

## ÖZET

Doktora Tezi

### PERİYODİK LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİN SCHUR KARARLILIĞININ HASSASİYETİ

Ahmet DUMAN

Selçuk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : **Doç. Dr. Kemal AYDIN**

2008, 73 + viii Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Ali SİNAN  
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL  
Prof. Dr. Ülfet ATAV  
Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM  
Doç. Dr. Kemal AYDIN

Bu çalışmada, Schur kararlı periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin maruz kalabileceği etkilere vereceği tepkinin sistem çözülmeden önceden bilinmesi konusu incelenmiştir. Bu kapsamda, sabit katsayılı fark denklem sistemleri için daha fazla pertürbeye imkan sağlayan süreklilik teoremi, periyodik sistemlerin  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  Schur kararlılık parametreleri arasındaki fonksiyonel eşitsizlikler, monodromi matrisleri üzerine üst sınırları pertürbeye bağlı süreklilik teoremleri, Schur kararlı periyodik sistemlerin pertürbeye ne kadar dayanıklı olduğunu açıkça gösteren farklı sonuçlar,  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  Schur kararlılık parametrelerine bağlı süreklilik teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen bütün sonuçlar nümerik örneklerle hem desteklenmiş, hem de literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Periyodik katsayılı fark denklem sistemleri, Schur kararlılık, Schur kararlılık parametreleri, Hassasiyet, Pertürbe sistemleri

## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

### SENSITIVITY of SCHUR STABILITY of PERIODIC LINEAR DIFFERENCE EQUATION SYSTEMS

Ahmet DUMAN

Selcuk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor : **Assoc. Prof. Dr. Kemal AYDIN**

2008, 73 + viii Page

Jury: Prof. Dr. Ali SİNAN  
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL  
Prof. Dr. Ülfet ATAV  
Assoc. Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM  
Assoc. Prof. Dr. Kemal AYDIN

In this work, the reaction given by Schur stable systems of linear difference equations with periodic coefficients to an effect applied to that has been investigated without solving the system. In this aspects, continuity theorem giving possibility of more perturbation for difference equation systems with constant coefficient, functional inequalities between  $\omega_1$  and  $\omega_2$  Schur stability parameters of periodic systems, continuity theorems in terms of upper bounds of monodromy matrices depending on perturbation, different results showing how Schur stable periodic systems present sensitivity to perturbation, continuity theorems depending on  $\omega_1$  and  $\omega_2$  Schur stability parameters have been obtained. Moreover, all the results obtained are not only supported by numerical examples but also compared with the existing results in the literature.

**Key words:** The discrete-time equations with periodic coefficients, Schur stability, parameter of Schur stability, sensitivity, perturbation systems

# 1. GİRİŞ

Bir problemin çözümünün hareketini tahmin etmek ve teorik olarak değişik etkilere *ne kadar* maruz kaldığında hala yapısını, karakterini koruduğunu bilmek uygulama alanlarında önemli avantajlar sağlamaktadır. Problemin giriş elemanlarında ne kadar bir değişim yapıldığında problemin yapısının değişmediğini, hangi şartlarda karakterinin korunduğunun önceden bilinmesi uygulamada kaos oluşma riskini ortadan kaldırır.

Verilen problemin “*etkilere vereceği tepkinin sorgulanması ve yapısını değiştirmeyen etkilerin şartlarının belirlenmesi*” hassasiyet problemi olarak adlandırılmaktadır. Bir problemin hassasiyetinin, yani ne kadar dayanıklı olduğunun bilinmesi, problemin yapısı değişmeden girdilerinde uygun değişimler yapılmasına imkan sağlar. Problemin hassasiyeti, problemin dayanıklılığının ölçüsünün belirlenmesi olarak da değerlendirilebilir. Problemin türüne göre; sonuçta para, iş gücü, zaman veya can kayıpları ile karşılaşmamak için problemi çözmeden verilen sistemin dayanıklılığı önceden bilinmelidir.

## 1.1. Literatür Özeti ve Problemin Tanıtımı

Problemin hassasiyetini belirleyen şartlar literatürde süreklilik teoremleri olarak bilinen teoremlerle ortaya çıkarılmaktadır. Süreklilik teoremleri problemin giriş elemanlarında ne kadar bir değişim olduğunda problemin yapısının korunduğunun bilinmesini sağlamaktadır. Süreklilik teoremleri, denklem teorisinin hemen hemen her alanında kullanılmaktadır. Mesela lineer cebirsel denklemler, diferensiyel denklemler, fark denklemler, v.b. denklemlerin çözümlerinin hassasiyetinin araştırılmasında süreklilik teoremleri ile karşılaşmaktadır.

Lineer cebirin klasik problemi olan  $Ax = f$  probleminin hassasiyeti için literatürde bir çok çalışma yapılmıştır. Bu problemin “*çözümünün var ve tek olması*” özelliği, sistemin  $\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  şart sayısına bağlı olarak  $\mu(A) \frac{\|B\|}{\|A\|} < \frac{1}{4}$  şartını sağlamak üzere  $A+B$  matrisleri için de korunmaktadır (Wilkinson 1965,

Rice 1966, Godunov ve ark. 1993, Godunov 1998, Gerald and Wheatley 1999, Bulgak 1999, Bulgak ve Bulgak 2001).

Kararlılık teorisinde, kararlı matrislerin kararlı olmayan matrislere olan uzaklığı genellikle ilgi çekici bir problem olmuş ve çalışılmıştır (Van Loan 1985). Şimdi yapılan bu çalışmaların bazılarında bahsedelim.

Sabit katsayılı lineer  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$  diferensiyel denklem sisteminin *Hurwitz kararlılık parametresi*  $\kappa(A) < \infty$  olmak üzere sistem Hurwitz kararlı iken  $\frac{\|B\|}{\|A\|} \leq \frac{1}{15\kappa(A)}$  olacak şekilde her hangi bir  $B$  matrisi için  $A+B$  matrisi de Hurwitz kararlı olma özelliğini korumaktadır (Bulgak 1999).

Sabit katsayılı lineer  $x(n+1) = Ax(n)$  fark denklem sisteminin *Schur kararlılık parametresi*  $\omega(A) < \infty$  olmak üzere  $\|B\| \leq \frac{1}{20\omega^{\frac{3}{2}}(A)}$  şartını sağlayan  $B$  matrisleri için  $A+B$  matrisleri de Schur kararlı olmaktadır (Bulgak 1999).

Lineer cebirsel denklem sistemleri, lineer diferensiyel denklem sistemleri ve lineer fark denklem sistemlerine benzer olarak, periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri için de literatürde süreklilik teoremleri verilmiştir. Literatürdeki süreklilik teoremleri sistemin monodromi matrisi ve Schur kararlılık parametreleri ( $\omega_1, \omega_2$  parametreleri) üzerine verilmiştir. Örneğin,

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad A(n) = A(n+T), \quad T > 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

sisteminin monodromi matrisi  $X(T)$  Schur kararlı ( $\omega_1(A, T) = \omega(X(T)) < \infty$ ) olmak üzere

$$\|Y(T) - X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A, T)}} - \|X(T)\|$$

eşitsizliğini sağlayan  $Y(T)$  matrisi de Schur kararlı olmaktadır. Burada  $Y(T)$ ,  $A(n)+B(n)$  matrisine karşılık gelen monodromi matrisi,  $B(n)$  matrisi  $A(n)$  matrisini pertürbe eden matris ve  $\omega_1(A, T) = \omega(X(T))$  ise verilen periyodik sistemin Schur kararlılık parametresidir (Aydın ve ark. 2000, Aydın ve ark. 2001). Bu süreklilik

teoreminde, sistemin Schur kararlılığının korunması için gereken şartlar, pertürbe matris  $B(n)$  üzerine açıkça verilememiştir.  $\|Y(T) - X(T)\|$  farkının sınırı da verilen sistemin argümanlarına bağlı olarak sabit bir üst sınırdır. Pertürbe sıfır olduğunda eşitsizliğin sol tarafı sıfır olurken sağ tarafı sabit kalmaktadır. Görüldüğü gibi literatürde Schur kararlı olan periyodik katsayılı fark denklem sistemlerinin ne kadar pertürbeye dayanıklı olduğu, sabit katsayılı sistemlerdeki gibi açık olarak ortaya konulamamıştır.

Bu çalışmada;

- sabit katsayılı fark denklem sistemleri için literatürdeki süreklilik teoremlerine benzer, ancak sistemin Schur kararlılığı korunacak şekilde literatürdeki sonuçlardan daha fazla pertürbeye imkan olup olmadığı araştırılmış,
- periyodik sistemlerin  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  Schur kararlılık parametreleri arasında bağıntılar araştırılarak literatürdeki  $\omega_1$  parametresine bağlı sonuçların  $\omega_2$  parametresine göre kolaylıkla yazılıp yazılmadığı araştırılmış,
- $\|Y(T) - X(T)\|$  farkının  $B(n)$  pertürbe matrisinden etkilenen hareketli üst sınırlarının bulunup bulunmadığı araştırılmış, böylece periyodik katsayılı sistemlerin çözümlerini bulmadan çözümlerin hareketi hakkında sağlıklı bilgiler edinmek amaçlanmıştır,
- sabit katsayılı sistemlerden edinilen kültürle, periyodik sistemin Schur kararlı olma özelliğinin ne kadar pertürbeye dayanıklı olduğunu *açıkça ifade eden* sonuçlar araştırılmış,
- $\omega_1$  Schur kararlılık parametresine göre literatürde (Aydın ve ark. 2001) de verilen süreklilik teoreminin farklı bir yolla yeniden ispatlanıp ispatlanmadığı araştırılmış,
- $\omega_1$  ve  $\omega_2$  Schur kararlılık parametrelerine bağlı süreklilik teoremleri araştırılmış ve  $\|Y(T) - X(T)\|$  farkı üzerine elde edilen sonuçlarla yeniden değerlendirilmiştir,

- Bu anlamda Schur kararlılık üzerine verilen süreklilik teoremleri de, Schur kararlı olan matrislerin Schur kararlı olmayan matrislere olan uzaklığı hakkında fikir verilmeye çalışılmıştır.

## 1.2. Tezin Yapısı

Bu tez çalışması 6 bölümden oluşmaktadır.

1. bölümde; problemin tanıtımı ve problemle ilgili literatür özeti verilmiştir.
2. bölümde; sabit ve periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri ve bu sistemlerin Schur kararlılığı ile ilgili bazı temel kavramlar kısaca tanıtılmıştır.
3. bölümde; periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin Schur kararlılık parametreleri  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  arasında bazı eşitsizlikler elde edilmiştir.
4. bölümde; sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri için Schur kararlılığı korunacak şekilde daha fazla pertürbeye izin veren bazı sonuçlar elde edilmiş, bu sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.
5. bölümde; periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin Schur kararlılığının hassasiyet problemi için sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar monodromi matrisinin sürekliliği ve Schur kararlılık parametrelerinin sürekliliği olarak iki alt başlıkta incelenmiş, elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla da karşılaştırılmıştır.
6. bölümde ise tez çalışması genel olarak değerlendirilmiştir.

## 2. LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu bölümde, sabit ve periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemleri ve bu sistemlerin Schur kararlılığı ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

### 2.1. Sabit Katsayılı Sistemler

$A$ ,  $N$  boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris ( $A \in \mathbf{M}_N(\mathbf{R})$ ) olmak üzere

$$x(n+1) = A x(n), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (2.1)$$

sistemini ele alalım. Bu sistem *sabit katsayılı lineer fark denklem sistemi* olarak,  $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^N$  başlangıç şartı altında

$$x(n+1) = A x(n), \quad x(0) = x_0, \quad n \geq 0 \quad (2.2)$$

sistemi de *sabit katsayılı lineer fark Cauchy problemi* olarak adlandırılmaktadır.

$I$  birim matris ve  $A$  singüler olmayan bir matris olmak üzere

$$X(n+1) = A X(n), \quad X(0) = I, \quad n \geq 0 \quad (2.3)$$

Cauchy probleminin çözümü,  $X(n) = A^n$  matrisine (2.1) sisteminin *fundamental matrisi* denir. (2.2) Cauchy probleminin çözümü ise  $x(n) = A^n x_0$  şeklindedir (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Aydın ve ark. 2000).

#### 2.1.1. Schur kararlılık

(2.1) sistemi,

$$x(n+1) = A x(n), \quad n \in \mathbf{Z}$$

sisteminin *asimtotik kararlı* olabilmesi için gerek ve yeter şart  $|\lambda_i(A)| < 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) ve

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t)$$

diferensiyel denklem sisteminin *asimtotik kararlı* olabilmesi için gerek ve yeter şart ise  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) olmasıdır (Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Bulgak 1999). Bu kritere *Spektral Kriter* de denilmektedir. Bir sistemin asimtotik kararlı olması  $A$  katsayı matrisinin asimtotik kararlı olmasıyla aynı anlama gelmektedir (Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Aydın ve ark. 2000).

Literatürde lineer diferensiyel denklem sistemlerin asimtotik kararlılığı yerine *Hurwitz kararlılık*, lineer fark denklem sistemlerinin asimtotik kararlılığı yerine *Schur kararlılık* kavramları da kullanılmaktadır (Wang and Michel 1993, Rohn 1994, Aydın 2004, Voicu and Pastravanu 2006). Çalışma boyunca bu kavramlar kullanılacaktır.

Her hangi bir  $A$  kare matrisinin karakteristik denkleminin köklerini (öz değerlerini) hesaplama veya yerini tahmin etme problemi kolay bir problem değildir. Simetrik  $A$  matrisinin öz değerlerinin hesaplanması probleminin iyi konulmuş problem olduğu bilinmektedir. Genel durumda bu problem kötü konulmuş bir problemdir (Wilkinson 1965, Bulgak 1999). Yani, matrisin elemanlarındaki küçük değişikliklere karşılık öz değerlerinde büyük değişiklik olabilmektedir. Matris elemanlarındaki değişiklik o kadar küçük olabilir ki matrisin bilgisayardaki temsiline etki etmez. Fakat bu değişiklik  $A$  matrisinin Schur kararlılığını etkileyebilir. Mesela

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 0.5 & 10 & \dots & 0 \\ 0 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega & 0 & \dots & 0.5 \end{pmatrix}$$

biçimindeki  $N$  boyutlu  $\omega$  – parametrelili  $A_\omega$  matrisi,

$$\det(A_\omega - \lambda I) = (0.5 - \lambda)^N \pm 10^{N-1} \omega$$

karakteristik denklemine sahiptir.  $\omega = 0$  için  $A_0$  matrisinin öz değerleri  $\lambda_i(A_0) = 0.5$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) dir. Eğer  $\omega = 10^{1-N}$ ,  $N = 101$  için  $A_{10^{-100}}$  matrisinin bütün öz değerleri  $\lambda(A_{10^{-100}}) = 1.5$  olur. Buradan,

$$\|A_{10^{-100}} - A_0\| = 10^{-100} \Rightarrow |\lambda(A_{10^{-100}}) - \lambda(A_0)| = 1$$

olduğu görülür. Bu örnek Ostrowski'ye aittir (Wilkinson 1965, Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998). Böylece Schur kararlı olan  $A_0$  matrisinin elemanlarında yapılan  $10^{-100}$  kadar bir değişim, matrisi Schur kararlı olmayan  $A_{10^{-100}}$  matrisine dönüştürmektedir.

Öz değer problemi iyi konulmuş bir problem olmadığından Schur kararlılığı tespit için Spektral Kriter yerine, Schur kararlılığı karakterize eden bir lineer cebirsel denklemin çözümü yardımıyla hesaplanan parametreleri kullanmak daha kullanışlıdır.

Şimdi sabit katsayılı fark denklem sistemlerinin Schur kararlılık parametresini tanıtmak için Lyapunov teoremini verelim.

**Teorem 2.1.** (*Lyapunov teoremi*) Verilen bir  $A$  matrisinin (veya  $x(n+1) = Ax(n)$  sisteminin  $x(n) \equiv 0$  aşikar çözümünün) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^*HA - H + C = 0, \quad C = C^* > 0$$

olarak bilinen Lyapunov fark matris denkleminin

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k CA^k, \quad H = H^* > 0$$

çözümünün olmasıdır (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Bulgak 1999).

Lyapunov teoreminde  $C = I$  ( $I$ -birim matris) alınması durumunda

$$A^*HA - H + I = 0$$

Lyapunov fark matris denkleminin çözümü

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k, \quad H = H^* > 0$$

olur. Lyapunov fark denklemini sağlayan  $H = H^* > 0$  pozitif tanımlı  $H$  matrisi varsa  $\omega(A) = \|H\|$ , aksi halde  $\omega(A) = \infty$  olarak seçilir. Bu şekilde tanımlanan  $\omega(A)$  matris fonksiyoneline  $A$  matrisinin *Schur kararlılık parametresi* yada *Schur*

*kararlılığının kalitesini gösteren parametre* denir (Bulgakov ve Godunov 1988, Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999).  $\omega^*$ , 1 den büyük bir sayı ( $\omega^* > 1$ ) olmak üzere  $\omega(A) \leq \omega^*$  eşitsizliği sağlanıyorsa  $A$  matrisine pratik Schur kararlı ( $\omega^*$  – Schur kararlı) matris olarak adlandırılır.  $\omega(A) > \omega^*$  ise  $A$  matrisine  $\omega^*$  – Schur kararsız matris denir (Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999, Aydın 2004).

Ayrıca  $A = 0$  matrisi alınırsa Lyapunov fark denkleminin çözümü  $H = I$  olur ki  $\omega(A) = 1$  elde edilir. Bu durum, (2.1) sisteminin Schur kararlılığı için *Mükemmel Durum* olarak adlandırılır. Buradan  $\omega(A) = \|H\| \geq 1$  olduğu açıktır.

### 2.1.2. Çözümün üst sınırı

(2.2) Cauchy probleminin çözümünün üst sınırı, Schur kararlı  $A$  matrisi için

$$\|A^n\| \leq \sqrt{\omega(A)} \left(1 - \frac{1}{\omega(A)}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad n \geq 0$$

olduğundan

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\omega(A)} \left(1 - \frac{1}{\omega(A)}\right)^{\frac{n}{2}} \|x_0\|, \quad n \geq 0$$

eşitsizliği ile verilmektedir (Bulgak ve Godunov 1988, Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999).

### 2.1.3. Süreklilik teoremi

$A, B \in M_N(\mathbf{R})$  olmak üzere (2.1) *sabit katsayılı lineer fark denklem sisteminin pertürbe sistemi* olarak adlandırılan

$$y(n+1) = (A+B) y(n), \quad n \in \mathbf{Z} \tag{2.4}$$

sistemini ele alalım.

(2.1) sistemi (yada  $A$  matrisi) Schur kararlı ise;

– (2.4) pertürbe sistemi hangi şartlarda Schur kararlı olarak kalmaktadır?

Bir diğ er ifadeyle,

- (2.1) sisteminin Schur kararlılığının dayanıklılığı acaba ne kadardır?

soruları akla gelen anlamlı sorulardır. Bu ve benzeri sorulara literatürde *Süreklilik Teoremleri* olarak bilinen teoremlerle cevap verilmektedir.

Şimdi (2.4) sisteminin Schur kararlılığının hassasiyetini gösteren teoremleri verelim.

**Teorem 2.2.** (2.1) sistemi Schur kararlı ( $\omega(A) < \infty$ ) olmak üzere  $\|B\| < \frac{\|A\|}{10\omega(A)}$  şartını sağlayan herhangi bir  $B$  pertürbe matrisi için  $A+B$  matrisi Schur kararlıdır, ayrıca

$$|\omega(A+B) - \omega(A)| < 4\omega^2(A) \frac{\|B\|}{\|A\|}$$

eşitsizliği doğrudur (Akın ve Bulgak 1998).

**Teorem 2.3.** (2.1) sistemi Schur kararlı ( $\omega(A) < \infty$ ) olmak üzere  $\|B\| \leq \frac{1}{20\omega^{\frac{3}{2}}(A)}$  şartını sağlayan herhangi bir  $B$  pertürbe matrisi için  $A+B$  matrisi Schur kararlıdır, ayrıca

$$|\omega(A+B) - \omega(A)| \leq 5\omega^{\frac{5}{2}}(A)\|B\|$$

eşitsizliği doğrudur (Bulgak ve Godunov 1988, Bulgak 1999).

(2.1) sisteminde,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.75 & -1 \end{pmatrix}$  olsun.  $\omega(A) = 6.01596 < \infty$  olup  $A$

matrisi Schur kararlı bir matristir. Sırasıyla Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 ün izin verdiği pertürbe matrisinin normunun sınırları  $\|B\| < 0.0271408$  ve  $\|B\| \leq 0.003389$

dir. Bu şartları sağlayan  $B$  pertürbe matrisleri için  $A+B$  matrislerinin Schur kararlı olarak kalacağı teoremlerle garanti edilmektedir.

**Uyarı 2.1.** Mükemmel durum olarak adlandırılan  $A = 0$  matrisi için Lyapunov fark denkleminin çözümü  $H = I$  ve  $\omega(A) = 1$  olur ve sistem maksimum pertürbeye izin verir. Bu durumda Teorem 2.3 ile verilen sınır  $\|B\| \leq 0.05$  olmasına rağmen Teorem 2.2 ile verilen sınır  $\|B\| < 0$  olmaktadır, yani mükemmel durumda Teorem 2.2. pertürbeye izin vermemektedir.

## 2.2. Periyodik Katsayılı Sistemler

$A(n) = A(n+T)$ ,  $N$  boyutlu periyodik (  $T$  periyotlu ) karesel bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = A(n) x(n), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (2.5)$$

sistemini ele alalım. Bu sistem *periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemi*,  $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^N$  başlangıç şartı altında

$$x(n+1) = A(n) x(n), \quad x(0) = x_0, \quad n \geq 0 \quad (2.6)$$

sistemi de *periyodik katsayılı lineer fark Cauchy problemi* olarak adlandırılmaktadır.  $I$  birim matris olmak üzere

$$X(n+1) = A(n) X(n), \quad X(0) = I, \quad n \geq 0 \quad (2.7)$$

Cauchy probleminin çözümü olan

$$X(n) = \prod_{j=0}^{n-1} A(j) = A(n-1) A(n-2) \dots A(0)$$

matrisine (2.5) sisteminin *fundamental matrisi* ve

$$X(T) = \prod_{j=0}^{T-1} A(j) = A(T-1) A(T-2) \dots A(0)$$

matrisine de (2.5) sisteminin *monodromi matrisi* denir (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Agarwal 2000, Aydın ve ark. 2000). (2.6) Cauchy

probleminin çözümü  $x(n) = X(n) x_0$  ve  $n = k T + m$ ,  $0 \leq m < T$  olmak üzere (2.6) sisteminin çözümü

$$x(kT + m) = X(m)X(T)^k x_0 \quad (2.8)$$

şeklindedir (Aydın 1995, Aydın ve ark. 2000).

### 2.2.1. Schur kararlılık

(2.8) eşitliğinden, (2.5) sisteminin Schur kararlı olması ile sistemin  $X(T)$  monodromi matrisinin Schur kararlı olmasının denk olduğu açıkça görülmektedir. Böylece, Spektral Kritere göre (2.5) sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart  $|\lambda_i(X(T))| < 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) olmasıdır (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Aydın ve ark. 2000).

Literatürde, sabit katsayılı sistemlerin Schur kararlılığına benzer olarak (2.5) sisteminin Schur kararlılığı için de farklı nümerik karakteristikler tanımlanmıştır (Van Loan 1985, Akın ve Bulgak 1998, Aydın ve ark. 2000). Şimdi bu parametreleri tanıtmadan, sabit katsayılı sistemler için verilen Teorem 2.1. (Lyapunov Teoremi) in periyodik katsayılı (2.5) sistemi için *varyantı* olan bir teoremi verelim.

**Teorem 2.4.** (2.5) sisteminin monodromi matrisi  $X(T)$  matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart her  $C = C^* > 0$  matrisi için

$$X^*(T)FX(T) - F + C = 0$$

Lyapunov fark matris denkleminin

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k C (X(T))^k, \quad F = F^* > 0$$

tek çözümüne sahip olmasıdır (Aydın ve ark. 2000).

$C = I$  olması durumunda

$$X^*(T)FX(T) - F + I = 0$$

Lyapunov fark matris denkleminin tek çözümü

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k (X(T))^k, \quad F = F^* > 0 \quad (2.9)$$

olmaktadır. (2.9) matris serisinin yakınsak olması  $X(T)$  monodromi matrisinin ((2.5) sisteminin) Schur kararlı olmasına denktir.

(2.5) sisteminin Schur kararlılığı için tanımlanmış parametrelerden birisi;

$$\{\omega_1(A,T), \rho(A,T)\}; \quad \omega_1(A,T) = \|F\|, \quad \rho(A,T) = \max_{0 \leq k \leq T-1} \{\|X(k)\|\} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre  $\omega_1(A,T) < \infty$  ise verilen sistem Schur kararlı, aksi takdirde  $\omega_1(A,T) = \infty$  ve sistem Schur kararlı değildir. Burada  $\rho(A,T)$ , bir periyot ta çözümün hareketi hakkında bize bilgi vermektedir (Aydın ve ark. 2000).

(2.5) sisteminin Schur kararlılığı için tanımlanmış parametrelerden ikincisi;

$$\omega_2(A,T) = \|\Phi\| \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanan parametredir. Burada  $C = \sum_{i=0}^{T-1} X^*(i)X(i)$  matrisi olmak üzere

$X^*(T)\Phi X(T) - \Phi + C = 0$  Lyapunov matris denkleminin tek çözümü

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} X^*(T)^k C X(T)^k = \sum_{k=0}^{\infty} X^*(k)X(k), \quad \Phi = \Phi^* > 0 \quad (2.12)$$

matris serisidir. (2.12) matris serisinin yakınsak olması da (2.9) daki matris serisine benzer olarak  $X(T)$  monodromi matrisinin ((2.5) sisteminin) Schur kararlı olmasına denktir. Buna göre  $\omega_2(A,T) < \infty$  ise verilen sistem Schur kararlı aksi takdirde  $\omega_2(A,T) = \infty$ , yani sistem Schur kararlı değildir.

$\omega^* > 1$  pratik Schur kararlılık parametresi olmak üzere  $\omega_1(A,T) \leq \omega^*$  ( $\omega_2(A,T) \leq \omega^*$ ) eşitsizliği sağlanıyorsa (2.5) sistemi pratik Schur kararlı ( $\omega^*$  – Schur kararlı) sistem olarak adlandırılır. Aksi takdirde  $\omega^*$  – Schur kararsız matris denir (Aydın 2004). Ayrıca  $\omega_1(A,T) \leq \omega_2(A,T)$  ve  $T=1$  olması durumunda  $\omega_1(A,T) = \omega_2(A,1) = \omega(A)$  dir (Aydın ve ark. 2000).

(2.5) sisteminin Schur kararlılığı için tanımlanmış parametrelerden bir diğeri ise;

$$H(l) = \sum_{k=l}^{\infty} \left( \prod_{j=l}^{k-1} A(j) \right)^* \left( \prod_{j=l}^{k-1} A(j) \right), \quad l \geq 0; \quad \prod_{j=l}^{k-1} A(j) = \begin{cases} A(k-1) \dots A(l) & k > l \\ I & k = l \end{cases}$$

matris seri dizisi

$$A^*(l)H(l+1)A(l) - H(l) + I = 0, \quad l \geq 0$$

matris denkleminin çözüm dizisi olmak üzere

$$M(A, T) = \max_{0 \leq l \leq T-1} \|H(l)\| \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanan parametredir. Diğer parametrelerde olduğu gib,  $M(A, T) < \infty$  ise verilen sistem Schur kararlı aksi takdirde  $M(A, T) = \infty$  ve sistem Schur kararlı değildir. Ayrıca  $\omega_2(A, T) = \|H(0)\|$  dir (Aydın ve ark. 2000).

(2.5) sistemi için tanımlanmış  $\{\omega_1(A, T), \rho(A, T)\}$ ,  $\omega_2(A, T)$  ve  $M(A, T)$  parametreleri arasında

$$\omega_1(A, T) \leq \omega_2(A, T), \quad \rho(A, T) \leq \sqrt{\omega_2(A, T)}, \quad \omega_2(A, T) \leq M(A, T)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Aydın ve ark. 2000).

### 2.2.2. Çözümün üst sınırı

(2.6) Cauchy probleminin çözümünün

$$x(n) = X(m)X(T)^k x_0, \quad n = kT + m, \quad 0 \leq m < T$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Ayrıca,

$$\|X(T)^k\| \leq \left( 1 - \frac{1}{\omega_1(A, T)} \right)^{\frac{k}{2}} \omega_1(A, T)^{\frac{1}{2}}, \quad k \geq 1 \quad (2.14)$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan (2.6) nın çözümünün üst sınırı

$$\|x(n)\| \leq \rho(A, T) \left(1 - \frac{1}{\omega_1(A, T)}\right)^{\frac{k}{2}} \omega_1(A, T)^{\frac{1}{2}} \|x_0\| \quad (2.15)$$

eşitsizliği ile verilmektedir. (2.14) ve (2.15) eşitsizlikleri,  $\rho(A, T) \leq \sqrt{\omega_2(A, T)}$  eşitsizliği de dikkate alınarak,  $\omega_2(A, T)$  parametresine bağlı olarak sırasıyla

$$\|X(T)^k\| \leq \left(1 - \frac{1}{\omega_2(A, T)}\right)^{\frac{k}{2}} \omega_2(A, T)^{\frac{1}{2}}, \quad k \geq 1$$

ve

$$\|x(n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{\omega_2(A, T)}\right)^{\frac{k}{2}} \omega_2(A, T) \|x_0\|$$

ile verilmektedir (Aydın ve ark. 2000). (2.15) eşitsizliği,  $M(A, T)$  parametresine bağlı olarak

$$\|x(n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{M(A, T)}\right)^{\frac{n}{2}} \|H(0)\|^{\frac{1}{2}} \|x_0\|, \quad n \geq 0$$

şeklinde ifade edilir (Aydın ve ark. 2002).

### 2.2.3. Süreklilik teoremi

$A(n) = A(n+T)$  ve  $B(n) = B(n+T)$ ,  $N$  boyutlu periyodik ( $T$  periyotlu) karesel matrisler olmak üzere (2.5) periyodik katsayılı lineer fark denklem sisteminin pertürbe sistemi olarak adlandırılan

$$y(n+1) = (A(n) + B(n))y(n), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (2.16)$$

sistemi ele alalım. (2.16) sistemi Schur kararlı ise

$$Y^*(T)\tilde{F}Y(T) - \tilde{F} + I = 0$$

Lyapunov denklemini sağlayan

$$\tilde{F} = \sum_{k=0}^{\infty} (Y^*(T))^k (Y(T))^k, \quad \tilde{F} = \tilde{F}^* > 0$$

çözümü var ve  $\omega_1(A+B, T) = \|\tilde{F}\|$  dir.

Şimdi (2.5) sistemi (yada  $X(T)$  matrisi) Schur kararlı iken (2.16) sisteminin Schur kararlılığının hassasiyetini, yani sistemin hangi şartlar altında Schur kararlı kaldığını gösteren süreklilik teoremlerini verelim.

**Teorem 2.5.** (2.5) sistemi Schur kararlı ( $\omega_1(A, T) < \infty$ ) olmak üzere

$$\|Y(T) - X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A, T)}} - \|X(T)\| \quad (2.17)$$

eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için (2.16) sistemi de Schur kararlıdır (Aydın ve ark. 2001).

**Sonuç 2.1.** (2.5) sistemi Schur kararlı ve  $a = \max_{0 \leq j \leq T-1} \|A(j)\|$ ,  $b = \max_{0 \leq j \leq T-1} \|B(j)\|$  olmak üzere

$$T b (a + b)^{T-1} < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A, T)}} - \|X(T)\|$$

eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için (2.16) sistemi de Schur kararlıdır (Aydın ve ark. 2001).

**Teorem 2.6.** (2.5) sistemi Schur kararlı ve

$$\alpha = 1 - \left( 2\|X(T)\| \|Y(T) - X(T)\| + \|Y(T) - X(T)\|^2 \right) \|F\|$$

olmak üzere (2.17) eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisleri için

$$\|\tilde{F} - F\| \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha} \omega_1(A, T)$$

eşitsizliği doğrudur (Aydın ve ark. 2001).

**Sonuç 2.2.** (2.5) sistemi Schur kararlı olmak üzere

$$\|Y(T) - X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{2\omega_1(A, T)}} - \|X(T)\|$$

eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisleri için

$$\|\tilde{F} - F\| \leq 2\|Y(T) - X(T)\|\omega_1(A, T) \left( \|X(T)\| + \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{2\omega_1(A, T)}} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Aydın ve ark.2001).

**Teorem 2.7.** (2.5) sistemi Schur kararlı olmak üzere

$$\|B(n)\| < \sqrt{\|A(n)\|^2 + \frac{1}{\|H(n+1)\|}} - \|A(n)\|, \quad 0 \leq n \leq T-1$$

eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için (2.16) sistemi de Schur kararlıdır (Aydın ark. 2002).

### 3. PERİYODİK KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN $\omega_1(A, T)$ ve $\omega_2(A, T)$ PARAMETRELERİ ARASINDAKİ EŞİTSİZLİKLER\*

Bu bölümde, periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin Schur kararlılık parametreleri  $\{\omega_1(A, T), \rho(A, T)\}$  ve  $\omega_2(A, T)$  arasındaki bazı eşitsizlikler verilmiştir.

#### 3.1. $\omega_1(A, T)$ ve $\omega_2(A, T)$ Parametreleri Arasındaki Eşitsizlikler

$A(n) = A(n+T)$ ,  $N$  boyutlu periyodik ( $T$  periyotlu) karesel bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (3.1)$$

sistemini ele alalım. (3.1) sistemi için tanımlanmış iki farklı Schur kararlık parametrelerinden birisi,

$$\{\omega_1(A, T), \rho(A, T)\}; \quad \omega_1(A, T) = \|F\|, \quad \rho(A, T) = \max_{0 \leq k \leq T-1} \{\|X(k)\|\} \quad (3.2)$$

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k (X(T))^k, \quad F = F^* > 0, \quad X^*(T)FX(T) - F + I = 0$$

ile tanımlanan  $\omega_1(A, T)$  parametresidir. Diğer parametre ise,

$$\omega_2(A, T) = \|\Phi\|; \quad \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} X^*(k)X(k), \quad \Phi = \Phi^* > 0 \quad (3.3)$$

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} X^*(T)^k CX(T)^k, \quad C = \sum_{i=0}^{T-1} X^*(i)X(i), \quad X^*(T)\Phi X(T) - \Phi + C = 0$$

ile tanımlanan  $\omega_2(A, T)$  parametresidir. Literatürde (3.1) sistemi için tanımlanmış  $\{\omega_1(A, T), \rho(A, T)\}$  ve  $\omega_2(A, T)$  parametreleri arasında

$$\omega_1(A, T) \leq \omega_2(A, T), \quad \rho(A, T) \leq \sqrt{\omega_2(A, T)} \quad (3.4)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Aydın ve ark. 2000). Şimdi  $\{\omega_1(A, T), \rho(A, T)\}$  ve  $\omega_2(A, T)$  parametreleri arasındaki bazı yeni eşitsizlikleri verelim.

\* Bu bölümdeki sonuçlar XIX. Ulusal Matematik Sempozyumu'nda, (22-25 Ağustos 2006, Kütahya) bildiri olarak sunulmuştur.

**Teorem 3.1.**  $\omega_1(A,T)$  ve  $\omega_2(A,T)$ , sırasıyla (3.2) ve (3.3) ile tanımlanmış parametreler ve  $\alpha = \sum_{i=0}^{T-1} \|X(i)\|^2$  olmak üzere

$$\omega_2(A,T) \leq \alpha \omega_1(A,T) ; \quad \rho(A,T) \leq [\alpha \omega_1(A,T)]^{1/2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

**İspat.**  $1 \leq m \leq T-1$  olmak üzere  $X(m+kT) = X(m) X(T)^k$  olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^*(k)X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} X^*(T)^k \left( \sum_{i=0}^{T-1} X^*(i)X(i) \right) X(T)^k$$

olduğu kolayca görülür.  $\omega_2(A,T) = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} X^*(k)X(k) \right\|$  şeklinde tanımlandığına göre,

$$\begin{aligned} \omega_2(A,T) = \|\Phi\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} X^*(T)^k \left( \sum_{i=0}^{T-1} X^*(i)X(i) \right) X(T)^k \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=0}^{T-1} X^*(i)X(i) \right\| \times \left\| \sum_{k=0}^{\infty} X^*(T)^k X(T)^k \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{T-1} \|X(i)\|^2 \left\| \sum_{k=0}^{\infty} X^*(T)^k X(T)^k \right\| \end{aligned}$$

olur. (3.2) den,

$$\omega_2(A, T) \leq \alpha \omega_1(A, T) \tag{3.5}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.4) ve (3.5) den

$$\rho(A,T) \leq [\alpha \omega_1(A,T)]^{1/2} \tag{3.6}$$

olduğu açıktır.

**Not 3.1.** (3.5) den

$$1/\omega_1(A,T) \leq \alpha/\omega_2(A,T) \tag{3.7}$$

eşitsizliği açıkça görülmektedir.

**Sonuç 3.1.**  $\omega_1(A,T)$  ve  $\omega_2(A,T)$ , sırasıyla (3.2) ve (3.3) ile tanımlanmış parametreler ve  $\alpha = \sum_{i=0}^{T-1} \|X(i)\|^2$  olmak üzere

$$(1/\alpha) \omega_2(A,T) \leq \omega_1(A,T) \leq \omega_2(A,T) \leq \alpha \omega_1(A,T)$$

veya

$$1/(\alpha \omega_1(A,T)) \leq 1/\omega_2(A,T) \leq 1/\omega_1(A,T) \leq \alpha/\omega_2(A,T)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

**İspat.** Eşitsizliklerin doğruluğu (3.4) ve (3.5) den açıktır.

$A(n) = A$  olması durumunda (  $T=1$  durumu )  $\omega_1(A,T) = \omega_2(A,T) = \omega(A)$  ve  $\alpha = \|I\| = 1$  olduğundan Sonuç 3.1. deki eşitsizliklerden  $\omega_1(A,1) = \omega_2(A,1) = \omega(A)$  ve (3.2) deki tanımdan  $\rho(A,1) = 1$  olduğu açıkça görülmektedir.

**Teorem 3.2.** (3.1) sistemi için  $\alpha = \sum_{i=0}^{T-1} \|X(i)\|^2$  olmak üzere

$$|\omega_1(A,T) - \omega_2(A,T)| \leq (\alpha-1) \omega_1(A,T),$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat.** (3.4) den  $\omega_1(A,T) \leq \omega_2(A,T)$  ve (3.5) den  $\omega_2(A,T) \leq \alpha \omega_1(A,T)$  olduğu bilindiğine göre,

$$\omega_2(A,T) - \omega_1(A,T) \leq \alpha \omega_1(A,T) - \omega_1(A,T) = (\alpha-1)\omega_1(A,T)$$

ve

$$\omega_1(A,T) - \alpha \omega_1(A,T) \leq \omega_1(A,T) - \omega_2(A,T) \leq 0$$

olur. Böylece

$$|\omega_1(A,T) - \omega_2(A,T)| \leq (\alpha-1) \omega_1(A,T) \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada  $\alpha = \sum_{i=0}^{T-1} \|X(i)\|^2 \geq 1$  olduğuna dikkat edilmelidir.

Teoremin ifade ettiği eşitsizlikten ve  $T = 1$  için

$$\alpha = \sum_{i=0}^0 \|X(i)\|^2 = \|X(0)\|^2 = \|I\|^2 = 1$$

olmasından

$$|\omega_1(A,T) - \omega_2(A,T)| \leq 0 \Rightarrow \omega_1(A,T) - \omega_2(A,T) = 0$$

olur. Dolayısıyla  $T = 1$  için  $\omega_1(A,1) = \omega_2(A,1) = \omega(A)$  sonucuna ulaşılır. Bu ise teoremin sonucunun literatür bilgisi ile olan uyumunu göstermektedir.

### 3.2. Pertürbe Edilmiş Sistem için Bazı Sonuçlar ve Bir Kritik

Şimdi (3.1) probleminin  $A(n+T) = A(n)$ ,  $B(n+T) = B(n)$ ,  $n \geq 0$  ve  $T > 0$  olmak üzere

$$y(n+1) = (A(n)+B(n))y(n), \quad y(0)=y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

pertürbe sistemini ele alalım.

$$Y(n+1) = (A(n)+B(n)) Y(n), \quad Y(0) = I, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cauchy probleminin çözüm dizisi  $Y(n)$ , (3.9) un fundamental matrisi ve  $Y(T)$  de (3.9) un monodromi matrisidir. (3.9) un sıfır çözümünün Schur kararlı olması için  $B(n)$  pertürbe matrisi üzerine  $\omega_1(A,T)$  parametresine bağlı bazı şartlar (Aydın ve ark. 2001) de verilmiştir. Şimdi bu sonuçları  $\omega_2(A,T)$  parametresine bağlı olarak ifade edelim.

**Teorem 3.3.**  $X(T)$  ve  $Y(T)$  sırasıyla (3.1) in ve (3.9) un monodromi matrisleri ve

$$\alpha = \sum_{i=0}^{T-1} \|X(i)\|^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$\|Y(T) - X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{\alpha}{\omega_2(A,T)}} - \|X(T)\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $B(n)$  matrisi için (3.9) sistemi Schur kararlıdır.

**İspat.**  $\|Y(T) - X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{\alpha}{\omega_2(A, T)} - \|X(T)\|}$  eşitsizliği,

$$\beta = \alpha - (2\|X(T)\|\|Y(T) - X(T)\| + \|Y(T) - X(T)\|^2) \|\Phi\| > 0$$

eşitsizliğine denktir. Böylece  $\beta > 0$  iken pertürbe edilmiş sistemin Schur kararlı olduğunu gösterelim. (3.9) sisteminin monodromi matrisi  $Y(T)$  olmak üzere

$$Y((k+1)T) = Y(T)Y(kT) = [X(T) + (Y(T) - X(T))]Y(kT); \quad Y(kT) = Y(T)^k \quad (k \geq 0)$$

yazılabilir.  $v$ ,  $N$  boyutlu vektör olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \Phi Y((k+1)T)v, Y((k+1)T)v \rangle &= \langle X^*(T)\Phi X(T)Y(kT)v, Y(kT)v \rangle \\ &+ \langle [(X^*(T)\Phi(Y(T)-X(T)) + ((Y(T)-X(T))^* \Phi X(T)) \\ &+ ((Y(T)-X(T))^* \Phi(Y(T)-X(T)))]Y(kT)v, Y(kT)v \rangle \end{aligned}$$

olarak yazılır. (3.3) den  $X(T)^* \Phi X(T) = \Phi - C$ ;  $C = \sum_{i=0}^{T-1} X^*(i)X(i)$  olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \Phi Y((k+1)T)v, Y((k+1)T)v \rangle &= \langle \Phi Y(kT)v, Y(kT)v \rangle - \langle CY(kT)v, Y(kT)v \rangle \\ &+ \langle [(X(T)^* \Phi(Y(T)-X(T)) + ((Y(T)-X(T))^* \Phi X(T)) \\ &+ ((Y(T)-X(T))^* \Phi(Y(T)-X(T)))]Y(kT)v, Y(kT)v \rangle \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\langle \Phi Y((k+1)T)v, Y((k+1)T)v \rangle \leq \left(1 - \frac{\beta}{\|\Phi\|}\right) \langle \Phi Y(kT)v, Y(kT)v \rangle \quad (3.10)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.10) eşitsizliğinin sağ tarafı  $k$  için arka arkaya uygulandığında

$$\langle \Phi Y((k+1)T)v, Y((k+1)T)v \rangle \leq \left(1 - \frac{\beta}{\|\Phi\|}\right)^k \langle \Phi v, v \rangle$$

eşitsizliğine ulaşılır.  $\Phi$  pozitif tanımlı matris olduğundan

$$k \rightarrow \infty, \quad \|Y(kT)v\| = \|(Y(T))^k v\| \rightarrow 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise (3.9) sisteminin  $Y(T)$  monodromi matrisinin bütün öz değerlerinin birim diskin içine düşmesini, yani  $|\lambda_i(Y(T))| < 1$ , ( $i=1, 2, \dots, N$ )

olmasını gerektirir. Böylece  $Y(T)$  monodromi matrisi, dolayısıyla (3.9) pertürbe edilmiş periyodik katsayılı sistemi Schur kararlıdır.

**Uyarı 3.1.** [Aydın ve ark. 2001, Teorem 2] nin ispatında  $\langle FY((k+1)T)v, Y((k+1)T)v \rangle$  çarpımı yerine  $\langle \Phi Y((k+1)T)v, Y((k+1)T)v \rangle$  çarpımı alınarak ( $F$  matrisi yerine  $\Phi$  matrisi alınarak) (Aydın ve ark. 2001) deki *ispat tekniği adım adım* uygulanarak Teorem 3.3. ispatlanmıştır. Teorem 3.3.,  $\omega_1(A,T)$  parametresi için verilmiş olan [Aydın ve ark. 2001, Teorem 2] nin  $\omega_2(A,T)$  parametresi için ifade edilmesinden başka bir şey değildir.  $\omega_1(A,T)$  parametresi için var olan **bu sonucu  $\omega_2(A,T)$  parametresine göre elde etmek için, (Aydın ve ark. 2001) deki ispat tekniğinin adım adım tekrarlanmasına gerek yoktur.** Teorem 3.3 deki sonucu elde etmek için (3.7) ile verilen  $1 / \omega_1(A,T) \leq \alpha / \omega_2(A,T)$  eşitsizliğini [Aydın ve ark. 2001, Teorem 2] de kullanmak yeterlidir. Ayrıca  $\omega_1(A,T)$  parametresi için verilmiş Sonuç 2.1., Teorem 2.6. ve Sonuç 2.2. deki sonuçlar  $\omega_2(A,T)$  parametresine göre aynı şekilde rahatlıkla yazılabilir.

**Teorem 3.4.**[Aydın ve ark. 2001, Teorem 2]  $X(T)$  ve  $Y(T)$  sırasıyla (3.1) in ve (3.9) un monodromi matrisleri olmak üzere

$$\|Y(T) - X(T)\| < \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \|X(T)\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde  $B(n)$  matrisi için (3.9) sistemi Schur kararlıdır.

(3.7) eşitsizliğinden  $1 / \omega_1(A,T) \leq \alpha / \omega_2(A,T)$  olduğu bilindiğine göre

$$\sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} \leq \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{\alpha}{\omega_2(A,T)}} ; \quad \alpha = \sum_{i=0}^{T-1} \|X(i)\|^2$$

eşitsizliği açıktır. Bu eşitsizlik Teorem 3.3. ü ispatlamaya yeterlidir.

**Uyarı 3.2.** Bu çalışmada verdiğimiz Teorem 3.3. benzer bir şekilde (Uslu 2006) da bulunmaktadır. (Uslu 2006) makalesinin sonuçlarından Teorem 3.1. ve ispatı, Sonuç 3.2., Teorem 3.3. ve ispatı (Aydın ve ark. 2001) deki sonuçlar tanıtılmadan

sadece (Aydın ve ark. 2001) deki “teknik kullanılarak” ifadesi yer alarak  $F$  matrisi yerine  $\Phi$  matrisi alıp *bütün sonuçların ispatlarını adım adım takip ederek*  $\omega_2(A,T)$  parametresine göre yazılmasından başka bir şey değildir.

### 3.3. Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri ile ilgili nümerik sonuçlar verilmiştir.

$$- \omega_2(A,T) \leq \alpha \omega_1(A,T) \quad (3.5)$$

$$- \rho(A,T) \leq [\alpha \omega_1(A,T)]^{1/2} \quad (3.6)$$

$$- \frac{1}{\omega_1(A,T)} \leq \frac{\alpha}{\omega_2(A,T)} \quad (3.7)$$

$$- |\omega_1(A,T) - \omega_2(A,T)| \leq (\alpha - 1) \omega_1(A,T) \quad (3.8)$$

- $A_1(n) = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  olarak alalım. Bu durumda  $\omega_1(A_1, 2) = 1.0667$ ,

$$\rho(A_1, 2) = 1, \omega_2(A_1, 2) = 1.3333 \text{ ve } \alpha_1 = 1.25 \text{ dir.}$$

- $A_2(n) = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} & 3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$  olarak alalım. Bu durumda  $\omega_1(A_2, 2) = 1.91631$ ,

$$\rho(A_2, 2) = 3.0478, \omega_2(A_2, 2) = 11.3271 \text{ ve } \alpha_2 = 10.2889 \text{ dir.}$$

- $A_3(n) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \end{pmatrix}$  olarak alalım. Bu durumda  $\omega_1(A_3, 3) =$

$$1.06667, \rho(A_3, 3) = 1, \omega_2(A_3, 3) = 2.13333 \text{ ve } \alpha_3 = 2.25 \text{ dir.}$$

•  $A_4(n) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) & -1 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \end{pmatrix}$  olarak alalım. Bu durumda  $\omega_1(A_4, 3) =$

5.84273,  $\rho(A_4, 3) = 1.93185$ ,  $\omega_2(A_4, 3) = 11.9569$  ve  $\alpha_4 = 6.73203$  dir.

	$A_1(n)$	$A_2(n)$	$A_3(n)$	$A_4(n)$
$\omega_1(A, T)$	1.0667	1.9163	1.0667	5.8427
$\rho(A, T)$	1	3.0478	1	1.9319
$\omega_2(A, T)$	1.3333	11.3271	2.1333	11.9569
$\alpha$	1.25	10.2889	2.25	6.732
(3.5)	$1.3333 \leq 1.3334$	$11.3271 \leq 19.7167$	$2.1333 \leq 2.4$	$11.9569 \leq 39.3335$
(3.6)	$1 \leq 1.1547$	$3.0478 \leq 4.4404$	$1 \leq 1.5492$	$1.9319 \leq 6.2716$
(3.7)	$0.9375 \leq 0.9375$	$0.5218 \leq 0.9083$	$0.9375 \leq 1.0547$	$0.1712 \leq 0.563$
(3.8)	$0.2666 \leq 0.2667$	$9.4108 \leq 17.8004$	$1.0667 \leq 1.3333$	$6.1142 \leq 33.4907$

**Tablo 3.1.** (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri ile ilgili nümerik sonuçları gösteren tablo

$\{\omega_1(A, T), \rho(A, T)\}$ ,  $\omega_2(A, T)$  parametrelerinden herhangi birine göre yazılmış bir sonucun diğer parametrelere göre yazılmasını sağlayan (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri ile ilgili nümerik örnekler Tablo 3.1. de gösterilmiştir.

## 4. SABİT KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SCHUR KARARLILIĞININ HASSASİYETİ

Bu bölümde, sabit katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin Schur kararlılığının hassasiyetini gösteren bazı sonuçlar verildi. Bu sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırıldı.

### 4.1. Ana Sonuçlar

$A \in M_N(\mathbf{R})$  olmak üzere

$$x(n+1) = A x(n), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (4.1)$$

sistemini göz önüne alalım. (4.1) sistemi Schur kararlı olmak üzere

$$y(n+1) = (A+B) y(n), \quad n \in \mathbf{Z}$$

şeklindeki (4.1) in pertürbe sisteminin de Schur kararlı olabilmesi için  $B$  pertürbe matrisi üzerine bazı kısıtlamalar yapılmaktadır. (4.1) sisteminin Schur kararlılığının hassasiyeti süreklilik teoremleri olarak bilinen teoremlerle anlaşılmaktadır. Mesela bu teoremlerden ikisi Teorem 2.2. ve Teorem 2.3. dir. Şimdi Schur kararlılığın hassasiyetini gösteren bazı sonuçları vermeden önce aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 4.1.**  $A$  matrisi Schur kararlı ((4.1) sistemi Schur kararlı) ve  $A+B$  matrisi de Schur kararlı ise simetrik pozitif tanımlı bir  $C = I + B^* X A + A^* X B + B^* X B$  matrisi vardır.

**İspat .**  $A$  ve  $A+B$  matrisleri Schur kararlı olduğundan, (Lyapunov Teoreminden)

$$A^* H A - H + I = 0 \text{ ve } (A + B)^* X (A + B) - X + I = 0$$

Lyapunov fark matris denklemlerinin simetrik pozitif tanımlı  $H = H^* > 0$  ve  $X = X^* > 0$  çözümleri vardır. İkinci Lyapunov fark matris denkleminde

$$A^* X A - X = - ( I + B^* X A + A^* X B + B^* X B )$$

ifadesi yazılır.  $A$  Schur kararlı bir matris ve  $X=X^* > 0$  simetrik pozitif tanımlı çözümünün var olduğu bilindiğine göre Lyapunov Teoreminden  $C= C^*= I+B^*XA+A^*XB+B^*XB > 0$  simetrik pozitif tanımlı matrisi vardır.

**Örnek 4.1.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.75 & -1 \end{pmatrix} x(n)$  sistemini ele alalım.  $\omega(A) = 6.01596$

olduğundan sistem Schur kararlıdır.  $B = \begin{pmatrix} 0.003 & 0 \\ 0 & -0.003 \end{pmatrix}$ ,  $\omega(A+B, T) = 6.10758$

matrisi ile pertürbe edelim. Lemma 4.1. de varlığı garanti edilen (Lyapunov fark matris denklemini sağlayan) simetrik pozitif tanımlı  $C$  matrisi

$C = \begin{pmatrix} 1.01628 & -0.00231794 \\ -0.00231794 & 1.01628 \end{pmatrix}$  şeklindedir.

**Örnek 4.2.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.01 & -0.25 \end{pmatrix} x(n)$ , sistemini ele alalım.  $\omega(A) = 1.34632$

olduğundan sistem Schur kararlıdır.  $B = \begin{pmatrix} 0.49 & 0 \\ 0 & -0.49 \end{pmatrix}$ ,  $\omega(A+B, T) = 53.4647$

matrisi ile pertürbe edelim. Lemma 4.1. de varlığı garanti edilen (Lyapunov fark matris denklemini sağlayan) simetrik pozitif tanımlı  $C$  matrisi

$C = \begin{pmatrix} 39.9325 & 0.75442 \\ 0.75442 & 1.86426 \end{pmatrix}$  şeklindedir.

**Teorem 4.1.**  $A$  Schur kararlı bir matris ( $\omega(A) < \infty$ ) olsun.  $\|B\| < \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\omega(A)}} - \|A\|$

şartını sağlayan  $B$  pertürbe matrisi için  $A+B$  Schur kararlı bir matris ve

$$\omega(A+B) \leq \frac{\omega(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)} ; |\omega(A+B) - \omega(A)| \leq \frac{(2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega^2(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

**İspat :** İlk olarak teoremin ikinci kısmının ispatı ile başlayalım. İkinci kısmın ispatı için literatürdeki süreklilik teoremlerinin ispat yöntemlerini kullanalım (örn. Aydın 2004). Lemma 4.1. den Schur kararlı olan  $A+B$  matrisi için

$$A^*XA - X = - (I + B^*XA + A^*XB + B^*XB)$$

denklemini sağlayan  $X = X^* > 0$  simetrik pozitif tanımlı çözümünün var olduğu bilindiğine göre  $C = C^* = I + B^*XA + A^*XB + B^*XB > 0$  simetrik pozitif tanımlı matrisi vardır. Lyapunov matris denkleminin çözümü

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k$$

dır. Buradan

$$\|X\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k \right\| \leq \|C\| \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k \right\| = \|C\| \omega(A) \quad (4.2)$$

eşitsizliği elde edilir.  $C = I + B^*XA + A^*XB + B^*XB$  olduğundan

$$\|C\| \leq 1 + 2\|B\|\|X\|\|A\| + \|B\|^2\|X\|$$

bulunur. Bulunan eşitsizlik (4.2) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\|X\| \leq \left(1 + 2\|B\|\|X\|\|A\| + \|B\|^2\|X\|\right) \omega(A)$$

elde edilir. Buradan

$$\|X\| \left(1 - (2\|B\|\|A\| + \|B\|^2)\omega(A)\right) \leq \omega(A),$$

dolayısıyla

$$\|X\| \leq \frac{\omega(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)}$$

eşitsizliği elde edilir.  $\omega(A+B) = \|X\|$  olduğundan

$$\omega(A+B) \leq \frac{\omega(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)} \quad (4.3)$$

eşitsizliği bulunmuş olur.

Diğer eşitsizlik için,  $X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k$  ve  $H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k$  olduğu bilinmektedir.

Bu iki matrisin farkının normu alınırsa

$$\|X - H\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k (C - I) A^k \right\| \leq \|C - I\| \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k \right\|$$

eşitliği elde edilir.  $C = I + A^* X B + B^* X A + B^* X B$  olduğundan

$$\begin{aligned} \|X - H\| &\leq \|B^* X A + A^* X B + B^* X B\| \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k \right\| \\ &\leq \|A^* X B + B^* X A + B^* X B\| \omega(A) \leq (2\|B\|\|A\| + \|B\|^2) (\|X - H\| + \|H\|) \omega(A) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikten

$$\|X - H\| \leq \frac{(2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega^2(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)} \quad (4.4)$$

elde edilir.  $\|X\| - \|H\| \leq \|X - H\|$  olduğundan istenilen eşitsizlik bulunmuş olur.

Şimdi teoremin birinci kısmının ispatına geçelim.  $A$  Schur kararlı iken  $A+B$  matrisinin de Schur kararlı olması, yani  $\omega(A+B) < \infty$  olması için (4.3) eşitsizliğinden

$$1 - (2\|B\|\|A\| + \|B\|^2) \omega(A) > 0$$

olmalıdır. Buna göre,  $(2\|B\|\|A\| + \|B\|^2) \omega(A) < 1$  eşitsizliği  $\|B\|$  ye göre çözümlerse,

$$\|B\| < \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\omega(A)}} - \|A\|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

**Not 4.1.** Periyodik katsayılı sistemler için  $T = 1$  olması durumunda,  $A(n) = A$ ,  $B(n) = B$ ,  $X(T)|_{T=1} = X(1) = A$ ,  $Y(T)|_{T=1} = Y(1) = A+B$ ,  $\omega_1(A, T)|_{T=1} = \omega_1(A, 1) = \omega(A)$  ve  $\|Y(1) - X(1)\| = \|(A+B) - A\| = \|B\|$  olur. Ayrıca  $\|H(0)\| = \omega(A)$  olduğundan  $T = 1$  olması durumunda Teorem 2.5 ve Teorem 2.7 nin bir sonucu olarak da

“ $A$  Schur kararlı bir matris ( $\omega(A) < \infty$ ) olmak üzere

$$\|B\| < \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\omega(A)}} - \|A\|$$

şartını sağlayan  $B$  pertürbe matrisi için  $A+B$  Schur kararlı bir matristir.”

sonucu karşımıza çıkmaktadır.

**Sonuç 4.1.**  $A$ ,  $\omega^*$ -Schur kararlı matris ( $\omega(A) \leq \omega^*$ ) olmak üzere

$$\|B\| \leq \sqrt{\|A\|^2 + \frac{\omega^* - \omega(A)}{\omega^* \omega(A)}} - \|A\|$$

şartını sağlayan  $B$  pertürbe matrisi için  $A+B$  matrisi de  $\omega^*$ -Schur kararlıdır.

**İspat.**  $B$  pertürbe matrisi için  $A+B$  matrisinin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması

$$\omega(A+B) \leq \omega^*$$

eşitsizliğini sağlamasına bağlıdır. Teorem 4.1. den görülür ki  $A+B$  matrisinin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması için

$$\omega(A+B) \leq \frac{\omega(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)} \leq \omega^*$$

eşitsizliğini sağlamalıdır. Buradan

$$\frac{\omega(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)} \leq \omega^*$$

eşitsizliğini  $\|B\|$  ye göre çözümlerse

$$\|B\| \leq \sqrt{\|A\|^2 + \frac{\omega^* - \omega(A)}{\omega^* \omega(A)}} - \|A\|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece sonucun ispatı tamamlanmış olur.

**Örnek 4.3.**  $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 6 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$  ve  $\omega^* = 10$  olsun.  $\omega(A) = 54.9294 > \omega^*$  olduğundan  $A$ ,  $\omega^*$  – Schur kararsız matristir.

**Örnek 4.4.**  $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$  ve  $\omega^* = 10$  olsun.  $\omega(A) = 2.82812 \leq \omega^*$  olduğundan  $A$ ,  $\omega^*$  – Schur kararlı matristir. Ayrıca Sonuç 4.1 den  $\|B\| \leq 0.107862$  olacak şekilde  $B$  pertürbe matrisleri için  $A+B$  matrisi  $\omega^*$  – Schur kararlıdır. Mesela

$B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ ,  $\|B\| = 0.1 < 0.107862$  (Sonuç 4.1.) alalım. Gerçekten

$A + B = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$  olup  $\omega(A+B) = 3.65544$  olduğu görülür.

## 4.2. Nümerik Sonuçlar ve Karşılaştırma

Bu kısımda (4.1) sistemi için Teorem 2.2., Teorem 2.3. ve Teorem 4.1. de verilen sonuçların karşılaştırması yapılmıştır. Karşılaştırma yapılırken kolaylık sağlaması açısından pertürbe matrisinin normu  $\|B\|$  nin üst sınırını

- $\delta_1 = \frac{\|A\|}{10\omega(A)}$  (Teorem 2.2.)
- $\delta_2 = \frac{1}{20\omega^{\frac{3}{2}}(A)}$  (Teorem 2.3.)
- $\delta_3 = \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\omega(A)}} - \|A\|$  (Teorem 4.1.),

ile

- $A_i$  matrisi için pertürbe matrislerini  $B_i^k$

ile,  $\theta = |\omega(A+B) - \omega(A)|$  olmak üzere  $\theta$  nın üst sınırlarını

- $\theta_1 = 4\omega^2(A) \frac{\|B\|}{\|A\|}$  (Teorem 2.2.)

- $\theta_2 = 5\omega^{\frac{5}{2}}(A)\|B\|$  (Teorem 2.3.)
- $\theta_3 = \frac{(2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega^2(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)}$  (Teorem 4.1.)

olarak gösterelim.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.75 & -1 \end{pmatrix}$  alalım.  $\omega(A_1) = 6.01596$ ,  $\delta_1 = 0.02714$ ,  $\delta_2 = 0.00339$ ,  
 $\delta_3 = 0.05013$  dir. Bu değerlere uygun pertürbe matrislerini  
 $B_1^1 = \begin{pmatrix} 0.003 & 0 \\ 0 & -0.003 \end{pmatrix}$ ,  $B_1^2 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{pmatrix}$  alalım. Buna göre  
 $\omega(A_1 + B_1^1) = 6.10758$ ,  $\omega(A_1 + B_1^2) = 6.33469$  dir.
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.01 & -0.25 \end{pmatrix}$  alalım.  $\omega(A_2) = 1.34632$ ,  $\delta_1 = 0.03802$ ,  $\delta_2 = 0.032$ ,  
 $\delta_3 = 0.49$  dur. Bu değerlere uygun pertürbe matrislerini  
 $B_2^1 = \begin{pmatrix} 0.03 & -0.01 \\ 0 & -0.003 \end{pmatrix}$ ,  $B_2^2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.15 \\ -0.01 & 0.2 \end{pmatrix}$  alalım. Buna göre  
 $\omega(A_2 + B_2^1) = 1.40135$ ,  $\omega(A_2 + B_2^2) = 2.93851$  dir.
- $A_3 = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & -0.99 \end{pmatrix}$  alalım.  $\omega(A_3) = 50.2513$ ,  $\delta_1 = 0.00197$ ,  $\delta_2 = 0.00014$ ,  
 $\delta_3 = 0.00999$  dur. Bu değerlere uygun pertürbe matrislerini  
 $B_3^1 = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{pmatrix}$ ,  $B_3^2 = \begin{pmatrix} 0.002 & 0 \\ 0 & -0.001 \end{pmatrix}$  alalım. Buna göre  
 $\omega(A_3 + B_3^1) = 50.7563$ ,  $\omega(A_3 + B_3^2) = 62.751$  dir.

$A$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$B$	$\theta$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
$A_1$	0.02714	0.00339	0.05013	$B_1^1$	0.09162	0.26599	1.33154	0.377132
				$B_1^2$	0.31873	0.88663	*	1.47642
$A_2$	0.03802	0.032	0.49	$B_2^1$	0.05503	0.44812	0.33268	0.0633682
				$B_2^2$	1.59219	4.93648	*	2.43405
$A_3$	0.00197	0.00014	0.00999	$B_3^1$	0.505	1.02028	8.95031	0.505039
				$B_3^2$	12.4997	*	*	12.4998

**Tablo 4.1.** Farklı Schur kararlı  $A$  matrislerine, matrisin özelliği bozulmaksızın Teorem 2.2., Teorem 2.3. ve Teorem 4.1. ile verilen pertürbenin sınırlarını ( $\delta_1$ ,  $\delta_2$  ve  $\delta_3$ ), bu sınırlara uygun  $B$  pertürbe matrislerine karşılık Schur kararlılık parametreleri arasında gerçekleşen fark ( $\theta$ ) ve aynı pertürbe matrisleri için yine Teorem 2.2., Teorem 2.3. ve Teorem 4.1. ile verilen parametreler arasındaki farkın üst sınırlarını ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ve  $\theta_3$ ) gösteren tablo

Tablo 4.1. de verilen Schur kararlı  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) matrisleri için 2. 3. ve 4. sütundan anlaşılacağı üzere Teorem 2.2. ( $\delta_1$ ), Teorem 2.3. ( $\delta_2$ ) ve Teorem 4.1. ( $\delta_3$ ) nin izin verdiği maksimum pertürbeler görülmektedir. Görüldüğü gibi Teorem 2.2., Teorem 2.3. den ve Teorem 4.1., Teorem 2.2 ve Teorem 2.3. den daha fazla pertürbeye izin vermektedir. Mesela Schur kararlı  $A_2$  matrisi için  $A_2 + B_2^k$  matrisi Schur kararlı olacak şekilde pertürbe matrisinin normunun üst sınırları  $\delta_1 = 0.03802$ ,  $\delta_2 = 0.032$  ve  $\delta_3 = 0.49$ , yani  $A_2$  matrisi için Teorem 2.2., Teorem 2.3. den ve Teorem 4.1, Teorem 2.2. ve Teorem 2.3. den daha fazla pertürbe yapılabilir.  $\delta_2$  ye göre yapılan pertürbe  $B_2^1$  matrisi için gerçekleşen değer  $\theta = 0.05503$  iken, Teorem 4.1. ile verilen sınır  $\theta_3 = 0.0633682$ , Teorem 2.2. ile verilen sınır  $\theta_1 = 0.44812$  ve Teorem 2.3. ile verilen sınır  $\theta_2 = 0.332688$  olmaktadır. Burada  $\theta_3$  üst sınırı gerçekleşen  $\theta$  değerine  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  sınırından daha yakın olmaktadır.

Schur kararlı  $A_1$  matrisi için  $A_1 + B_1^k$  matrisi Schur kararlı kalacak şekildeki maksimum pertürbeye Teorem 4.1. ( $\delta_3$ ) izin vermektedir.  $\delta_2$  ye göre yapılan pertürbe  $B_1^1$  matrisi için gerçekleşen değer  $\theta = 0.09162$  iken, Teorem 2.2. ile verilen sınır  $\theta_1 = 0.26599$ , Teorem 2.3. ile verilen sınır  $\theta_2 = 1.33154$  ve Teorem 4.1. ile verilen sınır  $\theta_3 = 0.377132$  olmaktadır. Burada  $\theta_1$  üst sınırı gerçekleşen  $\theta$  değerine  $\theta_2$  ve  $\theta_3$  sınırından daha yakın olmaktadır.

$\delta_2 < \delta_1 < \|B\| < \delta_3$  olan  $B$  pertürbe matrisleri için Teorem 2.2. ve Teorem 2.3. şartları sağlanmadığından  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  değeri,  $\delta_2 < \|B\| < \delta_1 < \delta_3$  olan  $B$  pertürbe matrisleri için de Teorem 2.3. ün şartları sağlanmadığından  $\theta_2$  değeri hesaplanamamıştır. Bu durum Tablo 4.1. de \* ile gösterilmiştir. Mesela  $B_3^2$  matrisi için  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  değeri hesaplanamazken  $\theta_3 = 12.4998$  olarak hesaplanmıştır.

**Uyarı 4.1.**  $A = 0$  matrisi için  $\omega(A) = 1$  olup Schur kararlılığın kalitesi en iyi olan matristir. Bu durumda  $\delta_1$  hesaplanamaz iken  $\delta_2 = \frac{1}{20}$  ve  $\delta_3 = 1$  olarak bulunur. Spektral Kriteri dikkate alınırrsa Teorem 4.1. ile verilen  $\delta_3 = 1$  sınırı, sistemin Schur kararlılığı bozulmadan yapılabilecek en büyük pertürbenin de üst sınırı olduğu dikkate alınmalıdır.

## 5. PERİYODİK LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SCHUR KARARLILIĞININ HASSASİYETİ\*

Schur kararlılığın hassasiyeti problemi, verilen bir sistemin Schur kararlılığı bozulmadan ne kadar pertürbe edilebileceği, diğer bir ifadeyle pertürbe matrisi üzerine konulacak şartların ortaya çıkarılması problemidir. Bu yönüyle Schur kararlılığın hassasiyeti problemi, bir *ters problem* olarak karşımıza çıkmaktadır. *Ters problem*, basitçe çözümden hareketle, problemin yapısının korunması için problemin verilerinin sağlaması gereken şartları araştırma problemi olarak tanımlanabilir.

Bu bölümde, periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin Schur kararlılığının hassasiyet problemi için bazı sonuçlar verildi. Bu sonuçlar monodromi matrisinin sürekliliği ve Schur kararlılık parametrelerinin sürekliliği olarak iki alt başlıkta incelendi, elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla da karşılaştırıldı.

### 5.1. Monodromi Matrisinin Sürekliliği Üzerine Sonuçlar

$A(n) = A(n+T)$ ,  $N$  boyutlu periyodik ( $T$  periyotlu) karesel bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq 0 \quad (5.1)$$

sistemini ele alalım.  $I$  birim matris olmak üzere

$$X(n+1) = A(n)X(n), \quad X(0) = I, \quad n \geq 0 \quad (5.2)$$

Cauchy probleminin çözümü olan  $X(n)$  matrisi (5.1) sisteminin fundamental matrisi,  $X(T)$  matrisi de (5.1) sisteminin monodromi matrisi olmak üzere  $B(n)=B(n+T)$ ,  $N$  boyutlu periyodik ( $T$  periyotlu) karesel matris olmak üzere (5.1) periyodik katsayılı lineer fark denklem sisteminin

$$y(n+1) = (A(n)+ B(n))y(n), \quad n \geq 0 \quad (5.3)$$

pertürbe sistemidir. (5.3) Cauchy probleminden elde edilen

---

\* Bu bölümdeki sonuçların bir kısmı, XX.Ulusal Matematik Sempozyumu'nda (03-06 Eylül 2007, Erzurum) ve bir kısmı da 14th International Conference on Difference Equations and Applications, (July 21-25 2008 İstanbul) da bildiri olarak sunulmuştur.

$$Y(n+1) = [A(n)+B(n)] Y(n) , Y(0) = I, n \geq 0 \quad (5.4)$$

Cauchy probleminin çözümü olan  $Y(n)$  matrisi (5.3) sisteminin fundamental matrisi,  $Y(T)$  matrisi de (5.3) sisteminin monodromi matrisidir. Schur kararlılığının hassasiyetini gösteren süreklilik teoremlerini vermeden önce çalışma için gerekli olan bazı gösterimleri tanıtalım.

$\alpha = \sum_{i=0}^{T-1} \ X(i)\ ^2$	$Q(n,s) = \prod_{j=s}^{n-1} A(j)$
$\Psi(n,s) = \prod_{j=s}^{n-1} B(j)$	$\gamma = (T-1) \max_{1 \leq k \leq T} \ Q(T,k)\ $
$\beta = \max_{1 \leq k \leq T} \ Q(T,k)\  \left( 1 + (T-1) \max_{1 \leq k \leq T-1} \ Q(k,0)\  \right)$	
$\mu = \max_{1 \leq k \leq T} \ Q(T,k)\  \times \begin{cases} \max_{0 \leq j \leq T-2} \ A(j)\  & ; \max_{0 \leq j \leq T-2} \ A(j)\  \leq 1 \\ \left( \max_{0 \leq j \leq T-2} \ A(j)\  \right)^{T-2} & ; \max_{0 \leq j \leq T-2} \ A(j)\  > 1 \end{cases}$	
$\Delta = Y(T) - X(T) = \sum_{k=0}^{T-1} \left( \prod_{j=k+1}^{T-1} A(j) \right) B(k) Y(k)$	
$\Delta_1 = \sqrt{\ X(T)\ ^2 + \frac{1}{\omega_1(A,T)}} - \ X(T)\ $	
$\Delta_2 = \sqrt{\ X(T)\ ^2 + \frac{\alpha}{\omega_2(A,T)}} - \ X(T)\ $	
$\Delta_3 = \max_{0 \leq k \leq T-1} \ B(k)\  \left( \beta + \gamma \max_{1 \leq k \leq T-1} \ \Psi(k,0)\  + \right. \\ \left. + \mu \max_{0 \leq k \leq T-1} \ B(k)\  \sum_{k=2}^{T-1} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \ B(j)\  \right)^l \right)$	
$\Delta_4 = \frac{\max_{1 \leq j, k \leq T} \ Q(j,k)\  \left( 1 + (T-1) \max_{1 \leq k \leq T-1} \ X(k)\  \right)}{1 - (T-1) \max_{1 \leq j, k \leq T} \ Q(j,k)\  \max_{0 \leq k \leq T-1} \ B(k)\ } \max_{0 \leq k \leq T-1} \ B(k)\ $	

**Tablo 5.1.** Bazı Semboller

**Lemma 5.1.**  $Y(n)$ , (5.3) ün fundamental matrisi olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} \|Y(k)\| &\leq 1 + (T-1) \max_{1 \leq k \leq T-1} \|Q(k,0)\| + (T-1) \max_{1 \leq k \leq T-1} \|\Psi(k,0)\| \\ &\quad + \sum_{k=2}^{T-1} \left[ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|A(j)\| \right)^{k-l} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|B(j)\| \right)^l \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.  $Q$  ve  $\Psi$ , Tablo 5.1. de tanımlandığı gibidir.

**İspat.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} \|Y(k)\| &= 1 + \|Y(1)\| + \|Y(2)\| + \dots + \|Y(T-1)\| \\ &= 1 + \|A(0)+B(0)\| + \|[A(1)+B(1)][A(0)+B(0)]\| + \dots + \\ &\quad + \|[A(T-2)+B(T-2)] \dots [A(1)+B(1)][A(0)+B(0)]\| \end{aligned}$$

şeklindedir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} \|Y(k)\| &\leq 1 + \sum_{k=1}^{T-1} \|Q(k,0)\| + \sum_{k=1}^{T-1} \|\Psi(k,0)\| \\ &\quad + \sum_{k=2}^{T-1} \left[ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|A(j)\| \right)^{k-l} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|B(j)\| \right)^l \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{T-1} \|Q(k,0)\| \leq (T-1) \max_{1 \leq k \leq T-1} \|Q(k,0)\| ; \quad \sum_{k=1}^{T-1} \|\Psi(k,0)\| \leq (T-1) \max_{1 \leq k \leq T-1} \|\Psi(k,0)\|$$

eşitsizlikleri dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} \|Y(k)\| &\leq 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|Q(k,0)\| + \max_{1 \leq k \leq T-1} \|\Psi(k,0)\| \right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{T-1} \left[ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|A(j)\| \right)^{k-l} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|B(j)\| \right)^l \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 5.1.**  $X(T)$  ve  $Y(T)$  sırasıyla, (5.1) ve (5.3) sistemlerinin monodromi matrisleri olmak üzere

$$\| Y(T) - X(T) \| \leq \Delta_3$$

eşitsizliği doğrudur. Üstelik (5.1) sistemi Schur kararlı olmak üzere  $\Delta_3 < \Delta_1$  eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi Schur kararlıdır.  $\Delta_1$  ve  $\Delta_3$ , Tablo 5. 1. deki tanımlandığı gibidir.

**İspat .** (5.2) ve (5.4) denklemlerinden

$$Y(n+1) - X(n+1) = A(n) [Y(n) - X(n)] + B(n)Y(n) ; Y(0) - X(0) = 0 \quad (5.5)$$

ifadesi yazılabilir. (5.5) sisteminin çözümü, yani (5.1) ve (5.3) sistemlerinin fundamental matrisleri arasındaki fark

$$Y(n) - X(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \prod_{j=k+1}^{n-1} A(j) \right) B(k)Y(k) \quad (5.6)$$

dır. (5.6) eşitliğinde  $n = T$  alınarak

$$Y(T) - X(T) = \sum_{k=0}^{T-1} \left( \prod_{j=k+1}^{T-1} A(j) \right) B(k)Y(k) \quad (5.7)$$

eşitliği yazılır. (5.7) eşitliğinde her iki tarafın normu alınır

$$\| Y(T) - X(T) \| = \left\| \sum_{k=0}^{T-1} Q(T, k+1) B(k)Y(k) \right\|$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\| Y(T) - X(T) \| \leq \max_{1 \leq k \leq T} \| Q(T, k) \| \max_{0 \leq k \leq T-1} \| B(k) \| \sum_{k=0}^{T-1} \| Y(k) \| \quad (5.8)$$

eşitsizliği yazılır. Lemma 5.1. de ki eşitsizlik (5.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \| Y(T) - X(T) \| \leq & \max_{0 \leq k \leq T-1} \| B(k) \| \left( \beta + \gamma \max_{1 \leq k \leq T-1} \| \Psi(k, 0) \| + \right. \\ & \left. + \max_{1 \leq k \leq T} \| Q(T, k) \| \sum_{k=2}^{T-1} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \| A(j) \| \right)^{k-l} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \| B(j) \| \right)^l \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıda ki eşitsizlik için,

- $\max_{0 \leq j \leq T-2} \|A(j)\| \leq 1$  ise;

$$\|Y(T) - X(T)\| \leq \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\| \left( \beta + \gamma \max_{1 \leq k \leq T-1} \|\Psi(k,0)\| + \right. \\ \left. + \max_{1 \leq k \leq T} \|Q(T,k)\| \max_{0 \leq j \leq T-2} \|A(j)\| \sum_{k=2}^{T-1} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|B(j)\| \right)^l \right),$$

- $\max_{0 \leq j \leq T-2} \|A(j)\| > 1$  ise;

$$\|Y(T) - X(T)\| \leq \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\| \left( \beta + \gamma \max_{1 \leq k \leq T-1} \|\Psi(k,0)\| + \right. \\ \left. + \max_{1 \leq k \leq T} \|Q(T,k)\| \left( \max_{0 \leq j \leq T-2} \|A(j)\| \right)^{T-2} \sum_{k=2}^{T-1} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|B(j)\| \right)^l \right)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu teoremin birinci kısmını ispatlar.

(5.1) sistemi Schur kararlı olmak üzere Teorem 2.5. den,  $\Delta_3 < \Delta_1$  eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi Schur kararlıdır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Sonuç 5.1.**  $T=1$  için (5.1) fark denklem sistemi ((2.1) sabit katsayılı sistem) Schur kararlı olmak üzere

$$\|B\| < \Delta_1|_{T=1} = \delta_3$$

şartını sağlayan  $B$  pertürbe matrisi için (5.3) sistemi de ((2.4) sabit katsayılı pertürbe sistemi) Schur kararlıdır. ( $\delta_3$  (kısım 4.2.) de tanımlandığı gibidir.)

**İspat.** Periyodik katsayılı sistemler için  $T = 1$  olması durumunda,  $A(n)=A$ ,  $B(n) = B$ ,  $X(T)|_{T=1} = X(1)=A$ ,  $Y(T)|_{T=1} = Y(1) = A+B$ ,  $\omega_1(A,T)|_{T=1} = \omega_1(A,1) = \omega(A)$ ,  $\beta|_{T=1} = 1$ ,  $\gamma|_{T=1} = 1$ ,  $\mu|_{T=1} = 0$ ,  $\max_{0 \leq k \leq 0} \|B(k)\| = \|B(0)\| = \|B\|$ ,  $\Delta_3|_{T=1} = \|B\|$  ve  $\Delta_1|_{T=1} = \delta_3$  (kısım

4.2.) olur. Burada  $\max_{i \leq k \leq j, j < i} \{.\} = 0$  ve  $\sum_{k=i, j < i}^j (.) = 0$  şeklinde tanımlıdır. Böylece

$$\Delta_3|_{T=1} < \Delta_1|_{T=1} = \delta_3$$

elde edilir. Bu ise sonucu ispatlar.

**Uyarı 5.1.** Sonuç 5.1. tam olarak Teorem 4.1. in ifadesinin bir kısmı olduğu açıktır. Ayrıca Teorem 2.5. ve Teorem 2.7. de  $T = 1$  alındığında da direk bu sonuç ortaya çıkmaktadır. Bu bize yukarıdaki teoremin literatürdeki sonuçlarla uyumlu olduğunu göstermektedir.

**Teorem 5.2.**  $X(T)$  ve  $Y(T)$  sırasıyla, (5.1) ve (5.3) sistemlerinin monodromi matrisleri ve  $(T-1) \max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\| < 1$  olmak üzere

$$\|Y(T) - X(T)\| \leq \Delta_4$$

eşitsizliği doğrudur. Üstelik (5.1) sistemi Schur kararlı olmak üzere

$$\|B(n)\| < \frac{\Delta_1}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_1 \right) \right]}$$

şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi de Schur kararlıdır. Burada  $\Delta_1$  ve  $\Delta_4$ , Tablo 5. 1. de tanımlandığı gibidir.

**İspat.** (5.6) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \|Y(n) - X(n)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} Q(n, k+1) B(k) Y(k) \right\| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \|Q(n, k)\| \max_{0 \leq k \leq n-1} \|B(k)\| \sum_{k=0}^{n-1} \|Y(k)\| \end{aligned} \quad (5.9)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \|Y(k)\| &= \sum_{k=0}^{n-1} \|Y(k) - X(k) + X(k)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|Y(k) - X(k)\| + \sum_{k=0}^{n-1} \|X(k)\| \\ &\leq 1 + (n-1) \left( \max_{1 \leq k \leq n-1} \|Y(k) - X(k)\| + \max_{1 \leq k \leq n-1} \|X(k)\| \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlik (5.9) da yerine yazılırsa

$$\|Y(n) - X(n)\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|Q(n, k)\| \max_{0 \leq k \leq n-1} \|B(k)\| \left[ 1 + (n-1) \left( \max_{1 \leq k \leq n-1} \|Y(k) - X(k)\| + \max_{1 \leq k \leq n-1} \|X(k)\| \right) \right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Eşitsizlik her  $n$  için sağlandığından ve sağ taraftaki bütün terimler maksimum olduğundan eşitsizlik

$$\|Y(n) - X(n)\| \text{ yerine } \max_{1 \leq k \leq n} \|Y(k) - X(k)\|$$

içinde geçerli olacaktır. Böylece  $\eta = \max_{1 \leq j, k \leq n} \|Q(j, k)\| \max_{0 \leq k \leq n-1} \|B(k)\|$  olmak üzere eşitsizlik

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|Y(k) - X(k)\| \leq \eta \left( 1 + (n-1) \left( \max_{1 \leq k \leq n-1} \|Y(k) - X(k)\| + \max_{1 \leq k \leq n-1} \|X(k)\| \right) \right)$$

olarak yazılır. Buradan  $\max_{1 \leq k \leq n-1} \|Y(k) - X(k)\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|Y(k) - X(k)\|$  olduğu dikkate alınarak eşitsizlik düzenlenirse

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|Y(k) - X(k)\| \leq \frac{\eta}{(1 - (n-1)\eta)} \left( 1 + (n-1) \max_{1 \leq k \leq n-1} \|X(k)\| \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\|Y(n) - X(n)\| \leq \frac{\eta}{(1 - (n-1)\eta)} \left( 1 + (n-1) \max_{1 \leq k \leq n-1} \|X(k)\| \right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlikte  $n = T$  olarak alınırsa  $\|Y(T) - X(T)\| \leq \Delta_4$  sonucuna ulaşılır. Böylece teoremin birinci kısmının ispatı tamamlanmış olur.

Teoremin ikinci kısmının ispatı ise; Teorem 2.5. den  $\Delta_4 < \Delta_1$  eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi Schur kararlı olduğundan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\|B(n)\| < \frac{\Delta_1}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_1 \right) \right]}$$

olarak bulunur. Bu ise teoremi ispatlamaya yeterlidir.

**Not 5.1.**  $T = 1$  için Teorem 5. 2. nin ifadesi Sonuç 5.1. ile aynı olmaktadır.

Gerçekten,  $T = 1$  olduğunda,  $A(n) = A$ ,  $B(n) = B$ ,  $X(T)|_{T=1} = X(1) = A$ ,  $Y(T)|_{T=1} = Y(1) = A+B$ ,  $\omega_1(A, T)|_{T=1} = \omega_1(A, 1) = \omega(A)$  ve

$$\Delta_4|_{T=1} = \frac{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left( 1 + (T-1) \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| \right)}{1 - (T-1) \max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\|} \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\| \Big|_{T=1} = \|B\|,$$

$$\frac{\Delta_1}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_1 \right) \right]} \Big|_{T=1} = \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\omega(A)}} - \|A\|$$

olur. Böylece Sonuç 5.1. e ulaşılmış olur.

**Örnek 5.1.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 2 & 0.1 \end{pmatrix} x(n)$  periyodik katsayılı lineer denklem

sistemini ele alalım. Teorem 5.2. nin birinci kısmına göre  $\max_{0 \leq k \leq 1} \|B(k)\| < 1$  olmak üzere

$$\|Y(2) - X(2)\| \leq \Delta_4 = \frac{1.5}{1 - \max_{0 \leq k \leq 1} \|B(k)\|} \max_{0 \leq k \leq 1} \|B(k)\|$$

eşitsizliği doğrudur. Örneğin

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_1(k)\| = 0.5$$

$$B_2(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_2(k)\| = 0.9$$

pertürbe matrisleri için sırasıyla,

$$\|Y(2) - X(2)\| = 0.75 \leq \Delta_4 = 1.5, \quad \|Y(2) - X(2)\| = 1.71 \leq \Delta_4 = 13.5$$

dir. Fakat verilen Schur kararlı sistem  $B_1(n)$  ve  $B_2(n)$  matrisleri ile pertürbe edilir ise  $\omega_1(A+B_1, T) = \infty$  ve  $\omega_1(A+B_2, T) = \infty$  olduğundan pertürbe sistemleri Schur kararlı değildir.

Teoremin 5.2. nin ikinci kısmına göre verilen Schur kararlı sistemi  $\| B(n) \| < 0.333333$  şartını sağlayan pertürbe matrisleri ile pertürbe edilir ise pertürbe sistemi Schur kararlı olarak kalmaktadır. Gerçekten

$$B_3(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n 0.33 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{pmatrix}, \max_{0 \leq k \leq 1} \| B_3(k) \| = 0.33$$

pertürbe matrisi ile pertürbe edilirse  $\omega_1(A+B_3, T) = 1.90325$  olduğundan verilen sistem Schur kararlı kalmaktadır ve

$$\| Y(T) - X(T) \| = 0.4389 \leq \Delta_4 = 0.738806$$

dir. Ayrıca pertürbe sistemin Schur kararlılığı  $\Delta_4 = 0.738806 < \Delta_1 = 0.749999$  olduğundan da görülmektedir.

**Uyarı 5.2.** Teorem 5.2. de Teorem 5.1. gibi literatürdeki sonuçlarla uyumludur.

Şimdi Schur kararlılığı karakterize eden  $\omega_1(A, T)$  parametresine göre ifade edilen Teorem 5.1. ve Teorem 5.2. yi, 3. bölümde (3.7) eşitsizliği ile verilen

$$1/\omega_1(A, T) \leq \alpha / \omega_2(A, T)$$

eşitsizliğinden yararlanarak  $\omega_2(A, T)$  parametresine göre ifade edelim.

**Teorem 5.3.** (5.1) sistemi Schur kararlı olmak üzere  $\Delta_3 < \Delta_2$  eşitsizliğini sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi Schur kararlıdır. Burada  $\Delta_2$  ve  $\Delta_3$ , Tablo 5. 1. deki tanımlandığı gibidir.

**Teorem 5.4.** (5.1) sistemi Schur kararlı olmak üzere

$$\|B(n)\| < \frac{\Delta_2}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_2 \right) \right]}$$

şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi de Schur kararlıdır. Burada  $\Delta_2$  Tablo 5. 1. deki tanımlandığı gibidir.

**Not 5.2.** Teorem 5.3. ve 5.4 de ki  $\Delta_2$  parametresi,  $\omega_1(A, T)$  parametresine bağlı olan  $\Delta_1$  parametresinin,  $\omega_2(A, T)$  parametresine göre yazılmış halidir. Bu sebepten teoremlerin ispatları (3.7) eşitsizliği, Teorem 5.1. ve Teorem 5.2. nin ispatlarından açıktır.

Şimdi yukarıda verdiğimiz teoremler ile ilgili bir örnek yapalım.

**Örnek 5.2.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix} x(n)$  periyodik katsayılı lineer denklem

sistemini ele alalım. Sistemin şart sayıları  $\omega_1(A, 2) = 25.3781$  ve  $\omega_2(A, 2) = 50.2513$  dır. Verilen Schur kararlı olan sistemi

- $\|B(n)\| < 0.00995026$  (Teorem 5.1.)
- $\|B(n)\| < 0.00990101$  (Teorem 5.2.)
- $\|B(n)\| < 0.00995024$  (Teorem 5.3.)
- $\|B(n)\| < 0.00990098$  (Teorem 5.4.)

kadar bir pertürbe yapılırsa verilen sistemin Schur kararlı kalacağını garanti etmektedir.

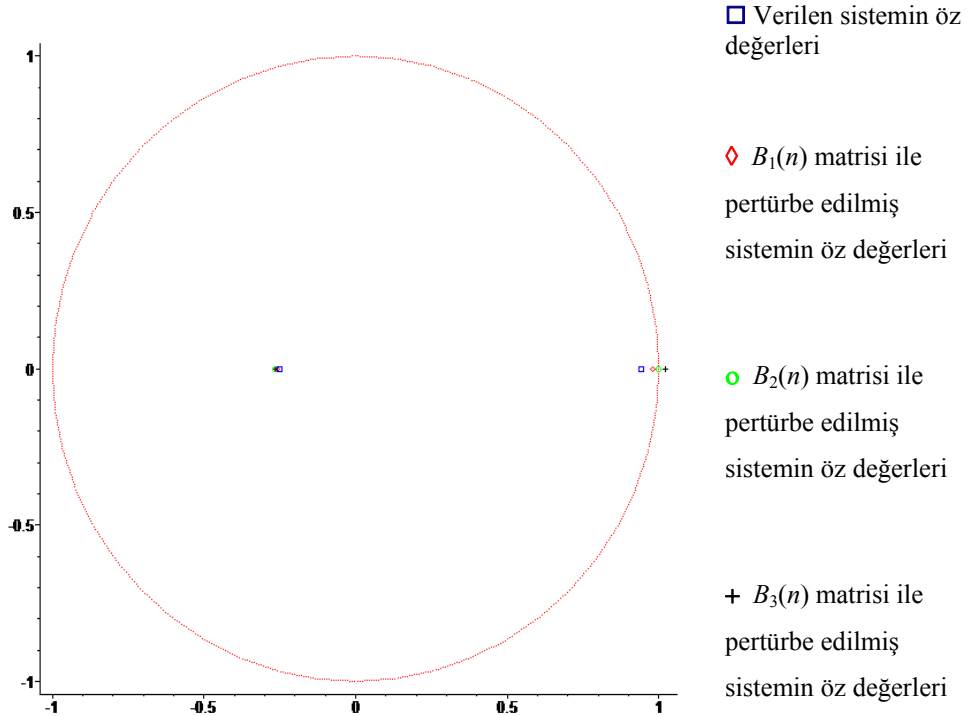
$$B_1(n) = \begin{pmatrix} 0.0099 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0099 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_1(k)\| = 0.0099,$$

$$B_2(n) = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.01 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_2(k)\| = 0.01$$

$$B_3(n) = \begin{pmatrix} 0.011 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.011 \end{pmatrix}, \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_3(k)\| = 0.011$$

matrisleri ile pertürbe edilsin. Bu durumda verilen sistem  $B_1$  ile pertürbe edilen sistem  $\omega_1(A+B_1,2) = 2500.38$  olduğundan Schur kararlı iken  $B_2$  ve  $B_3$  ile pertürbe edilen sistem, Teorem 5.1., Teorem 5.2., Teorem 5.3. ve Teorem 5.4. ile verilen sınırlardan hiçbirisi ile Schur kararlı olduğu garanti edilmemektedir. Gerçekte bu sistemler zaten  $\omega_1(A+B_2,2) = \infty$  ve  $\omega_1(A+B_3, 2) = \infty$  olduğundan Schur kararlı olmamaktadır.

**Not 5.3.** Yukarıdaki örnekten, özellikle  $B_1(n)$  ve  $B_2(n)$  pertürbe matrislerine karşılık gelen değerler incelendiğinde elde edilen teoremlerin *keskin sınırlar* verdiği anlaşılmaktadır. Spektral Kiritere göre de, bu durum Şekil 5.1. de açıkça görülmektedir.



Şekil 5.1. Örnek 5.2. nin Spektral Kiritere göre değerlendirilmesi

## 5.2. $\omega_1(A, T)$ ve $\omega_2(A, T)$ Parametrelerinin Sürekliliği Üzerine Sonuçlar

(5.1) ve (5.3) sistemleri (  $X(T)$  ve  $Y(T)$  matrisleri ) Schur kararlı olsun. Yani her hangi bir  $C = C^* > 0$  matrisi için sırasıyla,  $X^*(T)FX(T) - F + C = 0$  Lyapunov fark matris denklemini (LFMD) sağlayan  $F = F^* > 0$  ve  $Y^*(T)\tilde{F}Y(T) - \tilde{F} + C = 0$  LFMD ni sağlayan  $\tilde{F} = \tilde{F}^* > 0$  çözüm matrisleri var olsun.

Schur kararlı  $X(T)$  ( veya  $Y(T)$  ) matrisi için **her hangi bir pozitif tanımlı matrisi çözüm kabul edecek şekilde** LFMD ni sağlayan bir  $C = C^* > 0$  matrisini araştırma problemi anlamlıdır ve bu yönüyle problem, bir ters problemdir.

Şimdi bu ters probleme cevap teşkil eden lemmayı verelim.

**Lemma 5.2.** (5.1) sistemi ( $X(T)$  matrisi) ve (5.3) sistemi ( $Y(T)$  matrisi) Schur kararlı olsun. Her hangi bir  $C_2 = C_2^* > 0$  matrisi için (5.3) sisteminin LFMDni sağlayan  $\Phi_2 = \Phi_2^* > 0$  çözümüne karşılık, (5.1) sisteminin LFMDni sağlayan simetrik pozitif matris

$$C = C_2 + \Delta^* \Phi_2 X(T) + X^*(T) \Phi_2 \Delta + \Delta^* \Phi_2 \Delta$$

şeklindedir.  $\Delta$ , Tablo 5.1 de tanımlandığı gibidir.

**İspat.** (5.1) sistemi Schur kararlı, yani  $X(T)$  monodromi matrisi Schur kararlı olduğundan

$$X^*(T) \Phi_1 X(T) - \Phi_1 + C_1 = 0$$

LFMDnin pozitif tanımlı bir  $\Phi_1 = \Phi_1^* > 0$  çözümü vardır. (5.3) sistemi de Schur kararlı olduğundan

$$Y^*(T) \Phi_2 Y(T) - \Phi_2 + C_2 = 0 \quad (5.10)$$

LFMDnin pozitif tanımlı bir  $\Phi_2 = \Phi_2^* > 0$  çözümü vardır. (5.10) denkleminin çözümü  $\Phi_2$  matrisine karşılık

$$X^*(T) \Phi_2 X(T) - \Phi_2 + C = 0$$

LFMD ni sağlayan  $C$  matrisini araştıralım. (5.10) denkleminde  $Y(T) = X(T) + \Delta$  olarak alınırsa

$$(X(T) + \Delta)^* \Phi_2 (X(T) + \Delta) - \Phi_2 = -C_2$$

elde edilir. Buradan

$$X^*(T) \Phi_2 X(T) - \Phi_2 = - (C_2 + \Delta^* \Phi_2 X(T) + X^*(T) \Phi_2 \Delta + \Delta^* \Phi_2 \Delta)$$

bulunur.  $\Phi_2 = \Phi_2^* > 0$  çözüm matrisi olduğundan ve  $X(T)$  matrisi de Schur kararlı matris olduğundan Teorem 2.4. den LFMD ni sağlayan simetrik pozitif tanımlı matris  $C = C^* = C_2 + \Delta^* \Phi_2 X(T) + X^*(T) \Phi_2 \Delta + \Delta^* \Phi_2 \Delta$  olarak bulunur.

Şimdi Lemma 5.2. yi bir örnekle açıklayalım.

**Örnek 5.3.** (5.1) sistemi için  $A(n) = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$  olsun. Verilen  $A(n)$  matrisi ile

Schur kararlı olan (5.1) sistemini  $B(n) = \begin{pmatrix} 0.0099 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0099 \end{pmatrix}$  matrisi ile

pertürbe edilirse, Lemma 5.2. ye göre  $C_2 = \begin{pmatrix} 1.9998 & 0 \\ 0 & 1.26 \end{pmatrix}$  matrisi için pertürbe

edilmiş sistemin LFMD sisteminin çözümü  $\Phi_2 = \Phi_2^* > 0$  matrisine karşılık, pertürbe edilmemiş sistemin LFMDni sağlayan simetrik pozitif tanımlı matris

$C = C^* = \begin{pmatrix} 197.03 & 0 \\ 0 & 1.26689 \end{pmatrix}$  olarak bulunur.

**Lemma 5.3.** (5.1) sistemi ( $X(T)$  matrisi) ve (5.3) sistemi ( $Y(T)$  matrisi) Schur kararlı olsun. Her hangi bir  $C_1 = C_1^* > 0$  matrisi için (5.1) sisteminin LFMDni sağlayan  $\Phi_1 = \Phi_1^* > 0$  çözümüne karşılık, (5.3) sisteminin LFMDni sağlayan simetrik pozitif matris

$$C = C_1 + \Delta^* \Phi_1 \Delta - \Delta^* \Phi_1 Y(T) - Y^*(T) \Phi_1 \Delta$$

şeklindedir.  $\Delta$ , Tablo 5.1 de tanımlandığı gibidir.

**İspat.** (5.1) sistemi Schur kararlı, yani  $X(T)$  monodromi matrisi Schur kararlı olduğundan

$$X^*(T) \Phi_1 X(T) - \Phi_1 + C_1 = 0 \quad (5.11)$$

LFMDnin pozitif tanımlı bir  $\Phi_1 = \Phi_1^* > 0$  çözümü vardır. (5.3) sistemi Schur kararlı olduğundan

$$Y^*(T) \Phi_2 Y(T) - \Phi_2 + C_2 = 0$$

LFMDnin pozitif tanımlı bir  $\Phi_2 = \Phi_2^* > 0$  çözümü vardır. (5.11) denkleminin çözümü olan  $\Phi_1$  matrisine karşılık

$$Y^*(T) \Phi_1 Y(T) - \Phi_1 + C = 0$$

LFMD ni sağlayan  $C$  matrisini araştıralım. (5.11) denkleminde  $Y(T) - \Delta = X(T)$  olarak alınırsa

$$(Y(T) - \Delta)^* \Phi_1 (Y(T) - \Delta) - \Phi_1 + C_1 = 0$$

elde edilir. Buradan

$$Y^*(T) \Phi_1 Y(T) - \Phi_1 = -(C_1 + \Delta^* \Phi_1 \Delta - \Delta^* \Phi_1 Y(T) - Y^*(T) \Phi_1 \Delta)$$

bulunur.  $\Phi_1 = \Phi_1^* > 0$  çözüm matrisi olduğundan ve  $Y(T)$  matrisi de Schur kararlı matris olduğundan Teorem 2.4. den LFMD ni sağlayan simetrik pozitif tanımlı matris  $C = C^* = C_1 - \Delta^* \Phi_1 Y(T) - Y^*(T) \Phi_1 \Delta + \Delta^* \Phi_1 \Delta$  olarak bulunur.

**Örnek 5.4.** (5.1) sistemi için  $A(n) = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$  olsun. Verilen  $A(n)$  matrisi ile

Schur kararlı olan (5.1) sistemini  $B(n) = \begin{pmatrix} 0.0099 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0099 \end{pmatrix}$  matrisi ile

pertürbe edilirse, Lemma 5.3. e göre  $C_1 = \begin{pmatrix} 1.9801 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{pmatrix}$  matrisi için pertürbe

edilmiş sistemin LFMD sisteminin çözümü  $\Phi_1 = \Phi_1^* > 0$  matrisine karşılık,

pertürbe edilmemiş sistemin LFMDni sağlayan simetrik pozitif tanımlı matris

$$C = C^* = \begin{pmatrix} 0.02009749 & 0 \\ 0 & 1.2432 \end{pmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Lemma 5.2. nin ifadesinde  $C_2 = I$  olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 5.2.** (5.1) sistemi ve (5.3) sistemi Schur kararlı ise  $I$  birim matrisi için (5.3) sisteminin LFMDni sağlayan  $\tilde{F} = \tilde{F}^* > 0$  simetrik pozitif tanımlı çözümüne karşılık (5.1) sisteminin LFMDni sağlayan simetrik pozitif tanımlı matris,  $C = I + \Delta^* \tilde{F} X(T) + X^*(T) \tilde{F} \Delta + \Delta^* \tilde{F} \Delta$  şeklindedir. Burada  $\Delta$ , Tablo 5.1 de tanımlandığı gibidir.

Sonuç 5.2 i bir örnekle gösterelim.

**Örnek 5.5.** (5.1) sistemi için  $A(n) = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$  olsun. Verilen  $A(n)$  matrisi ile

Schur kararlı olan (5.1) sistemini  $B(n) = \begin{pmatrix} 0.0099 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0099 \end{pmatrix}$  matrisi ile

pertürbe edilirse, Sonuç 5.2. ye göre pertürbe edilmiş sistemin LFMD sisteminin simetrik pozitif tanımlı çözümü olan  $\tilde{F} = \tilde{F}^* > 0$  matrisine karşılık pertürbe edilmemiş sistemin LFMD ni sağlayan simetrik pozitif tanımlı matris

$$C = C^* = \begin{pmatrix} 98.5248 & 0 \\ 0 & 1.00547 \end{pmatrix} \text{ olarak bulunmaktadır.}$$

Lemma 5.3. ün ifadesinde  $C_1 = I$  olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 5.3.** (5.1) sistemi ve (5.3) sistemi Schur kararlı ise  $I$  birim matrisi için (5.1) sisteminin LFMDni sağlayan  $F = F^* > 0$  simetrik pozitif tanımlı çözümüne karşılık

(5.3) sisteminin LFMDni sağlayan simetrik pozitif tanımlı matrisi  $C = I + \Delta^* F \Delta - \Delta^* F Y(T) - Y^*(T) F \Delta$  şeklindedir. Burada  $\Delta$ , Tablo 5.1 de tanımlandığı gibidir.

Sonuç 5.3 ü bir örnekle gösterelim.

**Örnek 5.6.** (5.1) sistemi için  $A(n) = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$  olsun. Verilen  $A(n)$  matrisi ile

Schur kararlı olan (5.1) sistemini  $B(n) = \begin{pmatrix} 0.0099 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0099 \end{pmatrix}$  matrisi ile

pertürbe edilirse, Sonuç 5.3. e göre pertürbe edilmiş sistemin LFMD sisteminin simetrik pozitif tanımlı çözümü olan  $F = F^* > 0$  matrisine karşılık pertürbe edilmiş sistemin LFMD ni sağlayan simetrik pozitif tanımlı matris  $C = C^* = \begin{pmatrix} 0.0101497 & 0 \\ 0 & 0.994561 \end{pmatrix}$  olarak bulunmaktadır.

Şimdi  $\omega_1(A, T)$  parametresi için Teorem 2.6. ile verilen Süreklilik Teoremini, Teorem 5.1., Teorem 5.2. ve Sonuç 5.2. yi dikkate alarak yeniden ifade ve Teorem 2.6. nın ispatına göre ters bir yaklaşımla farklı bir şekilde ispat edelim.

**Teorem 5.5.** (5.1) sistemi Schur kararlı ( $\omega_1(A, T) < \infty$ ) olsun.

$\|B(n)\| < \frac{\Delta_1}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_1 \right) \right]}$  şartını sağlayan  $B(n)$

pertürbe matrisi için,

$$\omega_1(A + B, T) \leq \frac{\omega_1(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_1(A, T)} ; \|\tilde{F} - F\| \leq \frac{(2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_1(A, T)^2}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_1(A, T)}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada  $\Delta_1$  ve  $\Delta_4$ , Tablo 5.1. de tanımlandığı gibidir.

**İspat.** (5.1) sistemi Schur kararlı ve

$$\|B(n)\| < \frac{\Delta_1}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_1 \right) \right]}$$

şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sisteminin Schur kararlı olduğu Teorem 5.2. de gösterilmiştir. Teorem 5.2. de izin verilen  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi Schur kararlı olduğundan

$$Y^*(T) \tilde{F} Y(T) - \tilde{F} + I = 0$$

LFMDnin simetrik pozitif tanımlı çözümü  $\tilde{F}$  için Sonuç 5.2. ye göre

$$X^*(T) \tilde{F} X(T) - \tilde{F} = -C$$

LFMDni sağlayan  $C = I + \Delta^* \tilde{F} X(T) + X^*(T) \tilde{F} \Delta + \Delta^* \tilde{F} \Delta$  simetrik pozitif tanımlı matrisi vardır. Böylece

$$\tilde{F} = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k C X(T)^k$$

şeklinde tanımlı olduğundan eşitliğin her iki tarafın normu alınarak

$$\|\tilde{F}\| \leq \|C\| \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k X(T)^k \right\| = \|C\| \omega_1(A, T) \quad (5.12)$$

eşitsizliği elde edilir.  $\omega_1(A+B, T) = \|\tilde{F}\|$  ifadesi yerine yazılırsa

$$\omega_1(A+B, T) \leq \|C\| \omega_1(A, T)$$

olur.  $C = I + \Delta^* \tilde{F} X(T) + X^*(T) \tilde{F} \Delta + \Delta^* \tilde{F} \Delta$  olduğundan her iki tarafın normu alınarak

$$\|C\| \leq 1 + 2\|\Delta\| \|X(T)\| \|\tilde{F}\| + \|\Delta\|^2 \|\tilde{F}\| \quad (5.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 5.2. den  $\|\Delta\| = \|Y(T) - X(T)\|$  nin üst sınırı  $\Delta_4$  olduğundan (5.13) eşitsizliği

$$\|C\| \leq 1 + 2\Delta_4 \|X(T)\| \|\tilde{F}\| + \Delta_4^2 \|\tilde{F}\|$$

olur. Bu eşitsizlik (5.12) de yerine yazılırsa

$$\|\tilde{F}\| \leq [1 + 2\Delta_4 \|X(T)\| \|\tilde{F}\| + \Delta_4^2 \|\tilde{F}\|] \omega_1(A, T)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\|\tilde{F}\| \left[ 1 - (2\Delta_4 \|X(T)\| + \Delta_4^2) \omega_1(A, T) \right] \leq \omega_1(A, T)$$

ve

$$\omega_1(A+B, T) \leq \frac{\omega_1(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_1(A, T)}$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci eşitsizliğin ispatı ise;

$$X^*(T)FX(T) - F + I = 0 \quad ; \quad X^*(T)\tilde{F}X(T) - \tilde{F} + C = 0$$

LFMD leri birbirine eşitlenir ve düzenlenirse

$$X^*(T)(\tilde{F} - F)X(T) - (\tilde{F} - F) + (C - I) = 0 \quad (5.14)$$

elde edilir. Sonuç 5.2. den  $C = I + \Delta^* \tilde{F} X(T) + X^*(T) \tilde{F} \Delta + \Delta^* \tilde{F} \Delta$  olduğundan (5.14) denklemi

$$X^*(T)(\tilde{F} - F)X(T) - (\tilde{F} - F) = - [X^*(T) \tilde{F} \Delta + \Delta^* \tilde{F} X(T) + \Delta^* \tilde{F} \Delta]$$

olur. Buradan  $X(T)$  matrisi Schur kararlı olduğundan

$$\tilde{F} - F = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k (X^*(T) \tilde{F} \Delta + \Delta^* \tilde{F} X(T) + \Delta^* \tilde{F} \Delta) X(T)^k$$

çözümü vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \|\tilde{F} - F\| &\leq \|X^*(T) \tilde{F} \Delta + \Delta^* \tilde{F} X(T) + \Delta^* \tilde{F} \Delta\| \omega_1(A, T) \\ &\leq (2\|\Delta\| \|X(T)\| \|\tilde{F}\| + \|\Delta\|^2 \|\tilde{F}\|) \omega_1(A, T) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 5.2. den  $\|\Delta\| = \|Y(T) - X(T)\|$  üst sınırı  $\Delta_4$  olduğundan eşitsizlik

$$\|\tilde{F} - F\| \leq (2\Delta_4 \|\tilde{F}\| \|X(T)\| + \Delta_4^2 \|\tilde{F}\|) \omega_1(A, T)$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafın  $\|\tilde{F}\| = \|\tilde{F} - F + F\| \leq \|\tilde{F} - F\| + \|F\|$  alınarak düzenlenirse

$$\|\tilde{F} - F\| \leq \frac{(2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_1(A, T)^2}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_1(A, T)}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Uyarı 5.3.** Teorem 2.6. ya bakıldığında

$$\alpha = 1 - \left( 2\|X(T)\| \|Y(T) - X(T)\| + \|Y(T) - X(T)\|^2 \right) \|F\|$$

olmak üzere

$$\|\tilde{F} - F\| \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha} \omega_1(A, T)$$

eşitsizliği ile Teorem 5.5. deki

$$\|\tilde{F} - F\| \leq \frac{(2\|X(T)\| + \Delta_4) \Delta_4 \omega_1(A, T)^2}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4) \Delta_4 \omega_1(A, T)}$$

eşitsizlik benzer eşitsizliktir. Eşitsizlik benzer olmasına rağmen özellikle *ispat tarzı bakımından* farklı ve hesaplama kolaylığı bakımından önemli avantajlar içermektedir. Bu farklar kısaca;

- Teorem 2.6. nın ifadesinin aksine, Schur kararlı (5.1) sisteminin ne kadar pertürbeye dayanıklı olduğu ve verilen eşitsizliklerin sağlanmasını garanti eden  $B(n)$  pertürbe matrisi üzerine sınır şart Teorem 5.5. de açık bir şekilde ifade edilmiş,
- Elde edilen eşitsizliklerde üst sınırlar, Teorem 2.6. da  $\|Y(T) - X(T)\|$  matrisine, dolayısıyla pertürbe edilen sistemin *hesaplanmayan*  $Y(T)$  matrisine göre, Teorem 5.5. de ise tamamen (5.1) sisteminin argümanlarına, Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 ile verilen  $\|Y(T) - X(T)\|$  nin sınırlarına ve pertürbe matrisinin normu  $\|B(n)\|$  değerine bağlı sonuçlar kullanılarak elde edilmiş,
- *Özellikle*, Teorem 2.6. nın ispatı  $Y(T)$  monodromi matrisi üzerine inşa edilmişken, Teorem 5.5. in ispatı, *tam tersi bir yaklaşımla*, tamamen  $X(T)$  monodromi matrisi üzerine inşa edilmiş,

olmasıdır.

**Not 5.4.**  $\Delta_3 < \Delta_1$  şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için Teorem 5.5. in ifadesindeki eşitsizlikler  $\Delta_3$  için de geçerlidir.

**Uyarı 5.4.** Teorem 2.5. deki  $\| Y(T) - X(T) \| < \Delta_1$  sınır şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için,  $Y(T)$  matrisini hesaplamadan Teorem 5.5. deki eşitsizliklerde  $\Delta_1$  sınırının kullanılması durumunda

$$(2\Delta_1\|X(T)\| + \Delta_1^2)\omega_1(A, T) = 1$$

olmaktadır. Bu durumda ise Teorem 2.6. daki eşitsizlikler anlamsız kalmaktadır.

**Not 5.5.**  $B(n)$  pertürbe matrisleri üzerine verilen sınır şartların en büyüğüne karşılık,  $\Delta_i$  sınırlarının en küçüğü için Teorem 5.5. hem geçerlidir, hem de verilen eşitsizliklerin sağ tarafları daha küçük olmaktadır.

**Örnek 5.7.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix} x(n)$  periyodik katsayılı lineer denklem

sistemini ele alalım. Sistemin monodromi matrisi  $X(2) = \begin{pmatrix} 0.9801 & 0 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix}$ , şart sayısı  $\omega_1(A, 2) = 25.3781$  dir.

- Verilen Schur kararlı sistemin Teorem 5.5 ile Schur kararlılığı garanti edilen pertürbe sınırı,  $\| B(n) \| < 0.000990101$  dir. Teorem 2.6. ile bu şekilde açık bir sınır verilememektedir.
- $B(n) = \begin{pmatrix} 0.0099 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0099 \end{pmatrix}$ ,  $\max_{0 \leq k \leq 1} \| B(k) \| = 0.0099$  pertürbe matrisi için  $\omega_1(A+B, 2) = 2500.38$  ve  $\| \omega_1(A+B, 2) - \omega_1(A, 2) \| = 2475.0019$  dir. Teorem 5.5. ile  $Y(T)$  matrisini hesaplamadan, tamamen verilen sistemin argümanları ve  $B(n)$  matrisine bağlı olarak, birinci eşitsizliğin sağ tarafı 244924.38 ve ikinci eşitsizliğin sağ tarafı ise 244899.002378 olarak hesaplanmaktadır. Buna karşılık Teorem 2.6. da eşitsizliklerin sağ taraflarını hesaplamak için  $Y(T)$  matrisini hesaplamak gerekmektedir.

$T=1$  için Teorem 5.5. in ifadesi;

**Sonuç 5.4.** (5.1) fark denklem sistemi ((2.1) sabit katsayılı sistem) Schur kararlı olmak üzere

$$\|B\| < \delta_3$$

şartını sağlayan  $B$  pertürbe matrisi için (5.3) sistemi de ((2.4) sabit katsayılı pertürbe sistemi) Schur kararlıdır. Üstelik

$$\omega(A+B) \leq \frac{\omega(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)}; \|\tilde{F} - F\| \leq \frac{(2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega^2(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)}$$

eşitsizlikleri doğrudur ( $\delta_3$  (kısım 4.2.) tanımlandığı gibidir.)

**İspat.** Periyodik katsayılı sistemler için  $T=1$  olması durumunda,  $A(n)=A$ ,  $B(n)=B$ ,  $X(T)|_{T=1} = X(1)=A$ ,  $\omega_1(A,T)|_{T=1} = \omega_1(A,1) = \omega(A)$ ,  $\Delta_1|_{T=1} = \delta_3$  (kısım 4.2.) ve

$\Delta_4|_{T=1} = \max_{0 \leq k \leq 0} \|B(k)\| = \|B(0)\| = \|B\|$  olur. Burada  $\max_{i \leq k \leq j, j < i} \{.\} = 0$  ve  $\sum_{k=i, j < i}^j (.) = 0$  şeklinde

tanımlıdır. Böylece sonucun ispatı tamamlanır.

**Uyarı 5.5.** Sonuç 5.4 ün tam olarak Teorem 4.1. in aynısı olduğu açıktır. Bu ise bize yukarıdaki teoremin literatürdeki sonuçlarla uyumlu olduğunu göstermektedir.

Şimdi

$$\Delta_1^* = \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{\omega^* - \omega_1(A,T)}{\omega^* \omega_1(A,T)} - \|X(T)\|}$$

olmak üzere Teorem 5.5. in  $\omega^*$ -Schur kararlılığa uygulaması niteliğinde olan aşağıdaki sonucu verelim.

**Sonuç 5.5.** (5.1) sistemi  $\omega^*$ -Schur kararlı bir sistem ( $\omega_1(A,T) \leq \omega^*$ ) olmak üzere

$$\Delta_3 \leq \Delta_1^*$$

şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sistemi de  $\omega^*$ -Schur kararlıdır.  $\Delta_3$ , Tablo 5.1. de tanımlandığı gibidir.

**İspat.**  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sisteminin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması

$$\omega_1(A+B, T) \leq \omega^*$$

eşitsizliğini sağlamasına bağlıdır. Teorem 5.5. sonucu olarak Not 5.4. den (5.3) sisteminin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması için

$$\frac{\omega_1(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_3)\Delta_3\omega_1(A, T)} \leq \omega^*$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Bu eşitsizlik  $\Delta_3$  e göre çözülürse sonucun ifadesi elde edilir.

**Sonuç 5.6.** (5.1) sistemi  $\omega^*$ -Schur kararlı bir sistem ( $\omega_1(A, T) \leq \omega^*$ ) olmak üzere

$$\|B(n)\| \leq \frac{\Delta_1^*}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_1^* \right) \right]}$$

şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sistemi de  $\omega^*$ -Schur kararlıdır.

**İspat.**  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sisteminin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması

$$\omega_1(A+B, T) \leq \omega^*$$

eşitsizliğinin sağlanmasına bağlıdır. Teorem 5.5. den görülür ki (5.3) sisteminin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması için

$$\omega_1(A+B, T) \leq \frac{\omega_1(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_1(A, T)} \leq \omega^*$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Bu eşitsizlik  $\Delta_4$  e göre çözülürse  $\Delta_4 \leq \Delta_1^*$  eşitsizliği elde edilir. Buradan  $\|B(n)\|$  göre düzenlenirse sonuç elde edilir.

**Örnek 5.8.** (5.1) sistemi için  $A(n) = \begin{pmatrix} 0.5 & (-1)^n 9 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$  ve  $\omega^* = 10$  olsun.  $\omega_1(A, T) = 14.9614 > \omega^*$  olduğundan (5.3) sistemi,  $\omega^*$  – Schur kararsızdır.

**Örnek 5.9.** (5.1) sistemi için  $A(n) = \begin{pmatrix} 0.5 & (-1)^n 3 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$  ve  $\omega^* = 10$  olsun.  $\omega_1(A, T) =$

$2.61061 < \omega^*$  olduğundan (5.1) sistemi,  $\omega^*$  – Schur kararlıdır. Ayrıca sırasıyla Sonuç 5.5. ve Sonuç 5.6. dan  $\|B(n)\| \leq 0.00896009$  ve  $\|B(n)\| \leq 0.00874109$  olacak şekilde  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi  $\omega^*$  – Schur kararlıdır. Mesela

pertürbe matrisini  $B(n) = \begin{pmatrix} 0.0087 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0087 \end{pmatrix}$ ,  $\|B(n)\| = 0.0087$  olarak alalım.

Gerçekten (5.3) sistemi için  $A(n) + B(n) = \begin{pmatrix} 0.5087 & (-1)^n 3 \\ 0 & 0.1 + (-1)^n 0.0087 \end{pmatrix}$  olup  $\omega_1(A+B, T) = 2.62331 < \omega^*$  olduğu görülür.

Şimdi Teorem 5.5. in  $\omega_2$  parametresine göre bir varyantını

$$\Delta_5 = \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_2(A, T)} - \|X(T)\|}$$

olmak üzere aşağıdaki teoremde verelim.

**Teorem 5.6.** (5.1) sistemi Schur kararlı (  $\omega_2(A, T) < \infty$  ) olsun.

$\|B(n)\| < \frac{\Delta_5}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_5 \right) \right]}$  şartını sağlayan  $B(n)$

pertürbe matrisi için (5.3) sistemi Schur kararlıdır. Üstelik uygun  $B(n)$  pertürbe matrisi için

$$\omega_2(A+B, T) \leq \frac{\omega_2(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_2(A, T)}; \|\tilde{F} - F\| \leq \frac{(2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_2(A, T)^2}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_2(A, T)}$$

eşitsizlikleri doğrudur. (  $\Delta_4$  Tablo 5.1. de tanımlandığı gibidir. )

**İspat.** Lemma 5.2. deki  $C_2 = \sum_{i=0}^{T-1} X^*(i)X(i)$  olmak üzere  $\omega_1(A,T) \leq \omega_2(A,T)$  ve (3.7)

ile verilen  $1/\omega_1(A,T) \leq \alpha/\omega_2(A,T)$  eşitsizliği dikkate alınarak Teorem 5.5 in ispatı adım adım takip edilerek teoremin ispatı rahatlıkla elde edilir.

**Not 5.6.**  $\Delta_3 < \Delta_5$  şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için Teorem 5.6. nın ifadesindeki eşitsizlikler  $\Delta_3$  için de geçerlidir.

**Not 5.7.**  $T = 1$  için Teorem 5. 6. nın ifadesi Sonuç 5.4. ile aynı olmaktadır.

Gerçekten,  $T = 1$  olduğunda,  $A(n) = A$ ,  $B(n) = B$ ,  $X(T)|_{T=1} = X(1) = A$  ,  
 $\omega_2(A,T)|_{T=1} = \omega_2(A,1) = \omega(A)$  ve

$$\frac{\Delta_5}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_5 \right) \right]} \Bigg|_{T=1} = \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\omega(A)} - \|A\|},$$

$$\frac{\omega_2(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_2(A, T)} \Bigg|_{T=1} = \frac{\omega(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)}$$

ve

$$\frac{(2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_2(A, T)^2}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_2(A, T)} \Bigg|_{T=1} = \frac{(2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega^2(A)}{1 - (2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)}$$

olur. Böylece Sonuç 5.4. e ulaşılmış olur.

**Uyarı 5.6.** Teorem 5.6. da Teorem 5.5. gibi literatürdeki sonuçlarla uyumludur.

Şimdi

$$\Delta_2^* = \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{\omega^* - \omega_2(A, T)}{\omega^* \omega_2(A, T)} - \|X(T)\|}$$

olmak üzere Teorem 5.5. in  $\omega^*$ -Schur kararlılığa uygulaması niteliğinde olan aşağıdaki sonucu verelim.

**Sonuç 5.7.** (5.1) sistemi  $\omega^*$ -Schur kararlı bir sistem ( $\omega_2(A, T) \leq \omega^*$ ) olmak üzere

$$\Delta_3 \leq \Delta_2^*$$

şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sistemi de  $\omega^*$ -Schur kararlıdır.

**İspat.**  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sisteminin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması

$$\omega_2(A+B, T) \leq \omega^*$$

eşitsizliğini sağlamasına bağlıdır. Teorem 5.6. dan görülür ki (5.3) sisteminin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması için

$$\frac{\omega_2(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_3)\Delta_3\omega_2(A, T)} \leq \omega^*$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Bu eşitsizlik  $\Delta_3$  e göre çözülürse sonucun ifadesi elde edilir.

**Sonuç 5.8.** (5.1) sistemi  $\omega^*$ -Schur kararlı bir sistem ( $\omega_2(A, T) < \omega^*$ ) olmak üzere

$$\|B(n)\| \leq \frac{\Delta_2^*}{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left[ 1 + (T-1) \left( \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| + \Delta_2^* \right) \right]}$$

şartını sağlayan  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sistemi de  $\omega^*$ -Schur kararlıdır.

**İspat.**  $B(n)$  pertürbe matrisi için (5.3) sisteminin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması

$$\omega_2(A+B, T) \leq \omega^*$$

eşitsizliğini sağlamasına bağlıdır. Teorem 5.6. dan görülür ki (5.3) sisteminin  $\omega^*$ -Schur kararlı olması için

$$\omega_2(A+B, T) \leq \frac{\omega_2(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_4)\Delta_4\omega_2(A, T)} \leq \omega^*$$

eşitsizliğini sağlamalıdır. Bu eşitsizlik  $\Delta_4$  e göre çözümlerse  $\Delta_4 \leq \Delta_2^*$  eşitsizliği elde edilir. Buradan  $\|B(n)\|$  göre düzenlenirse sonuç elde edilir.

**Örnek 5.10.** (5.1) sistemi için  $A(n) = \begin{pmatrix} 0.9 & 5 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{10} \end{pmatrix}$  ve  $\omega^*=10$  olsun.  $\omega_2(A, T) =$

159.301  $> \omega^*$  olduğundan (5.3) sistemi,  $\omega^*$ -Schur kararsızdır.

**Örnek 5.11.** (5.1) sistemi için  $A(n) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{10} \end{pmatrix}$  ve  $\omega^*=10$  olsun.  $\omega_2(A, T) =$

5.32484  $< \omega^*$  olduğundan (5.1) sistemi,  $\omega^*$ -Schur kararlıdır. Ayrıca sırasıyla Sonuç 5.6. ve Sonuç 5.7. den  $\|B(n)\| \leq 0.0269713$  ve  $\|B(n)\| \leq 0.0266247$  olacak şekilde  $B(n)$  pertürbe matrisleri için (5.3) sistemi  $\omega^*$ -Schur kararlıdır. Mesela

pertürbe matrisini  $B(n) = \begin{pmatrix} 0.026 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.026 \end{pmatrix}$ ,  $\|B(n)\| = 0.026$  olarak alalım.

Gerçekten (5.3) sistemi için  $A(n) + B(n) = \begin{pmatrix} 0.926 & 0.1 \\ 0 & (-1)^n 0.126 \end{pmatrix}$  olup  $\omega_2(A+B, T)$

$= 7.10177 < \omega^*$  olduğu görülür.

### 5.3. Nümerik Sonuçlar ve Karşılaştırma

Bu kısımda (5.1) sistemi için Teorem 5.1, Teorem 5.2, Teorem 5.3., Teorem 5.4. ile verilen pertürbe sınırları,  $\|Y(T) - X(T)\|$  nin üst sınırları ve Teorem 5.5., Teorem 5.6. nın sonuçları ile ilgili örnekler verilmiş ve literatürde ki benzer sonuçlarla karşılaştırılmaları yapılmıştır.

**Örnek 5.12.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x(n)$  periyodik katsayılı lineer denklem

sistemini ele alalım. Sistemin şart sayıları  $\omega_1(A,2) = 1.06667$  ve  $\omega_2(A,2) = 1.33333$  dır. Verilen Schur kararlı olan sistemi

$$\|B(n)\| < 0.395643 \text{ (Teorem 5.1.)} \quad \|B(n)\| < 0.333333 \text{ (Teorem 5.2.)}$$

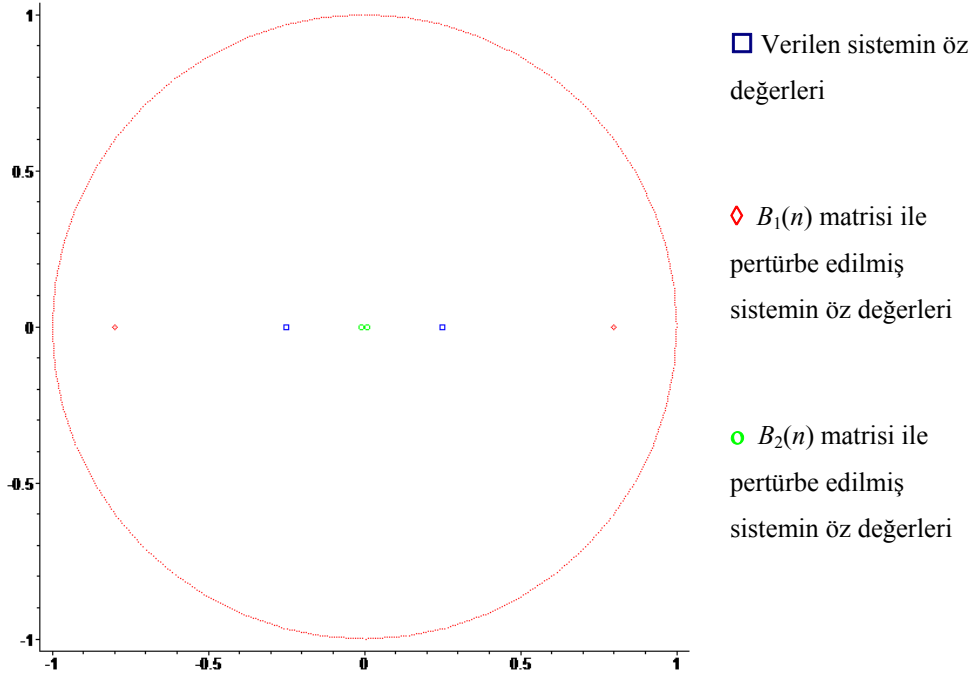
$$\|B(n)\| < 0.395644 \text{ (Teorem 5.3.)} \quad \|B(n)\| < 0.333334 \text{ (Teorem 5.4.)}$$

kadar bir pertürbe yapılırsa verilen sistemin Schur kararlı kalacağı garanti edilmektedir. Buna göre,

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n 0.39 & 0 \\ 0 & 0.39 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_1(k)\| = 0.39, \quad \omega_1(A+B_1,2) = 2.684$$

$$B_2(n) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n 0.39 \\ 0.39 & 0 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_2(k)\| = 0.39, \quad \omega_1(A+B_2,2) = 1.62757$$

olmaktadır. Spektral kritere göre değerlendirilmesi Şekil 5.2. de görülmektedir.



Şekil 5.2. Örnek 5.12. nin Spektral Kritere göre değerlendirilmesi

**Örnek 5.13.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.01 & (-1)^n 0.25 \end{pmatrix} x(n)$  periyodik katsayılı lineer denklem

sistemini ele alalım. Sistemin şart sayıları  $\omega_1(A,2) = 1.07332$  ve  $\omega_2(A,2) = 1.35564$  dır. Verilen Schur kararlı olan sistemi

$$\|B(n)\| < 0.387901 \text{ (Teorem 5.1.)} \quad \|B(n)\| < 0.327626 \text{ (Teorem 5.2.)}$$

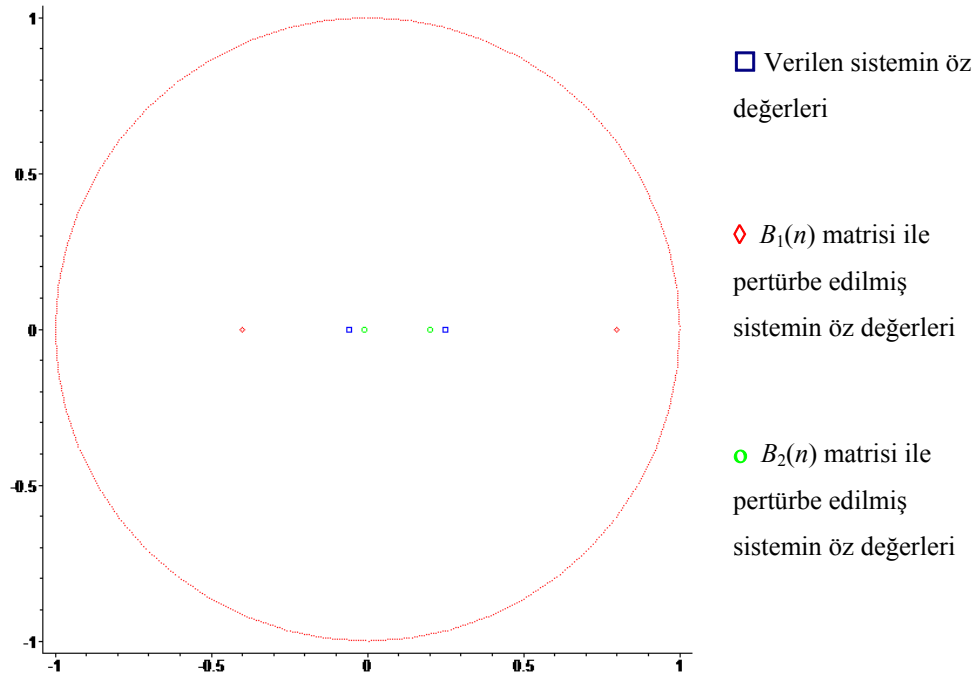
$$\|B(n)\| < 0.38813 \text{ (Teorem 5.3.)} \quad \|B(n)\| < 0.327783 \text{ (Teorem 5.4.)}$$

kadar bir pertürbe yapılırsa verilen sistemin Schur kararlı kalacağı garanti edilmektedir. Buna göre,

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} 0.38 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.38 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_1(k)\| = 0.38, \quad \omega_1(A+B_1,2) = 2.54785$$

$$B_2(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0.38 \\ (-1)^n 0.38 & 0 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_2(k)\| = 0.38, \quad \omega_1(A+B_2,2) = 1.4771$$

olmaktadır. Spektral kritere göre değerlendirilmesi Şekil 5.3. de görülmektedir.



Şekil 5.3. Örnek 5.13. ün Spektral Kritere göre değerlendirilmesi

**Örnek 5.14.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{pmatrix} x(n)$  periyodik katsayılı lineer

denklemler sistemini ele alalım. Sistemin şart sayıları  $\omega_1(A,4) = 1.00345$  ve  $\omega_2(A,4) = 1.17011$  dir. Verilen Schur kararlı olan sistemi

$$\|B(n)\| < 0.158162 \text{ (Teorem 5.2.)}, \quad \|B(n)\| < 0.158167 \text{ (Teorem 5.4.)}$$

kadar bir pertürbe yapılırsa verilen sistem yine Schur kararlı kalacaktır. Buna göre,

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{10} & 0.05 \\ 0.05 & \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{10} \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 3} \|B_1(k)\| = 0.15, \quad \omega_1(A+B_1,4) = 1.01026,$$

$$B_2(n) = \begin{pmatrix} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{10} & 0.05 \\ 0.05 & \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{10} \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 3} \|B_2(k)\| = 0.15, \quad \omega_1(A+B_2,4) = 1.00533$$

olmaktadır.

**Not 5.8.** Yukarıdaki örnekte  $T = 4$  olduğundan Teorem 5.1. ve Teorem 5.3. deki sınır şartta,  $B(n)$  matrisine göre dördüncü dereceden denklemlerin köklerinin hesaplanması problemi ile karşılaşılacaktır. Bu problem çoğu zaman yeterince zor bir problemdir.

**Örnek 5.15.** (5.1) sistemi için  $A(0) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ ,  $A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$  ve  $T = 2$  olsun.

Buna göre  $\omega_1(A,2) = 2.26959$  ve  $\omega_2(A,2) = 2.29229$  olarak bulunmaktadır. Bu sistem için,

$$\|B(n)\| < 0.0216259 \text{ (Teorem 5.1.)} \quad \|B(n)\| < 0.0183995 \text{ (Teorem 5.2.)}$$

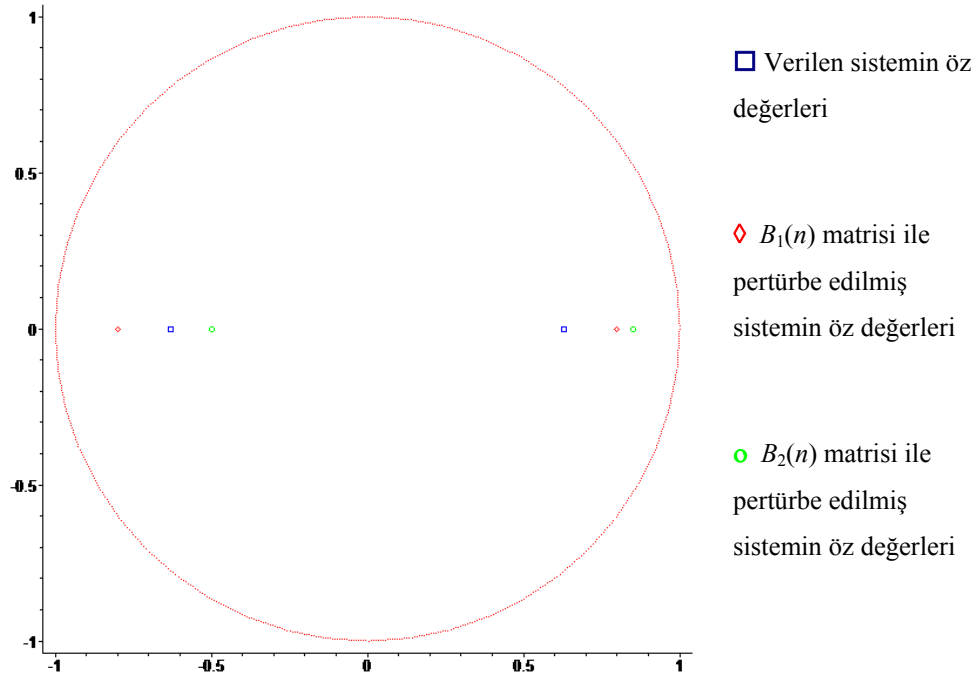
$$\|B(n)\| < 0.0216259 \text{ (Teorem 5.3.)} \quad \|B(n)\| < 0.0183995 \text{ (Teorem 5.4.)}$$

kadar bir pertürbe yapılırsa verilen sistemin Schur kararlı kalacağı garanti edilmektedir. Buna göre,

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n 0.021 & 0 \\ 0 & 0.021 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_1(k)\| = 0.021, \quad \omega_1(A+B_1,2) = 3.86265$$

$$B_2(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0.021 \\ (-1)^n 0.021 & 0 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_2(k)\| = 0.021, \quad \omega_1(A+B_2,2) = 3.33151$$

olmaktadır. Spektral kritere göre değerlendirilmesi Şekil 5.4. de görülmektedir.



Şekil 5.4. Örnek 5.15. in Spektral Kritere göre değerlendirilmesi

**Örnek 5.16.** (5.1) periyodik katsayılı lineer denklem sisteminde  $A(0) = \begin{pmatrix} 0.1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,

$A(1) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 2 & -2.01 \end{pmatrix}$  ve  $A(n) = A(n+2)$  olsun. Sistemin şart sayıları

$\omega_1(A,2) = 1.04178$  ve  $\omega_2(A,2) = 3.0504$  dir. Verilen Schur kararlı sistem,

$$\|B(n)\| < 0.111588 \text{ (Teorem 5.1.)} \quad \|B(n)\| < 0.0877087 \text{ (Teorem 5.2.)}$$

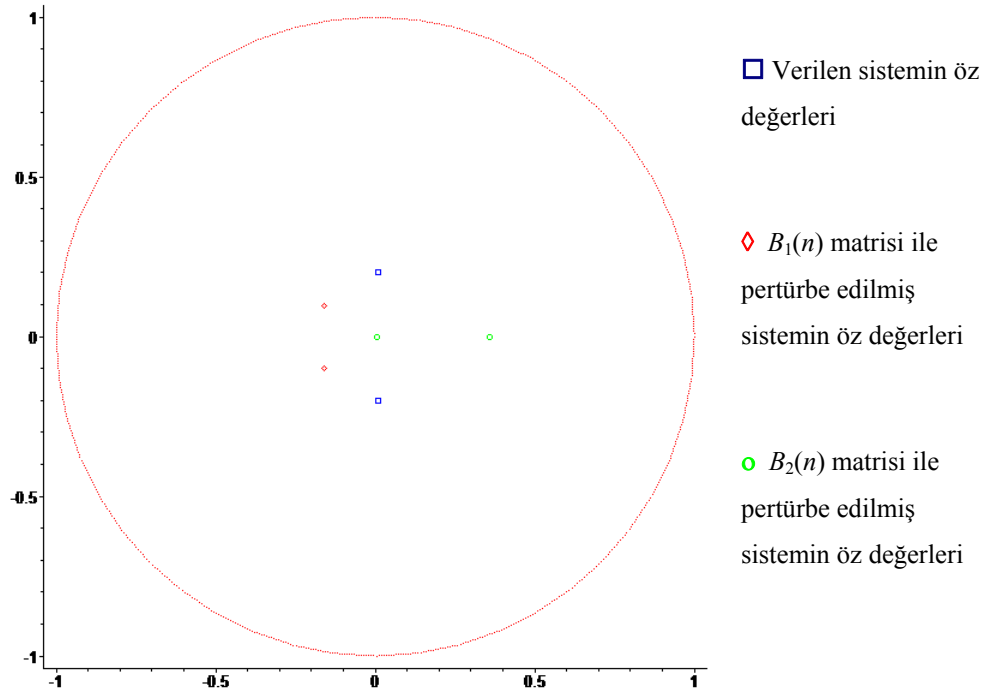
$$\|B(n)\| < 0.113262 \text{ (Teorem 5.3.)} \quad \|B(n)\| < 0.0887373 \text{ (Teorem 5.4.)}$$

kadar bir pertürbe yapılırsa yine de Schur kararlı kalmaktadır. Buna göre,

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n 0.11 & 0 \\ 0 & 0.11 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_1(k)\| = 0.11, \quad \omega_1(A+B_1,2) = 1.29669$$

$$B_2(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0.11 \\ (-1)^n 0.11 & 0 \end{pmatrix}, \quad \max_{0 \leq k \leq 1} \|B_2(k)\| = 0.11, \quad \omega_1(A+B_2,2) = 1.22841$$

olmaktadır. Spektral kritere göre değerlendirilmesi Şekil 5.5. de görülmektedir.



Şekil 5.5. Örnek 5.16. nın Spektral Kriterine göre değerlendirilmesi

**Örnek 5.17.**  $x(n+1) = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x(n)$  periyodik katsayılı lineer denklem

sistemini ele alalım.  $B_i(n)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) pertürbe matrisleri sırasıyla,

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

olsun. Sistemi bu matrislerle pertürbe edelim.  $\|Y(T) - X(T)\|$  nin üst sınırlarının karşılaştırmak için bazı sembolik tanımlamalar yapalım;

- $\Delta_1 = \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{1}{\omega_1(A, T)}} - \|X(T)\|$
- $\Delta_2 = \sqrt{\|X(T)\|^2 + \frac{\alpha}{\omega_2(A, T)}} - \|X(T)\|$
- $\Delta_3 = \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\| \left( \beta + \gamma \max_{1 \leq k \leq T-1} \|\Psi(k, 0)\| + \right. \\ \left. + \mu \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\| \sum_{k=2}^{T-1} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \left( \max_{0 \leq j \leq k-1} \|B(j)\| \right)^l \right)$
- $\Delta_4 = \frac{\max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \left( 1 + (T-1) \max_{1 \leq k \leq T-1} \|X(k)\| \right)}{1 - (T-1) \max_{1 \leq j, k \leq T} \|Q(j, k)\| \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\|} \max_{0 \leq k \leq T-1} \|B(k)\|$

olarak gösterelim.

Şimdi pertürbe matrisleri için bu üst sınırları bir tabloda karşılaştıralım.

$B(n)$	$\ \Delta\ $	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$
$B_1$	0.3125	0.749999	0.75	0.4375	0.5
$B_2$	0.194445	0.749999	0.75	0.277778	0.3
$B_3$	0.0664062	0.749999	0.75	0.0976562	0.1
$B_4$	0.0434028	0.749999	0.75	0.0642361	0.0652174

**Tablo 5.2.** Verilen Schur kararlı sistemin özelliği bozulmaksızın pertürbe matrislerine ( $B_i, i = 1, 2, 3, 4$ ) karşılık pertürbe sistem ile verilen sistemin monodromi matrisleri arasında gerçekleşen farkın normunu ( $\|\Delta\|$ ) ve farkın üst sınırlarını ( $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$ ) gösteren tablo

Tablo 5.2. den görüldüğü gibi literatürde verilen  $\Delta_1$  ve  $\Delta_2$  üst sınırları sabit, çalışmamızda verilen  $\Delta_3$  ve  $\Delta_4$  üst sınırları ise pertürbeye bağlı olarak değişmektedir. Dolayısıyla  $\|\Delta\|$  değişimi hakkında  $\Delta_3$  ve  $\Delta_4$  üst sınırları daha sağlıklı bilgiler vermektedir. Örneğin verilen sistemin  $B_3$  pertürbe matrisi için,  $\|\Delta\| = 0.0664062$  olarak gerçekleşirken, sabit üst sınırlar  $\Delta_1 = 0.749999$ ,  $\Delta_2 = 0.75$  olarak bulunmakta, buna karşılık bu çalışmada verilen üst sınırlar  $\Delta_3 = 0.0976562$  ve  $\Delta_4 = 0.1$  olarak elde edilmektedir. Dikkat edilirse bu çalışmada verilen üst sınırlar gerçekleşen değere çok daha yakın değerler vermekte, dolayısıyla  $\|Y(T) - X(T)\|$  nin davranışı hakkında daha sağlıklı bilgiler vermektedir.

**Örnek 5.18.**  $x(n+1) = A_i(n) x(n)$ , ( $i = 1, 2$ ) sistemini ele alalım.

$$A_1(n) = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{4} & 0.2 \\ 0.4 & \frac{(-1)^n}{5} \end{pmatrix}, \quad A_2(n) = \begin{pmatrix} 0.99 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

olsun.  $\omega_1(A_1,2)=1.002$ ,  $\omega_1(A_2,2)=107.377$  ve  $\omega_2(A_1,2)=1.30124$ ,  $\omega_2(A_2,2)=213.775$  olarak bulunur. Sistemler Schur kararlıdır.  $A_1(n)$  katsayı matrisine sahip sistemi

$$B_1^1(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad B_1^2(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleriyle,  $A_2(n)$  katsayı matrisine sahip sistemi ise

$$B_2^1(n) = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0001 \end{pmatrix}, \quad B_2^2(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0.00001 \\ 0 & (-1)^n 0.0001 \end{pmatrix}$$

matrisleriyle pertürbe edelim. Buna göre,

$$\omega_1(A_1 + B_1^1, 2) = 1.05289, \quad \omega_1(A_1 + B_1^2, 2) = 1.03229,$$

$$\omega_1(A_2 + B_2^1, 2) = 108.446, \quad \omega_1(A_2 + B_2^2, 2) = 107.377$$

$$\omega_2(A_1 + B_1^1, 2) = 1.5941, \quad \omega_2(A_1 + B_1^2, 2) = 1.56593,$$

$$\omega_2(A_2 + B_2^1, 2) = 215.913, \quad \omega_2(A_2 + B_2^2, 2) = 213.773$$

şeklinde oluşmaktadır.

Şimdi gösterim kolaylığı sağlaması için Schur kararlılık parametreleri arasındaki fark, Teorem 5.5. ve Teorem 5.6. da ki eşitsizliklerin sağ tarafları ile ilgili bazı sembolik tanımlamalar yapalım;

- $M = | \omega_1(A+B, T) - \omega_1(A, T) |,$
- $N = | \omega_2(A+B, T) - \omega_2(A, T) |,$
- $M_i = \frac{(2\|X(T)\| + \Delta_i)\Delta_i\omega_1(A, T)^2}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_i)\Delta_i\omega_1(A, T)}, (i = 3, 4)$
- $N_i = \frac{(2\|X(T)\| + \Delta_i)\Delta_i\omega_2(A, T)^2}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_i)\Delta_i\omega_2(A, T)}, (i = 3, 4)$
- $P_i = \frac{\omega_1(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_i)\Delta_i\omega_1(A, T)}, (i = 3, 4)$
- $T_i = \frac{\omega_2(A, T)}{1 - (2\|X(T)\| + \Delta_i)\Delta_i\omega_2(A, T)}, (i = 3, 4)$

ile gösterelim.

Şimdi verilen bilgiler göz önüne alınarak Teorem 5.5. ve Teorem 5.6. yı aşağıdaki tablolarda değerlendirelim.

$A(n)$	$B(n)$	M	$M_3$	$M_4$	N	$N_3$	$N_4$
$A_1(n)$	$B_1^1(n)$	0.05089	0.181966	0.226854	0.29286	0.324478	0.410326
	$B_1^2(n)$	0.03029	0.239043	0.314567	0.26469	0.434065	0.585393
$A_2(n)$	$B_2^1(n)$	1.069	41.0627	41.0711	2.138	262.058	262.145
	$B_2^2(n)$	0	41.3465	41.3551	0.002	264.987	265.076

**Tablo 5.3.** Teorem 5.5. ve Teorem 5.6. daki M ve N gerçekleşen değerlerin üst sınırları

Tablo 5.3. de görüldüğü gibi Teorem 5.5. ve Teorem 5.6. da verilen pertürbe edilmemiş ile pertürbe sisteminin şart sayıları arasındaki farkın üst sınırları  $M_i$  ve  $N_i$  pertürbeden etkilenmekte dolayısıyla pertürbe değiştiğinde (5.3) ve (5.1) sistemlerinin Schur kararlılık parametreleri arasındaki farkın değişimi hakkında sağlıklı bilgiler edinilebilmektedir. Tablodan görüleceği üzere gerçekleşen fark M ve N nin üst sınırları  $M_i$  ve  $N_i$ , Schur kararlılığın kalitesi güçlü (parametre değeri küçük) iken gerçekleşen farka daha yakın sonuçlar vermektedir. Örneğin  $A_1(n)$  katsayı matrisi ve  $B_1^2(n)$  pertürbe matrisi için  $M = 0.03029$  ve  $N = 0.26469$  gerçekleşen farklara, üst sınırlar sırasıyla  $M_3 = 0.239043$ ,  $M_4 = 0.314567$  ve  $N_3 = 0.434065$ ,  $N_4 = 0.585393$  olarak daha yakın olmaktadır. Buna karşılık Schur kararlılığının kalitesi daha zayıf (parametre değeri büyük)  $A_2(n)$  katsayı matrisi için üst sınırlar gerçekleşen farklardan çok daha büyük olmaktadır.

$A(n)$	$B(n)$	$\omega_1(A+B,2)$	$P_3$	$P_4$	$\omega_2(A+B,2)$	$T_3$	$T_4$
$A_1(n)$	$B_1^1(n)$	1.05289	1.18397	1.22885	1.5941	1.62572	1.71157
	$B_1^2(n)$	1.03229	1.24104	1.31657	1.56593	1.73531	1.88663
$A_2(n)$	$B_2^1(n)$	108.446	148.44	148.448	215.913	475.833	475.92
	$B_2^2(n)$	107.377	148.723	148.732	213.773	478.762	478.851

**Tablo 5.4.** Teorem 5.5. ve Teorem 5.6. ile 1. daki  $\omega_1(A+B,2)$  ve  $\omega_2(A+B,2)$  gerçekleşen değerlerin üst sınırları

Tablo 5.4. e bakıldığında Teorem 5.5. ve Teorem 5.6. da verilen pertürbe sistemin Schur kararlılık parametrelerinin üst sınırları  $P_i$  ve  $T_i$  pertürbeden etkilenmekte dolayısıyla pertürbe değiştiğinde (5.3) sisteminin Schur kararlılık parametreleri hakkında sağlıklı bilgiler edinilebilmektedir. Tablodan görüldüğü gibi  $\omega_1(A+B,T)$  ve  $\omega_2(A+B,T)$  nin üst sınırları  $P_i$  ve  $T_i$  Schur kararlılığın kalitesi güçlü iken gerçekleşen değere oldukça yakın sonuçlar vermektedir. Gerçekten  $A_1(n)$  katsayı matrisi ve  $B_1^1(n)$  pertürbe matrisi için  $\omega_1(A_1+B_1^1,2) = 1.05289$  ve  $\omega_2(A_1+B_1^1,2) = 1.5941$  gerçekleşen değerlere üst sınırlar sırasıyla  $P_3 = 1.18397$ ,  $P_4 = 1.22885$  ve  $T_3 = 1.62572$ ,  $T_4 = 1.71157$  olarak daha yakın olmaktadır. Buna karşılık Schur kararlılığının kalitesi daha zayıf (parametre değeri büyük)  $A_2(n)$  katsayı matrisi için üst sınırlar gerçekleşen değerlerden çok daha büyük olmaktadır.

**Not 5.9.** Çalışmadaki hesaplamalar Maple 11 ve MVC (Bulgak and Eminov (2001)) de yapılmıştır.

## 6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Her hangi bir sistemin, problemin “*maruz kaldığı etkiye tepkisi*” yada “*sistemin cevabı*” her zaman ilgi çekici olmuştur. Bu tez çalışmasının ana amacı da Schur kararlı periyodik katsayılı lineer fark denklem sistemlerinin maruz kalabileceği etkilere vereceği cevabın sistem çözülmeden bilinmesi olarak belirlenmişti. Hassasiyet problemi olarak adlandırılan bu amaca yönelik önemli sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçları ana hatlarıyla kısaca;

- sabit katsayılı fark denklem sistemleri için daha fazla pertürbeye imkan veren süreklilik teoremi,
- periyodik sistemlerin  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  Schur kararlılık parametreleri arasında bu parametrelerden her hangi birisi için verilen sonuçların diğeri için kolaylıkla ifade edilebilmesine imkan sağlayan fonksiyonel eşitsizlikler ve uygulamaları,
- literatürde pertürbe sıfır bile olsa sınırı değişmeyen  $\|Y(T) - X(T)\|$  farkı için pertürbe matrisine göre hareketli olan daha fonksiyonel üst sınırlar,
- literatürde açıkça ifade edilmeyen periyodik sistemin Schur kararlı olma özelliğinin ne kadar pertürbeye dayanıklı olduğu şartları *açıkça ifade eden* farklı sonuçlar,
- $\omega_1$  Schur kararlılık parametresine göre literatürde (Aydın ve ark. 2001) de verilen süreklilik teoreminin farklı bir yolla yeniden ispatı,
- $\|Y(T) - X(T)\|$  farkının hareketli üst sınırları üzerine elde edilen sonuçlar kullanılarak,  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  Schur kararlılık parametrelerine bağlı süreklilik teoremleri,

elde edilmiştir.

Bu çalışmadaki bazı sonuçlar (Çıbıkdiken 2008) de kayan nokta aritmetiğine göre hesaplanan monodromi matrisinin Schur kararlılığa uygulanmasında kullanılmıştır.

## 7. KAYNAKLAR

**Agarwal R. P.**, *Difference equations and inequalities*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 228, National University of Singapore, 2000.

**Akın Ö. ve Bulgak H.**, *Lineer fark denklemleri ve kararlılık teorisi*, Selçuk Üniv. Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi, No: 2, Konya 1998.

**Aydın K.**, *Periyodik adi diferensiyel denklem sistemlerinin asimtotik kararlılığı için şart sayısı*, Doktora Tezi, Konya 1995.

**Aydın K., Bulgak H. and Demidenko G. V.**, *Numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients*, Siberian Math. J., 41, No: 6, 1005–1014, Novosibirsk, 2000.

**Aydın K., Bulgak H. and Demidenko G.V.**, *Continuity of numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients*, Selcuk Journal of Applied Mathematics, vol.2, Num:2, Konya, 2001.

**Aydın K., Bulgak H. and Demidenko G. V.**, *Asymptotic stability of solutions to perturbed linear difference equations with periodic coefficient*, Siberian Math. J., 43, No: 3, 389–401, Novosibirsk, 2002.

**Aydın K.**, *Sabit katsayılı Schur kararlı fark denklemlerin çözümünün değerlendirilmesi*, ZKÜ, İntegral Geometri ve Ters Problemler Çalıştayı, 08–09 Mayıs 2004

**Bulgakov A. Ya. and Godunov S. K.**, *Circle dichotomy of the matrix spectrum*, Siberia Math. J., 29, No: 5, 59–70, Novosibirsk, 1988.

**Bulgak H.**, *Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability*, Error Control and Adaptivity in Scientific Computing, 95–124, 1999.

**Bulgak H. and Eminov D.**, *Computer dialogue system, MVC*, Selçuk Journal Applied Mathematics, 2, 17–38, 2001 (available from <http://www5.in.tum.de/selcuk/sjam012203.html>).

**Bulgak A. ve Bulgak H.**, *Lineer cebir*, Selçuk Üniv. Uygulama ve Araştırma Merkezi, Konya, 2001.

**Çıbıkdiken A.**, *Kayan nokta aritmetiğinin periyodik lineer fark denklem sisteminin fundamental matrisinin hesaplanmasına etkisi*, Doktora Tezi, Selçuk Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2008.

**Elaydi N.**, *An introduction to difference equations*, Springer, 1999.

**Gerald C. F. and Wheatley P. O.**, *Applied numerical analysis*, California Polytechnic State University, San Luis Obispo, 1999.

**Godunov S. K., Antonov A. G., Kiriluk O. P. and Kostin V. I.**, *Guaranteed accuracy in mathematical computations*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hal 1993.

**Godunov S. K.**, *Modern aspects of linear algebra*, Translations of Mathematical Monographs, 175, Providence, RI : American Mathematical Society, 1998.

**Rice J. R.**, *A Theory of condition*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 3, 287–310, 1966.

**Rohn J.**, *Positive definiteness and stability of interval matrices*, Siam Journal on Matrix Analysis and Applications, 15 (1), 175–184, 1994.

**Uslu K.**, *On the discrete asymptotic stability conditions of perturbed linear discrete systems with periodic coefficients*, Anziam Journal, 48, 135–142, 2006.

**Van Loan C.**, *How near is a stable matrix to unstable matrix?*, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 47, 1985.

**Voicu M. and Pastravanu O.**, *Generalized matrix diagonal stability and linear dynamical systems*, Linear Algebra and its Applications, 419, 299–310, 2006.

**Wang K. N. and Michel A. N.**, *On sufficient conditions for the stability of interval matrices*, Systems & Control Letters, 20 (5), 345–351, 1993.

**Wilkinson J. H.**, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Pres Oxford, 1965.