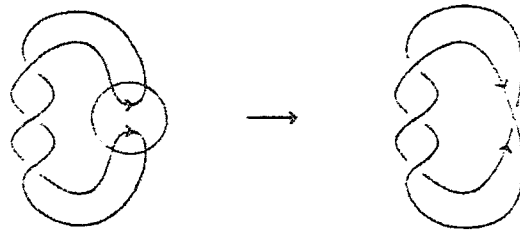
**Teorem:** 1. (4.3.1) formülündeki (1)~(3)' e kadar özellikleri sağlayan S ve R Tangle'leri için bütün ihtimaller Şekil 4.3.3 da görüldüğü gibi dört tangle ile sınırlanmıştır.

2. İlave olarak, eğer S ve R (4.3.1) de sağlarsa o zaman S ve R için bir tek ihtimal şekil 4.10 (a) da olduğu gibidir.



**Şekil 4.3.3.** S ve R Enzimlerinin 4.3.1'deki Sıralanma Sonucu Oluşan Tangle'ler

Böylece, Tn3 yeniden birleşme yolu ile ilk birleşme işleminin etkisi şekil 4.3.4 deki gibi düşünülebilir.



**Şekil 4.3.4.** Tn3 Yeniden Birleşme Yoluyla Oluşan Dügümler

**Örnek:** İlk önce şu iyi bilinir ki, eğer  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayıları tamsayı değilse o zaman

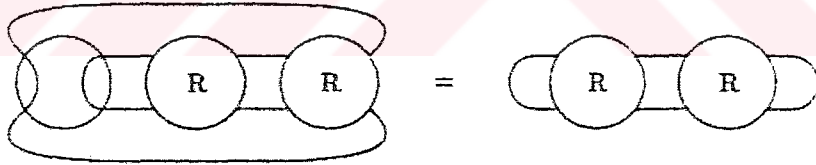
$N(S+R+R)$  bir rasyonel düğüm (veya halka) değildir.  $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$  ve  $\frac{c}{d} = -\frac{5}{2}$  olma durumu

bunu gösterir.

Böylece eğer  $S$  ve  $R$  sırasıyla tamsayıları tekabül ederse [(yani  $b=d=1$ ,  $N(S+R+R)=N(T(a+2c))$ ],  $(a+2c, 2)$  tipinde bir tor (veya halka) olur. Bu da gösterir ki meydana gelen düğüm 8 şekilli düğüm olamaz. Bu sebepten  $S$  ve  $R$  den sadece bir tanesi bir tamsayıya tekabül edebilir.

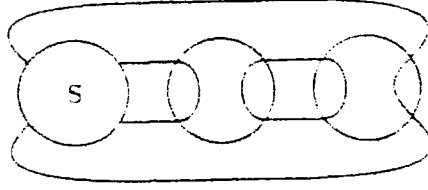
Böylece, şimdi  $S$  nin bir  $(0,0)$ -tangle olduğunu farz edelim. (yani  $b=0$  olsun). Bu durumda şekil 4.3.5 de görüldüğü gibi

$$N(S+R+R) = N(T(0,0)+R+R) = D(R+R) \quad (4.3.2)$$



**Şekil 4.3.5.**  $S$ 'nin Bir  $(0,0)$  – Tangle Olması Halinde  $N(S+R+R)$ 'nin Durumu

Bu da yine 8 şekilli düğüm olamaz. Üstelik, eğer  $R$  bir  $(0,0)$ -tangle ise, o zaman  $N(S+R+R)$  en az 2-bileşenli bir halkadır ve böylece açıkça bir düğüm değildir (şekil 4.3.6).



**Şekil 4.3.6.** R'nin Bir  $(0,0)$  – Tangle Olmaması Halinde  $N(S+R+R)$ 'nin Durumu

Bundan dolayı ne S ne de R bir  $(0,0)$ -tangle olamaz.

Şimdi R nin bir tam tangle olduğunu farz edelim. Yani  $T(r)$  olsun. Eğer  $r = 0$  ise o zaman  $N(S+R)=N(S)$  ve benzer olarak  $N(S+R+R)=N(S)$  olur. Buradan  $N(S+R)=N(S+R+R)$  olur ki bu durum (4.3.1) formülündeki (2) ve (3) tamamen zıttır. Bu sebeptendir ki r, sifıra eşit olamaz. Böylece eğer  $R=T(r)$  ( $r \neq 0$ ) kabul edersek, o zaman S bir rasyonel  $\frac{u}{v}$  tangle'ye tekabül etmek zorundadır.

İlk olarak  $N(S+R)=C(2)$  den

$$r + \frac{u}{v} = \frac{rv + u}{v}$$

nin payının mutlak değeri  $C(2)$  nin determinantına eşittir yani

$$|rv + u| = 2 \quad (4.3.3)$$

dir. Benzer olarak  $N(S+R+R)=C(2,1,1)$  den

$$\frac{u}{v} + 2r = \frac{u + 2rv}{v}$$

nin payının mutlak değeri  $C(2,1,1)$  in determinantına eşittir. Yani

$$|rv + u| = 5 \quad (4.3.4)$$

olur (Roca, Berger 1983).

**Örnek:** (4.3.3) ve (4.3.4) eşitlik sistemlerinden  $r, u$  ve  $v$  nin mümkün çözümlerinin

$$\{(u,rv)\} = \{(-1,3),(1,-3),(9,-7),(-9,7)\}$$

olduğunu gösterelim.

Bu çözümlere ilk olarak,  $u=-1, rv=3$  olarak başlayalım.  $r$  ve  $v$  tamsayılar olduğundan aşağıdaki muhtemel çözümleri yazabiliriz:

$$\left\{\left(\frac{u}{v}, r\right)\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, -1\right), (-1, 3), (1, -3)\right\}$$

$\frac{u}{v}$  bir tamsayı olmadığından, son iki çözümü dikkate almayabiliriz.

Böylece  $\frac{u}{v} = \frac{1}{3}$  durumdaki  $T(3,0)$  tangle olduğu halde (şekil 4.3.3 (b))  $\frac{u}{v} = -\frac{1}{3}$

olduğundan  $T(-3,0)$  tangle elde edilir (şekil. 4.3.3 (a)).

Benzer şekilde diğer üç ihtimalde gözden geçirebiliriz.  $(u,rv) = (9,-7)$  durumu için

$$\left\{\left(\frac{u}{v}, r\right)\right\} = \left\{\left(-\frac{9}{7}, 1\right), \left(\frac{9}{7}, -1\right), (-9, 7), (9, -7)\right\}$$

Yukarıdaki gibi, son iki çözümü atabiliriz ve dikkatimizi ilk iki ihtimal üzerine yoğunlaştırabiliriz.

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$

olduğundan buna karşılık gelen tangle  $T(2,3,1)$  olur ve eksi işaretini dikkate almak suretiyle bunlar şekil 4.3.3 (c) ve (d) deki iki tangle olur.

Son olarak, eğer (4.3.1) formülündeki (2) ve (3)'ü sağlamadığını gösterebiliriz. İşlemler hemen hemen yukarıdakinin aynısıdır. Fakat biraz daha karmaşıktır. Örneğin  $S=T(s)$  gibi. (Burada  $s$  bir tamsayıdır)

Şimdi ( $v>1$ )  $R = \frac{u}{v}$  rasyonel sayısını göz önüne alabiliriz. Yukarıda olduğu gibi

$$|vs + u| = 2$$

elde edilir (Roca, Berger 1983).

**Örnek:** Eğer  $S$  bir tam tangle ise,

$$N(S+R+R) = N(R+(R+S))$$

olduğunu gösterelim.

$R+S$  bir rasyonel sayı olduğundan  $N(R+S)=N(S+R)$  nin determinantı  $|u+vs|$  olur. Benzer şekilde  $N(S+(R+R))$  nin determinantı

$$\frac{u}{v} + \frac{u}{v} + s = \frac{2uv + sv^2}{v^2}$$

nin payının mutlak değeridir ve  $|2uv + sv^2| = 5$  olduğu gösterilebilir.

Böylece  $v = 5$  ve  $|2u + sv| = 1$  olur (Roca Berger 1983).



## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, düğüm teorisindeki bazı kavramların, DNA molekülüne nasıl uygulandığı araştırılmıştır. İzomar denilen, kimyasal olarak aynı oluşuma, fakat farklı yapıya sahip iki molekülün halkalanma sayılarının farklılığından dolayı, bunların topolojik olarak denk olmadıkları görülmüştür.

Topoizomar adı verilen denk olmayan bu iki DNA molekülünün halkalanma sayılarını değiştiren enzimin topoizomerasa olduğu, bu işi topolojide Tangle'nin yaptığı görülmüştür.

Düğüm teoride tangle'lerin iki düğümü yollarla kesme yapıştırma yaparak bağlanması gibi, topoizomare hareketlerinin de birkaç tipe ayrıldığı görülmüştür. Bu tip hareketler sonunda, eğer DNA da bir çoğalma (mayalanma) var ise, o zaman DNA'nın iki bileşenli bir halka olduğu ve eğer düzenleme ters-düz tekrar ise, bu duruma ortaya çıkan ürünün bir düğüm olduğu tesbit edilmiştir.

DNA da enzim yoluyla oluşan tüm bu hareketlerin sonucunda, DNA çoğalırken, kıvrılma sayıları artıp-azalırken, buna karşılık düğümde tangle'ler vasıtasıyla,  $N$  tangle'deki numaratorü göstermek üzere, E ve S tangle'leri için  $N(E+S) = \text{ürün (düğüm)}$  bağıntısı verilir. DNA molekülünde görülen birleşme ve çoğalmaların aynısı, düğüm teoride farklı tangle'ler için örneğin E, S ve R tangle'leri için  $N(E+S) = \text{ürün}$  ve  $N(S+R) = \text{ürün}$  bağıntıları yazılır. Burada matematiksel olarak iki denklem üç bilinmeyen olduğundan, daha fazla varsayım kurmadan bilinmeyenleri tanımlamanın mümkün olmadığı anlaşıldı. Bu sebepten deneysel sonuçlara ihtiyaç vardır.

Sonunda, DNA ya enzimin etkisinin sadece enzime bağlı olduğu, konuma, biçime ve çoğalmaların boyutuna bağlı olmadığı görüldü. Bu gözlem sonunda çıkan ürünün tek bir tangle'ye bağlı olduğu, dolayısıyla bağıntılarda yeni bir bilinmeyen olmayacağı anlaşılmıştır.

**KAYNAKLAR**

- Bozhöyük, M.E., 1984. Genel Topolojiye Giriş. Atatürk Üni. No: 430, Fen-Ede. Fak. No: 31 Ders Kitapları No: 61, 2/05, Erzurum.
- Dean, F., Stasiak, A., 1985. Dublex DNA Knots Produced by Escherichia Coli Topoisomerase. Blaisdell Publishing Company, 181 s, New York.
- Hsieh, T., 1983. Knotting of the Circular Dublex DNA by Type II DNA Topoisomerase From Drosophila melanogaster. Math. Ann, 203, 245, 261.
- Murasugi, K., 1996. Knot Theory and its Applications. Birkhouser, 337 s, Boston.
- Roca, J., Berger, J., 1993 On the simultaneous Binding of eukaryotic DNA Topoisomerase II to pair of double stranded DNA helices. JBC., 268.
- Wang, J., 1982. DNA Topoisomerases. Pitman Advanced Publishing Inc.



## ÖZGEÇMİŞ

Melike KARTA 1977 yılında Erzurum'da doğdu. 1995 yılında Mehmet Akif Ersoy Lisesi'nden mezun oldu. 1996 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girdi. 2000 yılında mezun oldu ve Fen Bilimleri Enstitüsü Topoloji Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.

