

**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ANİ İNVARYANTLAR YARDIMIYLA KÜRESEL MEKANİZMALARIN**  
**TASARIMI**

**Ziya ÖZÇELİK**  
**DOKTORA TEZİ**  
**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**  
**Konya, 2008**

## ÖZET

**Doktora Tezi**

### **ANİ İNVARYANTLAR YARDIMIYLA KÜRESEL MEKANİZMALARIN TASARIMI**

**Ziya ÖZÇELİK**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Ziya ŞAKA  
2008, 109 Sayfa**

**Jüri:**

**Prof. Dr. Ziya ŞAKA**

**Prof. Dr. Ahmet AVCI**

**Doç. Dr. Hacı SAĞLAM**

**Yrd. Doç. Dr. Sami KAYA**

**Yrd. Doç. Dr. Arif ANKARALI**

Bu çalışmada ani invaryantlar yardımıyla küresel mekanizmaların tasarımı amaçlanmıştır. Önce katı cisimlerin küresel hareketleriyle ilgili kinematik ani invaryantlar açıklanmıştır. Küresel eğrilerde eğrilik teorisi vasıtasıyla jeodezik eğrilik ve burulmanın parametrik ifadeleri elde edilmiştir. Yörünge eğrilik analizi ile özel kinematik özelliklere sahip noktaların geometrik yeri olan eğriler ve bunların özel halleri incelenmiştir. Bu eğrilerin kesim noktaları olan Ball, Burmester ve altıncı mertebe Burmester noktaları parametrik olarak elde edilmiştir. Bu noktaların özel hallerinin varlık şartları formüle edilmiş ve iki katlılık, dört katlılık şartları incelenmiştir. Bunların yardımıyla çeşitli özelliklere sahip yörüngeleri takip eden mekanizmaların tasarımı yapılmıştır. Elde edilen eğriler ve noktalarla büyük daire veya daire yayı şeklinde yörüngeleri çizecek küresel mekanizmaların boyutsal olarak nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Küresel kinematik, ani invaryant, küresel mekanizma

## **ABSTRACT**

**PhD. Thesis**

**DESIGN OF SPHERICAL MECHANISMS BY USING INSTANTANEOUS  
INVARIANTS  
Ziya ÖZÇELİK**

**Selçuk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mechanical Engineering**

**Supervisor: Prof. Dr. Ziya ŞAKA  
2008, 109 Pages**

**Jury: Prof. Dr. Ziya ŞAKA  
Prof. Dr. Ahmet AVCI  
Assoc. Prof. Dr. Hacı SAĞLAM  
Assist. Prof. Dr. Sami KAYA  
Assist. Prof. Dr. Arif ANKARALI**

The aim of this study is design of spherical mechanisms by using instantaneous invariants. Kinematics instantaneous invariants are formulated related rigid bodies in spherical motion. Parametrical Equations of Geodesic Curvature and Torsion are obtained by means of spherical curvature on the unit sphere. Loci of points having same properties on the spherically moving rigid body are called inflection curve, circling points curve etc. and these curves are expressed based on instantaneous invariants. Ball points, Burmester points and sixth order Burmester points that are the intersection points of the curves are obtained in spherical kinematics. Existence conditions of special cases of these points are formulated on the spherically moving rigid body. Spherical mechanisms are designed by means of the points and curves.

**Key words:** Spherical kinematics, instantaneous invariant, spherical mechanisms

## TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın baőlangıcından bu güne kadar hep yanımda olan ve her turlu yardımı esirgemeyen değerli hocam **Prof. Dr. Ziya ŞAKA'** ya Őukranlarımı ifade etmek isterim. Ayrıca çalıőmamda her zaman beni destekleyen ve her turlu fedakârlığı yapan, eőim ve çocuklarıma en içten sevgilerimi sunarım.

Konya, 2008

**Ziya ÖZÇELİK**

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa no:
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vi
SİMGE VE KISALTMALAR .....	x
1. GİRİŞ .....	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI .....	3
3. KÜRESEL HAREKETİN KİNEMATİĞİ .....	7
3.1. Küresel Hareket .....	7
3.2. Küresel Koordinatlarda Birim Vektörler .....	10
3.3. Küresel Hareketin Ani İnvaryantları .....	11
3.4. Uzaysal Eğrilerde Eğrilik ve Burulma .....	17
3.4.1. Birim teğet vektör .....	17
3.4.2. Eğrilik ve birim normal .....	17
3.4.3. Burulma, binormal ve Frenet - Serret formülleri .....	20
3.4.5. Eğrilik ve burulmanın parametrik ifadeleri .....	23
3.4.6. Jeodezik eğrilik .....	24
3.5. Yörünge Eğrilik Analizi .....	28
3.5.1. Düzlem kinematikte Euler-Savary denklemi .....	28
3.5.2. Küresel harekette Hartmann Konstrüksiyonu .....	30
3.5.2. Küresel kinematikte Euler-Savary denklemi .....	33
3.6. Büküm Eğrisi ve Daireleme Noktalar (Torsiyon) Eğrisi .....	37
3.6.1. Küresel kinematikte büküm eğrisi .....	37
3.6.2. Daireleme noktalar eğrisi .....	40
3.7. Ball Noktaları .....	44
3.8. Çift Daireleme Noktalar Eğrisi .....	49
3.9. Burmester Noktaları .....	52
3.10. Ball-Burmester Noktaları .....	57

3.11. 6. Mertebe Eğrisi.....	62
3.12. 6. Mertebe Burmester Noktaları.....	65
4. KÜRESEL MEKANİZMA TASARIMI .....	72
4.1. Ball Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı .....	74
4.2. Burmester Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı .....	77
4.2.1. Burmester noktaları yardımıyla küresel çift kol mekanizması .....	78
4.2.2. Burmester noktaları yardımıyla küresel kol sarkaç mekanizması.....	80
4.3. Katlı Burmester Noktası Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı .....	82
4.4. Ball–Burmester Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı.....	85
4.5. 6.Mertebe Burmester Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı..	88
4.6. 6. Mertebe Ball–Burmester Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı .....	91
5. SONUÇLAR .....	95
6. KAYNAKLAR .....	97
7. EKLER.....	101
EK–1 KÜRESEL ÜÇGENLER İÇİN NAPIER DENKLEMLERİ.....	101
EK–2 SYLVESTER MATRİSİ .....	103
EK–3 KATLI BALL NOKTASI İÇİN (3.110) DENKLEMİNDEKİ İKİ POLİNOMUN ORTAK SYLVESTER MATRİSİNİN DETERMİNANTININ AÇILIMI.....	105
EK–4 BALL–BURMESTER NOKTALARI İÇİN DENKLEM (3.127) DEKİ İKİ POLİNOMUN ORTAK SYLVESTER MATRİSİNİN DETERMİNANTININ AÇILIMI.....	106
EK–5 6. MERTEBE BALL-BURMESTER NOKTALARI İÇİN (3.108) VE (3.135) DENKLEMLERİNDEKİ İKİ POLİNOMUN ORTAK SYLVESTER MATRİSİNİN DETERMİNANTI VE AÇILIMI .....	108

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa no:

Şekil 3.1 Cisim konisi ve uzay Konisi .....	9
Şekil 3.2 Ani dönme merkezi .....	9
Şekil 3.3 Birim Vektörler.....	10
Şekil 3.4 Hareketli ve sabit eksen takımı.....	12
Şekil 3.5 Küresel koordinat sisteminin birim vektörleri.....	13
Şekil 3.6 Birim teğet ve Asal normal Vektör.....	19
Şekil 3.7 Teğet vektörleri.....	19
Şekil 3.8 Eğrilik dairesi.....	20
Şekil 3.9 Uzay eğrisi üzerindeki (T,N, B) Frenet takımı.....	21
Şekil 3.10 T, B ve N vektörleri ve değişim doğrultuları.....	22
Şekil 3.11 Jeodezik eğrilik.....	25
Şekil 3.12 Katı cisme ait bir nokta ve büküm dairesi .....	29
Şekil 3.13 a küresel krankının $OA_0$ eksenini etrafındaki dönme hareketi .....	31
Şekil 3.14 Küresel harekette Hartmann Konstrüksiyonu.....	32
Şekil 3.15 $\pi_f$ sabit pol eğrisi ve üzerinde yuvarlanan $\pi_c$ hareketli pol eğrisi.....	33
Şekil 3.16 Küre yüzeyindeki A noktasının hızı .....	34
Şekil 3.17 Uzay Konisi, cisim konisi, sabit pol eğrisi ve hareketli pol eğrisi .....	35
Şekil 3.18 Büküm eğrisi ve büküm polleri .....	40
Şekil 3.19 Daireleme noktalar eğrisi ( $a = 0.25$ , $b = 0.1$ ).....	43
Şekil 3.20 Daireleme noktalar eğrisinin dejenere hali (Sırasıyla $a = 0$ , $b = 0.25$ ve $b = 0$ , $a = 0.6$ ).....	43
Şekil 3.21 Ball noktaları ( $\omega_{x1} = 0.4$ , $\omega_{y2} = 0.8$ , $\omega_{x2} = 0.027936$ ).....	45
Şekil 3.22 Katlı Ball noktası (B).....	47
Şekil 3.23 Büküm polünde katlı Ball noktası $\omega_{x1}=0.48$ ve $a=0.75$ .....	48
Şekil 3.24 4 Katlı Ball noktası.....	49
Şekil 3.25 Çift daireleme noktalar eğrisi a) Tek parçalı ( $a=0.6$ , $b=0.3$ , $\omega_{x1}=0.8$ , $d=4.2$ , $f=1.2$ ) b) İki parçalı ( $a=0.4$ , $b=0.70492$ , $\omega_{x1}=0.48$ , $d=0.83$ , $f=0.396$ ).....	51
Şekil 3.26 Burmester noktaları .....	53

<b>Şekil 3.27</b> 2 katlı Burmester noktası ( $a= 0.33, b=0.23, \omega_{x1} =0.44, d=0.6439634462$ ve $f=0.3342383113$ için).....	54
<b>Şekil 3.28</b> 4 Katlı Burmester noktası ( $a= -0.052, b=0.01, \omega_{x1} = -0.1836, d= -0.2177$ ve $f= -0.1248$ için).....	56
<b>Şekil 3.29</b> 6 Katlı Burmester noktası ( $a= -0.00697, b=0.649519, \omega_{x1} =0.44721, d= -0.734278$ ve $f=0.181637$ ).....	57
<b>Şekil 3.30</b> Ball-Burmester noktası ( $a= 0.85, b=0.279331, \omega_{x1} =0.64, d= 1.0015$ ve $f= -0.46731693$ ) .....	58
<b>Şekil 3.31</b> Büküm polünde Ball-Burmester noktası ( $a= 0.8676, b = 0, \omega_{x1} =0.495, d= 1.246$ ve $f = -0.25$ ).....	59
<b>Şekil 3.32</b> 2 Katlı Ball-Burmester noktası ( $a=-0.012, b=-0.1535, \omega_{x1} =0.5, d=0.283$ ve $f=1.2383$ ).....	59
<b>Şekil 3.33</b> Büküm polünde katlı Ball-Burmester noktası ( $a=0.8247, b=0, \omega_{x1}=0.49, d=0.48416$ ve $f=-0.1755$ ).....	60
<b>Şekil 3.34</b> 2 katlı Ball-2 katlı Burmester noktası ( $a=1.7555, b=0.14, \omega_{x1}=0.495, f=-2.0537$ ve $d= 1.86$ ) .....	61
<b>Şekil 3.35</b> 4 katlı Ball-2 katlı Burmester noktası ( $a=0.0866, b= -0.5181, \omega_{x1}=0.6, d = 1.5061$ ve $f = 1.97675$ ).....	61
<b>Şekil 3.36</b> 4 katlı Ball-4 katlı Burmester noktası ( $a = -0.134, b=-0.5, h =0.5773, d= -0.4196871424$ ve $f= 0.1997$ ) .....	62
<b>Şekil 3.37</b> 6. mertebe eğrisi (a) Tek parçalı ( $a = - 0.86, b = 1,6, d = 4.3, e =- 0.65, f = 4.9, g = 5.6, \omega_{x1} = 0.49$ ), (b) İki parçalı ( $a = 3, b = 2, d = 0.2, e = 4.5, f = 5.25, g = 0.6, \omega_{x1} = 0.52$ ).....	64
<b>Şekil 3.38</b> 6. mertebe Burmester noktaları ( $a =-0.91, b=0.04918, \omega_{x1}=0.495, d=0.083, f=3.7, e=2.77$ ve $g=0.633$ ) .....	66
<b>Şekil 3.39</b> 6. mertebe 2 katlı Burmester noktası ( $a= 0.222, b= 0.124, d= 0.90118, e= -0.45067, f = 0.68, g = -0.14202$ ve $\omega_{x1}=0.4$ ).....	68
<b>Şekil 3.40</b> 6. mertebe Ball-Burmester noktası .....	68
<b>Şekil 3.41</b> Büküm polünde 6. mertebe Ball-Burmester noktası ( $a = 0.75, b = 0, d =.83, e = -1.484798536, f = 0.4, g = 0.66$ ve $\omega_{x1} = 0.48$ ).....	69

<b>Şekil 3.42</b> 6. mertebe 2 katlı Ball- Burmester noktası ( $a = 0.4$ , $b = 0.7049$ , $d = 0.83$ , $e = -1.184425512$ , $f = 0.4$ , $g = 0.66$ ve $\omega_{x1} = 0.48$ ).....	70
<b>Şekil 3.43</b> 6. mertebe 2 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası( $a = 0.1166$ , $b = -0.1815$ , $d = 1.15$ , $e = 0.4444273319$ , $f = 2.32$ , $g = 0.0911566672$ ve $\omega_{x1} = 0.46$ ) .....	70
<b>Şekil 3.44</b> 6. mertebe 4 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası ( $a = 1.866025403$ , $b = -1/2$ , $d = 0.56$ , $e = 9.438098423$ , $f = 1.23$ , $g = -14.66671465$ , $\omega_{x1} = 0.5773502684$ )..	71
<b>Şekil 4.1</b> Büküm, Daireleme Noktalar, Çift Daireleme Noktalar Eğrileri ve Bunlar Yardımlarıyla Elde Edilen Bir Küresel Dört Çubuk Mekanizması.....	74
<b>Şekil 4.2</b> Ball noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi.....	76
<b>Şekil 4.3</b> Ball noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin jeodezik eğriliğinin değişimi.....	77
<b>Şekil 4.4</b> Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel çift kol mekanizması ve biyel eğrisi.....	79
<b>Şekil 4.5</b> Şekil 4.4 deki biyel eğrisinin burulmasının değişimi .....	80
<b>Şekil 4.6</b> Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel kol sarkaç mekanizması ve biyel eğrisi.....	81
<b>Şekil 4.7</b> Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin burulmasının değişimi.....	82
<b>Şekil 4.8</b> Katlı Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi.....	84
<b>Şekil 4.9</b> Katlı Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin burulmasının eğriliğinin değişimi .....	85
<b>Şekil 4.10</b> Ball–Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi.....	87
<b>Şekil 4.11</b> Ball–Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin jeodezik eğriliğinin değişimi.....	87
<b>Şekil 4.12</b> 6.mertebe Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi.....	90
<b>Şekil 4.13</b> 6.mertebe Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin burulmasının değişimi.....	90

<b>Şekil 4.14</b> 6.mertebe Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi.....	93
<b>Şekil 4.15</b> 6.mertebe Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin jeodezik eğriliğinin değişimi.....	94

## SİMGE VE KISALTMALAR

$\Delta t$	; Zaman aralığı
$\mathbf{r}_A$	; Yer vektörü
$\omega$	; Açısal hız
$\alpha$	; Açısal ivme
$\mathbf{v}_A$ ve $\mathbf{v}_B$	; Hız vektörleri
$\mu, \sigma$ ve $\delta$	; Küresel koordinat sisteminin birim vektörleri
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	; Kartezyen koordinat sisteminin birim vektörleri
$\emptyset$	; Cismin veya düzlemin dönme açısı
$\dot{\emptyset}, \ddot{\emptyset}, \overset{\cdots}{\emptyset}$	; Cismin veya düzlemin dönme açısının türevleri
$\omega_{xn}, \omega_{yn}, \omega_{zn}$	; Ani invaryantlar
$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$	; Hız vektörü
$\kappa$ (kappa)	; Eğrilik
$\rho$	; Eğrilik yarıçapı
$\mathbf{T}$	; Teğet vektör
$\mathbf{N}$	; Birim normal
$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$	; Birim binormal vektörü
$\tau$	; Uzay eğrisinin burulması
$\kappa_g$	; Jeodezik eğrilik
$\mathbf{u}$	; Pol yer değiştirme hızı
$\theta$	; Küresel açı
$\pi_c$	; Hareketli pol eğrisi
$\pi_f$	; Sabit pol eğrisi
$\mathbf{r}_p$	; Yer vektörü
$\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \overset{\cdots}{\mathbf{r}}$ (4) (5)	; $\mathbf{r}$ yer vektörünün zamana göre türevleri
$a, b, d, e, f, g$ ve $\omega_{x1}$	; Ani invaryantlar
$k$	; Biyel açısı

## 1. GİRİŞ

Katı cisimlerin düzlemsel ve üç boyutlu hareketleriyle ilgili bir kavram olan ani invaryantlar uzunca bir süreden beri mekanizmaların analiz ve sentezi, kontrol teorisi gibi alanlarda kullanılmaktadır. Düzlemsel mekanizmalarda genel düzlemsel hareket yapan uzuvların hareketlerindeki çeşitli geometrik ve kinematik özellikler ani invaryantlara bağlı olarak tanımlanmış ve bu konuda birçok araştırmalar yapılmıştır. Düzlemsel mekanizmalar yardımıyla çeşitli özelliklere sahip yörüngelerin ve konumların elde edilmesi için ani invaryantlara bağlı tasarım metotları geliştirilmiştir. Katı cisimlerin üç boyutlu hareketleri ile ilgili ani invaryantlara bağlı teorik formülasyon mevcuttur. Fakat uzaysal mekanizmalarda üç boyutlu olarak hareket eden uzuvların hareketleri ve yörüngelerinin ani invaryantlara bağlı geometrik ve kinematik özelliklerinin tanımlanması ve formülasyonu gelişme aşamasındadır.

Düzlemsel mekanizmalarda ani invaryantlara dayalı yörünge eğrilik analizi konusunda birçok araştırma yapılmış ve elde edilen sonuçlar mekanizma analiz ve sentezi için kullanılmıştır.

Mekanizma ve makine teorisinde rijit cisimlerin hareketlerinin analiz ve sentezi için eğrilik teorisinin kullanılması en uygun metotlardan birisidir. Kinematikçiler başlangıçta tek serbestlik dereceli düzlemsel hareketin geometrisi ile çalıştılar. Konum ve yörünge sentezi için grafik ve analitik metotlar geliştirdiler ve düzlemsel mekanizmalarda kullandılar. Bunlar boyutsal sentez problemi olarak adlandırıldı. Bir mekanizmanın uzuv boyutları arasındaki ilişkiler değerlendirilerek hareket sentezi gerçekleştirildi. Eğrilik teorisi, iki serbestlik dereceli düzlemsel hareket ve üç serbestlik dereceli uzaysal hareketler için genişletildi. Eğrilik teorisiyle bağlantılı ani invaryantlara dayalı yeni cebirsel metotlar geliştirildi. Bir hareketin tanımlanması için ani invaryantların kullanılmasının avantajları vardır. Çok serbestlik dereceli hareketlerin sentezi, bir serbestlik dereceli hareket teorisinden farklı olarak, daha çok kontrol uygulamalarında yerini bulmuştur. Bu da eğrilik teorisinin daha fazla serbestlik dereceli geometri için kullanılmasını sağlamıştır. 1960'lara kadar grafik

metotlarla sentez yapılmaktayken, bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle analitik yöntemlerin önemi artmıştır.

Küresel harekette ani invaryantlarla ilgili çalışmalar düzlemsel mekanizmalara göre daha yenidir. Küresel eğrilerin eğrilik teorisiyle ilgili çalışmalarda jeodezik eğrilik ve burulma ifadeleri kinematik ani invaryantlar cinsinden ifade edilmiş ve belli bazı özelliklere sahip olan yörüngeleri çizen noktaların geometrik yerleri araştırılmıştır. Düzlem kinematikteki Ball ve Burmester noktalarına küresel kinematikte karşılık gelen noktalar en çok üzerinde durulan konulardır.

Bu çalışmada, bu noktaların bulunmasıyla ilgili ani invaryantlara dayalı formülasyon yapılmış ve daha üst mertebeden noktalar da araştırılmıştır. Daha sonra ilgili parametrelerin seçimiyle istenen özelliklere sahip bir yörüngeyi çizecek küresel bir mekanizmanın nasıl bulunabileceği gösterilmiştir.

## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Kamphuis, H.J.,(1969). Küresel kinematikte ani invaryantları, ani açılma hız vektörü ve onun türevleri yardımıyla tanımlamıştır. “ Başlangıç konumunda uygun bir eksen takımında, keyfi bir noktanın o andaki t hareket parametresine göre açılma hızının türevleri küresel hareketin ani invaryantlarını verir.” Küre yüzeyinde tanımlanmış olan jeodezik eğrilik ve torsiyon yardımıyla küresel hareketin kinematiği incelenmiştir. Büküm eğrisi, daireleme noktalar eğrisi ve çift daireleme noktalar eğrisi gibi özel geometrik yer eğrilerinin kesim noktaları Ball ve Burmester noktaları olarak adlandırılmıştır. Bu noktaların küresel mekanizma tasarımında kullanılabileceğini ifade etmiştir.

Gupta, K.C., (1978). Düzlemsel olarak beşinci mertebeye kadar ani invaryantları doğrudan veren bir formülasyon yapmıştır. Düzlemsel bir hareketin ani invaryantları, mekanizmalarda boyutsal sentez problemlerinin formülasyonunda kullanmıştır. Düzlemsel mekanizmalarda ani invaryantların fonksiyon ve konum sentezi için nasıl kullanılacağına dair örnekler vermiştir.

Roth, B., Yang, A.T.,(1977). Düzlemsel harekette ani invaryantların ayrıntılı teorik tanımlarını yapmışlardır. Geometrik kısıtlar altında düzlemsel olarak hareket eden bir katı cismin ani invaryantlarını tanımlamak sistematik bir işlem olduğunu, mekanizmaların kinematik analizi ve farklı tip sentez problemleri, ani invaryantlar yardımı ile etkili bir biçimde çözülebileceğini ifade etmişlerdir.

Roth, B., Yang, A.T.,(1973). Küresel kinematikte yüksek mertebeden yörünge eğrilik teorisini ele almışlar ve bununla ilgili bağıntılar elde etmişlerdir. Bunların ani invaryantlarla ilgisini açıklamışlar ve eğrilikle ilgili karakteristik eğrileri çizmişlerdir.

Fu,T.T., Chiang, C.H.,(1994). Küresel bir hareketin sabit ve hareketli pol eğrileri yardımıyla simülasyonunun nasıl yapılacağını açıklamışlardır. Bilinen üç simülasyon metodu, ani invaryantlar metodu, konum sentezi metodu ve pol eğrileri metoduyla

ilgili karşılaştırmalar yapmışlardır. Her metotta, düzlemsel ve küresel olarak kullanılan parametreler ile karakteristikleri ve farklılıkları izah etmişlerdir.

Ting,K.W., Wang,S.C.,(1991). Düzlemsel bir hareketin ani invaryantlar yardımıyla formülasyonunu ayrıntılı bir şekilde açıklamışlardır. Yüksek mertebeden doğrusal ve dairesel yörüngeler elde etmek için kullanılacak Ball ve Burmester noktaları gibi özel noktaları bulmak için üst mertebeden formülasyon yapmışlardır. Düzlemsel eğrilik teorisi, Euler Savary denklemi ve polinomlarla ilgili teoriyi kullanarak bu noktalara ait özel halleri ayrıntılı olarak ele almışlar ve konunun bir dört çubuk mekanizmasında yörünge sentezi için nasıl uygulanacağını örneklerle göstermişlerdir.

Lee,C.,Yang,A.T., Ravani, B.,(1993). Koordinat sistemlerinden bağımsız olarak uzay kinematiğinin ani invaryantları için belli denklemler tanımlamışlardır. Keyfi bir eksen takımında bir katı cismin hareketinin tanımlanması, ani invaryantların hesaplanması için direkt bir metot sağlayacağını ifade etmişlerdir. Uzaysal hareket, küresel hareket ve dördüncü mertebeden düzlemsel hareketler için üçüncü mertebeden ani invaryantlar belli denklemlerle tanımlamışlardır. Verilen rijit bir cismin hareketinin ani invaryantlarının hesabı, kanonik koordinat sistemlerini kullanmaya ihtiyaç duymaksızın yapılabileceğini ifade etmişlerdir.

Stachel, H.(2000). Uzaysal bir hareketin ani invaryantları ve pol eğrilerine ait invaryantlar arasındaki ilişkileri incelemiştir. Uzaysal hareket için dual sayılar cebirini kullanarak uzaysal Euler–Savary denklemini elde etmiştir.

Chiang. C.H.,(1992). Küresel kinematik ile düzlem kinematik karşılaştırılarak benzer ve farklı yönleri izah edilmiştir. Küresel dört çubuk mekanizmasını düzlemsel dört çubuk mekanizmasına benzer olarak ele almıştır. Düzlemsel dört çubuk için geçerli Grashof kuralı küresel dört çubuk mekanizmaları için de geçerli olduğunu tanımlamıştır. Küresel kinematik ile ilgili kavramların, düzlem kinematikteki karşılıklarını da belirtilerek ispatsız olarak açıklanmıştır.

Koetsier.T.,(1986). Düzlemsel teorik kinematiğe ait Euler Savary denklemi, büküm eğrileri, ani dönme merkezi ve Bobillier teoremi gibi bazı kavramları tarihi gelişimi ile birlikte açıklamıştır. Özel bir koordinat takımı seçilerek hareketin kinematik ani invaryantlarını tanımlamıştır.

Sodhi,R., Shoup, T.E., (1982). Küresel dört çubuk mekanizmasının geometrik konfigürasyonu ve ani dönme eksenini arasındaki ilişki cebirsel denklemler ile mekanizma geometrisi terimleri içinde sunulmuştur.

Bağcı, C.,(1984). Küresel mekanizmaların sentezi için izdüşümü metodunu kullanmıştır. Küresel krank biyel, kol sarkaç mekanizmaları ve çok basit geometrik sentez teknikleri sayısal örneklerle açıklamış, her bir geometrik tertip için bilgisayar destekli analitik çözümler vermiştir.

Wang, D.L., Xiao, D.Z., (1997) .Diferansiyel geometriye dayalı olarak, bir uzay eğrisinin ani dönme eksenini boyunca birbirlerine teğet olan cisim konisi ve uzay konisini incelemiştirlerdir. Uzaysal olarak hareket eden bir noktanın yörüngesinin geometrik özellikleri ve ani dönme ekseninin invaryantları elde edilmiştir. Uzaysal hareketli bir cismin Bresse hiperboloidi, jeodezik büküm yüzeyi ve büküm eğrisinin yeri saptanarak, uzaysal Euler-Savary denklemi elde edilmiştir. Hareketli bir cismin yörüngesinin ani özelliklerini ve karakteristik yörüngelerini araştırmışlardır.

Mccarthy, J.M.,(1987). Küresel kinematikte küre yüzeyindeki eğrilerin diferansiyel geometrisini ele alarak diferansiyel eğrilik ve burulma ifadelerini elde etmiştir.

Chiang. C.H.,(2000). Küresel mekanizmalarla ilgili kitabında bu mekanizmalar hakkında geniş bilgi vermiştir. İlk bölümde küresel mekanizmaların geometrisi, sınıflandırılması ve kinematik analizi açıklanmıştır. Daha sonra küresel olarak hareket eden bir cismin ani hareketi ele alınmış, konuyla ilgili Euler Savary denklemi ve Bobillier teoremi küresel kinematik için elde edilmiştir. Küresel kinematikte konum sentezi ayrıntılı olarak ele alınmış ve büküm eğrisi, daireleme noktalar eğrisi,

Ball ve Burmester noktaları sonsuz yakın konumlar sentezi yaklaşımıyla açıklanmıştır. Sonraki bölümlerde küresel dört uzuvlu mekanizmalar dışında diğer tip küresel mekanizmalar incelenmiştir. Eklerde küresel geometri ile ilgili oldukça ayrıntılı formülasyonlar verilmiştir.

Lu, D.M.,(1999). Özel boyutlara sahip küresel bir kol sarkaç mekanizması tarafından çizilen simetrik biyel eğrisi için bir üçgen diyagram verilmiştir. Simetrik biyel eğrisi küresel bir bilgisayar programı yardımıyla çizilmiştir. Diyagramın nasıl kullanılacağı örneklerle anlatılmıştır.

Veldkamp, G.R., (1967). Uzaysal hareketi analitik olarak ele alarak ilgili ani invaryantları tanımlamıştır. Uygun koordinat sistemleri kullanılarak düzlemsel hareketteki benzer karakteristik eğrilerin ve denklemlerin formülasyonunu yapmış ve özel hallerini incelemiştir.

Deng, M.L., Hwang, W.M., (2001). İki veya üç sivri noktaya sahip bir biyel eğrisi çizen küresel dört çubuk mekanizmalarının sentezi için bir yöntem vermişlerdir. Bunun için konum sentezi ile ilgili Burmester eğrilerinin özel bir halini göz önüne almışlardır. Sayısal örnekler vererek literatürdekilerle karşılaştırmışlardır.

### 3. KÜRESEL HAREKETİN KİNEMATİĞİ

#### 3.1. Küresel Hareket

Küresel hareket, bir katı cismin uzayda sabit bir nokta etrafındaki üç boyutlu hareketi olarak ifade edilir. Bu nokta  $O$  ile gösterilir ve cisim üzerindeki noktalar arasındaki mesafenin sabit olduğu göz önüne alınırsa, cisim üzerindeki bir  $A$  noktası ancak küresel bir yüzey üzerinde hareket edebilir. Sabit  $O$  noktası küresel yüzeyin merkezi olur. Cisim üzerindeki her hangi iki nokta  $A$  ve  $B$  olarak belirlenirse  $O$ ,  $A$  ve  $B$  aynı doğrultuda olmamak şartıyla bu noktalar yardımıyla katı cismin konumu tamamıyla belirlenebilir. Bir başka deyişle eğer  $A$  ve  $B$  aynı küresel yüzey üzerinde ise tüm cismin konumu  $A$  ve  $B$  yardımıyla tamamen belirlenebilir.

Eğrisel bir yüzey üzerinde iki nokta arasındaki en kısa mesafe jeodezik hat(çizgi) olarak adlandırılır, bu, bir düzlem üzerinde bir doğruya karşılık gelir (Chiang 1992). Küresel bir yüzey üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki jeodezik hat, bir büyük daire parçasıdır. Kürede büyük daire, küre yüzeyindeki iki noktadan ve küre merkezinden geçen bir düzlem ile küresel yüzeyin ara kesitidir. Buna göre küre yüzeyindeki herhangi iki noktadan geçen tek bir büyük daire vardır, ya da bu sonuç şöyle de ifade edilebilir. Küre yüzeyinde iki nokta arasındaki en kısa mesafe bu noktalardan geçen büyük daire yayıdır (Chiang 1992). (Düzlemde en kısa mesafenin bir doğru parçası olması gibi).

Düzlem kinematikte, sabit uzuv, gövdenin iki noktasından geçen bir doğru ile ifade edilir. Benzer olarak küresel kinematikte sabit uzuv, yarıçapı bir birim olan birim küre yüzeyi üzerinde, gövdenin iki noktasından geçen büyük daire parçası ile gösterilebilir. Ayrıca diğer uzuvlar da aynı birim küre yüzeyi üzerinde farklı doğrultulardaki büyük daire parçaları ile gösterilir. Küresel kinematikte birim küre yüzeyi üzerindeki iki nokta arasındaki mesafe, bu iki noktadan geçen büyük dairenin bu yayını küre merkezinden gören merkez açı ile ölçülür.

Katı cismin sabit O noktası etrafında  $\Delta t$  zaman aralığındaki hareketi O dan geçen bir eksen etrafında  $\Delta\theta$  değerinde bir dönme hareketine eşdeğerdir. Bu eksen üzerine şiddeti  $\Delta\theta/\Delta t$  kadar olan bir vektör çizilir ve  $\Delta t$  yi limitte sıfıra götürülürse ani dönme eksenini ile  $\omega$  açısal hızı elde edilmiş olur. Buna göre cisme ait bir A noktasının hızı  $v_A$ ,  $\omega$  vektörü ile noktanın  $r_A$  yer vektörünün vektörel çarpımını teşkil etmekte bulunur.

$$v_A = \frac{dr_A}{dt} = \omega \times r_A \quad (3.1)$$

A noktasının ivmesi ise hızı t'ye göre türetilerek bulunur.

$a_A = \alpha \times r_A + \omega \times (\omega \times r_A)$  olarak bulunur. Burada  $\alpha$  açısal ivme vektörü,  $\omega$  açısal hızının  $d\omega/dt$  değişimini göstermektedir.

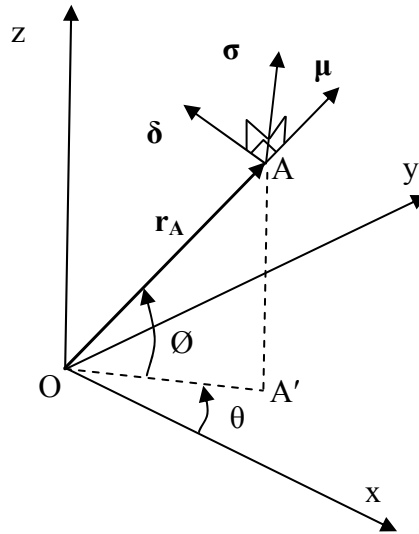
Bir katı cismin sabit bir nokta etrafında hareket etmesi halinde  $\omega$ 'nın doğrultusu ve ani dönme eksenini her an değişecektir.  $\alpha$  açısal ivmesi ise  $\omega$ 'nın doğrultusundaki değişimi gösterdiği gibi bunun şiddetindeki değişimi de belirler ve bu genellikle ani dönme eksenini doğrultusunda olmaz. Katı cismin belirli bir anda ani dönme eksenini üzerinde bulunan noktalarının hızları sıfır, fakat ivmeleri sıfırdan farklıdır. Buna göre cismin çeşitli noktalarının ivmeleri cisim sanki ani dönme eksenini etrafında dönüyormuş gibi hesaplanamaz.  $\alpha$  vektörünün doğrultusu  $\omega$  vektörünün ucunun uzayda çizdiği eğri yardımıyla belirlenebilir.  $\alpha$  ivme vektörü  $\omega$  daki değişimi gösterdiğine göre bunun doğrultusu tanımlanan eğrinin teğeti olmak zorundadır.  $\omega$  vektörü uzayda uzay konisi ve cisim içerisinde cisim konisi adı verilen iki koni meydana getirir. Belirli bir anda, bu koniler ani dönme eksenini boyunca birbirlerine teğettir ve böylece cisim hareket ederken, cisim konisi de uzay konisi üzerinde kaymadan yuvarlanır (Şekil 3.1) (Beer ve ark.1979, Meriam 1980).



kesişim noktası P olsun. Eğer P noktasının bir  $\mathbf{v}_P$  hızı varsa, bu hız  $\mathbf{v}_A$  ve  $\mathbf{v}_B$  nin her ikisine de paralel olmak zorundadır. Bu mümkün olmadığına göre,  $\mathbf{v}_P$  sıfır olur. P cismin ani dönme merkezi (hız polü) yada pol olarak adlandırılır ve cisim OP pol (kutup) eksenini etrafında döner. Böylece herhangi bir küresel hareket bir dönme, yani bir açısal hareket olarak ele alınabilir. OP cismin yukarıda sözü edilen ani dönme eksenidir. Cisim konisi ve uzay konisinin küre yüzeyi ile arakesiti olan küresel eğriler, küresel kinematikte sırasıyla hareketli pol eğrisi ve sabit pol eğrisi olarak isimlendirilir. Bu iki eğri P noktasında yani polde birbirine teğettir ( Beer ve ark.1979, Meriam 1980).

### 3.2. Küresel Koordinatlarda Birim Vektörler

Sabit bir nokta etrafında küresel hareket yapan bir katı cismin hareketi yarıçapı bir birim olan birim kürede ele alınır. Küresel hareket hangi ölçekte olursa olsun her zaman böyle yapılabilir. Şekil 3.3 te başlangıcı sabit O noktası olan XYZ eksen takımında küresel koordinatlar  $R$ ,  $\theta$  ve  $\phi$  görülmektedir. Küresel olarak hareket eden A noktasının yer vektörü  $\mathbf{r}_A$  buna göre şiddeti bir birim olan bir vektördür ve yönü O dan A ya doğrudur. Küresel koordinat sisteminin birim vektörleri olan  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  ve  $\boldsymbol{\delta}$  dan  $\boldsymbol{\mu}$ , A noktasında  $\mathbf{r}_A$  yön ve doğrultusunda tanımlanır.



Şekil 3.3 Birim Vektörler

Diğer birim vektörler  $\sigma$  ve  $\delta$  nın yön ve doğrultusu ise sağ el kuralına göre belirlenir. Buna göre,

$AA' \perp OXY$ ,  $\mu \perp \delta$  ve  $\sigma \perp \mu$ ,  $OA=R=1$  birim

$$\mathbf{OA} = \mathbf{r}_A = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k} \quad (3.2)$$

$$r_x = \cos\theta \cos\phi$$

$$r_y = \cos\theta \sin\phi$$

$$r_z = \sin\theta$$

$\mathbf{r}_A = OA\mu = 1 \cdot \mu$  yazılırsa,

$$\mu = \cos\theta \cos\phi \mathbf{i} + \cos\theta \sin\phi \mathbf{j} + \sin\theta \mathbf{k} \quad (3.3)$$

$$\sigma = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \quad (3.4)$$

$$\delta = \cos(\theta+90)\cos\phi \mathbf{i} + \sin\theta \cos(\theta+90)\mathbf{j} + \sin(\theta+90)\mathbf{k}$$

$$\delta = -\sin\theta \cos\phi \mathbf{i} - \sin\theta \sin\phi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k} \quad (3.5)$$

Böylece küresel koordinat sisteminin birim vektörleri, kartezyen koordinat sisteminin birim vektörleri  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  cinsinden ifade edilmiş olur. Bunların zamana göre türevleri alınıp ara işlemler yapılırsa,

$$\frac{d\mu}{dt} = \dot{\theta} \cos\phi \sigma + \dot{\phi} \delta \quad (3.6)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \dot{\theta} (-\cos\phi \mu + \sin\phi \delta) \quad (3.7)$$

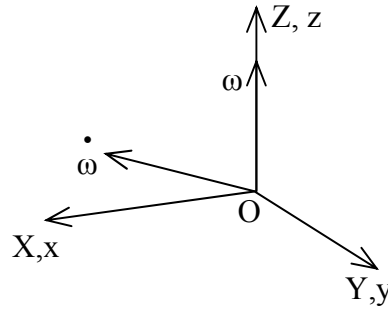
$$\frac{d\delta}{dt} = -(\dot{\phi} \mu + \dot{\theta} \sin\phi \sigma) \quad (3.8)$$

ifadeleri elde edilir.

### 3.3. Küresel Hareketin Ani İnvaryantları

Küresel harekette bir katı cismin açısal hız vektörü ani dönme eksenini doğrultusundadır, yani doğrultusu daima küre merkezinden geçer. Açısal ivme vektörünün ve açısal hızın daha üst mertebeden türevlerinin doğrultuları da aynı

noktadan geçer. Kinematik ani invariantları tanımlamak üzere bir referans sistemi oluşturmak için, hareketin  $t=0$  başlangıç anında (hareketin gözönüne alındığı anda) açısal hız vektörünün doğrultusunu Z eksenini olarak alalım. X ekseninin pozitif yönünü de açısal ivme vektörünün bu andaki x bileşeni pozitif olacak ve bu vektör OXZ düzleminde kalacak şekilde seçelim (Fu ve ark 1994). Bu durumda O sabit noktası orijin olmak üzere, OXYZ bir sağ el eksen takımı olduğundan Y ekseninin yön ve doğrultusu tek şekilde belli olur (**Şekil 3.4**). Sabit eksen takımını bu şekilde seçildikten sonra hareketli Oxyz eksen takımı da bu anda OXYZ ile üst üste alınsın.



**Şekil 3.4** Hareketli ve sabit eksen takımı

Eksen takımları bu şekilde seçilirse açısal hız bileşenleri  $\omega_x = \omega_y = 0$  ve  $\omega_z \neq 0$  olur. Açısal hız bileşenlerinin n. türevleri için sırayla  $\omega_{xn}$ ,  $\omega_{yn}$  ve  $\omega_{zn}$  notasyonları kullanılsın. Buna göre açısal ivme vektörü bileşenleri  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  olarak ifade edilir ve eksen takımları yukarıdaki gibi seçilirse  $\omega_{x1} > 0$  ve  $\omega_{y1} = 0$  olur. Açısal hız bileşenleri de  $\omega_{x0}$ ,  $\omega_{y0}$ ,  $\omega_{z0}$  şeklinde gösterilebilir.  $t=0$  anındaki açısal hızın şiddetini bir birim alınsın, yani bileşenleri  $\omega_{z0}$  'a bölünsün, buna göre,

$$\omega_{z0} = 1, \quad \omega_{x0} = \omega_{y0} = 0 \quad (3.9)$$

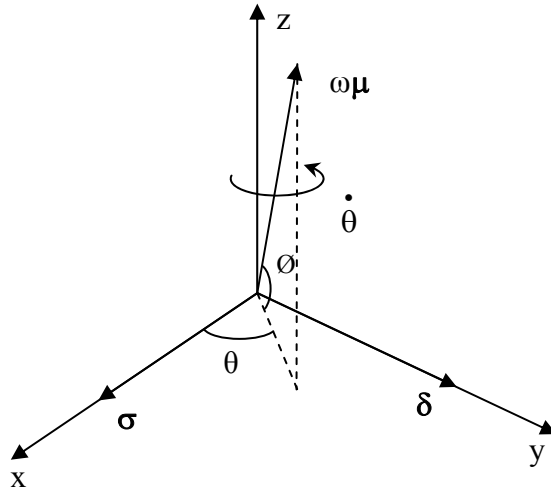
olur. Açısal hızın türevlerinin bileşenlerini de  $\omega_{z0}$  'a bölünsün. Böylece hem açısal hızın kendisi, hem de türevleri  $\omega_{z0}$  a göre normalize edilmiş olurlar. Açısal hız türevlerinin normalize edilmiş değerleri, hareketin gözönüne alınan anına mahsus ani invariantlar olarak alınabilir ve kinematik ani invariantlar olarak adlandırılırlar.

Orijini O noktasında olan küresel koordinat sisteminde, bir birim şiddetindeki açısal hız vektörü,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\mu} = \mu \quad (3.10)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\delta}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  küresel koordinat sisteminin birim vektörleridir.

$\boldsymbol{\mu}$  birim vektörünü  $\boldsymbol{\omega}$  doğrultusunda (z eksenini doğrultusunda) alınırsa  $\boldsymbol{\sigma}$  ve  $\boldsymbol{\delta}$  nin sırayla x ve y eksenini doğrultusunda olacağı görülebilir (Şekil 3.5).



Şekil 3.5 Küresel koordinat sisteminin birim vektörleri

$\omega$  açısal hız vektörünün z eksenini doğrultusundan küçük bir miktar saptığı düşünülün. Buradan Şekil 3.5 te görüldüğü gibi  $\theta = \text{sabit}$  olduğu söylenebilir.

Zamana göre türev alınırsa  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \dddot{\theta} = \dots = 0$  olur.  $\omega$  açısal hız vektörü z eksenini doğrultusunda olduğundan  $\dot{\theta} \neq 0$ ,  $\ddot{\theta} \neq 0$  olacağı açıktır. (3.10) denkleminin türevi alınarak, denklem (3.6) - (3.8) ' den,

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \dot{\theta} \cos \emptyset \sigma \quad (3.11)$$

yazılır. Burada  $\sigma$  vektörü x eksenine doğrultunda olduğundan bunun katsayısı  $\omega_{x1}$  ani invaryantının karşılığıdır. Ancak  $\delta$  ve  $\mu$  vektörlerinin katsayıları sıfır olduğu için  $\omega_{y1}$  ve  $\omega_{z1}$  büyüklüklerinin sıfır olduğu anlaşılır. Bu sonuç yukarıda ifade edilen  $\omega_{x1} > 0$  ve  $\omega_{y1} = 0$  kabullerini doğrular (Fu ve ark 1994).

$$\omega_{x1} = \dot{\theta} \cos \emptyset \neq 0, \quad \omega_{y1} = 0 \quad \text{ve} \quad \omega_{z1} = 0 \quad (3.12)$$

Açısal hız bir kere daha türetilirse;

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = (\ddot{\theta} \cos \emptyset - \dot{\theta} \sin \emptyset) \sigma + \dot{\theta}^2 \cos \emptyset \sin \emptyset \delta - \dot{\theta}^2 \cos^2 \emptyset \mu \quad (3.13)$$

elde edilir. Burada  $\sigma$ ,  $\delta$  ve  $\mu$  nin katsayıları sırasıyla  $\omega_{x2}$ ,  $\omega_{y2}$  ve  $\omega_{z2}$  ani invaryantlarının karşılığıdır. (3.13) denkleminde

$$\omega_{x2} = \ddot{\theta} \cos \emptyset - \dot{\theta} \sin \emptyset \quad (3.14)$$

$$\omega_{y2} = \dot{\theta}^2 \cos \emptyset \sin \emptyset \quad (3.15)$$

$$\omega_{z2} = -\dot{\theta}^2 \cos^2 \emptyset = -(\dot{\theta} \cos \emptyset)^2 = -\omega_{x1}^2 \quad (3.16)$$

yazılır.  $\omega_{z2}$  nin büyüklüğünün bağımsız olmadığı  $\omega_{x1}$  e bağlı olduğu anlaşılır.

Açısal hız bir kere daha türetilerek;

$$\begin{aligned} \frac{d^3\omega}{dt^3} = & (\dddot{\theta} \cos \emptyset - 2\ddot{\theta} \sin \emptyset - \dot{\theta} \cos \emptyset - \dot{\theta}^3 \cos \emptyset \sin^2 \emptyset - \dot{\theta}^3 \cos^3 \emptyset) \sigma \\ & + (3\ddot{\theta} \dot{\theta} \cos \emptyset \sin \emptyset - 2\dot{\theta}^2 \sin^2 \emptyset + \dot{\theta}^2 \cos^2 \emptyset) \delta \\ & + (3\dot{\theta}^2 \cos \emptyset \sin \emptyset - 3\ddot{\theta} \dot{\theta} \cos^2 \emptyset) \mu \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada yine  $\sigma$ ,  $\delta$  ve  $\mu$  nün katsayıları sırasıyla  $\omega_{x3}$ ,  $\omega_{y3}$  ve  $\omega_{z3}$  ani invaryantlarını verir.

$$\omega_{x3} = \overset{\cdot\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset - 2 \overset{\cdot\cdot}{\theta} \sin \emptyset - \overset{\cdot}{\theta} \cos \emptyset - \overset{\cdot^3}{\theta} \cos \emptyset \quad (3.18)$$

$$\omega_{y3} = 3 \overset{\cdot}{\theta} \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset \sin \emptyset - 3 \overset{\cdot^2}{\theta} \sin^2 \emptyset + \overset{\cdot^2}{\theta} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \omega_{z3} &= 3 \overset{\cdot^2}{\theta} \cos \emptyset \sin \emptyset - 3 \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos^2 \emptyset \\ &= -3 \overset{\cdot}{\theta} \cos \emptyset \quad ( - \overset{\cdot}{\theta} \sin \emptyset + \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset ) \end{aligned}$$

Denklem (3.12) ve (3.14) ' ten,

$$\omega_{z3} = -3 \omega_{x1} \omega_{x2} \quad (3.20)$$

elde edilir. Açısal hız bir kere daha türetilerek;

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \omega}{dt^4} &= (\overset{IV}{\theta} \cos \emptyset - 3 \overset{\cdot\cdot\cdot}{\theta} \sin \emptyset - 3 \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset + \overset{\cdot}{\theta} \sin \emptyset - 6 \overset{\cdot^2}{\theta} \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset \sin^2 \emptyset \\ &+ 3 \overset{\cdot^3}{\theta} \sin^3 \emptyset - 6 \overset{\cdot^2}{\theta} \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos^3 \emptyset + 3 \overset{\cdot^3}{\theta} \sin \emptyset \cos^2 \emptyset) \sigma + (4 \overset{\cdot\cdot\cdot}{\theta} \overset{\cdot}{\theta} \cos \emptyset \sin \emptyset \\ &- 9 \overset{\cdot\cdot}{\theta} \overset{\cdot\cdot}{\theta} \sin^2 \emptyset - 7 \overset{\cdot^2}{\theta} \cos \emptyset \sin \emptyset + 2 \overset{\cdot\cdot}{\theta} \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos^2 \emptyset + 3 \overset{\cdot\cdot}{\theta} \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset + 3 \overset{\cdot^2}{\theta} \cos \emptyset \sin \emptyset \\ &- \overset{\cdot^4}{\theta} \cos \emptyset \sin^3 \emptyset - \overset{\cdot^4}{\theta} \sin \emptyset \cos^3 \emptyset) \delta + \{ (- \overset{\cdot}{\theta} \cos \emptyset) (\overset{\cdot\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset - 2 \overset{\cdot\cdot}{\theta} \sin \emptyset \\ &- \overset{\cdot}{\theta} \cos \emptyset - \overset{\cdot^3}{\theta} \cos \emptyset) + 3 [ (\overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset - \overset{\cdot}{\theta} \sin \emptyset) (- \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset + \overset{\cdot}{\theta} \sin \emptyset) \\ &- \overset{\cdot}{\theta} \cos \emptyset (2 \overset{\cdot\cdot}{\theta} \sin \emptyset + \overset{\cdot}{\theta} \cos \emptyset - \overset{\cdot\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset) \} \mu \quad (3.21) \end{aligned}$$

yazılır.  $\sigma$  ve  $\delta$  birim vektörlerinin katsayıları  $\omega_{x4}$  ve  $\omega_{y4}$  ani invaryantlarıdır.

$$\omega_{x4} = \cos \emptyset \quad ( \overset{IV}{\theta} - 3 \overset{\cdot\cdot}{\theta} ) - \sin \emptyset ( 3 \overset{\cdot\cdot\cdot}{\theta} - \overset{\cdot}{\theta} ) - 3 ( 2 \overset{\cdot^2}{\theta} \overset{\cdot\cdot}{\theta} \cos \emptyset - \overset{\cdot^3}{\theta} \sin \emptyset ) \quad (3.22)$$

$$\omega_{y4} = ( 4 \overset{\cdot\cdot\cdot}{\theta} \overset{\cdot}{\theta} - 7 \overset{\cdot^2}{\theta} - \overset{\cdot^4}{\theta} + 3 \overset{\cdot\cdot^2}{\theta} ) \cos \emptyset \sin \emptyset - \overset{\cdot\cdot}{\theta} \overset{\cdot\cdot}{\theta} ( 11 \sin^2 \emptyset - 2 - 3 \cos \emptyset ) \quad (3.23)$$

(3.21) denkleminde  $\omega_{z4}$  ani invaryantı için ise  $\mu$  birim vektörünün katsayısı yazılır.

$$\begin{aligned}\omega_{z4} &= (-\dot{\theta} \cos \varnothing)(\ddot{\theta} \cos \varnothing - 2\ddot{\theta} \sin \varnothing - \dot{\theta} \cos \varnothing - \dot{\theta}^3 \cos \varnothing) \\ &+ 3[(\ddot{\theta} \cos \varnothing - \dot{\theta} \sin \varnothing)(-\ddot{\theta} \cos \varnothing + \dot{\theta} \sin \varnothing) \\ &+ \dot{\theta} \cos \varnothing(\dot{\theta} \cos \varnothing + 2\ddot{\theta} \sin \varnothing - \ddot{\theta} \cos \varnothing)]\end{aligned}\quad (3.24)$$

(3.12), (3.14) ve (3.18) denklemlerindeki ani invaryantları (3.24) denkleminde yerine koyulursa,  $\omega_{z4}$  ani invaryantı,

$$\omega_{z4} = -\omega_{x1}\omega_{x3} + 3[-\omega_{x2}\omega_{x2} - \omega_{x1}(\dot{\theta} \cos \varnothing + 2\ddot{\theta} \sin \varnothing - \ddot{\theta} \cos \varnothing)]\quad (3.25)$$

şeklini alır. Bu denkleme  $\dot{\theta}^3 \cos \varnothing$  ifadesini ekleyip çıkararak

$$\omega_{z4} = -\omega_{x1}\omega_{x3} + 3[-\omega_{x2}^2 + \omega_{x1}(-\omega_{x3} - \dot{\theta}^3 \cos \varnothing)]\quad (3.26)$$

elde edilir. Denklem (3.27) deki son terim için,

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^3 \cos \varnothing &= \dot{\theta} \cos \varnothing(\dot{\theta}^2 - 3\dot{\theta}^2 \sin^2 \varnothing + 3\dot{\theta}^2 \sin^2 \varnothing + 3\ddot{\theta} \dot{\theta} \sin \varnothing \cos \varnothing - 3\ddot{\theta} \dot{\theta} \sin \varnothing \cos \varnothing) \\ &= \dot{\theta} \cos \varnothing(\dot{\theta}^2 - 3\dot{\theta}^2 \sin^2 \varnothing + 3\ddot{\theta} \dot{\theta} \sin \varnothing \cos \varnothing) + 3\dot{\theta}^2 \cos \varnothing \sin \varnothing(\dot{\theta} \sin \varnothing - \ddot{\theta} \cos \varnothing)\end{aligned}$$

yazılır. Bu son ifadede (3.12), (3.14), (3.15), (3.18) ve (3.19) denklemlerindeki ani invaryantlar yerine yazılırsa;

$$\omega_{z4} = -\omega_{x1}\omega_{x3} + 3(-\omega_{x2}^2 - \omega_{x1}\omega_{x3} - \omega_{x1}^2\omega_{y3} + 3\omega_{x1}\omega_{x1}\omega_{y2})\quad (3.27)$$

bulunur. Buradan  $\omega_{zi}$  bileşenlerinin bağımsız olmadığı, x ve y doğrultusundaki bileşenlere bağlı olduğu anlaşılır.

### 3.4. Uzaysal Eğrilerde Eğrilik ve Burulma

#### 3.4.1. Birim teğet vektör

Bir  $t$  parametresine göre parametrelenmiş olan uzay eğrisi  $\mathbf{r}(t)$  olsun. ( $t$  çoğunlukla zaman olarak düşünülür).  $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$  hız vektörü daima eğriye teğettir. Eğrinin teğet noktasındaki birim teğet vektör  $\mathbf{T}(t)$  olsun.  $\mathbf{v}(t) \neq 0$  olmak üzere bu vektör, hız vektörü  $\mathbf{v}$ , şiddeti  $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$  'ye bölünerek bulunabilir:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \quad (3.28)$$

Eğri  $s$  yay uzunluğuna göre parametrelenir  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  ve birim hız  $v(s) = 1$  alınırsa, birim teğet vektörü;

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (3.29)$$

yazılır. Eğer  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  eğrisi sürekliyse  $v(t)$  hızı sıfırdan farklıdır ve birim teğet vektörü  $\mathbf{T}(t)$ ,  $t$ 'nin sürekli bir fonksiyonudur. Herhangi bir birim vektör  $\mathbf{u}$  ve  $\mathbf{T}(t)$  arasındaki açı  $\theta(t)$ ' de  $t$ 'nin sürekli bir fonksiyonu olur.

$$\theta(t) = \cos^{-1}[\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{u}] \quad (3.30)$$

#### 3.4.2. Eğrilik ve birim normal

Uzay eğrisi  $s$  yay uzunluğu ile parametrelenmiş olsun ve  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  şeklinde ifade edilsin. Eğri tanım aralığında sürekli ve türevleri mevcut olsun. Birim uzunluktaki

$$\mathbf{T}(s) = d\mathbf{r}/ds \text{ teğet vektörü için, } \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 1$$

Bu denklemin  $s$ ' ye göre türevi alınarak,

$$2\mathbf{T}(s) \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0 \quad (3.31)$$

elde edilir.  $d\mathbf{T}/ds$ ,  $\mathbf{T}(s)$  e diktir.

$\mathbf{r}(s)$  noktasında uzay eğrisinin eğriliği,  $d\mathbf{T}/ds$  nin uzunluğudur. Eğrilik  $\kappa$  (kappa) ile gösterilir ve

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| \quad (3.32)$$

yazılır. Eğrilik yarıçapı  $\rho$  ile gösterilir ve eğriliğin tersidir.

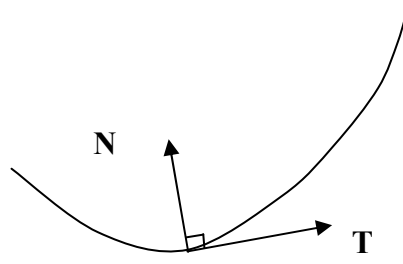
$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \quad (3.33)$$

$\kappa$  bir mutlak değer olduğuna göre her zaman pozitifdir, dolayısıyla  $\rho$  da pozitifdir.

Buna göre bir eğrinin eğriliği, eğrinin ardışık noktalarındaki teğetlerinin dönme hızının bir ölçüsüdür. Eğrilik yarıçapı, göz önüne alınan bir noktadan eğriye çok yakın olarak geçen dairenin yarıçapıdır. Bu daireye eğrilik dairesi, merkezine de eğrilik merkezi denir. Bu tanıma göre eğri üzerinde her noktada  $\kappa(s) \geq 0$  dir. Eğer  $\kappa(s) \neq 0$  ise  $d\mathbf{T}/ds$  kendi şiddetine bölünerek aynı doğrultudaki birim vektör  $\mathbf{N}(s)$  elde edilir. Bu birim vektör  $\mathbf{r}(s)$  eğrisi için asal birim normal olarak adlandırılır ve böylece birim normal,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \quad (3.34)$$

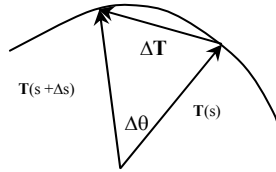
ile tanımlanır.  $\mathbf{N}(s)$ , eğriye ve  $\mathbf{T}$  doğrultusuna diktir ve bu yüzden normalin doğrultusu teğetle birlikte döner. Asal normal  $\kappa(s)$  eğriliğinin sıfır olduğu noktalarda tanımlı değildir.



Şekil 3.6 Birim teğet ve Asal normal Vektör

Eğrilik, ‘birim teğetin dönüş hızı’ şeklinde de ifade edilebilir. Bir  $s$  aralığında  $\kappa > 0$  olsun ve eğri üzerindeki komşu noktadaki birim teğet vektörler  $\mathbf{T}(s)$  ve  $\mathbf{T}(s + \Delta s)$  arasındaki açı  $\Delta\theta$  olsun.

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \quad (3.35)$$



Şekil 3.7 Teğet vektörleri

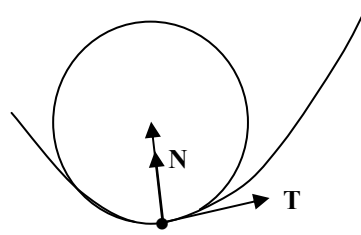
$\Delta\mathbf{T} = \mathbf{T}(s + \Delta s) - \mathbf{T}(s)$  olsun.  $\mathbf{T}(s + \Delta s)$  ve  $\mathbf{T}(s)$  nin her ikisi birim vektördür.  $|\Delta\mathbf{T}/\Delta\theta|$ , yarıçapı bir birim olan daire üzerindeki bir kiriş uzunluğunun, kirişe ait yay uzunluğuna oranıdır ( Şekil 3.7 ). Bu yüzden;

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta\theta} \right| = 1$$

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta\theta} \right| \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \quad (3.36)$$

Bir uzay eğrisi üzerindeki bir noktada birim teğet vektör  $\mathbf{T}$  ve birim normal  $\mathbf{N}$  birbirine diktir.  $\mathbf{T}(s)$  ve  $\mathbf{N}(s)$  vektörlerinin oluşturduğu ve bu noktadan geçen düzlem, eğrinin oskulator düzlemi olarak adlandırılır ( Beer ve ark.1979, Meriam 1980).

Düzlemsel bir eğri için oskulator düzlem, eğrinin de içinde olduğu düzlemdir. Uzay eğrileri için oskulator düzlem her noktada farklı doğrultudadır. Bu düzlem eğriye bu noktada değeri (temas eder). Eğrilik dairesi oskulator düzlem içerisinde ve oskulator daire olarak da isimlendirilir. Buna göre  $\rho$  eğrilik yarıçapı bu dairenin yarıçapıdır. Dairenin merkezine eğrilik merkezi denir. Bu daire şekilden görüldüğü gibi eğrinin daima içbükey tarafında olacağı için eğrilik merkezi de daima içbükey taraftadır.



Şekil 3.8 Eğrilik dairesi

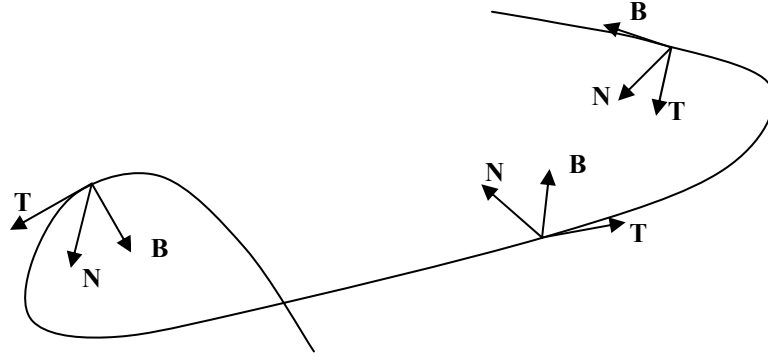
### 3.4.3. Burulma, binormal ve Frenet - Serret formülleri

Bir uzay eğrisi üzerindeki herhangi bir noktada  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{N}$  yukarıda belirtildiği şekilde tanımlıdır. Üçüncü birim vektör ise ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad (3.37)$$

bağıntısı ile tanımlanır ve birim binormal vektörü olarak adlandırılır.  $\mathbf{B}(s)$  , söz konusu noktada eğrinin oskulator düzlemine diktir. Düzlemsel bir eğride  $\mathbf{B}$ , s den bağımsız sabit bir vektördür.

$$\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N} \quad \text{ve} \quad \mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T} \quad (3.38)$$



**Şekil 3.9** Uzay eğrisi üzerindeki (T, N, B) Frenet takımı

Uzay eğrisi üzerindeki her bir noktada bu üç vektörün (**T**, **N**, **B**) yön ve doğrultuları sağ el kuralına göre belirlenir (**i**, **j**, **k** birim vektörlerinde olduğu gibi) ve Frenet takımı olarak adlandırılır (Adams 2003). Bir eksen takımı olarak düşünülürse bu takım sabit değildir ve her noktada doğrultuları değişir (Şekil 3.9).

$\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 1$  olduğu için  $\mathbf{B}(s) \cdot (d\mathbf{B}/ds) = 0$  olur ve  $d\mathbf{B}/ds$ ,  $\mathbf{B}(s)$  e diktir.

$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$  ifadesinin türevi alınırsa,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \kappa \mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

Bu yüzden  $d\mathbf{B}/ds$  aynı zamanda **T** ye diktir. **T** ve **B** nin her ikisine dik olan  $d\mathbf{B}/ds$ , **N** ye paralel olmak zorundadır.

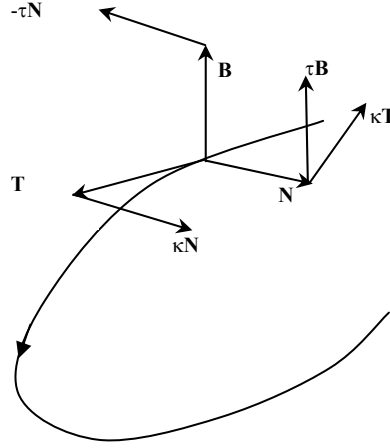
$\kappa(s) \neq 0$  olduğu herhangi bir noktada şu şekilde bir  $\tau(s)$  fonksiyonu vardır.

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s) \mathbf{N}(s) \quad (3.39)$$

$\tau$  büyüklüğü uzay eğrisinin burulması olarak adlandırılır (Adams 2003). Burulma (torsiyon) bir uzay eğrisinin bir noktada sergilediği düzlemsellikten uzaklaşma derecesinin bir ölçüsüdür. Sağa doğru veya sola doğru olmasına göre burulma negatif veya pozitif olabilir.

$d\mathbf{T}/ds = \kappa \mathbf{N}$  ve  $d\mathbf{B}/ds = -\tau \mathbf{N}$  formülleri kullanılarak  $d\mathbf{N}/ds$  hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= \frac{d}{ds}(\mathbf{B} \times \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} \\ &= -\tau \mathbf{N} \times \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B} \times \mathbf{N} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.40)$$



**Şekil 3.10** T, B ve N vektörleri ve değişim doğrultuları

Diğer üç formülle birlikte,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N} \quad (3.41)$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \quad (3.42)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N} \quad (3.43)$$

Bunlar Frenet-Serret formülleri olarak bilinir (Adams 2003). Üç boyutlu uzay eğrilik teorisinin temelini oluşturur. Bu formüller matris formunda şöyle yazılabilir.

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

### 3.4.5. Eğrilik ve burulmanın parametrik ifadeleri

Eğer eğriyi yay uzunluğu parametresi ( $s$ ) cinsinden ifade edilmeden analiz edilirse, eğrilik ve burulma için yukarıda çıkarılan formüller çok kullanışlı değildir. Genel bir  $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$  parametrelemesi ile bu büyüklükler bulunabilir. Daha sonra her ikisi de hız ve ivme cinsinden ifade edilebilir. Hız  $\mathbf{v}(t)$ ,  $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$  ve ivme  $\mathbf{a}(t)$  olarak ifade edip,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \mathbf{T} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v^2 \kappa \mathbf{N} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = v \frac{dv}{dt} \mathbf{T} \times \mathbf{T} + v^3 \kappa \mathbf{T} \times \mathbf{N} = v^3 \kappa \mathbf{B} \quad (3.47)$$

$\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$  nın doğrultusundadır. Bu formüllerden  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}$  ve  $\kappa$  elde edilebilir.

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}, \quad \kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} \quad (3.48)$$

$\mathbf{N}$  i hesaplamanın değişik yöntemleri vardır. En kolayı,

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} \quad (3.49)$$

Bazen  $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\mathbf{T}}{ds} = v \kappa \mathbf{N}$  kullanarak hesaplamak daha kolaydır.

$$\mathbf{N} = \frac{1}{v \kappa} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\rho}{v} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| \quad (3.50)$$

Burulma da hesaplanırsa,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v^2 \kappa \mathbf{N} \right) \quad (3.51)$$

Bu türev değişik terimlerle üretilebilir. Sadece  $\mathbf{B}$  yi içeren denklemlerden biri değerlendirilirse,  $v^2 \kappa (d\mathbf{N} / dt) = v^3 \kappa (d\mathbf{N} / ds) = v^3 \kappa (\tau \mathbf{B} - \kappa \mathbf{N})$  olur.

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lambda \mathbf{T} + \mu \mathbf{N} + v^3 \kappa \tau \mathbf{B} \quad (3.52)$$

Belli  $\lambda$  ve  $\mu$  skalarları için elde edilir.  $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = |\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2 v^3 \kappa \mathbf{B}$  olduğu için

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = (v^3 \kappa)^2 \tau = |\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2 \tau \quad (3.53)$$

dolayısıyla burulma için,

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot (d\mathbf{a}/dt)}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \quad (3.54)$$

elde edilir.  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$  olarak ve  $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})^2 = (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})$  olarak yazılabileceği için burulma ifadesi,

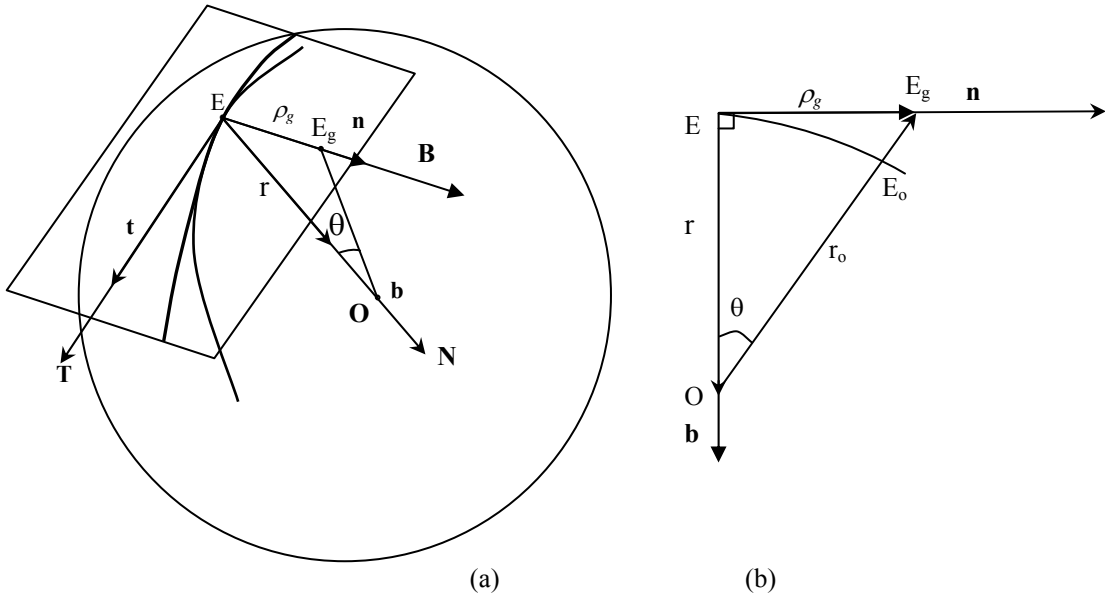
$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})} \quad (3.55)$$

olarak halini alır (Chiang 2000).

### 3.4.6. Jeodezik eğrilik

Küresel bir eğri, **Şekil 3.11**'de görüldüğü gibi sabit bir birim küre yüzeyi üzerinde hareketli bir E noktası tarafından çizilen bir yörünge gibi düşünülebilir.  $s$ , eğri üzerindeki bir referans noktasından itibaren ölçülen eğrisel uzunluğu tanımlayan bir

eğri parametresi olsun. E noktasında  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  ve  $\mathbf{B}$  birim vektörleriyle bir sağ el dik eksen takımı olsun ( Frenet takımı).  $\mathbf{t}$  birim vektörü eğriye E'de s nin artış yönünde teğettir. Bir küre yüzeyi üzerindeki bir eğri uzay eğrisinin özel bir halidir. Böyle bir eğri, daima küre yüzeyi üzerinde kalarak hareket eden bir nokta tarafından çizilen bir eğri olabilir. Küresel mekanizmalarda mekanizma uzuvları üzerindeki noktaların hareket esnasında çizdiği eğriler böyledir.



Şekil 3.11 Jeodezik eğrilik

Şekli konusunda bir sınırlama olmayan, fakat daima küre yüzeyi üzerinde kalan böyle eğrilere küresel eğri denir. Yarıçapı bir birim alınırsa küre, birim küre olarak adlandırılır ve orijini küre merkezinde olan bir dik koordinat sisteminde, küre üzerindeki her nokta için, dolayısıyla küresel bir eğrinin her noktası için;

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = 1$  bağıntısı geçerlidir. Küresel bir eğri üzerindeki bir nokta E olsun, bu noktadaki teğet ve dolayısıyla birim teğet vektör  $\mathbf{T}$  daima küreye teğet olacağı için, normal her zaman küre merkezinden geçer. Binormal ise normal ve teğetin oluşturduğu düzleme diktir, yani sonuçta kürenin özel geometrisi sebebiyle binormal de teğete dik olacak şekilde küreye teğet olur (Şekil 3.11(a)). Burada  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  ve  $\mathbf{B}$  yukarıda sözü edildiği gibi sağ el kuralına göre yönlendirilir.  $\mathbf{T}$  nin yönü E noktasında s eğri parametresinin artışı yönündedir, eğri hareketli bir nokta tarafından

oluşturuluyorsa noktanın ilerleme yönündedir.  $\mathbf{N}$  daima noktadan küre merkezine doğru yönelir,  $\mathbf{B}$  'nin yönü de bu ikisine göre tek şekilde belli olur. Birim kürede bir uzay eğrisi için yukarıda tanımlanan eğrilik, normal doğrultuda olduğu için normal eğrilik ( $\kappa_n$ ) adını alır ve küre geometrisi sebebiyle birim kürede yarıçapın tersine yani bire eşittir. Dolayısıyla eğrilik yarıçapı da bir birim (küre yarıçapı) olur.

Küresel eğrinin  $E$  noktasında  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{B}$  doğrultularının oluşturduğu teğet düzlem üzerindeki izdüşümü düşünülürse, bunun düzlemsel bir eğri olacağı açıktır. Bu izdüşüm eğrisinin  $E$  noktasındaki düzlemsel eğriliği jeodezik eğrilik adını alır ve  $\kappa_g$  ile gösterilir. Normal eğrilikten farklı olarak burada jeodezik eğrilik küresel eğrinin şekline bağlıdır ve sabit bir değeri yoktur. Teğet düzlemdeki teğet ve normal doğrultuları  $\mathbf{t}$  ve  $\mathbf{n}$  ile gösterilsin.  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{t}$  doğrultularının aynı olacağı açıktır.  $\mathbf{n}$  doğrultusu ise **Şekil 3.11(a)** da görüldüğü gibi  $\mathbf{B}$  doğrultusu ile çakışıktır. İzdüşüm eğrisinin teğet düzlem üzerindeki eğrilik merkezi  $E_g$  olsun. Bu noktayı küre merkezine birleştiren doğrunun küreyi deldiği nokta olan  $E_o$  noktası, küresel eğrinin küre yüzeyindeki eğrilik merkezi olarak anılır. Küre yüzeyinde  $E$  ve  $E_o$  noktalarından geçen büyük dairenin  $EE_o$  yay uzunluğu küresel eğrilik yarıçapıdır. Birim kürede bu yay uzunluğu yayı gören merkez açının radyan cinsinden değerine eşittir. Teğet düzleme dik olan normal düzlemdeki  $OEE_g$  dik üçgeni ele alınsın.  $EE_o$  yay uzunluğunu gören merkez açısı  $\theta$  olsun.  $OE$  birim küre yarıçapı olduğuna göre

$$\tan\theta = \rho_g \quad \text{ve} \quad \kappa_g = 1/\rho_g = 1/\tan\theta \quad (3.56)$$

olur. Böylece  $E_o$  noktası ve  $\theta$  açısının tamamen jeodezik eğrilikle ilgili kavramlar olduğu anlaşılmış olur. Buna göre  $\theta = 90^\circ$  olursa jeodezik eğrilik sıfır olur. Böyle bir durum ancak teğet düzlem üzerindeki izdüşümü eğrisinin bir doğru olması halinde mümkündür. Bu durumda  $E_g$  sonsuzda olur ve küre merkezini sonsuza birleştiren doğru  $EE_g$  ye paralel olur, yani  $\theta = 90^\circ$  olur. Küre yüzeyindeki hangi eğrinin teğet düzlemdeki izdüşümü bir doğru olur sorusunun cevabı büyük dairelerdir. Büyük daireler, küre yüzeyinde merkezleri küre merkezi olan dairelerdir (Dünya küre olarak düşünülürse ekvator ve paralel daireleri gibi) ve düzlem geometrideki karşılıkları doğrulardır. Küre yüzeyindeki herhangi iki noktadan tek bir büyük daire geçer ve bu

iki nokta arasındaki en kısa mesafe ikisini birleştiren büyük daire yayıdır. Küre yüzeyinde jeodezik eğriliği sıfır olan tek eğri gurubu büyük dairelerdir.

Jeodezik eğrilik için burulma ifadesine benzer parametrik bir ifade elde etmek için teğet düzlemde hız ifadesi yazılsın. Orijini küre merkezi olan bir eksen takımında E noktasının yer vektörü  $\mathbf{r}$  olmak üzere,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\mathbf{t} \quad (3.57)$$

ifadesinin zamana göre türevi ivmeyi verir. Genel eğrilik teorisiyle ilgili denklemleri de kullanarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt} \quad \text{ve} \\ \mathbf{a} &= \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v^2 \kappa_g \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.58)$$

bulunur. Hız ve ivme vektörel olarak çarpılırsa,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = v \frac{dv}{dt} \mathbf{t} \times \mathbf{t} + v^3 \kappa_g \mathbf{t} \times \mathbf{n} = v^3 \kappa_g \mathbf{b} \quad (3.59)$$

elde edilir. (3.59) denkleminin her iki tarafı  $\mathbf{r}$  vektörü ile skaler olarak çarpılırsa,

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) = v^3 \kappa_g \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \quad (3.60)$$

$\mathbf{r}$  şiddeti bir birim olan bir vektördür ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ). Burada  $\mathbf{r}$  vektörü ile  $\mathbf{b}$  birim vektörünün skaler çarpımının sonucu 1 olur. Buna göre (3.60) denkleminden  $\kappa_g$  çekilirse,

$$\kappa_g = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{v^3} \quad (3.61)$$

olur.  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  ve  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$  olduğuna ve  $v = \left( \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} \right)^{1/2}$  yazılabileceğine göre bunlar yerine konursa jeodezik eğriliğin parametrik ifadesi,

$$\kappa_g = \frac{\mathbf{r} \cdot \left( \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \right)}{\left( \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} \right)^{3/2}} \quad (3.62)$$

elde edilir.

### 3.5. Yörünge Eğrilik Analizi

#### 3.5.1. Düzlem kinematikte Euler-Savary denklemi

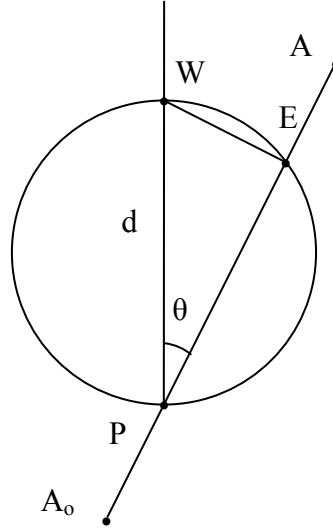
Düzlem kinematikte, bilindiği üzere katı cismin hareket düzlemi üzerinde, ivmesi sadece teğetsel bileşenden oluşan (normal bileşen sıfır) noktaların ve ivmesi sadece normal bileşenden oluşan (teğetsel bileşen sıfır) noktaların geometrik yerleri olan iki daire Bresse daireleri olarak adlandırılır. Bunlardan birincisi özel olarak büküm dairesi olarak anılır ve bazı kinematik özellikleri dolayısıyla literatürde çok zikredilir. (Koetsier 1986), grafik ve analitik mekanizma tasarımında da çokça kullanılır. Yukarıda söylenen özelliği sebebiyle bu daire üzerindeki noktaların sadece teğetsel bileşenden ibaret olan ivmesi ile hızı aynı doğrultudadır, buna göre de bu noktalar o anda yörüngelerinin doğrusal bir kısmını çizmektedirler veya yörüngeyi bir büküm noktasındadırlar.

Düzlemdeki bir A noktasını ani dönme merkezine birleştiren doğrunun bu andaki büküm dairesini kestiği nokta E olsun (Büküm noktası). Kinematik özellikleri nedeniyle düzlemdeki bir A noktası ile yörünge eğrilik merkezi  $A_0$  ve ani dönme merkezi P aynı doğru üzerindedir.

Ayrıca P büküm dairesine ait bir noktadır. A noktası büküm dairesi dışında olmak üzere, büküm dairesi çapı  $PW = d$ ,  $AP = a$  ve  $PA_0 = r$  olmak üzere düzlemsel Euler-Savary Denklemini aşağıdaki gibi yazılır (Erdman ve ark. 1997) (**Şekil 3.12**).

$$\left( \frac{1}{a} \mp \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{d \cos \theta} \quad (3.63)$$

Bu denklem düzlem kinematikte bir katı cisme ait muhtelif noktaların yörüngelerinin eğrilik durumunu karakterize eder. A noktası büküm dairesinin içinde ise denklemdeki artı işareti eksi olur ve  $A_0$  eğrilik merkezi şekildekine göre ters tarafta olur.



**Şekil 3.12** Katı cisme ait bir nokta ve büküm dairesi

Hareketin bir anında ani dönme merkezi ve büküm dairesi biliniyorsa, bu denklem yardımıyla hareket düzlemindeki her noktanın yörüngesinin eğrilik merkezi bulunabilir, ya da tersi de mümkündür. Bu amaçla kullanılan Hartmann metodu, Bobillier metodu (Koetsier 1986) gibi ve benzeri grafik yöntemlerin çıkış noktası bu denklemdir. Ayrıca düzlemsel hareketin ani invariantları kullanılarak Euler Savary denkleminin ve aynı zamanda ters Euler Savary denkleminin parametrik ifadeleri analitik olarak elde edilmiştir (Ting 1991). Sayısal uygulamalarda bunların kullanılması da mümkündür.

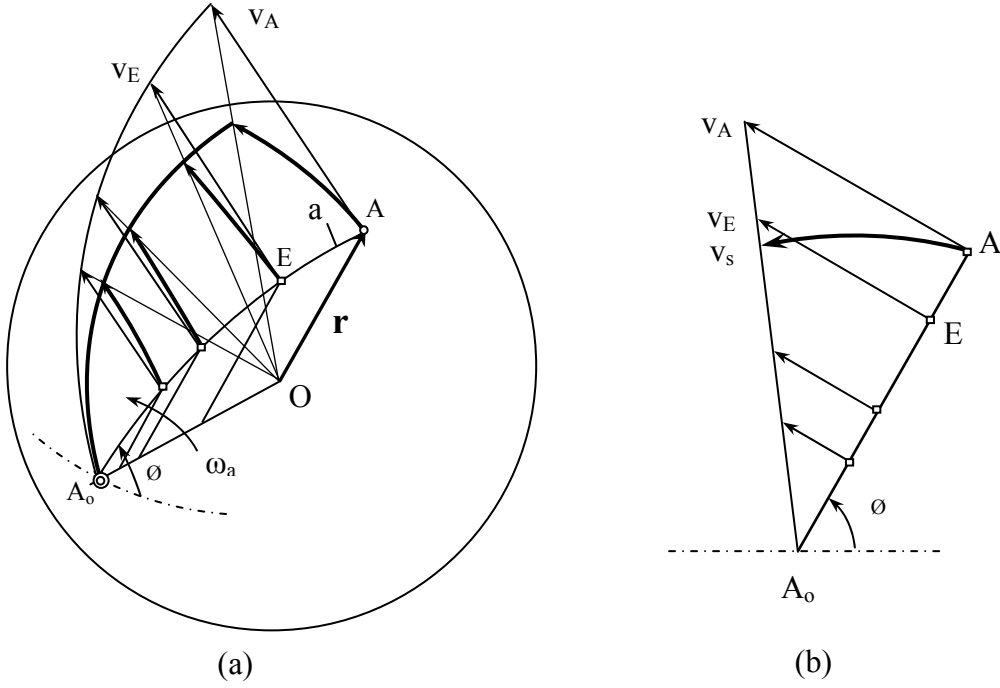
### 3.5.2. Küresel harekette Hartmann Konstrüksiyonu

Küresel bir a krankının **Şekil 3.13(a)** da görüldüğü gibi sabit bir  $OA_0$  eksenini etrafında belli bir açısal hızla döndüğü düşünölsün.

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A \quad (3.64)$$

denkleminde ifade edildiğı gibi krank üzerindeki herhangi bir A noktasının hızı  $\mathbf{v}_A$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  vektörü ile,  $OA_0$  ekseninden A noktasına olan dik uzaklığı ifade eden  $\mathbf{r}$  vektörünün vektörel çarpımı ile bulunur. Burada  $A_0A$  büyük daire yayı üzerindeki bütün hız vektörlerinin uç noktaları,  $OA_0$  ekseninden geçen bir düzlemde bulunur.  $A_0O$  doğrultusundan bakıldığı zaman, **Şekil 3.13(b)** de görüldüğü gibi  $A_0A$  büyük dairesi doğrusal bir çizgi gibi görünür.  $A_0A$  büyük dairesi üzerindeki bütün noktaların hız vektörleri de paralel doğrular olarak görünür.

Düzlemsel kinematikte olduğu gibi bütün bu hız vektörlerinin uç noktaları,  $A_0$ 'dan geçen bir doğru üzerindedir. Eğer  $\mathbf{v}_A$  hızı biliniyorsa  $AA_0$  büyük daire yayı üzerindeki herhangi bir E noktasının  $\mathbf{v}_E$  hızı, kolaylıkla bulunabilir. E noktasından  $\mathbf{v}_A$ 'ya çizilen paralelin bu doğruyu kestiğı nokta  $\mathbf{v}_E$  nin uç noktasını verir. Benzer şekilde  $\mathbf{v}_A$  ve  $A_0$  noktası biliniyorsa büyük daire üzerindeki herhangi bir noktanın hızı belirlenebilir.



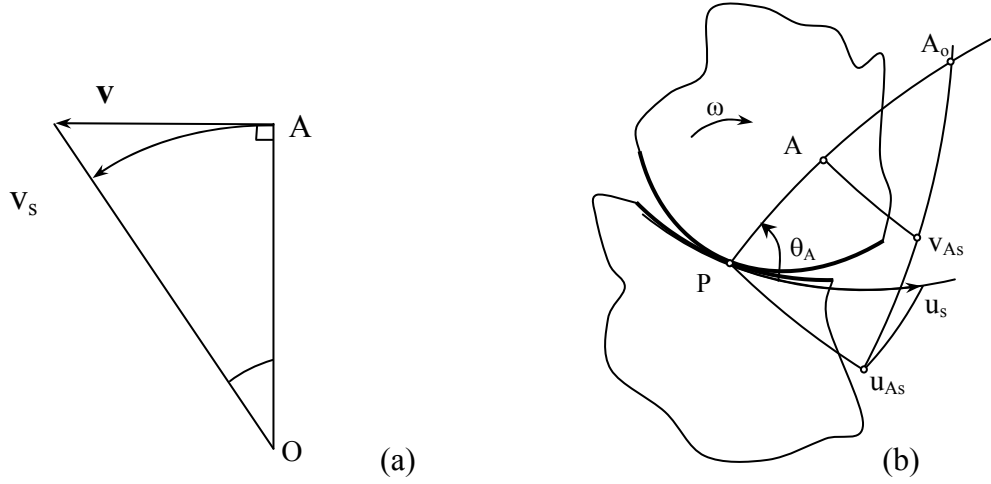
**Şekil 3.13** a küresel krankının  $OA_o$  eksenini etrafındaki dönme hareketi

**Şekil 3.13(a)** da  $AA_o$  büyük dairesi üzerindeki noktaların hız vektörleri küreye teğettir. Bunların küre üzerindeki izdüşümleri şekildeki gibi birer büyük daire yayı olur ve bunlara küresel hız denir.

$v_E$  ve  $v_A$  hızları küresel yüzey üzerinde sırasıyla  $v_s$  şeklinde görünür. Kullanılan  $s$  indisi küresel hız anlamına gelir.  $v_s$  ve  $v$  arasındaki ilişki **Şekil 3.14(a)** dan görülebileceği gibi,

$$v = \tan v_s \quad (3.65)$$

yazılabilir. Düzlem kinematikte olduğu gibi, küresel harekette de hareketli pol eğrisi sabit pol eğrisi üzerinde kaymadan yuvarlanır. Her iki eğri de küresel eğrilerdir. Hareketin göz önüne alınan bir anında, iki eğri ani dönme merkezi  $P$  de (pol) birbirine teğettir. **Şekil 3.14(b)** de görüldüğü gibi  $P$ ,  $A$  ve  $A_o$  aynı büyük daire yayı üzerindedir.



**Şekil 3.14** Küresel harekette Hartmann Konstrüksiyonu

Pol yer değıştirme hızı  $\mathbf{u}$  düzlem kinematikte olduğu gibi P de her iki pol eğrisine teğet doğrudur.  $\mathbf{u}$  ve PA yayı arasındaki küresel açı  $\theta_A$  olsun.  $\mathbf{u}_A$   $\mathbf{u}$ 'nun PA ya dik bileşenidir.

$$u_A = u \sin \theta_A \quad (3.66)$$

Denklem (3.66) de  $\mathbf{u}$  ve  $\mathbf{u}_A$ 'nın her ikisine (3.65) bağıntısı uygulanarak

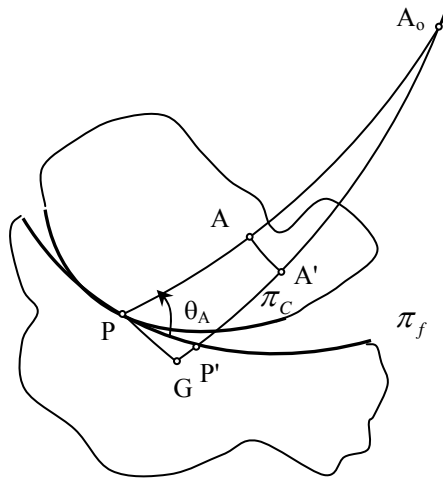
$$\tan u_{As} = \tan u_s \sin \theta_A \quad (3.67)$$

yazılır. **Şekil 3.14(b)** de, küresel üçgenler için kullanılan Napier (Chiang 2000) denklemleriyle (3.65) denklemi beraberce düşünülürse  $u_s$  ve  $u_{As}$  hızları sırasıyla hipotenüs ve küresel bir dik üçgenin kenarıdır.  $u_{As}$ ,  $u_s$ 'nin PA ya dik doğrultuda bir bileşeni gibi düşünülebilir. Böylece Hartmann konstrüksiyonunun küresel versiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Küresel harekette, pol yer değıştirme hızı  $\mathbf{u}_s$  ve hareketli bir A noktasının küresel hızı  $\mathbf{v}_{As}$  biliniyorsa, A yörüngesinin  $A_o$  eğrilik merkezi bulunabilir.  $\mathbf{u}_{As}$  ve  $\mathbf{v}_{As}$ 'nin uç noktalarını birleştiren büyük dairenin PA büyük dairesi ile kesişme noktası olarak bulunabilir.

### 3.5.2. Küresel kinematikte Euler-Savary denklemi

Düzlem kinematikteki Euler-Savary denkleminin küresel kinematikteki karşılığında farklı olarak doğrusal uzunluklar yerine küre merkezinden görülen merkez açıları söz konusudur. **Şekil 3.15** te görüldüğü gibi  $\pi_c$  hareketli pol eğrisi,  $\pi_f$  sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanıyor olsun. Sonsuz küçük bir  $dt$  zaman aralığında, P polu P' konumuna ve hareketli cismin üzerindeki bir A noktası A' konumuna hareket ederken, A<sub>0</sub> noktasının yerinin değişmediği kabul edilebilir. Dolayısıyla P', A' ve A<sub>0</sub> aynı büyük daire üzerinde olurlar. A<sub>0</sub>G= A<sub>0</sub>P olacak şekilde A<sub>0</sub>P' büyük dairesini bir G noktasına kadar uzatılsın.



**Şekil 3.15**  $\pi_f$  sabit pol eğrisi ve üzerinde yuvarlanan  $\pi_c$  hareketli pol eğrisi

**Şekil 3.15** deki  $\triangle A_0AA'$  ve  $\triangle A_0PG$  küresel dik üçgenlerine küresel üçgenler için ifade edilen Napier kuralından (**EK-1**),

$$\frac{\tan AA'}{\tan PG} = \frac{\sin AA_0}{\sin PA_0} \quad (3.68)$$

yazılır ve küçük açılar için  $\tan AA' \approx AA'$  ve  $\tan PG \approx PG$  yazılabilir.

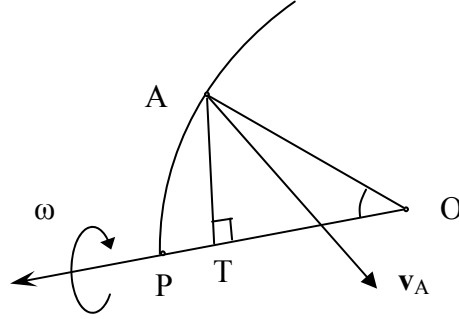
$ds=PP'$  denirse  $PG = ds \sin \theta_A$  olur; sol tarafta pay ve payda  $dt$  ile bölünürse,

$$\frac{AA'/dt}{ds \cdot \sin \theta_A / dt} = \frac{\sin AA_0}{\sin PA_0}$$

$ds/dt = u$  pol yer değiştirme hızı ve  $AA' / dt = v_A$  olduğuna göre,

$$\frac{v_A}{u \sin \theta_A} = \frac{\sin AA_0}{\sin PA_0} \quad (3.69)$$

elde edilir



**şekil 3.16** Küre yüzeyindeki A noktasının hızı

A noktasının hızı için  $v_A = \omega \cdot AT = \omega \sin PA$  yazılırsa (**şekil 3.16**), (3.69) denkleminin,

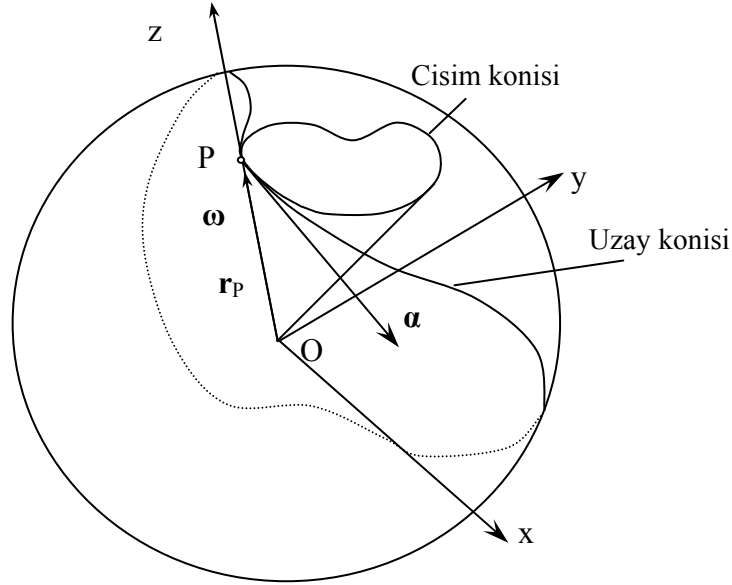
$$\frac{\omega \sin PA}{u \sin \theta_A} = \frac{\sin AA_0}{\sin PA_0} \quad \text{veya}$$

$$\frac{\sin AA_0}{\sin PA \sin PA_0} = \left( \frac{\omega}{u} \right) \frac{1}{\sin \theta_A} \quad (3.70)$$

haline gelir. P, A ve  $A_0$  noktaları kinematik özellikleri sebebiyle aynı büyük daire üzerinde olduklarından  $AA_0 = PA_0 - PA$  yazılırsa, sonuçta Euler-Savary denkleminin küresel versiyonu,

$$\frac{1}{\tan PA} - \frac{1}{\tan PA_o} = \left( \frac{\omega}{u} \right) \frac{1}{\sin \theta_A} \quad (3.71)$$

şeklinde elde edilir. Küresel harekette katı cisimle birlikte hareket eden cisim konisi, sabit olan uzay konisinin üstünde kaymadan yuvarlanır. Açısal hız vektörü bu iki koninin teğet doğrusu doğrultusundadır ve konilerin ortak tepesi olan sabit küre merkezinden dışarıya doğru uzanır (**Şekil 3.17**). Bu vektörün küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğri sabit pol eğrisi, hareketli cisim üzerinde çizdiği eğri de hareketli pol eğrisidir. Ya da uzay konisinin sabit küre yüzeyi ile arakesiti sabit pol eğrisi, hareketli katı cisimle arakesiti aynı küre yüzeyinde hareketli pol eğrisi olur. Açısal hız vektörünün küre yüzeyini deldiği nokta, ani dönme merkezi veya pol olarak isimlendirilen P noktasıdır. Bu noktanın yer vektörü  $\mathbf{r}_P$  olsun. Bölüm 3.3’de seçilen eksen takımında bu doğrultu z eksenini doğrultusudur ve  $\mathbf{r}_P$  vektörü  $\boldsymbol{\omega}$  açısal hız vektörüne eşittir.



**Şekil 3.17** Uzay Konisi, cisim konisi, sabit pol eğrisi ve hareketli pol eğrisi

Birim kürede  $\mathbf{r}_P$  nin uzunluğu bir birimdir. Açısal vektörü de kendi şiddetine bölünüp normalize edilerek bir birim olarak alınmıştır.

$$\boldsymbol{\omega}_o = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \quad |\boldsymbol{\omega}_o| = 1, \quad |\mathbf{r}_p| = 1, \quad \boldsymbol{\omega}_o = \mathbf{r}_p \quad (3.72)$$

$\mathbf{r}_p$  vektörünün uç noktası küre yüzeyinde sabit pol eğrisini çizer. Bu vektörün zamana göre türevi olan pol yer değiştirme hızı  $\mathbf{u}$ , hız vektörünün yörüngeye teğet olmasıyla identik olarak pol eğrisine teğet olacaktır. Dolayısıyla küre yüzeyine de teğettir. Bu nedenle küre geometrisi düşünülürse  $\mathbf{u}$  hızı  $\mathbf{r}_p$  ye diktir. Kinematik olarak düşünülürse küresel harekette  $\mathbf{r}_p$  ye eşit olan  $\boldsymbol{\omega}_o$  açısal hız vektörünün türevi olan açısal ivme vektörü de, cisim ve uzay konilerinin teğet doğrultusuna diktir ( Beer ve ark. 1979, Meriam 1980). Dolayısıyla  $\boldsymbol{\omega}_o$ 'a yani  $\mathbf{r}_p$  ye diktir ve pol eğrilerinin her ikisine de P noktasında teğet olur. Her iki açıdan düşünüldüğü zaman da aynı sonuç elde edilir. Pol yer değiştirme hızı  $\mathbf{u}$  açısal ivme vektörüne eşittir.

$$\mathbf{r}_p = \boldsymbol{\omega}_o, \quad \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \mathbf{u}, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}_o}{dt} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha} \quad (3.73)$$

Şekil 3.14 (b) deki küresel üçgende Napier kuralı uygulanırsa;

$$\frac{\tan v_{As}}{\tan u_{As}} = \frac{\sin AA_o}{\sin PA_o} \quad (3.74)$$

elde edilir. Küresel hızlarla ilgili denklem göz önüne alınarak,

$$\frac{v_A}{u \sin \theta_A} = \frac{\sin AA_o}{\sin PA_o}, \quad v_A = \omega \sin PA \quad (3.75)$$

yazılır. Ara işlemlerden sonra Euler-Savary denklemi,

$$\frac{1}{\tan PA} - \frac{1}{\tan PA_o} = \frac{\omega}{u} \frac{1}{\sin \theta_A} \quad (3.76)$$

yukarıdaki gibi bulunur.  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}$  olduğuna göre denklemlerdeki  $\frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{u}}$  ifadesi  $\frac{1}{\frac{\mathbf{u}}{\boldsymbol{\omega}}}$  şeklinde yazılırsa paydadaki terim  $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\omega}}$  şeklinde yazılarak, açısal hıza göre normalize edilmiş açısal ivme olduğu anlaşılır. Bölüm 3.3'deki deki ani invaryantlar cinsinden düşünüldüğü zaman bu büyüklüğün,

$$\frac{d\omega_o}{dt} = \dot{\omega}_o = \alpha = \omega_{x1} \quad (3.77)$$

olduğu görülür. Çünkü buradaki ani invaryantların hepsi  $\omega_o = 1$  birim alınarak açısal hıza göre normalize edilmiş olarak düşünülmüştür. Eksen takımında  $\alpha$  (yani  $\omega_{x1}$ ) doğrultusu x eksenini olarak, yani z eksenini doğrultusundaki  $\boldsymbol{\omega}$  açısal hız vektörüne dik olarak seçilmiştir. Yukarıdaki söylenenlerle bu durum tam bir uygunluk içindedir. Yani  $\mathbf{u}$  hızı  $r_p$  ye ( $\boldsymbol{\omega}$  ya) dik doğrultudadır.

Buna göre küresel harekette Euler-Savary denklemi,

$$\frac{1}{\tan PA} - \frac{1}{\tan PA_o} = \frac{1}{\omega_{x1} \sin \theta_A} \quad \text{veya}$$

$$\cot PA - \cot PA_o = \frac{1}{\omega_{x1} \sin \theta_A} \quad (3.78)$$

şeklinde yazılır.

### 3.6. Büküm Eğrisi ve Daireleme Noktalar (Torsiyon) Eğrisi

#### 3.6.1. Küresel kinematikte büküm eğrisi

Düzlem kinematikte, bilindiği üzere katı cismin hareket düzlemi üzerinde, ivmesi sadece teğetsel bileşenden oluşan noktaların geometrik yeri büküm dairesi olarak anılır ve bazı kinematik özellikleri dolayısıyla literatürde çok zikredilir. Yukarıda söylenen özelliği sebebiyle bu daire üzerindeki noktaların sadece teğetsel bileşenden

ibaret olan ivmesi ile hızı aynı doğrultudadır, buna göre de bu noktalar o anda yörüngelerinin doğrusal bir kısmını çizmektedirler veya yörüngeyi bir büküm noktasındadırlar.

Düzlemsel kinematikteki büküm dairesine, küresel kinematikte büküm eğrisi karşılık gelir ve üçüncü dereceden küresel bir eğridir. Büküm eğrisi, jeodezik eğriliği sıfır olan noktaların geometrik yeridir. Küre yüzeyinde jeodezik eğriliği sıfır olan eğriler büyük dairelerdir. Dolayısıyla büküm eğrisi, düzlemdeki doğruların küredeki karşılığı olan büyük daire şeklinde bir yörünge çizen noktaların geometrik yeridir. Büküm eğrisi üzerindeki noktalar, bir büyük daireye 3 nokta temaslı bir yörünge çizerler.  $\mathbf{k}_g = 0$  yazılırsa, (3.62) denkleminde,

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.79)$$

elde edilir. Denklemindeki  $\mathbf{r}$  eğri üzerindeki herhangi bir noktanın yer vektörüdür ve  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  şeklinde yazılabilir.

Burada  $\mathbf{r}$  yer vektörü,  $\dot{\mathbf{r}}$  ve  $\ddot{\mathbf{r}}$  zamana göre türevleridir.  $\mathbf{r}$  vektörünün zamana göre birinci ve ikinci türevi için;

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.80)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (3.81)$$

yazılır (Kamphuis 1968).  $\boldsymbol{\omega}$  açısal hız vektörünün bileşenleri  $\omega_{x0}$ ,  $\omega_{y0}$ ,  $\omega_{z0}$  şeklindedir. Bunlar yerine konursa;

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{x0} \mathbf{i} + \omega_{y0} \mathbf{j} + \omega_{z0} \mathbf{k}, \quad \omega_{z0} = 1, \quad \omega_{x0} = \omega_{y0} = 0$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{z0} \mathbf{k} = \mathbf{k} \quad (3.82)$$

elde edilir. Denklem (3.12) den açısal ivme vektörü,

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega_{x1} \mathbf{i} \quad (3.83)$$

(3.79) denkleminde  $\mathbf{r}$  ve  $\omega$  yerine konursa;

$$\dot{\mathbf{r}} = \omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad (3.84)$$

elde edilir. (3.81) denklemindeki  $\ddot{\mathbf{r}}$  ifadesinde vektörler yerine konursa;

$$\ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x1} & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = -x\mathbf{i} - (y + \omega_{x1}z)\mathbf{j} + \omega_{x1}y\mathbf{k} \quad (3.85)$$

bulunur. (3.84) ve (3.85) denklemlerinin vektörel çarpımı;

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -y & x & 0 \\ -x & -(y + \omega_{x1}z) & \omega_{x1}y \end{vmatrix} = yx\omega_{x1}\mathbf{i} + y^2\omega_{x1}\mathbf{j} + (y^2 + yz\omega_{x1} + x^2)\mathbf{k} \quad (3.86)$$

hesaplanarak (3.80) denkleminde yerine konursa;

$$(x^2 + y^2)z + \omega_{x1}y = 0 \quad (3.87)$$

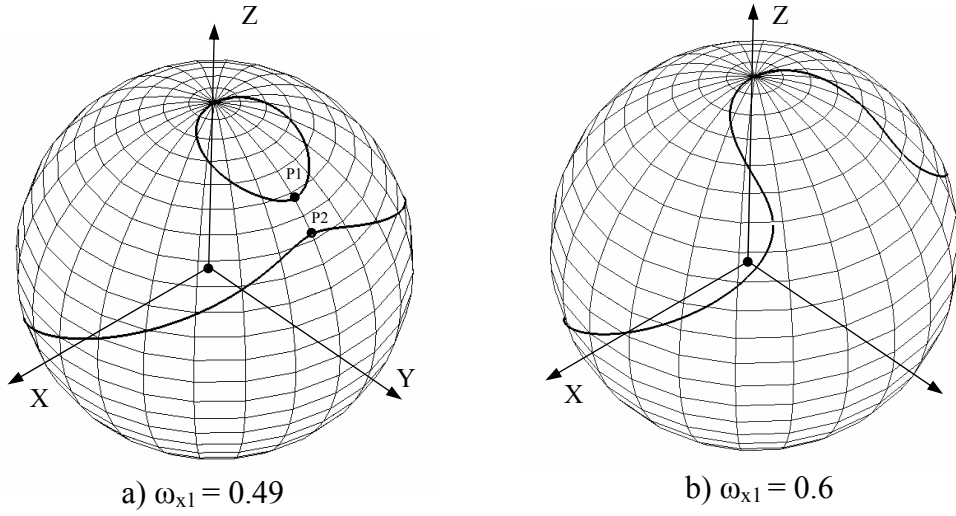
şeklinde büküm eğrisi denklemi elde edilir. Küresel koordinatlar,

$$x = r\cos\theta \cos\phi, \quad y = r\cos\theta \sin\phi, \quad z = r\sin\theta$$

yazılıp birim kürede  $r = 1$  olduğu dikkate alınarak (3.87) de yerine konursa, eğrinin küresel koordinatlardaki ifadesi bulunur.

$$\sin 2\theta + 2\omega_{x1} \sin\theta = 0 \quad (3.88)$$

$\sin 2\theta$  terimi sebebiyle eğri OXY düzlemine (ekvator düzlemi) göre simetrik olduğundan sadece üst taraftaki kısmını dikkate almak yeterlidir.  $\theta=0$  için,  $\theta = \pm 90^\circ$  olduğundan z ekseninin küreyi kestiği  $(0,0,1)$  noktasından yani polden daima geçer. Eğri pol eğrisine teğet olan büyük daireye polde teğettir ve büyük dairenin pol eğrisi normaline göre yani OYZ düzlemine göre de simetriktir. Eğri  $\omega_{x1} \geq 0.5$  için tek parçalı,  $\omega_{x1} < 0.5$  için iki parçalıdır.



**Şekil 3.18** Büküm eğrisi ve büküm polleri

$\omega_{x1} = 0.5$  için OYZ düzleminde  $\theta = 90^\circ$  ve  $\theta = 45^\circ$  noktasında katlı bir noktaya sahiptir ( $x = 0$ ,  $y = 1/\sqrt{2}$ ,  $z = 1/\sqrt{2}$ )  $\omega_{x1} < 0.5$  hali için,  $x = 0$  olduğu OYZ düzleminde eğrinin ekstremum noktaları bulunur. Bu noktalara düzlem kinematiğe benzer olarak büküm polü denir ( **Şekil 3.18(a)**) (Chiang 2000).

### 3.6.2. Daireleme noktalar eğrisi

Burulması sıfır olan noktaların geometrik yeri daireleme noktalar eğrisi olarak anılır. Küre yüzeyinde burulması sıfır olan eğriler dairelerdir. O halde küresel kinematikte de daireleme noktalar eğrisi, düzlemsel kinematiğe benzer şekilde dairesel bir yörünge çizen noktaların geometrik yeridir (Kamphuis 1968). Burulma (torsiyon) ifadesi (3.55) denkleminde,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})} \quad (3.89)$$

Burada  $\mathbf{r}$  hareketli noktanın yer vektörü,  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$  ve  $\ddot{\mathbf{r}}$  zamana göre türevleridir.

$$\boldsymbol{\tau} = 0, \quad \dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.90)$$

Buradaki  $\dot{\mathbf{r}}$  ve  $\ddot{\mathbf{r}}$  daha önce (3.84) ve (3.85) denklemleri ile tanımlanmıştı.  $\mathbf{r}$  nin üçüncü türevi ise;

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{r} + 2[\mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \end{aligned} \quad (3.91)$$

olarak bulunur ve (3.85) denklemi göz önüne alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{r} + 2[\mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] + \boldsymbol{\omega} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.92)$$

Denklemindeki terimler,

$$\begin{aligned} 2[\mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] + \boldsymbol{\omega} \times \ddot{\mathbf{r}} &= 2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x1} & 0 & 0 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -x & -(y + \omega_{x1}z) & \omega_{x1}y \end{vmatrix} \\ &= (y + \omega_{x1}z)\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2x\omega_{x1}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.93)$$

yazılır.  $\boldsymbol{\omega}$  vektörünün zamana göre ikinci türevinin bileşenleri (3.13–3.16) denklemlerinden,

$$\frac{d^2\boldsymbol{\omega}}{dt^2} = \omega_{x2}\mathbf{i} + \omega_{y2}\mathbf{j} - \omega_{x1}^2\mathbf{k} \quad (3.94)$$

yazılır.  $\frac{d\alpha}{dt} \times \mathbf{r}$  ifadesi,

$$\frac{d\alpha}{dt} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x2} & \omega_{y2} & -\omega_{x1}^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_{y2}z + \omega_{x1}^2y)\mathbf{i} - (x\omega_{x1}^2 + \omega_{x2}z)\mathbf{j} \\ + (\omega_{x2}y - \omega_{y2}x)\mathbf{k}$$

(3.95)

şeklinde yazılır. (3.93) ve (3.95) denklemleri (3.92) denklemine yerine konursa;

$$\ddot{\mathbf{r}} = (y + \omega_{y2}z + \omega_{x1}z + \omega_{x1}^2y)\mathbf{i} - (x\omega_{x1}^2 + \omega_{x2}z + x)\mathbf{j} \\ + (2\omega_{x1}x - \omega_{y2}x + \omega_{x2}y)\mathbf{k} \quad (3.96)$$

elde edilir. (3.84), (3.85) ve (3.96) denklemleri (3.90) denklemine yerine konursa;

$$\ddot{(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}})} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -x & -(y + \omega_{x1}z) & \omega_{x1}y \\ (y + \omega_{y2}z + \omega_{x1}z + \omega_{x1}^2y) & -(x\omega_{x1}^2 + \omega_{x2}z + x) & (2\omega_{x1}x - \omega_{y2}x + \omega_{x2}y) \end{vmatrix} \quad (3.97)$$

Sonuç olarak,

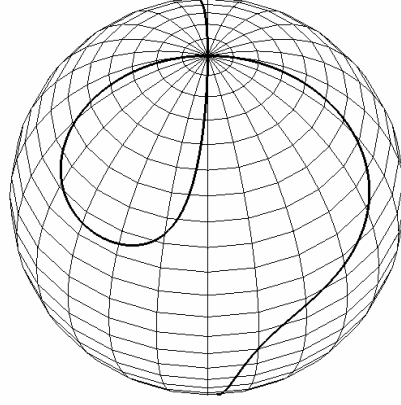
$$\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = (x^2 + y^2)[(2\omega_{x1} - \omega_{y2})x + \omega_{x2}y] + 3\omega_{x1}xyz = 0$$

yazılır ve ara işlemlerden sonra daireleme noktalar eğrisi denklemi elde edilir:

$$(x^2 + y^2)(ax + by) + xyz = 0 \quad (3.98)$$

Burada,

$$a = (2\omega_{x1} - \omega_{y2}) / (3\omega_{x1}^2), \quad b = \omega_{x2} / (3\omega_{x1}^2) \quad (3.99)$$

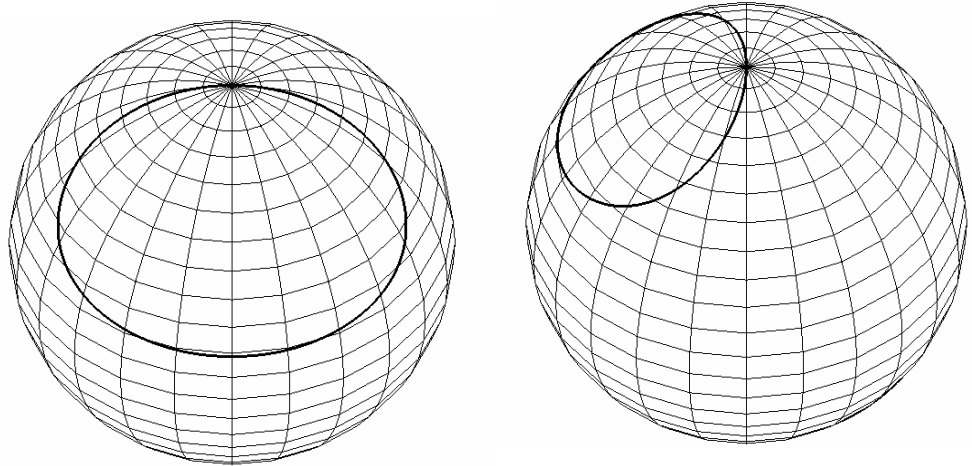


**Şekil 3.19** Daireleme noktalar eğrisi ( $a = 0.25$ ,  $b = 0.1$ )

Eğrinin küresel koordinatlardaki denklemi (3.98) den aşağıdaki gibi bulunur.

$$\tan\theta + a \operatorname{cosec}\theta + b \operatorname{sec}\theta = 0 \quad (3.100)$$

Eğri tek parçalı ve üçüncü derecedendir,  $(0,0,1)$  noktasında (P) katlı noktaya sahiptir ve orijine göre simetriktir (**Şekil 3.19**). Denklem (3.97) de  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  ve  $b = 0$ ,  $a \neq 0$  özel hallerinde eğri **Şekil 3.20**'de görüldüğü gibi kapalı bir eğriye dejenere olur.



**Şekil 3.20** Daireleme noktalar eğrisinin dejenere hali (Sırasıyla  $a = 0$ ,  $b = 0.25$  ve  $b = 0$ ,  $a = 0.6$ )

### 3.7. Ball noktaları

Düzlem kinematikte daireleme noktalar eğrisi ile büküm dairesinin kesim noktası olan Ball noktasının koordinatları, iki eğrinin denklemlerinin ortak çözümünden elde edilir. Ball noktası üçüncü mertebeden (üç nokta temaslı) doğrusal bir yörünge çizer. Düzlem kinematikte olduğu gibi küresel kinematikte de büküm eğrisi ve daireleme noktalar eğrisinin kesim noktaları Ball noktalarıdır. Benzer şekilde küresel kinematikte de bir Ball noktasının çizdiği büyük daire, büküm eğrisi üzerindeki diğer noktaların çizdiğinden daha yüksek mertebeli, yani daha kalitelidir. Ball noktaları, küre yüzeyinde bir büyük daireye 4 nokta temaslı bir yörünge çizer.(Büyük daireye 4 noktada teğettir) (Kamphuis 1968).

Büküm eğrisini parametrelmek için, t parametre olmak üzere,

$$x = ty \quad (3.101)$$

olsun. Eğri denkleminde yerine konularak,

$$(t^2 y^2 + y^2)z + \omega_{x1} y = 0 \quad (3.102)$$

elde edilir. Bu denklemden z çekilip denklem (3.98) de yerine konulursa daireleme noktalar eğrisi denklemi,

$(t^2 y^2 + y^2)(aty + by) - ty\omega_{x1}/(t^2 + 1) = 0$  haline gelir. Bu denklemden y çekilerek,

$$y = \frac{\sqrt{\omega_{x1} t}}{(t^2 + 1)\sqrt{(a t + b)}} , \quad x = ty \quad \text{ve} \quad z = -\sqrt{\frac{(a t + b)\omega_{x1}}{t}} \quad (3.103)$$

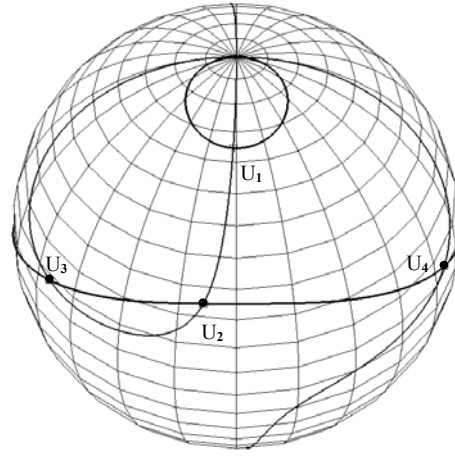
şeklinde Ball noktasının parametrik koordinatları bulunmuş olur. Bu ifadeler küre denkleminde yerine konularak,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (3.104)$$

Ball noktaları için  $t$  parametresine bağlı 4. dereceden bir denklem bulunur.

$$\begin{aligned} a(a\omega_{x1} - 1)t^4 + b(2a\omega_{x1} - 1)t^3 + [\omega_{x1}(a^2 + b^2 + 1) - a]t^2 \\ + b(2a\omega_{x1} - 1)t + \omega_{x1}b^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

(3.105) denkleminin gerçel köklerinin sayısı Ball noktalarının sayısını verir.



**Şekil 3.21** Ball noktaları ( $\omega_{x1} = 0.4$ ,  $\omega_{y2} = 0.8$ ,  $\omega_{x2} = 0.027936$ )

Buradan Ball noktalarının sayısının en çok dört olduğu anlaşılır. Gerçel  $t$  değerleri (3.103) denklemlerinde yerine konarak Ball noktalarının  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordinatları hesaplanabilir (**Şekil 3.21**).

Ball noktalarının büküm polünde olma şartları da araştırılabilir. Büküm polleri OYZ düzleminde olduğu için, bu düzlemde  $x = 0$  olacağından, Ball noktasının  $x$  koordinat ifadesi sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{t\sqrt{(a t + b)\omega_{x1}t}}{(a t + b)(t^2 + 1)} = 0 \quad (3.106)$$

Buradan  $t$  için  $t = -b/a$  bulunur. Bu değer Ball noktaları için bulunan 4. derece parametrik denklemde yerine konursa  $b = 0$ , yani  $\omega_{x2} = 0$  bulunur.

Bu ifade Ball noktalarının büküm polünde olmasının ilk şartı olarak elde edilir. Büküm eğrisi ve daireleme noktalar eğrisinde  $b=0$  ve  $x = 0$  konulursa,

$$\begin{aligned} yz + \omega_{x1} &= 0 \\ ya + z &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerden  $y$  ve  $z$  çekilip küre denkleminde yerine konursa,

$$\omega_{x1} a^2 - a + \omega_{x1} = 0$$

denkleminde  $a$  çözülerek Ball noktalarının büküm polünde olmasının ikinci şartı elde edilir.

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\omega_{x1}^2}}{2\omega_{x1}} \quad (3.107)$$

Bu ifade büküm pollerinin varlık şartı için yukarıda zikredilen  $\omega_{x1} < 0.5$  sonucunu doğrular. Ancak bu şart sağlanırsa  $a$  gerçel değerler alabilir. (3.107) ifadesindeki iki kök (+ ve -) iki büküm polündeki iki Ball noktasını gösterir. Zaten büküm polleri de iki adettir.

Ball noktalarının katlı olma şartları da bulunabilir. Eğer iki Ball noktası üst üste ise, bu nokta bir katlı Ball noktasıdır. Bir katlı Ball noktasının çizdiği yörünge bir Ball noktasından daha kalitelidir.

(3.105) denklemi şu şekilde yazılsın,

$$Et^4 + D_1 t^3 + D_2 t^2 + D_3 t + D_4 = 0 \quad (3.108)$$

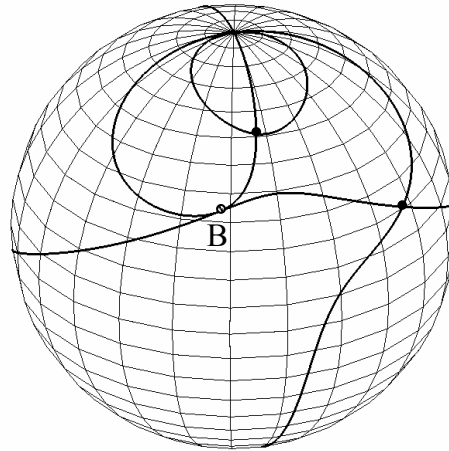
Katlı kök olabilmesi için denklemin köklerinden ikisinin eşit olması gerekir. Bu kök  $t_3$ , diğer ikisi  $t_1$  ve  $t_2$  olsun. 4. derece denklemin katsayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Adams 2003).

$$\begin{aligned}
 -D_1 &= (t_1 + t_2 + 2t_3) E \\
 D_2 &= (t_1 t_2 + 2t_2 t_3 + t_3^2 + 2t_1 t_3) E \\
 -D_3 &= (2t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3^2 + t_1 t_3^2) E \\
 D_4 &= (t_1 t_2 t_3^2) E
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

$t_1$  ve  $t_2$  bu denklemlerden ikisinden çekilip diğer ikisinde yerine konular ve düzenlenirse,

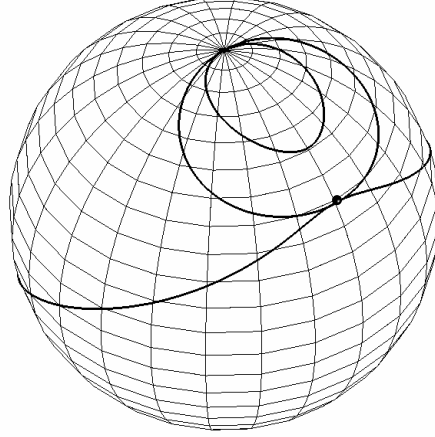
$$\begin{aligned}
 4Et_3^3 + 3D_1 t_3^2 + 2D_2 t_3 + D_3 &= 0 \\
 D_1 t_3^3 + 2 D_2 t_3^2 + 3D_3 t_3 + 4 D_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Bu iki polinomdan katlı  $t_3$  kökünün bulunabilmesi için her ikisi de ortak bir köke sahip olmalıdır. Bunun için iki polinomun ortak Sylvester matrisinin determinanı (EK-2) sıfır olmalıdır (Resultant). Determinant  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  e bağlı olarak elde edilir (EK-3). Denklemi sağlayan sayısal değerler Ball noktalarını veren 4. derece polinomda yerine konur ve biri katlı olmak üzere üç Ball noktası bulunabilir. Örnek olarak  $a = 0.4$ ,  $b = 0.7049$  ve  $\omega_{x1} = 0.48$  değerleri için bulunan katlı Ball noktası **Şekil 3.22** da görülmektedir.



**Şekil 3.22** Katlı Ball noktası (B)

Katlı Ball noktasının büküm polünde olması için denklem (3.105) deki  $b=0$  şartı uygulanırsa, determinant sadeleşir ve (3.106) daki ikinci şart elde edilir.  $\omega_{x1}=0.48$  değeri için  $a=0.75$  bulunur, ilgili katlı Ball noktası **Şekil 3.23** 'te görülmektedir.



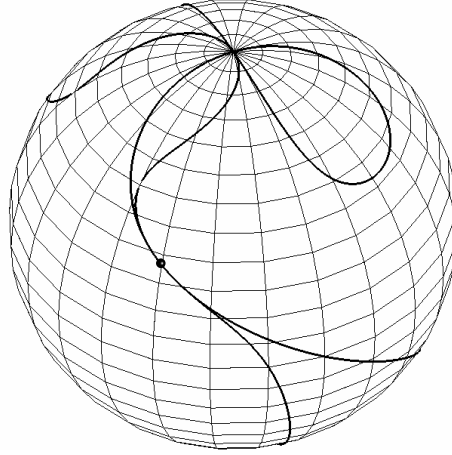
**Şekil 3.23** Büküm polünde katlı Ball noktası  $\omega_{x1}=0.48$  ve  $a=0.75$

Ball noktasının 4 katlı olma şartları da araştırılabilir.  $p$  ve  $q$  birer sabit olmak üzere 4 kökü eşit olan yani 4 katlı bir köke sahip olan bir polinom için,

$$(pt+q)^4 = p^4t^4 + 4p^3q t^3 + 6p^2q^2 t^2 + 4pq^3t + q^4 \quad (3.111)$$

Bu denklemin katsayıları denklem (3.105)'deki 4. derece polinomun katsayılarına eşitlenirse,

$$\begin{aligned} p^4 &= -a + \omega_{x1}a^2 \\ 4p^3q &= -b + 2\omega_{x1}ab \\ 6p^2q^2 &= \omega_{x1} - a + \omega_{x1}a^2 + \omega_{x1}b^2 \\ 4pq^3 &= -b + 2\omega_{x1}ab \\ q^4 &= \omega_{x1}b^2 \end{aligned} \quad (3.112)$$



Şekil 3.24 4 Katlı Ball noktası

Bu beş denklemden beş bilinmeyen  $p$ ,  $q$ ,  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  çözülebilir. Çözüm kümesi birden fazla olabilir. Örnek çözüm kümesinden ikisi ( $a = -0.1339745962$ ,  $b = -0.5$  ve  $\omega_{x1} = 0.577$ ) şeklindedir, bunlardan birincisi için elde edilen 4 katlı Ball noktası Şekil 3.24 görülmektedir.

### 3.8. Çift Daireleme Noktalar Eğrisi

Burulmanın yanı sıra zamana göre değişiminin de sıfır olduğu noktaların geometrik yeri düzlem kinematikte olduğu gibi çift daireleme noktalar eğrisi olarak adlandırılır (Kamphuis 1968, Ting ark. 1991).

$$\tau = 0, \quad d\tau/dt = 0,$$

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})} = 0$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\left[ \left[ \ddot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})^{(4)} \right] (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) - \frac{d}{dt} \left[ (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \right] \left( \dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \right) \right]}{\left[ (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \right]^2} = 0$$

$\ddot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})$  ve  $\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})$  terimleri sıfır olduğundan ve  $\tau = 0$  olduğu için paydaki  $(\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}))$  terimi de sıfır olacağından sonuç olarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.113)$$

Denklem (3.113)'deki  $\ddot{\mathbf{r}}$  terimi için aşağıdaki işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} \times \mathbf{r} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2 \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \right] \\ &+ [\mathbf{a} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]] + \\ &\boldsymbol{\omega} \times \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \right] \\ &= \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} \times \mathbf{r} + 3 \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \dot{\mathbf{r}} \right] + 3 [\mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{r}}] + \boldsymbol{\omega} \times \ddot{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (3.114)$$

bulunur. (3.114) denkleminde daha önce bulunan  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$  ve  $\ddot{\mathbf{r}}$  ifadeleri yerine konursa,

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x3} & \omega_{y3} & -3\omega_{x1}\omega_{x2} \\ x & y & z \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x2} & \omega_{y2} & -\omega_{x1}^2 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -x & -(y + \omega_{x1}z) & \omega_{x1}y \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ (y + \omega_{y2}z + \omega_{x1}z + \omega_{x1}^2 y) & -(\omega_{x1}^2 x + \omega_{x2}z + x) & (2\omega_{x1}x - \omega_{y2}x + \omega_{x2}y) \end{vmatrix} \\ &= (z\omega_{y3} + 3y\omega_{x1}\omega_{x2} + 4x\omega_{x1}^2 + z\omega_{x2} + x)\mathbf{i} + (-3x\omega_{x1}\omega_{x2} - z\omega_{x3} + y + z\omega_{x1} + z\omega_{y2} \\ &+ y\omega_{x1}^2)\mathbf{j} + (y\omega_{x3} - x\omega_{y3} + 3x\omega_{x2} + 3y\omega_{y2} + 3\omega_{x1}(-y - z\omega_{x1}))\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Denklem (3.115), (3.84) ve (3.85) denklemleri ile (3.113) denkleminde yerine konularak, çift daireleme noktalar eğrisinin denklemi elde edilir ve sadeleştirilerek yazılırsa,

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = (x^2 + y^2) \left( \left( \frac{3\omega_{x2} - \omega_{y3}}{3\omega_{x12}} \right) x + \left( \frac{3\omega_{y2} - 2\omega_{x1} + \omega_{x3} + \omega_{x13}}{\omega_{x1}} \right) y - z \right) + \omega_{x1} y \left[ x^2 + 2z \left( \frac{2\omega_{x2}}{3\omega_{x1}^2} \right) x + \left( \frac{1 - 2a\omega_{x1}}{\omega_{x1}} \right) y - z^2 \right] = 0$$

Katsayılar düzenlenirse,

$$(x^2 + y^2)(dx + fy - z) + \omega_{x1} y [x^2 + 2kzy - z^2] = 0 \quad (3.116)$$

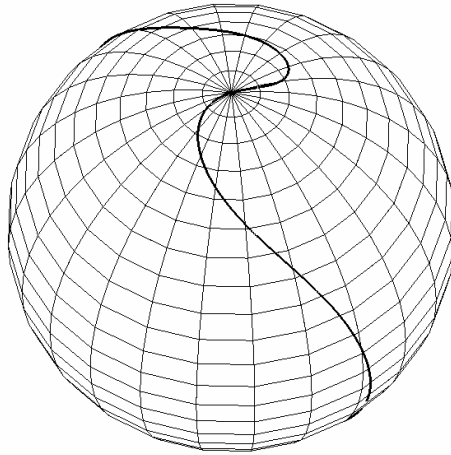
yazılır. Burada,

$$d = \frac{3\omega_{x2} - \omega_{y3}}{3\omega_{x1}^2}$$

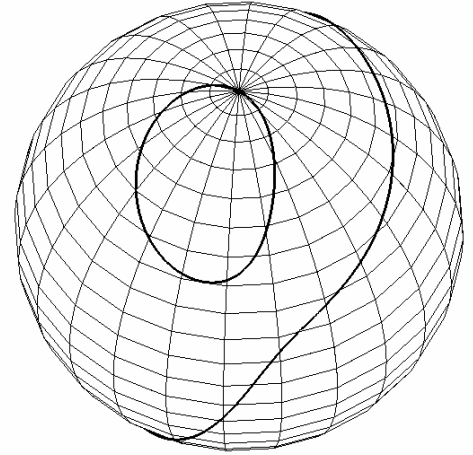
$$k = \frac{1 - 2a\omega_{x1}}{\omega_{x1}}$$

$$f = \frac{3\omega_{y2} - 2\omega_{x1} + \omega_{x3} + \omega_{x1}^3}{3\omega_{x1}^2}$$

Eğri, sabit katsayılarının aldığı değerlere göre tek veya iki parçalıdır ve üçüncü derecedendir (**Şekil 3.25**).



(a)



(b)

**Şekil 3.25** Çift daireleme noktalar eğrisi a) Tek parçalı ( $a=0.6$ ,  $b=0.3$ ,  $\omega_{x1}=0.8$ ,  $d=4.2$ ,  $f=1.2$ ) b) İki parçalı ( $a=0.4$ ,  $b=0.70492$ ,  $\omega_{x1}=0.48$ ,  $d=0.83$ ,  $f=0.396$ )

### 3.9. Burmester Noktaları

Daireleme noktalar eğrisiyle çift daireleme noktalar eğrisinin kesim noktaları düzlem kinematiğe benzer şekilde Burmester noktaları olarak anılır. Ball noktalarında olduğu gibi eğrinin parametrelenmesi için  $x=ty$  denir ve (3.98) denkleminde  $z$  çekilirse,

$$z = -\frac{y(at+b)(t^2+1)}{t} \quad (3.117)$$

elde edilir. Bu ifade ve  $x=ty$  ifadesi küre denkleminde (3.104) yerine konur ve  $y$  çekilirse,

$$y = \frac{t}{\sqrt{(t^2+1)[a^2t^4 + 2abt^3 + t^2(1+b^2+a^2) + 2abt + b^2]}},$$

$$z = -\frac{(at+b)(t^2+1)}{\sqrt{(t^2+1)[a^2t^4 + 2abt^3 + t^2(1+b^2+a^2) + 2abt + b^2]}},$$

$$x = ty \quad (3.118)$$

şeklinde Burmester noktalarının parametrik koordinatları bulunur. (3.118) ifadeleri (3.116) çift daireleme eğrisi denkleminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} & (\omega_{x1}a^2 - a)t^6 + (-b + 2ba\omega_{x1} - d)t^5 + (2ak\omega_{x1} + \omega_{x1}b^2 - \omega_{x1} - 2a + 2\omega_{x1}a^2 - f)t^4 \\ & + (-d + 2bk\omega_{x1} - 2b + 4ba\omega_{x1})t^3 + (2ak\omega_{x1} - f - a + 2\omega_{x1}b^2 + \omega_{x1}a^2)t^2 \\ & + (2bk\omega_{x1} - b + 2ba\omega_{x1})t + \omega_{x1}b^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.119)$$

6. derece denklemi bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} a_6 &= a(\omega_{x1}a - 1), \\ a_5 &= 2\omega_{x1}ba - b - d, \\ a_4 &= 2\omega_{x1}a(k + a) + \omega_{x1}(b^2 - 1) - 2a - f, \\ a_3 &= 2b(2\omega_{x1}a + \omega_{x1}k - 1) - d, \end{aligned}$$

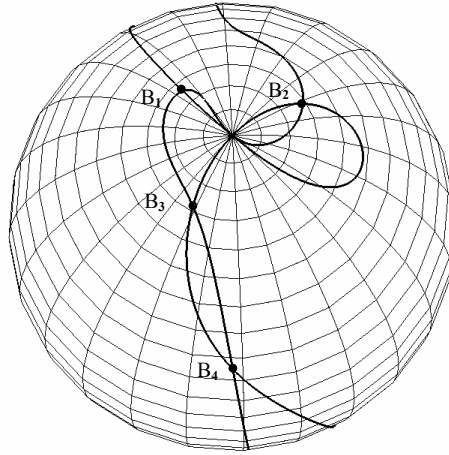
$$a_2 = 2\omega_{x1}(b^2 + ka) + a(\omega_{x1}a - 1) - f,$$

$$a_1 = b[2\omega_{x1}(k+a) - 1]$$

denirse denklem aşağıdaki şekilde yazılır.

$$a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + \omega_{x1} b^2 = 0 \quad (3.120)$$

Bu denklemin gerçel köklerinin sayısı Burmester noktalarının sayısını verir. Buradan Burmester noktalarının sayısının en çok altı olduğu anlaşılır. Bu noktaların çizdiği dairesel yörünge'nin mertebesi düzlem kinematikte olduğu gibi daha yüksektir, bir büyük daireye 5 nokta temaslı bir yörünge çizerler (Kamphuis 1968). (3.120) denkleminde bulunacak gerçel  $t$  değerleri, (3.118) eşitliklerinde yerine konarak Burmester noktalarının koordinatları bulunur. **Şekil 3.26**'da dört adet Burmester noktası görülmektedir. Burmester noktalarının katlı olma şartları da araştırılabilir.



**Şekil 3.26** Burmester noktaları

Bir Burmester noktasının iki katlı olması için yukarıdaki 6. derece polinomun köklerinden ikisinin eşit olması gerekir.  $p, q, r, s, u, m$  ve  $c$  birer sabit olmak üzere iki kökü eşit olan bir polinom için,

$$(pt+q)^2(rt^4+st^3+ut^2+mt+c)=0$$

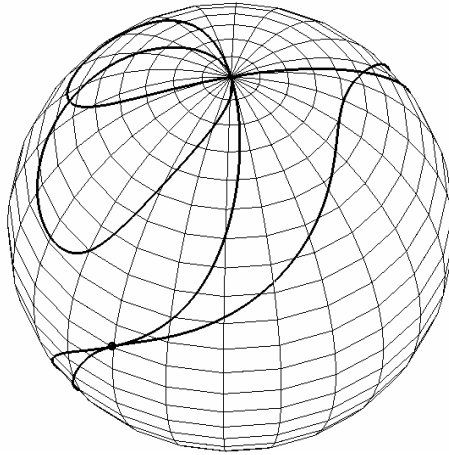
açınımı yazılırsa,

$$\begin{aligned} p^2rt^6+(2pqr+p^2s)t^5+(p^2u+2pqs+q^2r)t^4+(p^2m+2pqu+q^2s)t^3 \\ +(p^2c+2pqm+q^2u)t^2+(q^2m+2pqc)t+q^2c=0 \end{aligned} \quad (3.121)$$

denklemini bulunur. Bu polinomun katsayıları (3.120) denkleminin katsayıları ile eşitlenerek,

$$\begin{aligned} p^2r &= a(\omega_{x1}a-1), \\ p^2s+2pqr &= 2\omega_{x1}ba-b-d, \\ p^2u+2pqs+q^2r &= 2\omega_{x1}a(k+a)+\omega_{x1}(b^2-1)-2a-f, \\ p^2m+2pqu+q^2s &= 2b(2\omega_{x1}a+\omega_{x1}k-1)-d, \\ p^2c+2pqm+q^2u &= 2\omega_{x1}(b^2+ka)+a(\omega_{x1}a-1)-f, \\ q^2m+2pqc &= b(2\omega_{x1}k+2\omega_{x1}a-1), \\ q^2c &= \omega_{x1}b^2 \end{aligned} \quad (3.122)$$

denklemleri yazılır.



**Şekil 3.27** 2 katlı Burmester noktası ( $a=0.33$ ,  $b=0.23$ ,  $\omega_{x1}=0.44$ ,  $d=0.6439634462$  ve  $f=0.3342383113$  için)

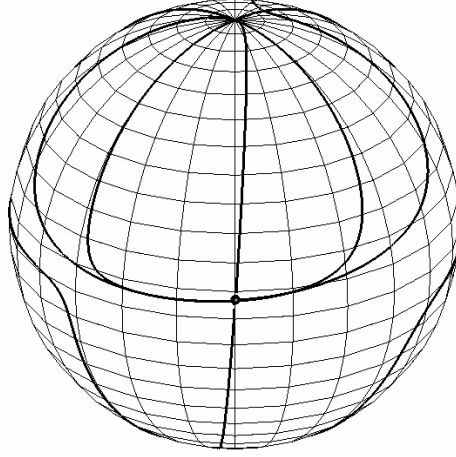
a, b, f, d ve  $\omega_{x1}$  büyüklüklerinin uygun sayısal değerleri için bu yedi bilinmeyenli yedi denklemden p, q, r, s, u, m, c için çözüm kümeleri bulunur. Bu değerlere bağlı olarak bulunan a, b, f, d ve  $\omega_{x1}$  büyüklükleri (3.120) denkleminde yerine konarak, bulunan gerçel t değerleri ile **Şekil 3.27** deki gibi 2 katlı Burmester noktası elde edilir.

Burmester noktalarının 4 katlı olma şartları da araştırılabilir. Bir Burmester noktasının 4 katlı olması için yukarıdaki 6. derece polinomun köklerinden dördünün eşit olması gerekir. p, q, r, s ve u birer sabit olmak üzere 4 kökü eşit olan bir polinom için,

$$\begin{aligned} (pt+q)^4(rt^2+st+u) &= 0, \\ p^4rt^6+(4p^3qr+p^4s)t^5+(p^4u+6p^2q^2r+4p^3qs)t^4+(4p^3qu+6p^2q^2s+4pq^3r)t^3 \\ +(4pq^3s+6p^2q^2u+q^4r)t^2+(q^4s+4pq^3u)t+q^4u &= 0 \end{aligned} \quad (3.123)$$

Bu denklemin katsayıları denklem (3.120) deki 6. derece polinomun katsayılarına eşitlenirse,

$$\begin{aligned} p^4r &= a(\omega_{x1}a-1), \\ 4p^3qr+p^4s &= 2\omega_{x1}ba-b-d, \\ p^4u+6p^2q^2r+4p^3qs &= 2\omega_{x1}a(k+a)+\omega_{x1}(b^2-1)-2a-f, \\ 4p^3qu+6p^2q^2s+4pq^3r &= 2b(2\omega_{x1}a+\omega_{x1}k-1)-d, \\ 4pq^3s+6p^2q^2u+q^4r &= 2\omega_{x1}(b^2+ka)+a(\omega_{x1}a-1)-f, \\ q^4s+4pq^3u &= b(2\omega_{x1}k+2\omega_{x1}a-1), \\ q^4u &= hb^2 \end{aligned} \quad (3.124)$$



**Şekil 3.28** 4 Katlı Burmester noktası ( $a = -0.052$ ,  $b = 0.01$ ,  $\omega_{x1} = -0.1836$ ,  $d = -0.2177$  ve  $f = -0.1248$  için)

$p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $f$ ,  $d$  ve  $\omega_{x1}$  büyüklüklerinden üçünün uygun sayısal değerleri için bu yedi bilinmeyenli yedi denklemden birkaç farklı çözüm kümesi bulunur. Bu çözüm kümelerinden biri seçilip (3.119) denkleminde bulunacak gerçel  $t$  değerleri ile **Şekil 3. 28** deki gibi 4 katlı Burmester noktası elde edilir.

Yukarıdakine benzer şekilde Burmester noktalarının 6 katlı olma şartları da araştırılabilir.  $p$  ve  $q$  birer sabit olmak üzere 6 kökü eşit olan yani 6 katlı bir köke sahip olan bir polinom için,

$$(px+q)^6=0,$$

$$p^6x^6+6p^5x^5q+15p^4x^4q^2+20p^3x^3q^3+15p^2x^2q^4+6pxq^5+q^6=0 \quad (3.125)$$

Bu denklemin katsayıları denklem (3.119)'daki 6. derece polinomun katsayılarına eşitlenirse,

$$p^6 = a(\omega_{x1}a - 1),$$

$$6p^5q = 2\omega_{x1}ba - b - d,$$

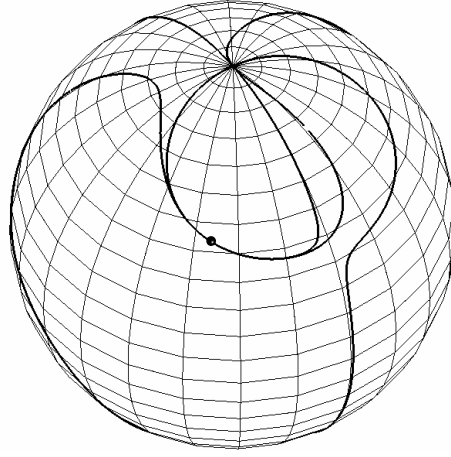
$$15p^4q^2 = 2\omega_{x1}a(k + a) + \omega_{x1}(b^2 - 1) - 2a - f,$$

$$20p^3q^3 = 2b(2\omega_{x1}a + \omega_{x1}k - 1) - d,$$

$$15p^2q^4 = 2\omega_{x1}(b^2 + ka) + a(\omega_{x1}a - 1) - f,$$

$$\begin{aligned} 6pq^5 &= b(2\omega_{x1}k + 2\omega_{x1}a - 1), \\ q^6 &= \omega_{x1}b^2 \end{aligned} \quad (3.126)$$

Bu şekilde elde edilen yedi bilinmeyenli yedi denklemden  $p$ ,  $q$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $f$ ,  $d$  ve  $\omega_{x1}$  değerleri elde edilir. Bu değerler (3.119) denkleminde yerine konarak, Şekil 3.29'daki gibi 6 katlı Burmester noktası elde edilir.



Şekil 3.29 6 Katlı Burmester noktası ( $a = -0.00697$ ,  $b = 0.649519$ ,  $\omega_{x1} = 0.44721$ ,  $d = -0.734278$  ve  $f = 0.181637$ )

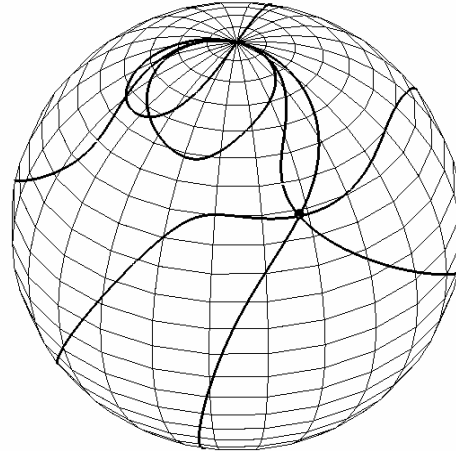
### 3.10. Ball-Burmester Noktaları

Bir Ball noktası aynı zamanda Burmester noktası ise, çizeceği büyük daire şeklindeki yörüngenin kalitesi daha iyi olacaktır. Böyle noktalara Ball-Burmester noktaları denir ve sayıları Ball noktalarının sayısı dörtten fazla olamayacağı için, en çok dört olabilir. Bunların varlığı için (3.108) ve (3.120) denklemlerindeki polinomlar ortak köke sahip olmalıdır. Bunun için de bu iki polinomun ortak Sylvester matrisinin determinanı (resultant) sıfır olmalıdır. Her iki polinomun katsayılarına bağlı olarak bulunan bu denklem bu noktaların varlık şartıdır. Bu determinant  $c = \omega_{x1}b^2$  olmak üzere, aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A = \begin{vmatrix}
 a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & C & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & C & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & C & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & C \\
 E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4
 \end{vmatrix} = 0$$

(3.127)

Bu determinantın açılımı **EK-4** 'te verilmiştir.

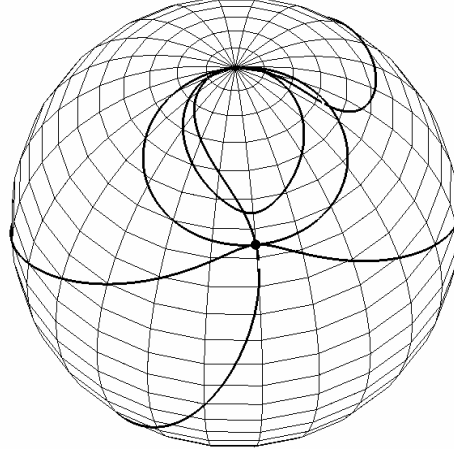


**Şekil 3.30** Ball-Burmester noktası ( $a=0.85$ ,  $b=0.279331$ ,  $\omega_{x1}=0.64$ ,  $d=1.0015$  ve  $f=-0.46731693$ )

Denklemleri sağlayan  $a$ ,  $b$ ,  $f$ ,  $d$  ve  $\omega_{x1}$  değerleri yardımıyla Ball-Burmester noktaları bulunabilir. **Şekil 3.30** 'da örnek olarak bir Ball-Burmester noktası görülmektedir. Ball-Burmester noktalarının büküm polünde olması için, Ball noktalarının büküm pollerinde olması için (3.107) ve (3.108) denklemlerindeki şartlar sağlanmalıdır. Denklem (3.127) deki Sylvester matrisinin determinantında (**EK-4**) bu şartlar yerine konursa, diğer katsayılar ortadan kalkarak ara işlemlerden sonra  $f$  için dördüncü dereceden bir denklem elde edilir ve buradan  $f$  çözülürse,

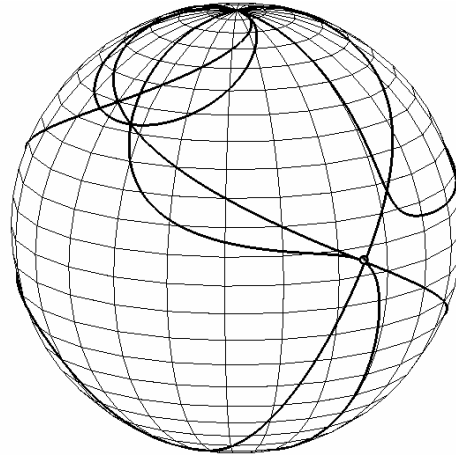
$$f = h (1+4\omega_{x1}^2 a^2 - 5\omega_{x1} a + \omega_{x1}^2) / (\omega_{x1}^2 a^2 - 2\omega_{x1} a + 1) \quad (3.128)$$

bulunur (**Şekil 3.31**).



**Şekil 3.31** Büküm polünde Ball-Burmester noktası ( $a=0.8676$ ,  $b=0$ ,  $\omega_{x1}=0.495$ ,  $d=1.246$  ve  $f=-0.25$ )

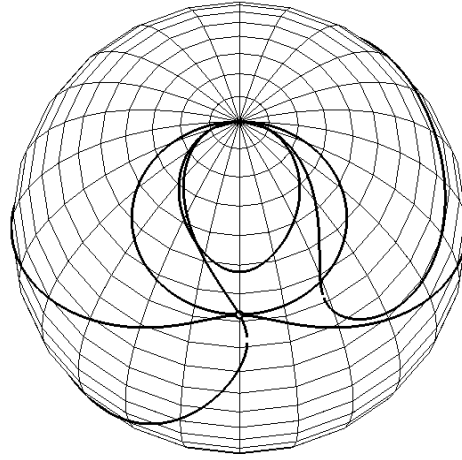
2 Katlı Ball-Burmester noktaları için (3.110) denklemindeki iki polinomun ortak Sylvester matrisinin determinantını sıfır yapan  $a$ ,  $b$ , ve  $\omega_{x1}$  değerleri, (3.108) ve (3.120) denklemlerinin ortak Sylvester matrisinin determinantı (3.127) denkleminde yerine konarak  $d$  veya  $f$  büyüklüğünün uygun sayısal değerleri için çözüm kümeleri bulunur.



**Şekil 3.32** 2 Katlı Ball-Burmester noktası ( $a=-0.012$ ,  $b=-0.1535$ ,  $\omega_{x1}=0.5$ ,  $d=0.283$  ve  $f=1.2383$ )

a, b, f, d ve  $\omega_{x1}$  için bulunan bu sayısal değerler Burmester noktaları için elde edilen (3.119) denkleminde yerine konup, bulunacak gerçel t değerleri 2 Katlı Ball-Burmester noktasını verir ( **Şekil 3.32**).

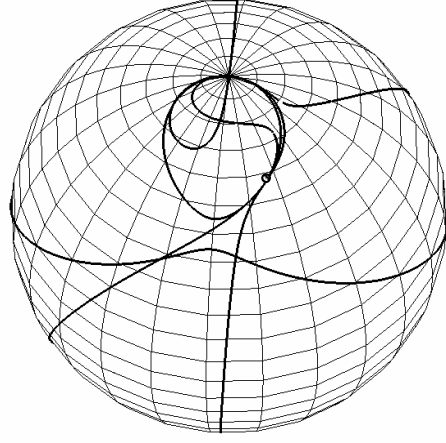
2 Katlı Ball-Burmester noktasının büküm pollarında olması için, (3.106) ve (3.107) denklemlerindeki şartlarla, Ball-Burmester noktalarının büküm polünde olması için (3.128) denklemindeki şartlar sağlanmalıdır.



**Şekil 3.33** Büküm polünde katlı Ball-Burmester noktası ( $a=0.8247$ ,  $b=0$ ,  $\omega_{x1}=0.49$ ,  $d=0.48416$  ve  $f=-0.1755$ )

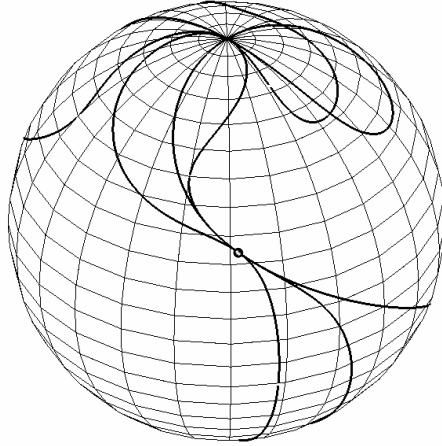
Denklem (3.127)'deki Sylvester matrisinin determinantında bu şartlar yerine konursa d için bir denklem elde edilir ve çözülür. Bu büyüklükler (3.119) denkleminde yerine konarak, bulunan gerçel t değerleri ile büküm polünde katlı Ball-Burmester noktası elde edilir (**Şekil 3.33**).

2 Katlı Ball noktaları için (3.110) denklemindeki iki polinomun ortak Sylvester matrisinin determinantını sıfır yapan a, b ve  $\omega_{x1}$  değerleri, (3.122) deki yedi bilinmeyenli yedi denklemde yerine konularak p, q, r, s, u, m, c, d ve f için çözüm kümeleri bulunur. Bu değerlere bağlı olarak bulunan f ve d büyüklükleri (3.119) denkleminde yerine konarak, bulunan gerçel t değerleri ile 2 katlı Ball-2 katlı Burmester noktası elde edilir (**Şekil 3.34**).



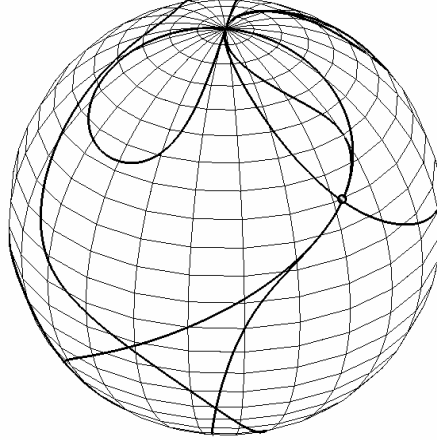
**Şekil 3.34** 2 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası ( $a=1.7555$ ,  $b=0.14$ ,  $\omega_{x1}=0.495$ ,  $f=-2.0537$  ve  $d= 1.86$ )

(3.122) deki denklem takımında 4 katlı Ball noktaları için (3.112) denkleminde elde edilen  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  değerleri yerine konularak  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $m$ ,  $c$ ,  $d$  ve  $f$  için çözüm kümeleri bulunur. Bu değerlere bağlı olarak bulunan  $f$  ve  $d$  ile  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  sayısal değerleri (3.119) denkleminde yerine konarak hesaplanan gerçel  $t$  değerleri ile 4 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası elde edilir (**Şekil 3.35**).



**Şekil 3.35** 4 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası ( $a=0.0866$ ,  $b= -0.5181$ ,  $\omega_{x1}=0.6$ ,  $d = 1.5061$  ve  $f = 1.97675$ )

(3.124) denklem takımında 4 katlı Ball noktaları için (3.122) denkleminde hesaplanan  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  değerleri yerine konularak  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $d$  ve  $f$  için çözüm kümeleri bulunur.  $a$ ,  $b$ ,  $\omega_{x1}$ ,  $d$  ve  $f$  in sayısal değerleri (3.119) denkleminde yerine konularak, hesaplanan gerçel  $t$  değerleri ile bulunan 4 katlı Ball–4 katlı Burmester noktası **Şekil 3.36** 'da görülmektedir.



**Şekil 3.36** 4 katlı Ball–4 katlı Burmester noktası ( $a = -0.134$ ,  $b = -0.5$ ,  $h = 0.5773$ ,  $d = -0.4196871424$  ve  $f = 0.1997$ )

### 3.11. 6. Mertebe Eğrisi

Burulmanın değişiminin sıfır olması, ilk türevinin sıfır olması anlamına gelir. Burulmanın değişimi de aynı anda sabitse ikinci türevi de sıfır olur. Bunun anlamı beraberce  $d\tau / dt = 0$  ve  $d^2\tau / dt^2 = 0$  olmasıdır. Bu özelliğe sahip olan noktaların geometrik yerine düzlem kinematiktekinе benzer olarak 6. mertebe eğrisi (Ting ve ark. 1991) denilebilir.

$\tau = 0$ ,  $d\tau / dt = 0$ ,  $d^2\tau / dt^2 = 0$  ifadelerinden,

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (3.129)$$

Denklem (3.128) deki  $\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})$  terimi için aşağıdaki işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned}
\stackrel{(5)}{\mathbf{r}} &= \frac{d^3 \mathbf{a}}{dt^3} \times \mathbf{r} + 4 \left( \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) + 6 \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \right) \\
&+ 4 \left[ \mathbf{a} \times \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \right) \right] \\
&+ \boldsymbol{\omega} \times \left[ \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} \times \mathbf{r} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2 \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \right] \right. \\
&\quad \left. + [\mathbf{a} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]] + \boldsymbol{\omega} \times \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \right] \right] \\
&= \frac{d^3 \mathbf{a}}{dt^3} \times \mathbf{r} + 4 \left[ \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} \times \dot{\mathbf{r}} \right] + 6 \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \ddot{\mathbf{r}} \right] + 4 \left[ \mathbf{a} \times \overset{\cdots}{\mathbf{r}} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \overset{(4)}{\mathbf{r}} \quad (3.130)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.130) denkleminde daha önce bulunan  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$  ve  $\overset{(4)}{\mathbf{r}}$  ifadeleri ve (3.46)'dan  $\omega_{z4}$  yerine konursa,

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x4} & \omega_{y4} & \omega_{z4} \\ x & y & z \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x3} & \omega_{y3} & -3\omega_{x1}\omega_{x2} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x2} & \omega_{y2} & -\omega_{x1}^2 \\ -x & -(y + \omega_{x1}z) & \omega_{x1}y \end{vmatrix} \\
&+ 4 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x1} & 0 & 0 \\ (y + \omega_{y2}z + \omega_{x1}z + \omega_{x1}^2 y) & -(\omega_{x1}^2 x + \omega_{x2}z + x) & (2\omega_{x1}x - \omega_{y2}x + \omega_{x2}y) \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -x & -(y + \omega_{x1}z) & \omega_{x1}y \end{vmatrix} \\
&+ (0, 0, \mathbf{k}) \times \begin{pmatrix} (z\omega_{y3} + 3y\omega_{x1}\omega_{x2} + 4\omega_{x1}^2 + z\omega_{x2} + x)\mathbf{i} \\ + (3x\omega_{x1}\omega_{x2} + z\omega_{x3} + y + z\omega_{x1} + z\omega_{y2} + y\omega_{x1}^2)\mathbf{j} \\ (y\omega_{x3} + x\omega_{y3} + 3x\omega_{x2} + 3\omega_{y2} + 3\omega_{x1}(-y - z\omega_{x1}))\mathbf{k} \end{pmatrix} \\
&= (\omega_{y4}z - (-4\omega_{x1}\omega_{x3} + 3\omega_{x2}^2 - 3\omega_{x1}^2\omega_{y3} + 9\omega_{x1}\omega_{x2}\omega_{y2})y + 15\omega_{x1}\omega_{x2}x \\
&+ 6\omega_{y2}\omega_{x1}y + 6\omega_{x1}^2(-\omega_{x1}z - y) + \omega_{x3}z - \omega_{y2}z - \omega_{x1}^2y - \omega_{x1}z - y)\mathbf{i} \\
&+ ((-4\omega_{x1}\omega_{x3} + 3\omega_{x2}^2 - 3\omega_{x1}^2\omega_{y3} + 9\omega_{x1}\omega_{x2}\omega_{y2})x - \omega_{x4}z + 9\omega_{x1}\omega_{x2}y \\
&+ 10\omega_{x1}^2x - 4\omega_{x1}(\omega_{x2}y - \omega_{y2}x + 2\omega_{x1}x) + \omega_{y3}z + \omega_{x2}z + x)\mathbf{j} + (\omega_{x4}y \\
&- \omega_{y4}x + 4\omega_{x3}x + 4\omega_{y3}y + 6\omega_{x2}(-\omega_{x1}z - y) + 6\omega_{y2}x + 4\omega_{x1}(-\omega_{x1}^2x - \omega_{x2}z - x))\mathbf{k} \\
&\quad (3.131)
\end{aligned}$$

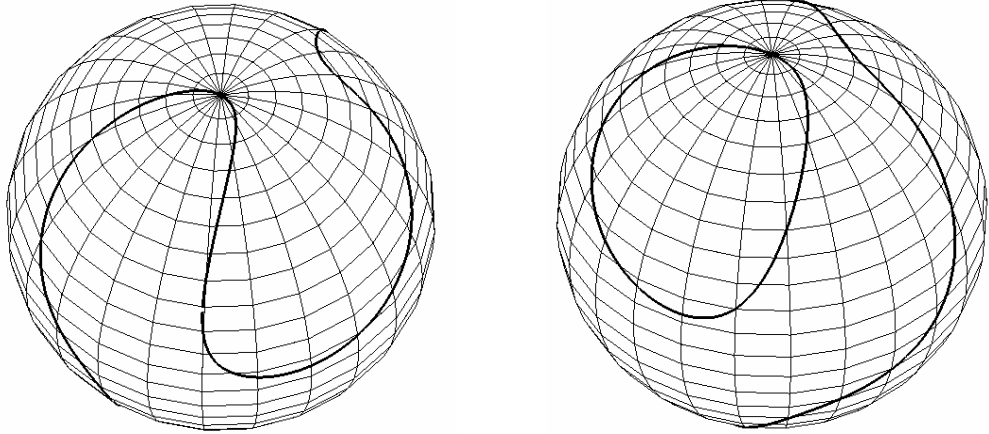
(3.131) denklemi (3.84) , (3.85), (3.96) ve (3.115) denklemleri ile birlikte (3.129) denkleminde yerine konularak, 6. mertebe eğrisinin denklemi elde edilir ve sadeleştirilerek yazılırsa,

$$(x^2+y^2)(m_1z+ey+gx)+(m_2x+2m_3z)y^2+(2m_4y+m_5z)zx+m_6(x^2-z^2)y=0 \quad (3.132)$$

Denklemdaki sabit katsayılar aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} e &= (\omega_{x4}+6\omega_{x1}^2\omega_{x2}-5\omega_{x2}+4\omega_{y3})/(3\omega_{x1}^2), \\ g &= ((5\omega_{y2}-\omega_{y4}+4\omega_{x3}-2\omega_{x1}+4\omega_{x1}^3)-4\omega_{y2}\omega_{x1}^2)/(3\omega_{x1}^2), \\ m_1 &= (-3\omega_{x1}d+12\omega_{x1}^2ba-10\omega_{x1}b), \\ m_2 &= (5\omega_{x1}-13\omega_{x1}^2a), \\ m_3 &= \omega_{x1}(8b-12\omega_{x1}ab-d), \\ m_4 &= (\omega_{x1}f-6a^2\omega_{x1}^2+8a\omega_{x1}-2-2\omega_{x1}^2+6\omega_{x1}^2b^2), \\ m_5 &= 3\omega_{x1}(1-a\omega_{x1}), \quad m_6=13b\omega_{x1}^2 \end{aligned}$$

Eğri, sabit katsayılarının aldığı değerlere göre tek veya iki parçalıdır. Üçüncü derecedendir ve orijine göre simetriktir (Şekil 3.37).



(a)

(b)

**Şekil 3.37** 6. mertebe eğrisi (a) Tek parçalı ( $a = -0.86$ ,  $b = 1.6$ ,  $d = 4.3$ ,  $e = -0.65$ ,  $f = 4.9$ ,  $g = 5.6$ ,  $\omega_{x1} = 0.49$ ), (b) İki parçalı ( $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $d = 0.2$ ,  $e = 4.5$ ,  $f = 5.25$ ,  $g = 0.6$ ,  $\omega_{x1} = 0.52$ )

### 3.12. 6. Mertebe Burmester Noktaları

6. Mertebe eğrisi ile daireleme noktalar eğrisinin kesim noktaları 6. mertebe Burmester noktaları olarak anılır. Bunların çizdiği dairesel yörüngenin mertebesi daha yüksektir ve yörüngesi büyük daireye 6 nokta temaslıdır. Düzlem kinematiğe benzer şekilde 6. mertebe Burmester noktaları olarak anılır. Bu noktaları bulmak için Ball noktalarında olduğu gibi  $x=ty$  denir ve küre denkleminde (3.104) yerine konur ve  $z$  çekilirse,

$$z = \sqrt{t^2 y^2 - y^2 + 1} \quad (3.133)$$

elde edilir. Bu ifade ve  $x=ty$  ifadesi 6. mertebe eğrisi denkleminde (3.131) yerine konur ve ara işlemlerden sonra  $y$  ye göre düzenlenerek yazılırsa,

$$a_1 y^4 + a_2 y^2 + a_3 = 0$$

bulunur. Bu denkleminde  $y$  çözümlenir  $x$  ve  $z$  ifadeleri de yazılırsa,

$$x = ty, \quad y = \sqrt{-\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1}}, \quad z = \sqrt{1 - y^2(1 - t^2)} \quad (3.134)$$

şeklinde 6. mertebe Burmester noktalarının parametrik koordinatları bulunur.

Burada,

$$u = t^3(g - m_5) + t^2(e + 2m_6) + t(g + m_2 - m_5) + e + m_6,$$

$$q = (1 + t^2)m_1 + 2m_4 t + 2hm_3,$$

$$a_1 = u^2 + (1 + t^2)q^2,$$

$$a_2 = 2(m_5 t - m_6)u - q^2$$

$$a_3 = (m_5 t - m_6)^2$$

(3.134) ifadeleri (3.132) 6. mertebe eğrisinin denkleminde yerine konulursa,  $t$  parametresine bağlı aşağıdaki 7. derece denklem elde edilir.

$$c_7 t^7 + c_6 t^6 + c_5 t^5 + c_4 t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t - m_6 b^2 = 0 \quad (3.135)$$

Bu denklemdeki sabit sayılar,

$$c_1 = b(m_5 b - 2m_6 a - m_1 - 2\omega_{x1} m_3)$$

$$c_2 = e + 2b(m_5 a - b m_6 - m_4) - a(m_1 + m_6 a + 2\omega_{x1} m_3)$$

$$c_3 = g + m_2 + 2b(m_5 b - \omega_{x1} m_3 - m_1) + a(m_5 a - 4m_6 b - 2m_4)$$

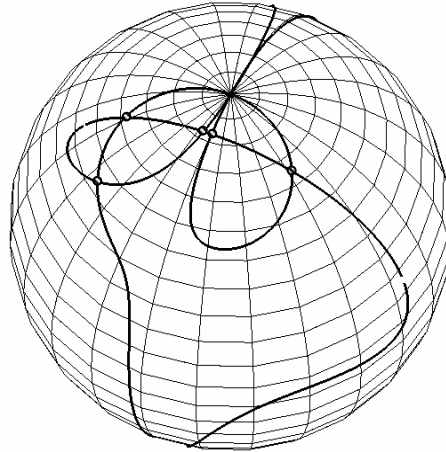
$$c_4 = e + m_6 + b(4m_5 a - m_6 b - 2m_4) - 2a(m_1 + m_6 a + \omega_{x1} m_3)$$

$$c_5 = g + b(m_5 b - m_1) + 2a(m_5 a - m_6 b - m_4)$$

$$c_6 = a(2m_5 b - m_6 a - m_1)$$

$$c_7 = m_5 a^2$$

(3.135) denkleminin gerçel köklerinin sayısı 6. mertebe Burmester noktalarının sayısıdır. Buna göre bu noktaların sayısının en çok yedi olduğu anlaşılır. (3.135) denkleminde bulunacak gerçel  $t$  değerleri, (3.134) denklemlerinde yerine konarak 6. mertebe Burmester noktalarının koordinatları bulunur (**Şekil 3.38**).



**Şekil 3.38** 6. mertebe Burmester noktaları ( $a=-0.91$ ,  $b=0.04918$ ,  $\omega_{x1}=0.495$ ,  $d=0.083$ ,  $f=3.7$ ,  $e=2.77$  ve  $g=0.633$ )

Bir 6. mertebe Burmester noktasının 2 katlı olması için yukarıdaki 7. derece polinomun köklerinden ikisinin eşit olması gerekir.  $p, q, r, s, u, m$  ve  $c$  birer sabit olmak üzere 2 kökü eşit olan bir polinom için,

$$(pt+q)^2(t^5+rt^4+st^3+ut^2+mt+c)= 0$$

açınımı yazılırsa,

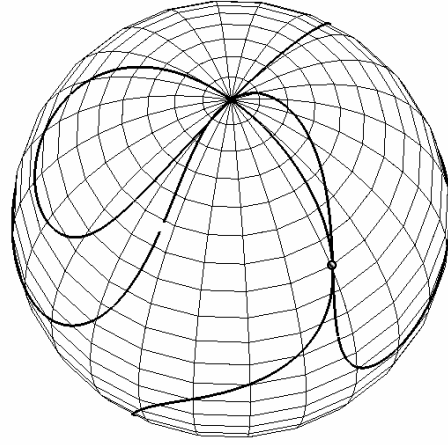
$$p^2t^7 + (2pq + p^2r)t^6 + (2pqr + p^2s + q^2)t^5 + (q^2r + 2pqs + p^2u)t^4 + (q^2s + 2pqu + p^2m)t^3 + (p^2c + q^2u + 2pqm)t^2 + (q^2m + 2pqc)t + q^2c = 0 \quad (3.136)$$

denklemini bulunur. Bu polinomun katsayıları (3.135) denkleminin katsayıları ile eşitlenerek,

$$\begin{aligned} p^2 &= m_5a^2 \\ 2pq+p^2r &= a(2m_5b - m_6a - m_1) \\ 2pqr+p^2s+q^2 &= g + b(m_5b - m_1) + 2a(m_5a - m_6b - m_4) \\ q^2r+2pqs+p^2u &= e + m_6 + b(4m_5a - m_6b - 2m_4) - 2a(m_1 + m_6a + \omega_{x1}m_3) \\ q^2s+2pqu+p^2m &= g + m_2 + 2b(m_5b - \omega_{x1}m_3 - m_1) + a(m_5a - 4m_6b - 2m_4) \\ p^2c+q^2u+2pqm &= e + 2b(m_5a - bm_6 - m_4) - a(m_1 + m_6a + 2\omega_{x1}m_3) \\ q^2m+2pqc &= b(m_5b - 2m_6a - m_1 - 2\omega_{x1}m_3) \\ q^2c &= - m_6b^2 \end{aligned} \quad (3.137)$$

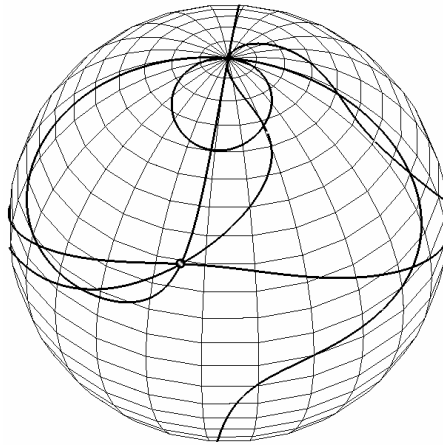
denklemleri yazılır.

Bu sekiz denklemden  $p, q, r, s, u, m, c$  için çözüm kümeleri bulunur. Uygun sayısal değerlerle bu değerlere bağlı olarak bulunan  $a, b, d, e, f, g$  ve  $\omega_{x1}$  büyüklükleri (3.135) denkleminde yerine konarak, bulunan gerçel  $t$  değerleri ile **Şekil 3.39'** daki gibi 2 katlı Burmester noktası elde edilir.



**Şekil 3.39** 6. mertebe 2 katlı Burmester noktası ( $a= 0.222$ ,  $b= 0.124$ ,  $d= 0.90118$ ,  
 $e= -0.45067$ ,  $f= 0.68$ ,  $g = -0.14202$  ve  $\omega_{x1}=0.4$ )

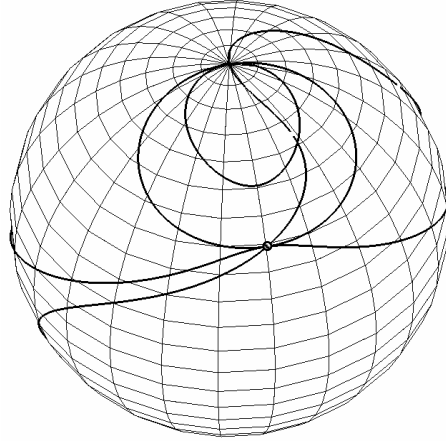
6. mertebe Ball-Burmester noktalarının varlığı için (3.108) ve (3.135) denklemlerindeki polinomların ortak Sylvester matrisinin determinanı sıfır olmalıdır (**EK-5**). Her iki polinomun katsayılarına bağlı olarak bulunan bu denklem bu noktaların varlık şartıdır. Ball noktalarını veren 4. derece polinomda (3.115) denkleminin gerçel köklerini sağlayan  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  ile  $f$  ve  $g$  için uygun değerler alınarak  $e$  katsayısı için bulunacak uygun değerler 6. mertebe Ball- Burmester noktalarını sağlar.



**Şekil 3.40** 6. mertebe Ball-Burmester noktası

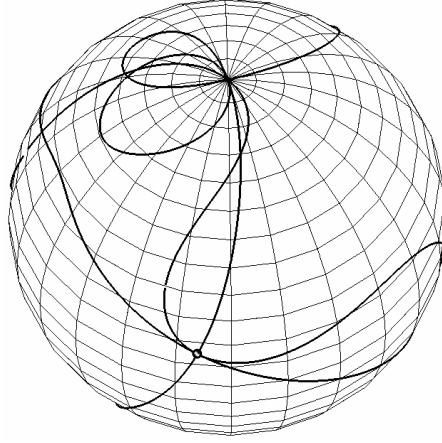
Örnek olarak  $a, b, d, e, f, g$  ve  $\omega_{x1}$  ( $a=0.102, b=0.0582, d=1.83, e=-2.526496843, f=3.7, g=0.633$  ve  $\omega_{x1}=0.43$ ) değerleri için bulunan 6. mertebe Ball-Burmester noktası **Şekil 3.40**'da görülmektedir.

6. mertebe Ball-Burmester noktalarının büküm polünde olması için, Ball noktalarının büküm pollerinde olması için gerekli olan (3.107) denklemindeki şart sağlanmalıdır. (3.108) ve (3.135) denklemlerindeki polinomların ortak Sylvester matrisinin determinantında bu şartlar yerine konursa, diğer katsayılar ortadan kalkarak ara işlemlerden sonra  $e$  için dördüncü dereceden bir denklem elde edilir. Buradan  $e$  çözülerek,  $a, b, d, e, f, g$  ve  $\omega_{x1}$  için büküm Polünde 6. mertebe Ball-Burmester noktası elde edilir (**Şekil 3.41**).



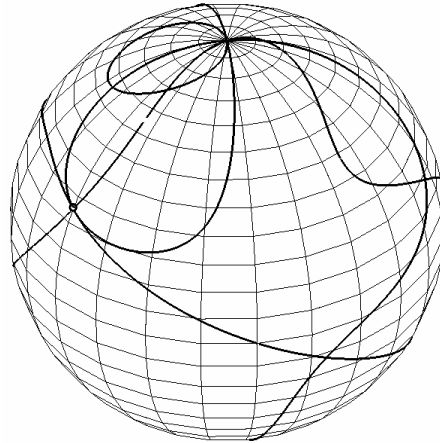
**Şekil 3.41** Büküm polünde 6. mertebe Ball-Burmester noktası ( $a = 0.75, b = 0, d = .83, e = -1.484798536, f = 0.4, g = 0.66$  ve  $\omega_{x1} = 0.48$ )

2 katlı Ball noktaları için (3.110) denklemindeki iki polinomun ortak Sylvester matrisinin determinantını sıfır yapan  $a, b,$  ve  $\omega_{x1}$  değerleri, (3.108) ve (3.135) denklemlerinin ortak Sylvester matrisinin determinantında yerine konarak  $d, f$  veya  $g$  büyüklüğünün uygun sayısal değerleri için çözüm kümeleri bulunur.  $a, b, d, e, f, g$  ve  $\omega_{x1}$  için bulunan bu sayısal değerler Burmester noktaları için elde edilen (3.135) denkleminde yerine konup, bulunacak gerçel  $t$  değerleri 6. mertebe 2 katlı Ball-Burmester noktasını verir (**Şekil 3.42**).



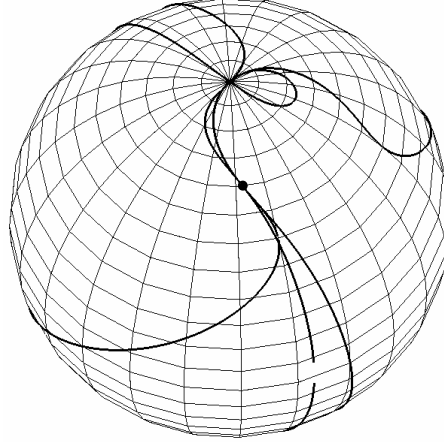
**Şekil 3.42** 6. mertebe 2 katlı Ball- Burmester noktası ( $a = 0.4$ ,  $b = 0.7049$ ,  $d = 0.83$ ,  
 $e = -1.184425512$ ,  $f = 0.4$ ,  $g = 0.66$  ve  $\omega_{x1} = 0.48$ )

2 katlı Ball noktaları için (3.110) denklemindeki iki polinomun ortak Sylvester matrisinin determinantını sıfır yapan  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  değerleri, (3.137) deki sekiz denklemde yerine konularak  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $m$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ve  $g$  için çözüm kümeleri bulunur. Bu değerlere bağlı olarak bulunan  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ve  $g$  büyüklükleri (3.135) denkleminde yerine konarak, bulunan gerçel  $t$  değerleri ile 6. mertebe 2 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası elde edilir (**Şekil 3.43**).



**Şekil 3.43** 6. mertebe 2 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası ( $a = 0.1166$ ,  
 $b = -0.1815$ ,  $d = 1.15$ ,  $e = 0.4444273319$ ,  $f = 2.32$ ,  $g = 0.0911566672$  ve  $\omega_{x1} = 0.46$ )

(3.122)'deki denklem takımında 4 katlı Ball noktaları için (3.112) denkleminde elde edilen  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  değerleri yerine konularak  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $m$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ve  $g$  için çözüm kümeleri bulunur. Bu değerlere bağlı olarak bulunan  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ve  $g$  ile  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  sayısal değerleri (3.135) denkleminde yerine konarak, hesaplanan gerçel  $t$  değerleri ile 6. mertebe 4 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası elde edilir (**Şekil 3.44**).



**Şekil 3.44** 6. mertebe 4 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası ( $a= 1.866025403$ ,  $b=-1/2$ ,  $d=0.56$ ,  $e=9.438098423$ ,  $f=1.23$ ,  $g=-14.66671465$ ,  $\omega_{x1} = 0.5773502684$ )

#### 4. KÜRESEL MEKANİZMA TASARIMI

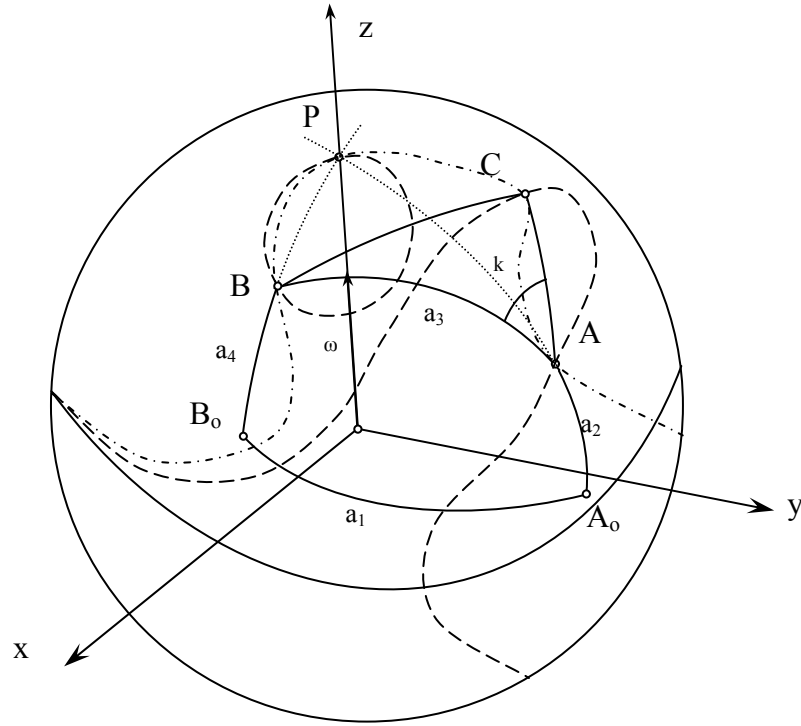
Basit bir küresel mekanizma dört döner çift ve dört uzuvdan oluşur. Döner çiftlerin eksenleri bir noktada kesişirler. Uzuvlar düzlemsel ve üç boyutlu hareket edebilirler. Eğer bir cisim küresel bir hareket gerçekleştiriyorsa bu küresel hareket bir dönme, yani bir açısal hareket olarak ele alınabilir. Açısal hız türevlerinin normalize edilmiş değerleri, hareketin gözönüne alınan anına mahsus ani invaryantlar olarak alınabilir ve kinematik ani invaryantlar olarak adlandırılırlar. Katı cisimlerin düzlemsel ve üç boyutlu hareketleriyle ilgili bir kavram olan ani invaryantlar mekanizmaların analiz ve sentezi, kontrol teorisi gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Bu çalışmada elde edilen  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  ve  $\omega_{x1}$  gibi ani invaryantlar Ball, Burmester ve 6. mertebe Burmester noktaları gibi geometrik yeri kinematik özellikleri dolayısıyla önemli olan noktaların elde edilmesi için kullanılmıştır. Ball, Burmester ve 6. mertebe Burmester noktaları sırasıyla (3.105), (3.120) ve (3.135) denklemleri ile bulunmuştur. Ani invaryantlar Ball, Burmester ve 6. mertebe Burmester noktalarını veren (3.105), (3.120) ve (3.135) denklemlerinden gerçel kökler elde edilecek şekilde belirlenmiştir. Belirlenen gerçel kökler sırasıyla (3.103), (3.118) ve (3.134) denklemlerinde yerine konularak Ball, Burmester ve 6. mertebe Burmester noktalarının koordinatları elde edilmiştir. Bu noktalardan uygun ikisine karşılık gelen noktalar hareketli mafsal noktaları, diğer köklerden uygun bir tanesine karşılık gelen nokta da istenen yörüngeyi çizecek biyel noktası olarak alınmıştır. Tasarımın önceliğine göre özel bir konum varsa o nokta önceliğine göre uygun bir şekilde seçilmiştir. Mesela Ball-Burmester noktaları ile yapılan tasarımda Ball noktaları biyel noktası olarak alınmıştır. Bu koordinatlar kullanılarak, küresel Euler-Savary denklemi, küresel geometri ve trigonometrik bağıntılar vasıtasıyla küresel mekanizmayla ilgili tüm boyutsal parametreler hesaplanmıştır. Büküm eğrisinin ve daireleme noktalar eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.88) ve (3.100) denklemlerinden A ve B noktası için bu küresel açı hesaplanmıştır. PA ve PB merkez açıları ile  $\theta_A$  ve  $\theta_B$  bilindiğine göre artık  $PA_0$  ve  $PB_0$  tamamen benzer şekilde küresel Euler-Savary denkleminde kolayca bulunur. Bundan sonra  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $AB$ ,

$A_0B_0$  ve AC açıları (büyük daire yayları) ile AB ve AC yayları arasındaki küresel açısı (**Şekil 4.1**) trigonometrik bağıntılar ve küresel geometri bağıntıları yardımıyla hesaplanmıştır (**EK-1**). Böylece küresel mekanizma boyutsal olarak tamamen ortaya çıkmış olur, Grashof teoremi ya da diğer kriterlere göre tipi belirlenmiş ve biyel eğrisi çizdirilmiştir. Bulunan mekanizma ve çizdiği yörünge animasyonu yapılarak görsel olarak değerlendirilmiştir. Mafsal noktası ve biyel noktası olarak seçilen noktalar değiştirilerek, boyutsal ve yörünge açısından maksada en uygun mekanizma elde edilinceye kadar birkaç deneme yapılmıştır. ani invaryantların sayısal değerleri değiştirilerek yeni birkaç deneme daha yapılmış ve en uygun mekanizma bulunmaya çalışılmıştır. Biyel eğrisi Ball noktaları için bir kısmı büyük daire yayı şeklinde olmuştur. Bu husus eğrinin jeodezik eğriliğinin değişimi çizdirilerek görülmüştür. Burmester ve 6. mertebe Burmester noktaları için ise daire yayı şeklinde olmuştur. Bu husus eğrinin burulmasının değişimi çizdirilerek görülmüştür. Ball–Burmester ve Ball – 6. mertebe Burmester noktaları için bir kısmı büyük daire yayı şeklinde olmuştur.

Aşağıdaki örneklerin her biri için bir hesaplama tablosu verilmiştir. Boyutsal olarak elde edilen ve Grashof teoremi ya da diğer kriterlere göre tipi belirlenen küresel dört çubuk mekanizmasında, biyel noktasının çizdiği biyel eğrisi grafik olarak çizilerek tabloyla birlikte verilmiştir. **Şekil 4.1**'de küresel dört çubuk mekanizması ve genel geometrik boyutları görülmektedir.

Matematiksel hesaplamaların hızlı ve güvenilir bir şekilde yapılması için Maple matematik paket programından ve elde edilen küresel mekanizmaların animasyonu için ST\_Sfourbar animasyon programından yararlanıldı.



**Şekil 4.1** Büküm, Daireleme Noktalar, Çift Daireleme Noktalar Eğrileri ve Bunlar Yardımıyla Elde Edilen Bir Küresel Dört Çubuk Mekanizması

#### 4.1. Ball Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı

Yörüngesinin belli bir kısmı büyük daire yayı şeklinde olan bir biyel noktasına sahip küresel bir dört çubuk mekanizması elde etmek için Ball noktaları kullanıldı. Bunun için, bu noktalarla ilgili üç ani invaryant  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$ , Ball noktalarını veren (3.105) denkleminde dört adet gerçel kök elde edilecek şekilde belirlendi ve bu sayısal değerler yerine konularak 4 adet dört gerçel kök, yani dört Ball noktasına ait gerçel  $t$  değerleri bulundu. Bunlardan uygun ikisine karşılık gelen noktalar hareketli mafsalları, diğer iki kökten uygun bir tanesine karşılık gelen nokta da istenen yörüngeyi çizecek biyel noktası olarak alındı. Yukarıda bulunan  $t$  kökleri (3.103) denklemlerinde yerine konularak dört adet Ball noktasının koordinatları elde edildi. Bu koordinatlar kullanılarak, küresel Euler–Savary denklemi, küresel geometri ve trigonometrik bağıntılar vasıtasıyla küresel mekanizmayla ilgili tüm boyutsal parametreler hesaplandı. Bulunan mekanizma ve çizdiği yörüngenin animasyonu yapılarak görsel olarak değerlendirildi. Mafsalları ve biyel noktası olarak seçilen

noktalar değiştirildi, boyutlar ve yörünge açısından maksada en uygun mekanizma elde edilinceye kadar birkaç deneme yapıldı, hatta ani invaryantların sayısal değerleri değiştirilerek birkaç deneme daha yapılarak en uygun mekanizma bulunmaya çalışıldı.

Örnek olarak, belirlenen üç ani invaryant  $\omega_{x1} = 0.45$ ,  $a = -0.0050495$ ,  $b = 0.26$  Ball noktalarını veren (3.105) denkleminde yerine konarak dört adet gerçel (t değerleri) kök elde edildi ( $t_1 = 0.1599425936$ ,  $t_2 = 0.7802046519$ ,  $t_3 = 0.96920745$ ,  $t_4 = 49.69782751$ ). Dört gerçel kökten dördüncü ve birinci köklere ait noktalar, sırasıyla A ve B hareketli mafsal noktaları, ikinci köke ait nokta da C biyel noktası olarak alındı ve (3.103) denklemlerinde yerine konularak Ball noktalarının koordinatları elde edildi.

$$A(t_4) (-0.9997566529, -0.0201167074, 0.0090532603)$$

$$B(t_1) (-0.08218094197, -0.5138152391, 0.8539556151)$$

$$C(t_2) (-0.5678944209, -0.7278787938, 0.3843024695)$$

$A_0$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanılarak PA merkez açısı hesaplandı ( $PA = 1.561742943$ ). Denklemdaki  $\theta$  açısı,  $PAA_0$  büyük daire yayı ve P polündeki pol eğrisi teğeti arasındaki küresel açıdır. Ball noktaları büküm eğrisi üzerinde olduğuna göre bu eğri denklemini sağlarlar. Büküm eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.88) denkleminde A noktası için bu küresel açı değeri  $\theta_A$  hesaplandı ( $\theta_A = 0.02011888857$ ). PA merkez açısı ve  $\theta_A$ , küresel Euler–Savary denkleminde (3.78) yerine konularak  $PA_0$  hesaplandı ( $PA_0 = -0.009053383796$ ). Yine benzer şekilde  $B_0$  sabit mafsal noktasının yerini bulmak için,  $A_0$  sabit mafsal noktasını bulmak için uygulanan işlemlerin tamamen benzeri uygulandı. Böylece  $A_0$  ve  $B_0$  sabit mafsal noktalarının koordinatları aşağıdaki gibi bulundu.

$$A_0(-0.009051427, -0.00018212923, 0.99995902)$$

$$B_0(0.1348696764, 0.8432380229, 0.5203458538)$$

$AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $AB$ ,  $A_0B_0$  ve  $AC$  merkez açıları (büyük daire yayları) ile  $AB$  ve  $AC$  yayları arasındaki küresel açısı (**Şekil 4.1**) trigonometrik bağıntılar ve küresel geometri bağıntıları yardımıyla hesaplandı.

$$A_0B_0 = a_1 = 58.73814151^\circ$$

$$AA_0 = a_2 = 88.96255866^\circ$$

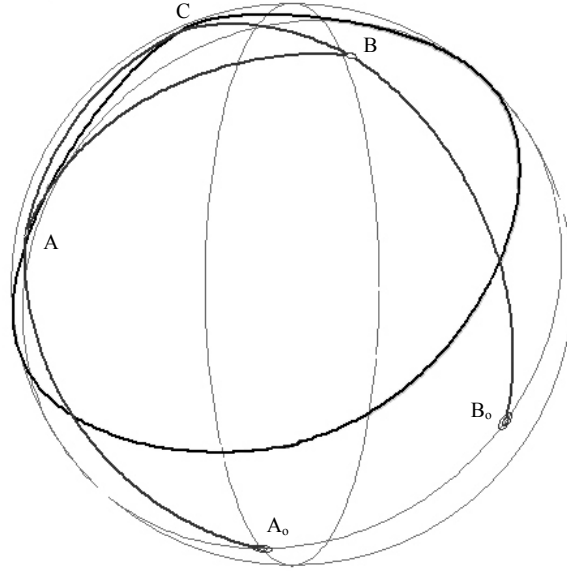
$$AB = a_3 = 84.24768301^\circ$$

$$BB_0 = a_4 = 90^\circ$$

$$AC = 54.13496328^\circ$$

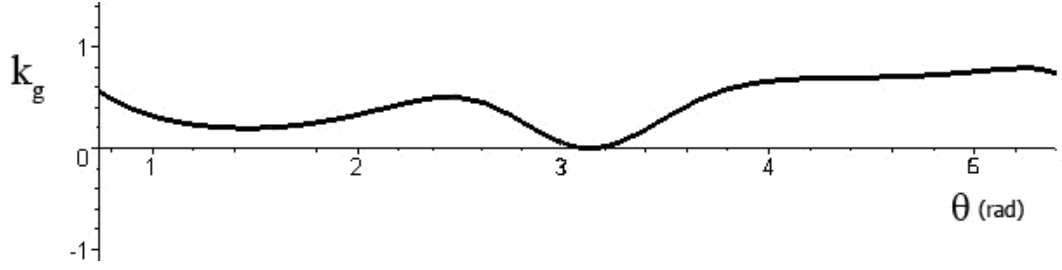
$$k = 31.14165605^\circ$$

Böylece küresel mekanizma boyutsal olarak tamamen ortaya çıkmış oldu, Grashof teoremine göre tipi belirlendi (çift kol). Biyel eğrisinin büyük bir kısmının büyük daire yayı şeklinde olduğu,  $\theta_2 = 0 \dots 2\pi$  aralığında eğrinin jeodezik eğriliğinin değişimi çizdirilerek görüldü. Elde edilen küresel dört çubuk mekanizması bir çift kol olup C biyel noktasının çizdiği biyel eğrisiyle birlikte **Şekil 4.2**'de görülmektedir.



**Şekil 4.2** Ball noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi

**Şekil 4.3**'te görüldüğü gibi  $\theta_2 = 0 \dots 2\pi$  aralığında biyel eğrisinin jeodezik eğriliğinin birden küçük ve  $0 - 0.6$  aralığında olduğu, yani sıfıra oldukça yakın olduğu görülmektedir. Küre yüzeyinde jeodezik eğriliği sıfır olan eğriler büyük dairelerdir. jeodezik eğriliğin bu şekilde olması biyel eğrisinin bir büyük daire yayı şeklinde olduğunu göstermektedir.



**Şekil 4.3** Ball noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin jeodezik eğriliğinin değişimi

#### 4.2. Burmester Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı

Burmester noktaları, yörüngesinin bir kısmı daire yayı şeklinde olan bir biyel noktasına sahip küresel bir dört çubuk mekanizması elde etmek için kullanıldı. Bunun için, bu noktalarla ilgili beş ani invaryant  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $f$  ve  $\omega_{x1}$ , Burmester noktalarını veren (3.119) denkleminde dört adet gerçel kök elde edilecek şekilde belirlendi ve bu sayısal değerler yerine konularak 4 adet dört gerçel kök, yani dört Burmester noktasına ait gerçel  $t$  kökleri bulundu. Bunlardan uygun ikisine karşılık gelen noktalar hareketli mafsal noktaları, diğer iki kökten uygun bir tanesine karşılık gelen nokta da istenen yörüngeyi çizecek biyel noktası olarak alındı. Yukarıda bulunan  $t$  kökleri (3.118) denklemlerinde yerine konularak dört adet Burmester noktasının koordinatları elde edildi. Bu koordinatlar kullanılarak, küresel Euler–Savary denklemi, küresel geometri ve trigonometrik bağıntılar vasıtasıyla küresel mekanizmayla ilgili tüm boyutsal parametreler hesaplandı. Bulunan mekanizma ve çizdiği yörünge animasyonu yapılarak görsel olarak değerlendirildi. Mafsal noktası ve biyel noktası olarak seçilen noktalar değiştirilerek, boyutlar ve yörünge açısından maksada en uygun mekanizma elde edilinceye kadar birkaç deneme yapıldı. Ani invaryantların sayısal değerleri değiştirilerek birkaç deneme daha yapıldı ve en uygun mekanizma bulunmaya çalışıldı. Böylece küresel mekanizma boyutsal olarak tamamen ortaya çıkmış oldu. Grashof teoremi ya da diğer kriterlere göre tipi belirlendi ve biyel eğrisi çizdirildi. Biyel eğrisinin bir kısmı daire yayı şeklinde olmuştur. Bu husus eğrinin burulmasının değişimi çizdirilerek görüldü. Burmester noktaları ile ilgili çift kol ve kol sarkaç tipi mekanizmalar elde edilmiş ve örnek hesaplamaları yapılarak aşağıda verilmiştir.

#### 4.2.1. Burmester noktaları yardımıyla küresel çift kol mekanizması

Örnek olarak, belirlenen beş ani invaryant,  $\omega_{x1}=0.48$ ,  $a=0.4$ ,  $b=0.0705$ ,  $d=0.735$  ve  $f=0.307217$  denklem (3.119)'da yerine konularak Burmester noktalarına ait dört gerçel t kökleri bulundu ( $t_1 = -1.285326390$ ,  $t_2 = -0.5004432286$ ,  $t_3 = -0.049382978$ ,  $t_4 = 0.1844257366$ ). Dört gerçel kökten dördüncü ve birinci köklere ait noktalar, sırasıyla A ve B hareketli mafsal noktaları, ikinci köke ait nokta da C biyel noktası olarak alındı ve (3.118) denklemlerinde yerine konularak Burmester noktalarının koordinatları elde edildi.

$$A(t_4)(-0.1419408345, -0.7696368042, 0.6225046103)$$

$$B(t_1)(0.6880215088, -0.5352893352, 0.4899915620)$$

$$C(t_2)(0.4298467679, -0.8589321292, 0.2783295761)$$

$A_0$  sabit mafsal noktalarının koordinatlarını bulmak için, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanılarak PA merkez açısı hesaplandı ( $PA = 0.898857377$ ). Denklemdaki  $\theta$  açısı,  $PAA_0$  büyük daire yayı ve P polündeki pol eğrisi teğeti arasındaki küresel açıdır. Burmester noktaları daireleme noktalar eğrisi üzerinde olduğu için bu eğri denklemini sağlar. Daireleme noktalar eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denkleminde A noktası için bu küresel açı değeri  $\theta_A$  hesaplandı ( $\theta_A = -0.4749675518$ ). PA merkez açısı ve  $\theta_A$ , küresel Euler-Savary denkleminde (3.78) yerine konularak  $PA_0$  hesaplandı ( $PA_0 = 0.1847483424$ ). Böylece  $A_0$  sabit mafsal noktasının koordinatı aşağıdaki gibi bulundu.

$$A_0(0.03331698855, 0.1806525985, 0.9829825110)$$

Aynı şekilde  $B_0$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanılarak PB merkez açısı hesaplandı ( $PB = 1.058716254$ ). Denklemdaki  $\theta_B$  açısı,  $PBB_0$  büyük daire yayı ve P polündeki pol eğrisi teğeti arasındaki küresel açıdır. Burmester noktaları daireleme noktalar eğrisi üzerinde olduğundan, eğrinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denkleminde B noktası için bu küresel açı değeri  $\theta_B$  hesaplandı ( $\theta_B = -0.66118941$ ). PB merkez açısı ve  $\theta_B$ , küresel Euler-Savary denkleminde (3.78) yerine konularak  $PB_0$  bulundu ( $PB_0 = 0.2476640077$ ) ve  $B_0$  sabit mafsal noktasının koordinatı bulundu.

$$B_0(-0.1934797244, 0.1505296443, 0.9694877113)$$

$AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $AB$ ,  $A_0B_0$  ve  $AC$  merkez açıları (büyük daire yayları) ile  $AB$  ve  $AC$  yayları arasındaki  $k$  küresel açısı (Şekil 4.1) trigonometrik bağıntılar ve küresel geometri bağıntıları yardımıyla hesaplandı.

$$A_0B_0 = a_1 = 13.16030455^\circ$$

$$AA_0 = a_2 = 62.08603433^\circ$$

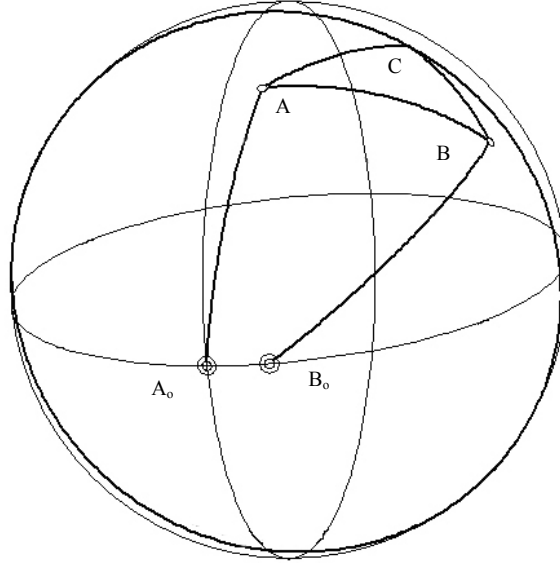
$$AB = a_3 = 51.73189789^\circ$$

$$BB_0 = a_4 = 74.85007538^\circ$$

$$AC = 39.34753948^\circ$$

$$k = 33.94401392^\circ$$

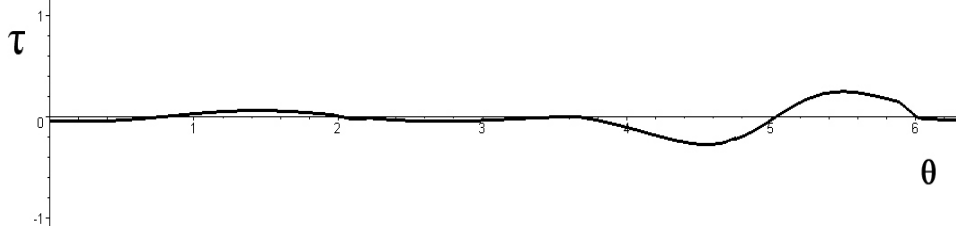
Böylece küresel mekanizma boyutsal olarak tamamen ortaya çıkmış oldu, Grashof teoremine göre tipi belirlendi (çift kol). Biyel eğrisinin bir kısmı daire yayı şeklinde olduğu,  $\theta = 0 \dots 2\pi$  aralığında eğrinin burulmasının değişimi çizdirilerek görüldü. Elde edilen küresel dört çubuk mekanizması bir çift kol olup  $C$  noktasının çizdiği biyel eğrisiyle birlikte **Şekil 4.4**'de görülmektedir.



**Şekil 4.4** Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel çift kol mekanizması ve biyel eğrisi

Biyel eğrisinin bir daire yayı şeklinde olduğu, **Şekil 4.5**'te görüldüğü gibi  $\theta = 0 \dots 2\pi$  aralığında burulmasının değişimi birden küçük ve  $0 \dots 0.15$  aralığında olduğu yani sıfıra oldukça yakın olmasından anlaşılmaktadır. Küre yüzeyinde

burulmasının yanı sıra zamana göre değişiminin de sıfır olduğu eğriler daire yayları ve büyük dairelerdir. Yani burada eğriye ait burulmanın değişiminin 0...0.15 aralığında olması biyel eğrisinin bir daire yayı şeklinde olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.5 Şekil 4.4 deki biyel eğrisinin burulmasının değişimi

#### 4.2.2. Burmester noktaları yardımıyla küresel kol sarkaç mekanizması

Burmester noktaları ile ilgili ikinci bir örnek olarak, belirlenen beş ani invaryant,  $\omega_{x1}=0.45$ ,  $a=0.1$ ,  $b=0.2$ ,  $d=1.55$  ve  $f=0.4863$  (3.119) denkleminde yerine konularak Burmester noktalarına ait dört gerçel  $t$  kökü bulundu ( $t_1=-17.6370442$ ,  $t_2=-0.4570169$ ,  $t_3=-0.0888324$ ,  $t_4=0.27546861$ ). Birinci ve ikinci ve köke ait noktalar, sırasıyla A ve B hareketli mafsal noktaları, üçüncü köke ait nokta da C biyel noktası olarak alındı ve (3.118) denklemlerinde yerine konularak Burmester noktalarının koordinatları elde edildi.

$$A(t_4)(0.5372825469, -0.03046329882, 0.842851975)$$

$$B(t_1)(-0.3896828811, 0.8526662398, 0.3480050796)$$

$$C(t_2)(-0.03717556661, 0.4184911357, 0.907459722)$$

$A_0$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanıldı ve PA merkez açısı hesaplandı ( $PA = 0.56823526$ ). Denklemdaki  $\theta_A$  açısı ( $PAA_0$  büyük daire yayı ve P polündeki pol eğrisi teğeti arasındaki küresel açı), daireleme noktalar eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denkleminde A noktası için hesaplandı ( $\theta_A = 1.691066136$ ). PA merkez açısı ve  $\theta_A$ , küresel Euler–Savary denkleminde yerine konularak  $PA_0$  (3.78) bulundu ( $PA_0 = -0.978989381$ ). Buradan  $A_0$  sabit mafsal noktasının koordinatları elde edildi.

$$A_0(0.8286031977, -0.04698084268, 0.5578615788)$$

Yine  $B_0$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanıldı ve PB merkez açısı hesaplandı ( $PB = 1.21535399$ ). Denklemdaki  $\theta_B$  açısı, yukarıdakine benzer olarak B noktası için hesaplandı ( $\theta_B = -0.1750137913$ ). Küresel Euler–Savary denkleminden  $PB_0$  hesaplanarak ( $PB_0 = 0.07599353784$ ),  $B_0$  sabit mafsal noktasının koordinatı bulundu.

$$B_0(0.03155745897, -0.06905096730, 0.9971138805)$$

$AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $AB$ ,  $A_0B_0$  ve  $AC$  açıları (büyük daire yayları) ile  $AB$  ve  $AC$  yayları arasındaki  $k$  küresel açısı (Şekil 4.1) trigonometrik bağıntılar ve küresel geometri bağıntıları yardımıyla hesaplandı.

$$A_0B_0 = a_1 = 54.15148662^\circ$$

$$AA_0 = a_2 = 23.53447773^\circ$$

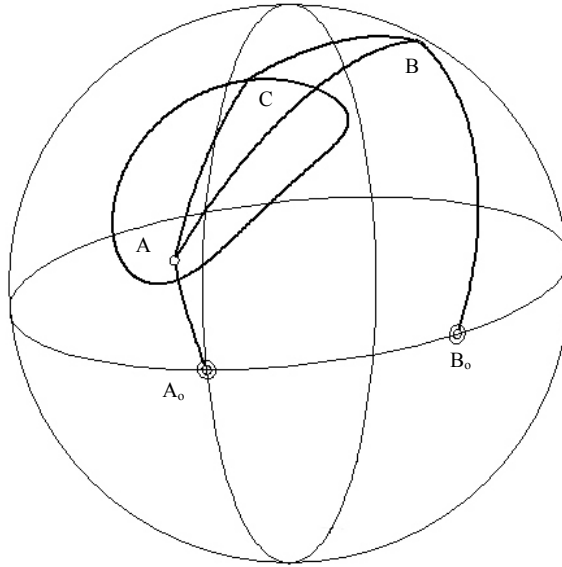
$$AB = a_3 = 86.67658970^\circ$$

$$BB_0 = a_4 = 73.98876362^\circ$$

$$AC = 42.93458941^\circ$$

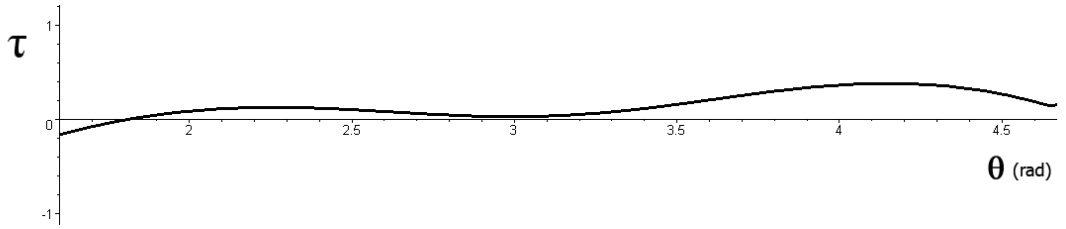
$$k = 18.55280983^\circ$$

Böylece küresel mekanizma boyutsal olarak tamamen ortaya çıkmış oldu, Grashof teoremine göre mekanizma tipinin bir kol sarkaç olduğu belirlendi.



**Şekil 4.6** Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel kol sarkaç mekanizması ve biyel eğrisi

Bir kısmı daire yayı şeklinde olan biyel eğrisi ise **Şekil 4.6**'da görülmektedir. **Şekil 4.7**'de görüldüğü gibi  $\theta_2 = 0 \dots 4.7$  aralığında eğrinin burulmasının değişimi birden küçük ve  $0 \dots 0.16$  aralığında olduğu yani sifıra oldukça yakın olduğu görülmektedir. Küre yüzeyinde burulmasının yanı sıra zamana göre değişiminin de sıfır olduğu eğriler daire yayları ve büyük daireler olduğundan, burulmasının değişiminin de sifıra oldukça yakın çıkması biyel eğrisinin bir daire yayı şeklinde olduğunu göstermektedir.



**Şekil 4.7** Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin burulmasının değişimi

### 4.3. Katlı Burmester Noktası Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı

Katlı Burmester noktaları için (3.105) ve (3.119) denklemlerindeki polinomların katsayılarına bağlı olarak bulunan, (3.127) denklemini sıfır yapan  $a, b, f, d$  ve  $\omega_{x1}$  değerleri (3.119) denkleminde yerine konarak dört adet gerçel kök elde edildi, yani dört adet katlı Burmester noktasına ait gerçel  $t$  kökleri bulundu. Bu köklerden en az ikisi katlıdır. Bunlardan katlı olan iki kök dışındaki iki köke karşılık gelen noktalar hareketli mafsal noktaları, katlı köke karşılık gelen nokta da istenen yörüngeyi çizecek biyel noktası olarak alındı.  $t$  kökleri (3.118) denklemlerinde yerine konularak ikisi katlı olmak üzere dört adet Burmester noktasının koordinatları elde edildi.

Örnek olarak, (3.127) denklemini sıfır yapacak şekilde belirlenen beş ani invariant,  $\omega_{x1}=0.495$ ,  $a=0.1$ ,  $b=0.25$ ,  $d=0.0621$  ve  $f=-0.133$  denklem (3.119)'da yerine konularak Burmester noktalarına ait dört adet gerçel  $t$  kökleri bulundu

(  $t_1 = -1.06955077$ ,  $t_2 = -1.0694866$ ,  $t_3 = -0.17619125$ ,  $t_4 = 0.882241527$  ). Üçüncü ve dördüncü köklere ait noktalar, sırasıyla A ve B hareketli mafsal noktaları, katlı olan birinci ve ikinci köke ait nokta da C biyel noktası olarak alındı. Bu kökler (3.118) denklemlerinde yerine konularak Burmester noktaları bulundu.

$$A(t_3)(-0.1038171477, 0.5892298636, 0.8012678499)$$

$$B(t_4)(-0.5890579912, -0.6676833644, 0.4552028198)$$

$$C(t_1)(-0.7168421355, 0.6702273106, 0.1921788360)$$

$A_0$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanıldı ve PA merkez açısı hesaplandı ( $PA = 0.6413850389$ ). Denklemdaki  $\theta_A$  açısı (Burmester noktaları daireleme noktalar eğrisi üzerinde olduğu için) daireleme noktalar eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denklemden A noktası için hesaplandı ( $\theta_A = 1.745197614$ ). PA merkez açısı ve  $\theta_A$ , küresel Euler–Savary denkleminde yerine konularak  $PA_0$  bulundu ( $PA_0 = 0.9520013737$ ). Bundan sonra  $A_0$  sabit mafsal noktasının koordinatı bulundu.

$$A_0(-0.1413443902, 0.8022213825, 0.5800539772)$$

Benzer şekilde  $B_0$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanılarak, PB merkez açı hesaplandı ( $PB = 1.098196338$ ). Burmester noktaları daireleme noktalar eğrisi üzerinde olduğu için bu eğrinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denklemden B noktası için bu küresel açı değeri  $\theta_B$  hesaplandı ( $\theta_B = -0.1313680627$ ). Küresel Euler–Savary denkleminde, PB merkez açısı ve  $\theta_B$  yerine konularak  $PB_0$ , bulundu ( $PB_0 = 0.06267768204$ ) ve  $B_0$  sabit mafsal noktasının koordinatı elde edildi.

$$B_0(0.04143882247, 0.04696992964, 0.9980363970)$$

$AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $AB$ ,  $A_0B_0$  ve  $AC$  açıları (büyük daire yayları) ile  $AB$  ve  $AC$  yayları arasındaki  $k$  küresel açısı (**Şekil 4.1**) trigonometrik bağıntılar ve küresel geometri bağıntıları yardımıyla hesaplandı.

$$A_0B_0 = a_1 = 52.35710711^\circ$$

$$AA_0 = a_2 = 17.79700511^\circ$$

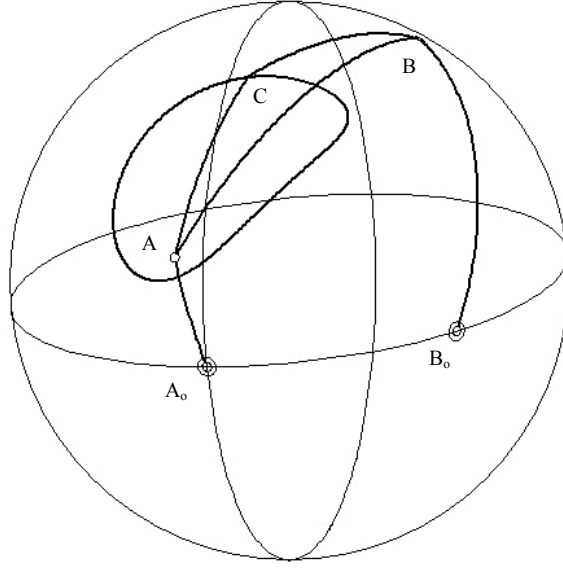
$$AB = a_3 = 88.13900797^\circ$$

$$BB_0 = a_4 = 66.51318194^\circ$$

$$AC = 51.44063489^\circ$$

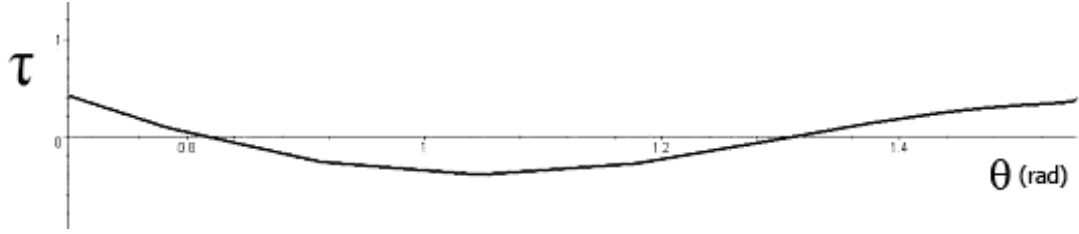
$$k = 86.91947876^\circ$$

Boyutsal olarak tamamen ortaya çıkan küresel mekanizmanın Grashof teoremine göre de tipi belirlendi (kol sarkaç). Biyel eğrisinin bir kısmı daire yayı şeklinde olmuştur. Bu husus  $\theta = 0 \dots 1.57$  aralığında eğrinin burulmasının değişimi çizdirilerek görüldü. Elde edilen küresel dört çubuk mekanizması bir kol sarkaç olduğu C noktasının çizdiği biyel eğrisiyle birlikte **Şekil 4.8**'de görülmektedir.



**Şekil 4.8** Katlı Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi

Biyel eğrisinin yörüngesinin bir kısmının daire yayı şeklinde olduğu görülmektedir. **Şekil 4.9**'da görüldüğü gibi  $\theta_2 = 0.6 \dots 1.57$  aralığında burulmasının değişimi birden küçük ve sıfıra oldukça yakın olduğu ( $0 \dots 0.2$ ) görülmektedir. Eğriye ait burulmanın bu değerlerde çıkması yani burulmasının değişiminin sıfıra oldukça yakın çıkması biyel eğrisinin bir daire yayı şeklinde olduğunu göstermektedir.



**Şekil 4.9** Katlı Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin burulmasının eğriliğinin değişimi

#### 4.4. Ball–Burmester Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı

Ball–Burmester noktaları, yörüngesinin bir kısmı büyük daire yayı şeklinde olan bir biyel noktasına sahip küresel bir dört çubuk mekanizması elde etmek için kullanıldı. Ball noktalarını veren (3.105) denkleminde dört adet gerçel kök elde edilecek şekilde üç ani invaryant  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  belirlendi. Bu noktalarla ve ilgili diğer iki ani invaryanttan  $d$  için belirlenen değer yerine kondu. (3.127) denkleminde elde edilen  $f$  değerlerinden uygun olan biri seçildi. Bu şekilde belirlenen beş ani invaryant Burmester noktalarını veren (3.119) denkleminde yerine konularak ve dört adet gerçel kök elde edildi. Bulunan  $t$  kökleri (3.118) denklemlerinde yerine konularak dört adet Ball–Burmester noktasının koordinatları elde edildi. Bu noktalardan en az biri Ball noktasıdır. Bunlardan uygun ikisine karşılık gelen noktalar hareketli mafsal noktaları olarak, diğer iki kökten Ball noktasına karşılık gelen nokta da istenen yörüngeyi çizecek biyel noktası olarak alındı.

Örnek olarak, (3.105) ve (3.127) denklemlerinden belirlenen beş ani invaryant,  $\omega_{x1}=0.44$ ,  $a=0.446$ ,  $b=0.36$ ,  $d=1.47$  ve  $f=1.4332$  denklem (3.119)'da yerine konularak Burmester noktalarına ait dört tane gerçel  $t$  kökleri bulundu ( $t_1=-3.317685800$ ,  $t_2=-1.321156946$ ,  $t_3=-0.1556319914$ ,  $t_4=0.2600712126$ ). Dört gerçel kökten dördüncü ve birinci köklere ait noktalar, sırasıyla A ve B hareketli mafsal noktaları, Ball noktasına karşılık gelen ikinci köke ait nokta da C biyel noktası olarak alındı. Seçilen  $t$  kökleri (3.118) denklemlerinde yerine konularak Ball–Burmester noktalarının koordinatları elde edildi.

$$A(t_4)(0.6222473403, -0.1875546323, 0.7600207283)$$

$$B(t_1)(-0.1176580546, -0.4524070672, 0.8840160789)$$

$$C(t_2)(0.7663057254, -0.5800262624, 0.2763061172)$$

$A_0$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanıldı ve PA merkez açısı hesaplandı ( $PA = 0.70745132$ ). Daireleme noktalar eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denkleminde A noktası için bu küresel açı değeri  $\theta_A$  hesaplandı ( $\theta_A = -0.2927544$ ). küresel Euler–Savary denkleminde ,PA merkez açısı ve  $\theta_A$  yerine konularak  $PA_0$ , bulundu ( $PA_0 = 0.1101146199$ ) ve  $A_0$  sabit mafsal noktasının koordinatları elde edildi.

$$A_0(-0.1052166014, 0.03171385350, 0.9939435086)$$

P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanılarak PB merkez açısı hesaplandı ( $PB = 0.4864113632$ ). B noktası için bu küresel açı değeri  $\theta_B$ , daireleme noktalar eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denkleminde hesaplandı ( $\theta_B = -0.19879595$ ). küresel Euler–Savary denkleminde PB merkez açısı ve  $\theta_B$  yerine konularak  $PB_0$  bulundu ( $PB_0 = 0.07449304112$ ) ve  $B_0$  sabit mafsal noktasının koordinatları ( $B_0 = (-0.01873244373, 0.07202813235, 0.9972266762)$ ) bulundu.

$A_0$  ve  $B_0$  bulunduğu ve hareketli mafsal noktalarının koordinatları bilindiği için  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $AB$ ,  $A_0B_0$  ve  $AC$  açıları (büyük daire yayları) ile  $AB$  ve  $AC$  yayları arasındaki  $k$  küresel açısı (**Şekil 4.1**) trigonometrik bağıntılar ve küresel geometri bağıntıları yardımıyla hesaplandı.

$$A_0B_0 = a_1 = 7.746702888^\circ$$

$$AA_0 = a_2 = 46.84307773^\circ$$

$$AB = a_3 = 46.88152539^\circ$$

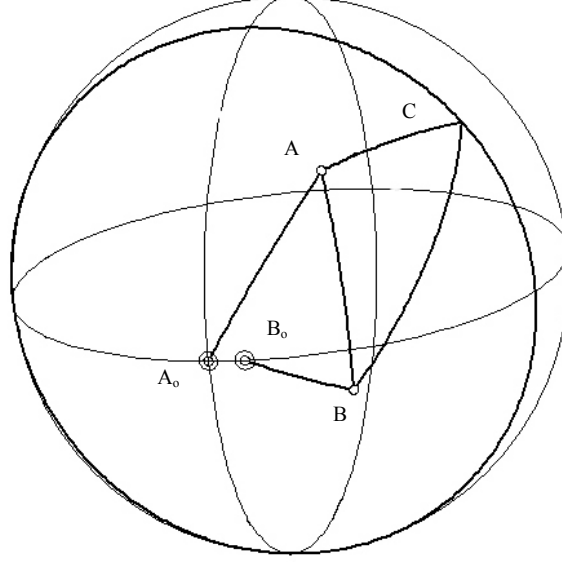
$$BB_0 = a_4 = 23.60118130^\circ$$

$$AC = 37.28645773^\circ$$

$$k = 106.7318948^\circ$$

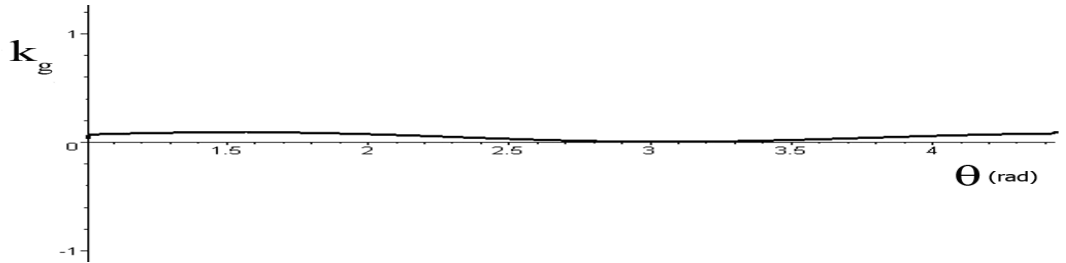
Küresel mekanizma boyutsal olarak tamamen ortaya çıktı ve Grashof teoremine göre de tipi belirlendi (çift kol). Biyel eğrisinin bir kısmı daire yayı şeklinde olduğu,  $\theta = 0 \dots 0.023$  aralığında eğrinin jeodezik eğriliğinin değişimi çizdirilerek görüldü. Elde edilen küresel dört çubuk mekanizması bir çift kol olup C noktasının çizdiği

biyel eğrisi ve eğrinin jeodezik eğriliğinin değişimi Şekil 4.10 ve Şekil 4.11 de görülmektedir.



Şekil 4.10 Ball–Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi

Biyel eğrisinin yörüngesinin bir büyük daire yayı şeklinde olduğu, Şekil 4.11’de görüldüğü gibi  $\theta_2 = 1 \dots 4.47$  aralığında jeodezik eğriliğinin değişimi birden küçük ve  $0 \dots 0.023$  aralığında olduğu yani sıfıra oldukça yakın olduğu görülmektedir. Sadece Ball noktaları ile elde edilen mekanizmalara nazaran biyel eğrisinin daha iyi bir yörünge çizdiği jeodezik eğriliğinin değişiminden görülmektedir. Eğrinin jeodezik eğriliğinin bu şekilde çıkması biyel eğrisinin bir büyük daire yayı şeklinde olduğu anlamına gelmektedir.



Şekil 4.11 Ball–Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin jeodezik eğriliğinin değişimi

#### 4.5. 6.Mertebe Burmester Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı

6. mertebe Burmester noktaları, yörüngesinin bir kısmı daire yayı şeklinde olan bir biyel noktasına sahip küresel bir dört çubuk mekanizması elde etmek için kullanıldı. Bunun için, bu noktalarla ilgili yedi ani invaryant  $a, b, d, e, f, g$  ve  $\omega_{x1}$ , 6. mertebe Burmester noktalarını veren (3.135) denkleminde beş adet gerçel kök elde edilecek şekilde belirlendi. Bu sayısal değerler yerine konarak beş adet gerçel kök, yani 6. mertebe Burmester noktasına ait gerçel  $t$  kökleri bulundu. Bunlardan uygun ikisine karşılık gelen noktalar hareketli mafsal noktaları, diğer üç kökten uygun bir tanesine karşılık gelen nokta da istenen yörüngeyi çizecek biyel noktası olarak alındı. Bulunan  $t$  köklerinden uygun olan dört tanesi (3.134) denklemlerinde yerine konularak dört adet 6. mertebe Burmester noktasının koordinatları elde edildi. Bu koordinatlar kullanılarak, küresel Euler–Savary denklemleri, küresel geometri ve trigonometrik bağıntılar vasıtasıyla küresel mekanizmayla ilgili tüm boyutsal parametreler hesaplandı. Bulunan mekanizma ve çizdiği yörünge animasyonu yapılarak görsel olarak değerlendirildi. Mafsal noktası ve biyel noktası olarak seçilen noktalar değiştirilerek, boyutlar ve yörünge açısından maksada en uygun mekanizma elde edilinceye kadar birkaç deneme yapıldı. Ani invaryantların sayısal değerleri değiştirilerek yeni birkaç deneme daha yapıldı ve en uygun mekanizma bulunmaya çalışıldı. Grashof teoremi ya da diğer kriterlere göre mekanizma tipi belirlendi, animasyonu yapıldı ve biyel eğrisi çizdirildi. Biyel eğrisinin en azından bir kısmı daire yayı şeklinde olacaktır. Bu husus eğrinin burulmasının değişimi çizdirilerek görülebilir.

Örneğin, belirlenen yedi ani invaryant  $\omega_{x1}=0.3447$ ,  $a=0.16$ ,  $b=0.12$ ,  $d=1.47$ ,  $e=5$ ,  $f=86.55$  ve  $g=6$ , denklem (3.135)'de yerine konarak 6. mertebe Burmester noktalarına ait beş adet gerçel  $t$  kökleri bulundu ( $t_1=-21.7725074$ ,  $t_2=-0.7872939$ ,  $t_4=0.2613352$ ,  $t_5= 5.0263003$ ). Beş gerçel kökten uygun olan beşinci ve dördüncü köklere ait noktalar, sırasıyla A ve B hareketli mafsal noktaları, ikinci köke ait nokta da C biyel noktası olarak alındı. Seçilen  $t$  kökleri (3.134) denklemlerinde yerine konularak 6. mertebe Burmester noktalarının koordinatları elde edildi.

$$A(t_4)(-0.7137940809, -0.1420118271, 0.6858065697)$$

$$B(t_1)(-0.2129654204, -0.8149128496, 0.5390387531)$$

$$C(t_2)(0.6185598494, -0.7856784791, 0.009645739992)$$

P ani dönme merkezinin koordinatları bilindiğine için  $P(0, 0, 1)$ , PA merkez açısı hesaplandı ( $PA = 0.8150849514$ ). 6. mertebe Burmester noktaları daireleme noktalar eğrisi üzerinde olduğu için ,bu eğrinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denkleminde A noktası için küresel açı değeri  $\theta_A$  hesaplanarak,  $\theta_A = -1.7251769$  olarak bulundu. Küresel Euler–Savary denkleminde PA merkez açısı ve  $\theta_A$  yerine konularak  $PA_o$  bulundu ( $PA_o = 0.2523475806$ ) ve  $A_o$  sabit mafsal noktasının koordinatları elde edildi.

$$A_o(-0.2448784579, -0.04871942504, 0.9683289516)$$

Yukarıda  $A_o$  sabit mafsal noktasının bulunduğu şekilde  $B_o$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için ise, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanılarak, PB merkez açısı hesaplandı ( $PB = 1.001500877$ ).  $PAB_o$  büyük daire yayı ve P polündeki ortak pol eğrisi teğeti arasındaki küresel açı olan  $\theta_B$  açısı. (3.100) denkleminde A noktası için elde edildi ( $\theta_B = -0.2113493499$ ). PB merkez açısı ve  $\theta_B$  küresel Euler–Savary denkleminde (3.78) yerine konularak,  $PB_o$ , bulundu ( $PB_o = 0.06900289938$ ) ve  $B_o$  sabit mafsal noktasının koordinatları bulundu.

$$B_o(-0.01743310525, -0.06670783197, 0.9976202444)$$

$A_o$  ve  $B_o$  sabit mafsal noktaları bulunduğu için  $AA_o$ ,  $BB_o$ ,  $AB$ ,  $A_oB_o$  ve  $AC$  açıları (büyük daire yayları) ile  $AB$  ve  $AC$  yayları arasındaki k küresel açısı (Şekil 4.1) trigonometrik bağıntılar ve küresel geometri bağıntıları yardımıyla hesaplandı.

$$A_oB_o = a_1 = 13.20887389^\circ$$

$$AA_o = a_2 = 32.24247630^\circ$$

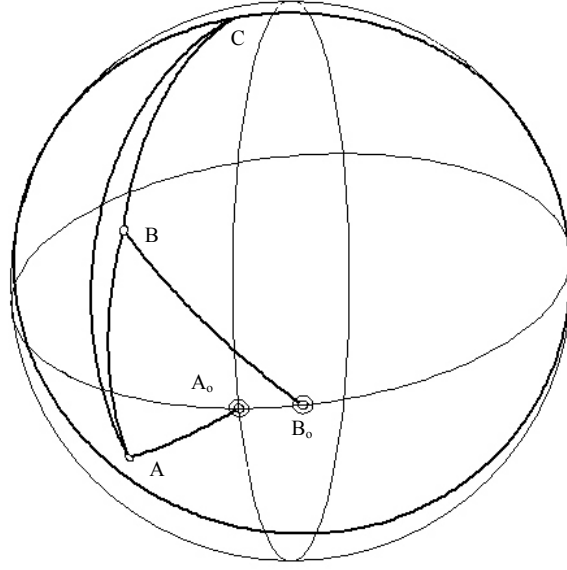
$$AB = a_3 = 50.40051697^\circ$$

$$BB_o = a_4 = 53.42819852^\circ$$

$$AC = 108.8646478^\circ$$

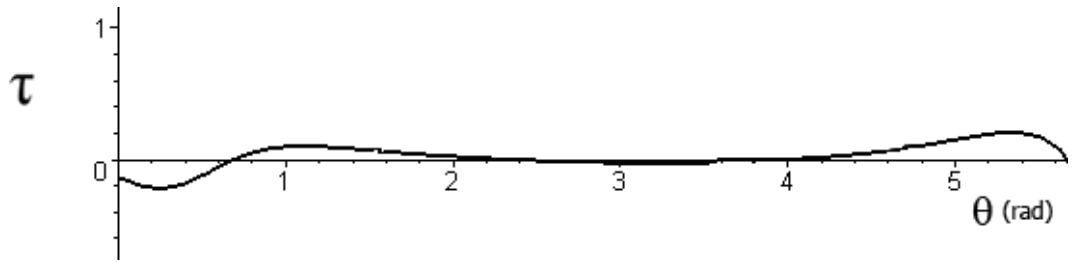
$$k = 9.163480930^\circ$$

Böylece küresel mekanizma boyutsal olarak tamamen ortaya çıkmış oldu. C noktasının çizdiği biyel eğrisiyle birlikte **Şekil 4.12** de görülmektedir. Grashof teoremine göre tipide çift kol olarak bulundu.



**Şekil 4.12** 6.mertebe Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi

Biyel eğrisinin yörüngesinin büyük bir kısmının bir büyük daire yayı şeklinde olduğu görülmektedir. **Şekil 4.13**'de görüldüğü gibi bilhassa  $\theta_2 = 0.7...4.2$  aralığında burulmasının değişimi birden küçük ve  $0 - 0.11$  aralığında olduğu yani hemen hemen sıfır olduğu görülmektedir. Küre yüzeyinde burulmasının yanı sıra zamana göre değişiminin de sıfır olmasından dolayı **Şekil 4.12**'deki biyel eğrisinin bir büyük daire yayı şeklinde olduğunu göstermektedir.



**Şekil 4.13** 6.mertebe Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin burulmasının değişimi

#### 4.6. 6. Mertebe Ball–Burmester Noktaları Yardımıyla Küresel Mekanizma Tasarımı

6. mertebe Ball–Burmester noktaları, yörüngesinin bir kısmı daire yayı şeklinde olan bir biyel noktasına sahip küresel bir dört çubuk mekanizması elde etmek için kullanıldı. Ball noktalarını veren (3.105) denkleminde dört adet gerçel kök elde edilecek şekilde üç ani invaryant  $a$ ,  $b$  ve  $\omega_{x1}$  belirlendi. Bu noktalar ve ilgili diğer dört ani invaryant  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ve  $g$ , 6.mertebe Burmester noktalarını veren (3.135) denkleminde beş adet gerçel kök elde edilecek şekilde belirlendi. Bulunan  $t$  kökleri (3.134) denklemlerinde yerine konularak beş adet 6.mertebe Burmester noktasının koordinatları elde edildi. Bu noktalardan Ball noktası olan nokta istenen yörüngeyi çizecek biyel noktası olarak, diğer dört kökten uygun ikisine karşılık gelen noktalar hareketli mafsal noktaları olarak alındı. Bu koordinatlar kullanılarak, küresel Euler–Savary denklemi, küresel geometri ve trigonometrik bağıntılar vasıtasıyla küresel mekanizmayla ilgili tüm boyutsal parametreler hesaplandı. Bulunan mekanizma ve çizdiği yörünge animasyonu yapılarak görsel olarak değerlendirildi. Mafsal noktası ve biyel noktası olarak seçilen noktalar değiştirilerek, boyutlar ve yörünge açısından maksada en uygun mekanizma elde edilinceye kadar birkaç deneme yapıldı, ani invaryantların sayısal değerleri değiştirilerek yeni birkaç deneme daha yapılarak ve en uygun mekanizma bulunmaya çalışıldı. Grashof teoremi ya da diğer kriterlere göre tipi belirlendi, animasyonu yapıldı ve biyel eğrisi çizdirildi. Biyel eğrisinin en azından bir kısmı daire yayı şeklinde olacaktır. Bu husus eğrinin burulmasının değişimi çizdirilerek görüldü.

Örneğin, (3.105) denkleminde Ball noktalarını veren  $\omega_{x1}=0.38$ ,  $a=0.3$  ve  $b=0.24$  ani invaryant değerleri ve  $d=10$ ,  $e=-34.76$ ,  $f=30$  ve  $g=6$  ani invaryant değerleri, denklem (3.135)'de yerine kondu ve 6.mertebe Ball–Burmester noktalarına ait beş adet gerçel  $t$  kökü bulundu ( $t_2=-3.666795208$ ,  $t_3=0.00611347$ ,  $t_4=0.1276409463$ ,  $t_5=2.447650578$ ). Beş gerçel kökten uygun olan dördüncü ve beşinci köklere ait noktalar, sırasıyla A ve B hareketli mafsal noktaları, diğer üç kökten Ball noktasına karşılık gelen ikinci köke ait nokta ise istenen yörüngeyi çizecek biyel noktası olarak

alındı. Bu kökler (3.134) denklemlerinde yerine konuldu ve 6.mertebe Ball–Burmester noktaları bulundu.

$$A(t_4)(-0.05243334896, -0.4107878426, 0.9102220017)$$

$$B(t_5)(-0.6376404203, -0.2605112127, 0.7249473102)$$

$$C(t_2)(0.7201594691, -0.1964002428, 0.6654301492)$$

P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanılarak, PA merkez açısı hesaplandı ( $PA = 0.4269765006$ ). Denklemdaki  $\theta_A$  açısı, ( $PAA_0$  büyük daire yayı ve P polündeki ortak pol eğrisi teğeti arasındaki küresel açı) daireleme noktalar eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denklemden A noktası için hesaplandı ( $\theta_A = 1.666969244$ ). Küresel Euler–Savary denkleminde PA merkez açısı ve  $\theta_A$  yerine konularak  $PA_0$  bulundu ( $PA_0 = -1.151413326$ ) ve  $A_0$  sabit mafsal noktasının koordinatları bulundu.

$$A_0(0.1156414060, 0.9059898830, 0.4071970003)$$

$B_0$  sabit mafsal noktalarının yerini bulmak için öncelikle, P ani dönme merkezinin koordinatları  $P(0, 0, 1)$  kullanıldı ve PB merkez açısı hesaplandı ( $PB = 0.75983843$ ). Denklemdaki  $\theta_B$  açısı,  $PAB_0$  büyük daire yayı ve P polündeki ortak pol eğrisi teğeti arasındaki küresel açıdır. Daireleme noktalar eğrisinin küresel koordinatlardaki ifadesi olan (3.100) denklemden B noktası için bu küresel açı  $\theta_B$  hesaplandı ( $\theta_B = 1.74855589$ ). Küresel Euler–Savary denkleminde PB merkez açısı ve  $\theta_B$  yerine konularak  $PB_0$  bulundu ( $PB_0 = -0.5526899681$ ) ve  $B_0$  sabit mafsal noktasının koordinatları elde edildi.

$$B_0(0.4859835552, 0.198551035, 0.8511154274)$$

$AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $AB$ ,  $A_0B_0$  ve  $AC$  açıları (büyük daire yayları) ile  $AB$  ve  $AC$  yayları arasındaki  $k$  küresel açısı (**Şekil 4.1**) trigonometrik bağıntılar ve küresel geometri bağıntıları yardımıyla hesaplandı.

$$A_0B_0 = a_1 = 54.36238150^\circ$$

$$AA_0 = a_2 = 90.43507550^\circ$$

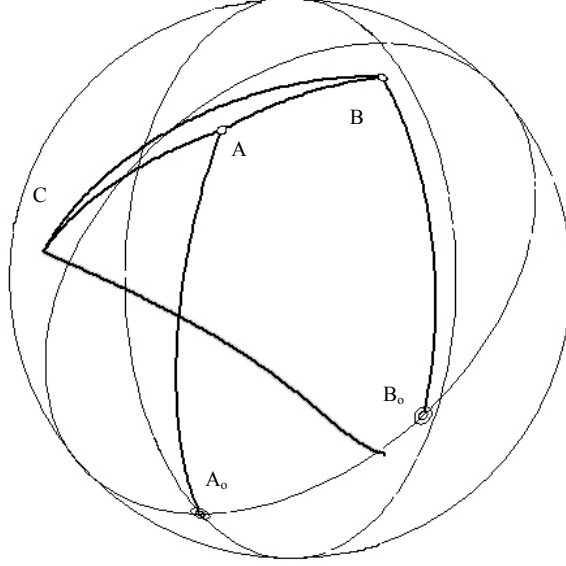
$$AB = a_3 = 36.84014573^\circ$$

$$BB_0 = a_4 = 75.20233766^\circ$$

$$AC = 49.56329538^\circ$$

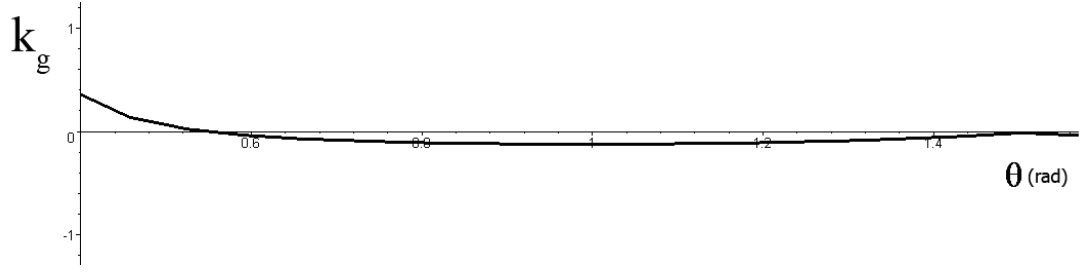
$$k = 167.0354981^\circ$$

Böylece küresel mekanizma boyutsal olarak tamamen ortaya çıkmış oldu, Grashof teoremine göre de mekanizma tipinin bir çift sarkaç olduğu belirlendi. Bu küresel dört çubuk mekanizması C noktasının çizdiği biyel eğrisiyle birlikte **Şekil 4.14**'te görülmektedir.



**Şekil 4.14** 6.mertebe Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma ve biyel eğrisi

Biyel eğrisinin yörüngesinin belli bir kısmının bir büyük daire yayı şeklinde olduğu, **Şekil 4.15**'de görüldüğü gibi bilhassa  $\theta_2 = 0.5 \dots 1.5$  aralığında jeodezik eğriliğinin değişiminin birden küçük ve  $0 - 0.1$  aralığında olduğu yani sifıra yakın olduğu görülmektedir. Küre yüzeyinde jeodezik eğriliği sıfır olmasından dolayı bu biyel eğrisinin bir büyük daire yayı şeklinde olduğu **Şekil 4.15** de görülmektedir. Buradan istenilen yörüngeyi çizebilecek küresel mekanizma tasarımı için 6. mertebe Ball–Burmester noktalarının kullanılmasının daha iyi sonuçlar vereceğini de söyleyebiliriz.



**Şekil 4.15** 6.mertebe Burmester noktaları vasıtasıyla bulunan küresel mekanizma biyel eğrisinin jeodezik eğriliğinin değişimi

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ani invaryantlar yardımıyla küresel mekanizmaların tasarımı ele alındı.

1. Katı cismin uzayda sabit bir nokta etrafındaki üç boyutlu hareketi olarak ifade edilen küresel harekette önce kinematik ani invaryantlar açıklanarak, küresel eğrilerde eğrilik teorisi vasıtasıyla jeodezik eğrilik ve burulmanın parametrik ifadeleri elde edildi. Ani invaryantlara dayalı yörünge eğrilik analizi ile özel kinematik özelliklere sahip noktaların geometrik yeri olan eğriler ve bunların özel halleri incelenerek analitik sonuçlar elde edildi. Bu eğrilerin kesim noktaları olan Ball, Burmester, 6.mertebe Burmester noktaları ve özel halleri ani invaryantlara bağlı olarak formüle edildi. Bu eğriler ve noktalar kullanılarak, üç boyutta büyük daire veya daire yayı şeklinde yörüngeleri çizecek küresel mekanizmaların boyutsal olarak nasıl elde edilebileceği gösterildi.

2. Küresel harekette Ball noktaları parametrik olarak formüle edildi. Bu noktaların özel halleri incelenerek katlı Ball, dört katlı Ball noktası, büküm polünde Ball noktası ve büküm polünde katlı Ball noktası için gerekli varlık şartları analitik olarak ifade edildi.

3. Burulmanın sıfır olduğu noktaların geometrik yeri olan daireleme noktalar eğrisi ve burulmanın yanı sıra zamana göre değişiminin de sıfır olduğu noktaların geometrik yeri olan çift daireleme noktalar eğrisinin denklemi elde edildi.

4. Burmester noktaları parametrik olarak formüle edildi. Burmester noktalarının özel halleri incelenerek katlı Burmester, 4 katlı Burmester ve 6 katlı Burmester noktalarının varlık şartları ani invaryantlara bağlı olarak bulundu.

5. Ball–Burmester noktalarının varlık ve iki katlılık, dört katlılık şartları bulundu. Bunların büküm polünde olma şartları elde edildi.

6. 6. mertebe Burmester noktaları parametrik olarak ifade edildi. Bunların özel halleri ve katlılık durumları ele alındı. 6. mertebe 2 ve 4 katlı Burmester noktası, 6. mertebe Ball-Burmester noktası, büküm polünde 6. mertebe Ball-Burmester noktası, 6. mertebe 2 katlı Ball-Burmester noktası, 6. mertebe 2 katlı Ball–2 katlı Burmester

noktası, 6. mertebe 4 katlı Ball–2 katlı Burmester noktası gibi özel noktaların varlık şartları bulundu.

7. Düzlem kinematik ile ilgili olarak, 6. mertebe eğrisinin düzlemsel karşılığı olan 5. mertebe eğrisi ile ilgili çalışma yapılmıştır (Ting ve ark. 1991). Fakat küresel kinematik için böyle bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmada, burulmanın ikinci türevinin de sıfır olduğu noktaların geometrik yeri olan 6. mertebe eğrisi formüle edildi.

8. Literatürde büküm eğrisi, daireleme noktalar eğrisi ve çift daireleme noktalar eğrisi gibi eğrilerin kesim noktaları olan Ball, Burmester, 6. mertebe Burmester, Ball-Burmester, 6. mertebe Ball-Burmester noktaları ve bunların katlı halleri gibi özel noktaların ani invaryantlara dayalı parametrik formülasyonu sadece düzlem kinematik için mevcuttur (Ting ve ark. 1991). Küresel kinematik için bu formülasyona literatürde rastlanmamıştır. Bu parametrik formülasyon yörünge sentezinde büyük önemi olan bu özel noktaların üç boyuttaki koordinatlarının analitik olarak kolaylıkla bulunmasını sağlar.

Küresel bir mekanizmada ani invaryantların doğrudan hesaplanması, elde edilen mekanizmaların çeşitli kriterlere göre optimizasyonu, benzer bir çalışmanın üç boyutlu mekanizmalara genişletilmesi gibi çalışmalarda kullanılacak sonuçlar elde edildi.

## 6. KAYNAKLAR

- 1- Adams, R.A., 2003. Calculus (5th ed.), Pearson Education Canada Inc., Toronto, Ontario. Addison Wesley Longman.
- 2- Bağcı C. 1984. Geometric methods for the synthesis of spherical mechanisms for the generation of functions, paths and rigid-body positions using conformal projections . Mechanism and Machine Theory, Volume 19, Issue 1, Pages 113–127
- 3- Beer, F.P., Johnston, E.R. 1979. Dinamik. Üç Er Matbaacılık, İstanbul.
- 4- Bottema, O. 1966. On ball's curve. Journal of Mechanisms, Volume 1, Issue 1, Spring, Pages 3–8.
- 5- Bottema, O. 1981. Secondary centers of curvature for the point–paths of a planar motion. Mechanism and Machine Theory, Volume 16, Issue 2, Pages 147–151.
- 6- Bottema, O. 1985. Comments on "Axodes For The Four–Revolute Spherical Mechanism" : by R. S. Sodhi and T. E. Shoup, Mechanisms and Machine Theory, Vol. 17, No. 3, 1982, pp. 173–178 .Mechanism and Machine Theory, Volume 20, Issue 3, Pages 239–242.
- 7- Chiang, C.H. 1992. Spherical Kinematics In Contrast To Planar Kinematics. Mechanism and Machine Theory, Volume 27, Issue 3, Pages 243–250.
- 8- Chiang, C.H. 2000. Kinematics of Spherical Mechanisms. Krieger Publ.
- 9- Erdman, A.G., Sandor, G.N. 1997. Mechanism Design : Analysis And Synthesis. New Jersey Prentice Hall. 645 P.
- 10- Fu, T–T., Chiang, C. H. 1994. Simulating a given spherical motion by the polode method. Mechanism and Machine Theory, Volume 29, Issue 2, Pages 237–249
- 11- Gupta, K. 1978. A Direct Method For The Evaluation Of Instantaneous Invariants Of A Given Motion. Mechanism and Machine Theory, Volume 13, Issue 6, Pages 567–576.
- 12- Hartenberg, R.S., Denavit J. 1964. Kinematic Synthesis of linkages. McGraw–Hill Book Company, Newyork. Pages 194–214.

- 13- Kamphuis, H. J. 1969. Application of spherical instantaneous kinematics to the spherical slider–crank mechanism. *Journal of Mechanisms*, Volume 4, Issue 1, spring, Pages 43–56.
- 14- Koetsier T. 1986. From kinematically generated curves to instantaneous invariants: Episodes in the history of instantaneous planar kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, Volume 21, Issue 6, Pages 489–498.
- 15- Lee, C., Yang, A.T., Ravani, B. 1993. Coordinate System Independent Form Of Instantaneous Invariants In Spatial Kinematics. *J Mech Design* 115 (4): 946–952.
- 16- Lorenc, S.J., Stanišić, M.M. Hall, A.S. 1995. Application of Instantaneous Invariants to The Path Tracking Control Problem Of Planar 2 Degree–Of–Freedom Systems – A Singularity–Free Mapping Of Trajectory Geometry. *Mech Mach Theory* 30 (6): 883–896.
- 17- Lu, D–M. 1999. A Triangular Nomogram for Spherical Symmetric Coupler Curves And Its Application To Mechanism Design. *J Mech Design* 121. 323–326.
- 18- Lu, D–M., Chang, C–F., Hwang, W–M. 1995. Cross ratio in sphere geometry and its application to mechanism design. *Journal of the Franklin Institute*, Volume 332, Issue 2, March, Pages 219–226.
- 19- Lu, D–M., Hwang, W–M. 2001. Synthesis of spherical four bar mechanism for two or three prescribed coupler curve cusps. *J Mech Design* 123 . 247–253
- 20- McCarthy, J. M. 1987. The differential geometry of curves in an image space of spherical kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, Volume 22, Issue 3, Pages 205–211.
- 21- Meriam, j.l.1980. *engineering mechanics volume II. Dynamics*. Library of congress cataloging in publication data.
- 22- Pennestri E, Belfiore Np. 1995. On The Numerical Computation of Generalized Burmester Points. *Meccanica* 30 (2): 147–153 Apr .
- 23- Rao, C. 1979. Synthesis of 4–bar function–generators using geometric programming. *Mechanism and Machine Theory*, Volume 14, Issue 2, Pages 141–149
- 24- Roth, B., Yang, A. T. 1973. Higher–Order Path Curvature In Spherical Kinematics. *Engng Ind. Trans. ASME*, Pages 612–616.

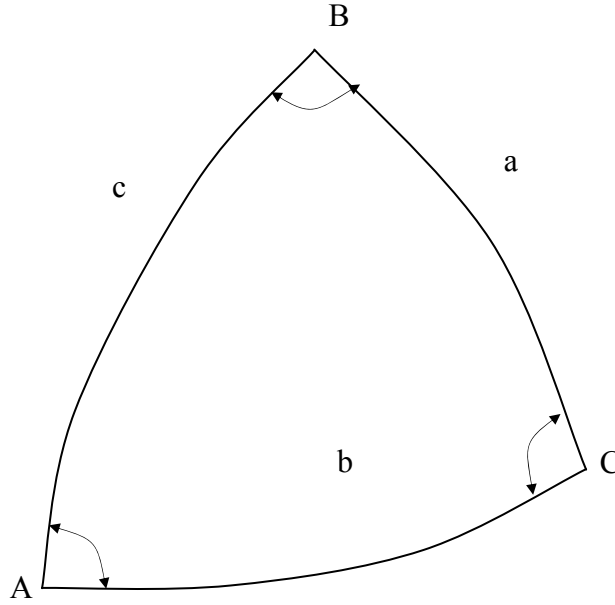
- 25- Roth, B. Yang, A.T. 1977. Application of Instantaneous Invariants to the Analysis and Synthesis of Mechanisms, Trans. ASME, J. of Eng. For Industry, Vol.99, 97–103.
- 26- Satchel, H. Instantaneous spatial kinematics and the invariants of the axodes. Institute of geometry, Vienna University Of Technology
- 27- Sederberg T.W.,Zheng J. 2001. Algebraic methods for computer aided design. Computer aided design. 1–25.
- 28- Sodhi, R., Shoup, T. E. 1982. Axodes for the four–revolute spherical mechanism .Mechanism and Machine Theory, Volume 17, Issue 3, Pages 173–178
- 29- Söylemez, E. 2000. Mekanizma Tekniği. Prestij Ajans Matbaacılık Basım Yayın. 429 Sahife.
- 30- Tavkheldidze, D.S. 1971. A study of the kinematics and dynamics of four–link spherical mechanisms, using Euler's Angles .Journal of Mechanisms, Volume 6, Issue 4, Pages 505–515.
- 31- Ting, K. L., Soni, A. H. 1983. Rigid Body Motion Characteristics and Unified Instantaneous Motion Representation of Points, Lines, and Planes. Mech. Transmiss. Automat. Design, Trans. ASME 105, 560-568.
- 32- Ting, K–L and Wang, S.C. 1991. Fourth and Fifth Order Double Burmester Points and the Highest Attainable Order of Straight Lines, J. of Mechanical Design, Vol.113, 213–219
- 33- Thomas, B. G. & Finney, R. L. 1996. Calculus and Analytic Geometry (9th ed.), Addison-Wesley Publishing Company.
- 34- Tong, S–H, Chen, Z–M., Chiang, C.H. 1994. On The Unity Velocity Ratio Of Drag Links. Mechanism And Machine Theory, Volume 29, Issue 7, Pages 969–979.
- 35- Veldkamp, G. R. 1967. Canonical systems and instantaneous invariants in spatial kinematics. Journal of Mechanisms, Volume 2, Issue 3, Pages 329–388.
- 36- Wang, D.L., Liu, J., Xiao, D.Z. 1997. Kinematic Differential Geometry of Rigid Body In Spatial Motion– I. A New Adjoint Approach And Instantaneous Properties Of A Line Trajectory In Spatial Kinematics. Mechanism and Machine Theory, Volume 32, Issue 4, Pages 419–432.

- 37- Yang A.T, Pennock Gr, Hsia Lm. 1994. Instantaneous Invariants and Curvature Analysis of a Planar 4-Link Mechanism. J Mech Design 116 (4): 1173–1176 .

## 7. EKLER

### EK-1 KÜRESEL ÜÇGENLER İÇİN NAPIER DENKLEMLERİ

**Şekil Ek.1** de A, B, C açılarıyla küresel bir üçgen olsun. Sırasıyla her açının karşısında a, b, c kenarları görülmektedir (**Şekil Ek.1**).



**Şekil Ek.1** Genel küresel üçgen

Sinüs teoremi

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\bar{s}}{\sin a \sin b \sin c} \quad (\text{A1.1})$$

$$\bar{s} = \sin a \sin h_a = \sin b \sin h_b = \sin c \sin h_c \quad (\text{A1.2})$$

Kenarlar için Cosinüs teoremi

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (\text{A1.3})$$

Açılar için Cosinüs teoremi

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad (\text{A1.4})$$

a, C, b, A yi içeren kotanjant teoremi

$$\cos b \cos C = \sin b \cot a - \sin C \cot A \quad (\text{A1.5})$$

b, A, c, B, a ve B, a, C, b, A yi içeren iki teorem

$$\sin b \cos c \cos A = \sin c \cos b - \sin a \cos B \quad (\text{A1.6})$$

$$\sin B \cos C \cos a = -\sin C \cos B + \sin A \cos b \quad (\text{A1.7})$$



$k(t)g(t)=0$  olsun. Bu  $(m+n)$  boyutlu tane katsayılar matrisinin determinanı sonucu Sylvester'in resultantıdır. Açık bir biçimde görülüyor ki  $h(t) = k(t)g(t)$  sağlayacak biçimde ancak ve ancak derecesi  $m-1$  den büyük olmayan  $h(t)$  polinomları, derecesi  $n-1$  den büyük olmayan  $k(t)$  polinomları sıfırdan farklı olmayacak şekilde gerçekleşirse determinant yok sayılabilir. Bu  $f(t)$  ve  $g(t)$  polinomlarının ortak köklerinin varlığına denktir. Böylece Euler yöntemi,  $R(f,g)=0$  eşitliğinin sadece gerekli koşul değil aynı zamanda  $f(t)$  ve  $g(t)$ 'nin ortak köklerinin varlığının da yeterli koşul olduğunu gösterir.

**EK-3 KATLI BALL NOKTASI İÇİN (3.110) DENKLEMİNDEKİ İKİ  
POLİNOMUN ORTAK SYLVESTER MATRİSİNİN DETERMİNANTININ  
AÇILIMI**

$$\begin{aligned}
& -192\omega_{x1}^2b^2a^2+16\omega_{x1}^2b^4+320\omega_{x1}^2b^6-128b^4a^2-64\omega_{x1}^4b^{10}-192\omega_{x1}^4b^8-192\omega_{x1}^4b^6- \\
& 64\omega_{x1}^4b^4+2048\omega_{x1}^2b^4a^2-4224\omega_{x1}^3b^4a^3-320\omega_{x1}b^4a+4032\omega_{x1}^4b^4a^4-1728\omega_{x1}^3b^6a+ \\
& 2496\omega_{x1}^4b^6a^2+1536\omega_{x1}^3b^4a-6912\omega_{x1}^4b^4a^2+64\omega_{x1}^3b^2a+704\omega_{x1}^4b^2a^2-384\omega_{x1}^3a^3b^2 \\
& +2112\omega_{x1}^4a^4b^2+192a^3\omega_{x1}b^2-320a^4\omega_{x1}^2b^2-448\omega_{x1}^3a^5b^2+1344\omega_{x1}^4a^6b^2-64b^6+ \\
& 256\omega_{x1}^3b^8a+512\omega_{x1}b^4a^3+768\omega_{x1}^3b^6a^3-384\omega_{x1}^4b^6a^4-640\omega_{x1}^2b^6a^2-256\omega_{x1}^4b^8a^2- \\
& 1536\omega_{x1}^5b^6a^3+10752\omega_{x1}^5b^4a^3-2304\omega_{x1}^5b^4a^5-896\omega_{x1}^2b^4a^4+768\omega_{x1}^3b^4a^5-256\omega_{x1}^4b^4a^6 \\
& +256\omega_{x1}b^6a+768\omega_{x1}^6b^4a^6+768\omega_{x1}^6b^6a^4-5376\omega_{x1}^6b^4a^4-128b^8\omega_{x1}^2-256\omega_{x1}^5b^8a- \\
& 768\omega_{x1}^5b^6a+256\omega_{x1}^6b^8a^2+768\omega_{x1}^6b^6a^2-768\omega_{x1}^5b^4a+768\omega_{x1}^6a^2b^4-64a^4b^2- \\
& 1536\omega_{x1}^5a^3b^2-2304\omega_{x1}^5a^5b^2-256\omega_{x1}^5ab^2+768\omega_{x1}^6a^4b^2+768\omega_{x1}^6a^6b^2+256\omega_{x1}^6a^2b^2 \\
& +256a^5\omega_{x1}b^2-384a^6\omega_{x1}^2b^2-1024\omega_{x1}^5a^7b^2+256\omega_{x1}^3a^7b^2+256\omega_{x1}^6a^8b^2-64\omega_{x1}^4a^8b^2=0
\end{aligned}$$

(A3.1)

**EK-4 BALL-BURMESTER NOKTALARI İÇİN DENKLEM (3.127) DEKİ İKİ POLİNOMUN ORTAK SYLVESTER MATRİSİNİN DETERMİNANTININ AÇILIMI**

$$\begin{aligned}
& 120 \omega_{x_1}^9 a^3 b^7 d - 20 \omega_{x_1}^7 a^3 b^7 d^3 - 10 \omega_{x_1}^7 a^4 b^6 f^3 - 2 \omega_{x_1}^5 a^3 b^4 f^4 + \omega_{x_1}^4 a^2 b^4 f^4 - 8 \\
& d^3 \omega_{x_1}^4 b^5 a^2 + 2d^2 \omega_{x_1}^4 b^4 a^2 + 2 d^3 \omega_{x_1}^3 b^5 a + 10 \omega_{x_1}^5 a^3 d^3 b^5 + 42 d^2 \omega_{x_1}^6 a^4 b^4 - 16d^2 \\
& \omega_{x_1}^5 b^4 a^3 + 15 d^2 \omega_{x_1}^6 b^4 a^2 - 2 d^2 \omega_{x_1}^5 b^4 a - 5 d^3 \omega_{x_1}^5 a b^5 - 100 \omega_{x_1}^8 a^5 b^7 df + 50 \\
& \omega_{x_1}^7 a^4 b^6 d^2 f - 50 \omega_{x_1}^8 a^3 b^9 df + 3 d \omega_{x_1}^5 a^2 b^5 f^3 + 2a d^2 \omega_{x_1}^4 b^4 f + 84 \omega_{x_1}^6 a^4 b^5 df^2 - \\
& 1980 \omega_{x_1}^9 a^5 b^8 - 200 \omega_{x_1}^9 a^3 b^{10} - 120 \omega_{x_1}^9 a^3 b^8 + 72 \omega_{x_1}^9 a^3 b^6 - 300 \omega_{x_1}^8 a^4 b^9 d - \\
& 132 \omega_{x_1}^7 a^5 b^4 f^2 + 1671 \omega_{x_1}^8 a^6 db^5 - 40 \omega_{x_1}^7 a^7 b^4 f^2 - 616 \omega_{x_1}^8 a^7 b^4 f - 290 \omega_{x_1}^8 a^5 b^4 f + \\
& 1611 \omega_{x_1}^8 a^4 db^7 - 326 \omega_{x_1}^8 a^5 b^6 f + 525 \omega_{x_1}^8 a^4 db^5 - 300 \omega_{x_1}^8 a^6 db^7 - 1152 \omega_{x_1}^9 a^7 b^4 - \\
& 1580 \omega_{x_1}^9 a^9 b^4 - 160 \omega_{x_1}^8 a^3 b^8 f - 8 \omega_{x_1}^9 a^3 b^4 - 3360 \omega_{x_1}^9 a^7 b^6 - 840 \omega_{x_1}^9 a^5 b^6 - 228 \\
& \omega_{x_1}^9 a^5 b^4 + 300 \omega_{x_1}^8 a^5 b^8 f - 2d^2 \omega_{x_1}^5 a^3 b^4 f^2 + 9 a d^2 \omega_{x_1}^7 b^6 - a d^2 \omega_{x_1}^7 b^4 - 15 \\
& a d^2 \omega_{x_1}^7 b^8 - 25 a d^2 \omega_{x_1}^7 b^{10} + 65 \omega_{x_1}^6 b^8 a^2 f^2 + 15 d^3 \omega_{x_1}^6 a^2 b^5 - 44 d^2 \omega_{x_1}^7 a^5 b^4 - 30 \\
& d^2 \omega_{x_1}^7 b^4 a^3 + 25 \omega_{x_1}^7 a^5 b^6 d^2 - 100 \omega_{x_1}^8 a^8 d b^5 + 100 \omega_{x_1}^8 a^9 b^4 f + 300 \omega_{x_1}^8 a^7 b^6 f - a \\
& \omega_{x_1}^5 b^6 d^4 - 14 \omega_{x_1}^5 b^6 a^2 f^3 + 6 \omega_{x_1}^7 a^4 b^4 f^3 + 10 \omega_{x_1}^7 a^6 b^4 f^3 + 140 \omega_{x_1}^8 a^3 b^7 df - 16 \omega_{x_1}^7 \\
& a^3 b^5 df^2 - 26 \omega_{x_1}^8 a^3 b^5 df + 20 \omega_{x_1}^7 a^3 b^7 df^2 - 36 \omega_{x_1}^4 a^2 b^6 + 18 \omega_{x_1}^4 a^4 b^4 + 148 \omega_{x_1}^8 \\
& a^3 b^6 f - 378 \omega_{x_1}^7 a^3 b^6 d^2 - 24 \omega_{x_1}^8 a^3 b^4 f + 100 \omega_{x_1}^7 a^3 b^6 f^2 - 26 \omega_{x_1}^7 a^3 b^4 f^2 - 172 \omega_{x_1}^6 b^8 \\
& a^2 + 192 \omega_{x_1}^5 a^3 b^6 - 146 \omega_{x_1}^6 a^4 b^6 + 62 \omega_{x_1}^6 a^2 b^6 - 31 \omega_{x_1}^5 a b^7 d + 89 \omega_{x_1}^5 a^2 b^6 f - 18 \\
& \omega_{x_1}^3 a^2 b^6 f - 132 \omega_{x_1}^4 a^2 b^7 d + 132 \omega_{x_1}^4 a^3 b^6 f + 466 \omega_{x_1}^5 a^3 b^7 d - 466 \omega_{x_1}^5 a^4 b^6 f + 86 \\
& \omega_{x_1}^5 b^9 a d - 86 \omega_{x_1}^5 b^8 a^2 f + 18 a \omega_{x_1}^3 b^7 d + 100 \omega_{x_1}^8 a^3 b^{10} f - 90 \omega_{x_1}^7 a^3 b^8 f^2 - 130 \\
& \omega_{x_1}^7 a^5 b^6 f^2 - 2 \omega_{x_1}^6 a^3 d b^5 f^3 - 40 \omega_{x_1}^7 a^5 b^5 df^2 + \omega_{x_1}^6 a^4 b^4 f^4 + 253 \omega_{x_1}^7 a^4 d b^5 f + 15 \\
& \omega_{x_1}^7 a^6 d b^5 f + 29 \omega_{x_1}^4 a^2 b^6 f^2 + 3 d^3 \omega_{x_1}^5 a^2 b^5 f - 29 f \omega_{x_1}^4 a b^7 d + 6 d \omega_{x_1}^4 b^5 a^2 - 4 d \\
& \omega_{x_1}^5 a b^5 - 6 \omega_{x_1}^4 a^2 b^4 f^2 + 12 \omega_{x_1}^4 a^3 b^4 f + 18 d \omega_{x_1}^3 b^5 a^3 + 12 \omega_{x_1}^3 a^3 b^4 f^2 - 18 \omega_{x_1}^3 a^4 \\
& b^4 f - 132 \omega_{x_1}^4 a^4 db^5 - 159 \omega_{x_1}^5 a^3 db^5 - 59 \omega_{x_1}^4 a^4 b^4 f^2 - 2 \omega_{x_1}^5 a^4 b^4 f + 132 \omega_{x_1}^4 a^5 b^4 f - \\
& 88 \omega_{x_1}^4 a^2 b^6 d^2 + 8 \omega_{x_1}^6 b^4 a^2 - 24 \omega_{x_1}^5 b^4 a^3 + 241 \omega_{x_1}^6 a^4 b^4 - 204 \omega_{x_1}^5 a^5 b^4 + 908 \omega_{x_1}^6 \\
& a^6 b^4 + 2d \omega_{x_1}^4 a b^5 f - 24d \omega_{x_1}^3 a^2 b^5 f + 147 \omega_{x_1}^4 a^3 db^5 f + 12a \omega_{x_1}^3 b^6 d^2 + 1200 \omega_{x_1}^{10} a^6 b^8 - \\
& ad^2 \omega_{x_1}^5 b^6 f^2 - 2ad^2 \omega_{x_1}^6 b^4 f - ad^2 \omega_{x_1}^5 b^4 f^2 + 10ad^2 \omega_{x_1}^6 b^8 f + 8ad^2 \omega_{x_1}^6 b^6 f + \omega_{x_1}^6 a^4 d^2 b^4 f^2 - \\
& 4 \omega_{x_1}^6 a^4 d^3 b^5 - 10 \omega_{x_1}^7 a^3 d^3 b^5 + \omega_{x_1}^8 a^2 d^2 b^4 + 15 \omega_{x_1}^8 a^2 d^2 b^8 + 25 \omega_{x_1}^8 a^2 d^2 b^{10} - 9 \\
& \omega_{x_1}^8 a^2 d^2 b^6 - 10 \omega_{x_1}^7 a^2 d^2 b^8 f - 8 \omega_{x_1}^7 a^2 d^2 b^6 f + 16 \omega_{x_1}^8 a^6 d^2 b^4 + 17 \omega_{x_1}^8 a^4 d^2 b^4 - 65 \omega_{x_1}^6 \\
& b^9 d a f + 2 \omega_{x_1}^7 a^4 d^2 b^4 f + \omega_{x_1}^6 a^2 d^2 b^6 f^2 + 2 \omega_{x_1}^7 a^2 d^2 b^4 f + \omega_{x_1}^6 a^2 d^2 b^4 f^2 + 14 \omega_{x_1}^8 a^2 b^5 d +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 390\omega_{x_1}^8 a^2 b^9 d - 100\omega_{x_1}^8 a^2 b^{11} d + \omega_{x_1}^6 a^2 b^6 d^4 + 356\omega_{x_1}^6 a^3 b^8 f + 368\omega_{x_1}^7 a^3 b^8 + 584\omega_{x_1}^8 a^4 \\
& b^8 - 200\omega_{x_1}^8 a^2 b^{10} + 180\omega_{x_1}^8 a^2 b^8 - 356\omega_{x_1}^6 a^2 b^9 d - 570\omega_{x_1}^7 a^4 b^8 f + 570\omega_{x_1}^7 a^3 b^9 d \\
& + 220\omega_{x_1}^7 a^2 b^8 f - 90\omega_{x_1}^7 a b^9 d - 892d\omega_{x_1}^6 a^4 b^7 + 256d\omega_{x_1}^6 a^2 b^7 - 966d\omega_{x_1}^7 a^3 b^7 \\
& + 24d\omega_{x_1}^7 a b^7 - 100\omega_{x_1}^7 a^2 b^6 f - 292\omega_{x_1}^6 a^3 b^6 f + 79d\omega_{x_1}^6 b^5 a^2 - 2d\omega_{x_1}^7 a b^5 + 13 \\
& \omega_{x_1}^6 a^2 b^4 f^2 + 12\omega_{x_1}^7 a^2 b^4 f - 8\omega_{x_1}^5 a^3 b^4 f^2 + 843\omega_{x_1}^6 a^4 d b^5 - 342\omega_{x_1}^7 a^3 d b^5 + 90 \\
& \omega_{x_1}^6 a^4 b^4 f^2 + 238\omega_{x_1}^7 a^4 b^4 f - 228\omega_{x_1}^6 a^5 b^4 f + 199\omega_{x_1}^6 a^2 b^6 d^2 - 32a\omega_{x_1}^5 b^6 d^2 + \\
& 380\omega_{x_1}^5 a^5 d b^5 + 92\omega_{x_1}^5 a^5 b^4 f^2 - 380\omega_{x_1}^5 a^6 b^4 f + 211\omega_{x_1}^5 a^3 b^6 d^2 + 379\omega_{x_1}^7 a^4 b^6 f + \\
& 892\omega_{x_1}^6 a^5 b^6 f - 536\omega_{x_1}^6 a^6 d b^5 - 1791\omega_{x_1}^7 a^5 d b^5 - 30\omega_{x_1}^6 a^6 b^4 f^2 + 624\omega_{x_1}^7 a^6 \\
& b^4 f + 536\omega_{x_1}^6 a^7 b^4 f - 276\omega_{x_1}^7 a^3 b^6 + 634\omega_{x_1}^8 a^4 b^6 - 48\omega_{x_1}^8 a^2 b^6 + 4\omega_{x_1}^8 b^4 a^2 - \\
& 76\omega_{x_1}^7 b^4 a^3 + 212\omega_{x_1}^8 a^4 b^4 - 872\omega_{x_1}^7 a^5 b^4 + 1462\omega_{x_1}^8 a^6 b^4 - 1148\omega_{x_1}^7 a^5 b^6 - \\
& 2056\omega_{x_1}^7 a^7 b^4 + 3298\omega_{x_1}^8 a^6 b^6 + 2514\omega_{x_1}^8 a^8 b^4 + 38d\omega_{x_1}^6 a b^7 f - 5d\omega_{x_1}^6 a b^5 f + \\
& 19d\omega_{x_1}^5 a^2 b^5 f - 144\omega_{x_1}^6 a^3 d b^5 f - 303\omega_{x_1}^5 a^4 d b^5 f - 185\omega_{x_1}^6 a^4 b^6 d^2 - 66\omega_{x_1}^6 b^6 a^2 f^2 \\
& - 62\omega_{x_1}^6 a^3 b^4 f - 104\omega_{x_1}^5 b^6 a^3 f^2 + 215\omega_{x_1}^6 a^5 d b^5 f + 89d\omega_{x_1}^5 a^2 b^7 f + 840\omega_{x_1}^7 a^5 d b^7 - \\
& 840\omega_{x_1}^7 a^6 b^6 f + 370\omega_{x_1}^7 a^7 d b^5 - 370\omega_{x_1}^7 a^8 b^4 f + 155\omega_{x_1}^6 a^4 b^6 f^2 - 90\omega_{x_1}^6 a^3 d b^7 f - \\
& 65\omega_{x_1}^6 b^8 a^2 d^2 + 15\omega_{x_1}^5 b^8 a d^2 + 14\omega_{x_1}^5 b^7 d a f^2 - 2\omega_{x_1}^6 a^3 d^3 b^5 f + 4\omega_{x_1}^6 a^5 d^2 b^4 f - \\
& 144\omega_{x_1}^8 a^2 b^7 d + 22\omega_{x_1}^6 a^2 b^7 d^3 + 24\omega_{x_1}^6 a^3 b^6 f^3 + 420\omega_{x_1}^{10} a^6 b^6 + 84\omega_{x_1}^{10} a^6 b^4 + \\
& 345\omega_{x_1}^{10} a^8 b^4 + 400\omega_{x_1}^{10} a^{10} b^4 + 400\omega_{x_1}^{10} a^4 b^{10} - 60\omega_{x_1}^{10} a^4 b^8 - 24\omega_{x_1}^{10} a^4 b^6 + 4\omega_{x_1}^{10} \\
& a^4 b^4 + 1200\omega_{x_1}^{10} a^8 b^6 - 60\omega_{x_1}^9 a^4 b^8 f + 130\omega_{x_1}^7 a^4 b^7 d f - 84\omega_{x_1}^6 a^3 b^6 d^2 f - 12\omega_{x_1}^6 a^3 b^4 f^3 \\
& - 2\omega_{x_1}^3 a^2 b^4 f^3 + 2d\omega_{x_1}^3 a b^5 f^2 + 56\omega_{x_1}^8 a^6 b^4 f^2 + 114\omega_{x_1}^9 a^6 b^4 f - 570\omega_{x_1}^9 a^7 d b^5 + 25 \\
& \omega_{x_1}^8 a^8 b^4 f^2 + 210\omega_{x_1}^9 a^8 b^4 f - 870\omega_{x_1}^9 a^5 d b^7 + 150\omega_{x_1}^9 a^6 b^6 f - 258\omega_{x_1}^9 a^5 d b^5 - d\omega_{x_1}^4 a \\
& b^5 f^3 - 2\omega_{x_1}^5 a b^7 d^3 - 6d^2\omega_{x_1}^4 a b^6 f + 40\omega_{x_1}^5 a^2 b^6 d^2 f + 4d\omega_{x_1}^4 a^2 b^5 f^2 - 50d\omega_{x_1}^5 a^3 b^5 f^2 \\
& - 4d\omega_{x_1}^5 a b^5 f^2 - 48\omega_{x_1}^9 a^4 b^6 f + 13\omega_{x_1}^8 a^4 b^4 f^2 + 211\omega_{x_1}^8 a^4 b^6 d^2 + 12\omega_{x_1}^9 a^4 b^4 f - \\
& 34\omega_{x_1}^8 a^4 b^6 f^2 + 25\omega_{x_1}^8 a^6 b^6 d^2 + 6\omega_{x_1}^5 a^2 b^4 f^3 + 2\omega_{x_1}^4 a^3 b^4 f^3 + 12\omega_{x_1}^5 a^4 b^4 f^3 + 31 \\
& \omega_{x_1}^7 a^2 b^5 d f - 34\omega_{x_1}^6 a^2 b^7 d f^2 + 115\omega_{x_1}^7 a^2 b^9 d f - 178\omega_{x_1}^7 a^2 b^7 d f + 20\omega_{x_1}^6 a^2 b^5 d f^2 \\
& + 50\omega_{x_1}^8 a^6 b^6 f^2 + 50\omega_{x_1}^8 a^4 b^8 d^2 + 25\omega_{x_1}^8 a^4 b^8 f^2 + 100\omega_{x_1}^7 b^{11} a d - 100\omega_{x_1}^7 b^{10} a^2 f + \\
& d^2\omega_{x_1}^4 a^2 b^4 f^2 - 2d^2 a^2\omega_{x_1}^3 b^4 f - d^3\omega_{x_1}^4 a b^5 f - 130\omega_{x_1}^8 a^5 d b^5 f - 50\omega_{x_1}^8 a^7 d b^5 f + 8d^2 \\
& \omega_{x_1}^4 a^3 b^4 f - 4d^2\omega_{x_1}^5 a^2 b^4 f - 10\omega_{x_1}^5 a^4 d^2 b^4 f - 22\omega_{x_1}^6 a^5 b^4 f^3 - 12\omega_{x_1}^9 a^3 b^5 d - 300 \\
& \omega_{x_1}^9 a^3 b^9 d = 0
\end{aligned} \tag{A4.1}$$

**EK-5 6. MERTEBE BALL-BURMESTER NOKTALARI İÇİN (3.108) VE (3.135) DENKLEMLERİNDEKİ İKİ POLİNOMUN ORTAK SYLVESTER MATRİSİNİN DETERMİNANTİ VE AÇILIMI**

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
 Q = & -100 \omega_{x1}^4 b^7 d - 10d^2 \omega_{x1}^3 b^4 f + 50d^2 \omega_{x1}^3 b^4 a + 50d^2 \omega_{x1}^4 b^4 a^2 + 15d^2 \omega_{x1}^4 b^4 + 172\omega_{x1}^3 b^4 a \\
 & + 1334 \omega_{x1}^4 a^6 - 196 \omega_{x1}^4 b^4 a^2 - 270\omega_{x1}^3 a^2 b^4 f + 86 a \omega_{x1}^2 b^4 f + 200 \omega_{x1}^5 a b^6 + 400 \omega_{x1}^6 a^2 b^6 \\
 & + 100 \omega_{x1}^4 a b^6 f + 270 d \omega_{x1}^3 b^5 a - 86 d \omega_{x1}^2 b^5 - 8 \omega_{x1}^3 a - 50 d \omega_{x1}^4 a b^5 f + 25 \omega_{x1}^4 b^6 d^2 \\
 & + 90d \omega_{x1}^4 b^5 - 180 \omega_{x1}^5 b^4 a - 60 \omega_{x1}^6 b^4 a^2 - 780 \omega_{x1}^5 b^4 a^3 + 1200 \omega_{x1}^6 a^4 b^4 + 65 d \omega_{x1}^3 b^5 f \\
 & - 300 d \omega_{x1}^4 b^5 a^2 - 300 d \omega_{x1}^5 a b^5 - 220 a \omega_{x1}^4 b^4 f + 25 \omega_{x1}^4 a^2 b^4 f^2 - 60 \omega_{x1}^5 a^2 b^4 f + 300 \\
 & \omega_{x1}^4 a^3 b^4 f - 65 a \omega_{x1}^3 b^4 f^2 + 68 \omega_{x1}^4 a^2 - 722 \omega_{x1}^3 a^5 + 24 \omega_{x1}^2 a^2 - 15 \omega_{x1}^2 d^2 b^4 - 62 \omega_{x1}^3 b^2 a \\
 & - 156 \omega_{x1}^2 b^2 a^2 - 12 b^2 d^2 + 214 \omega_{x1}^4 b^2 a^2 + 32 \omega_{x1}^2 b^2 d^2 + 36 \omega_{x1} b^2 a - 24 \omega_{x1}^4 b^3 d - 420 \\
 & \omega_{x1}^5 b^2 a^3 + 4 \omega_{x1}^2 b d + 186 \omega_{x1}^2 a^4 - 9 \omega_{x1}^4 b^2 d^2 - 2 b d^3 - 24 \omega_{x1}^6 b^2 a^2 + 2 \omega_{x1}^4 b d + 31 \\
 & \omega_{x1}^2 b^3 d - 2160 \omega_{x1}^5 b^2 a^5 + 1200 \omega_{x1}^6 b^2 a^6 + 420 \omega_{x1}^6 b^2 a^4 + 48 \omega_{x1}^5 b^2 a + 2 \omega_{x1}^2 b^3 d^3 \\
 & + 5 \omega_{x1}^2 b d^3 - 10 \omega_{x1}^3 b^2 a^3 - 217 \omega_{x1}^3 a^3 + \omega_{x1}^2 a^2 f^4 + 14 \omega_{x1}^2 d^2 a^2 + \omega_{x1}^2 b^2 d^4 + \omega_{x1}^4 d^2 \\
 & - 10 \omega_{x1}^2 a^3 f + 62 \omega_{x1}^3 a^2 f + 14 \omega_{x1}^2 a^2 f^2 + 2 a f^3 + 1138 \omega_{x1}^4 b^2 a^4 - \omega_{x1} a f^4 - 270 \omega_{x1}^3 a^6 f \\
 & + 655 \omega_{x1}^4 a^4 - 114 \omega_{x1} a^4 f + 218 \omega_{x1}^3 a^4 f + 47 \omega_{x1} a^3 f^2 + 266 \omega_{x1}^2 a^5 f + 6 \omega_{x1} a f^2 - 176 \\
 & \omega_{x1}^4 a^3 f - 406 \omega_{x1}^4 a^5 f - 15 \omega_{x1}^3 a^5 f^2 + 210 \omega_{x1}^5 a^6 f + 25 \omega_{x1}^4 a^6 f^2 + 56 \omega_{x1}^4 a^4 f^2 - 12 \omega_{x1}^4 a f \\
 & + 114 \omega_{x1}^5 a^4 f + 12 \omega_{x1}^5 a^2 f + 13 \omega_{x1}^4 a^2 f^2 + 10 \omega_{x1}^3 a^4 f^3 + 6 \omega_{x1}^3 a^2 f^3 - 12 \omega_{x1}^2 a^3 f^3 - 6 \\
 & \omega_{x1}^2 a f^3 - 13 \omega_{x1}^3 a f^2 + 16 \omega_{x1}^4 d^2 a^4 + \omega_{x1}^2 d^2 a^2 f^2 + 4 \omega_{x1}^2 d^2 a^3 f - 2 \omega_{x1}^2 b d a f^3 - 40 \omega_{x1}^3 \\
 & b a^3 d f^2 + 84 \omega_{x1}^6 a^4 - 28 \omega_{x1}^3 d^2 a^3 + 345 \omega_{x1}^6 a^6 + 24 b d a f - 2 \omega_{x1}^2 b d^3 a f + 2 \omega_{x1}^2 a d^2 f
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -352 \omega_{x1}^2 b^3 d a^2 + 540 \omega_{x1}^3 b^3 d a^3 - 225 \omega_{x1}^3 b^3 d a + 29 \omega_{x1} b^3 d f - 18 b^3 d + 153 \omega_{x1}^2 b d a^2 \\
& + 2 \omega_{x1}^3 d^2 f - 13 \omega_{x1}^3 d^2 a + 17 \omega_{x1}^4 d^2 a^2 - 89 \omega_{x1}^2 b^2 a f + 352 \omega_{x1}^2 b^2 a^3 f - 2 \omega_{x1} b d f + 203 \\
& \omega_{x1}^3 b^2 a^2 f - 12 a^2 f^2 - 123 \omega_{x1} b d a^2 f + 180 \omega_{x1}^2 b a^3 d f - 266 \omega_{x1}^2 b a^4 d - 690 \omega_{x1}^3 b a^3 d - \\
& 540 \omega_{x1}^3 b^2 a^4 f - 45 \omega_{x1}^2 a^4 f^2 - 60 \omega_{x1}^2 b^3 d a f - 21 \omega_{x1}^2 b d a f + 76 \omega_{x1} b^2 a d^2 - 18 \omega_{x1} a^3 - \\
& 75 \omega_{x1}^3 b d a - 135 \omega_{x1}^2 b^2 a^2 d^2 - 2 \omega_{x1} d^2 f + \omega_{x1}^2 d^2 f^2 + 75 \omega_{x1}^2 b^2 a^2 f^2 + 270 \omega_{x1}^3 b a^5 d - 2 \\
& b d f^2 - 29 \omega_{x1} b^2 a f^2 - 12 \omega_{x1} a^2 f + 18 a^3 f + 2 d^2 a f - 6 \omega_{x1} d^2 a^2 f + 741 \omega_{x1}^4 b^3 d a^2 - 176 \\
& \omega_{x1}^4 b^2 a^3 f - \omega_{x1} d^2 a f^2 + 1101 \omega_{x1}^4 b a^4 d + 150 \omega_{x1}^5 b^2 a^4 f - 258 \omega_{x1}^5 b a^3 d + 50 \omega_{x1}^4 b^2 a^4 \\
& f^2 - 870 \omega_{x1}^5 b^3 a^3 d - 6 \omega_{x1} b d a f^2 - 80 \omega_{x1}^3 b^2 a^3 f^2 + 50 \omega_{x1}^3 b^2 a^3 d^2 + 300 \omega_{x1}^4 b^2 a^5 f + \\
& 100 \omega_{x1}^4 a^7 f + 44 \omega_{x1}^2 b a^2 d f^2 + 267 \omega_{x1}^4 b d a^2 + 6 \omega_{x1} b^2 f d^2 - 300 \omega_{x1}^4 b^3 d a^4 - 100 \omega_{x1}^4 \\
& b a^6 d - 76 \omega_{x1}^3 a^3 f^2 - 2 \omega_{x1} d^2 a + 400 \omega_{x1}^6 a^8 + 123 \omega_{x1}^3 b d a^2 f - 35 \omega_{x1}^3 b a^4 d f + 211 \omega_{x1}^4 \\
& b^2 a^2 d^2 - 570 \omega_{x1}^5 b a^5 d - 130 \omega_{x1}^4 b a^3 d f - 50 \omega_{x1}^4 b a^5 d f + 30 \omega_{x1}^3 b^3 a^2 d f - 34 \omega_{x1}^2 b^2 d^2 \\
& a f - 26 \omega_{x1}^4 b a d f + 25 \omega_{x1}^4 b^2 a^4 d^2 - 48 \omega_{x1}^5 b^2 a^2 f + 100 \omega_{x1}^4 b^2 a f - 167 \omega_{x1}^3 b^2 a d^2 + 66 \\
& \omega_{x1}^3 b^2 a f^2 - 34 \omega_{x1}^4 b^2 a^2 f^2 - 144 \omega_{x1}^5 a^3 - 4 \omega_{x1}^5 a - 12 \omega_{x1}^5 b a d - 38 \omega_{x1}^3 b^3 d f - 5 \omega_{x1}^3 b d f \\
& - 14 \omega_{x1}^2 b^3 d f^2 + 14 \omega_{x1}^2 b^2 a f^3 + 120 \omega_{x1}^5 b^3 a d - 4 \omega_{x1}^2 b d f^2 + 10 \omega_{x1}^3 b^2 a^2 f^3 - 20 \omega_{x1}^3 \\
& b^3 a d^3 - 20 \omega_{x1}^3 b^3 a d f^2 - 100 \omega_{x1}^4 b^3 a^3 d f + 50 \omega_{x1}^3 b^3 a^2 d^2 f - 16 \omega_{x1}^3 b a d f^2 + 140 \omega_{x1}^4 \\
& b^3 a d f - 114 \omega_{x1} b^2 a^2 f + 18 b^2 a f - \omega_{x1}^2 b^2 d^2 f^2 - 8 \omega_{x1}^3 b^2 d^2 f - 10 \omega_{x1}^3 b d^3 a - 114 \omega_{x1} b^3 \\
& a d - 807 \omega_{x1}^5 a^5 - 4 \omega_{x1}^2 b d^3 a^2 + 6 \omega_{x1} b d^3 a - 18 b d a^2 + \omega_{x1} b d^3 f - 6 \omega_{x1} b d a + \omega_{x1} b \\
& d f^3 + 114 \omega_{x1} b d a^3 - 1180 \omega_{x1}^5 a^7 + 4 \omega_{x1}^6 a^2 + 2 \omega_{x1}^2 d^2 + 2 a^2 \omega_{x1}^3 d^2 f = 0 \quad (A5.1)
\end{aligned}$$