T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL YANSIMA GRUPLARI VE KÖK SİSTEMLERİ

Tezi Hazırlayan
Neslihan DURAN

Tezi Yöneten
Prof. Dr. Himmet CAN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2007
KAYSER

Prof. Dr. Himmet CAN danışmanlığında **Neslihan DURAN** tarafından hazırlanan " **Reel Yansıma Grupları ve Kök Sistemleri** " adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

22/06/2007

JÜRİ **İmza**

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR

Üye : Prof. Dr. Himmet CAN Himmet Can

Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK O. Mucuk

ONAY :

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 03/07/2007 tarih ve 2007/19-08 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

03.07.2007

N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi süresince çalışmalarımda bilgi, eleştiri ve her türlü yardımları ile beni yönlendiren, sabır ve desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Himmet CAN'a, çalışmalarım sırasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve eşim Fatih UMSU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Neslihan DURAN

REEL YANSIMA GRUPLARI VE KÖK SİSTEMLERİ

Neslihan DURAN
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2007
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Himmet CAN

ÖZET

Bu tezin esas amacı, reel yansıma gruplarını ve kök sistemlerini tanıtmaktır. Burada tartışılan konular yeni değildir; yani, reel yansıma grupları ve kök sistemleri bir çok yazar tarafından incelenmiştir. R. W. Carter, C. T. Benson, ve L. C. Grove, J. P. Serre, J. E. Humphreys ve son zamanlarda R. Kane'in çalışmaları buna örnek olarak gösterilebilir. Bu tez temel olarak, R. Kane'in çalışmaları izlenerek, reel yansıma grupları üzerindeki sonuçları ele alır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili bir giriş yapıldı.

İkinci bölümde, yansıma ve yansıma grupları hakkında bazı temel bilgiler verildi.

Üçüncü bölümde, kök sistemler ve kök sistemlerin alt sistemleri tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, Coxeter grupları tanıtıldı. Reel yansıma grupları ve Coxeter grupları arasındaki ilişki incelendi.

Beşinci bölümde, kök sistemlere Coxeter grafikleri karşılık getirilerek, Coxeter sistemlerinin ve yansıma gruplarının bir sınıflandırılması elde edildi.

Anahtar kelimeler: Yansıma, yansıma grupları, kök sistemleri, Coxeter sistemleri, Coxeter grafikleri, Coxeter grupları.

REAL REFLECTION GROUPS AND THEIR ROOT SYSTEMS

Neslihan DURAN
Erciyes University, Graduate School of Natural and Apllied Sciences
M. S. Thesis, June 2007
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Himmet CAN

ABSTRACT

The main object of this thesis is to introduce the real reflection groups and their root systems. The ideas discussed here are not new; that is, the real reflection groups and their root systems have been studied by many authors, see for example the works of R. W. Carter, C. T. Benson and L. C. Grove, J. P. Serre, J. E. Humphreys, and more recently, R. Kane. The thesis is mainly concerned with the results on real reflection groups by following the work of R. Kane.

The thesis consists of five chapters:

In the first chapter, the introduction is given dealing with thesis.

In the second chapter, some basic information about reflection and reflection groups is given.

In the third chapter, root systems and subsystems of the root systems are introduced.

In the fourth chapter, Coxeter groups are introduced. The relation between real reflection groups and Coxeter groups are examined.

In the fifth chapter, by determinig the Coxeter graph associated with a root system, a classification of Coxeter systems and reflection groups is obtained.

Keywords: Reflection, Reflection groups, Root systems, Coxeter systems, Coxeter groups, Coxeter graphs.

SEMBOLLER

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar cümlesi
IR	: Reel sayılar cümlesi
W	: Yansıma grubu
$\ell(w)$	: $w \in W$ nun uzunluğu
Δ	: Kök sistem
Δ^{+}	: Δ kök sisteminde pozitif sistem
Δ^{-}	: Δ kök sisteminde negatif sistem
Σ	: Δ kök sisteminin bir temel sistemi
Δ_I	: Δ kök sisteminin bir alt sistemi
$h(\alpha)$	: $\alpha \in \Delta$ nın ağırlığı
W_I	: W yansıma grubunun parobolik alt grubu
W^I	: W_I parobolik alt grubunun koset temsilcilerinin cümlesi
(W,S)	: Coxeter sistem

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY………………………………………………………………………….......................... I

TEŞEKKÜR …………………………………………………………………………… II

ÖZET ………………………………………………………………………………….. III

ABSTRACT …………………………………………………………………………… IV

SEMBOLLER ………………………………………………………………………….. V

İÇİNDEKİLER ……………………………………………………………………………VI

1. BÖLÜM

GİRİŞ…………………………………………………………………………………. 1

2. BÖLÜM

YANSIMA VE YANSIMA GRUPLARI …………….……………………………… 3

3. BÖLÜM

KÖK SİSTEMLER …………………………………………………………………... 9

4. BÖLÜM

YANSIMA GRUPLARI VE COXETER GRUPLARI …………………………...26

5. BÖLÜM

COXETER SİSTEMLERİNİN VE YANSIMA GRUPLARININ

SINIFLANDIRILMASI ………………………………………………….............. 33

KAYNAKLAR ……………………………………………………………………... 42

ÖZGEÇMİŞ ……………………………………………………………………… 43

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Reel yansıma grupları üzerindeki çalışmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir. Bazı reel yansıma gruplarının mertebeleri çok büyük olduğundan, bu grupların yapıları ne yazık ki günümüze kadar aydınlığa kavuşturulamamıştır. Fakat bilgisayar imkânlarının giderek artmasıyla bu zorlukların üstesinden gelinmeye başlanmış olup, örneğin 2007 yılında E_8 tipindeki reel yansıma grubunun yapısı aydınlatılmıştır.

İşte bu çalışmada biz reel yansıma grupları ve bu gruplar ile ilgili kök sistemlerin bazı temel özelliklerini incelemeyi hedef edindik. Her bir Δ kök sistemine bir $W(\Delta)$ reel yansıma grubu karşılık gelir. Δ kök sisteminin temel özellikleri incelendikten sonra, bunların alt sistemlerinin nasıl elde edildiği ele alındı. Ayrıca her bir W yansıma grubuna bir (W,S) Coxeter sistemi karşılık gelir. (W,S) Coxeter sistemleri incelendikten sonra, (W,S) Coxeter sistemine karşılık gelen bir X Coxeter grafiğinin nasıl elde edildiği üzerinde durulmuştur. Böylece, bir Δ kök sistemine bir X Coxeter grafiği karşılık getirilerek, Coxeter sistemlerinin ve yansıma gruplarının bir tam listesi elde edilmiştir. Bu ise bize indirgenemez sonlu yansıma gruplarının sınıflandırılmasını verir.

Reel yansıma grupları hakkında temel bilgiler Benson ve Grove $[1]$, Carter $[2,3]$, Humphreys $[8]$, Serre $[11]$ ve Kane $[9]$ gibi yazarların kitaplarında bulunabilir. Reel kök sistemlerin alt sistemlerinin nasıl elde edileceği ile ilgili bir algoritma Carter $[4]$ tarafından verilmiştir. Reel yansıma grupları üzerinde tanımlanan uzunluk fonksiyonu yardımıyla parobolik alt grupların koset temsilcilerinin bir cümlesinin nasıl elde edildiği üzerinde durulmuştur.

Yansıma gruplarının soyut bir grup olarak Coxeter grupları adı altında bir temsile sahip olduğu incelenmiştir.

Bu çalışmanın önemi, son zamanlarda yeniden büyük bir önem kazanan yansıma gruplarını, temel olarak Kane [9] in alternatif çalışması izlenerek incelemektir.

Elbette, akılda tutulmalıdır ki bu sadece bir inceleme çalışması olup konuya herhangi bir yenilik getirmemektedir.

2. BÖLÜM

YANSIMA VE YANSIMA GRUPLARI

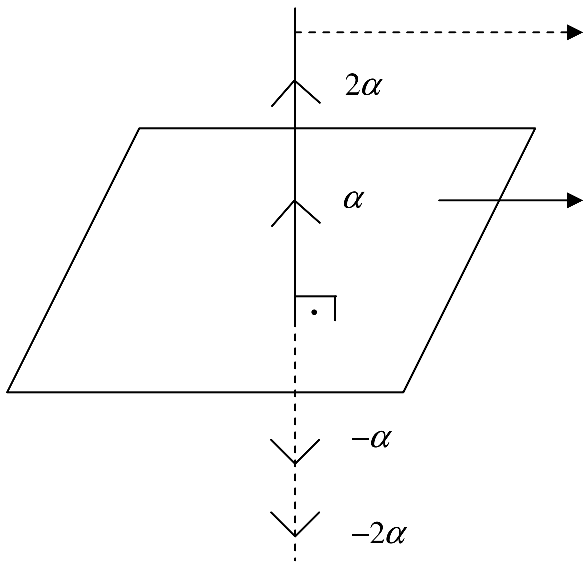
E, n boyutlu bir Euclid uzayı olsun.

Tanım 2.1. E de bir *yansıma*, bir hiperdüzlemdeki vektörleri sabit bırakan ve hiperdüzleme ortagonal olan vektörleri negatiflerine dönüştüren E Euclid uzayının bir lineer dönüşümüdür. O halde,

bir $0 \neq \alpha \in E$ vektörü için $x \in E$ olmak üzere

$$x \to s_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$

şeklinde tanımlanan bir $s_\alpha : E \to E$ dönüşümü H_α hiperdüzlemine göre bir yansımadır. Burada, H_α hiperdüzlemi aşağıdaki şekilde verilebilir.



$$L = \langle \alpha \rangle = \{\lambda\alpha \mid \lambda \in IR\}$$

$$H_\alpha = \langle \alpha \rangle^\perp = \{x \mid x \perp \alpha\}$$
$$= \{x \mid \langle x, \alpha \rangle = 0\}$$

Böylece; $boyL = 1$, $\quad boy\, H_\alpha = n - 1$ olup

$$boyE = boy(L \oplus H_\alpha) = boyL + boyH_\alpha = 1 + n - 1 = n$$

dır.

E üzerinde bir *yansıma grubu*, E deki bütün yansımalar tarafından üretilen bir gruptur. s_α yansımalarının ürettiği yansıma grubunu W ile gösterelim. O halde

$$W = \left\langle s_\alpha \,\middle|\, 0 \neq \alpha \in E,\ s_\alpha : E \to E \ \text{ bir yansıma} \right\rangle$$

dır.

Şimdi aşağıdaki önermede s_α yansımasının bazı temel özelliklerini vereceğiz $[1]$:

Önerme 2.2. *Bir* $0 \neq \alpha \in E$ *vektörü için,* $s_\alpha : E \to E$ *bir yansıma olsun. Bu taktirde;*

1. s_α *lineerdir.*
2. $s_\alpha^2 = 1$ *dır.*
3. $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ *dır.*
4. $\forall x \in H_\alpha,\ \ s_\alpha(x) = x$ *dır.*
5. $\forall \lambda \in IR$ için $s_{\lambda\alpha} = s_\alpha$ *dır.*
6. s_α *ortagonaldır*
7. $\varphi : E \to E$ *ortagonal bir dönüşüm olmak üzere*

   $\varphi s_\alpha \varphi^{-1} = s_{\varphi(\alpha)}$ *dır.*
8. s_α *ya karşılık gelen matris*

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

   şeklindedir.

9. $\det s_\alpha = -1$ *dır.*

İspat. $\forall x, y \in E$ için,

1. $$s_\alpha(x+y) = x + y - 2\frac{\langle x+y, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$

$$= x + y - 2\left(\frac{\langle x,\alpha\rangle + \langle y,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\right)\alpha$$

$$= x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha + y - 2\frac{\langle y,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$$
$$= s_\alpha(x) + s_\alpha(y)$$

dır.

Şimdi $\lambda \in IR$, $x \in E$ olmak üzere,

$$s_\alpha(\lambda x) = \lambda x - 2\frac{\langle \lambda x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$$

$$= \lambda x - 2\lambda\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$$

$$= \lambda\left(x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha\right)$$

$$= \lambda s_\alpha(x)$$

dır. O halde, s_α lineerdir.

2. $\forall x \in E$ için,

$$s_\alpha^2(x) = s_\alpha\left(x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha\right)$$

$$= s_\alpha(x) - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}s_\alpha(\alpha)$$

$$= x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha + 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$$

$$= x$$

$$= 1(x)$$

olup $s_\alpha^2 = 1$ dir.

3. $$s_\alpha(\alpha) = \alpha - 2\frac{\langle \alpha,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$$

$$= \alpha - 2\alpha$$

$$= -\alpha$$

dır.

4. $\forall x \in H_\alpha$ için, $\langle x,\alpha\rangle = 0$ olup

$$s_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$$
$$= x$$

dır.

5. $\forall \lambda \in IR$ için,

$$s_{\lambda\alpha}(x) = x - 2\frac{\langle x,\lambda\alpha\rangle}{\langle \lambda\alpha,\lambda\alpha\rangle}\lambda\alpha$$
$$= x - 2\lambda^2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\lambda^2\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$$

$$= x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} = s_\alpha(x)$$

dır. O halde $s_{\lambda\alpha} = s_\alpha$ olur.

6. Şimdi $f : E \to E$ bir lineer dönüşüm olsun. $\forall x, y \in E$ için, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ ise f ye *ortagonal bir dönüşüm* denir. O halde,

$\forall x, y \in E$ için, iç çarpım bilineer olduğundan,

$$\langle s_\alpha(x), s_\alpha(y)\rangle = \left\langle x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha, y - 2\frac{\langle y,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha\right\rangle = \langle x, y\rangle$$

dır. O halde s_α ortagonaldir.

7. $\forall x \in E$ için,

$$\varphi s_\alpha \varphi^{-1}(x) = \varphi\left(s_\alpha\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)$$

$$= \varphi\left(\varphi^{-1}(x) - 2\frac{\langle \varphi^{-1}(x), \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha\right)$$

$$= \varphi\varphi^{-1}(x) - 2\frac{\langle \varphi^{-1}(x), \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\varphi(\alpha)$$

$$= x - 2\frac{\langle x, \varphi(\alpha) \rangle}{\langle \varphi(\alpha), \varphi(\alpha) \rangle}\varphi(\alpha)$$

$$= s_{\varphi(x)}(x)$$

olup, $\varphi s_\alpha \varphi^{-1} = s_{\varphi(\alpha)}$ dır.

8. Kabul edelim ki $boyE = n$ olsun. Bu durumda $\langle \alpha \rangle = \{\lambda\alpha \mid \lambda \in IR\}$, $\langle \alpha \rangle^\perp = \{x \in E \mid x \perp \alpha\}$, $E = \langle \alpha \rangle \oplus \langle \alpha \rangle^\perp$ diyelim.

Şimdi $\{\alpha\}$, $\langle \alpha \rangle$ nın bir bazı ve $\{\alpha_1, ..., a_{n-1}\}$ de $\langle \alpha \rangle^\perp$ nın bir bazı olmak üzere; E Euclid uzayının bir bazı $\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&s_\alpha(\alpha) = -\alpha = -1\alpha + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + ... + 0\alpha_{n-1} \\
&s_\alpha(\alpha_1) = \alpha_1 = 0\alpha + 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + ... + 0\alpha_{n-1} \\
&\vdots \\
&s_\alpha(\alpha_{n-1}) = \alpha_{n-1} = 0\alpha + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + ... + 1\alpha_{n-1}
\end{aligned}$$

olup, s_α ya karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

9. s_α ya karşılık gelen matris diagonal bir matris olduğundan s_α nın determinantı, matrisin asal köşegen üzerindeki terimlerinin çarpımıdır, yani

$$\det s_\alpha = -1.1.1...1$$

$$= -1$$

dir.

Tanım 2.3. E ve E' verilen iki Euclid uzayı olsun.

$O(E) = \{ f \mid f : E \to E$ ortagonal bir lineer dönüşüm$\}$ ye E nin bir *ortagonal grubu* denir. $W \subset O(E)$ ve $W' \subset O(E')$ olmak üzere W, W' yansıma gruplarına *izomorfik* denir, eğer $f : E \to E'$ iç çarpımı koruyan ve $fWf^{-1} = W'$ şartını sağlayan bir lineer izomorfizm ise $[10]$.

W bir yansıma grubu olsun. W daki bazı yansımalar tarafından üretilen W nin bir alt grubuna W nin *yansıma alt grubu* denir. W_1 ve W_2, W nin aşikar olmayan iki yansıma alt grubu olmak üzere, eğer $W = W_1 \times W_2$ ise W ye *indirgenebilirdir* denir. Aksi halde W ya *indirgenemezdir* denir $[5]$. Böylece, yansıma gruplarının sınıflandırılması, indirgenemez yansıma gruplarının sınıflandırılmasına indirgenmiş olur.

Örnek 2.4. Şimdi, bir yansıma grubu örneği olarak S_n simetrik grubunu göz önüne alalım. $i = 1, 2, ..., n-1$ için r_i ler $(i,\, i+1)$ transpozisyonlarına karşılık gelmek üzere $\{r_1, r_2, ..., r_{n-1}\}$ tarafından üretilen gruba S_n *simetrik grubu* denir.

Şimdi, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, E nin standart bir bazı olmak üzere, her r_i transpozisyonuna $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ olmak üzere, $s_{\alpha_i} : E \to E$ yansıması karşılık getirildiği zaman, S_n simetrik grubuna bir yansıma grubu gözüyle bakılabilir. O halde, S_n simetrik grubu

$$S_n = \left\langle r_1, r_2, ..., r_{n-1} \,\middle|\, r_i^2 = (r_i r_{i+1})^3 = (r_i r_j)^2 = 1,\ |i - j| \geq 2 \right\rangle$$

şeklinde bir temsile sahiptir. İleride gösterilecektir ki, S_n simetrik grubu A_{n-1} tipinde bir yansıma grubuna izomorftur.

3. BÖLÜM

KÖK SİSTEMLER

E bir Euclid uzayı, $boyE = n$ olsun. W, E üzerinde sonlu bir yansıma grubu olsun. $0 \neq \alpha \in E$ ve $\|\alpha\| = 1$ olmak üzere s_α, α ile ilgili bir yansıma olsun.

Tanım 3.1. Eğer E nin sonlu bir alt cümlesi

$$\Delta = \left\{ \alpha \in E \,\middle|\, s_\alpha \in W, \alpha \neq 0, \|\alpha\| = 1 \right\} \subset E$$

1. $\alpha \in \Delta\, \lambda \in IR \Rightarrow \lambda\alpha \in \Delta \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

2. $\alpha, \beta \in \Delta$ için $\Rightarrow s_\alpha \beta \in \Delta$

şartlarını sağlıyorsa Δ ya E de bir *kök sistem* denir $[8]$. Δ nın her bir elemanına da bir *kök* adı verilir. Bu tanımdan

$$\Delta = \bigcup_{s_\alpha \in W} \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}$$

olur.

Tanım 3.2. Δ, E Euclid uzayında bir kök sistem olsun. $\Sigma \subset \Delta$ olmak üzere eğer

1) Σ lineer bağımsız,

2) Δ daki her vektör Σ daki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılıyor ve bu yazılışta katsayılar tamamen pozitif veya negatif oluyor ise bu taktirde Σ ya Δ içinde bir *temel sistem* denir. Σ nin elemanlarına da *temel kök* adı verilir $[3]$.

Şimdi $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ olsun. $\alpha \in \Delta$ için $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$ yazılışında eğer $\lambda_i \geq 0$ ise α ya bir *pozitif kök*; eğer $\lambda_i \leq 0$ ise bu takdirde α ya bir *negatif kök* denir.

Δ daki bütün pozitif köklerin koleksiyonu Δ^{+}; negatif köklerin koleksiyonu da Δ^{-} ile gösterilir ise bu taktirde $\Delta = \Delta^{+} \cup \Delta^{-}$ olacaktır.

Burada, açık olarak, $\Delta^{-} = -\Delta^{+}$ dır. O halde, bir Δ kök sistemine karşılık gelen bir yansıma grubu $W = W(\Delta) = \langle s_{\alpha} | \alpha \in \Delta \rangle$ ile verilir. Şimdi, örnek olarak, A_n, B_n, C_n, D_n tipindeki kök sistemlerini göz önüne alalım $[1]$.

E, n boyutlu bir Euclid uzayı, Δ da E Euclid uzayında bir kök sistem olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E nin bir standart bazı olsun.

1. A_n Kök Sistemi:

$\Delta = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ kök sistemine A_n tipindeki kök sistem adı verilir. A_n kök sisteminin Σ temel sistemi

$$\Sigma = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{n-1} - e_n\}$$

şeklinde gösterilir. A_n kök sisteminin

$$\Delta^{+} = \{e_i - e_j \,|\, i < j\}$$

$$\Delta^{-} = \{e_i - e_j \,|\, i > j\}$$

şeklinde pozitif ve negatif köklerini gösterebiliriz.

2. B_n Kök Sistemi:

$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \,|\, i \neq j\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ kök sistemine B_n tipindeki kök sistemi adı verilir. B_n kök sisteminin Σ temel sistemi

$$\Sigma = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{n-1} - e_n, e_n\}$$

dir.

B_n kök sisteminin pozitif ve negatif kök sistemleri sırasıyla

$$\Delta^{+} = \{ e_i - e_j \,|\, i < j\} \cup \{ e_i + e_j \mid i \neq j\} \cup \{ e_i\}$$

$$\Delta^{-} = \{ e_i - e_j \,|\, i > j\} \cup \{ -e_i - e_j \mid i \neq j\} \cup \{-e_i\}$$

şeklindedir.

3. C_n Kök Sistemi:

$\Delta=\{\pm e_i \pm e_j \mid i\neq j\}\cup\{\pm 2e_i\}$ kök sistemine C_n tipinde kök sistem adı verilir. C_n kök sisteminin $\sum$ temel sistemi

$$\sum=\{e_1-e_2, e_2-e_3,\ldots,e_{n-1}-e_n, 2e_n\}$$

dir. C_n kök sisteminin negatif ve pozitif kök sistemleri de

$$\Delta^+=\{e_i-e_j \mid i<j\}\cup\{e_i+e_j \mid i\neq j\}\cup\{2e_i\}$$

$$\Delta^-=\{e_i-e_j \mid i>j\}\cup\{-e_i-e_j \mid i\neq j\}\cup\{-2e_i\}$$

dir.

4. D_n Kök Sistemi:

$\Delta=\{\pm e_i \pm e_j \mid 1\leq i,j\leq n, i\neq j\}$ kök sistemine D_n tipinde kök sistem adı verilir. D_n kök sisteminin $\sum$ temel sistemi

$$\sum=\{e_1-e_2, e_2-e_3,\ldots,e_{n-1}-e_n, e_{n-1}+e_n\}$$

şeklindedir. D_n kök sisteminin pozitif ve negatif kök sistemleri de

$$\Delta^+=\{e_i-e_j \mid i<j\}\cup\{e_i+e_j \mid i\neq j\}$$

$$\Delta^-=\{e_i-e_j \mid i>j\}\cup\{-e_i-e_j \mid i\neq j\}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3. Δ, E Euclid uzayında bir kök sistem olsun. $\Sigma\subset\Delta$ olmak üzere bir Σ temel sistemi seçelim. Σ ya karşılık gelen $\{s_\alpha \mid \alpha\in\Sigma\}$ yansımalarına W yansıma grubu için *temel yansımaların bir cümlesi* denir $[8]$.

Örnek 3.4. $S_{n+1}\cong W(A_n)=\left\langle r_1, r_2,\ldots,r_n \mid r_i^2=(r_i r_{i+1})^3=(r_i r_j)^2=1,\ |i-j|\geq 2\right\rangle$ simetrik grubunu göz önüne alalım.

$\{e_1, e_2,\ldots,e_n, e_{n+1}\}$, E nin standart bir bazı olmak üzere her $i=1,2,\ldots,n$ için $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ olsun. Bu durumda her s_{α_i} yansımasına $W(A_n)$ de bir *temel yansıma* denir.

Tanım 3.5. Δ, E Euclid uzayında bir kök sistem olsun. $\sum \subset \Delta$ olmak üzere bir $\sum$ temel sistemi seçelim. $\alpha \in \Delta$ olmak üzere $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \alpha_i$ şeklinde tanımlansın. O halde $h(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ ye $\sum$ temel sistemine göre α *nın ağırlığı* denir.

Burada $\alpha > 0$ ise $h(\alpha) > 0$ ve $\alpha < 0$ ise $h(\alpha) < 0$ dır.

Lemma 3.6. Δ, E *Euclid uzayında bir kök sistem olsun.* $\sum \subset \Delta$ *olmak üzere bir* $\sum$ *temel sistemi seçelim. Bu durumda* $\alpha > 0$ *ve* $\alpha \notin \sum$ *için*

(i) $s_{\alpha_i} \alpha > 0$

(ii) $h\left(s_{\alpha_i} \alpha\right) < h(\alpha)$

olacak şekilde bir $\alpha_i \in \sum$ kökü vardır [9].

Şimdi, $\left\{ s_\alpha \middle| \alpha \in \sum \right\}$ temel yansımaları tarafından üretilen W yansıma grubunun bir alt grubu W_0 olsun.

Önerme 3.7. *Eğer* $\alpha \in \Delta$ *ise bu taktirde bazı* $\varphi \in W_0$ *ve* $\alpha_k \in \sum$ *için* $\alpha = \varphi \alpha_k$ *dır* $[8]$.

İspat. İspatı sadece $\alpha > 0$ için göz önüne alabiliriz. Çünkü eğer $\alpha = \varphi \alpha_k$ ise $-\alpha = \varphi\,(-\alpha_k) = \left(\varphi s_{\alpha_k}\right) \alpha_k$ dır. Şimdi $h(\alpha)$ üzerinde tümevarım ile ispatı tamamlayalım. $h(\alpha) = 1$ ise $\alpha \in \sum$ olup, $\varphi = 1$ olur. $h(\alpha) > 1$ ise Lemma 3.6 dan

$$s_{\alpha_i}\, \alpha > 0 \ \text{ ve } \ h\left(s_{\alpha_i}\, \alpha\right) < h\,(\alpha)$$

olacak şekilde bir $\alpha_i \in \sum$ seçebiliriz. Tümevarımdan bazı $\varphi \in W_0$ ve $\alpha_k \in \sum$ için $s_{\alpha_i}\, \alpha = \varphi \alpha_k$ dır. Buradan da $\alpha = \left(s_{\alpha_i}\, \varphi\right) \alpha_k$ dır.

Önerme 3.8. *Eğer* $\sum$, Δ *da verilen bir temel sistem ise bu taktirde* $W = W(\Delta)$ $\left\{ s_\alpha \middle| \alpha \in \sum \right\}$ *temel yansımaları tarafından üretilir* $[3]$.

İspat. W_o, $\left\{ s_\alpha \middle| \alpha \in \sum \right\}$ tarafından üretilen W nın bir alt grubu olsun. W_o = W olduğunu göstermek için her $\alpha \in \Delta$ için $s_\alpha \in W_o$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önerme 3.7 den her $\alpha \in \Delta$ ise $\alpha = \varphi\, \alpha_k$ olacak şekilde bazı $\varphi \in W_o$, $\alpha_k \in \sum$ vardır. Önerme 2.2 nin yedinci şıkkından $\alpha = \varphi\,\alpha_k$ olduğundan $s_\alpha = s_{\varphi\alpha_k} = \varphi s_{\alpha_k} \varphi^{-1}$ dır. Buradan $s_\alpha \in W_o$ dır. Bu durumda $W \subset W_o$ olur. Halbuki $W_o \subset W$ olduğundan, görülür ki $W_o = W$ dır.

Tanım 3.9. Δ, E Euclid uzayında bir kök sistem olsun. $\Sigma \subset \Delta$ olmak üzere bir Σ temel sistemi seçelim. $W(\Delta)$, $S = \{ s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma \}$ temel yansımaları tarafından üretilen bir yansıma grubu olsun. $w \in W(\Delta)$ için $s_{i_j} \in S$ olmak üzere

$$w = s_{i_1}\, s_{i_2}\, ...\, s_{i_r}$$

şeklinde yazılır. Bu yazılışta eğer r en küçük pozitif tamsayı ise bu taktirde $w = s_{i_1}\, s_{i_2}\, ...\, s_{i_r}$ ye *indirgenmiş formda* denir $[11]$.

Kabul edelim ki $w \in W(\Delta)$ temel yansımaların bir çarpımı olarak $w = s_{i_1}\, s_{i_2}\, ...\, s_{i_r}$ şeklinde indirgenmiş formda yazılsın. Bu taktirde w nun boyu

$$\ell(w) = \ell\left(s_{i_1}\, s_{i_2}\, ...\, s_{i_r}\right) = r$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.10. $S_3 = W(A_2) = \left\langle s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2} \right\rangle$ simetrik grubunu göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\ell(e) = 0\,,\ \ \ell\left(s_{\alpha_1}\right) = 1\,,\ \ell\left(s_{\alpha_2}\right) = 1$$

$$\ell\left(s_{\alpha_1}\, s_{\alpha_2}\right) = \ell\left(s_{\alpha_2}\, s_{\alpha_1}\right) = 2\,,\ \ \ell\left(s_{\alpha_1}\, s_{\alpha_2}\, s_{\alpha_1}\right) = 3$$

tür.

Lemma 3.11. *W bir yansıma grubu olsun. Bu taktirde $w \in W$ için $\ell(w) = \ell\left(w^{-1}\right)$ dir.*

İspat. $w \in W$ olsun. Kabul edelim ki

$w = s_1\, s_2 \ldots s_n$ şeklinde indirgenmiş forma sahip olsun. Bu durumda $w^{-1} = s_n\, s_{n-1} \ldots s_2\, s_1$ dır. Buradan $\ell(w) = n = \ell\left(w^{-1}\right)$ dir.

Tanım 3.12. $\varphi \in W(\Delta)$ için φ tarafından negatif köklere dönüştürülen pozitif köklerin sayısını $\gamma(\varphi)$ ile gösterelim.

Bu taktirde aşağıdaki teoreme sahibiz.

Teorem 3.13. *Eğer* $\varphi \in W(\Delta)$ *ise* $\ell(\varphi) = \gamma(\varphi)$ *dir.*

Şimdi $\varphi \in W(\varphi)$ için φ tarafından negatife dönüştürülen pozitif köklerin cümlesini $\Delta(\varphi)$ ile gösterelim. Bu durumda $\gamma(\varphi) = |\Delta(\varphi)|$ olur.

Teorem 3.14. *Verilen bir* $\varphi \in W(\Delta)$ *için eğer* $\varphi = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_k}$ *indirgenmiş formdaysa bu taktirde*

$$\Delta(\varphi) = \left\{ \alpha_k, s_{\alpha_k} \alpha_{k-1}, \left(s_{\alpha_k} s_{\alpha_{k-1}}\right) \alpha_{k-2}, \dots, \left(s_{\alpha_k}, \dots, s_{\alpha_2}\right) \alpha_1 \right\}$$

dır [9].

Teorem 3.13 ve Teorem 3.14 in ispatlarını verebilmek için ilk önce aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.15. Δ , *E Euclid uzayında bir kök sistem,* $\sum$ *da* Δ *içinde bir temel sistem olsun.* $\alpha \in \sum$ *için* $\Delta(s_\alpha) = \{\alpha\}$ *dır. (Yani* s_α *tarafından negatife dönüştürülen tek bir kök* α *dır.)* [13]

İspat. Önerme 3.2 nin üçüncü şıkkından $s_\alpha \alpha = -\alpha$ olduğunu biliyoruz. Böylece, $\alpha \neq \beta$, $\beta > 0$ iken $s_\alpha \beta > 0$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $\Sigma = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}$ ve $\alpha = \alpha_i$ olsun. $\alpha \neq \beta$ olmak üzere verilen $\beta > 0$ için $\beta = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j$ ifadesinde

$$\text{bazı } k \neq i \text{ için } \lambda_k > 0 \dots (*)$$

olur.

Diğer bir durum olarak her $k \neq i$ için $\lambda_k = 0$ dır. O halde

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j \\ &= \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_i \alpha_i + \dots + \lambda_n \alpha_n \\ &= \lambda_i \alpha_i \end{aligned}$$

dır. Bu durumda Tanım 3.1. in birinci şıkkından dolayı $\lambda_i = \pm 1$ olmak zorundadır. Fakat $\beta > 0$ olduğundan $\beta = \alpha_i = \alpha$ dır. Diğer taraftan

$$s_{\alpha_i}\beta = \beta - 2\frac{\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}\alpha_i$$

idi. O halde

$$\begin{aligned} s_{\alpha_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\alpha_j\right) &= \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\, s_{\alpha_i}\left(\alpha_j\right) \\ &= \lambda_1\, s_{\alpha_i}\left(\alpha_1\right) + \ldots + \lambda_i\, s_{\alpha_i}\left(\alpha_i\right) + \ldots + \lambda_n\, s_{\alpha_i}\left(\alpha_n\right) \\ &= \lambda_1\, s_{\alpha_i}\left(\alpha_1\right) + \ldots - \lambda_i\,\alpha_i + \ldots + \lambda_n\, s_{\alpha_i}\left(\alpha_n\right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Fakat (*) ifadesinden $i \neq k$ için $\lambda_k > 0$ dır. Bu durumda

$$s_{\alpha_i}\beta = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\, s_{\alpha_i}\left(\alpha_j\right) > 0$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

$\Sigma \subset \Delta^+$ olmak üzere her $\alpha \in \Sigma$ için s_α, $\Delta^+ - \{\alpha\}$ üzerinde etkir. Yani;

$$s_\alpha\left(\Delta^+ - \{\alpha\}\right) = \Delta^+ - \{\alpha\}$$

dır. Yani s_α, α haricindeki diğer bütün pozitif kökleri yine pozitif köklere dönüştürür. Dolayısıyla $\varphi = s_{\alpha_1}\, s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k}$ ise $\gamma(\varphi) \leq k$ dır. Yani φ en fazla k tane pozitif kökü negatif köke dönüştürür. Buradan da

$$\gamma(\varphi) \leq \ell(\varphi) = k \ \ldots \quad (A)$$

elde edilir.

Şimdi vereceğimiz Lemma 3.16 φ nin $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k}$ şeklinde herhangi bir yazılışını göz önüne almaktadır. Bu yazılışta φ nin indirgenmiş olması şart değildir. Verilen böyle herhangi bir ifadede $1 \leq i \leq k$ için

$$\beta_i = \left(s_{\alpha_k}\, s_{\alpha_{k-1}} \ldots s_{\alpha_{i+1}}\right)\alpha_i$$

olsun.

Lemma 3.16. E*ğer $i \neq j$ için $\beta_i = \mp\beta_j$ ise*

$$\varphi = s_{\alpha_1} \ldots \hat{s}_{\alpha_i} \ldots \hat{s}_{\alpha_j} \ldots s_{\alpha_k}$$

dır. Burada şapka gösterimi o terimlerin iptal edildiğini göstermektedir $[9]$.

İspat. Şimdi $i<j$ olsun.

$\beta_i=\left(s_{\alpha_k}\, s_{\alpha_{k-1}}\dots s_{\alpha_{i+1}}\right)\alpha_i$ ve $\beta_j=\left(s_{\alpha_k}\, s_{\alpha_{k-1}}\dots s_{\alpha_{j+1}}\right)\alpha_j$ dersek, hipotezden

$$\beta_i=\mp\beta_j$$

olduğundan

$$\left(s_{\alpha_k}\, s_{\alpha_{k-1}}\dots s_{\alpha_{i+1}}\right)\alpha_i=\mp\left(s_{\alpha_k}\, s_{\alpha_{k-1}}\dots s_{\alpha_{j+1}}\right)\alpha_j$$

olup

$$\left(s_{\alpha_j}\, s_{\alpha_{j-1}}\dots s_{\alpha_{i+1}}\right)\alpha_i=\pm\alpha_j$$

dır.

Diğer taraftan $s_\alpha=s_{-\alpha}$ olduğundan

$$s_{\alpha_j}=s_{\left(s_{\alpha_j}s_{\alpha_{j-1}}\dots s_{\alpha_{i+1}}\right)\alpha_i}=\left(s_{\alpha_j}\, s_{\alpha_{j-1}}\dots s_{\alpha_{i+1}}\right)s_{\alpha_i}\left(s_{\alpha_{i+1}}\dots s_{\alpha_{j-1}}\, s_{\alpha_j}\right)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$s_{\alpha_i}\, s_{\alpha_{i+1}}\dots s_{\alpha_{j-1}}=s_{\alpha_{i+1}}\dots s_{\alpha_j}$$

dir.

Bu denklem bize $\varphi=s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\dots s_{\alpha_k}$ ifadesini $\varphi=s_{\alpha_1}\dots\hat{s}_{\alpha_i}\dots\hat{s}_{\alpha_j}\dots s_{\alpha_k}$ şeklinde yazmamıza imkan sağlar. Yani $\varphi=s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\dots s_{\alpha_k}$ ifadesinde "$s_{\alpha_i}s_{\alpha_{i+1}}\dots s_{\alpha_{j-1}}$" yerine "$s_{\alpha_{i+1}}\dots s_{\alpha_j}$" ifadesini alıyoruz. Bu ise ispatı tamamlar.

Eğer $\varphi=s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\dots s_{\alpha_k}$, φ için indirgenmiş bir form ise Lemma 3.16 dan dolayı $\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k\}$ pozitif kökleri birbirinden farklıdır. Şimdi bu durumu aşağıdaki örnekle daha açık bir hale getirelim.

Örnek 3.17. Δ, E Euclid uzayında bir kök sistem, $W(\Delta)$, Δ kök sistemine karşılık gelen bir yansıma grubu ve $\varphi\in W(\Delta)$ olsun. Δ, A_4 tipinde bir kök sistem ise i = 1, 2, 3, 4 için

$\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ olmak üzere $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_3} s_{\alpha_4}$ olsun. Bu durumda $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ pozitif kökleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\beta_1 = \left(s_{\alpha_4} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} \right) \alpha_1 = e_1 - e_5$$

$$\beta_2 = \left(s_{\alpha_4} s_{\alpha_3} \right) \alpha_2 = e_2 - e_5$$

$$\beta_3 = \left(s_{\alpha_4} \right) \alpha_3 = e_3 - e_5$$

$$\beta_4 = \alpha_4 = e_4 - e_5$$

dir.

Şimdi $\ell(\varphi)$ üzerinde tümevarım uygulayarak Teorem 3.13 ve Teorem 3.14 nin ispatını yapabiliriz. $\ell(\varphi) = 1$ olsun. Lemma 3.15 den dolayı $\varphi = s_\alpha$ olur.

Kabul edelim ki, $\varphi \in W$ için $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k}$ indirgenmiş bir ifade olsun, yani $\ell(\varphi) = k$ olsun. $\tilde{\varphi}$ için $\tilde{\varphi} = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{k-1}$ indirgenmiş bir ifade olmak üzere $\varphi = \tilde{\varphi}\, s_{\alpha_k}$ yazalım. Tümevarımdan kabul edelim ki Teorem 3.13 ve Teorem 3.14 $\tilde{\varphi}$ için doğru olsun. Biliyoruz ki $\beta_i = \left(s_{\alpha_k} s_{\alpha_{k-1}} \dots s_{\alpha_{i+1}} \right) \alpha_i$ şeklinde idi. Bu notasyona benzer olarak $1 \le i \le k-1$ için $\tilde{\beta}_i = \left(s_{\alpha_{k-1}} s_{\alpha_{k-2}} \dots s_{\alpha_{i+1}} \right) \alpha_i$ olsun.

Böylece $1 \le i \le k-1$ ve $\beta_i = s_{\alpha_k} \tilde{\beta}_i$ ve $\varphi\, \beta_i = \tilde{\varphi}\, \tilde{\beta}_i$ bağıntıları elde edilir.

$\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k}$ indirgenmiş olduğundan Lemma 3.16 dan $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ elemanları farklıdır. Tümevarımdan

$$\Delta(\tilde{\varphi}) = \{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{k-1}\}$$

dır. Buradan $\{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{k-1}\} \subset \Delta^+$ olduğu görülür.

Şimdi daha da güçlü bir sonucu aşağıdaki lemmada verelim.

Lemma 3.18. $\{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{k-1}\} \subset \Delta^+ - \{\alpha_k\}$ *dır* [9].

İspat. $\tilde{\beta}_i = \alpha_k$ ise bu eşitliğin her iki tarafına s_{α_k} uygular isek;

$$\beta_i = -\alpha_k$$

elde edilir. Diğer bir deyişle $i<k$ için $\beta_i=-\beta_k$ dır. Lemma 3.16 dan $\varphi=s_{\alpha_1}\dots\hat{s}_{\alpha_i}\dots s_{\alpha_{k-1}}\,\hat{s}_{\alpha_k}$ olduğunu biliyoruz ki bu φ için $\varphi=s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_k}$ nin indirgenmiş olması gerçeği ile çelişir. O halde $\tilde{\beta}_i=\alpha_k$ olamaz. Yani her i =1,…,k-1 için $\tilde{\beta}_i\neq\alpha_k$ dır. O halde $\{\tilde{\beta}_1,...,\tilde{\beta}_{k-1}\}\subset\Delta^+-\{\alpha_k\}$ dır.

Aşağıdaki lemmayı ispatlamak için Lemma 3.18 i kullanacağız.

Lemma 3.19. $\{\beta_1,...,\beta_k\}\subset\Delta(\varphi)$ *dir* [9].

İspat. $\beta_i>0$ ve $\varphi\beta_i<0$ olduğunu ispatlamalıyız.

(i) $\beta_k=\alpha_k>0$ olduğunu biliyoruz. $i<k$ için $\tilde{\beta}_i\in\Delta^+-\{\alpha_k\}$ $s_{\alpha_k}\left(\Delta^+-\{\alpha_k\}\right)=\Delta^+-\{\alpha_k\}$ olduğundan

$$\beta_i=s_{\alpha_k}\tilde{\beta}_i>0$$

elde edilir.

(ii) $\varphi\beta_k=\tilde{\varphi}\,s_{\alpha_k}\alpha_k=-\tilde{\varphi}\alpha_k<0$.

Lemma 3.15 den $\alpha_k\not\subseteq\Delta(\tilde{\varphi})=\{\tilde{\beta}_1,...,\tilde{\beta}_{k-1}\}$ dir. Başka bir deyişle $\tilde{\varphi}(\alpha_k)>0$ dır. Böylece i < k için $\varphi\beta_i=\tilde{\varphi}\tilde{\beta}_i<0$ dır. Dolayısıyla ispatımız tamamlanmıştır.

$\{\beta_1,...,\beta_k\}$ cümlesi farklı elemanlardan meydana geldiğinden Lemma 3.19 dan aşağıdaki sonucu ederiz:

$$k\leq\gamma(\varphi)\dots\quad(B)$$

dır.

O halde (A) ve (B) ifadeleri birleştirilir ise

$$k\leq\gamma(\varphi)\leq\ell(\varphi)\leq k$$

elde edilir. Böylece $\gamma(\varphi)=\ell(\varphi)=k$ dır.

Bu ise Teorem 3.13 ve Teorem 3.14 in ispatını tamamlar.

Teorem 3.20. Δ , *E Euclid uzayında bir kök sistem,* Σ *da* Δ *nın bir temel sistemi,* $W(\Delta)$, Δ *kök sistemine karşılık gelen bir yansıma grubu olsun.* $\varphi\in W(\Delta)$ *ve* $\alpha_i\in\Sigma$ *olmak üzere eğer*

$\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} ... s_{\alpha_k}$ *ve* $\ell(\varphi) < k$ *ise bu taktirde* $\varphi = s_{\alpha_1} ... \hat{s}_{\alpha_i} ... \hat{s}_{\alpha_j} ... s_{\alpha_k}$ *olacak şekilde* $1 \leq i < j \leq k$ *indisleri vardır* $[9]$.

Sonuç 3.21. *Verilen* $\varphi \in W(\Delta)$ *için eğer* $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} ... s_{\alpha_k}$ *ve* $\ell(\varphi) < k$ *ise bu taktirde* $s_{\alpha_i} ... s_{\alpha_j} = s_{\alpha_{i+1}} ... s_{\alpha_{j+1}}$ *olacak şekilde* $1 \leq i < j \leq k$ *indisleri vardır.*

Teorem 3.20 nin ispatında ilk önce aşağıdaki kavramlara ihtiyacımız vardır. Bunun için Teorem 3.20 nin ispatına geçmeden önce ilk olarak aşağıdaki yardımcı teoremleri vermek istiyoruz.

Önerme 3.22. *Eğer* $\varphi \in W(\Delta)$ *ve* $\alpha \in \sum$ *ise bu takdirde*

$$\ell(\varphi s_\alpha) = \ell(\varphi) \pm 1$$

dir. Ayrıca

(i) $\ell(\varphi s_\alpha) = \ell(\varphi) + 1 \Leftrightarrow \varphi\alpha > 0$,

(ii) $\ell(\varphi s_\alpha) = \ell(\varphi) - 1 \Leftrightarrow \varphi\alpha < 0$ *dır* $[3,8]$.

İspat. Önermenin ispatını yapabilmek için aşağıdaki ifadelerden yararlanacağız ve bu ifadelerin Teorem 3.20 de nasıl kullanıldığını göstereceğiz. $\varphi \in W(\Delta)$, $\alpha \in \sum$ olsun. Şimdi önermenin ispatını iki aşamada yapacağız:

(a) ilk olarak $\Delta(\varphi) - \{\alpha\}$ ve $\Delta(\varphi s_\alpha) - \{\alpha\}$ cümlelerinin aynı eleman sayısına sahip olduğunu gösterelim.

(b) İkinci olarak da ya $\alpha \in \Delta(\varphi)$ ya da $\alpha \in \Delta(\varphi s_\alpha)$ olduğunu fakat α nın $\Delta(\varphi)$ ve $\Delta(\varphi s_\alpha)$ nın ikisine birden ait olmadığını göstereceğiz.

Yine ispatımızı yapabilmek için Lemma 3.23 ve Lemma 3.24 den faydalanacağız.

Lemma 3.23. $s_\alpha[\Delta(\varphi) - \{a\}] = \Delta(\varphi s_\alpha) - \{a\}$ *dır. (Yani* s_α *bu iki cümle arasında 1-1 bir tekabüliyet tesis eder.)* $[9]$

İspat. $s_\alpha[\Delta(\varphi) - \{a\}] \subset \Delta(\varphi s_\alpha) - \{a\} \; ... \; (**)$ olduğunu göstermek yeterlidir; çünkü bu ifademizde φ ile φs_α yı yer değiştirirsek

$$s_\alpha\left[\Delta(\varphi\, \mathrm{s}_\alpha)-\{\, a\,\}\right]\subset\Delta(\varphi)-\{\, a\,\}$$

elde ederiz. Bu ifadenin her iki tarafına s_α uygularsak

$$\Delta(\varphi s_\alpha)-\{\, a\,\}\subset s_\alpha\left[\Delta(\varphi)-\{\, a\,\}\right]$$

olur.

(**) ifadesini ispatlamak için $\beta\in\Delta(\varphi)-\{a\}$ alalım. $\Delta(\varphi)-\{a\}$ pozitif köklerden oluştuğundan $\beta\in\Delta^+-\{a\}$ olacaktır. Buradan da $\varphi\beta\in\Delta^-$ dir.

İddia ediyoruz ki $s_\alpha\beta\in\Delta(\varphi s_\alpha)-\{\, a\,\}$ dır. Lemma 3.15 den dolayı, ilk olarak, $s_\alpha\left[\Delta^+-\{\, a\,\}\right]=\Delta^+-\{\, a\,\}$ dır. Böylece $s_\alpha\beta\in\Delta^+-\{\, a\,\}$ dir. İkinci olarak da $\varphi s_\alpha(s_\alpha\beta)=\varphi\beta\in\Delta^-$ dir. Böylece (**) ifadesi elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. Buradan da yukarıdaki (a) şıkkı elde edilir, yani $\left|\Delta(\varphi)-\{\, a\,\}\right|=\left|\Delta(\varphi s_\alpha)-\{\, a\,\}\right|$ dır.

Yukarıdaki (b) şıkkının ispatı aşağıdaki lemmanın bir sonucudur.

Lemma 3.24.

(i) $\alpha\in\Delta(\varphi)\Leftrightarrow\varphi\alpha<0$,

(ii) $\alpha\in\Delta(\varphi s_\alpha)\Leftrightarrow\varphi\alpha>0$

dır [9].

İspat. α pozitif kök olduğundan (i) şıkkı $\Delta(\varphi)$ nin tanımından görülür. (ii) şıkkı için

$$\alpha\in\Delta(\varphi s_\alpha)\Leftrightarrow\varphi s_\alpha\alpha<0$$

$$\Leftrightarrow\varphi\alpha=-\varphi s_\alpha\alpha>0$$

dır.

Böylece, yukarıdaki iki lemmadan önermenin ispatı açıkça görülür. Şimdi artık Teorem 3.20 nin ispatını vermek istiyoruz:

Teorem 3.20 nin İspatı. $\varphi\in W(\Delta)$ ve $\ell(\varphi)<k$ için $\varphi=s_{\alpha_1}\ldots s_{\alpha_k}$ ifadesini alalım. $\ell(\varphi)<k$ olduğundan en az bir $j\leq k\text{-}1$ için

$$\ell\left(s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_{j+1}}\right) = \ell\left(s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_j}\right) - 1$$

dir. Yukarıdaki Önerme 3.22 den bu eşitlik

$$\left(s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_j}\right)\alpha_{j+1} < 0$$

ifadesine denktir. Şimdi

$$\left(s_{\alpha_{i+1}} \ldots s_{\alpha_j}\right)\alpha_{j+1} > 0 \text{ ve}$$

$$\left(s_{\alpha_i}\ s_{\alpha_{i+1}} \ldots s_{\alpha_j}\right)\alpha_{j+1} < 0$$

olacak şekilde $i \leq j$ indislerini seçelim. Diğer taraftan $s_{\alpha_i}\left(\Delta^+ - \{\alpha\}\right) = \Delta^+ - \{\alpha\}$ olduğundan

$$\left(s_{\alpha_{i+1}} \ldots s_{\alpha_j}\right)\alpha_{j+1} = \alpha_i$$

dir. Önerme 2.2 nin yedinci şıkkından

$$s_{\alpha_i} = \left(s_{\alpha_{i+1}} \ldots s_{\alpha_j}\right) s_{\alpha_{j+1}} \left(s_{\alpha_j} \ldots s_{\alpha_{i+1}}\right)$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan da

$$s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \ldots s_{\alpha_j} = s_{\alpha_{i+1}} \ldots s_{\alpha_{j+1}}$$

dir.

Bu son ifade ile $\varphi = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_k}$ ifadesini $\varphi = s_{\alpha_1} \ldots \hat{s}_{\alpha_i} \ldots \hat{s}_{\alpha_{j+1}} \ldots s_{\alpha_k}$ şeklinde yazabiliriz. Böylece ispatımız tamamlanır.

Tanım 3.25. W = W (Δ) , $\Delta \subset E$ kök sistemi ile sonlu bir Euclid yansıma grubu olsun. $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell\}$ Δ için temel sistem olsun. Böylece W, $S = \{s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_\ell}\}$ temel yansımaları tarafından üretilir. $I \subset \{1, 2, \ldots, \ell\}$ için

$$W_I = \langle s_{\alpha_i} \mid i \in I \rangle \subset W$$

olsun. Böyle bir alt gruba W nin *parabolik bir alt grubu* denir $[7]$. Bu tanıma göre parobolik alt gruplar seçilen Σ ya bağımlıdır. O halde parobolik alt grupların tam bir kolleksiyonunu elde etmek için Δ nin bütün temel sistemlerini göz önüne almalıyız.

Şimdi Δ kök sistemi için bir Σ temel sistemini seçerek onu sabitleyelim. Bu durumda verilen bir başka Σ' temel sistemi bazı $\varphi \in$ W için $\Sigma' = \varphi\, \Sigma$ şeklinde yazılır. Böylece, $W(\Sigma')$ $= W(\varphi\, \Sigma) = \varphi W(\Sigma) \varphi^{-1}$ olduğundan, Σ yı kullanarak tanımlanan W nin parobolik alt grupları Σ' kullanarak tanımlanan parobolik alt gruplara konjugedirler.

W yansıma grubunun parobolik alt grupları daha başka bir yoldan aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir:

Şimdi Δ, W yansıma grubu ile ilişkili bir kök sistem olsun. $\Delta' \subset \Delta$ olmak üzere eğer Δ' gerdiği uzayda bir kök sistem ise bu taktirde Δ' ye Δ nın bir *alt kök sistemi* denir.

Δ' ve Δ'', Δ nın iki alt kök sistemi olmak üzere $\Delta' = \varphi\, \Delta''$ olacak şekilde en az bir $\varphi \in$ W elemanı mevcut ise bu taktirde Δ' ve Δ'' ye *konjuge alt kök sistemler* denir $[6]$. Şimdi $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\ell\}$, Δ nın bir temel sistemi olmak üzere $I \subset \{1, 2, ..., \ell\}$ için $\Sigma_I = \{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \Sigma$ olsun. Σ_I tarafından üretilen Δ nın bir alt kök sistemi Δ_I olsun, yani $\Delta_I = W(\Sigma_I)\, \Sigma_I$ dır. Böylece Σ_I, Δ_I için bir temel sistemdir.

$\varphi \in W(\Delta)$ olmak üzere Σ yı başka bir $\varphi\Sigma$ temel sistemi ile değiştirirsek bu durumda Δ_I alt kök sistemide onun konjugesi olan $\varphi\, \Delta_I$ ile yer değiştirir. Bu yolla elde edilen Δ nın bütün alt kök sistemlerine *parobolik alt kök sistemler* denir.

Böylece W = W (Δ) nın biraz önce tanımlamış olduğumuz W_I parobolik alt grubu

$$W_I = W(\Delta_I)$$

şeklinde yazılır. Yani bir parobolik alt kök sistem bir parobolik alt grup doğurur.

Lemma 3.26. Δ *bir kök sistem olmak üzere,* $\Delta'' \subset \Delta'$ *ve* $\Delta' \subset \Delta$ *birer parobolik alt kök sistemler ise* $\Delta'' \subset \Delta$ *da bir parobolik alt kök sistemdir* $[9]$.

İspat. $\Sigma \subset \Delta$ ve $\Sigma' \subset \Delta'$ temel sistemlerini alalım.

$$\Sigma_I \subset \Sigma \text{ ve } \Sigma_J' \subset \Sigma'$$

olduğundan $\Delta' \subset \Delta$ ve $\Delta'' \subset \Delta'$ birer parabolik alt kök sistemlerdir. Yani

$$\Delta' = \Delta_I \text{ ve } \Delta'' = \Delta_J'$$

dir. Σ' ve Σ_I temel sistemlerinin her ikisi de Δ' nin temel sistemleri olduğundan, $\Sigma' = \varphi\Sigma_I$ olacak şekilde $\varphi \in W' = W(\Delta')$ elemanı seçebiliriz.

Bu durumda

$$\Sigma_J' \subset \Sigma' = \varphi\Sigma_I \subset \varphi\Sigma$$

olduğundan $\Delta'' \subset \Delta$ bir parabolik alt kök sistemdir. Tanım 3.19 da verildiği gibi W(Δ) üzerinde verilen uzunluğu her bir temel sisteme göre tanımlayabiliriz. Eğer uygun seçimleri yaparsak bir yansıma grubu üzerinde tanımlanan uzunluk ile onun parabolik alt grupları üzerinde tanımlanan uzunluk arasında bir uyum olduğunu görebiliriz.

Σ , Δ kök sisteminde bir temel sistem olsun. Verilen $I \subset \{1,\ldots,\ell\}$ için $\Sigma_I \subset \Sigma$, $\Delta_I \subset \Delta$ parabolik alt kök sistemi için bir temel sistem olsun.

Verilen $\varphi \in W_I \subset W$ için,

$$\ell(\varphi) = \Sigma \text{ ya göre W daki uzunluk}$$

$$\ell_I(\varphi) = \Sigma_I \text{ ya göre } W_I \text{ daki uzunluk}$$

olsun. Bu durumda göstermek istiyoruzki W_I ve W üzerinde tanımlanan uzunluk fonksiyonları eşittir; yani $\ell_I = \ell$ dır. Gerçekten,

Lemma 3.27. *Her* $\varphi \in W_I$ *için* $\ell_I(\varphi) = \ell(\varphi)$ *dir* $[9]$.

İspat. $$\Delta = \Delta^{+} \cup \Delta^{-}$$

ifadesi Δ nın Σ ya göre pozitif kökler ve negatif köklere ayrılmış halidir. Ve

$$\Delta_I = \Delta_I^{+} \cup \Delta_I^{-}$$

ifadesi de Δ_I nın $\sum_I$ ya göre pozitif kökler ve negatif köklere ayrılmış halidir. İkinci parçalanma $\Delta = \Delta^{+} \cup \Delta^{-}$ nın Δ_I ya kısıtlanmasından elde edilir. Her $\varphi \in W$ için $\Delta(\varphi)$, φ tarafından Δ nın negatife dönüştürülen pozitif kökleri idi. Teorem 3.13 den $\ell(\varphi) = |\Delta(\varphi)|$ olduğunu biliyoruz. Benzer düşünce ile her $\varphi \in W_I$ için $\ell_I(\varphi) = |\Delta_I(\varphi)|$ diyebiliriz. Verilen $\varphi \in W_I$ için

$$\ell(\varphi) \leq \ell_I(\varphi) = |\Delta_I(\varphi)| \leq |\Delta(\varphi)| = \ell(\varphi)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece $\ell(\varphi) = \ell_I(\varphi)$ olduğu görülür.

Şimdi W_I nın koset temsilcilerini incelemek istiyoruz:

$$W^I = \{\varphi \in W \,|\, i \in I \text{ için}, \varphi\alpha_i > 0\}$$

$$= \{\varphi \in W \,|\, i \in I \text{ için}, \ \ell(\varphi s_{\alpha_i}) = \ell(\varphi) + 1\}$$

olsun.

Burada son eşitlik Önerme 3.22 den elde edilmiştir. Şimdi göstermek istiyoruzki W_I nın koset temsilcilerinin bir cümlesi W^I dır, yani

Lemma 3.28. *$\varphi_I \in W^I$, $\varphi_I \in W_I$ olmak üzere her $\varphi \in W$ elemanı $\varphi = \varphi^I \varphi_I$ şeklinde yazılabilir. Bir başka deyişle $W = \bigcup_{\varphi^I \in W^I} \varphi^I W_I$ dır* [7].

İspat. İspatımızı uzunluk üzerinde tümevarım ile yapacağız. $\varphi \notin W^I$ olsun. W^I nın yukarıdaki tanımından ve Önerme 3.22 den,

$$\ell(\varphi s_{\alpha_i}) = \ell(\varphi) - 1$$

olacak şekilde $i \in I$ indisi mevcuttur. Tümevarımdan, $\varphi^I \in W^I$ ve $\varphi_I \in W_I$ olmak üzere $\varphi s_{\alpha_i} = \varphi^I \varphi_I$ dır. Böylece

$$\varphi = \left(\varphi^I\right)\left(\varphi_I \, s_{\alpha_i}\right)$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

4. BÖLÜM

YANSIMA GRUPLARI VE COXETER GRUPLARI

Sonlu Euclid yansıma gruplarını anlamak için kullanılan temel cebirsel yapı bir Coxeter grubu kavramıdır. Şimdi W verilen bir grup olsun. W grubunun üreteçlerinin cümlesini S ile ve bu üreteçlerin aralarındaki ilişkiyi oluşturan bağıntıları R ile gösterirsek bu durumda W grubunu, $W = \langle S \mid R \rangle$ şeklinde gösterebiliriz. Yani,

Tanım 4.1. Eğer bir W grubu,

$$W = \left\langle s \in S \,\middle|\, (ss')^{m_{ss'}} = 1;\ m_{ss} = 1 \text{ ve } s \neq s' \text{ iken } m_{ss'} \in \{2, 3, ...\} \cup \{\infty\} \right\rangle$$

olacak şekilde bir S alt cümlesine sahip ise bu taktirde bu W grubuna bir *Coxeter grup* denir [5].

Eğer $m_{ss} = 1$ ise, her s için $s^2 = 1$ dır. Ayrıca,

$$m_{ss'} = 2 \Leftrightarrow ss'ss' = 1 \Leftrightarrow ss' = s's$$

dır. Fakat, $m_{ss'} \geq 3$ ise W yansıma grubu değişimli değildir.

W bir Coxeter grubu ve S de W nun üreteçlerinin bir cümlesi ise bu taktirde (W,S) ikilisine bir *Coxeter sistem* denir. Bu bölümde sonlu yansıma gruplarını göz önüne alarak sonlu Coxeter sistemleri üzerinde çalışacağız. Şimdi (W,S) ve (W',S') verilen iki Coxeter sistem olsun. Eğer S cümlesini S' cümlesine götüren bir $W \to W'$ grup izomorfizmi varsa bu taktirde (W,S) ve (W',S') birbirine *izomorfiktir* denir.

Tanım 4.2. (W,S) bir Coxeter sistem olsun. $\varnothing \neq S_1 \subset W_1$, $\varnothing \neq S_2 \subset W_2$ ve (W_1, S_1) , (W_2, S_2) Coxeter sistemler olmak üzere eğer $\mathrm{W} = \mathrm{W}_1 \times \mathrm{W}_2$ ve $S = S_1 \cup S_2$ ise (W,S) Coxeter sistemine *indirgenebilirdir* denir. Aksi durumda (W,S) Coxeter sistemine *indirgenemezdir* denir. Eğer $|S| = \ell$ ise (W,S) Coxeter sisteminin *rankı* ℓ dir denir $[5]$.

Şimdi verilen bir gruba ait olan Coxeter sistemlerinin nasıl inşa edildiğini aşağıdaki örnekte göstermek istiyoruz.

Örnek 4.3. D_6 dihedral grubunu göz önüne alalım. İlk olarak

$$D_6 = \left\langle s_1, s_2 \,\middle|\, (s_1)^2 = (s_2)^2 = (s_1 s_2)^6 = 1 \right\rangle$$

gösterimini ele alırsak bu taktirde D_6 dihedral grubu için rankı 2 olan indirgenemez bir Coxeter sisteme sahip oluruz. Fakat, D_6 dihedral grubunu,

$$D_3 = \left\langle s_1, s_2 \,\middle|\, (s_1)^2 = (s_2)^2 = (s_1 s_2)^3 = 1 \right\rangle$$

$$\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \left\langle s_3 \,\middle|\, (s_3)^2 = 1 \right\rangle$$

olmak üzere, $D_6 = D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ şeklinde de ifade edebiliriz. Bu durumda D_6 dihedral grubu için rankı 3 olan indirgenebilir bir Coxeter sisteme sahip oluruz. Görüldüğü gibi verilen bir gruba tamamen farklı Coxeter sistemler seçmek mümkündür.

Coxeter sistemleri grafikler ile göstermek kolay anlaşılması bakımından daha uygundur. Beşinci bölümde Coxeter sistemlerden çok Coxeter grafikler ile çalışacağız.

Tanım 4.4. Bir *Coxeter grafiği* her bir kenarı 3 veya 3 den büyük bir tamsayı ile etiketlenmiş bir grafiktir.

Bir Coxeter sisteme bir Coxeter grafiği tayin etmenin standart bir metodu vardır:

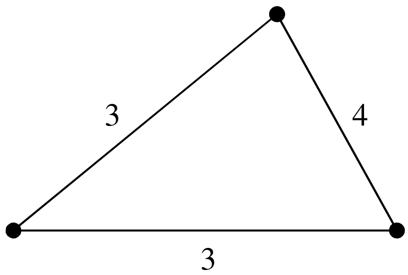
Bir (W,S) Coxeter sistemi verilsin, aşağıdaki şartları sağlayan X e (W,S) Coxeter sisteminin bir *Coxeter grafiği* denir.

(i) S = X in düğümleridir.

(ii) Verilen $s, s' \in S$ için $m_{ss'} = 2$ ise s ve s' arasında hiçbir kenar yoktur.

(iii) Verilen $s, s' \in S$ için, eğer $m_{ss'} \geq 3$ ise s ile s'düğümleri arasında $m_{ss'}$ ile etiketli bir kenar vardır $[9]$.

Coxeter sistem ve Coxeter grafik arasında birebir bir tekabüliyet vardır. Örneğin

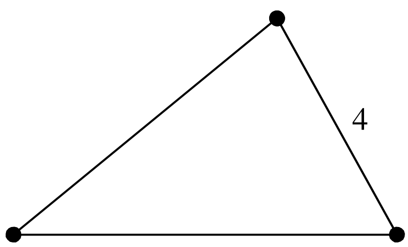


Coxeter grafiği

$$W = \left\langle s_1, s_2, s_3 \,\middle|\, (s_1 s_2)^3 = (s_1 s_3)^4 = (s_2 s_3)^3 = (s_1)^2 = (s_2)^2 = (s_3)^2 = 1 \right\rangle$$

Coxeter gösterimine karşılık gelir.

Coxeter grafikler, Coxeter sistemler için mükemmel modellerdir. Burada özel olarak (W,S) indirgenemezdir ancak ve ancak onun Coxeter grafiği olan X bağlantılı ise. Bundan sonra $m_{ss'} = 3$ ise Coxeter grafik üzerinde 3 tamsayısını yazmayacağız. Böylece yukarıda verilen Coxeter grafiği



şeklinde göstereceğiz.

Bu bölümündeki asıl amacımız, sonlu Euclid yansıma grupları ile sonlu Coxeter sistemleri arasında bir bağlantı kurmaktır. Bir

$$\psi : \left\{ \begin{matrix} \text{sonlu yansıma gruplarının} \\ \text{izomorfizm sınıfları} \end{matrix} \right\} \to \left\{ \begin{matrix} \text{sonlu Coxeter sistemlerin} \\ \text{izomorfizm sınıfları} \end{matrix} \right\}$$

dönüşümü tanımlayalım.

Yani, sonlu bir Euclid yansıma grubuna bir Coxeter sisteminin nasıl karşılık getirildiğini temel bir metodla gösterelim: Bir W $\subset$ O(E) sonlu yansıma alt grubu verilsin, (W,S) bir Coxeter sistem ve S nin seçimi izomorfizmlerine kadar tek olacak şekilde S$\subset$W cümlesini belirlemek istiyoruz. Tanım 3.3 deki gibi temel yansımaların bir cümlesi S olsun. W yansıma alt grubu Δ kök sistemine karşılık gelen bir grup olsun. Bu durumda Δ nın bir $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\ell\}$ temel sistemini seçelim ve burada S, S= $\{s_{\alpha_i}\}$ temel yansımalarına karşılık gelsin. Verilen $1 \leq i, j \leq \ell$ için

$$\left(s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}\right)^{m_{ij}} = 1$$

olsun. Bu durumda,

Teorem 4.5. *Δ kök sistemine karşılık gelen W yansıma grubu* $W(\Delta) = \left\langle \{s_{\alpha_i}\} \middle| (s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1 \right\rangle$ *şeklinde bir gösterime sahiptir* $[14]$.

İspat. $W(\Delta)$, $S = \{s_{\alpha_i}\}$ temel yansımaları tarafından üretilir. $W(\Delta)$ yansıma grubundaki herhangi bir bağıntı $\beta_i \in \Sigma$ olmak üzere

$$s_{\beta_1} s_{\beta_2} \dots s_{\beta_k} = 1 \quad \dots \quad (*)$$

formunda yazılabilir. Ayrıca (*) ifadesini

$$\left. \begin{matrix} s_{\beta_2} s_{\beta_3} \dots s_{\beta_k} s_{\beta_1} = 1 \\ s_{\beta_3} s_{\beta_4} \dots s_{\beta_k} s_{\beta_1} s_{\beta_2} = 1 \\ s_{\beta_4} s_{\beta_5} \dots s_{\beta_k} s_{\beta_1} s_{\beta_2} s_{\beta_3} = 1 \\ \vdots \end{matrix} \right\} \quad \dots \quad (**)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Şimdi verilen $(s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1$ bağıntısının sonucu olmayan bağıntıların var olduğunu kabul edelim. Kabul edelim ki (*) ifadesi böyle bir bağıntı olsun. Burada, (*) ifadesindeki k yi mümkün olduğunca küçük seçelim. Şimdi göstermek istiyoruzki (*) ifadesi üzerindeki bu kabuller bir çelişki üretir.

İlk olarak, $\det\,(s_{\beta_1}\, s_{\beta_2} \ldots s_{\beta_k}) = (-1)^k$ olduğundan

$$k = 2\,m$$

seçmeliyiz. Çelişki elde etmek için

$$\begin{aligned} s_{\beta_1} &= s_{\beta_3} = \ldots = s_{\beta_{2m-1}} \\ s_{\beta_2} &= s_{\beta_4} = \ldots = s_{\beta_{2m}} \end{aligned} \qquad \ldots \quad (***)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü (*) bağıntısı $(s_{\beta_1}\, s_{\beta_2})^m = 1$ olmaktadır. Fakat $m_{\beta_1 \beta_2}$, $s_{\beta_1}\, s_{\beta_2}$ nin mertebesi olduğundan $m_{\beta_1\beta_2} \mid m$ dır. Böylece (*) ifadesi verilen $\left\{(s_{\beta_1}\, s_{\beta_2})^{m_{ij}} = 1\right\}$ bağıntısının bir sonucu olur ve buradan da istediğimiz çelişkiye ulaşmış oluruz.

(***) ifadesinde ispatlayacağımız kısım sadece $s_{\beta_1} = s_{\beta_3}$ dır. (***) ın geri kalan kısımlarını ispatlamak için (*) bağıntısını (**) formunda yeniden yazacağız ve aynı tartışmayı uygulayacağız. $s_{\beta_1} = s_{\beta_3}$ ün ispatını aşağıdaki

(I) $s_{\beta_1} s_{\beta_2} \ldots s_{\beta_m} = s_{\beta_2} s_{\beta_3} \ldots s_{\beta_{m+1}}$;

(II) $s_{\beta_3} s_{\beta_2} \ldots s_{\beta_m} = s_{\beta_2} s_{\beta_3} \ldots s_{\beta_{m+1}}$,

bağıntılarından yararlanıp yapacağız.

O halde ilk olarak (I) ve (II) bağıntılarını sırasıyla ispatlayalım.

(I) Bağıntısının İspatı. $s_{\beta_1}\, s_{\beta_2} \ldots s_{\beta_k} = 1$ bağıntısını

(i) $s_{\beta_1}\, s_{\beta_2} \ldots s_{\beta_{m+1}} = s_{\beta_{2m}}\, s_{\beta_{2m-1}} \ldots s_{\beta_{m+2}}$ şeklinde yeniden yazabiliriz. Böylece bu eşitlikten $\ell\left(s_{\beta_1}\, s_{\beta_2} \ldots s_{\beta_{m+1}}\right) < m+1$ olur. Sonuç 3.21 den

(ii) $s_{\beta_i} s_{\beta_{i+1}} \dots s_{\beta_j} = s_{\beta_{i+1}} \dots s_{\beta_{j+1}}$ olacak şekilde $1 \le i < j \le \ell$ vardır. Burada bize i = 1 ve j = m olduğunun ispatlanması kalıyor. Eğer i = 1 ve j = m olmasaydı (ii) bağıntısı k = 2m den daha az terim ihtiva ederdi; ve böylece verilen $\left\{ (s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1 \right\}$ bağıntısından (ii) bağıntısı elde edilir. Fakat,

(iii) $s_{\beta_1} s_{\beta_2} \dots s_{\beta_{2m}} = s_{\beta_1} \dots \hat{s}_{\beta_i} \dots \hat{s}_{\beta_{j+1}} \dots s_{\beta_{2m}}$ bağıntısı da yine verilen bağıntıdan elde edilir. Üstelik, (*) bağıntısı yardımıyla (iii) nin sağ tarafı 1 e eşitlenebilir. Böylece

(iv) $s_{\beta_1} \dots \hat{s}_{\beta_i} \dots \hat{s}_{\beta_{j+1}} \dots s_{\beta_{2m}} = 1$ bağıntısını elde ederiz. (iv) ifadesindeki terimlerin sayısı k = 2m den küçük olduğundan (iv) ifadesi yine verilen bağıntıdan elde edilir. (iii) ve (iv) bağıntıları birlikte göz önüne alınırsa (*) bağıntısı verilen bağıntıdan elde edilir. Bu ise çelişkidir.

(II) Bağıntısının İspatı. (*) bağıntısını $s_{\beta_2} \dots s_{\beta_{2m}} s_{\beta_1} = 1$ şeklinde yeniden yazabiliriz. (I) bağıntısının ispatına benzer olarak

$$s_{\beta_2} \dots s_{\beta_{m+1}} = s_{\beta_3} \dots s_{\beta_{m+2}}$$

elde edilir. Ve bu bağıntı

$$s_{\beta_3} \left(s_{\beta_2} \dots s_{\beta_{m+1}} \right) s_{\beta_{m+2}} s_{\beta_{m+1}} \dots s_{\beta_4} = 1$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Buradan da

$$s_{\beta_3} s_{\beta_2} \dots s_{\beta_m} = s_{\beta_2} \dots s_{\beta_{m+1}}$$

elde edilir. (I) ve (II) bağıntıları göz önüne alınırsa bu bağıntıların sağ tarafları aynı olduğundan sol tarafları da birbirlerine eşittir. Bu ise $s_{\beta_1} = s_{\beta_3}$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Şimdi Coxeter sistemler için beşinci bölümde önemli rol alan iki özelliği vermek istiyoruz.

Lemma 4.6. *Her* $\alpha, \beta \in \Delta$ *için*

(1) $s_\alpha \beta = \beta - 2\langle \alpha, \beta \rangle \alpha$

(2) $(s_\alpha s_\beta)^m = 1 \Leftrightarrow \alpha \, ile \, \beta \, arasındaki \, açı \;\; \pi - \dfrac{\pi}{m}$

$$\Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

dır $[9]$.

Biliyoruz ki α ve β vektörleri arasında ki açı φ ise bu durumda

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \, \|\beta\| \cos \varphi$$

idi. $\alpha \, ile \, \beta \, arasındaki \, açı \;\; \varphi = \pi - \dfrac{\pi}{m}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \|\alpha\| \, \|\beta\| \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

5. BÖLÜM

COXETER SİSTEMLERİNİN VE YANSIMA GRUPLARININ SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde, sonlu Coxeter sistemlerin ve sonlu Euclid yansıma gruplarının bir sınıflandırılmasını elde etmek istiyoruz.

Dördüncü bölümde her yansıma grubunun ilişkili olduğu bir Coxeter sisteme sahip olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla Coxeter sistemlerin ve Euclid yansıma gruplarının sınıflandırılması da birbiriyle ilişkilidir. Coxeter sistemleri ise Coxeter grafikleri ile göstermek Coxeter sistemlerin anlaşılması bakımından daha uygun idi. Böylece sonlu yansıma gruplarını göz önüne alarak Coxeter sistemleri, Coxeter sistemleri de göz önüne alarak Coxeter grafikleri elde ettik. Sonlu yansıma gruplarının da kök sistemlerinden elde edildiğini biliyoruz. Dolayısıyla uygun bir kök sistem aramak yeterlidir. Bir kök sistem ile ilişkili Coxeter grafiği (=Coxeter sistemi) belirlemek kolay olduğundan sınıflandırma problemi daha kolay hale gelmektedir.

Tanım 5.1. Δ bir kök sistem olsun. Δ nın bir $\Sigma=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\ell\}$ temel sistemi verilsin, bu taktirde her bir $1 \leq i < j \leq \ell$ için bazı $m_{ij} \in Z^+$ olmak üzere

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \, \|\alpha_j\|} = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)$$

dir. Aşağıdaki kurallar ile Δ kök sistemine bir X Coxeter grafiği karşılık getiriyoruz:

(i) $\Sigma = X$ in düğümleridir.

(ii) Verilen $\alpha_i \neq \alpha_j \in \Sigma$ için, eğer $m_{ij} = 2$ ise α_i ve α_j arasında bir kenar yoktur.

(iii) Verilen $\alpha_i \neq \alpha_j \in \Sigma$ için, eğer $m_{ij} \geq 3$ ise α_i ve α_j düğümleri arasında m_{ij} ile etiketli bir kenar vardır.

Δ nın Coxeter grafiği, $\mathrm{W}(\Delta)$ nın Coxeter grafiğine ait olan bağıntıya sahiptir. Yani,

Lemma 5.2. Δ *nın Coxeter grafiği, $W(\Delta)$ nın Coxeter grafiğine eşittir* $[9]$.

İspat. $\Sigma=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\ell\}$ düğümleri ile $S=\{s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},...,s_{\alpha_\ell}\}$ temel yansımaları arasında bire bir eşleme vardır. Ayrıca bu tekabüliyet karşılık getirilen kenarlar ile de uyumludur. Çünkü,

α_i ve α_j arasında m mertebeli bir kenar vardır $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\langle \alpha_i,\alpha_j\rangle}{\|\alpha_i\|\,\|\alpha_j\|}=-\cos\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$

ise. Oysa ki, s_{α_i} *ve* s_{α_j} temel yansımaları arasında m mertebeli bir kenar vardır $\Leftrightarrow$ $\left(s_{\alpha_i}s_{\alpha_j}\right)^m=1$ ise. Dolayısıyla, Lemma 4.6 nın ikinci şıkkından

$$\left(s_{\alpha_i}\,s_{\alpha_j}\right)^m=1 \Leftrightarrow \frac{\langle \alpha_i,\alpha_j\rangle}{\|\alpha_i\|\,\|\alpha_j\|}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar.

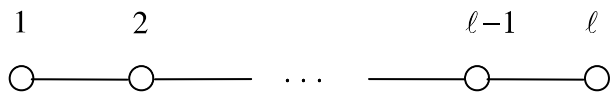
Böylece bir kök sistemin Coxeter grafiği, ondan elde ettiğimiz Coxeter grubunun ne olduğunu bize tam olarak anlatır.

Şimdi Coxeter grafine sahip olan kök sistemlerin bir tam listesini vermek istiyoruz. E Euclid uzayı IR veya $IR^{\ell+1}$ olmak üzere, $\{e_i\}$, E Euclid uzayının ortanormal bir bazı olsun $[3,8,9]$.

(a) A_ℓ kök sistemi = $\{e_i-e_j \mid i\neq j, 1\leq i, j\leq \ell+1\}$ dır. A_ℓ nin temel sistemi

$$\Sigma_{\mathrm{A}_\ell}=\{\alpha_i=e_i-e_{i+1} \mid i=1,2,...,\ell\}$$

dır. Eğer i = 1,2,…, ℓ için α_i, i ile gösterilir ise A_ℓ kök sisteminin Coxeter grafiği

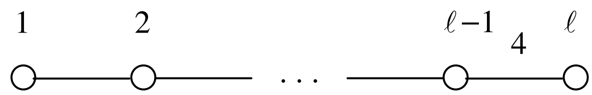


şeklindedir.

(b) B_ℓ kök sistemi = $\left\{ \pm e_i \,\middle|\, 1 \le i \le \ell \right\} \cup \left\{ \pm e_i \pm e_j \,\middle|\, 1 \le i < j \le \ell \right\}$ dır. B_ℓ nin temel sistemi

$$\sum_{B_\ell} = \left\{ \alpha_i = e_i - e_{i+1} \,\middle|\, i = 1, 2, \ldots, \ell - 1 \right\} \cup \left\{ \alpha_\ell = e_\ell \right\}$$

dır. Eğer i = 1,2,…, ℓ için α_i, i ile gösterilirse B_ℓ kök sisteminin Coxeter grafiği

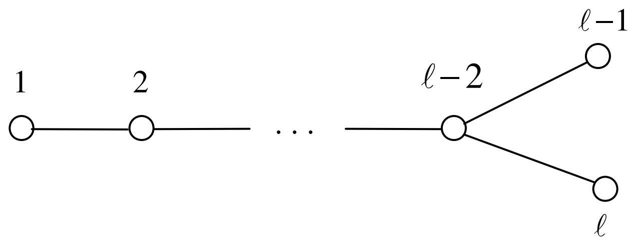


şeklindedir.

(c) D_ℓ kök sistemi = $\left\{ \pm e_i \pm e_j \,\middle|\, 1 \le i < j \le \ell \right\}$ dır. D_ℓ nin temel sistemi

$$\sum_{D_\ell} = \left\{ \alpha_i = e_i - e_{i+1} \,\middle|\, i = 1, 2, \ldots, \ell - 1 \right\} \cup \left\{ \alpha_\ell = e_{\ell-1} + e_\ell \right\}$$

dır. Eğer i = 1,2,…, ℓ için α_i, i ile gösterilirse D_ℓ kök sisteminin Coxeter grafiği



şeklindedir.

(d) E_8 kök sistemi = $\Delta_1 \cup \Delta_2$ dır. Burada

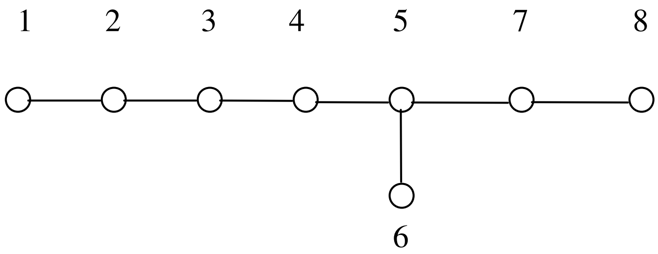
$$\Delta_1 = \left\{ \pm e_i \pm e_j \,\middle|\, 1 \le i < j \le 8 \right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \lambda_i \, e_i \,\middle|\, \lambda_i = \pm 1 \;\; ve \;\; \prod_{i=1}^{8} \lambda_i = 1 \right\}$$

şeklindedir. E_8 kök sisteminin temel sistemi

$$\Sigma_{E_8} = \left\{ \alpha_i = e_i - e_{i+1} \,\middle|\, 1 \le i \le 6 \right\} \cup \left\{ \alpha_7 = e_6 + e_7 \,, \alpha_8 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} e_i \right\}$$

dır. Eğer i = 1,2,…,8 için α_i, i ile gösterilirse E_8 kök sisteminin Coxeter grafiği



şeklindedir.

(e) E_7 kök sistemi = $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ dır. Burada

$$\Delta_1 = \left\{ \pm e_i \pm e_j \,\middle|\, 2 \le i < j \le 7 \right\}$$

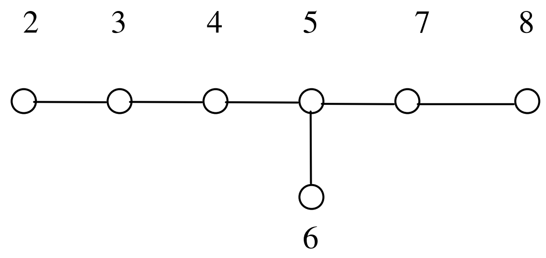
$$\Delta_2 = \left\{ \pm (e_1 + e_8) \right\}$$

$$\Delta_3 = \left\{ \pm\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \lambda_i \, e_i \,\middle|\, \lambda_i = \pm 1, \lambda_1 = \lambda_8 = 1, \; \prod_{i=1}^{8} \lambda_i = 1 \right\}$$

şeklindedir. E_7 kök sisteminin temel sistemi

$$\Sigma_{E_7} = \left\{ \alpha_i = e_i - e_{i+1} \,\middle|\, 2 \le i \le 6 \right\} \cup \left\{ \alpha_7 = e_6 + e_7 \,, \; \alpha_8 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} e_i \right\}$$

dır. Eğer i = 2,…,8 için α_i, i ile gösterilirse E_7 kök sisteminin Coxeter grafiği



şeklindedir.

(f) E_6 kök sistemi = $\Delta_1 \cup \Delta_2$ dır . Burada

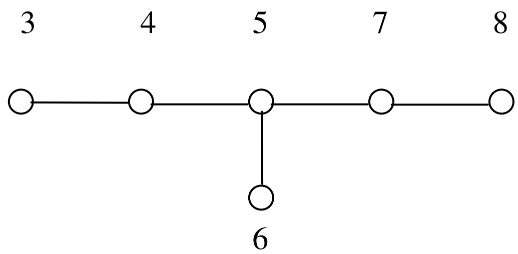
$$\Delta_1 = \left\{ \pm e_i \pm e_j \,\middle|\, 3 \leq i < j \leq 7 \right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \pm \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} \lambda_i e_i \,\middle|\, \lambda_i = \pm 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_8 = 1, \prod_{i=1}^{8} \lambda_i = 1 \right\}$$

şeklindedir. E_6 kök sisteminin temel sistemi

$$\Sigma_{E_6} = \left\{ \alpha_i = e_i - e_{i+1} \middle| 3 \leq i \leq 6 \right\} \cup \left\{ \alpha_7 = e_6 + e_7 \,,\, \alpha_8 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} e_i \right\}$$

dır. Eğer i = 3,4,…,8 için α_i, i ile gösterilirse E_6 kök sisteminin Coxeter grafiği



şeklindedir.

(g) F_4 kök sistemi = $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ dır. Burada

$$\Delta_1 = \left\{ \pm e_i \,\middle|\, 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

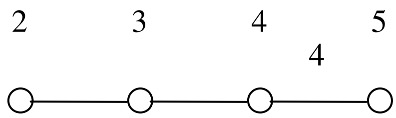
$$\Delta_2 = \left\{ \pm e_i \pm e_j \,\middle|\, 1 \le i < j \le 4 \right\}$$

$$\Delta_3 = \left\{ \frac{1}{2}\left(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \right) \right\}$$

dir. F_4 kök sisteminin temel sistemi

$$\Sigma_{F_4} = \left\{ \alpha_i = e_i - e_{i+1} \,\middle|\, 2 \le i \le 3 \right\} \cup \left\{ \alpha_4 = e_4, \alpha_5 = \frac{1}{2}\left(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 \right) \right\}$$

şeklindedir. Eğer i = 2,…,5 için α_i, i ile gösterilirse F_4 kök sisteminin Coxeter grafiği

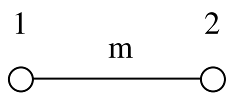


şeklindedir.

(h) G_2 (m) kök sistemi $= \left\{ \left(\cos\left(\frac{k\pi}{m} \right), \sin\left(\frac{k\pi}{m} \right) \right) \,\middle|\, 0 \le k \le 2m-1 \right\}$ dır. G_2 (m) nin temel sistemi

$$\Sigma_{G_2\,(m)} = \left\{ \alpha_i = \left(\cos\left(\frac{i\pi}{m} \right), \sin\left(\frac{i\pi}{m} \right) \right) \,\middle|\, i = 1, 2 \right\}$$

şeklindedir. Eğer i = 1, 2 için α_i, i ile gösterilirse G_2 (m) kök sisteminin Coxeter grafiği



şeklindedir.

Şimdi $\beta = \cos\left(\frac{\pi}{5} \right)$ diyelim.

(i) H_3 kök sistemi = $\Delta_1 \cup \Delta_2$ dır. Burada

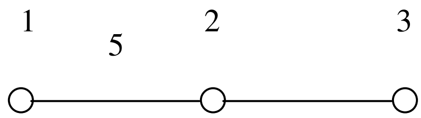
$$\Delta_1 = \{\pm e_i \mid 1 \le i \le 3\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \left(\pm\left(\beta + \frac{1}{2}\right), \pm\beta, \pm\frac{1}{2} \right) \textit{ nın bütün çift permütasyonları} \right\}$$

şeklindedir. Σ_{H_3} nin temel sistemi

$$\Sigma_{H_3} = \left\{ \alpha_1 = \left(\frac{1}{2} + \beta, \beta, -\frac{1}{2}\right), \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2} - \beta, \beta, \frac{1}{2}\right), \alpha_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \beta, \beta\right) \right\}$$

dır. Eğer i = 1,2,3 için α_i, i ile gösterilirse H_3 kök sisteminin Coxeter grafiği



şeklindedir.

(j) H_4 kök sistemi = $\Delta_1 \cup \Delta_2$ dır. Burada

$$\Delta_1 = \{\pm e_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1) \right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ \left(\pm\left(\beta + \frac{1}{2}\right), \pm\beta, \pm\frac{1}{2}, 0 \right) \textit{ nın bütün çift permütasyonları} \right\}$$

şeklindedir. H_4 nin temel sistemi

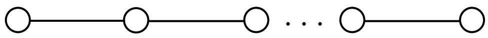
$$\Sigma_{H_4} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \left(\frac{1}{2} + \beta, \beta, -\frac{1}{2}, 0\right), \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2} - \beta, \beta, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \alpha_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \beta, \beta, 0\right), \alpha_4 = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} - \beta, \beta\right) \end{array} \right\}$$

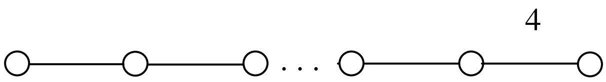
dir. Eğer i =1, 2, 3, 4 için α_i, i ile gösterilirse H_4 kök sisteminin Coxeter grafiği

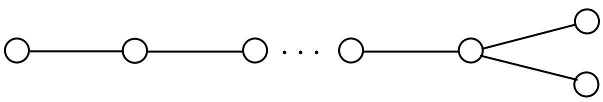
olur.

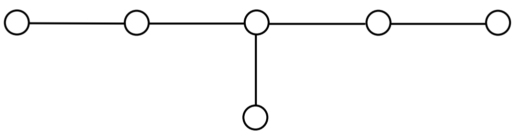
Böylece, sonlu yansıma gruplarının (sonlu Coxeter sistemlerinin) sınıflandırılması tamamlanmış olur. Aşağıdaki teorem sonlu indirgenemez yansıma gruplarının bir tam listesini verir.

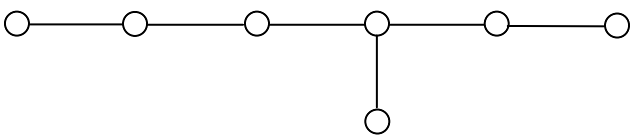
Teorem 5.3. *Eğer (W,S) indirgenemez bir sonlu Coxeter sistem ise bu taktirde (W,S) Coxeter sisteminin grafiği aşağıdakilerden birisidir* $[12]$:

(A_ℓ)  $(\ell \geq 1)$

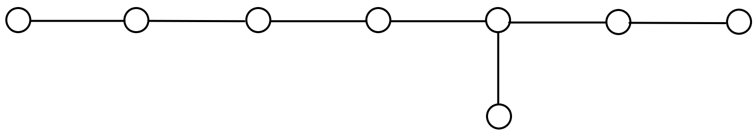
$(B_\ell \; veya \; C_\ell)$  $(\ell \geq 2)$

(D_ℓ)  $(\ell \geq 4)$

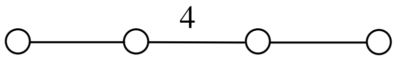
(E_6) 

(E_7) 

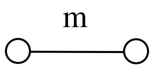
(E_8)



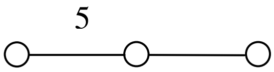
(F_4)



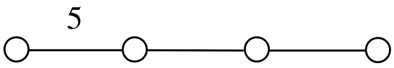
$(G_2(m))$



(H_3)



(H_4)



.

KAYNAKLAR

1. Benson, C. T., Grove, L. C., Finite reflection groups, Graduate texts in Math., no: 99, Springer-Verlag, 1983.
2. Carter, R. W., Finite groups of Lie type, John Wiley and sons, New York, 1985.
3. Carter, R. W., Simple groups of Lie type, John Wiley and sons, London, 1972.
4. Carter, R. W., Conjugacy classes in the Weyl groups, Compositio Math., 25, 1-59, 1972.
5. Deodhar, V. V., On the root system of a Coxeter group, Comm. Algebra, 10, 611 630, 1982
6. Flatto, L., Invariants of finite reflection groups, Enseign. Math., 2(24), 237-292, 1978.
7. Howlett, R. B., Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups, J. London Math. Soc., (2) 21, 62-80, 1980.
8. Humphreys, J, E., Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Studies in Advenced Math., vol. 29, Cambridge Universty Press, 1990.
9. Kane, R., Reflection groups and invariant theory, CMS Books in Math., Springer-Verlag, New York, 2001.
10. Orlik, P., Solomon, L., Unitary reflection groups and cohomology, Invent. Math., 59(1), 77-94, 1980.
11. Serre, J., P., Linear representations of finite groups, Graduate texts in Math., no.42, Springer-Verlag, 1977.
12. Shephard, G. C., Todd, J. A., Finite unitary reflection groups, Canad. J. Math., 6, 274-304, 1954.
13. Springer, T., A., Regular elements of finite reflection groups, Invent. Math., 25, 159-198, 1954.
14. Steinberg, R., Invariants of finite reflection groups, Canad. J. Math., 12, 616-618, 1960.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Neslihan DURAN
Baba Adı	: Muammer
Ana Adı	: Fatma
Doğum Yeri	: Kayseri
Doğum Tarihi	: 05.07.1981

İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden lisans diploması alarak 2004 yılında mezun oldu.

2005 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı.

Duran, halen özel bir dershanede Matematik Öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

Adres : Gökkent Mh. 498. Sk. Deniz Apt. Kat:10 No:28 Melikgazi, KAYSERİ.

Gsm : 0535 296 41 83