

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN B-SPLİNE METODU İLE ÇÖZÜMLERİ  
HAKKINDA**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DUYGU DÖNMEZ**

**Anabilim Dalı : Matematik**  
**Programı : Uygulamalı Matematik**

**MANİSA 2008**

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN B-SPLİNE METODU İLE ÇÖZÜMLERİ  
HAKKINDA**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DUYGU DÖNMEZ**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06. 12. 2007**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 10. 01. 2008**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Necdet BİLDİK (Celal Bayar Üniversitesi )**

**Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ (Ege Üniv. Fen Fak. Mat. Böl.)**

**: Yard. Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ (Celal Bayar Üniversitesi )**

**MANİSA 2008**

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEŞEKKÜR.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
<b>1 TEMEL KAVRAMLAR .....</b>	<b>1</b>
1.1. Sonlu Farklar Metodu.....	1
1.2. Sonlu Elemanlar Metodu .....	5
1.2.1. Ağırlıklı Rezidü Metodu .....	5
1.2.2. Collocation Metodu.....	6
1.3. Spline Fonksiyonlar .....	7
1.3.1. Kübik Spline.....	8
1.3.2. Kübik B-spline.....	16
<b>2 BİR BOYUTLU LİNEER ISI DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE COLLOCATION</b>	
<b>METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....</b>	<b>22</b>
2.1. Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar .....	23
2.2. Metodun Kararlılık Analizi .....	27
<b>3 YANAL ISI KAYBI DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE COLLOCATION METODUYLA</b>	
<b>SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....</b>	<b>29</b>
3.1. Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar .....	30
3.2. Metodun Kararlılık Analizi .....	34
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>36</b>
<b>EK .....</b>	<b>37</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>44</b>

## TEŞEKKÜR

Bu alıőma konusunu veren ve yardımlarını esirgemeyen Danıőman Hocam Sayın Prof. Dr. Necdet BİLDİK'e, bu çalıőmam sırasında çok büyük yardımını gördüğüm Arő. Gör. Dursun IRK ve Arő. Gör. Ali DEMİR'e, yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Bülent SAKA'ya ve emeği geçen diğer tüm hocalarıma, ayrıca bu süre içerisinde maddi manevi desteğini esirgemeyen aileme sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Duygu DÖNMEZ

## ÖZET

Birinci bölümde, Sonlu Farklar Metodu ve Collocation Metodu hakkında kısaca bilgi verildi. Spline fonksiyonlarının özellikleri ve tanımı verilerek, kübik spline ve kübik B-spline interpolasyonu oluşturuldu.

İkinci bölümde, kübik B-spline Collocation Metodu ile bir boyutlu lineer ısı denkleminin çözümü yapıldı. Isı denklemini için verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak metod test edildi.

Üçüncü bölümde başlangıç ve sınır şartları verilen yanal ısı kaybı denkleminin Collocation Metodu ile çözümü, metotta yaklaşım fonksiyonları olarak kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak ifade edildi.

İkinci ve üçüncü bölümde, sayısal çözümle elde edilen veriler tabloda gösterildi ve metodun kararlılığı Fourier kararlılık yöntemi ile incelendi. Son olarak sayısal çözümlemede kullanılan Fortran Programı verildi.

## **ABSTRACT**

A short introduction about the Finite Difference and Collocation Methods are given in the first chapter. By giving definition and properties of spline functions, cubic spline and B-spline interpolation are formed.

In the second chapter, one-dimensional linear heat equation is solved by using cubic B-spline Collocation Method. The method is tested for the initial and boundary conditions of heat equation.

In the third chapter, the solution of the equation with lateral heat loss given initial and boundary conditions is expressed by using the cubic B-spline functions as approximation functions in the method.

In the second and third chapters, the data which is get to numerical solution are shown in the table and stability of the method is investigated by Fourier stability analysis. Finally, Fortran Programme which used to the numerical analysis is given.

## ÖNSÖZ

Bu tezde kullandığımız metot, genellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmış, temelinde önce çeşitli yöntemlerle denklemi lineerleştirip, daha sonra kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Sonlu Farklar Metoduyla sayısal çözüm araştırılmaktadır. Kübik spline Collocation teknikleri ve uygulamaları geçen yıllarda hızla geliştirilmiş olup, Wang ve Kahawita tarafından ortaya atılmıştır. B-spline terimini Isac Jacop Schenberg ortaya atmıştır.

Rubin ve Khosla [10] kübik spline kullanarak Collocation Metoduyla kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü araştırmış, bu metodu Burger denkleminin sayısal çözümü için kullanmışlardır. İ.Dağ, D.Irk ve B.Saka [5], bir boyutlu Burger denkleminin çözümlerini, sonlu elemanlar üzerinde kübik B-spline'ların düzenlenmesine dayanan bir metod ile elde etmişlerdir. H.Çağlar, M.Özer ve N.Çağlar [4] ise lokal olmayan başlangıç koşuluna sahip bir boyutlu ısı denklemini üçüncü dereceden B-spline fonksiyonlarını kullanarak incelemişlerdir.

Bu çalışmanın kolay anlaşılabilmesi açısından, birinci bölümde temel kavramlar verilmiş, konuya bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde bir boyutlu lineer ısı denkleminin, üçüncü bölümde ise yanal ısı kaybı denkleminin Kübik B-spline Collocation Metodu ile çözümü üzerinde çalışılmıştır. Son olarak sayısal çözümlemede kullandığımız bilgisayar programı verilmiştir.

# I.BÖLÜM

## TEMEL KAVRAMLAR

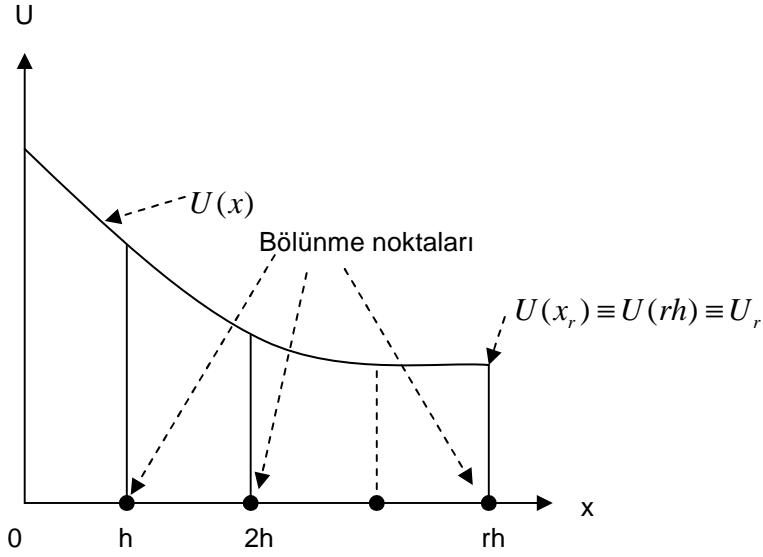
### 1.1 Sonlu Farklar Metodu

Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan çoğu problem kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin olmadığı ya da analitik çözümün çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılır. Sonlu farklar metodu da bu yöntemlerden biridir.

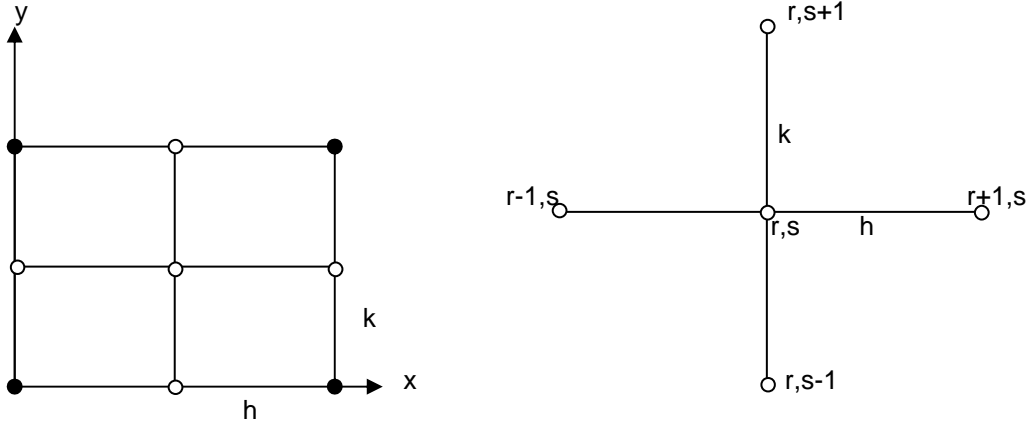
$x$  bağımsız değişkenine sahip sürekli bir  $U(x)$  fonksiyonunu ele alalım. Şekil 1.1 de görüldüğü gibi tanım kümesini  $x_r = x + rh$  noktalarına bölelim. Bu durumda bölünme noktalarında

$$U(x_r) \equiv U(rh) \equiv U_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

olacak şekilde  $U(x)$  fonksiyonunu gösterebiliriz.



**Şekil 1.1:**  $U = U(x)$  olmak üzere  $h$  aralığı için sonlu fark parçalanması



**Şekil 1.2:** İki boyutta sonlu fark bölünmesi

İki boyutlu durumda  $U(x, y)$  fonksiyonunu bölünme noktalarında

$$U(x_r, y_s) \equiv U(rh, sk) \equiv U_{rs}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

notasyonu ile tanımlanır. Böylece

$$U(x_r + h) = U(x_r) + hU_x|_r + \frac{h^2}{2!}U_{xx}|_r + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}|_r + \dots \quad (1.1)$$

veya

$$U(x_r - h) = U(x_r) - hU_x|_r + \frac{h^2}{2!}U_{xx}|_r - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}|_r + \dots \quad (1.2)$$

olarak bulunabilir. Yukarıdaki iki denklem düzenlenirse;

$$U_x|_r = \frac{U(x_r + h) - U(x_r)}{h} - \frac{h}{2!}U_{xx}|_r + \frac{h^2}{3!}U_{xxx}|_r + \dots \quad (1.3)$$

$$U_x|_r = \frac{U(x_r) - U(x_r - h)}{h} + \frac{h}{2!}U_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}|_r + \dots \quad (1.4)$$

elde edilir. Böylece  $U$  fonksiyonunun  $x_r$  noktasındaki birinci türevi yaklaşık olarak

$$U_x|_r \approx \frac{U(x_r + h) - U(x_r)}{h} \equiv \frac{U_{r+1} - U_r}{h} \quad (1.5)$$

$$U_x|_r \approx \frac{U(x_r) - U(x_r - h)}{h} \equiv \frac{U_r - U_{r-1}}{h} \quad (1.6)$$

şeklinde bulunabilir.

Görüldüğü gibi seri belli bir yerden kesilmiştir. Bu durumda da belli bir hata olacaktır. Hatalar serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir. Bu durumda bu yaklaşımla ilgili  $E_r$  hatası

$$E_r = \pm \frac{h}{2} U_{xx} |_{\xi} = O(h) \quad x_r \leq \xi \leq x_r + h, \quad x_r - h \leq \xi \leq x_r$$

olarak temsil edilir.  $O(h)$ , 1.mertebeden bir hata olarak kabul edilir. (1.3) ve (1.4) denklemleri taraf tarafa toplanır ve  $U_x |_r$  ye göre çözülürse;

$$U_x |_r \approx \frac{U_{r+1} - U_{r-1}}{2h} \quad (1.7)$$

sonucu ve

$$-\frac{h^2}{6} U_{xxx} |_{\xi} \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

biçiminde hata terimi bulunur. (1.7) denklemi için hata 2.mertebedendir denir ve  $O(h^2)$  ile gösterilir.

(1.4) denklemi (1.3) denkleminde çıkarılır ve  $U_{xx} |_r$  ye göre çözülürse;

$$U_{xx} |_r \approx \frac{U_{r+1} - 2U_r + U_{r-1}}{h^2} \quad (1.8)$$

sonucu ve

$$-\frac{h^2}{12} U_{xxxx} |_{\xi} \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

olarak ikinci mertebeden hata elde edilir.

**Tablo 1.1:** Bir bağımsız değişken içeren fonksiyonlarda sonlu fark yaklaşımlar

Türev	Sonlu Fark Yaklaşımı	Hata Mertebesi
$U_x  _r$	$\frac{U_{r+1} - U_r}{h}$	$O(h)$
$U_x  _r$	$\frac{U_r - U_{r-1}}{h}$	$O(h)$
$U_x  _r$	$\frac{U_{r+1} - U_{r-1}}{2h}$	$O(h^2)$
$U_{xx}  _r$	$\frac{U_{r+1} - 2U_r + U_{r-1}}{h^2}$	$O(h^2)$

$U(x, y)$  için sonlu fark yaklaşımlarını daha önce bulmuş olduğumuz tek değişkenli sonlu fark yaklaşımları yardımıyla elde edeceğiz.

$$U_x|_r \approx \frac{U_{r+1} - U_r}{h} \quad (1.9)$$

şeklinde tek değişken için bir yaklaşım formülü ile birlikte şekil 1.2 göz önüne alınırsa buradan;

$$\frac{\partial U_{r,s}}{\partial x} \equiv U_x|_{r,s} = \frac{U_{r+1,s} - U_{r,s}}{h} + O(h) \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial U_{r,s}}{\partial y} \equiv U_y|_{r,s} = \frac{U_{r,s+1} - U_{r,s}}{k} + O(k) \quad (1.11)$$

eşitlikleri bulunabilir.

Bu yaklaşımlarda  $U_x|_{r,s}$  iken alt indisteki s sabit olarak,  $U_y|_{r,s}$  iken de r sabit olarak kabul edilir. Şimdi tek değişkenli fonksiyonlar için ikinci dereceden türev yaklaşımını ele alalım. Bunun için

$$U_{xx}|_r = \frac{U_{r+1} - 2U_r + U_{r-1}}{h^2}$$

ikinci dereceden türev yaklaşımını göz önüne alınmalıdır. Bu yaklaşım iki değişken içeren yaklaşıma uygulanırsa;

$$U_{xx}|_{r,s} \approx \frac{U_{r+1,s} - 2U_{r,s} + U_{r-1,s}}{h^2} + O(h^2) \quad (1.12)$$

veya

$$U_{yy}|_{r,s} \approx \frac{U_{r,s+1} - 2U_{r,s} + U_{r,s-1}}{k^2} + O(k^2) \quad (1.13)$$

olarak elde edilir.

İki değişkenli fonksiyonlar için en çok kullanılan sonlu fark yaklaşımları  $h = k$  alınarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Tablo 1.2**

Türev	Sonlu Fark Yaklaşımı	Hata Mertebesi
$U_x _{r,s}$	$\frac{1}{h}[U_{r+1,s} - U_{r,s}]$	$O(h)$
$U_x _{r,s}$	$\frac{1}{h}[U_{r,s} - U_{r-1,s}]$	$O(h)$
$U_x _{r,s}$	$\frac{1}{2h}[U_{r+1,s} - U_{r-1,s}]$	$O(h^2)$
$U_{xx} _{r,s}$	$\frac{1}{h^2}[U_{r+1,s} - 2U_{r,s} + U_{r-1,s}]$	$O(h^2)$

## 1.2 Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar metodu aslında inşaat mühendisliğinde kullanılmak üzere geliştirilmiş bir yöntemdir. Fakat günümüzde matematiğin tüm alanlarında ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşım için kullanılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodunun sonlu farklar yönteminden farkı; kısmi diferansiyel denklemlerin alt aralıklara bölünen çözüm bölgesine fonksiyonlarla yaklaşmasıdır. Bilindiği gibi bu yaklaşım sonlu farklar metodunda noktasal bir yaklaşım olmaktadır. Ayrıca çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Bu tip problemlerin sonlu farklar metodu ile çözümleri zordur. Sonlu farklar metodu problemin çözümünün düzgün geometrik şekiller olması durumunda iyi sonuç vermesine karşılık sonlu elemanlar metodu hem düzgün hem de düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerdeki çözümlerde çok daha iyi ortaya koymaktadır.

### 1.2.1 Ağırlıklı Rezidü Metodu

Ağırlıklı Rezidü Metodunda istenen  $U(\cdot)$  fonksiyonu yerine bir  $\hat{U}(\cdot)$  sonlu yaklaşım serisi kullanılır. Bu durumda

$$U(\cdot) \approx \hat{U}(\cdot) = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j(\cdot) \quad (1.14)$$

denkleminde verilen  $\phi_j(\cdot)$ ,  $j=1, \dots, N$  fonksiyon kümesi zaman ve konum bölgesi üzerinde tanımlı olup  $U_j$ ,  $j=1, \dots, N$  bilinmeyen sayılardır. Sonlu elemanlar metodunda  $\phi_j(\cdot)$  fonksiyonları problem için verilen sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler.

$\phi_j(\cdot)$  fonksiyonları, çözülmesi istenen problem için verilen tüm sınır koşullarını sağlar fakat genelde diferansiyel denklemleri sağlamazlar.  $\hat{U}(\cdot)$ , kısmi diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$L\hat{U}(\cdot) - f = R(\cdot) \quad (1.15)$$

sonucu  $R(\cdot)$  olarak adlandırılan Rezidüyü verir.

$W_i(\cdot)$  ağırlık fonksiyonları integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere rezidü ifadesi  $W_i(\cdot)$  ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak tanımlanan bölge üzerinde integre edilirse;

$$\int \int_{t \ x} W_i(\cdot) R(\cdot) dx dt = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (1.16)$$

$N$  bilinmeyenli  $N$  denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden  $U_j$  ler bulunarak (1.14) denkleminde yerine yazılırsa  $\hat{U}(\cdot)$  yaklaşık çözümüne ulaşılır.

### 1.2.2 Collocation Metodu

Collocation Metodu Ağırlıklı Rezidü Metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta  $W_i$  ağırlık fonksiyonları yerine

$$W_i = \delta(x - x_i) \quad (1.17)$$

olacak şekilde Dirac Delta fonksiyonları seçilir.

Dirac Delta fonksiyonları;

$$\int \int_{t \ x} a(\cdot) \delta_i(x - x_i, t - t_i) dx dt = a|_{x_i, t_i} \quad (1.18)$$

olacak şekilde önemli bir özelliğe sahiptir. Burada  $x$  konumu ve  $t$  zamanı göstermektedir. (1.18) denklemi Collocation Metodu için;

$$\int \int_{t \ x} \delta_i(\cdot) R(\cdot) dx dt = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (1.19)$$

formunda matematiksel olarak ifade edilebilir.  $N$  bağımsız değişken ve  $N$  denklemden oluşan sistemden her bir  $(x_i, y_i)$  collocation noktasındaki rezidü değeri yok edilerek istenen sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir.

### 1.3 Spline Fonksiyonlar

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylık sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda ard arda gelen iki veri arasında birinci, ikinci ya da üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu, tanımlanan aralık üzerinde ve sonlu noktalarda birbirini örtmeyen alt aralıklarda daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanır.

Reel sayıların monoton artan bir dizisi  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'e bağlı  $m$ . dereceden  $S(x)$  spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahiptir ve reel doğru üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

- a.  $S(x)$ , her  $[x_j, x_{j+1}]$  de  $m$ . ya da daha küçük bir dereceden bir polinomdur. (Burada  $x_0 = -\infty$  ve  $x_{n+1} = \infty$  olabilir)
- b.  $S(x)$  ve kendisinin  $1, 2, \dots, m-1$ . basamaktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  bölünme noktalarında süreklidir.

Yukarıdaki tanıma göre, parçalı polinom fonksiyonlarının süreklilik durumunda ve türevlerinin belirli koşulları sağlaması durumunda bir spline fonksiyon oluşturur.  $m = 0$  için b koşulu geçersizdir ve 0. dereceden spline fonksiyonu adım fonksiyonu olarak adlandırılır.  $m = 1$  için  $S(x)$  polinomu kırık çizgidir.

Genel olarak,  $S(x)$ ;  $[x_{j-1}, x_j]$  ve  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, n$  aralıklarından her biri içinde derecesi  $m$  ya da daha küçük olan farklı fonksiyonlar olarak verilebilir.  $m > 0$  için  $m$ . dereceden bir  $S(x)$  spline fonksiyonunun  $m$ . türevi bir adım fonksiyonudur. Farklı bir tanım olarak  $m$ . dereceden bir spline fonksiyonu bir adım fonksiyonunun  $m$ . basamaktan belirsiz integralidir.

Spline fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir;

1. Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
2. Spline fonksiyonları, uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
3. Spline fonksiyonların elle hesaplanması ve sayısal bilgisayarlara uygun programlarının yapılması kolaydır.
4. Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.
5. Yeteri kadar alt bölmelere ayrılmış  $[a, b]$  aralığı üzerinde her sürekli fonksiyon;  $m$ . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilebilir.

6. Düşük dereceden spline'lar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

Şimdi kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde kullandığımız kübik spline ve kübik B-spline interpolasyon eşitsizliklerini elde etmeye çalışalım.

### 1.3.1 Kübik Spline

$x_j$ 'ler,  $[a, b]$  aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad h = x_{j+1} - x_j > 0 \quad (1.20)$$

$S''(x_j) = M_j$  ve  $S'(x_j) = m_j$  olsun. Aşağıdaki üç özelliği sağlayan  $S(x)$  fonksiyonuna kübik spline denir.

a.  $S(x)$ ,  $\forall [x_j, x_{j+1}]$  alt aralığında parçalı kübik polinomdur.

b.  $S(x_j) = U(x_j)$ ,  $0 \leq j \leq n$

c.  $S(x) \in C^2[a, b]$

$S''(x_j) = M_j$  olmak üzere  $S(x)$  kübik spline'i;  $M_0, M_1, \dots, M_n$ 'lere bağlı olarak elde edilecek ve  $M_0, M_1, \dots, M_n$ 'ler lineer denklem sisteminin bilinmeyenleri olacaktır.

Daha sonra belirlemek üzere  $M_0, M_1, \dots, M_n$  değerlerini seçelim.  $S(x)$  kübik spline olduğundan her  $[x_j, x_{j+1}]$  aralığında  $S''(x)$  birinci dereceden bir polinom tanımlar.  $[x_j, x_{j+1}]$  aralığındaki kübik spline fonksiyonunu  $S_j(x)$  ile gösterelim.

$(x_j, M_j)$  ve  $(x_{j+1}, M_{j+1})$  noktaları için  $[x_j, x_{j+1}]$  aralığında Lagrange interpolasyon formülünden

$$S_j''(x) = \frac{M_j(x_{j+1} - x)}{h} + \frac{M_{j+1}(x - x_j)}{h} \quad (1.21)$$

yazılabilir. Burada  $S_j''(x_j) = M_j$ ,  $S_j''(x_{j+1}) = M_{j+1}$ ,  $0 \leq j \leq n-1$  ve

$S_{j+1}''(x_{j+1}) = S_j''(x_{j+1})$ ,  $0 \leq j \leq n-2$  olduğuna dikkat edelim. Böylece

$x \in [x_j, x_{j+1}]$  için  $S_j''(x)$  değerine sahip olan  $S''(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli

fonksiyon tanımlar ( $S''(x)$  kırık çizgidir). (1.21) eşitliğinin iki defa integrali alınırsa ;

$$S_j'(x) = -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x - x_j)^2 + m$$

$$S_j(x) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x - x_j)^3 + mx + n$$

elde edilir. Hesaplamalarda kolaylık için ;

$$\begin{aligned} mx + n &= (c_j - d_j)x - c_j x_j + d_j x_{j+1} \\ &= c_j(x - x_j) + d_j(x_{j+1} - x) \end{aligned}$$

alınarak  $c_j$  ve  $d_j$  katsayıları integrasyon sabitleri olmak üzere

$$S_j(x) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x - x_j)^3 + c_j(x - x_j) + d_j(x_{j+1} - x) \quad (1.22)$$

bulunur.  $S(x)$  'in sürekli yapılması ve integrasyon koşullarının sağlanması için (1.22) de;

$$S_j(x_j) = U_j, S_j(x_{j+1}) = U_{j+1}, 0 \leq j \leq n-1$$

uygulanırsa;

$$U_j = S_j(x_j) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x_j)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x_j - x_j)^3 + c_j(x_j - x_j) + d_j(x_{j+1} - x_j)$$

$$U_{j+1} = S_j(x_{j+1}) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x_{j+1})^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x_{j+1} - x_j)^3 + c_j(x_{j+1} - x_j) + d_j(x_{j+1} - x_{j+1})$$

$$d_j = \frac{U_j}{h} - \frac{M_j h}{6} \quad \text{ve} \quad c_j = \frac{U_{j+1}}{h} - \frac{M_{j+1} h}{6}$$

elde edilir. Bulunan  $c_j$  ve  $d_j$  katsayıları (1.22) yerine yazılırsa  $0 \leq j \leq n-1$  için;

$$S_j(x) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x - x_j)^3 + \left(\frac{U_{j+1}}{h} - \frac{M_{j+1}h}{6}\right)(x - x_j) + \left(\frac{U_j}{h} - \frac{M_j h}{6}\right)(x_{j+1} - x) \quad (1.23)$$

sonucuna varılır.

(1.23) de tanımlandığı gibi  $S_j(x)$ ,  $c_j$  ve  $d_j$  olan katsayıların düzenlenmesi ile  $x_j$  ve  $x_{j+1}$  ile aynı değere sahip olacak şekilde belirlenir. Bu düzenleme her  $[x_j, x_{j+1}]$  aralığında bağımsız olarak yapıldığından  $S'_j(x_j) = S'_{j-1}(x_j)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  bağıntısını garantilemez (Yani  $S'(x)$  sürekli olmayabilir). (1.23) ün türevi;

$$\begin{aligned} S'_j(x) &= -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x - x_j)^2 + \left(\frac{U_{j+1}}{h} - \frac{M_{j+1}h}{6}\right) - \left(\frac{U_j}{h} - \frac{M_j h}{6}\right) \\ &= -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x - x_j)^2 + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{h}{6}(M_{j+1} - M_j) \end{aligned} \quad (1.24)$$



gerektiğinde,  $\alpha \in [x_j, x_{j+1}]$  aralığında (1.23) bağıntısı bulunur. Yani  $S_j(\alpha) = S(\alpha)$  dir. Hemen görüleceği gibi  $M_0 = M_n = 0$  alındığında bir tek kübik spline fonksiyonu elde edilir. Bu kübik spline fonksiyonu da doğal kübik spline olarak adlandırılır.

Uç noktadaki  $U(x)$  in türevleri bilinirse  $U(x)$  'in daha iyi bir kübik spline olacağı düşünülür.  $S(x_j) = U_j, 0 \leq j \leq n$  olduğundan  $S(x)$  kübik spline fonksiyonu;

$S'(x_n) = U'(x_n) = m_n$  ve  $S'(x_0) = U'(x_0) = m_0$  bağıntılarını sağlamalıdır. (1.24) denkleminde  $j = n-1$  için;

$$\begin{aligned} U'(x_n) = S'_{n-1}(x_n) &= -\frac{M_{n-1}}{2h}(x_n - x_n)^2 + \frac{M_n}{2h}(x_n - x_{n-1})^2 + \frac{U_n - U_{n-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_n - M_{n-1}) \\ &= h\frac{M_n}{2} + \frac{U_n - U_{n-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_n - M_{n-1}) \\ m_n &= h\frac{M_n}{3} + \frac{h}{6}M_{n-1} + \frac{U_n - U_{n-1}}{h} \end{aligned} \quad (1.27)$$

ve benzer biçimde (1.24) de  $j = 0$  için;

$$\begin{aligned} U'(x_0) = S'_0(x_0) &= -\frac{M_0}{2h}(x_1 - x_0)^2 + \frac{M_1}{2h}(x_0 - x_0)^2 + \frac{U_1 - U_0}{h} - \frac{h}{6}(M_1 - M_0) \\ &= -h\frac{M_0}{2} + \frac{U_1 - U_0}{h} - \frac{h}{6}(M_1 - M_0) \\ m_0 &= -h\frac{M_0}{3} - \frac{h}{6}M_1 + \frac{U_1 - U_0}{h} \end{aligned} \quad (1.28)$$

elde edilir. Bulunan bağıntılar, (1.25) denklemini ile birlikte  $S'(x)$  'in sürekliliğini sağlar.

(1.25), (1.27) ve (1.28) denklemleri birlikte düşünüldüğünde  $(n+1)$  bilinmeyenli  $(n+1)$  denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Sistemin matris formu

$$b_j = \frac{6}{h}(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}), 1 \leq j \leq n-1 \text{ olmak üzere;}$$







dir. Bu denklem sisteminden  $m_0, \dots, m_n$  kolaylıkla bulunabilir ve bu değerler (1.30) denkleminde yerine yazılırsa elde edilen  $S(x)$  spline'ına  $D_1$  spline'ı denir.

Şimdi de iç noktalar için  $U(x)$  fonksiyonunun türev değerlerini hesaplayalım. Bunun için ilk olarak (1.24) denkleminde  $S'_{j-1}(x_j)$  ve  $S'_j(x_j)$  değerleri hesaplanırsa

$$S'_{j-1}(x_j) = m_j = -\frac{M_{j-1}}{2h}(x_j - x_j)^2 + \frac{M_j}{2h}(x_j - x_{j-1})^2 + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} + \frac{h}{6}(M_j - M_{j-1})$$

$$m_j = \frac{h}{3}M_j + \frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \quad (1.37)$$

ve

$$S'_j(x_j) = m_j = -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x_j)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x_j - x_j)^2 + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} + \frac{h}{6}(M_{j+1} - M_j)$$

$$m_j = -\frac{h}{3}M_j - \frac{h}{6}M_{j+1} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \quad (1.38)$$

biçiminde bulunur.

(1.31) denkleminde  $S''_{j-1}(x_j)$  ve  $S''_j(x_j)$  değerleri

$$S''_{j-1}(x_j) = M_j = -2m_{j-1} \frac{2x_j + x_{j-1} - 3x_j}{h^2} - 2m_j \frac{2x_{j-1} + x_j - 3x_j}{h^2}$$

$$+ 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^3} (x_j + x_{j-1} - 2x_j)$$

$$M_j = \frac{2}{h}m_{j-1} + \frac{4}{h}m_j - 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^2} \quad (1.39)$$

ve

$$S''_j(x_j) = M_j = -2m_j \frac{2x_{j+1} + x_j - 3x_j}{h^2} - 2m_{j+1} \frac{2x_j + x_{j+1} - 3x_j}{h^2}$$

$$+ 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^3} (x_{j+1} + x_j - 2x_j)$$

$$M_j = -\frac{4}{h}m_j - \frac{2}{h}m_{j+1} + 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^2} \quad (1.40)$$

şeklinde elde edilir. (1.37) denkleminde  $m_{j+1}$  ve (1.38) denkleminde de  $m_j$  eşitlikleri kullanılırsa;

$$m_{j+1} - m_j = \frac{h}{2}(M_j + M_{j+1}) \quad (1.41)$$

bağıntısı kolaylıkla bulunur. Elde edilen tüm kübik spline eşitlikleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

**Tablo 1.3:** Kübik spline eşitlikleri

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1})$$

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h}(U_{i+1} - U_{i-1})$$

$$m_{i+1} - m_i = \frac{h}{2}(M_i + M_{i+1})$$

$$m_i = \frac{h}{3}M_i + \frac{h}{6}M_{i-1} + \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$$

$$m_i = -\frac{h}{3}M_i - \frac{h}{6}M_{i+1} + \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$$

$$M_i = \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6\frac{U_i - U_{i-1}}{h^2}$$

$$M_i = -\frac{4m_i}{h} - \frac{2m_{i+1}}{h} + 6\frac{U_{i+1} - U_i}{h^2}$$

### 1.3.2 Kübik B-spline

Herhangi bir  $[a, b]$  aralığını alalım ve bu aralığı  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  şeklinde  $n+1$  tane noktaya bölelim.  $x_{-m}, x_{-m+1}, \dots, x_{-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  noktaları da,  $[a, b]$  aralığının dışında kalan noktalar olsun. Bu taktirde  $[x_{-m}, x_{n+m}]$  üzerinde tanımlı

$$B_k(t) = \frac{1}{h^{m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (x_{i-m+k+1} - t)_+^m, \quad k = -1, 0, \dots, n+m-2 \quad (1.42)$$

$m$ . dereceden tanımlı spline fonksiyonları vardır. Burada her  $k = -1, 0, \dots, n+m-2$  için  $t < x_{-m+k+1}$ ,  $x > x_{k+2}$  olduğunda  $B_k(t) = 0$  ve

$$(x_{i-m+k+1} - t)_+^m = \begin{cases} (x_{i-m+k+1} - t)^m, & t \leq x_{i-m+k+1} \\ 0, & t > x_{i-m+k+1} \end{cases} \quad (1.43)$$

biçiminde tanımlıdır.  $B_{-1}(t), B_0(t), \dots, B_{n+m-2}(t)$  fonksiyonlarına  $m$ . dereceden B-spline fonksiyonları denir.

Bu verilen tanımları kullanarak kübik B-spline fonksiyonlarını oluşturalım. Kübik B-spline,  $[a, b]$  aralığının dışındaki  $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}$  noktaları ile beraber  $[x_{-3}, x_{n+3}]$  aralığında tanımlıdır. Her belirli  $t$  parametresi için kübik B-spline'nin  $F_t(x) = (x-t)_+^3$  fonksiyonu

$$(x-t)_+^3 = \begin{cases} (x-t)^3, & t \leq x \\ 0, & t > x \end{cases} \quad (1.44)$$

biçiminde elde edilir. Şimdi de, bir  $f$  fonksiyonunun ileri fark formülü  $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$  olmak üzere  $F_t(x)$  fonksiyonunun

$$K(t) = \Delta^4 F_t(x_j) \quad (1.45)$$

ileri farkını hesaplayalım.  $F_t(x)$  parçalı kübik olduğundan,  $t \in [x_{-3}, x_{n+3}]$  parametresi için bunun kübik B-spline olduğunu göstermek kolaydır. Buradan

$$\begin{aligned} K(t) &= \Delta^4 F_t(x_j) \\ &= F_t(x_{j+4}) - 4F_t(x_{j+3}) + 6F_t(x_{j+2}) - 4F_t(x_{j+1}) + F_t(x_j) \\ &= (x_{j+4} - t)_+^3 - 4(x_{j+3} - t)_+^3 + 6(x_{j+2} - t)_+^3 - 4(x_{j+1} - t)_+^3 + (x_j - t)_+^3 \end{aligned} \quad (1.46)$$

yazılır. Her  $t \geq x_{j+4}$  için  $K(t) = 0$  olduğu,  $(x-t)_+^3$  ün tanımından açıktır. Verilen  $t$  parametresi için  $t < x$  olduğunda  $F_t(x) = (x-t)_+^3$  üçüncü dereceden bir polinomdur.  $t \geq x_j$  olduğu zaman üçüncü dereceden bir polinom için  $\Delta^4 F_t(x_j)$  ileri farkı 0'a eşittir, yani

$$t \geq x_{j+4} \text{ ve } x_j < t \text{ için } K(t) \equiv 0 \quad (1.47)$$

dir.  $(x_j - t)_+^3$  biçiminde kübik spline'ların toplamı da kübik spline'dır. Buna göre  $K(t)$  kübik spline olur.  $K(t)$  fonksiyonu açık bir biçimde yazıldığında;

$$K(t) = \begin{cases} (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 + 6(x_{j+2} - t)^3 - 4(x_{j+1} - t)^3, & x_j \leq t \leq x_{j+1} \\ (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 + 6(x_{j+2} - t)^3, & x_{j+1} \leq t \leq x_{j+2} \\ (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3, & x_{j+2} \leq t \leq x_{j+3} \\ (x_{j+4} - t)^3, & x_{j+3} \leq t \leq x_{j+4} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (1.48)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte  $x_j = x_0 + jh$ ,  $x_{i+j} = x_i + jh$  olduğundan sırasıyla;

$$\begin{aligned}
(x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 &= (x_{j+3} - t + h)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 \\
&= (x_{j+3} - t)^3 + 3(x_{j+3} - t)^2 h + 3(x_{j+3} - t)h^2 + h^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 \\
&= h^3 + 3h^2(x_{j+3} - t) + 3h(x_{j+3} - t)^2 - 3(x_{j+3} - t)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 + 6(x_{j+2} - t)^3 &= (x_{j+1} - t + 3h)^3 - 4(x_{j+1} - t + 2h)^3 \\
&\quad + 6(x_{j+1} - t + h)^3 \\
&= h^3 + 3h^2(t - x_{j+1}) + 3h(t - x_{j+1})^2 - 3(t - x_{j+1})^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 + 6(x_{j+2} - t)^3 - 4(x_{j+1} - t)^3 &= (x_j - t + 4h)^3 - 4(x_j - t + 3h)^3 \\
&\quad + 6(x_j - t + 2h)^3 - 4(x_j - t + h)^3 \\
&= (t - x_j)^3
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin tekrar düzenlenmesiyle (1.48) denklemini;

$$K(t) = \begin{cases} (t - x_j)^3 & , x_j \leq t \leq x_{j+1} \\ h^3 + 3h^2(t - x_{j+1}) + 3h(t - x_{j+1})^2 - 3(t - x_{j+1})^3 & , x_{j+1} \leq t \leq x_{j+2} \\ h^3 + 3h^2(x_{j+3} - t) + 3h(x_{j+3} - t)^2 - 3(x_{j+3} - t)^3 & , x_{j+2} \leq t \leq x_{j+3} \\ (x_{j+4} - t)^3 & , x_{j+3} \leq t \leq x_{j+4} \\ 0 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (1.49)$$

şekline dönüşür ve

$$B_j = \frac{1}{h_j} K(t) = \frac{1}{h^3} \Delta^4 F_i(x_j) , \quad j = -1, \dots, n+1 \quad (1.50)$$

kübik B-spline elde edilir.

Diğer yandan  $[a, b]$  aralığının  $x_j$  noktalarındaki bölüntüsü,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  ve  $\phi_j(x)$ ,  $x_j$  bölünme noktalarındaki kübik B-spline'lar olsun.  $\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$  spline kümesinin  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir baz oluşturduğu bilinmektedir.

$U(x, t)$  analitik çözümüne bir yaklaşık çözüm olan  $U_N(x, t)$ , spline fonksiyonlar yardımıyla

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.51)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada  $\phi_m$  kübik B-spline fonksiyonu;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3 & , x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & , x \in [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & , x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & , x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (1.52)$$

olarak tanımlı ve  $h = (x_{m+1} - x_m)$  dir.  $\phi_m(x)$  spline fonksiyonu ve onun ilk iki türevi  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığının dışında sıfırdır.  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı dört ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Şimdi de  $x_m$  noktasında  $U(x_m)$  yaklaşımını belirleyelim. (1.51) yaklaşık çözümünden

$$U(x_m) = \delta_{m-1}\phi_{m-1}(x_m) + \delta_m\phi_m(x_m) + \delta_{m+1}\phi_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2}\phi_{m+2}(x_m) \quad (1.53)$$

olup ayrıca

$$\phi_{m-1}(x_m) = \frac{1}{h^3} (x_{m+1} - x_m)^3 = 1$$

$$\phi_m(x_m) = \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x_m) + 3h(x_{m+1} - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - x_m)^3] = 4$$

$$\phi_{m+1}(x_m) = \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_m - x_{m+1}) + 3h(x_m - x_{m+1})^2 - 3(x_m - x_{m+1})^3] = 1$$

$$\phi_{m+2}(x_m) = \frac{1}{h^3} [(x_m - x_{m+2})^3] = 0$$

(1.54)

eşitliklerinden

$$U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \quad (1.55)$$

olarak bulunur. Şimdi benzer yolla  $x_m$  noktasında  $U'(x_m)$  yaklaşık türevini belirleyelim. Bunun

için

$$U'(x_m) = \delta_{m-1}\phi'_{m-1}(x_m) + \delta_m\phi'_m(x_m) + \delta_{m+1}\phi'_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2}\phi'_{m+2}(x_m) \quad (1.56)$$

ve

$$\begin{aligned}
\phi'_{m-1}(x_m) &= -\frac{3}{h^3}(x_{m+1} - x_m)^2 = -\frac{3}{h} \\
\phi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[-3h^2 - 6h(x_{m+1} - x_m) + 9(x_{m+1} - x_m)^2] = 0 \\
\phi'_{m+1}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[3h^2 + 6h(x_m - x_m) - 9(x_m - x_m)^2] = \frac{3}{h} \\
\phi'_{m+2}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[-3(x_m - x_m)^2] = 0
\end{aligned} \tag{1.57}$$

eşitliklerinin de kullanılmasıyla

$$U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \tag{1.58}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$U''(x_m) = \delta_{m-1}\phi''_{m-1}(x_m) + \delta_m\phi''_m(x_m) + \delta_{m+1}\phi''_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2}\phi''_{m+2}(x_m) \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
\phi''_{m-1}(x_m) &= \frac{6}{h^3}(x_{m+1} - x_m) = \frac{6}{h^2} \\
\phi''_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[6h - 18(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{12}{h^2} \\
\phi''_{m+1}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[6h + 18(x_m - x_m)] = \frac{6}{h^2} \\
\phi''_{m+2}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[6(x_m - x_m)] = 0
\end{aligned} \tag{1.60}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla da  $x_m$  noktasındaki ikinci türev ;

$$U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \tag{1.61}$$

olarak elde edilir.

**Tablo 1.4:** Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$\phi'_m(x)$	0	$-3/h$	0	$3/h$	0
$\phi''_m(x)$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0

Tablo 1.4 de diğer bölümlerde kullanacağımız bölünme noktalarında elde edilen  $\phi_m(x), \phi'_m(x)$  ve  $\phi''_m(x)$  kübik B-spline eşitlikleri verilmiştir.

## II.BÖLÜM

### BİR BOYUTLU LİNEER ISI DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE COLLOCATION METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

$\alpha$  pozitif bir parametre,  $t$  ve  $x$  türevi göstermek üzere  $[0,1]$  aralığında tanımlı

$$\alpha^2 U_{xx} = U_t \quad (2.1)$$

formundaki bir boyutlu lineer ısı denkleminin

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.2)$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = \sin(\pi x) \quad a \leq x \leq b \quad (2.3)$$

başlangıç şartı altındaki sayısal çözümünü araştıracağız.

Yukarıda vermiş olduğumuz başlangıç ve sınır şartları altındaki ısı denklemini için analitik çözüm

$$U(x,t) = e^{-\pi^2 \alpha^2 t} \sin(\pi x) \quad (2.4)$$

olarak verilmiştir [1].

$x_j$ 'ler,  $[0,1]$  tanım aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad h = x_j - x_{j-1} > 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

olsun. (2.1)'de tanımlanan bir boyutlu lineer ısı denklemini

$$\alpha^2 U_{xx} - U_t = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.5)$$

formunda tekrar yazılır ve (2.5) denkleminde  $f = \alpha^2 U_{xx}$  olmak üzere zamana göre türev için sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa

$$\frac{1}{\Delta t} (U^n - U^{n+1}) + (1-\theta) f^n + \theta f^{n+1} = 0 \quad (2.6)$$

bulunur ve denklemin düzenlenmesiyle

$$U^n - U^{n+1} + \Delta t(1-\theta) f^n + \Delta t \theta f^{n+1} = 0 \quad (2.7)$$

elde edilir.

Denklem lineer olduğu için her  $x_m$  bölünme noktasında  $f$  yerine değeri yazılırsa;

$$U_m^n - U_m^{n+1} + \Delta t(1-\theta) \alpha^2 (U_{xx})_m^n + \Delta t \theta \alpha^2 (U_{xx})_m^{n+1} = 0 \quad (2.8)$$

sonucuna varılır. Kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak (2.8) düzenlenirse

$$L_1 = \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n \quad L_2 = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n)$$

$$L_3 = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)$$

olmak üzere;

$$\delta_{m-1}^{n+1}\left(1 - \frac{6}{h^2}\Delta t\theta\alpha^2\right) + \delta_m^{n+1}\left(4 + \frac{12}{h^2}\Delta t\theta\alpha^2\right) + \delta_{m+1}^{n+1}\left(1 - \frac{6}{h^2}\Delta t\theta\alpha^2\right) = L_1 + \Delta t(1-\theta)\alpha^2 L_3 \quad (2.9)$$

denklem sistemine ulaşılır. Bu sistem  $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}\}$  bilinmeyenler vektörü olmak üzere üçgensel bir matris sistemine karşılık gelir. Bu matris sitemi  $N+3$  bilinmeyen  $N+1$  denklemden oluşan bir sistemdir. (2.2) sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} U(x_0) = \delta_{-1}^{n+1} + 4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1} = 0 &\Rightarrow \delta_{-1}^{n+1} = -(4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1}) \\ U(x_N) = \delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1} + \delta_{N+1}^{n+1} = 0 &\Rightarrow \delta_{N+1}^{n+1} = -(\delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (2.8) denkleminde kullanıldığında Thomas algoritmasıyla çözülebilen  $(N+1) \times (N+1)$  tipinde yeni bir matris sistemi bulunur.

## 2.1 Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar

İlk zaman adımında ( $t=0$  anında), (2.3) başlangıç şartı kullanılarak  $d^0 = \{\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0\}$  başlangıç vektörü hesaplanabilir. Kübik B-spline eşitlikleri yardımıyla da başlangıç vektörü kullanılarak  $t=0$  anında  $x_m$ ,  $m=0,1,\dots,N$  bölünme noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^0 - 2\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0) \end{aligned}$$

değerleri bulunabilir.

$d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$  ikinci zaman adımındaki bilinmeyenler vektörü hesaplanırken (2.9)

denkleminde  $\theta=1$  alarak kapalı çözüm araştırılırsa (2.9) denklemini

$$L_1 = \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n$$

olmak üzere;

$$\delta_{m-1}^{n+1} \left(1 - \frac{6}{h^2} \Delta t \alpha^2\right) + \delta_m^{n+1} \left(4 + \frac{12}{h^2} \Delta t \alpha^2\right) + \delta_{m+1}^{n+1} \left(1 - \frac{6}{h^2} \Delta t \alpha^2\right) = L_1 \quad (2.11)$$

denkleme dönüşür. (2.11) denklem sistemi  $N + 3$  bilinmeyen  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistemdir. (2.10) olarak elde edilen sınır şartları bu zaman adımı için kullanılırsa iki bilinmeyen elimine edilerek sistem  $(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde yeni bir denklem sistemine dönüşür. Bu yeni

denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Böylece  $d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$

bilinmeyenler vektörü elde edilir ve kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarındaki;

$$U(x_m) = \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1$$

$$U'(x_m) = \frac{3}{h} (\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1)$$

$$U''(x_m) = \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1)$$

değerleri hesaplanabilir.

$d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$  üçüncü zaman adımıdaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak

için (2.9) denkleminde  $\theta = \frac{1}{2}$  olarak Crank Nicolson yaklaşımı kullanılırsa (2.9) denklemi

$$L_1 = \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1 \quad L_2 = \frac{3}{h} (\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1)$$

$$L_3 = \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1)$$

olmak üzere;

$$\delta_{m-1}^2 \left(1 - \frac{3}{h^2} \Delta t \alpha^2\right) + \delta_m^2 \left(4 + \frac{6}{h^2} \Delta t \alpha^2\right) + \delta_{m+1}^2 \left(1 - \frac{3}{h^2} \Delta t \alpha^2\right) = L_1 + \frac{\Delta t}{2} \alpha^2 L_3 \quad (2.12)$$

denkleme dönüşür. (2.12) denklem sistemi  $N + 3$  bilinmeyen  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistem olup (2.10) olarak elde edilen sınır şartları bu zaman adımıda kullanılırsa yeni denklem sistemi  $(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde yeni bir sisteme dönüşür. Bu yeni denklem sistemi

de Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Böylece  $d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$  bilinmeyenler

vektörü elde edilir ve kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarındaki

$$U(x_m) = \delta_{m-1}^2 + 4\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2$$

$$U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^2 - \delta_{m-1}^2)$$

$$U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^2 - 2\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2)$$

değerleri hesaplanabilir.

Üçüncü zaman adımından sonraki tüm  $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}\}$  bilinmeyen vektörleri hesaplanırken önceki iki zaman adımında bulunan bilinmeyen vektörleri kullanılır. Bu şekilde geriye kalan tüm zaman adımlarında üçüncü adımda yapılan benzer işlemlerle hesaplamalar yapılabilir.

Sayısal çözümün doğruluğunu kontrol edebilmek için denklemin analitik çözümüyle beraber  $[0,1]$  tanım aralığında (2.3) başlangıç şartı ve (2.2) sınır şartı kullanılmıştır. Sayısal çözümde  $\alpha = 1$  parametresi ve zaman artımı olarak da  $\Delta t = 0.00001$  alınmıştır. Farklı konum artımları için hesaplanan sayısal çözümler Tablo 2.1 de verilmiştir. Tüm sonuçlar incelendiğinde adım aralığı küçüldükçe sayısal metodun daha iyi sonuçlar verdiği görülmüş,  $h = 0.0125$  için yapılan hesaplamalarda en iyi sonuçlar bulunmuştur.

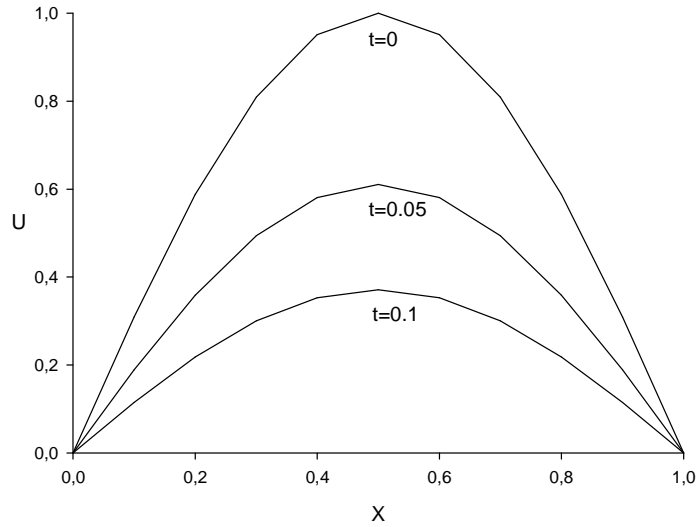
**Tablo2.1:**  $\alpha = 1$ ,  $\Delta t = 0.00001$  ve  $t = 0.1$  için sonuçların kıyaslanması

$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	Analitik
0.1	0.11425	0.11495	0.11513	0.11517	0.11518	0.11517
0.2	0.21732	0.21865	0.21898	0.21907	0.21909	0.21907
0.3	0.29911	0.30094	0.30140	0.30152	0.30155	0.30152
0.4	0.35163	0.35378	0.35432	0.35446	0.35449	0.35446
0.5	0.36972	0.37199	0.37256	0.37270	0.37273	0.37270
0.6	0.35163	0.35378	0.35432	0.35446	0.35449	0.35446
0.7	0.29911	0.30094	0.30140	0.30152	0.30155	0.30152
0.8	0.21732	0.21865	0.21898	0.21907	0.21909	0.21907
0.9	0.11425	0.11495	0.11513	0.11517	0.11518	0.11517

$\alpha$ ,  $h$  ve  $\Delta t$  için seçilen farklı durumlarda hesaplanan sayısal sonuçlar ile analitik sonuçlar Tablo 2.2'de verildi.  $\alpha$  için küçük değerler alındığında sayısal yöntemin daha iyi sonuçlar verdiği görüldü.

**Tablo 2.2:**  $h = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.0001$  iken  $\alpha = 1.0, \alpha = 0.1, \alpha = 0.01$  için sonuçların kıyaslanması

$x$	$t$	$\alpha = 1$		$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.01$	
		Nümerik	Analitik	Nümerik	Analitik	Nümerik	Analitik
0.25	0.4	0.01365	0.01364	0.67971	0.67973	0.70683	0.70683
	0.6	0.00190	0.00189	0.66645	0.66645	0.70669	0.70669
	0.8	0.00026	0.00026	0.67974	0.65342	0.70655	0.70655
	1.0	0.00004	0.00003	0.64065	0.64065	0.70641	0.70641
	3.0	0.00000	0.00000	0.52585	0.52589	0.70501	0.70501
0.50	0.4	0.01931	0.01929	0.96126	0.96129	0.99961	0.99961
	0.6	0.00268	0.00268	0.94250	0.94250	0.99941	0.99941
	0.8	0.00037	0.00037	0.92408	0.92407	0.99921	0.99921
	1.0	0.00005	0.00005	0.90602	0.90601	0.99901	0.99901
	3.0	0.00000	0.00000	0.74309	0.74372	0.99704	0.99704
0.75	0.4	0.01365	0.01364	0.67970	0.67973	0.70682	0.70683
	0.6	0.00190	0.00189	0.66645	0.66645	0.70669	0.70669
	0.8	0.00026	0.00026	0.65342	0.65342	0.70655	0.70655
	1.0	0.00004	0.00003	0.64065	0.64065	0.70641	0.70641
	3.0	0.00000	0.00000	0.52585	0.52589	0.70501	0.70501



**Şekil 2.1:**  $\alpha = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  için sayısal çözüm

Şekil 2.1'de çizilen grafik  $\alpha = 1$  iken farklı  $t$  zamanlarında sayısal çözümün hareketini göstermektedir.

## 2.2 Metodun Kararlılık Analizi

Şimdi, Fourier kararlılık metodunu kullanarak kübik B-spline metodunun kararlılığını araştıralım.

$$U_m^{n+1} - U_m^n - \alpha^2 \Delta t (1 - \theta) (U_{xx})_m^n - \alpha^2 \theta \Delta t (U_{xx})_m^{n+1} = 0$$

denkleminde kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n - 4\delta_m^n - \delta_{m+1}^n - \frac{6}{h^2} \alpha^2 \Delta t (1 - \theta) (\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) \\ & - \frac{6}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t (\delta_{m-1}^{n+1} - 2\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

bulunur ve buradan da

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1} \left(1 - \frac{6}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t\right) + \delta_m^{n+1} \left(4 + \frac{12}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t\right) + \delta_{m+1}^{n+1} \left(1 - \frac{6}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t\right) \\ & = \delta_{m-1}^n \left[1 + \frac{6}{h^2} \alpha^2 \Delta t (1 - \theta)\right] + \delta_m^n \left[4 - \frac{12}{h^2} \alpha^2 \Delta t (1 - \theta)\right] + \delta_{m+1}^n \left[1 + \frac{6}{h^2} \alpha^2 \Delta t (1 - \theta)\right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Fourier kararlılık yöntemi gereğince  $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  eşitlikleri yukarıdaki denkleme uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \xi^n e^{i\beta m h} \left[ \xi e^{-i\beta h} \left(1 - \frac{6}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t\right) + \xi \left(4 + \frac{12}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t\right) + \xi e^{i\beta h} \left(1 - \frac{6}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t\right) \right] \\ & = \xi^n e^{i\beta m h} \left\{ e^{-i\beta h} \left[1 + \frac{6}{h^2} \alpha^2 (1 - \theta) \Delta t\right] + \left[4 - \frac{12}{h^2} \alpha^2 (1 - \theta) \Delta t\right] + e^{i\beta h} \left[1 + \frac{6}{h^2} \alpha^2 (1 - \theta) \Delta t\right] \right\} \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Burada  $\beta h = \mu$  ve  $e^{i\mu} = \cos \mu + i \sin \mu$  ve  $e^{-i\mu} = \cos \mu - i \sin \mu$  eşitlikleri kullanılırsa,

$$\xi \left[ \cos \mu \left(2 - \frac{12}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t\right) + 4 + \frac{12}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t \right] = \cos \mu \left[2 + \frac{12}{h^2} \alpha^2 (1 - \theta) \Delta t\right] + 4 - \frac{12}{h^2} \alpha^2 (1 - \theta) \Delta t$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi \left[ 2 \cos \mu + 4 + \frac{12}{h^2} \alpha^2 \theta \Delta t (1 - \cos \mu) \right] = 2 \cos \mu + 4 - \frac{12}{h^2} \alpha^2 (1 - \theta) \Delta t (1 - \cos \mu)$$

denkleminde ulaşılır. Bu denklemde

$$A = 2 \cos \mu + 4$$

$$B = \frac{12}{h^2} \alpha^2 \Delta t (1 - \cos \mu)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\xi(A + \theta B) = A - (1 - \theta)B \quad (2.13)$$

bulunur. Fourier kararlılık metodu gereğince  $|\xi| \leq 1$  olması gerektiğinden, bu durumda (2.13) denklemini için;

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sqrt{\frac{(A-(1-\theta)B)^2}{(A+\theta B)^2}} \leq 1 \\ 0 &\leq \frac{(A-(1-\theta)B)^2}{(A+\theta B)^2} \leq 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

şartına ulaşılır. Burada (2.14) denklemini için eşitsizliğin sol tarafının doğrulandığı aşıkardır. Buna göre

$$(A-(1-\theta)B)^2 \leq (A+\theta B)^2 \quad (2.15)$$

eşitsizliğin sağlandığı gösterilmelidir. Böylece (2.14) düzenlenirse

$$-2AB + B^2(1-2\theta) \leq 0 \quad (2.16)$$

koşuluna ulaşılır. Bu eşitsizlikte  $B^2 \geq 0$  ve  $2AB \geq 0$  olduğundan (2.16) eşitsizliğinin her

durumda sağlanması  $1-2\theta \leq 0$  olmasına bağlıdır. Bu durumda ise  $\frac{1}{2} \leq \theta$  olur.  $\theta \in [0,1]$

olduğu bilindiğinden, bu taktirde Fourier kararlılık metoduna göre kübik b-spline metodu

$\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  aralığında iken kararlıdır.

### III.BÖLÜM

#### YANAL ISI KAYBI DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE COLLOCATION METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde bir cismin yanal yüzeyinde meydana gelen ısı kaybını ifade eden denklem olarak verilen yanal ısı kaybı denkleminin Kübik B-spline Collocation Metodu ile sayısal çözümü incelendi.

$x$  ve  $t$  türevi göstermek üzere  $[0,1]$  aralığında tanımlı

$$U_t = U_{xx} - U \quad (3.1)$$

formundaki yanal ısı kaybı denkleminin

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \quad t > 0 \quad (3.2)$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

başlangıç şartı altındaki sayısal çözüm elde edilmiştir.

Yukarıda vermiş olduğumuz başlangıç ve sınır şartları altındaki yanal ısı kaybı denklemi için analitik çözüm

$$U(x,t) = e^{-(\pi^2+1)t} \sin(\pi x) \quad (3.4)$$

olarak verilmiştir [2].

$x_j$ 'ler,  $[0,1]$  tanım aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad h = x_j - x_{j-1} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

olsun. (3.1)'de tanımlanan lineer yanal ısı kaybı denklemini

$$U_t - U_{xx} + U = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.5)$$

formunda yazar ve (3.4) denkleminde  $f = U - U_{xx}$  olmak üzere zamana göre türev için sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa

$$\frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) + (1-\theta)f^n + \theta f^{n+1} = 0 \quad (3.6)$$

bulunur ve her  $x_m$  bölünme noktasında denklemin düzenlenmesiyle

$$U_m^{n+1} - U_m^n + \Delta t (1-\theta)[U_m^n - (U_{xx})_m^n] + \Delta t \theta [U_m^{n+1} - (U_{xx})_m^{n+1}] = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak (3.7) düzenlenirse

$$L_1 = \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n, \quad L_2 = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n), \quad L_3 = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1} \left(1 + \theta \Delta t - \frac{6}{h^2} \theta \Delta t\right) + \delta_m^{n+1} \left(4 + 4\theta \Delta t + \frac{12}{h^2} \theta \Delta t\right) + \delta_{m+1}^{n+1} \left(1 + \theta \Delta t - \frac{6}{h^2} \theta \Delta t\right) \\ & = L_1 - (1 - \theta) \Delta t L_1 + (1 - \theta) \Delta t L_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

denkleme sistemine ulaşılır. Bu sistem  $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}\}$  bilinmeyenler vektörü olmak üzere üçgensel bir matris sistemine karşılık gelir. Bu matris sistemi  $N + 3$  bilinmeyen  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistemdir. (3.2) sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} U(x_0) = \delta_{-1}^{n+1} + 4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1} = 0 & \Rightarrow \delta_{-1}^{n+1} = -(4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1}) \\ U(x_N) = \delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1} + \delta_{N+1}^{n+1} = 0 & \Rightarrow \delta_{N+1}^{n+1} = -(\delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (3.8) denkleminde kullanıldığında Thomas algoritmasıyla çözülebilen  $(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde yeni bir matris sistemi elde edilir.

### 3.1 Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar

İlk zaman adımında ( $t = 0$  anında), (3.3) başlangıç şartı kullanılarak  $d^0 = \{\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0\}$  başlangıç vektörü hesaplanabilir. Kübik B-spline eşitlikleri yardımıyla da başlangıç vektörü kullanılarak  $t = 0$  anında  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h} (\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1}^0 - 2\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0) \end{aligned}$$

değerleri bulunabilir.

$$d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\} \text{ ikinci zaman adımındaki bilinmeyenler vektörü hesaplanırken (3.8)}$$

denkleminde  $\theta = 1$  alarak kapalı çözüm araştırılırsa (3.8) denkleminde

$$L_1 = \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n$$

olmak üzere ;

$$\delta_{m-1}^{n+1} \left(1 + \Delta t - \frac{6}{h^2} \Delta t\right) + \delta_m^{n+1} \left(4 + 4\Delta t + \frac{12}{h^2} \Delta t\right) + \delta_{m+1}^{n+1} \left(1 + \Delta t - \frac{6}{h^2} \Delta t\right) = L_1 \quad (3.10)$$

denkleminde dönüşür. (3.10) denkleminde  $N + 3$  bilinmeyen  $N + 1$  denklemden oluşan bir sistemdir. (3.9) olarak elde edilen sınır şartları bu zaman adımı için kullanılırsa iki bilinmeyen

elimine edilerek sistem  $(N+1) \times (N+1)$  tipinde yeni bir denklem sistemine dönüşür. Bu yeni denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Böylece  $d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$  bilinmeyenler vektörü elde edilir ve kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarındaki;

$$U(x_m) = \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1$$

$$U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1)$$

$$U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1)$$

değerleri hesaplanabilir.

$d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$  üçüncü zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak

için (3.8) denklemde  $\theta = \frac{1}{2}$  olarak Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılırsa

$$L_1 = \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1 \qquad L_2 = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1)$$

$$L_3 = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1)$$

olmak üzere;

$$\delta_{m-1}^2 \left(1 + \frac{\Delta t}{2} - \frac{3}{h^2} \Delta t\right) + \delta_m^2 \left(4 + 2\Delta t + \frac{6}{h^2} \Delta t\right) + \delta_{m+1}^2 \left(1 + \frac{\Delta t}{2} - \frac{3}{h^2} \Delta t\right) = L_1 - \frac{\Delta t}{2} L_1 + \frac{\Delta t}{2} L_3 \quad (3.11)$$

denkleme dönüşür. (3.11) denklem sistemi  $N+3$  bilinmeyen  $N+1$  denklemden oluşan bir sistem olup (3.9) olarak elde edilen sınır şartları bu zaman adımında kullanılırsa yeni denklem sistemi  $(N+1) \times (N+1)$  tipinde yeni bir sisteme dönüşür. Bu yeni denklem sistemi de Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Böylece  $d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$  bilinmeyenler vektörü elde edilir ve kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarındaki

$$U(x_m) = \delta_{m-1}^2 + 4\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2$$

$$U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^2 - \delta_{m-1}^2)$$

$$U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^2 - 2\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2)$$

değerleri hesaplanabilir.

Üçüncü zaman adımından sonraki tüm  $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}\}$  bilinmeyenler vektörleri hesaplanırken önceki iki zaman adımında bulunan bilinmeyenler vektörleri kullanılır. Bu şekilde geriye kalan tüm zaman adımlarında üçüncü adımda yapılan benzer işlemlerle hesaplamalar yapılabilir.

Sayısal çözümün doğruluğunu kontrol edebilmek için denklemin analitik çözümüyle beraber  $[0,1]$  tanım aralığında (3.3) başlangıç şartı ve (3.2) sınır şartı kullanılmıştır. Sayısal çözümde zaman artımı olarak  $\Delta t = 0.01$  alınmıştır. Konum artımları sırasıyla  $h = 0.25$ ,  $h = 0.125$  ve  $h = 0.0625$  olmak üzere, hesaplanan sayısal çözümler Tablo 3.1 de verilmiştir. Tüm sonuçlar incelendiğinde adım aralığı küçüldükçe sayısal metodun daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir ve  $h = 0.0625$  için yapılan hesaplamalarda en iyi sonuçlar bulunmuştur.

**Tablo 3.1:**  $\Delta t = 0.01$  için sonuçların kıyaslanması

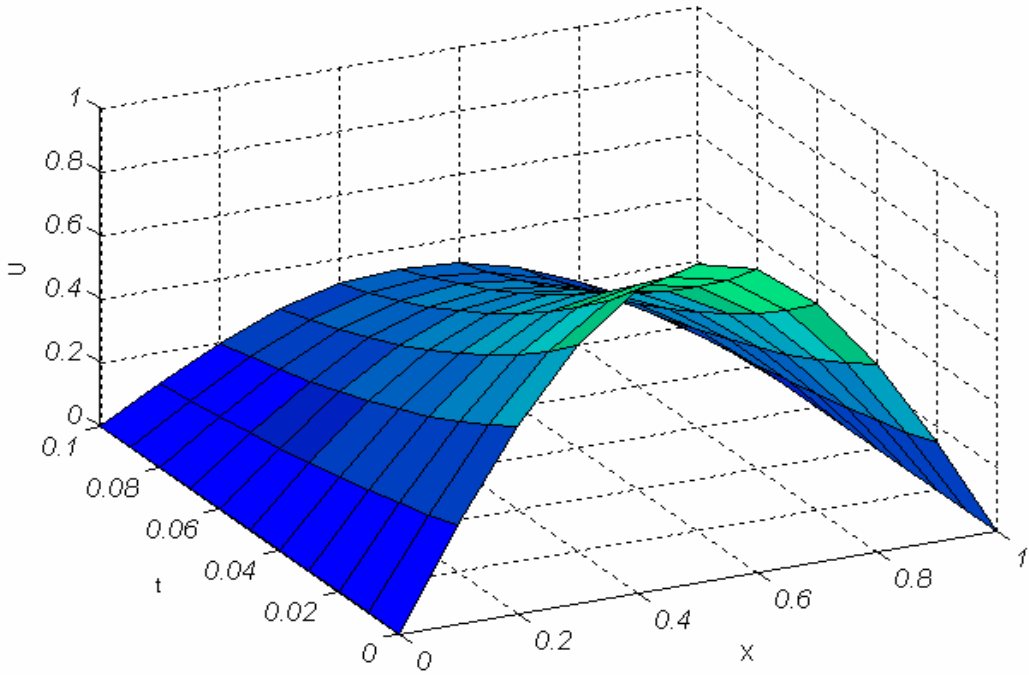
$x$	$t$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	Analitik
0.25	0.00	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
	0.05	0.4024	0.4102	0.4120	0.4106
	0.10	0.2276	0.2365	0.2388	0.2385
	0.15	0.1287	0.1364	0.1384	0.1385
	0.20	0.0728	0.0787	0.0802	0.0804
	0.25	0.0412	0.0454	0.0465	0.0467
0.50	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.05	0.5690	0.5800	0.5827	0.5807
	0.10	0.3218	0.3345	0.3377	0.3372
	0.15	0.1820	0.1929	0.1957	0.1958
	0.20	0.1029	0.1113	0.1134	0.1137
	0.25	0.0582	0.0642	0.0657	0.0660
0.75	0.00	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
	0.05	0.4024	0.4102	0.4120	0.4106
	0.10	0.2276	0.2365	0.2388	0.2385
	0.15	0.1287	0.1364	0.1384	0.1385
	0.20	0.0728	0.0787	0.0802	0.0804
	0.25	0.0412	0.0454	0.0465	0.0467

$\Delta t = 0.00001$  ve  $t = 0.1$  iken farklı adım aralıkları ile elde edilen sayısal sonuçlar ve analitik sonuçlar Tablo 3.2'de verildi. Buna göre, adım aralığı küçüldükçe sonuçların analitik çözüme daha çok yaklaştığı ve  $h = 0.025$  'ten sonraki adımlarda analitik çözümle neredeyse aynı olduğu görülür.

**Tablo 3.2:**  $t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.00001$  için sonuçların kıyaslanması

$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	Analitik
0.1	0.1039	0.1041	0.1042	0.1042	0.1042	0.1042
0.2	0.1977	0.1978	0.1982	0.1982	0.1982	0.1982
0.3	0.2721	0.2723	0.2727	0.2728	0.2728	0.2728
0.4	0.3198	0.3201	0.3206	0.3207	0.3207	0.3207
0.5	0.3363	0.3366	0.3371	0.3372	0.3372	0.3372
0.6	0.3198	0.3201	0.3206	0.3207	0.3207	0.3207
0.7	0.2721	0.2723	0.2727	0.2728	0.2728	0.2728
0.8	0.1977	0.1978	0.1982	0.1982	0.1982	0.1982
0.9	0.1039	0.1040	0.1041	0.1042	0.1042	0.1042

Farklı adım aralıklarında elde edilen sonuçlar ile tam çözüm arasındaki uyum yukarıda verilen tablolarda net bir şekilde görülmektedir.



**Şekil 3.1:**  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  için çözüm

Şekil 3.1'de çizilen grafik  $h = 0.1$  için farklı zaman adımlarındaki yaklaşık çözümün hareketini göstermektedir.

### 3.4 Metodun Kararlılık Analizi

Şimdi, Fourier kararlılık metodunu kullanarak kübik B-spline Collocation Metodunun kararlılığını araştıralım.

$$U_m^{n+1} - U_m^n + \Delta t(1-\theta)[U_m^n - (U_{xx})_m^n] + \theta \Delta t[U_m^{n+1} - (U_{xx})_m^{n+1}] = 0$$

denkleminde kübik B-Spline eşitlikleri kullanılarak denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (\delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1}) - (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) - \Delta t(1-\theta)[\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n] \\ & - \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)] + \Delta t \theta [\delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} \\ & - \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^{n+1} - 2\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1})] = 0 \end{aligned}$$

bulunur ve buradan da

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1}(1 + \theta \Delta t - \frac{6}{h^2} \theta \Delta t) + \delta_m^{n+1}(4 + 4\theta \Delta t + \frac{12}{h^2} \theta \Delta t) + \delta_{m+1}^{n+1}(1 + \theta \Delta t - \frac{6}{h^2} \theta \Delta t) \\ & = \delta_{m-1}^n[1 - (1-\theta) \Delta t + \frac{6}{h^2} (1-\theta) \Delta t] + \delta_m^n[4 - 4(1-\theta) \Delta t - \frac{12}{h^2} (1-\theta) \Delta t] \\ & + \delta_{m+1}^n[1 - (1-\theta) \Delta t + \frac{6}{h^2} (1-\theta) \Delta t] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Fourier kararlılık yöntemi gereğince  $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  eşitlikleri yukarıdaki denkleme uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \xi^n e^{i\beta m h} [\xi e^{-i\beta h} (1 + \theta \Delta t - \frac{6}{h^2} \theta \Delta t) + \xi (4 + 4\theta \Delta t + \frac{12}{h^2} \theta \Delta t) + \xi e^{i\beta h} (1 + \theta \Delta t - \frac{6}{h^2} \theta \Delta t)] \\ & = \xi e^{i\beta m h} \{ e^{-i\beta h} [1 - (1-\theta) \Delta t + \frac{6}{h^2} (1-\theta) \Delta t] + [4 - 4(1-\theta) \Delta t - \frac{12}{h^2} (1-\theta) \Delta t] \\ & + e^{i\beta h} [1 - (1-\theta) \Delta t + \frac{6}{h^2} (1-\theta) \Delta t] \} \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\beta h = \alpha$  ve  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  ve  $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$  eşitlikleri kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} & \xi [\cos \alpha (2 + 2\theta \Delta t - \frac{12}{h^2} \theta \Delta t) + (4 + 4\theta \Delta t + \frac{12}{h^2} \theta \Delta t)] \\ & = \cos \alpha [2 - 2(1-\theta) \Delta t + \frac{12}{h^2} (1-\theta) \Delta t] + [4 - 4(1-\theta) \Delta t - \frac{12}{h^2} (1-\theta) \Delta t] \end{aligned}$$

denkleminde ulaşılır. Bu denklemde;

$$A = 2 \cos \alpha + 4$$

$$B = \frac{12}{h^2} \Delta t (1 - \cos \alpha)$$

$$C = 2 \Delta t (2 + \cos \alpha)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\xi(A + B\theta + C\theta) = A - (1 - \theta)B - (1 - \theta)C \quad (3.12)$$

elde edilir. Fourier kararlılık metodu gereğince  $|\xi| \leq 1$  olması gerektiğinden, bu durumda (3.12) denklemini için;

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sqrt{\frac{[A - (1 - \theta)(B + C)]^2}{[A + (B + C)\theta]^2}} \leq 1 \\ 0 &\leq \frac{[A - (1 - \theta)(B + C)]^2}{[A + (B + C)\theta]^2} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

şartına ulaşılır. Burada (3.13) için eşitsizliğin sol tarafının doğrulandığı aşıkardır. Buna göre

$$[A - (1 - \theta)(B + C)]^2 \leq [A + \theta(B + C)]^2 \quad (3.14)$$

eşitsizliğin sağlandığı gösterilmelidir. Böylece (3.14) düzenlenirse

$$-2A(B + C) + (B + C)^2(1 - 2\theta) \leq 0 \quad (3.15)$$

şartına ulaşılır. Burada  $(B + C)^2 \geq 0$ ,  $2AC \geq 0$  ve  $2AB \geq 0$  olduğundan (3.15) eşitsizliğinin her durumda sağlanması  $1 - 2\theta \leq 0$  olmasına bağlıdır.  $\theta \in [0, 1]$  olduğu bilindiğinden, bu

durumda Fourier kararlılık metoduna göre kübik B-spline Collocation Metodu  $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$

aralığında iken kararlıdır.

## KAYNAKLAR

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L., The Theory of Splines and Their Application, Academic Pres, 1967.
- [2] Ali A.H.A., Gardner L.R.T., Gardner G.A., A Collocation Method For Burgers' Equation Using Cubic Splines, Comp. Math. Appl. Mech. Eng., Pp.325-337, 100(1992).
- [3] Boyce W.E., DiPrima R.C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Rensselaer Polytechnic Institute, Pp. 453-459.
- [4] Çağlar H., Özer M., Çağlar N., The Numerical Solution of The One-dimensional Heat Equation by Using Third Degree B-spline Functions, Chaos, Solitons & Fractals, 2007.
- [5] Dağ İ., Irk D., Saka B., A Numerical Solution of the Burgers' Equation Using Cubic B-splines, Appl. Maths. and Comp. , Vol 163(1), Pp.199-211, 2005.
- [6] Lapidus L., Pinder G.F., Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering. John Wiley and Sons, Inc., 1982.
- [7] Öziş T., Esen A., Kutluay S., Numerical Solution of Burgers' Equation by Quadratic B-spline Finite Elements, Appl. Maths. and Comp., Vol 165(1),Pp. 237- 249, 2005.
- [8] Prenter P.M., Splines and Variational Methods. John Wiley, New York, pp.78,1975.
- [9] Rosenberg, D.U.,In: Methods for Solution of Partial Differential Equations. American Elsevier Publishing Inc., New York, Vol. 113, 1969.
- [10] Rubin S.G., Khosla P.K., Higher-order Numerical Solutions Using Cubic Splines, AIAA Journal, Vol 14(7), 851-858, 1976.
- [11] Wazwaz A.M., Partial Differential Equations Methods and Applications, Saint Xavier University, Pp. 84-87, 2002.

## C CUBIC B-SPLINE COLLOCATION METHOD

```
PARAMETER (N = 4)
DOUBLE PRECISION A,U, BE, F, PIS
DOUBLE PRECISION ALLL, G, G1, G2, G3, LA, U0, U1, M0, M1, MM
DOUBLE PRECISION YH, TIME, H, UN, A0, AN
DIMENSION U(0:N), A(0:N, 0:2), F(0:N)
DIMENSION ALLL(-1:N+1), BE(-1:N+1)
DIMENSION G(-1:N+1), G1(-1:N+1), G2(-1:N+1), G3(-1:N+1)
OPEN (10, FILE = 'TAB1A.dat', STATUS = 'UNKNOWN')
XB = 0
KTIME = 26
TIME = 0.01
H = 0.25
X = XB
PIS = 3.1416
LA = 1
M = N / 2
DO 1 I = 0, N
U(I) = DSIN(PIS * X)
WRITE(10, 50) X, U(I)
X = X + H
1 CONTINUE

C X = XB + (M + 1) * H
C II = M - 1
C DO 200 I = M + 1, N
C U(I) = U(II)
C WRITE(10, 50) X, U(I)
C X = X + H
C200 II = II - 1

50 FORMAT(1X, F7.2, 2X, F10.4)
c U0 = PIS
C UN = -PIS
c U(0) = 0
c U(1) = 0.7071
c U(2) = 1
c U(3) = 0.7071
c U(4) = 0
U0 = 0
UN = 0
```

```

A(0,1) = 4.
A(0,2) = -2.
A(N,0) = -2
A(N,1) = 4.
DO 2 I = 1, N - 1
A(I,0) = -1.
A(I,1) = 4.
2 A(I,2) = -1.
A(0,0) = 0
A(N,2) = 0
U(0) = U(0) + U0 * H / 3
U(N) = U(N) - UN * H / 3
ALLL(0) = A(0,1)
BE(0) = U(0)
DO 3 I = 1, N
ALLL(I) = A(I,1) - A(I,0) * A(I - 1, 2) / ALLL(I - 1)
BE(I) = U(I) + A(I,0) * BE(I - 1) / ALLL(I - 1)
3 CONTINUE
G(N) = BE(N) / ALLL(N)
DO 4 I = N - 1, 0, -1
G(I) = (BE(I) + A(I,2) * G(I + 1)) / ALLL(I)
4 CONTINUE
U(0) = U(0) - U0 * H / 3.
U(N) = U(N) + UN * H / 3.
G(-1) = G(1) - U0 * H / 3.
G(N + 1) = G(N - 1) + UN * H / 3.
X = XB
YMAX = -999999
COL = 0
DO 5 I = 0, N

YH = G(I - 1) + 4. * G(I) + G(I + 1)
IF(YMAX.GT.ABS(YH - U(I))) GO TO 6
YMAX = ABS(YH - U(I))
6 COL = COL + (ABS(YH - U(I))) GO TO 6
WRITE(10,53) X, T, YH
X = X + H
5 CONTINUE
51 FORMAT(1X, F7.3, 2X, F12.4, 2X, F12.4, 2X, F13.4)

DO 12 I = 0, N
DO 12 J = 0, 2

```

```

12      A(I,J) = 0
        CONTINUE
        K = 0
        T = 0
        K = K + 1
        T = T + TIME
        A0 = 0
        AN = 0
        DO 32 I = -1, N + 1
          G3(I) = G(I)
32      CONTINUE

C      DO 37 KLL = 1, 10
        U1 = G(-1) + 4.*G(0) + G(1)

        A(0,0) = 1. - TIME*(LA**2)*6./H**2
        A(0,1) = 4. + 12*TIME*(LA**2)/H**2
        A(0,2) = 1. - TIME*(LA**2)*6./H**2

        A(0,1) = A(0,1) - 4.*A(0,0)
        A(0,2) = A(0,2) - A(0,0)
        A(0,2) = -A(0,2)
        F(0) = U1

        U1 = G(N-1) + 4.G(N) + G(N+1)
        A(N,0) = 1. - TIME*(LA**2)*6./H**2
        A(N,1) = 4. + 12*TIME*(LA**2)/H**2
        A(N,2) = 1. - TIME*(LA**2)*6./H**2
        A(N,1) = A(N,1) - 4.*A(N,0)
        A(N,2) = A(N,2) - A(N,0)
        A(N,2) = -A(N,2)
        F(N) = U1

        DO 7 I = 1, N - 1
          U1 = G(I-1) + 4.G(I) + G(I+1)
          A(I,0) = -(1. - TIME*(LA**2)*6./H**2)
          A(I,1) = 4. + 12*TIME*(LA**2)/H**2
          A(I,2) = -(1. - TIME*(LA**2)*6./H**2)

          F(I) = U1

7      CONTINUE
        DO 33 I = -1, N + 1

```

```

      G(I) = G3(I)
33  CONTINUE

C     DO 34  I = 1, N - 1
C     U1 = G(I - 1) + 4G(I) + G(I + 1)
C34  CONTINUE

C     A(0,1) = A(0,1) - 4.* A(0,0)
C     A(0,2) = A(0,2) - A(0,0)
C     A(0,2) = -A(0,2)

C     A(N,1) = A(N,1) - 4.* A(N,2)
C     A(N,0) = A(N,0) - A(N,2)
C     A(N,0) = -A(N,0)

      F(0) = F(0) - A0 * A(0,0)
      F(N) = F(N) - AN * A(N,2)

      A(0,0) = 0
      A(N,2) = 0
      ALLL(0) = A(0,1)
      BE(0) = F(0)
      DO 8  I = 1, N
      ALLL(I) = A(I,1) - A(I,0) * A(I - 1,2) / ALLL(I - 1)
      BE(I) = F(I) + A(I,0) * BE(I - 1) / ALLL(I - 1)
8     CONTINUE
      G1(N) = BE(N) / ALLL(N)
      DO 9  I = N - 1, 0, -1
      G1(I) = (BE(I) + A(I,2) * G1(I + 1)) / ALLL(I)
9     CONTINUE
      G1(-1) = A0 - 4.* G1(0) - G1(1)
      G1(N + 1) = AN - 4.* G1(N) - G1(N - 1)

      DO 35  I = -1, N + 1
      YH = (G1(I) - G(I)) / 2
      G3(I) = G(I)
      G(I) = G(I) + YH

35  CONTINUE
C37  CONTINUE
      X = XB
      YMAX = -999999
      COL = 0.

```

```

DO 10 I = 0, N
YH = G1(I - 1) + 4. * G1(I) + G1(I + 1)
IF(YMAX.GT.ABS(YH - U(I))) GO TO 11
YMAX = ABS(YH - U(I))
11 COL = COL + (ABS(YH - U(I))) ** 2 * H
WRITE(10, 53) X, T, YH
X = X + H
10 CONTINUE
55 FORMAT(2(F8.5, 2X), 2X, F10.4)

```

```

DO 14 I = 0, N
DO 14 J = 0, 2
A(I, J) = 0
14 CONTINUE
DO 30 I = -1, N + 1
G3(I) = G1(I)
30 CONTINUE
K = K + 1
IF(KTIME.EQ.K) GO TO 27
T = T + TIME
PRINT*, K, T

```

```

C DO 21 KL = 1, 10
U0 = G(-1) + 4. * G(0) + G(1)
MM = (G1(-1) - 2 * G1(0) + G1(1)) * 6 / (H ** 2)
A(0, 0) = 1. - (LA ** 2) * TIME * 3. / (H ** 2)
A(0, 1) = 4. + (LA ** 2) * TIME * 6. / (H ** 2)
A(0, 2) = 1. - (LA ** 2) * TIME * 3. / (H ** 2)
A(0, 1) = A(0, 1) - 4. * A(0, 0)
A(0, 2) = A(0, 2) - A(0, 0)
A(0, 2) = -A(0, 2)
F(0) = U1 + (LA ** 2) * TIME / 2. * MM

```

```

UN = G(N - 1) + 4. * G(N) + G(N + 1)
MM = (G1(N - 1) - 2 * G1(N) + G1(N + 1)) * 6 / (H ** 2)
A(N, 0) = 1. - (LA ** 2) * TIME * 3. / (H ** 2)
A(N, 1) = 4. + (LA ** 2) * TIME * 6. / (H ** 2)
A(N, 2) = 1. - (LA ** 2) * TIME * 3. / (H ** 2)
A(N, 1) = A(N, 1) - 4. * A(N, 2)
A(N, 0) = A(N, 0) - A(N, 2)
A(N, 0) = -A(N, 0)
F(N) = U1 + (LA ** 2) * TIME / 2. * MM

```

```

DO 15 I = 1, N - 1
U0 = G(I - 1) + 4. * G(I) + G(I + 1)
MM = (G1(I - 1) - 2 * G1(I) + G1(I + 1)) * 6 / (H ** 2)
A(I, 0) = -(1. - (LA ** 2) * TIME * 3. / (H ** 2))
A(I, 1) = 4. + (LA ** 2) * TIME * 6. / (H ** 2)
A(I, 2) = -(1. - (LA ** 2) * TIME * 3. / (H ** 2))

F(I) = U1 + (LA ** 2) * TIME / 2. * MM

15 CONTINUE
DO 25 I = -1, N + 1
G1(I) = G3(I)
25 CONTINUE

C DO 26 I = 1, N - 1
C U0 = G(I - 1) + 4. * G(I) + G(I + 1)
C MM = (G1(I - 1) - 2 * G1(I) + G1(I + 1)) * 6 / (H ** 2)
C F(I) = U1 + (LA ** 2) * TIME / 2. * MM

C26 CONTINUE

C A(0, 1) = A(0, 1) - 4. * A(0, 0)
C A(0, 2) = A(0, 2) - A(0, 0)
C A(0, 2) = -A(0, 2)

C A(N, 1) = A(N, 1) - 4. * A(N, 2)
C A(N, 0) = A(N, 0) - A(N, 2)
C A(N, 0) = -A(N, 0)
F(0) = F(0) - A0 * A(0, 0)
F(N) = F(N) - AN * A(N, 2)

A(0, 0) = 0
A(N, 2) = 0
ALLL(0) = A(0, 1)
BE(0) = F(0)
DO 16 I = 1, N
ALLL(I) = A(I, 1) - A(I, 0) * A(I - 1, 2) / ALLL(I - 1)
BE(I) = F(I) + A(I, 0) * BE(I - 1) / ALLL(I - 1)
16 CONTINUE
G2(N) = BE(N) / ALLL(N)
DO 17 I = N - 1, 0, -1
G2(I) = (BE(I) + A(I, 2) * G2(I + 1)) / ALLL(I)
17 CONTINUE

```

```

      G2(-1) = A0 - 4.*G2(0) - G2(1)
      G2(N+1) = AN - 4.*G2(N) - G2(N-1)
      DO 22 I = -1, N
      YH = (G2(I) - G1(I))/2.
      G3(I) = G1(I)
      G1(I) = G1(I) + YH
22      CONTINUE

C21      CONTINUE

c      IF(K.EQ.500)THEN
c      WRITE(10,1200)K
C1200   FORMAT(2x,I5)
      X = XB
      YMAX = -999999
      COL = 0
      DO 18 I = 0, N
      YH = G2(I-1) + 4.*G2(I) + G2(I+1)
      IF(YMAX.GT.ABS(YH-U(I))) GO TO 19
      YMAX = ABS(YH-U(I))
19      COL = COL + (ABS(YH-U(I)))**2*H

      WRITE(10,53)X,T,YH
      X = X + H
18      CONTINUE
C      ENDIF
53      FORMAT(1X,F7.3,2X,F7.3,2X,F12.5)
      DO 31 I = -1, N+1
      G(I) = G1(I)
      G1(I) = G2(I)
      G3(I) = G2(I)
31      CONTINUE
      GO TO 20
27      STOP
      END

```

## ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Duygu DÖNMEZ

Doğum Tarihi : 20. 04. 1983

Doğum Yeri : Urla / İzmir

İlkokulu Balıklıova İlkokulunda, Orta okulu Urla Lisesi Orta okul kısmında, liseyi ise İzmir Kız Lisesi'nde okudu. 2000 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başlayıp, 2004 yılında lisans öğrenimini Bölüm İnciliğiyle tamamlamıştır. 2004-2005 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programında Yüksek Lisansa başlamış olup, halen öğrenimine devam etmektedir.