

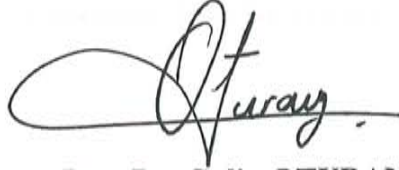
**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE FARKLI
YAKLAŞIMLAR
SEMA SERVİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya,2008**

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE FARKLI
YAKLAŞIMLAR
SEMA SERVİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya,2008

Bu tez 11/ 08/ 2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.



Doç. Dr. Galip OTURANÇ

(Danışman)

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

(Üye)



Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

(Üye)



İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam.....	1
1.2. Literatür Özeti	1
2. DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK YÖNTEMLER.....	3
2.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	3
2.2. Adomian Ayrıştırma Yöntemi	6
2.3. Taylor Sıralama Yöntemi	12
3. UYGULAMALAR.....	24
3.1. İntegral Denklemlerinin Çözümü	24
3.2. Yüksek Mertebeden İntegral Denklemlerin Çözümü.....	44
3.3. Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü.....	57
4. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER	68
5. KAYNAKLAR.....	69

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç.Dr. Galip Oturaç yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez içerik olarak dört bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde tezin amacı ve kapsamı doğrultusunda bir giriş yapılmış ve literatür özeti sunulmuştur.

İkinci bölümde Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin, Adomian (Ayrışım) Yönteminin ve Taylor Sıralama Yönteminin tanımları, özellikleri ve Diferensiyel Dönüşüm Yöntemiyle ilgili daha önceden yapılan çalışmalardaki bazı özellikler ile Adomian polinomlarının hesaplanmasında daha önceden yapılan çalışmalar incelenip çeşitli Adomian polinomları Tablo1 ve Tablo2 de verilmiştir. Ayrıca Taylor sıralama yönteminin Maple bilgisayar programındaki prosedürleri oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde, tanıtılan yöntemlerin integral denklemlerine, yüksek mertebeden diferensiyel denklemlere ve diferensiyel denklem sistemlerine uygulaması yapılmış, denklemler Maple bilgisayar programıyla çözülmüş ve elde edilen sonuçlar grafiklerle karşılaştırılmıştır.

Son olarak dördüncü bölümde ise bahsi geçen yöntemlerin avantaj ve dezavantajları belirtilmiş sonuç ve öneriler kısmında verilmiştir.

Tezimin hazırlanmasında ve tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı değerli hocam Sayın Doç. Dr. Galip Oturaç'a, desteklerini ve yardımlarını hiç esirgemeyen Arş. Gör. Yıldırım Keskin ve Arş. Gör. Onur Karaoğlu'na, ayrıca aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Sema SERVİ

Konya, 2008

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Uygulamalı matematik ve birçok mühendislik problemlerinde karşımıza çıkan, analitik çözümleri olmayan veya çözümleri oldukça zor ve zaman alıcı olan diferansiyel denklemlerin çözümleri için, algoritmaya dayalı ve çabuk sonuca götüren nümerik yöntemler önem kazanmıştır. Söz konusu yöntemler yardımıyla karşılaşılan karmaşık durumları gidermek ve diğer mühendislik problemlerinin çözümünü elde etmek mümkündür.

Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm yönteminin, Adomian yönteminin ve Taylor sıralama yönteminin tanımları ve yöntemlere ait işlemler verilerek, bazı diferansiyel denklemlerin Maple bilgisayar programı desteği ile bu yöntemlerle çözülebileceğini göstermek suretiyle bu nümerik çözümler birbirleriyle karşılaştırılacaktır.

1.2. Literatür Özeti

Kurnaz, A., Oturaç, G., Kiriş, M. E.,(2005); Bu çalışmada PDEs çözümleri için n boyutlu diferansiyel metodun genelleştirilmesi verilmiştir. Bu metodun diğerlerinden ayrı olarak özelliği özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmekte etkili olmasıdır. Sunulan metodu örneklerle açıklamak için bulunan sonuçlar birkaç başlangıç ve sınır değer problemlerine uygulanmıştır.

Kurnaz, A., Oturaç, G.,(2005); Bu çalışmada adi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için diferansiyel dönüşüm metodunun bir genellemesi verilmiştir.

Chen, C. K., Ho, S. H.,(1996); Bu çalışmada diferansiyel dönüşümün tanımı verilmiş ve bu yöntem Strum-Lioville problemine uygulanmıştır. Bu yöntem sayesinde bazı basit matematiksel işlemlerle i inci özdeğer ve öz vektör kolayca hesaplanmıştır.

Abdel-Halim Hassan, I. H.,(2004); Bu çalışmada Yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerinin diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümüne ve uygulamalarına yer verilmiş. Bulunan çözümler analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Arıkoğlu A., Özkol, I.,(2004); Bu çalışmada integro diferansiyel denklemlerin çözümü için diferansiyel dönüşüm yöntemi genişletilmiş ve yeni teoremler tanıtılıp ispatlanmıştır.

Ruan J.,Lu Z.,(2007); Bu çalışmada lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için Adomian yöntemi modifiye edilmiş ve modifiye edilmiş bu yöntemle sınırlı bir hatayla gerçek çözüme yakın bir çözüm bulunabilmiştir.

Wazwaz, A.M.,(2000); Bu çalışmada lineer olmayan operatörler ile Adomian polinomlarının hesaplanmasında güvenilir bir yöntem geliştirilmeye çalışılmıştır.

Gülsu M., Sezer M.,(2005); Bu çalışmada her noktada karışık koşullar altında değişken katsayılı m. mertebeden farklı diferensiyel denklemlerin çözümü için Taylor polinom yaklaşımı verilmiştir.

Karamete A., Sezer M.,(2002); Bu çalışmada kesikli Taylor serisiyle lineer integro diferensiyel denklemlerin nümerik çözümü, bir matris metodu olarak tanımlanan Taylor Sıralama Yöntemiyle sunulmuştur. Kullanılan Taylor sıralama noktaları bu yöntemde integro diferensiyel denklemi Taylor katsayıları olarak bilinen lineer cebirsel bir denklemin bir sistemine benzeyen bir matris denklemine dönüştürmüştür.

Sezer M., Karamete A., Gülsu M.,(2004); Bu çalışmada yüksek mertebeden lineer adi diferensiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümleri için Taylor Sıralama Yöntemi sunulmuş ve kullanılan Taylor sıralama noktaları bu yöntemle adi diferensiyel denklem sistemlerine dönüştürülmüştür.

Hosseini M. M., Nasabzadeh H.,(2007); Bu çalışmada ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin çözümü için modifiye edilmiş verimli bir Adomian Ayrışım yöntemi sunulmuştur.

Biazar J., Babolian E., Islam R.,(2004); Bu çalışmada birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemlerinin çözümü ve yüksek mertebeden bir adi diferensiyel denklemi birinci mertebeden bir diferensiyel denklem sistemine dönüştürülmüştür.

2. DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK YÖNTEMLER

2.1. Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu kısımda ilk olarak Diferensiyel Dönüşüm yönteminin tanımı ve genel özellikleri ifade edilecektir. Linear, linear olmayan, adi türevli ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bu yöntemde diferensiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir. Ayrıca diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürerek çözen, integral dönüşüm yöntemleri (Laplace ve Fourier dönüşümleri) gibi yöntemlerde vardır ama diferensiyel dönüşüm yöntemi bu yöntemlerle karşılaştırıldığında daha kolay çözüme ulaştırır. Çünkü integral yöntemleri kullanıldığında karmaşık ifadelerin integrallerinin alınması zor olabilir ve ters dönüşümlerinin alınmasında problemler ortaya çıkabilir. Sonuçta bu yöntemin lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünün yanı sıra, sürekli olmayan sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde ve n boyutlu kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde de çalıştığı görülebilir [16]. Bu bölüme ilişkin daha geniş bilgi, tanım ve teoremler [3]'den edinilebilir.

Tanım 2.1.1.[1]

Tek değişkenli $w(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k)$ olmak üzere, $w(x)$ ' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.2. [1]

$W(k)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k) x^k \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır. (2.1) ve (2.2) eşitlikleri dikkate alınarak

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=0} x^k \quad (2.3)$$

eşitliği elde edilir. (2.1) ve (2.2) denklemleri kullanılarak temel matematiksel dönüşümler yardımıyla tek boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 2.1.1 [1]

Tek değişkenli $w(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=u(x) \pm v(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$, $U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=U(k) \pm V(k)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.2. [1]

Tek değişkenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. $c \in IR$ olmak üzere eğer

$$w(x)= c u(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=c U(k)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.1.3. [1]

Tek değişkenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=\frac{d}{dx}u(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=(k+1)U(k+1)$$

eşitliği sağlanır.

$w(x)$ in bazı değerleri için elde edilen $W(k)$ değerleri aşağıdaki Tablo 1'de verilmiştir.

Fonksiyon	Transform Karşılığı
$w(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r}$	$W(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+r) U(k+r) = \frac{(k+r)!}{k!} U(k+r)$
$w(x) = u(x)v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$ [1]
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$ [1]

$w(x) = u(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k (k-r+2)(k-r+1)U_r V(k-r+2)$
$w(x) = \frac{d}{dx} u(x) \frac{d}{dx} v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$
$w(x) = u(x)v(x)s(x)$	$W(k) = U(k) \otimes V(k) \otimes S(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)S(k-r-t)$
$w(x) = u(x)v(x) \frac{d^2}{dx^2} s(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} (k-r-t+2)(k-r-t+2)U(r)V(t)S(k-r-t+2)$
$w(x) = a^{\lambda x}, \lambda \in R$	$W(k) = \frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$
$w(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in R$	$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$ [2]
$w(x) = e^{\lambda x + b}, \lambda \in R$	$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^b$
$w(x) = sh(\lambda x), \lambda \in R$	$W(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift ise} \end{cases}$
$w(x) = ch(\lambda x), \lambda \in R$	$W(k) = \begin{cases} 0 & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!} & k \text{ çift ise} \end{cases}$
$w(x) = \sin(ax + b), a, b \in R$	$W(k) = \frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$ [2]
$w(x) = \cos(ax + b), a, b \in R$	$W(k) = \frac{a^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$ [2]
$w(x) = \int_{x_0}^x u(t)dt$	$W(k) = \frac{U(k-1)}{k}$ [4]
$w(x) = v(x) \int_{x_0}^x u(t)dt$	$W(k) = V(k) \otimes \frac{U(k-1)}{k}$ [4]
$w(x) = \int_{x_0}^x u(t)v(t)dt$	$W(k) = \frac{U(k-1) \otimes V(k-1)}{k}$ [4]

Tablo 1

2.2. Adomian Ayrışım Yöntemi

Bu metodla, mühendislikteki ve fizikteki; cebirsel denklemler, kısmi türevli ve adi diferensiyel denklemler, lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklemler çözülebilmektedir. Adomian ayrışım yöntemi lineer ve lineer olmayan diferensiyel ve integral denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem gerçek çözüme yakınsayan bir seriyle çözümü ayrıştırır.

Bu yöntemi ilk olarak G.Adomian tanıtmıştır. Daha sonra Cherruault'ın çalışmalarıyla yöntem daha da geliştirilmiştir.

Çözümü aranan denklemler için farklı yöntemler kullanılabilir, ancak bu yöntemlerin kullanılmasıyla elde edilen çözüm analitik çözümden uzaklaşmış olur. Bu yöntemde ise verilen bir problemin çözümü, yakınsayan bir seri formunda Adomian polinomları yardımıyla yapılır. Seri formda elde edilen sonuçlar yaklaşık değerlerdir ve çözümdeki yaklaşık değer problemnin sonucuna çok yakın bir değer olduğunu söyleyebiliriz. Bazı integral ve diferensiyel denklemlerin bu yöntemle çözümleri yapılırken Adomian polinomlarının seri açılımlarından gelen birbirini yok eden terimler (noise terms) sayesinde çözümü birkaç iterasyonla elde etmek mümkündür. Bu da bize zamandan ve işlem kalabalığından tasarruf sağlar. Ayrıca elde edilen sonuçlarda oldukça hassastır.

Bu bölüme ilişkin daha geniş tanım ve teoremler [7]'den edinilebilir.

Öncelikle ayrışım yöntemini yapısal olarak G. Adomian'ın çalışmasıyla tanıtalım [5]. Bunun için de

$$F[y(x)] = g(x) \quad (2.4)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada bilinmeyen fonksiyon $y(x)$ ve $g(x)$ sürekli bir fonksiyon olup F ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan bir diferensiyel operatörü gösterebiliriz. Lineer terim $L+R$ şeklinde ayrıştırılır, R lineer operatörün geri kalan kısmıdır. L yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferensiyel operatör olsun. O zaman (2.4) denklemini

$$Ly(x) + Ry(x) + Ny(x) = g(x) \quad (2.5)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada N lineer olmayan operatör ve L 'de tersi alınabilen bir operatör olduğundan, (2.5)'in her iki tarafına L^{-1} invers operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Ly(x) = L^{-1}g(x) - L^{-1}Ry(x) - L^{-1}Ny(x) \quad (2.6)$$

bulunur. Ayrışım yöntemi, $y(x)$ 'in çözümünü

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (2.7)$$

şeklinde seri formunda hesaplar ve lineer olmayan $Ny(x)$ terimleri de

$$Ny(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.8)$$

biçiminde ayrıştırır. Burada A_n 'ler y_0, y_1, \dots, y_n 'lere bağlı ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlardır. $y(x)$ ve $Ny(x)$ sırasıyla,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i, \quad N(y) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \quad (2.9)$$

olarak elde edilir. Burada λ uygunluk için alınan bir parametredir. A_n 'ler (2.9)'dan

$$n!A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n\right) \right]_{\lambda=0} \quad (2.10)$$

ifadesiyle bulunur. (2.7) ve (2.8) ifadelerini (2.5)'de yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \quad (2.11)$$

elde ederiz. Burada $\theta = y(0)$ dir. $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ serisinin terimleri indirgeme formülü ile

$$\begin{cases} y_0 & = & \theta + L^{-1}g \\ y_1 & = & -L^{-1}Ry_0 - L^{-1}A_0 \\ & \vdots & \\ y_{n+1} & = & -L^{-1}Ry_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde yazılır. Böylece (2.4) ifadesinin doğru çözümü seri formunda belirtilmiş olur. Fakat

uygulamalarda $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ serisinin bütün terimlerini hesaplamak zordur, bu nedenle kesme

serisinden başlayarak yaklaşık çözümü;

$$\phi_n = \sum_{n=0}^{n-1} y_n \quad (2.13)$$

veya

$$\begin{aligned} \phi_1 & = & u_0 \\ \phi_2 & = & u_0 + u_1 \\ \phi_3 & = & u_0 + u_1 + u_2 \\ & \vdots & \\ \phi_{n+1} & = & u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n, n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklinde buluruz.

[6]'da lineer olmayan operatörlerin Adomian polinomlarını hesaplamak için son derece kullanışlı bir algoritma geliştirildi. Dönüşüm yöntemi için de benzer bir çalışma [18]'de yapılmıştır. [6]'daki algoritmanın kullanılmasıyla lineer olmayan operatörlere, trigonometrik fonksiyonlara, üstel fonksiyonlara, logaritmik fonksiyonlara ve bileşke fonksiyonlara karşılık gelen A_n Adomian polinomları aşağıdaki Tablo 2'de verilmiştir[7].

Fonksiyon	Adomian polinomları
$F(y) = y^2$	$A_0 = y_0^2,$ $A_1 = 2y_0y_1,$ $A_2 = y_1^2 + 2y_0y_2,$ $A_3 = 2y_1y_2 + 2y_0y_3,$ $A_4 = y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_0y_4,$ \vdots
Polinom tipinde verilen lineer olmayan terimler için $n \in Z^+$ $F(y) = y^n$	$A_0 = y_0^n,$ $A_1 = ny_0^{(n-1)}y_1,$ $A_2 = \frac{1}{2}n(n-1)y_0^{(n-2)}y_1^2 + ny_0^{(n-1)}y_2,$ $A_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)y_0^{(n-3)}y_1^3 + n(n-1)y_0^{(n-2)}y_1y_2 + ny_0^{(n-1)}y_3,$ \vdots
Polinom tipinde verilen lineer olmayan terimler için $n \in Z^-$ $F(y) = y^n$	$A_0 = -y_0^{-n},$ $A_1 = -ny_0^{-(n+1)},$ $A_2 = -\frac{1}{2}n(n+1)y_0^{-(n+2)}y_1^2 - ny_0^{-(n+2)}y_2,$ $A_3 = -\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)y_0^{-(n+3)}y_1^3 - n(n+1)y_0^{-(n+2)}y_1y_2 - ny_0^{-(n+1)}y_3,$ \vdots
$F(y) = yy_x$	$A_0 = y_0y_{0_x},$ $A_1 = y_{0_x}y_1 + y_0y_{1_x},$ $A_2 = y_{0_x}y_2 + y_{1_x}y_1 + y_{2_x}y_0,$ $A_3 = y_{0_x}y_3 + y_{1_x}y_2 + y_{2_x}y_1 + y_{3_x}y_0,$ $A_4 = y_{0_x}y_4 + y_0y_{4_x} + y_{1_x}y_3 + y_{2_x}y_2 + y_{3_x}y_1,$ \vdots

$F(y) = \sin y$	$A_0 = \sin y_0,$ $A_1 = y_1 \cos y_0,$ $A_2 = y_2 \cos y_0 - \frac{1}{2!} y_1^2 \sin y_0,$ $A_3 = y_3 \cos y_0 - y_1 y_2 \sin y_0 - \frac{1}{3!} y_1^3 \cos y_0,$ \vdots
$F(y) = \cos y$	$A_0 = \cos y_0,$ $A_1 = -y_1 \sin y_0,$ $A_2 = -y_2 \sin y_0 - \frac{1}{2!} y_1^2 \cos y_0,$ $A_3 = -y_3 \sin y_0 - y_1 y_2 \cos y_0 - \frac{1}{3!} y_1^3 \sin y_0,$ $A_4 = -y_4 \sin y_0 - \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) \cos y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \sin y_0 + \frac{1}{4!} y_1^4 \cos y_0,$ \vdots
$F(y) = \sinh y$	$A_0 = \sinh y_0,$ $A_1 = y_1 \cosh y_0,$ $A_2 = y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \sinh y_0,$ $A_3 = y_3 \cosh y_0 + y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \cosh y_0,$ $A_4 = y_4 \cosh y_0 + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) \sinh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{4!} y_1^4 \sinh y_0,$ \vdots
$F(y) = \cosh y$	$A_0 = \cosh y_0,$ $A_1 = y_1 \sinh y_0,$ $A_2 = y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \cosh y_0,$ $A_3 = y_3 \sinh y_0 + y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \sinh y_0,$ $A_4 = y_4 \sinh y_0 + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{4!} y_1^4 \cosh y_0,$ \vdots

$F(y) = e^y$	$A_0 = e^{y_0},$ $A_1 = y_1 e^{y_0},$ $A_2 = \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{y_0},$ $A_3 = \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{y_0},$ $A_4 = \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{y_0},$ \vdots
$F(y) = e^{-y}$	$A_0 = e^{-y_0},$ $A_1 = -y_1 e^{-y_0},$ $A_2 = \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{-y_0},$ $A_3 = \left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{-y_0},$ $A_4 = \left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{-y_0},$ \vdots
$F(y) = \ln y, y > 0$	$A_0 = \ln y_0,$ $A_1 = \frac{y_1}{y_0},$ $A_2 = \frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0^2},$ $A_3 = \frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{y_0^3},$ $A_4 = \frac{y_4}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{y_0^2} - \frac{y_1 y_3}{y_0^2} + \frac{y_1^2 y_2}{y_0^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{y_0^4},$ \vdots

$F(y) = \ln(1+y),$ $-1 < y \leq 1$	$A_0 = \ln(1+y_0),$ $A_1 = \frac{y_1}{1+y_0},$ $A_2 = \frac{y_2}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{(1+y_0)^2},$ $A_3 = \frac{y_3}{1+y_0} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1+y_0)^3},$ $A_4 = \frac{y_4}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{y_0^2} - \frac{y_1 y_3}{(1+y_0)^2} + \frac{y_1^2 y_2}{(1+y_0)^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{(1+y_0)^4},$ \vdots
$F(y) = e^{-y^2},$ $u = y^2 \text{ ve}$ $F(y) = e^{-u} \text{ için}$ $\begin{cases} e^{-u} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \\ y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \end{cases}$	$A_0(u_0) = A_0[B_0(y_0)],$ $A_1(u_0, u_1) = A_1[B_0(y_0), B_1(y_0, y_1)],$ $A_2(u_0, u_1, u_2) = A_2[B_0(y_0), B_1(y_0, y_1), B_2(y_0, y_1, y_2)],$ \vdots <p>olup</p> $A_0 = e^{-y_0^2},$ $A_1 = -2y_0 y_1 e^{-y_0^2},$ $A_2 = (2y_0^2 y_1^2 - y_1^2 - 2y_0 y_2) e^{-y_0^2},$ \vdots
$F(y) = e^{-y} \sin(y/2)$ $\begin{cases} e^{-y} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \\ \sin(y/2) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \end{cases}$ $F(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right)$	$F(y_0) = e^{-y_0} \sin(y_0/2),$ $F(y_1) = e^{-y_0} (y_1/2) \cos(y_0/2) - y_1 e^{-y_0} \sin(y_0/2),$ $F(y_2) = -y_1 e^{-y_0} (y_1/2) \cos(y_0/2) +$ $e^{-y_0} \left\{ (y_2/2) \cos(y_0/2) - (y_1^2/8) \sin(y_0/2) \right\}$ $+ e^{-y_0} \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) \sin(y_0/2),$ \vdots

Tablo 2

2.3. Taylor Sıralama Metodu

Yüksek mertebeden diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için birçok seri yaklaşım yöntemleri kullanılmıştır. Daha sonra kullanılan seri yaklaşım yöntemleri yardımıyla denklemlerdeki her bir terimin n defa türevinin alınması ve sonra denkleme bilinmeyen fonksiyonun Taylor seri açılımında yerine konulması ve cebirsel bir denkleme dönüştürülmesiyle Taylor Matris yöntemi geliştirildi [8].

Son zamanlarda ise diferensiyel denklemlerin, ikinci mertebeden integro diferensiyel denklemlerin, karışık koşullar altında Taylor polinomları cinsinden yaklaşık çözümlerinin bulunması için Taylor Sıralama Yöntemi denilen bir matris yöntemi sunulmuştur [9]. Bu yöntem önce diferensiyel denklemlerdeki bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sonlu Taylor seri açılımlarının ve bilinen katsayı fonksiyonlarının sıralama noktalarındaki değerlerine bağlı matris formlarının elde edilmesi, sonra bunların yerine konulup denklemin Taylor katsayılı bir matris denkleme dönüştürülmesinden ibarettir. Böylece bilinmeyen Taylor katsayılı bir lineer cebirsel sisteme karşılık gelen sonuç matris denklemi çözülebilir ve katsayılar yaklaşık olarak bulunabilir.

2.3.1. Diferensiyel denklemin matris denkleme dönüştürülmesi

Bu bölüme ilişkin tanım ve teoremler de [11]'den yararlanılmıştır.

Değişken katsayılı m . mertebeden lineer diferensiyel denklem

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)y^{(k)}(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.15)$$

şeklinde gösterilsin. Bu diferensiyel denklemin

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_{ij}y^{(j)}(a) + b_{ij}y^{(j)}(b) + c_{ij}y^{(j)}(c)] = \lambda_i \quad (2.16)$$

$$i = 0, 1, \dots, m-1; \quad a \leq c \leq b$$

koşullarına göre problemin çözümünü bulmak için (2.15) eşitliğini açarsak

$$P_m(x)y^{(m)}(x) + P_{m-1}(x)y^{(m-1)}(x) + \dots + P_1(x)y^{(1)}(x) + P_0(x)y = f(x) \quad (2.17)$$

olur. Burada $P_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) ve $f(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında Taylor serisine açılabilen fonksiyonlar ve $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, \lambda_i$ sabitleri (2.16) koşul denkleminin katsayılarıdır. $x=c$ noktası civarında

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{y^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n; \quad a \leq x, c \leq b, N \geq m \quad (2.18)$$

olup sonlu Taylor serisi formunda problemin yaklaşık çözümünü verir. N sayısı serinin kaçınıcı terime kadar açılacağını gösterir. $y^{(n)}(c)$ ise bulunması gereken Taylor katsayılarıdır. Taylor katsayılarını bulmak için problemin tanım aralığından sıralama noktalarını kullanalım. $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

olacak şekilde N eşit parçaya bölelim. Böylece,

$$x_i = a + i \frac{b-a}{N}, \quad i = 0,1,2,\dots,N$$

eşitliğinden sıralama noktaları bulunur.

Sıralama noktaları da bulunduktan sonra (2.15) denkleminin sonlu Taylor serisi formunda bir yaklaşık çözümü olduğunu kabul edip bunu matris formunda ifade edelim:

$$[y(x)] = XM_0A \quad (2.19)$$

olmak üzere burada;

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (x-c) & (x-c)^2 & \dots & (x-c)^n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) & y^{(1)}(c) & y^{(2)}(c) & \dots & y^{(n)}(c) \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca M_0 ifadesindeki "0" indisi türevi belirtiyor. Yani denklemdeki $y(x)$ 'in türev mertebesiyle M 'in indisi aynı değeri almaktadır.

(2.19) matris formu x_i sıralama noktalarındaki değerlerini alırsa

$$[y(x_i)] = X_i M_0 A; \quad i = 0,1,\dots,N$$

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & (x_i - c) & (x_i - c)^2 & \dots & (x_i - c)^n \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

olur ve

$$\begin{aligned} [y(x_0)] &= X_0 M_0 A \\ [y(x_1)] &= X_1 M_0 A \\ &\vdots \\ [y(x_N)] &= X_N M_0 A \end{aligned}$$

veya

$$Y^{(0)} = CM_0A \quad (2.21)$$

matris denklemleri olarak yazılabilir. Burada $Y^{(0)}$ ve C matrisleri

$$Y^{(0)} = [y(x_0) \quad y(x_1) \quad y(x_2) \quad \cdots \quad y(x_N)]^T$$

$$C = [x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_N]^T = \begin{bmatrix} 1 & (x_0 - c) & (x_0 - c)^2 & \cdots & (x_0 - c)^N \\ 1 & (x_1 - c) & (x_1 - c)^2 & \cdots & (x_1 - c)^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & (x_N - c) & (x_N - c)^2 & \cdots & (x_N - c)^N \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (2.18)'de tanımlanan $y(x)$ yaklaşık çözümünün yüksek mertebeden türevlerinden bahsederseniz;

$$y^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^N \frac{y^{(n)}(c)}{(n-1)!} (x-c)^{n-1}$$

şeklindeydi. Bunun matris formu ise

$$[y^{(1)}(x)] = XM_1A \quad (2.22)$$

olur. Buradaki M_1 matrisi

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(N-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. (2.22) eşitliğinin x_i sıralama noktalarındaki değerleri ise;

$$[y^{(1)}(x_i)] = XM_1A; \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olur ve

$$\begin{aligned} [y^{(1)}(x_0)] &= XM_1A \\ [y^{(1)}(x_1)] &= X_1M_1A \\ &\vdots \\ [y^{(1)}(x_N)] &= X_NM_1A \end{aligned}$$

şeklinde açılır. Daha genel olarak

$$Y^{(1)} = CM_1A \quad (2.23)$$

elde edilir. $Y^{(1)}$ matrisi,

$$Y^{(1)} = [y^{(1)}(x_0) \quad y^{(1)}(x_1) \quad y^{(1)}(x_2) \quad \cdots \quad y^{(1)}(x_N)]^T$$

olur.

Değişken katsayılı m . mertebeden lineer diferensiyel denklemini (2.15)'de

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)y^{(k)}(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

şeklinde ifade etmiştik.

$y^{(k)}(x)$ türev fonksiyonlarının matris formlarını genellersek

$$[y^{(k)}(x)] = XM_k A, \quad k = 0, 1, \dots, m \leq N \quad (2.24)$$

şeklindedir ve x_i sıralama noktaları kullanılırsa

$$Y^{(k)} = CM_k A, \quad k = 0, 1, \dots, m \leq N \quad (2.25)$$

yazılabilir. $Y^{(k)}$ ve M_k matrisleri ise

$$Y^{(k)} = [y^{(k)}(x_0) \quad y^{(k)}(x_1) \quad y^{(k)}(x_2) \quad \dots \quad y^{(k)}(x_N)]$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{0!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N-2)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \dots \quad M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{1}{0!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N-k)!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

şeklindedir.

Daha önce bulunan x_i sıralama noktalarını (2.17) denklemine yerine yazarak çözümü aranan diferensiyel denklemin matris bağıntısını gösterelim,

$$\begin{aligned} P_0(x_0)y^{(0)}(x_0) + P_1(x_0)y^{(1)}(x_0) + \dots + P_m(x_0)y^{(m)}(x_0) &= f(x_0) \\ P_0(x_1)y^{(0)}(x_1) + P_1(x_1)y^{(1)}(x_1) + \dots + P_m(x_1)y^{(m)}(x_1) &= f(x_1) \\ &\vdots \\ P_0(x_N)y^{(0)}(x_N) + P_1(x_N)y^{(1)}(x_N) + \dots + P_m(x_N)y^{(m)}(x_N) &= f(x_N) \end{aligned}$$

ve bunu genellersek;

$$P_0Y^{(0)} + P_1Y^{(1)} + \dots + P_mY^{(m)} = F \text{ veya } \sum_{k=0}^m P_kY^{(k)} = F \quad (2.26)$$

bulunur. P_k ve F matrisleri $k = 0,1,\dots,m \leq N$ için

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

ile ifade edilir.(2.25) denkleminde $Y^{(k)}$ matrisi yerine yazılırsa

$$\left\{ \sum_{k=0}^m P_k C M_k \right\} A = F \quad (2.27)$$

elde edilir. Şimdi de (2.16) da verilen koşul denkleminin matris formunu oluşturalım. (2.24)'de verilen $[y^{(k)}(x)] = X M_k A$, $k = 0,1,\dots,m \leq N$ türev fonksiyonlarının genel halinde $x = a$, $x = b$, $x = c$ ($a \leq c \leq b$) noktalarındaki değerlerini bulur ve matris formunda ifade edersek

$$\begin{aligned} [y^{(0)}(x)] &= X M_0 A \\ [y^{(0)}(a)] &= [1 \quad (a-c) \quad (a-c)^2 \quad \dots \quad (a-c)^N] M_0 A = [1 \quad h \quad h^2 \quad \dots \quad h^N] M_0 A = H M_0 A \\ [y^{(0)}(b)] &= [1 \quad (b-c) \quad (b-c)^2 \quad \dots \quad (b-c)^N] M_0 A = [1 \quad k \quad k^2 \quad \dots \quad k^N] M_0 A = K M_0 A \\ [y^{(0)}(c)] &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] M_0 A = I M_0 A \end{aligned}$$

olur. Burada anlaşıldığı üzere $h = a - c$ ve $k = b - c$ olarak tanımlanmış olup H, K, I matrisleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} H &= [1 \quad h \quad h^2 \quad \dots \quad h^N] \\ K &= [1 \quad k \quad k^2 \quad \dots \quad k^N] \\ I &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \end{aligned}$$

şeklindedir. $y(x)$ in türev fonksiyonlarında $x = a$, $x = b$, $x = c$ değerlerini yazarsak,

$$\begin{aligned} [y^{(j)}(a)] &= H M_j A \\ [y^{(j)}(b)] &= K M_j A \\ [y^{(j)}(c)] &= I M_j A \end{aligned} \quad (2.28)$$

bulunan matris denklemlerini (2.16) daki koşul denkleminde yerlerine yazarsak

$$\sum_{j=0}^{m-1} \{a_{i,j} H + b_{i,j} K + c_{i,j} I\} M_j A = [\lambda_i] \quad (2.29)$$

elde edilir ve buradan

$$U_i = \sum_{j=0}^{m-1} \{a_{i,j}H + b_{i,j}K + c_{i,j}I\}M_j = [u_{i0} \quad u_{i1} \quad u_{i2} \quad \cdots \quad u_{im-1}]$$

şeklinde yazılırsa $i=0,1,\dots,m-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} U_0A &= [\lambda_0] \\ U_1A &= [\lambda_1] \\ &\vdots \\ U_iA &= [\lambda_i] \end{aligned} \quad (2.30)$$

artırılmış matris formunda

$$\begin{aligned} U_i &= [U_i; \lambda_i] \\ &= [u_{i0} \quad u_{i1} \quad u_{i2} \quad \cdots \quad u_{im-1}; \lambda_i] \end{aligned} \quad (2.31)$$

olur.

(2.15) diferensiyel denkleminin koşullarına göre çözümünü bulmak için (2.17) de tanımlanan

$$\left\{ \sum_{k=0}^m P_k C M_k \right\} A = F \quad (2.32)$$

matris denkleminde

$$\left\{ \sum_{k=0}^m P_k C M_k \right\} = W \quad (2.33)$$

yazılırsa

$$WA = F \quad (2.34)$$

ifadesi bulunur. Burada W ve F ,

$$W = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olarak tanımlanır.

(2.34) matris denkleminin artırılmış matrisi,

$$\tilde{W} = [W; F] \quad (2.35)$$

olmak üzere,

$$\tilde{W} = [W; F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & f(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

m . mertebeden lineer diferensiyel denklem (2.34) matris denklem formuna ve sonra (2.35) artırılmış matris formuna dönüştürülür. Bu artırılmış matrisin son m satırı silinerek ve bu silinen satırların yerine koşullarla ilgili (2.32) de tanımlanan satır matrisleri yazılarak yeni artırılmış matris

$$\tilde{W}^* = [W^*; F^*] \quad (2.36)$$

Bulunur veya açık olarak ifade edilirse,

$$\tilde{W}^* = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & f(x_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bu artırılmış matris

$$W^* A = F^* \quad (2.37)$$

matris denkleminde dönüştürülür. Burada F^* , W^* ve A matrisleri

$$W^* = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} \end{bmatrix}, F^* = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{N-m}) \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) \\ y^{(1)}(c) \\ \vdots \\ y^{(N)}(c) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\text{rank} W^* = \text{rank}[W^*, F^*] = N + 1$ ise yani, $\det W^* \neq 0$ ise (2.37) matris denkleminin çözümü

$$A = W^{*-1} F^* \quad (2.38)$$

şeklinde olur. Böylece (2.38) den

$$A = [y^{(0)}(c) \quad y^{(1)}(c) \quad y^{(2)}(c) \quad \cdots \quad y^{(N)}(c)]$$

bulunur. Buradan (2.16) koşuluna göre (2.15) diferensiyel denklemi tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$[y(x)] = XM_0 A$$

şeklinindedir.

Yukarıda belirtilen matrisleri elle hesaplanması kolay olmadığı için temsili matrisleri Maple 12 Programı ile hesaplayan Maple procedürlerini ve bu procedürleri açıklamak için birer örnek gösterelim [17].

Prosedür 1

```
Mmatrix:= proc (N,m)
local i,j,k,f,M;
for k from 0 to 5 do
f[k]:= (i,j) -> piecewise(i=j-k,1/(i-1)!):
M[k]:=matrix(N,N,f[k]);
od:
eval(M[m]):
end:
```

Burada Mmatrix(Boyut,altindis); şeklinde çalışır.

Örnek

```
> M0:=Mmatrix(5,0);
```

$$M0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

Prosedür 2

```
Pmatrix:= proc (N,a,b,p)
local i,j,k,M,P,g,h;
with(linalg):
for k from 0 to N do
h[k]:=a+k*(b-a)/(N-1):od:
for k from 1 to N do
g[k]:= (i,j) -> piecewise(i=j,subs(x=h[i-1],p)):
P:=matrix(N,N,g[k]):od:
eval(P):end:
```

Burada Pmatrix(Boyut, $x_0,x_N,P(x)$ Polinomu); şeklinde çalışır.

Örnek

> P0:=Pmatrix(5,0,1,x);

$$P0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prosedür 3

```
Cmatrix:= proc (N,a,b)
local i,j,k,f,M,x,h,g;
with(linalg):
for k from 1 to N do
x[k]:=a+(k-1)*(b-a)/(N-1):od:
for k from 1 to N do
f[k]:= (i,j) -> simplify((x[k]-a)^(j-1)):
h[k]:= matrix(1,N,f[k]):
od:
g[1]:=h[1]:
for k from 1 to N-1 do
g[k+1]:=linalg[stackmatrix](g[k],h[k+1]):
od:
eval(g[N]):end:
```

Burada Cmatrix(Boyut, x_0,x_N); şeklinde çalışır.

Örnek

> C0:=Cmatrix(5,0,1);

$$C0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & \frac{27}{64} & \frac{81}{256} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Prosedür 4

```
Hmatrix:= proc (N,a,b)
local i,j,k,f,M,x,h,g;
f:=(i,j) -> simplify((b-a)^(j-1)):
h:= matrix(1,N,f):
eval(h):
end:
```

Burada Hmatrix(Boyut,x₀,a); şeklinde çalışır.

Örnek

```
> H:=Hmatrix(5,0,0); L:=Hmatrix(5,0,1/2);
```

$$H := [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad L := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Prosedür 5

```
Fmatrix:= proc (N,a,b,f)
local i,j,k,h,g,F;
for k from 1 to N do
h[k]:=a+(k-1)*(b-a)/(N-1):od:
for k from 1 to N do
g[k]:= (i,j) -> simplify(subs(x=h[i],f)):
F:=matrix(N,1,g[k]):
od:eval(F):end:
```

Burada Hmatrix(Boyut,x₀, x_N, f(x) fonksiyonu); şeklinde çalışır.

Örnek

```
> F:=Fmatrix(5,0,1,x^2);
```

$$F := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{9}{16} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prosedür 6

```

CHmatrix:= proc (N,a,b,c)
local i,j,k,f,M,x,h,g;
with(linalg):
for k from 1 to N do
x[k]:=a+(k-1)*(b-a)/(N-1):
od:
for k from 1 to N do
f[k]:= (i,j) -> simplify(((x[k]-c)^j-(a-
c)^j)/j):
h[k]:= matrix(1,N,f[k]):
od:
g[1]:=h[1]:
for k from 1 to N-1 do
g[k+1]:=linalg[stackmatrix](g[k],h[k+1]):
od:
eval(g[N]):
end:

```

Burada CHmatrix(Boyut,x₀,x,c); şeklinde çalışır. İntegral denklemlerinde oluşan CH matrisinin karşılığını verir.

Örnek

> H:=CHmatrix(5,0,1,0);

$$H := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{192} & \frac{1}{1024} & \frac{1}{5120} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{64} & \frac{1}{160} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{64} & \frac{81}{1024} & \frac{243}{5120} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Prosedür 7

```
Cevap:= proc (N,A:matrix)
local i,j,k,f,T,C;
f:=(i,j) -> x^(j-1)/(j-1)!:
T:=matrix(1,N+1,f);C:=multiply(T,A);eval(C):
end:
```

Burada Cevap(Boyut,A); şeklinde çalışır. Bulunan A matrisinin Taylor serisi halinde karşılığını hesaplar.

Örnek

> cevap:=Cevap(4,A);

$$cevap := \left[6 + x + \frac{241973}{481381}x^2 + \frac{74144}{481381}x^3 + \frac{88240}{1444143}x^4 \right]$$

Burada işimize yardımcı olacak maple komutlarını belirtelim.

> with(linalg):A:= matrix(3,3,[1,2,3,4,5,6,7,8,9]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

> delrows(A, 2..3);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A matrisinin 2. ve 3. satırını silmek için kullanıldı.

> delcols(A, 1..1);

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

A matrisinin bir sütununu silmek için kullanıldı.

> with(linalg):

A:= matrix(2,2,[1,2,3,4]): B:= matrix(2,2,[5,6,7,8]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

> stackmatrix(A,B);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

A ve B matrislerini alt alta eklemek için kullanıldı.

3.BÖLÜM

Bu bölümde yapılacak olan uygulamalar yukarıda bahsi geçen üç yöntemle de çözümlenip elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır ve bu problemlerin çözümünde [17] Maple 12 programı kullanılmıştır.

3.1. İntegral Denklemlerinin Çözümü

Örnek 3.1.1

$$y' = 1 + \int_0^x y(t)dt - 5x, \quad y(0) = 6 \quad (3.1)$$

denkleminin analitik çözümü $y(x) = e^x + 5$ şeklindedir. Şimdi bu problemi bahsettiğimiz yöntemlerle çözelim.

a) Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Örnek 3.1.1 e diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulandığında denklemin dönüşüm karşılığı

$$(k+1)Y(k+1) = \delta(k) + \frac{Y(k-1)}{k} - 5\delta(k-1)$$

şeklindedir. Buradan $k \geq 1$ için $\delta(k) = 0$ ve $k = 1$ için $\delta(k-1) = 1$ olacağından

$$Y(k+1) = \frac{Y(k-1)}{k(k+1)} - \frac{5\delta(k-1)}{(k+1)}$$

bulunur.

$y(0) = 6$ 'e karşılık $Y(0) = 6$ ve (3.1) eşitliğinden $y'(0) = 1$ bulunur ve buna karşılık $Y(1) = 1$ olur.

$Y(0)$ ve $Y(1)$ belli olduğundan yukarıda verilen rekürans bağıntısından $k=1,2,3,\dots$ yerine yazılırsa

$$k=1 \text{ için } Y(2) = \frac{1}{2!}$$

$$k=2 \text{ için } Y(3) = \frac{1}{3!}$$

$$k=3 \text{ için } Y(4) = \frac{1}{4!}$$

$$k=4 \text{ için } Y(5) = \frac{1}{5!}$$

$$k=5 \text{ için } Y(6) = \frac{1}{6!}$$

$$k=6 \text{ için } Y(7) = \frac{1}{7!}$$

⋮

olur. Bulunan bu değerler diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = Y(0) + Y(1) + Y(2) + \dots$$

$$y(x) = 6 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$y(x) = 5 + 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$y(x) = 5 + e^x$$

elde edilir.(3.1) eşitliğinin Maple kodlarıyla diferansiyel transform yöntemiyle çözümüne bakılırsa aşağıdaki komut dizini kullanılabilir.

```

y[0]:=6:y[1]:=1:# fonksiyon karşılığını hesaplamak için
for k from 0 to 10 do
f[k]:=coeftayl(-5*x,x=0,k);
od:
# transform karşılığı
for k from 1 to 10 do
y[k+1]:=(y[k-1]/k+f[k])/(k+1):
od:
#sonuç hesaplanıyor
t:=0:
for k from 0 to 9 do
t:=t+y[k]*x^k:
od:
print("DTM",t):print("Exact",convert(series(exp(x)+5,x=0,10),
),polynom));
"DTM", 6 + x + 1/2 x^2 + 1/6 x^3 + 1/24 x^4 + 1/120 x^5 + 1/720 x^6 + 1/5040 x^7 + 1/40320 x^8 + 1/362880 x^9
"Exact", 6 + x + 1/2 x^2 + 1/6 x^3 + 1/24 x^4 + 1/120 x^5 + 1/720 x^6 + 1/5040 x^7 + 1/40320 x^8 + 1/362880 x^9

```

b) Adomian Ayrışım Yöntemi

Örnek 3.1.1 in adomian ayrışım yöntemiyle rekürans karşılığı

$$\begin{cases} y_0 = 6 + \int_0^x (1-5x)dx, \\ y_{n+1} = \int_0^x \left(\int_0^x y_n dt \right) dx, n \geq 0 \end{cases}.$$

olur. Maple kodları ile çözüm yapılırsa

```

u[0]:=6+int(1-5*x,x):
for k from 0 to 5 do
u[k+1]:=int(int(u[k],x),x):
od:
t:=0:
for k from 0 to 5 do
t:=t+u[k]:
od:
print(t):

```

$$x + \frac{1}{2}x^2 + 6 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + \frac{1}{3628800}x^{10} + \frac{1}{39916800}x^{11} - \frac{1}{95800320}x^{12}$$

sonucuna ulaşılır.

c) Taylor Sıralama Yöntemi[14]

$y' = 1 + \int_0^x y(t)dt - 5x$, $y(0) = 6$ diferensiyel denklemini ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^4 \frac{y^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n, 0 \leq x, c \leq 1$$

sonlu $N=4$ dördüncü dereceli Taylor Polinomları cinsinden Taylor serisiyle yaklaşalım.

Taylor sıralama noktalarını, $N=4$ için

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

olarak alırsak

$P_1(x) = 1, P_0(x) = 0, f(x) = 1 - 5x$ olur. Bu fonksiyonların matris denklemi

$$\{P_1 C M_1 - C \bar{H} M_0\} A = F$$

olur. Koşul denklemleri oluşturulup

$$\tilde{U}_0 = [U_0; \lambda_0] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 6]$$

yazılırsa diferansiyel denklemin çözümü için A matrisi

$$A = W^{*-1} F^*$$

olur ve

$$A = [y^{(0)}(c) \ y^{(1)}(c) \ y^{(2)}(c) \ \dots \ y^{(N)}(c)]$$

şeklindedir. Buradan

$$[y(x)] = X M_0 A$$

için bulunan matris değerleri aşağıdaki gibidir.

```

P1:=Pmatrix(5,0,1,1);
PI := [1 0 0 0 0
        0 1 0 0 0
        0 0 1 0 0
        0 0 0 1 0
        0 0 0 0 1]

C:=Cmatrix(5,0,1);
C := [1 0 0 0 0
        1 1/4 1/16 1/64 1/256
        1 1/2 1/4 1/8 1/16
        1 3/4 9/16 27/64 81/256
        1 1 1 1 1]

M1:=Mmatrix(5,1);
MI := [0 1 0 0 0
        0 0 1 0 0
        0 0 0 1/2 0
        0 0 0 0 1/6
        0 0 0 0 0]

CH:=CHmatrix(5,0,1,0);

```

```

CH :=

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{192} & \frac{1}{1024} & \frac{1}{5120} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{64} & \frac{1}{160} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{64} & \frac{81}{1024} & \frac{243}{5120} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$


M0 := Mmatrix(5,0);

$$M0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$


F := Fmatrix(5,0,1,1-5*x);

$$F := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{11}{4} \\ -4 \end{bmatrix}$$


evalm(P1&*C&*M1);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{384} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{48} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{128} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$


> evalm(CH&*M0);

```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{384} & \frac{1}{6144} & \frac{1}{122880} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{1}{3840} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{128} & \frac{27}{2048} & \frac{81}{40960} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \end{bmatrix}$$

```
> A:=evalm(evalm(P1&*C&*M1)-evalm(CH&*M0));
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{31}{32} & \frac{95}{384} & \frac{191}{6144} & \frac{319}{122880} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{23}{48} & \frac{47}{384} & \frac{79}{3840} \\ -\frac{3}{4} & \frac{23}{32} & \frac{87}{128} & \frac{549}{2048} & \frac{2799}{40960} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{11}{24} & \frac{19}{120} \end{bmatrix}$$

```
> delrows(A, 5..5);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{31}{32} & \frac{95}{384} & \frac{191}{6144} & \frac{319}{122880} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{23}{48} & \frac{47}{384} & \frac{79}{3840} \\ -\frac{3}{4} & \frac{23}{32} & \frac{87}{128} & \frac{549}{2048} & \frac{2799}{40960} \end{bmatrix}$$

```
> h1:=Hmatrix(5,0,0);
```

$$h1 := [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

```
> evalm(h1&*M0);
```

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

```
> delrows(F, 5..5);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

```
> W:=stackmatrix(delrows(A, 5..5),evalm(h1&*M0));
```

```

W := 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{31}{4} & \frac{95}{32} & \frac{191}{6144} & \frac{319}{122880} \\ -1 & \frac{7}{2} & \frac{23}{8} & \frac{47}{48} & \frac{79}{3840} \\ -3 & \frac{23}{4} & \frac{87}{32} & \frac{549}{2048} & \frac{2799}{40960} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

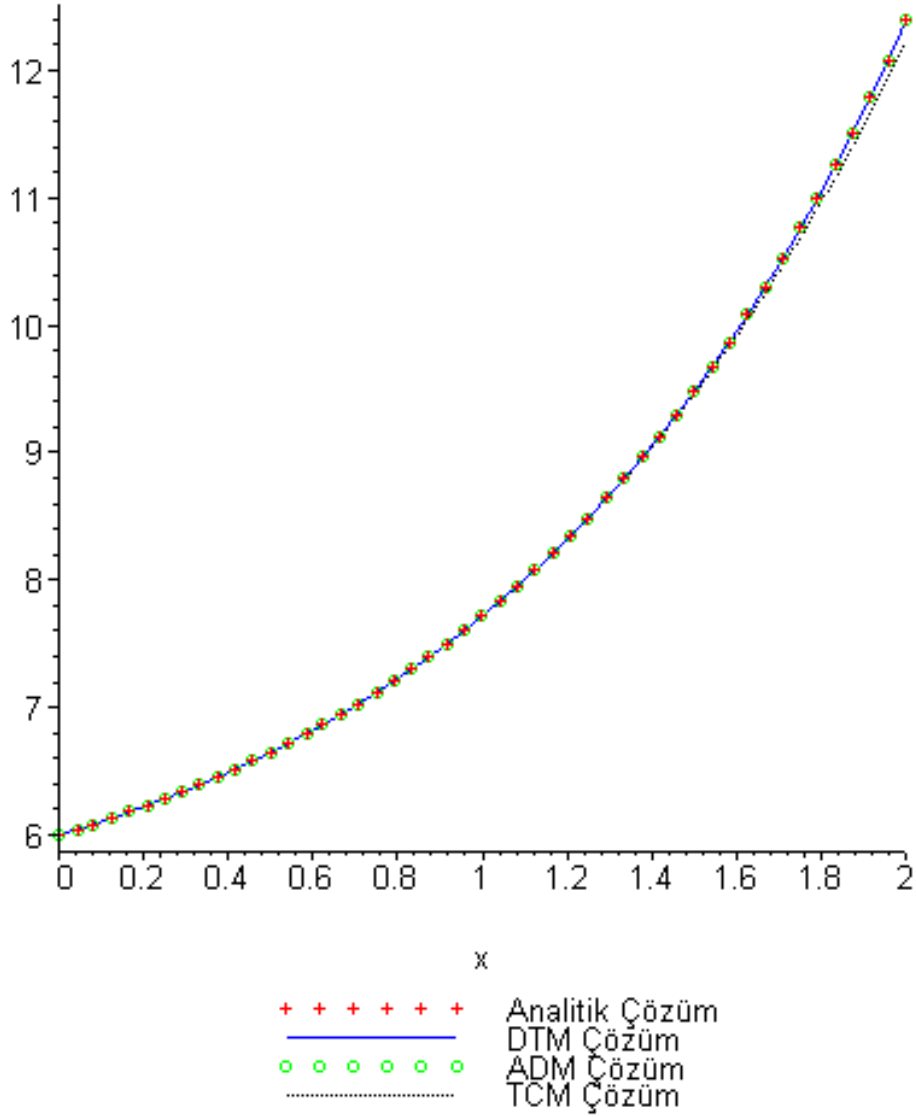
> f:=stackmatrix(delrows(F, 5..5),[6]);
f := 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \\ \frac{2}{2} \\ -11 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

> p:=linsolve(b,f);
p := 
$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ \frac{483946}{481381} \\ \frac{444864}{481381} \\ \frac{705920}{481381} \end{bmatrix}$$

> cevap:=Cevap(4,p);
cevap := 
$$\left[ 6 + x + \frac{241973}{481381}x^2 + \frac{74144}{481381}x^3 + \frac{88240}{1444143}x^4 \right]$$

> y(x) := 6+x+241973/481381*x^2+74144/481381*x^3+88240/1444143*x^4;
y(x) := 
$$6 + x + \frac{241973}{481381}x^2 + \frac{74144}{481381}x^3 + \frac{88240}{1444143}x^4$$


```



Şekil 3.1.1

Örnek 3.1.1'in gerçek çözüm ve verilen üç yöntemle bulunan çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 3.1.1'de verilmiştir. Burada, DTM çözümünde on adımda, ADM çözümünde altı adımda ve TCM çözümünde ise beş noktada çözüme gidilmiştir. TCM çözümünün diğer çözümlerden belli bir noktadan sonra ayrılması bu sebeptendir.

Örnek 3.1.2

$$y''(x) = \int_0^x y(t)dt + 3x - \cos(x) - \sin(x), \quad y(0) = -2, y'(0) = 0 \quad (3.2)$$

denkleminin analitik çözümü $y(x) = \cos x - 3$

a) Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Burada $f(x) = 3x - \cos(x) - \sin(x)$ olarak kabul edilsin ve $f(x)$ 'in diferensiyel dönüşüm yöntemine göre karşılığı $F(k)$ için (3.2) eşitliği,

$$(k+2)(k+1)Y(k+2) = \frac{Y(k-1)}{k} + F(k)$$

$$Y(k+2) = \frac{Y(k-1)}{(k+2)(k+1)k} + \frac{F(k)}{(k+2)(k+1)}$$

olur. Buradan $y(0) = -2$ 'ye karşılık $Y(0) = -2$ ve (3.2) eşitliğinden $y'(0) = 0$ bulunur ve buna karşılık $Y(1) = 0$ olur (3.2) denkleminin Maple kodlarıyla çözümü

```

y[0]:=-2:y[1]:=0:y[2]:=-1/2:
# fonksiyon karşılığı
for k from 0 to 10 do
f[k]:=coeftayl(3*x-cos(x)-sin(x),x=0,k);od:
# transform karşılığı
for k from 1 to 10 do
y[k+2]:=(y[k-1]/k+f[k])/(k+1)/(k+2):od:
#sonuc hesaplanıyor
t:=0:for k from 0 to 10 do
t:=t+y[k]*x^k:od:
print("DTM",t):print("Exact",convert(series(cos(x)-
3,x=0,12),polynom));
"DTM", -2 - 1/2 x^2 + 1/24 x^4 - 1/720 x^6 + 1/40320 x^8 - 1/3628800 x^10
"Exact", -2 - 1/2 x^2 + 1/24 x^4 - 1/720 x^6 + 1/40320 x^8 - 1/3628800 x^10

```

olur.

b) Adomian Ayrışım Yöntemi

Örnek 3.1.2 in adomian ayrışım yöntemiyle rekürans bağıntısı

$$\begin{cases} y_0 = -2 + \int_0^x \left(\int_0^x (3x - \cos(x) - \sin(x)) dx \right) dx, \\ y_{n+1} = \int_0^x \left(\int_0^x y_n dx \right) dx, n \geq 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Maple kodları ile çözüm yapılırsa

```
> u[0]:=-2+int(int(3*x-cos(x)-sin(x),x=0..x),x=0..x):
for k from 0 to 7 do
u[k+1]:=int(int(int(u[k],x=0..x),x=0..x),x=0..x):
od:
t:=0:
for k from 0 to 7 do
t:=t+u[k]:
od:
print(t):
```

$$\begin{aligned}
 & -2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{1124000727777607680000}x^{22} - \frac{1}{6402373705728000}x^{18} + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \\
 & + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{2432902008176640000}x^{20} - \frac{1}{3628800}x^{10} \\
 & + \frac{1}{206816133911079813120000}x^{24} + \frac{1}{479001600}x^{12} - \frac{1}{87178291200}x^{14} \\
 & + \frac{1}{20922789888000}x^{16}
 \end{aligned}$$

c) Taylor Sıralama Yöntemi[14]

$$A = W^{*-1}F^*$$

olur ve

$$A = [y^{(0)}(c) \quad y^{(1)}(c) \quad y^{(2)}(c) \quad \dots \quad y^{(N)}(c)]^T$$

şeklindedir. Buradan

$$[y(x)] = XM_0A$$

şeklinde olacağından Maple programı [17] yardımıyla matris ifadeleri ve problemin çözümünün gerçek çözüm ile karşılaştırıldığı grafik aşağıda verilmiştir.

```
> P1:=Pmatrix(5,0,1,1);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> C:=Cmatrix(5,0,1);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & \frac{27}{64} & \frac{81}{256} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **M2:=Mmatrix(5,2);**

$$M2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **M1:=Mmatrix(5,1);**

$$M1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **CH:=CHmatrix(5,0,1,0);**

$$CH := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{192} & \frac{1}{1024} & \frac{1}{5120} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{64} & \frac{1}{160} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{64} & \frac{81}{1024} & \frac{243}{5120} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

> **M0:=Mmatrix(5,0);**

$$M0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

```
> F:=Fmatrix(5,0,1,3.*x-cos(x)-sin(x));
```

$$F := \begin{bmatrix} -1 \\ -0.4663163810 \\ 0.1429918995 \\ 0.8366723710 \\ 1.618226709 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(P1*C*M2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{32} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> evalm(CH*M0);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{384} & \frac{1}{6144} & \frac{1}{122880} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{1}{3840} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{128} & \frac{27}{2048} & \frac{81}{40960} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \end{bmatrix}$$

```
> A:=evalm(evalm(P1*C*M2)-evalm(CH*M0));
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{32} & \frac{383}{384} & \frac{1535}{6144} & \frac{3839}{122880} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{47}{48} & \frac{191}{384} & \frac{479}{3840} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{9}{32} & \frac{119}{128} & \frac{1509}{2048} & \frac{11439}{40960} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{23}{24} & \frac{59}{120} \end{bmatrix}$$

```
> delrows(A, 4..5);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{32} & \frac{383}{384} & \frac{1535}{6144} & \frac{3839}{122880} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{47}{48} & \frac{191}{384} & \frac{479}{3840} \end{bmatrix}$$

```

> h1:=Hmatrix(5,0,0);
                                h1 := [1  0  0  0  0]

> evalm(h1*M0);
                                [1  0  0  0  0]

> evalm(h1*M1);
                                [0  1  0  0  0]

> delrows(F, 4..5);
                                [  -1
                                [-0.4663163810
                                [0.1429918995]

> W:=stackmatrix(delrows(A, 4..5),evalm(h1*M0),evalm(h1*M1));
                                [0  0  1  0  0]
                                [-1 -1 383 1535 3839]
                                [4  32 384 6144 122880]
W := [ -1 -1 47 191 479
      [ 2  8 48 384 3840
      [ 1  0  0  0  0
      [ 0  1  0  0  0]

> f:=stackmatrix(delrows(F, 4..5),[-2],[0]);
                                [  -1
                                [-0.4663163810
                                [0.1429918995
                                [  -2
                                [  0]

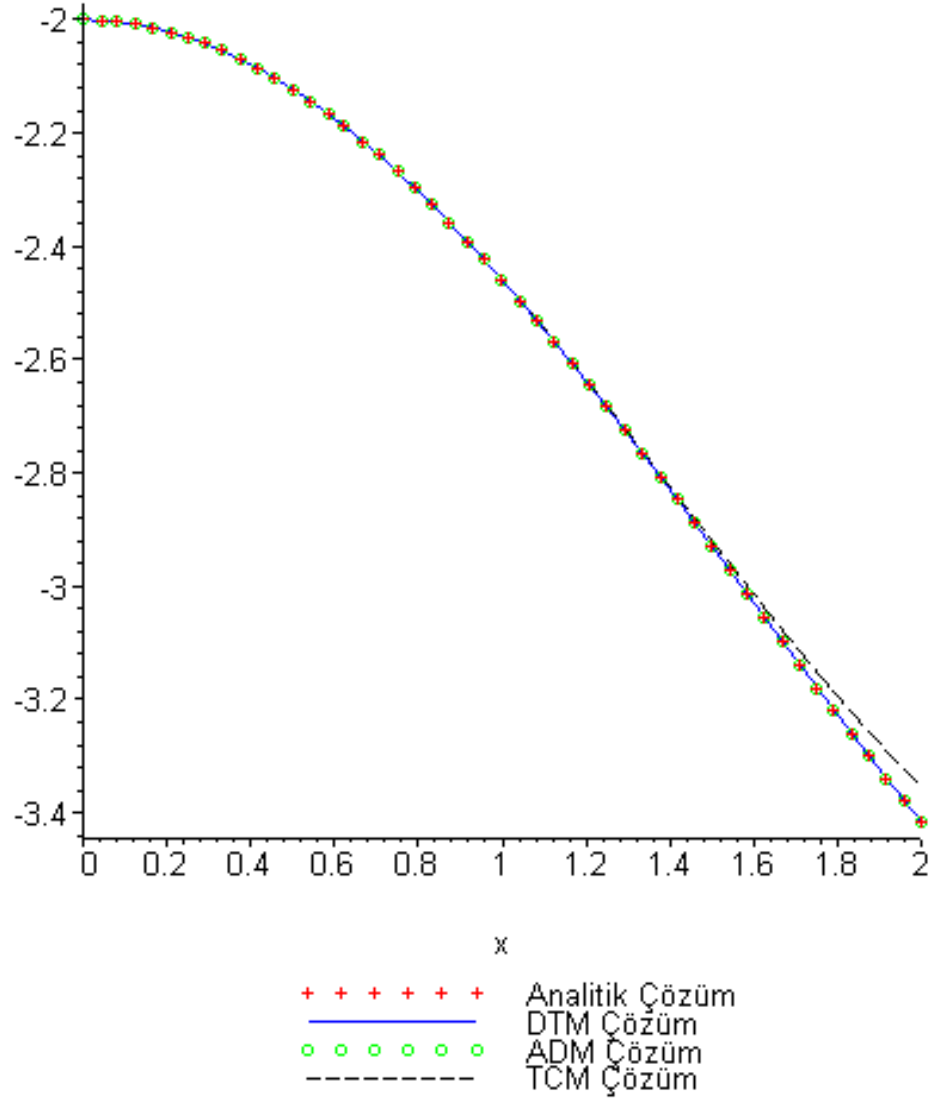
> p:=linsolve(W,f);
                                [  -2.
                                [  0.
                                [  -1.
                                [0.003864114069
                                [0.9639007024]

> cevap:=Cevap(4,p);
                                cevap := [-2. - 0.5000000000 x2 + 0.0006440190115 x3 + 0.04016252927 x4]

> y(x):=-2.-.5000000000*x^2+.6440190115e-3*x^3+.4016252927e-
1*x^4;
                                y(x) := -2. - 0.5000000000 x2 + 0.0006440190115 x3 + 0.04016252927 x4

> plot([-2.-.5000000000*x^2+.6440190115e-3*x^3+.4016252927e-
1*x^4,cos(x)-3],x=0..2,color=[red,blue],style=[point,line]);

```



Şekil 3.1.2

Örnek 3.1.2'in gerçek çözüm ve verilen üç yöntemle bulunan çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 3.1.2'de verilmiştir. Burada, DTM çözümünde on adımda, ADM çözümünde sekiz adımda ve TCM çözümünde ise beş noktada çözüme gidilmiştir. TCM çözümünün diğer çözümlerden belli bir noktadan sonra ayrılması bu sebeptendir.

Örnek 3.1.3

$$y''(x) + y'(x)\left(x - \frac{3}{2}\right) + y(x)\left(\frac{x}{3} - 2\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{13}{2} + \int_0^x y(t)dt, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$$

göz önüne alalım. Bu problemin analitik çözümü $y(x) = x^2 - 3x$ şeklindedir.

a) Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

$$y''(x) + y'(x)\left(x - \frac{3}{2}\right) + y(x)\left(\frac{x}{3} - 2\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{13}{2} + \int_0^x y(t)dt \quad (3.3)$$

olsun denklemde $G(k) = x - \frac{3}{2}$, $H(k) = \frac{x}{3} - 2$, $M(k) = \frac{x^2}{2} + \frac{13}{2}$ alınırsa

$$Y(k+2) = -\frac{M(k) + Y(k-1)/k - \sum_{r=0}^k Y(r)H(k-r) - \sum_{r=0}^k (r+1)Y(r+1)G(k-r)}{(k+1)(k+2)}$$

olur. Buradan $y(0) = 0$ 'a karşılık $Y(0) = 0$, $y'(0) = -3$ 'e karşılık $Y(1) = -3$ ve (3.3) eşitliğinden $y''(0) = 2$ bulunur ve buna karşılık $Y(2) = 2$ olur (3.3) denkleminin Maple kodlarıyla çözümü ise

```

Y[0]:=0:Y[1]:=-3:Y[2]:=1:
# fonksiyon karşılığı
for k from 0 to 10 do
G[k]:=coeftayl(x-3/2,x=0,k);
H[k]:=coeftayl(x/3-2,x=0,k);
M[k]:=coeftayl(x^2/2+13/2,x=0,k);
od:
# transform karşılığı
for k from 1 to 10 do
Y[k+2]:=- (M[k]+Y[k-1]/k-sum(Y[r]*H[k-r],r=0..k)-
sum((r+1)*Y[r+1]*G[k-r],r=0..k))/(k+1)/(k+2):
od:
#sonuc hesaplanıyor
t:=0:
for k from 0 to 10 do
t:=t+Y[k]*x^k:
od:
print("DTM",t):print("Exact",convert(series(x^2-
3*x,x=0,12),polynom));
"DTM", -3 x + x^2
"Exact", -3 x + x^2

```

olur.

b) Adomian Ayrışım Yöntemi

Örnek 3.1.3 in adomian ayrışım yöntemiyle rekürans karşılığı

$$\begin{cases} y_0 = -3x + \int_0^x \left(\int_0^x (x^2 + 13)/2 dx \right) dx, \\ y_{n+1} = \int_0^x \int_0^x \left(\int_0^x y_n dx \right) + (2 - x/3)y_n + (3/2 - x)y'_n dx dx, n \geq 0 \end{cases}$$

şeklindeir. Denklemin Maple kodları ile çözümü yapılırsa

```

u[0]:=-3*x+(int(int((x^2+13)/2,x=0..x),x=0..x)):
for k from 0 to 7 do
u[k+1]:=int(int(
int(u[k],x=0..x)+(2-x/3)*u[k]+(3/2-x)*diff(u[k],x),x=0..x),x=0..x):
od:
t:=0:
for k from 0 to 7 do
t:=t+u[k]:
od:
print(t):
plot([t,x^2-3*x],x=0..2,color=[red,blue],style=[point,line]);

```

$$\begin{aligned}
& -3x + \frac{243}{1146880}x^9 + x^2 - \frac{1621}{185420308959535104000}x^{23} - \frac{243}{819200}x^{10} + \frac{63}{9011200}x^{13} \\
& - \frac{7}{23429120}x^{14} - \frac{8563}{6758061133824000}x^{19} + \frac{278011}{632333205504000}x^{17} \\
& - \frac{14789959}{21896118073589760000}x^{20} + \frac{27}{157696}x^{11} - \frac{9}{180224}x^{12} - \frac{4793}{516612096000}x^{16} \\
& - \frac{1}{8098504670732636160000}x^{25} - \frac{21011}{403845432913867456512000}x^{24} \\
& - \frac{22899367}{689727719318077440000}x^{21} + \frac{1}{96096000}x^{15} - \frac{1249}{1677798521118720000}x^{22} \\
& + \frac{6426683}{51218989645824000}x^{18}
\end{aligned}$$

bulunur.

c) Taylor Sıralama yöntemi[14]

$$A = W^{*-1}F^*$$

olur ve

$$A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) & y^{(1)}(c) & y^{(2)}(c) & \cdots & y^{(N)}(c) \end{bmatrix}$$

olmak üzere buradan

$$[y(x)] = XM_0A$$

şeklindedir. Bu çözümde kullanılan matris değerleri ve çözümün grafiği

```
> P1:=Pmatrix(5,0,1,x-3/2);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> P0:=Pmatrix(5,0,1,x/3-2);
```

$$P0 := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{23}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

```
> C:=Cmatrix(5,0,1);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & \frac{27}{64} & \frac{81}{256} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> M2:=Mmatrix(5,2);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `M1:=Mmatrix(5,1);`

$$M1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `CH:=CHmatrix(5,0,1,0);`

$$CH := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{192} & \frac{1}{1024} & \frac{1}{5120} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{64} & \frac{1}{160} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{64} & \frac{81}{1024} & \frac{243}{5120} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

> `M0:=Mmatrix(5,0);`

$$M0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

> `F:=Fmatrix(5,0,1,(x^2+13.)/2);`

$$F := \begin{bmatrix} 6.500000000 \\ 6.531250000 \\ 6.625000000 \\ 6.781250000 \\ 7. \end{bmatrix}$$

> `with(linalg):`

> `evalm(P1*C*M2);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{16} & \frac{-5}{128} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-9}{16} & \frac{-27}{128} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

> `evalm(CH&*M0);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{384} & \frac{1}{6144} & \frac{1}{122880} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{1}{3840} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{128} & \frac{27}{2048} & \frac{81}{40960} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \end{bmatrix}$$

> `A:=evalm(evalm(C&*M2)+evalm(P1&*C&*M1)+evalm(P0&*C&*M0)-evalm(CH&*M0));`

$$A := \begin{bmatrix} -2 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-13}{6} & \frac{-169}{96} & \frac{5}{8} & \frac{3793}{18432} & \frac{5101}{184320} \\ \frac{-7}{3} & \frac{-49}{24} & \frac{1}{4} & \frac{385}{1152} & \frac{571}{5760} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-75}{32} & \frac{-1}{8} & \frac{825}{2048} & \frac{4167}{20480} \\ \frac{-8}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{31}{72} & \frac{61}{180} \end{bmatrix}$$

> `delrows(A, 4..5);`

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-13}{6} & \frac{-169}{96} & \frac{5}{8} & \frac{3793}{18432} & \frac{5101}{184320} \\ \frac{-7}{3} & \frac{-49}{24} & \frac{1}{4} & \frac{385}{1152} & \frac{571}{5760} \end{bmatrix}$$

> `h1:=Hmatrix(5,0,0);`

$$h1 := [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

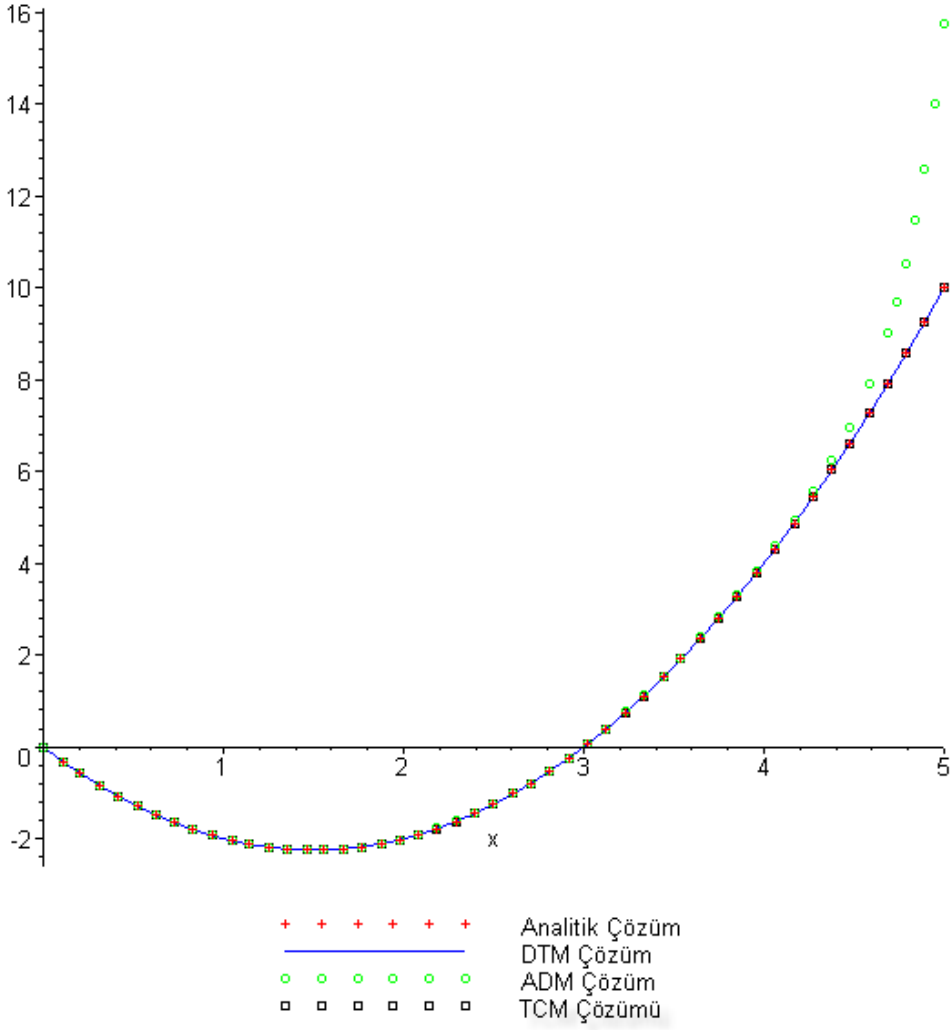
> `evalm(h1&*M0);`

```

[1 0 0 0 0]
> evalm(h1&*M1);
[0 1 0 0 0]
> delrows(F, 4..5);
[6.500000000]
[6.531250000]
[6.625000000]
> W:=stackmatrix(delrows(A, 4..5),evalm(h1&*M0),evalm(h1&*M1));
W := [ -2  -3/2  1  0  0
      -13/6 -169/96 5/8 3793/18432 5101/184320
      -7/3  -49/24 1/4 385/1152 571/5760
      1  0  0  0  0
      0  1  0  0  0 ]
> f:=stackmatrix(delrows(F, 4..5),[0],[ -3]);
f := [6.500000000]
[6.531250000]
[6.625000000]
[0]
[-3]
> p:=linsolve(W,f);
p := [0.]
[-3.]
[2.]
[-0.6408268544 10^-8]
[0.1151649203 10^-7]
> cevap:=Cevap(4,p);
cevap := [-3. x + 1.000000000 x^2 - 0.1068044757 10^-8 x^3 + 0.4798538346 10^-9 x^4]
> y(x) := -3.*x+1.000000000*x^2-.1068044757e-8*x^3+.4798538346e-9*x^4;
y(x) := -3. x + 1.000000000 x^2 - 0.1068044757 10^-8 x^3 + 0.4798538346 10^-9 x^4
plot([-3.*x+1.000000000*x^2-.1068044757e-8*x^3+.4798538346e-9*x^4,x^2-3*x],x=0..2,color=[red,blue],style=[point,line]);

```

şeklinde bulunur. Bulunan çözümlerin gerçek çözümlerle karşılaştırıldığı grafik çizilirse;



Şekil 3.1.3.

Şekil 3.1.3.'de, DTM çözümünde on adımda, ADM çözümünde sekiz adımda ve TCM çözümünde ise beş noktada çözüme gidilmiştir. ADM çözümünün diğer çözümlerden belli bir noktadan sonra ayrılması bu sebeptendir.

3.2 Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemler

Örnek 3.2.1

$$y'' - \frac{\sin x}{\cos x} y' = -2 \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (3.4)$$

denkleminin analitik çözümü $y(x) = \sin x$ olduğundan bu örneği bahsi geçen yöntemlerle çözelim.

a) Diferensiyel dönüşüm yöntemi

(3.4) denklemde $G(k) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $M(k) = -2 \sin(x)$ olarak alınırsa

$$Y(k+2) = \frac{\sum_{r=0}^k G(k-r)(r+1)Y(r+1) + M(k)}{(k+1)(k+2)}$$

olur. Buradan $y(0) = 0$ 'a karşılık $Y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 'e karşılık $Y(1) = 1$ ve (3.4) denkleminin Maple kodlarıyla çözümü

```

Y[0]:=0:Y[1]:=1:
# fonksiyon karşılığı
for k from 0 to 10 do
G[k]:=coeftayl(sin(x)/cos(x),x=0,k);
M[k]:=coeftayl(-2*sin(x),x=0,k);
od:
# transform karşılığı
for k from 0 to 10 do
Y[k+2]:=(sum(G[k-
r]*Y[r+1]*(r+1),r=0..k)+M[k])/(k+2)!*k!:
od:
#sonuc hesaplanıyor
t:=0:
for k from 0 to 10 do
t:=t+Y[k]*x^k:
od:
print("DTM",t):print("Exact",convert(series(sin(x),x=0
,10),polynom));
"DTM", x - 1/6 x^3 + 1/120 x^5 - 1/5040 x^7 + 1/362880 x^9
"Exact", x - 1/6 x^3 + 1/120 x^5 - 1/5040 x^7 + 1/362880 x^9

```

b) Adomian Ayrışım Yöntemi

$L(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot)$ seçilirse

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

olur. (3.4) denklemi operatör formunda yazılırsa

$$Ly = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} y' - 2 \sin(x)$$

bulunur ve eşitliğin her iki tarafı L^{-1} operatörü ile çarpılırsa

$$y = y(0) + xy'(0) + L^{-1}(-2 \sin(x)) + L^{-1}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} y'\right)$$

elde edilir. Buradan

$$y_0 = y(0) + xy'(0) + L^{-1}(-2 \sin(x))$$

$$y_{n+1} = L^{-1} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} y'_n, \quad n \geq 0$$

```

u[0]:=x+(int(int(-2*sin(x),x=0..x),x=0..x)):
for k from 0 to 0 do
u[k+1]:=int(int(sin(x)/cos(x)*diff(u[k],x),x=0..x),x=0..x):
print(u[k+1]):od:t:=0:
for k from 0 to 1 do
t:=t+u[k]:od:
print(t):

```

$$\int_0^x \ln(\sin(x)) + \frac{1}{2} I \pi + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\sin(x)^2}\right) + \frac{1}{2} \ln((\sin(x) - 1)(\sin(x) + 1)) - 2 I \operatorname{signum}(\sin(x)) \sqrt{\sin(x)^2 - 1} + 2 dx$$

$$-x + 2 \sin(x) + \int_0^x \ln(\sin(x)) + \frac{1}{2} I \pi + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\sin(x)^2}\right) + \frac{1}{2} \ln((\sin(x) - 1)(\sin(x) + 1)) - 2 I \operatorname{signum}(\sin(x)) \sqrt{\sin(x)^2 - 1} + 2 dx$$

Burada hesaplanamayan integraller geldiği için bu örnek Adomian Ayırışım Yöntemi ile hesaplanamaz. Adomian Ayırışım Yönteminin diğer yöntemlere göre dezavantajı alınamayan integrallerin gelmesidir.

c) Taylor Sıralama yöntemi

$$y'' - \frac{\sin x}{\cos x} y' = -2 \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \text{ diferensiyel denklemini ve } y(x) \text{ çözümüne}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^4 \frac{y^n(c)}{n!} (x-c)^n, 0 \leq x, c \leq 1$$

sonlu $N=4$ dördüncü dereceli Taylor Polinomları cinsinden Taylor serisiyle yaklaşalım.

Taylor sıralama noktalarını, $N=4$ için

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

olarak alalım

$$P_1(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}, P_2(x) = 1, f(x) = -2\sin(x) \text{ olur. Bu fonksiyonların matris denklemi}$$

$$\{P_2CM_2 + P_1CM_1\}A = F$$

olur. Koşul denklemleri oluşturulursa

$$\tilde{U}_0 = [U_0; \lambda_0] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0]$$

$$\tilde{U}_1 = [U_1; \lambda_1] = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 1]$$

```
P1:=Pmatrix(5,0,1,sin(x)/cos(x));
```

$$P1 := \begin{bmatrix} 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2553419213 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5463024898 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9315964599 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.557407725 \end{bmatrix}$$

```
C:=Cmatrix(5,0,1);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & \frac{27}{64} & \frac{81}{256} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
M2:=Mmatrix(5,2);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
M1:=Mmatrix(5,1);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M0:=Mmatrix(5,0);

$$M0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

F:=Fmatrix(5,0,1,-2*sin(x));

$$F := \begin{bmatrix} 0. \\ -0.4948079186 \\ -0.9588510772 \\ -1.363277520 \\ -1.682941970 \end{bmatrix}$$

with(linalg):

evalm(P1*C*M1);

$$\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.2553419213 & 0.06383548032 & 0.007979435040 & 0.0006649529200 \\ 0. & 0.5463024898 & 0.2731512449 & 0.06828781120 & 0.01138130187 \\ 0. & 0.9315964599 & 0.6986973449 & 0.2620115044 & 0.06550287608 \\ 0. & 1.557407725 & 1.557407725 & 0.7787038625 & 0.2595679542 \end{bmatrix}$$

evalm(C*M2);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{32} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
A:=evalm(evalm(C&*M2)-evalm(P1&*C&*M1));
```

$$A := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & -0.2553419213 & 0.9361645197 & 0.2420205650 & 0.03058504708 \\ 0. & -0.5463024898 & 0.7268487551 & 0.4317121888 & 0.1136186981 \\ 0. & -0.9315964599 & 0.3013026551 & 0.4879884956 & 0.2157471239 \\ 0. & -1.557407725 & -0.557407725 & 0.2212961375 & 0.2404320458 \end{bmatrix}$$

```
delrows(A, 4..5);
```

$$\begin{bmatrix} 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & -0.2553419213 & 0.9361645197 & 0.2420205650 & 0.03058504708 \\ 0. & -0.5463024898 & 0.7268487551 & 0.4317121888 & 0.1136186981 \end{bmatrix}$$

```
h1:=Hmatrix(5,0,0);
```

$$h1 := [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

```
evalm(h1&*M0);
```

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

```
evalm(h1&*M1);
```

$$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

```
delrows(F, 4..5);
```

$$\begin{bmatrix} 0. \\ -0.4948079186 \\ -0.9588510772 \end{bmatrix}$$

```
W:=stackmatrix(delrows(A,4..5),evalm(h1&*M0),evalm(h1&*M1));
```

$$W := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & -0.2553419213 & 0.9361645197 & 0.2420205650 & 0.03058504708 \\ 0. & -0.5463024898 & 0.7268487551 & 0.4317121888 & 0.1136186981 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
f:=stackmatrix(delrows(F, 4..5),[0],[1]);
```

$$f := \begin{bmatrix} 0. \\ -0.4948079186 \\ -0.9588510772 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
p:=linsolve(W,f);
```

```

p := [
    0.
    1
    0.
    -1.020698925
    0.2473147464
]

cevap:=Cevap(4,p);

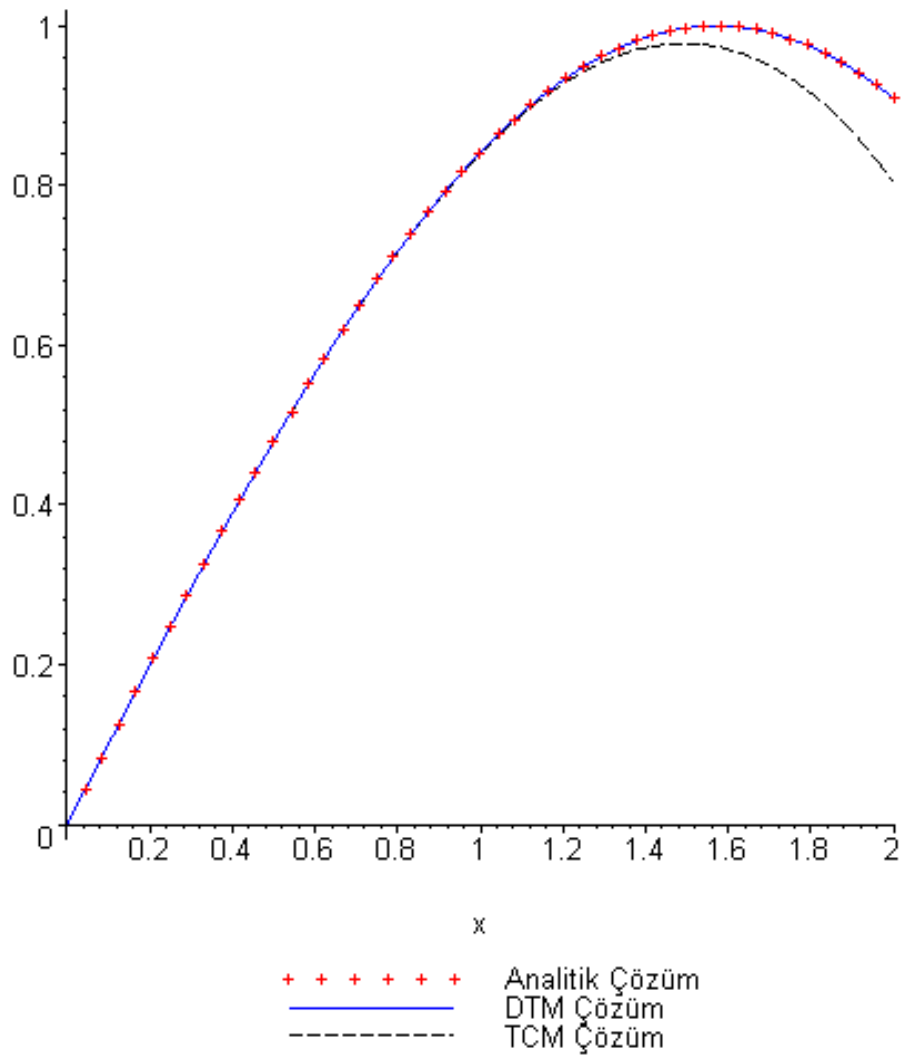
cevap := [x - 0.1701164875 x^3 + 0.01030478110 x^4]

y(x) := x - .1701164875*x^3 + .1030478110e-1*x^4;

y(x) := x - 0.1701164875 x^3 + 0.01030478110 x^4

```

şeklinde bulunur.



Şekil 3.2.1

Örnek 3.2.1'in gerçek çözüm ve verilen üç yöntemle bulunan çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 3.2.1'de verilmiştir. Burada, DTM çözümünde on bir adımda, ADM çözümünde bir adımda ve TCM çözümünde ise beş noktada çözüme gidilmiştir. TCM çözümünün diğer çözümlerden belli bir noktadan sonra ayrılması bu sebeptendir.

Örnek 3.2.2.

$$y'' + y' = 2x + 2, y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (3.5)$$

denkleminin analitik çözümü $y(x) = x^2$ dir.

a) Diferensiyel dönüşüm yöntemi

Burada $f(x) = 2x + 2$ olarak kabul edilsin ve $f(x)$ 'in diferensiyel dönüşüm yöntemine göre karşılığı $f(k)$ için (3.5) eşitliği,

$$Y(k+2) = \frac{f(k) - (k+1)Y(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

olur.

Buradan $y(0) = 0$ 'a karşılık $Y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ 'e karşılık $Y(1) = 0$ ve (3.5) eşitliğinden $y''(0) = 1$ bulunur ve buna karşılık $Y(2) = 1$ olur. (3.5) eşitliğinin Maple kodlarıyla çözümü

```

Y[0]:=0:Y[1]:=0:Y[2]:=1:
# fonksiyon karşılığı
for k from 0 to 10 do
f[k]:=coeftayl(2*x+2,x=0,k);od:
# transform karşılığı
for k from 1 to 10 do
Y[k+2]:=(f[k]-Y[k+1]*(k+1))/(k+1)/(k+2):od:
#sonuc hesaplanıyor
t:=0:
for k from 0 to 10 do
t:=t+Y[k]*x^k:od:
print("DTM",t):print("Exact",convert(series(x
^2,x=0,10),polynom));
"DTM", x^2
"Exact", x^2

```

b) Adomian Ayrışım Yöntemi [12]

$L(.) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot)$ seçilirse buradan

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

olur. (3.5) eşitliği operator formunda yazılırsa

$$Ly = -y' + 2x + 2$$

bulunur ve eşitliğin her iki tarafı L^{-1} operatorü ile çarpılırsa

$$y = y(0) + xy'(0) - L^{-1}(y') + L^{-1}(2x + 2)$$

elde edilir. Buradan

$$y_0 = y(0) + xy'(0) + L^{-1}(2x + 2)$$

$$y_{n+1} = -L^{-1}y'_n, \quad n \geq 0$$

olup

```

u[0]:= (int(int(2*x+2,x=0..x),x=0..x)):
for k from 0 to 10 do
u[k+1]:=-int(int(diff(u[k],x),x=0..x),x=0..x):
od:t:=0:
for k from 0 to 10 do
t:=t+u[k]:od:
print(t):

```

$$x^2 + \frac{1}{3113510400} x^{13}$$

elde edilir.

c) Taylor Sıralama yöntemi

$$y'' + y' = 2x + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^4 \frac{y^n(c)}{n!} (x-c)^n, \quad 0 \leq x, c \leq 1$$

sonlu $N=4$ dördüncü dereceli Taylor Polinomları cinsinden Taylor serisiyle yaklaşalım.

Taylor sıralama noktalarını, $N=4$ için

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

olarak alalım. Böylece $P_1(x) = 1, P_2(x) = 1, f(x) = 2x + 2$ olur. Bu fonksiyonların matris denklemini

$$\{P_2CM_2 + P_1CM_1\}A = F$$

olur. Koşul denklemleri oluşturulursa

$$\tilde{U}_0 = [U_0; \lambda_0] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0]$$

$$\tilde{U}_1 = [U_1; \lambda_1] = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0]$$

bulunur. Maple kodlarıyla çözümü yapılırsa

```
P1:=Pmatrix(5,0,1,1);
P2:=Pmatrix(5,0,1,1);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> C:=Cmatrix(5,0,1);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & \frac{27}{64} & \frac{81}{256} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> M1:=Mmatrix(5,1);
M2:=Mmatrix(5,2);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```

```
> M0:=Mmatrix(5,0);
```

$$M0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

> `F:=Fmatrix(5,0,1,2*x+2);`

$$F := \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 3 \\ \frac{7}{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

> `with(linalg);`

> `evalm(P1*C*M1);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{384} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{48} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{32} & \frac{9}{128} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

> `evalm(P2*C*M2);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{32} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> A:=evalm(evalm(P1*C*M1)+evalm(P2*C*M2));
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{9}{32} & \frac{13}{384} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{8} & \frac{7}{48} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & \frac{33}{32} & \frac{45}{128} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
> delrows(A, 5..5);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{31}{4} & \frac{95}{32} & \frac{191}{6144} & \frac{319}{122880} \\ -1 & \frac{7}{2} & \frac{23}{8} & \frac{47}{384} & \frac{79}{3840} \\ -3 & \frac{23}{4} & \frac{87}{128} & \frac{549}{2048} & \frac{2799}{40960} \end{bmatrix}$$

```
> h1:=Hmatrix(5,0,0);
```

$$h1 := [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

```
> evalm(h1*M0);
```

```
evalm(h1*M1);
```

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

```
> delrows(F, 4..5);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> W:=stackmatrix(delrows(A, 4..5),evalm(h1*M0),evalm(h1*M1));
```

$$W := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{9}{32} & \frac{13}{384} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{8} & \frac{7}{48} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> f:=stackmatrix(delrows(F, 4..5),[0],[0]);
```

$$f := \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> p:=linsolve(W,f);
```

$$p := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> Cevap:= proc (N,P::matrix)
local i,j,k,f,T,C;
f:=(i,j) -> x^(j-1)/(j-1)!:
T:=matrix(1,N+1,f);
C:=multiply(T,P);
eval(C):
end:
```

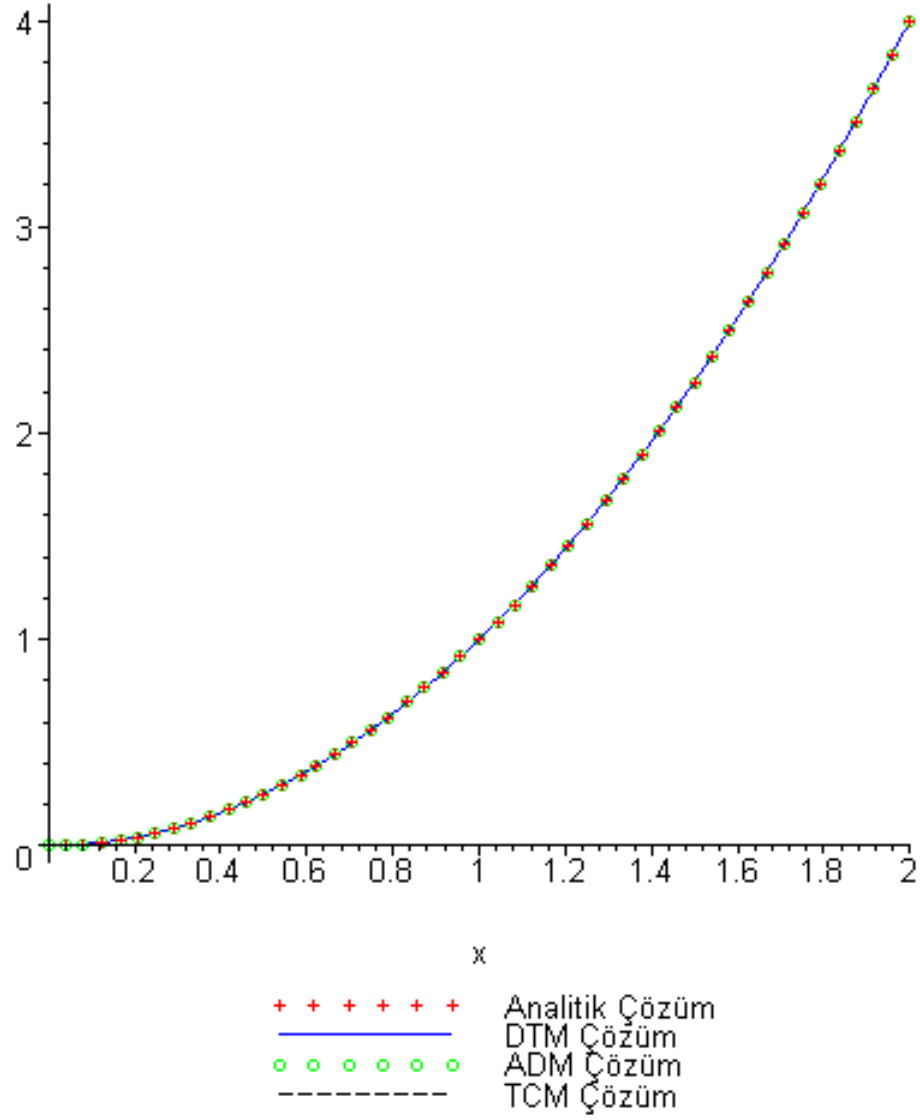
```
> cevap:=Cevap(4,p);
```

$$cevap := [x^2]$$

```
> y(x):=x^2;
```

$$y(x) := x^2$$

bulunur. Bulunan çözümlerin gerçek çözümle karşılaştırıldığı grafik çizilirse;



Şekil 3.2.2

Şekil 3.2.2’de, DTM çözümünde on adımda, ADM çözümünde on bir adımda ve TCM çözümünde ise beş noktada çözüme gidilmiştir.

3.3 Diferansiyel Denklemler Sistemleri

Örnek.3.3.1

$$\begin{aligned}
 y_1' &= y_3 - \cos x \\
 y_2' &= y_3 - e^x \\
 y_3' &= y_1 - y_2
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0 \text{ ve } y_3(0) = 2$$

Sisteminin analitik çözümü $y_1 = e^x, y_2 = \sin x, y_3 = e^x + \cos x$ dir.

a) Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi[15]

(3.7) sisteminde $g(x) = \cos(x)$ ve $m(x) = e^x$ olarak kabul edilsin ve $g(x)$ ve $m(x)$ 'in diferensiyel dönüşüm yöntemine göre karşılığı $G(k)$ ve $M(k)$ için (3.7) eşitliği,

$$(k+1)Y_1(k+1) = Y_3(k) - G(k)$$

$$(k+1)Y_2(k+1) = Y_3(k) - M(k)$$

$$(k+1)Y_3(k+1) = Y_1(k) - Y_2(k)$$

olur. (3.7) eşitliğinin maple kodlarıyla çözümü

```
restart:Y1[0]:=1:Y2[0]:=0:Y3[0]:=2:
# fonksiyonkarşılığı
for k from 0 to 10 do
G[k]:=coeftayl(cos(x),x=0,k):
M[k]:=coeftayl(exp(x),x=0,k):
od:
# transform karşılığı
for k from 0 to 10 do
Y1[k+1]:=(Y3[k]-G[k])/(k+1):
Y2[k+1]:=(Y3[k]-M[k])/(k+1):
Y3[k+1]:=(Y1[k]-Y2[k])/(k+1):
od:
#sonuc hesaplanıyor
t1:=0:t2:=0:t3:=0:
for k from 0 to 10 do
t1:=t1+Y1[k]*x^k:
t2:=t2+Y2[k]*x^k:
t3:=t3+Y3[k]*x^k:
od:print("DTM y1",t1):print("DTM y2",t2):
print("DTM y3",t3):
print("analitik y1",series(exp(x),x=0,10));
print("analitik y2",series(sin(x),x=0,10));
print("analitik y3",series(exp(x)+cos(x),x=0,10));
"DTM y1", 1 + x +  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8$ 
+  $\frac{1}{362880}x^9 + \frac{1}{3628800}x^{10}$ 
```

$$\text{"DTM } y_2\text{"}, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$$

$$\text{"DTM } y_3\text{"}, 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{20160}x^8 + \frac{1}{362880}x^9$$

$$\text{"analitik } y_1\text{"}, 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

$$\text{"analitik } y_2\text{"}, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

$$\text{"analitik } y_3\text{"}, 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{20160}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

b)Adomian yöntemiyle çözümüne bakılırsa [13]

$$y_1 = 1 - \int_0^x \cos(x)dx + \int_0^x y_3 dx = 1 - \sin(x)$$

$$y_2 = -\int_0^x e^x dx + \int_0^x y_3 dx = 1 - e^x$$

$$y_3 = 2 + \int_0^x (y_{1,n} - y_{2,n}) dx = 2$$

```

u[0]:=1-sin(x):v[0]:=1-exp(x):w[0]:=2:
for k from 0 to 15 do
u[k+1]:=int(w[k],x=0..x):
v[k+1]:=int(w[k],x=0..x):
w[k+1]:=int(u[k]-v[k],x=0..x):
od:
y1:=0:y2:=0:y3:=0:
for k from 0 to 15 do
y1:=y1+u[k]:y2:=y2+v[k]:y3:=y3+w[k]:
od:
print(y1,y2,y3):
e^x, sin(x), cos(x) + e^x

```

c) Taylor Sıralama yöntemi[10]

$$y_1' - y_3 = -\cos x$$

$$y_2' - y_3 = -e^x$$

$$y_3' - y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0 \text{ ve } y_3(0) = 2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

sonlu $N=2$ ikinci dereceli Taylor Polinomları cinsinden Taylor serisiyle yaklaşalım. Taylor sıralama noktalarını,

$$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$$

olarak alalım.

$$P_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} -\cos(x) \\ -e^x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Burada Taylor sıralama noktaları matris denkleminde yerine yazılırsa

$$P_i = \begin{bmatrix} P_i(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_i(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P_i(t_N) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{bmatrix}$$

olur. Bu fonksiyonların matris denklemini

$$\sum_{i=0}^m P_i T M_i^* A = F$$

olur ve bu matris denkleminde (2.32) ye benzer şekilde

$$\left\{ \sum_{i=0}^m P_i T M_i^* \right\} = W$$

kabul edilirse

$$WA = F$$

bulunur. Bu W matrisinin son m satırı silinerek ve bu silinen satırların yerine koşullarla ilgili V olarak tanımlanan matris yazılarak yeni elde edilen matrisle F çözümlenerek A matrisi elde edilir.

ve

$$y^{(i)}(t) = T^*(t) M_i^* A$$

olur. Buradan

$$T = [T^*(t_0) \quad T^*(t_1) \quad \dots \quad T^*(t_N)]^T$$

$$T^*(t) = \begin{bmatrix} T(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & T(t) \end{bmatrix}, M_i^*(t) = \begin{bmatrix} M_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M_i \end{bmatrix}$$

olur. Koşul denklemleri oluşturulursa

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_j y^{(j)}(a) + b_j y^{(j)}(b) + c_j y^{(j)}(c)] = \lambda$$

bulunur.

olur ve koşul denklemi

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_j T^*(a) + b_j T^*(b) + c_j T^*(c)] M_j^* A = \lambda$$

olur. Burada V oluşturulursa

$$V = \sum_{j=0}^{m-1} [a_j T^*(a) + b_j T^*(b) + c_j T^*(c)] M_j^*$$

$$VA = \lambda$$

bulunur.

$$\sum_{j=0}^{m-1} U_j M_j^* A = \lambda$$

buradan

$$V = \sum_{j=0}^{m-1} U_j M_j^*$$

olur.

Şimdi tekrar Örnek.3.3.1. için

$$\{P_1 T^* M_1^* + P_0 T^* M_0^*\} A = F$$

eşitliğinin Maple kodlarıyla çözümü oluşturulursa

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix} -0.5403023059 \\ -0.3678794412 \\ 0 \\ -1. \\ -1. \\ 0 \\ -0.5403023059 \\ -2.718281828 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g := \begin{bmatrix} -0.5403023059 \\ -0.3678794412 \\ 0 \\ -1. \\ -1. \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$k := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -0.5403023059 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -0.3678794412 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1. \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

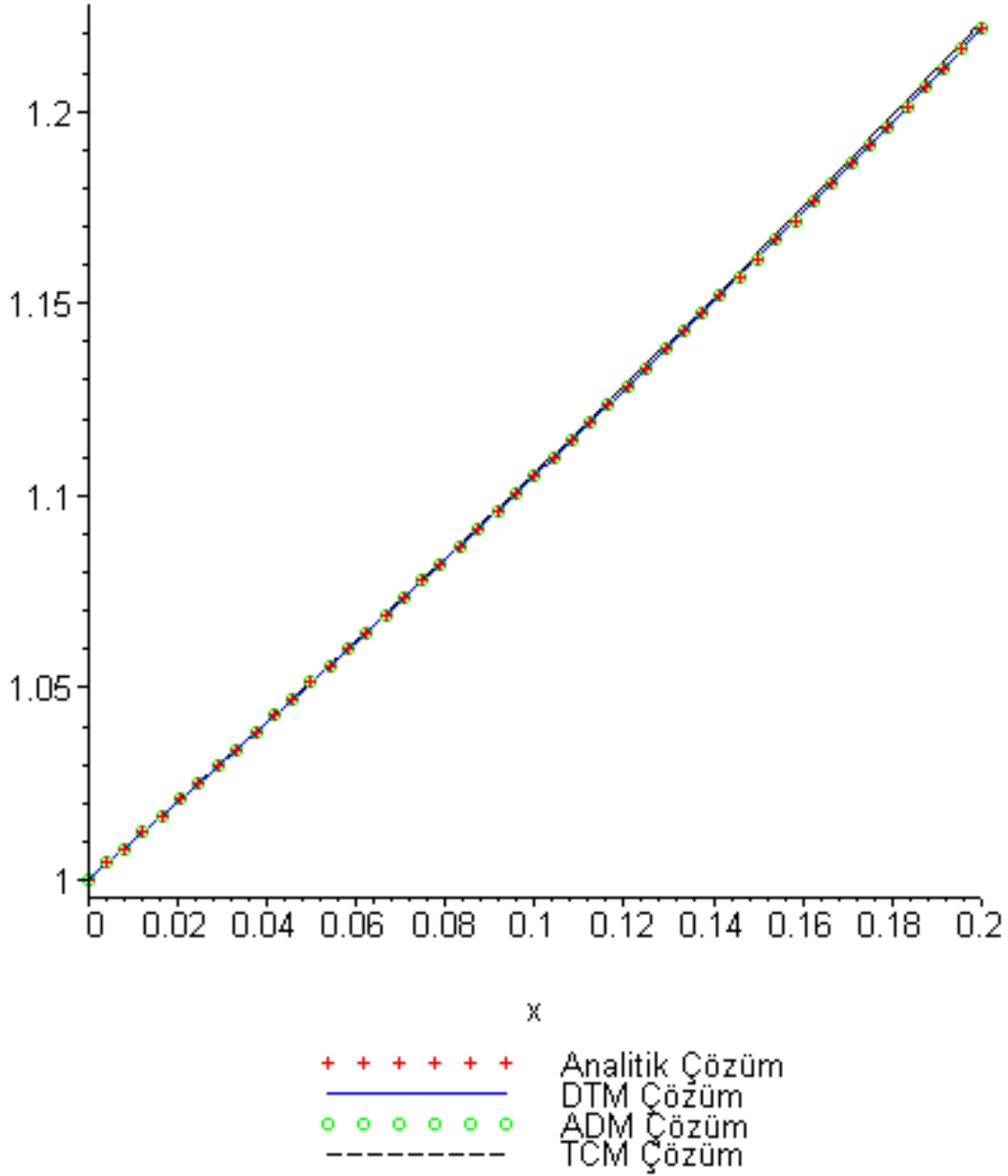
$$kI := \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \\ 0.583408022075000088 \\ 0. \\ 1. \\ 0.410985157374999965 \\ 2. \\ 1. \\ -0.0862114323500000612 \end{bmatrix}$$

$$x := 1. + 1. t + 0.583408022075000088 t^2$$

$$y := 1. t + 0.410985157374999965 t^2$$

$$z := 2. + 1. t - 0.0862114323500000612 t^2$$

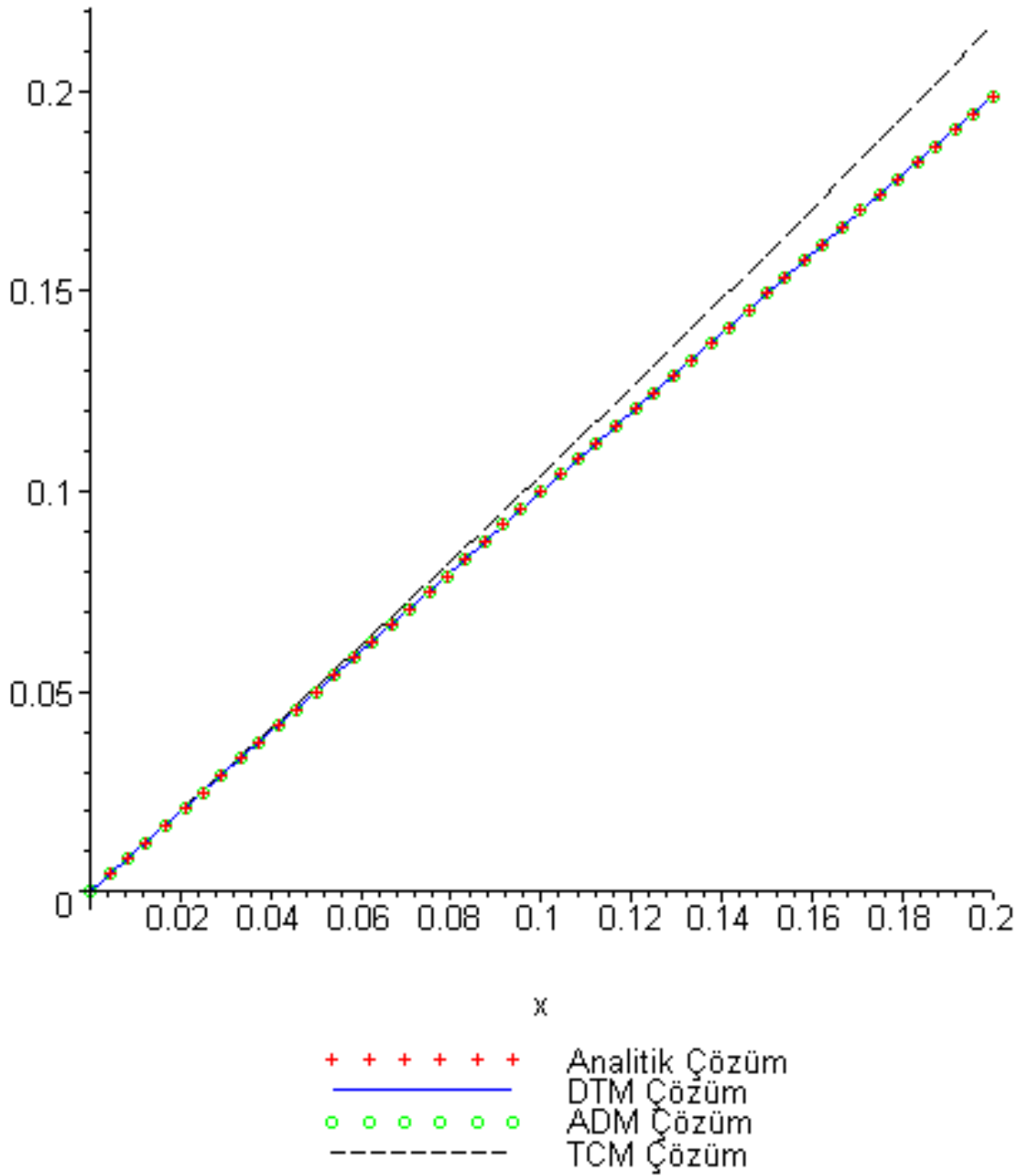
şeklinde bulunur.



Şekil 3.3.1.

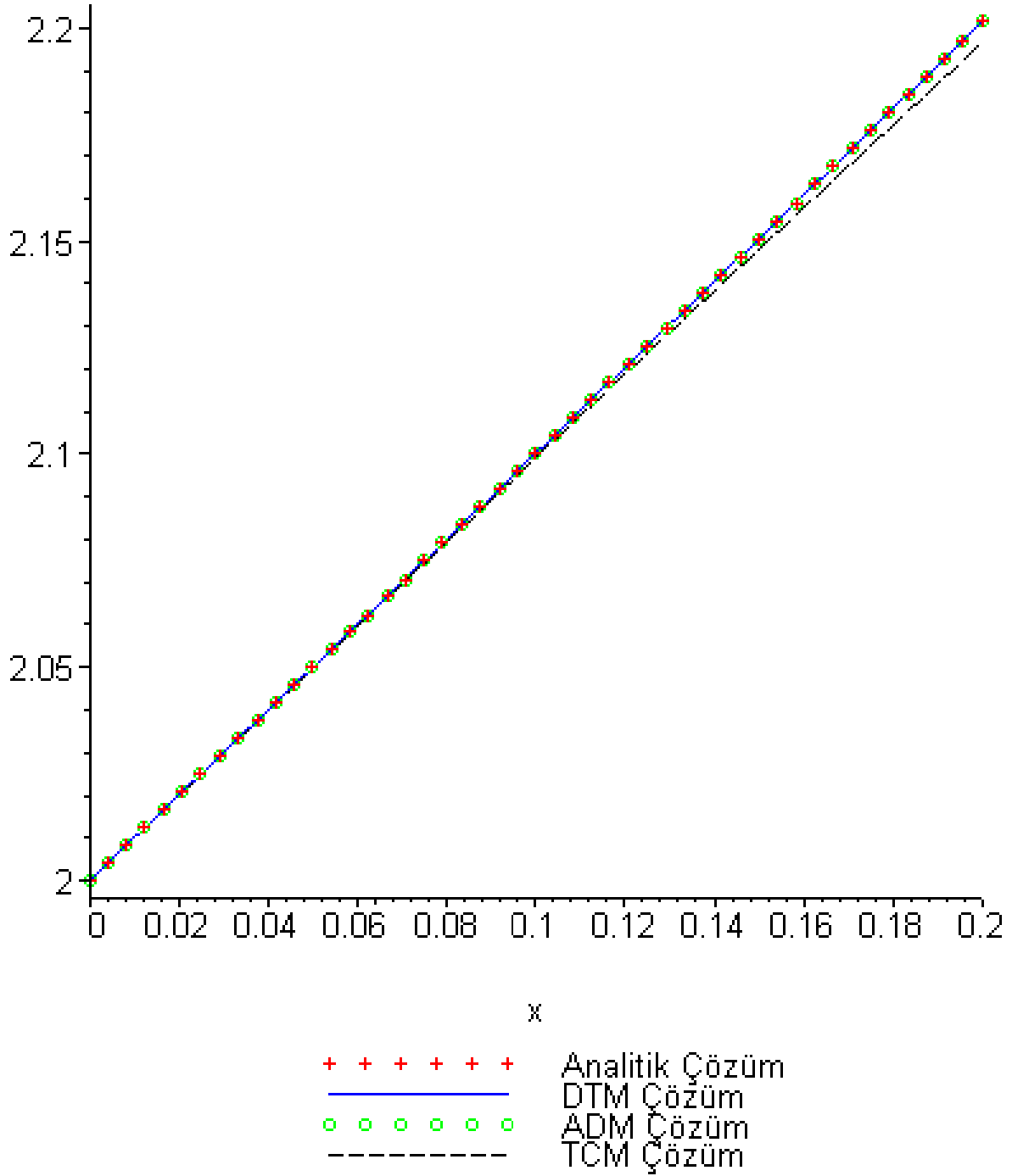
Örnek 3.3.1 sisteminde y_1 gerçek çözümünün ve verilen üç yöntemle bulunan çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 3.3.1'de verilmiştir. Burada, DTM çözümünde on bir adımda, ADM çözümünde on altı adımda ve TCM çözümünde ise üç noktada çözüme

gidilmiştir. TCM çözümünün diğer çözümlerden belli bir noktadan sonra ayrılması bu sebeptendir.



Şekil 3.3.2.

Örnek 3.3.1 sisteminde y_2 gerçek çözümünün ve verilen üç yöntemle bulunan çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 3.3.2.'de verilmiştir. Burada, DTM çözümünde on bir adımda, ADM çözümünde on altı adımda ve TCM çözümünde ise üç noktada çözüme gidilmiştir. TCM çözümünün diğer çözümlerden belli bir noktadan sonra ayrılması bu sebeptendir.



Şekil 3.3.3.

Örnek 3.3.1 sisteminde y_3 gerçek çözümünün ve verilen üç yöntemle bulunan çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 3.3.3'de verilmiştir. Burada, DTM çözümünde on bir adımda, ADM çözümünde on altı adımda ve TCM çözümünde ise üç noktada çözüme gidilmiştir. TCM çözümünün diğer çözümlerden belli bir noktadan sonra ayrılması bu sebeptendir.

4. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi ve Taylor sıralama yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Bu yöntemler kullanılarak integral denklemleri, yüksek mertebeden diferansiyel denklemler ve diferansiyel denklem sistemlerinden örnekler çözülmüş ve sonuçları karşılaştırılmıştır.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi ile denklemler, analitik veya analitiğe çok yakın yaklaşık sonuçlar verecek şekilde çözülebilmektedir. Bu yöntemde diğer yöntemlerde karşılaşılan karmaşık integrallerin yerine bilgisayarda kolayca tanıtılabilecek cebirsel denklemlere varılır ve bu cebirsel denklemlerinde basit şekilde çözümü hesaplanabilir.

Adomian ayrışım yöntemi, birçok alanda karşımıza çıkan lineer olmayan problemlerde, elemanları indirgemeli şekilde hesaplanan bir polinom serisindeki lineer olmayan polinomların çözümünde önemli bir yere sahip olsa da karşımıza hesaplanamayan integraller çıkarmasından dolayı her elde edilen Adomian polinomunun çözümü bulunamayabilir.

Diferansiyel denklemlerdeki bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sonlu Taylor seri açılımlarının ve bilinen katsayı fonksiyonlarının sıralama noktalarındaki değerlerine bağlı matris formlarının elde edilmesi, sonra bunların yerine konulup denklemin Taylor katsayılı bir matris denklemine dönüştürülmesinden ibaret olan Taylor sıralama yöntemi, sadece lineer cebirsel sisteme karşılık gelen sonuç matris denklemlerini çözebileceğinden lineer olmayan sistemler için çözüm bulamaz.

KAYNAKLAR

- [1] Chen, C. K., Ho, S. H.; 1996 Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation*, 79, 173-188,.
- [2] Abdel-Halim Hassan, I. H.; 2004 Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 154, 299-311
- [3] Keskin Yıldırım, 2005, Yüksek Lisans tezi, Diferensiyel dönüşüm yöntemiyle diferensiyel denklemlerin çözülmesi, Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- [4] Arikoglu A., Özkol, I. 2004, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*;
- [5] Jing R., Zhengyi L., 2006, A modified algorithm for the Adomian decomposition method with applications to Lotka Volterra systems
- [6] Wazwaz, A.M. 2000, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Appl. Math. Comp.* 111, 33–51
- [7] İnc Mustafa, 2002, Doktora tezi, Ayırışım metodunun matematiksel temelleri ve bazı uygulamaları, Elazığ Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- [8] Gulsu M., Sezer M., 2005, A Taylor polynomial approach for solving differential-difference equations, *Journal of Comp. and Applied Math.*, 186, 349-364
- [9] Gulsu M., Sezer M., Güney Z., 2006, Approximate solution of general high-order linear nonhomogeneous difference equations by means of Taylor Collocation method, *Appl. Math. Comp.* 173, 683–693
- [10] Sezer M., Karamete A., Gulsu M., 2005, Taylor polynomial solutions of systems of linear differential equations with variable coefficients, *Intern. J. Computer Math.*, 82(6), 755-764
- [11] Karamete : Aysen, 1996, Yüksek Lisans tezi, Lineer diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- [12] M. M. Hosseini, H. Nasabzadeh, Modified Adomian decomposition method for specific second order ode, *Applied math. and comp.*, 186 (2007), 117-123
- [13] J. Biazar, E. Babolian, R. İslam, 2004, Solution of the system of ordinary differential equations by adomian decomposition method, *Applied Math. and Comp.*, 147, 713-719
- [14] Karamete A., Sezer M., 2002, A Taylor Collocation method for the solution of Linear integro differential equations, *Intern. J. Computer Math.*, 79(9), 987-1000
- [15] Kurnaz, A., Oturanç, G. 2005, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 82, Number 6, 709-719(11)

- [16] Kurnaz, A., Oturañ, G., Kiriş, M. E. 2005, n dimensional differantial transformation method for solving PDEs, İnternational journal of Computer Mathematics, 82,Number 3,369-380
- [17] Maple12;www.maplesoft.com
- [18] Keskin Y., Oturañ, G.,2008, The differential transform methods for nonlinear function and its applications,SJAM Winter-Spring,Volume 9,Number 1,69-76