ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Melis MİNİSKER

GRUP VE YARIGRUP TAKDİMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2005

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRUP VE YARIGRUP TAKDİMLERİ

Melis MİNİSKER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 03/01/2005 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ İle Kabul Edilmiştir.

İmza......................................
Prof. Dr. Bilal VATANSEVER
DANIŞMAN

İmza......................................
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
ÜYE

İmza......................................
Prof. Dr. Naime EKİCİ
ÜYE

İmza......................................
Yrd. Doç. Dr. Perihan ARTUT(Dinç)
ÜYE

İmza......................................
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No: 873

T.C. ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Prof. Dr. Fikri AKDENİZ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Bu Çalışma Ç.Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: FBE-2002D.87.

İÇİNDEKİLER **Sayfa No**

ÖZ

DOKTORA TEZİ

GRUP VE YARIGRUP TAKDİMLERİ

Melis MİNİSKER

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Bilal VATANSEVER

Yıl: 2005, Sayfa: 69

Jüri : Prof. Dr. Bilal VATANSEVER
: Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
: Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Yrd. Doç. Dr. Perihan ARTUT (Dinç)
: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ

Bu tezde daha önce etkinliği araştırılmamış bazı özel yarıgrupların etkin olup olmadığı incelendi. Bunlar CL_n (n elemanlı zincir), $CL_m \times CL_n$ ve $CL_m{}^n$ yarıgruplarıdır. Ayrıca herhangi bir yarıgrubun etkin olmayan bir yarıgruba gömülebileceğini gösterdik. Özel seçilmiş iki etkin Rees matris yarıgrubunun direkt çarpımına izomorfik etkin bir Rees matris yarıgrubu inşa ettik. Ek olarak sıfır elemanlı iki semilatisin direkt çarpımının etkin olup olmadığını araştırdık.

Anahtar Kelimeler: Yarıgrup, monoid, yarıgrup takdimi, etkinlik.

ABSTRACT

Ph.D. THESIS

GROUP AND SEMIGROUP PRESENTATIONS

Melis MİNİSKER

DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof. Dr. Bilal VATANSEVER

Year: 2005, Pages: 69

Jury : Prof. Dr. Bilal VATANSEVER
: Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
: Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Assist. Prof. Dr. Perihan ARTUT (Dinç)
: Assist. Prof. Dr. Hüseyin BİLGİÇ

In this thesis we studied the efficiency of certain semigroups. These semigroups are CL_n (a chain with n elements), $CL_m \times CL_n$ and $CL_m{}^n$. We have also shown that we can embed any semigroup into an inefficient semigroup. We have taken two efficient Rees matrix semigroups and we have constructed an efficient Rees matrix semigroup which is isomorphic to the direct product of these semigroups. We have considered the direct product of two semilattices with zero elelment and examined its efficiency.

Key Words: Semigroup, monoid, semigroup presentation, efficiency.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcında yarıgrup takdimleri ile ilgili daha önce yayınlanmış makaleleri inceledik. Bu inceleme sonucunda birçok yarıgrubu tanımlayan minimal takdimler bulunduğunu gördük. Fakat etkinliği incelenmemiş bazı değişmeli sıfır elemanlı özel yarıgruplar bulduk ve bölüm 4.3 ve bölüm 4.4 te bunun üzerine yoğunlaştık. İncelediğimiz yarıgruplar CL_n (n elemanlı zincir) ve $CL_m \times CL_n$ yarıgruplarıdır. Bu inceleme sonucunda CL_n nin etkin fakat $CL_m \times CL_n$ yarıgrubunun etkin olmadığını gördük.

Bölüm 4.5 de S herhangi bir yarıgrup olmak üzere S'yi etkin olmayan bir yarıgruba gömebileceğimizi gösterdik. SL_n serbest semilatis olmak üzere bu yarıgrup $T = S \cup SL_n$ yarıgrubudur.

Bölüm 4.6 da $CL_m^n = CL_m \times CL_m \times \ldots \times CL_n$ yarıgrubunu tanımlayan minimal takdim belirledik. Ayrıca CL_m^n in etkin olmadığını gösterdik.

Bölüm 4.7 de iki etkin Rees matris yarıgrubunu ele aldık ve direkt çarpımını inceledik. Bu direkt çarpıma izomorfik etkin bir Rees matris yarıgrubu inşa ettik.

Bölüm 4.8 de sıfır elemanlı iki semilatisin direkt çarpımını inceledik. Bu direkt çarpımın etkin olma koşullarını belirledik.

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya çıkmasında emeği geçen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Bilal Vatansever'e, tez izleme komitemdeki hocalarım Prof. Dr. Yusuf Ünlü'ye, Yrd. Doç. Dr. Perihan Dinç Artut'a, Mersin Üniversitesi'nden Yrd. Doç. Dr. Sabri Terzi'ye, ayrıca Yrd. Doç. Dr. Hayrullah Ayık'a, Prof. Dr. Fikri Akdeniz'e Matematik Bölümü Personeli'ne ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER VE KISALTMALAR:

S	S yarıgrubu
S^1	$S \cup \{1\}$ monoidi
L_m	sol sıfır yarıgrubu
R_n	sağ sıfır yarıgrubu
e	birim eleman
SL_A	A kümesi üzerindeki serbest semilatis
Z_n	n elemanlı sıfır yarıgrubu
$R_{m,n}$	karesel band
$<X>$	X tarafından doğurulan alt yarıgrup
$rank(S)$	S nin rankı
ε	boş kelime
A^+	A üzerindeki serbest yarıgrup
A^*	$A^+ \cup \{\varepsilon\}$
R	bağıntılar kümesi
$\wp = <A \mid R>$	yarıgrup takdimi
A^+ / ρ	bölüm yarıgrubu
$def(\wp)$	$\wp$ nin deficiencysi
$def_S(S)$	S yarıgrubunun yarıgrup deficiencysi
$def_M(M)$	M monoidinin monoid deficiencysi
$def_G(G)$	G grubunun grup deficiencysi
$H_2(S)$	S nin ikinci integral homoloji grubu
CL_n	n elemanlı zincir
$CL_{m,n}$	$CL_m \times CL_n$ direkt çarpım yarıgrubu
$CL_{n,n,n}$	$CL_n \times CL_n \times CL_n$ direkt çarpım yarıgrubu
$M[G; I, J; P]$	Rees matris yarıgrubu
$M(m, n)$	m indeksli ve n periyotlu monogenic yarıgrup

1. GİRİŞ

Yarıgruplar teorisinin tarihçesini incelediğimizde zaman içerisinde önemli değişiklikler geçirdiğini görebiliyoruz. Gruplar üzerindeki çeşitli çalışmaların yanısıra, yarıgruplar da çok sayıda yayınlanmış sonuçları ve araştırmaya açık problemleri ile ayrı bir bilimsel alan olmuştur. Bu gelişmenin en önemli nedeni yarıgrupların neredeyse her matematiksel alan içinde yer almasıdır.

Her grup bir yarıgrup olmasına rağmen gruplar değişik bir yarıgrup örneği olmamaktadır. Bundan dolayı yarıgrup teorisinin başlangıcını grup teorisinin başlangıcıyla birlikte düşünmek doğru bir düşünce olmaz. Buna rağmen yarıgrup takdimi kavramı grup takdimi kavramı ile neredeyse eşdeğerdir. Bundan dolayı yarıgrup takdimleri yarıgrup teorisinden daha eskidir. (Ruskuc, 1995)

Hesaplanabilir yarıgrup kavramı, yarıgrup kuramı ile aynı zamanda başlamasına karşın hesaplanabilirlikle ilgili çalışmalar daha geride kalmıştır. Bunun temel nedeni hesaplanabilir yarıgrup kuramı için iyi geliştirilmiş algoritmalar ile birlikte bilgisayar donanımlarında da ilerlemeler gerekmesidir. Son yıllarda bu gereksinimler karşılandığından hesaplanabilir yarıgrup kuramı günden güne araştırmacıların daha çok ilgisini çeken bir çalışma alanı olmuş ve bu alanda önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Yarıgruplar teorisinde daha önce yapılmış olan çalışmalar incelendiğinde özellikle yarıgrup takdimi konusunda birçok makale yayınlandığı görülmektedir. Birçok yarıgruba takdim belirlenmiş olmasına rağmen etkinliği incelenmemiş bazı sonlu özel yarıgrupların olduğu görülmektedir. Bu çalışmada daha önce ele alınmamış bazı özel yarıgrupları ele aldık ve etkin olup olmadığını inceledik.

Önceki çalışmalarda bazı yarıgrup ailelerinin sonlu takdim edilebilirliği incelenmiş ve pek çok önemli sonuçlar bulunmuştur. Şimdi bu çalışmalarda yapılanlardan kısaca bahsedeceğiz ve genel olarak tezde yaptıklarımızı ve elde ettiğimiz sonuçları vereceğiz.

2000'de **H.Ayık, Colin M. Campbell, J.J. O'Connor** ve **N. Ruskuc**'a ait *"Minimal presentations and efficency of semigroups"* adlı makalede etkin (efficient) yarıgrupları içeren bazı sonsuz sınıflar ve etkin olmayan yarıgrupları içeren bazı sonsuz sınıflar belirlenmiştir. Makalede sonlu abelyen grupların yarıgrup olarak etkin olduğu gösterilmiştir.

Bu makalede D_{2n} dihedral grubunun

$$P = \langle a\ ,\ b \mid a^3 = a\ ,\ a^2 = b^n\ ,\ a\ b^{n-1}a = b \rangle$$

yarıgrup takdimine sahip olduğu gösterilmiştir. n çift ise P minimal takdimdir ve D_{2n} yarıgrup olarak etkindir. n tek olduğunda ve $n > 5$ ise D_{2n} grupları için deficiencysi 0 olan bir yarıgrup takdimi bulma problemi açık bir problemdir.

'Minimal Presentations and Efficiency of Semigroups' isimli makalede ayrıca sonlu rectangular (karesel) bandların etkin yarıgruplar olduğu gösterilmiştir. $I = \{ 1, 2, \ldots , m \}$ ve $\Lambda = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ olmak üzere $I \times \Lambda$ kümesine $R_{m,n}$ karesel bandı denir. Bu küme üzerinde tanımlı işlem

$$(i, \lambda). (j, \mu) = (i, \mu)\ (i, j \in I,\ \lambda, \mu \in \Lambda\ ) \qquad (2.1)$$

şeklindedir.

Makalede Z_n nin etkin olmadığı (inefficient) gösterilmiştir. ($n = 2$ için Z_n etkin(efficient) yarıgruptur.). $Z_n = \{ z_0, z_1, \ldots , z_{n-1} \}$ ($n \geq 2$) olsun. Z_n üzerindeki ikili işlem $z_i z_j = z_0$ şeklinde tanımlanırsa Z_n n elemanli sıfır yarıgrubu olur. z_0 sıfır elemandır. Makalede Z_n nin etkin olmadığı (inefficient) gösterilmiştir. ($n = 2$ için Z_n etkin(efficient) yarıgruptur.).

Bu makalede ek olarak sonlu bir A kümesi üzerindeki SL_A serbest semilatisinin etkinliği incelenmiştir. SL_A nın etkin olmadığı gösterilmiştir. SL_A serbest semilatisi A kümesinin bütün boş olmayan alt kümelerinin kümesi olarak tanımlanabilir. Küme üzerindeki ikili işlem kümelerin birleşimi ($\cup$) işlemidir.

'Minimal Presentations and Efficiency of Semigroups' isimli makalede bulunan sonuçlardan yola çıkılırsa sıfır elemanlı değişmeli bütün yarıgrupların etkin olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Bölüm 4.3 te bu sorunun cevabını CL_n zincirinin etkin olduğunu göstererek verdik. Başka bir ifadeyle sıfır elemanlı, değişmeli

yarıgrupların etkinliği konusunda etkindir veya değildir şeklinde kesin bir yargı yoktur. Ayrıca bölüm 4.4 te $CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ yarıgrubunun takdimini ve etkinlik durumunu araştırdık. Bu direkt çarpımın etkin olmadığını gördük. Bölüm 4.6 da ise genel olarak $(CL_m)^n$ yarıgrubunun takdimini ve etkinlik durumunu araştırdık. $(CL_m)^n$ yarıgrubunun etkin olmadığını gördük. Ayrıca Bölüm 4.5 te herhangi bir S yarıgrubunu etkin olmayan bir yarıgruba gömebileceğimizi gösterdik. Bu yarıgrup $T = S \cup SL_n$ yarıgrubudur.

Sonraki çalışmalarda grupların grup olarak etkinliği ve monoid olarak etkinliği arasında bağlantı kurulmaya çalışılmıştır. Her monoid takdimi grup takdimi olarak düşünülebilir, ayrıca her yarıgrup takdimi monoid takdimi ve grup takdimi olarak düşünülebilir. 1999'da **H. Ayık, Colin M. Campbell ve J.J. O'Connor**'a ait *"The semigroup efficiency of groups and monoids"* adlı makalede bir grubun grup olarak etkin olabilmesi için gerek ve yeter koşulun monoid olarak etkin olması gerektiği gösterilmiştir. Fakat bazı monoidlerin yarıgrup olarak etkin olmadıkları gösterilmiştir.

Bu makalede $n \geq 2$ ve n çift olmak üzere $2n$ elemanlı D_{2n} dihedral grubunun

$$\left\langle a, b \,\middle|\, a^3 = a \;,\; a^2 = b^n, ab^{n-1}a = b \right\rangle$$

yarıgrup takdimine sahip olduğu gösterilmiştir.

"The semigroup efficiency of groups and monoids" adlı makalede $n \geq 3$ ve n tek olmak üzere D_{2n} gruplarının da

$$Q_n = \left\langle x, y \,\middle|\, y^n x^2 y = y \;,\; y^{\frac{n-1}{2}} x^3 y^{\frac{n-1}{2}} = x \right\rangle$$

yarıgrup takdimine sahip olduğu gösterilmiştir.

Dolayısıyla D_{2n} gruplarının yarıgrup olarak etkin olduğu sonucuna varılmıştır. Yine aynı makalede

$$\rho_p = \left\langle x, y \;\middle|\; x^{3} = x\ ,\ y\ x\ y\ xy = x,\ (xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2 y^{p+1} = y \right\rangle$$

takdiminin her p pozitif tek tamsayısı için bir grup tanımladığı gösterilmiştir. p bir tek asal sayı ise ρ_p takdiminin *PSL(2,p)* grubunu tanımladığı ve dolayısıyla *PSL(2,p)* grubunun yarıgrup olarak etkin olduğu gösterilmiştir.

En son deficiencysi *0* olan etkin yarıgruplara örnekler verilmiştir. Başka bir ifadeyle *SL(2,p)* (*p* asal) grupları denilebilir.

Yarıgrupların etkinliği ile ilgili çalışmalar grupların yarıgrup etkinliğinin araştırılması ile devam etmiştir. 1999'da **H. Ayık, Colin M. Campbell, J. J. O'Connor** ve **N. Ruskuc**'a ait *"On the efficiency of wreath products of groups"* isimli makalede bazı grup sınıflarının wreath çarpımlarının yarıgrup etkinliği araştırılmıştır. Ayrıca etkin olmayan gruplara örnekler verilmiştir. 1999'da **H. Ayık, Colin M. Campbell, J. J. O'Connor** ve **N. Ruskuc**'a ait *"The semigroup efficiency of groups and monoids"* isimli makalede bir grubun grup olarak etkin olması için gerek ve yeter koşulun monoid olarak etkin olması gerektiği gösterilmişti. Bu makalede $\wp_G = \langle A \mid R \rangle$ sonlu bir G grubunun sonlu bir takdimi ise $2|A|$ doğuraylı etkin bir monoid takdimi belirlenmişti. *"On the efficiency of wreath products of groups"* isimli makalede ise $(|A|+1)$ sayıda doğuray ve $(|R|+1)$ sayıda bağıntı içeren etkin bir monoid takdimi verildi.

Sonraki çalışmalarda bir grubun grup olarak etkinliği ile yarıgrup olarak etkinliği arasındaki kıyaslamalara ağırlık verilmiştir. "Herhangi bir sonlu grup grup olarak etkin ise yarıgrup olarak etkin midir?" sorusunun cevabı 2000'de **C.M. Campbell, J. D. Mitchell** ve **N. Ruskuc**'a ait *'On defining groups efficiently by semigroup presentations'* makalesinde verilmiştir. Makalede G grubu $def_G(G) \geq 0$ sağlayan sonlu takdimli bir grup olduğunda $def_G(G) = def_S(G)$ sağlandığı gösterilmiştir. Bu makalede sonlu bir grubun grup olarak etkin olabilmesi için gerek ve yeter koşulun yarıgrup olarak etkin olması gerektiği gösterilmiştir.

Yarıgrupların etkinliği ile ilgili çalışmalara ek olarak sonlu basit yarıgrupların etkinliği araştırılmıştır. 2000'de **H. Ayık, C.M. Campbell, J.J. O'Connor** ve **N. Ruskuc**'a ait *"On the efficiency of finite simple semigroups"* isimli makalede sonlu abelyen gruplar üzerindeki sonlu Rees matris yarıgruplarının veya çift sayı dereceli dihedral gruplar üzerindeki Rees matris yarıgruplarının etkin olduğu gösterilmiştir.

Biz bu sonucu bölüm 4.7 de kullandık. Bölüm 4.7 de özel seçilmiş iki etkin Rees matris yarıgrubu aldık ve bu yarıgrupların direkt çarpımına izomorfik bir Rees matris yarıgrubu inşa ettik. Elde ettiğimiz yarıgrup abelyen bir grup üzerindeki Rees matris yarıgrubu olduğundan bu makaledeki sonucu kullanarak elde ettiğimiz yarıgrubun etkin olduğunu gördük. Ayrıca bölüm 4.8 de sıfır elemanlı iki semilatisin direkt çarpımını inceledik. Eğer S_1 ve S_2 0-basit semilatisler ise $S_1 \times S_2$ nin de 0-basit olduğunu ve etkin bir Rees matris yarıgrubuna izomorfik olduğunu gösterdik. Eğer S_1 veya S_2 den herhangi biri 0-basit değilse $S_1 \times S_2$ nin etkin olmadığını gördük.

Son olarak 5. bölümde tezde yapılanları ve elde edilen sonuçları özetle verdik, daha sonra araştırma konusu olabilecek açık problemler ve önerileri belirledik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde yarıgruplar ve yarıgrup takdimleri ile ilgili temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

S boş olmayan bir küme olsun. Eğer S üzerinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem (o) tanımlanırsa (S, o) ye **yarıgrup** denir. Genelde $x \, o \, y$ yerine xy yazılır. Her $x \in S$ için $1x = x1 = x$ sağlayan 1 elemanı varsa S ye **monoid** denir. S ye her zaman bir birim eleman eklenebilir. (S de olsa bile). S ye birim eleman eklenmesiyle oluşan monoidi S^1 ile gösteriyoruz. Başka bir ifadeyle $S^1 = S \cup \{1\}$ denilebilir. Dikkat edersek S de bir birim eleman varsa bu eleman S^1 de birim eleman değildir.

Her $x \in S$ için $zx = z$ sağlayan bir $z \in S$ varsa z sol sıfır elemandır. Benzer şekilde sağ sıfır eleman tanımlanır. Eğer bir yarıgrubun 0 elemanı hem sağ hem de sol sıfır elemansa 0 a bir **sıfır eleman** denir. Ayrıca S ye sıfır eleman eklenerek (gerekirse) elde edilen yarıgrup S^0 ile gösterilir. Başka bir ifadeyle eğer $0 \notin S$ ise $S^0 = S \cup \{0\}$, $0 \in S$ ise $S^0 = S$ olur.

Eğer S bir yarıgrup ise, açıkça görüleceği gibi S nin bir grup olması için gerek ve yeter koşul her $a \in S$ için $aS = S$ ve $Sa = S$ olmasıdır.

S bir yarıgrup ve T S nin bir alt kümesi olsun. Eğer $T^2 \subseteq T$ ise yani her $t, t' \in T$ için $tt' \in T$ sağlanırsa T altkümesine S nin **alt yarıgrubu** denir

Birim eleman ve sıfır eleman varsa tektir. Fakat sol veya sağ sıfır elemanlar tek olmak zorunda değildir. Eğer bir yarıgrup sadece sol sıfır elemanlardan oluşuyorsa **sol sıfır yarıgrubu** denir ve L_m ile gösterilir. Burada m yarıgruptaki eleman sayısıdır. Benzer şekilde **sağ sıfır yarıgrupları** tanımlanır ve R_n ile gösterilir.

Eğer S yarıgrubunda $e^2 = e$ sağlayan bir eleman varsa e ye **idempotenttir** denir. S sadece idempotent elemanlardan oluşuyorsa S ye **band** denir. Her $x, y \in S$ için $xy = yx$ sağlanıyorsa S ye değişmeli yarıgruptur denir. Eğer S hem band hem de değişmeli ise S ye **semilatis** denir.

A bir küme ve SL_A A nın boş olmayan bütün alt kümelerinin kümesi olsun. İkili işlem olarak birleşim $(\cup)$ işlemini düşünelim. Bu işleme göre SL_A nın bir semilatis olduğu açıktır. SL_A ya A üzerindeki **serbest semilatis** denir.

$Z_n = \{ x_0, x_1, ..., x_{n-1} \}$ $(n \geq 2)$ olsun. Her x_i, $x_j \in Z_n$ için $x_i x_j = x_0$ olacak şekilde bir ikili işlem tanımlansın. Bu işleme göre Z_n in yarıgrup olduğu açıktır. Z_n değişmelidir fakat band değildir. Z_n e n elemanlı **sıfır yarıgrubu** denir.

$R_{m,\,n} = \{ (i, j) \;/\; 1 \leq i \leq m,\; 1 \leq j \leq n \}$ olsun. $(i, j), (k, l) \in R_{m,\,n}$ olmak üzere $R_{m,n}$ üzerindeki ikili işlem $(i, j).(k, l) = (i, l)$ şeklinde tanımlansın. Bu işleme göre $R_{m,\,n}$ bir yarıgruptur ve banddır, fakat değişmeli değildir. $R_{m,\,n}$ ye **karesel band** denir. Eğer $m = 1$ ise $R_{1,\,n}$ bir sağ sıfır yarıgrubudur ve $n = 1$ ise $R_{m,\,1}$ bir sol sıfır yarıgrubudur.

S bir yarıgrup olsun. Eğer $SL \subseteq L$ $(RS \subseteq R)$ ise S nin boştan farklı L (R) alt kümesine S nin **sol ideali** (sağ ideali) denir. Eğer S nin boştan farklı bir A alt kümesi hem sağ ideal hem de sol ideal ise A ya S nin bir **ideali** veya iki yanlı ideali denir. S bir yarıgrup, $a \in S$ olsun. $axa = a$ sağlayan $x \in S$ varsa a ya **regüler eleman** denir. S sıfır elemanı olmayan bir yarıgrup olsun. S nin kendisinden başka ideali yoksa S ye **basit yarıgrup** denir.

Herhangi bir yarıgrubun idempotent elemanları arasında aşağıdaki kuralla tanımlı bir kısmi sıralama bağıntısı vardır:

$$e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e$$

Eğer S sıfır elemanlı bir yarıgrupsa sıfır elemanın özelliklerinden 0 ın tek minimum idempotent olduğu görülür. Sıfırdan farklı idempotent elemanların kümesinde minimal olan idempotentlere **primitif idempotent** denir. Dolayısıyla bir e primitif idempotent elemanı aşağıdaki özelliğe sahiptir:

$$ef = fe = f \neq 0 \Rightarrow e = f$$

S sıfır elemanı olmayan bir yarıgrup olsun. S basit ve bir primitif idempotent eleman içeriyorsa S ye **tam basit yarıgrup** denir. (Burada S nin tüm idempotent elemanlarının kümesi içindeki minimal idempotent elemanı kastediyoruz.) (Howie, 1995; Bölüm 3.3)

S ve T iki yarıgrup, $\phi : S \rightarrow T$ bir dönüşüm olsun. Her $s_1, s_2 \in S$ için $\phi(s_1 s_2) = \phi(s_1).\ \phi(s_2)$ sağlanıyorsa ϕ ye **homomorfizm** denir. $\phi(S) = \{ \phi(s) : s \in S \} \subseteq T$ kümesine ϕ nin **görüntü kümesi** denir. $\phi(S)$ T nin alt yarıgrubudur. $\phi : S \rightarrow T$ ye homomorfizmi için ϕ birebir ise ϕ ye **monomorfizm**, ϕ örten ise ϕ ye **epimorfizm** ve

ϕ hem birebir hem örten ise ϕ ye **izomorfizm** denir. S den S ye bir izomorfizme bir **otomorfizm** denir. Eğer bir S yarıgrubundan bir T yarıgrubuna bir izomorfizm varsa S T ye **izomorfiktir** denir ve $S \cong T$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.1: G bir grup, I ve J boş olmayan kümeler ve $P = (P_{\lambda i})$ $|J| \times |I|$ tipinde elemanları G den gelen bir matris olsun. $S = I \times G \times J$ olsun ve S üzerindeki çarpım:

$$(i, a, \lambda).(j, b, \mu) = (i, ap_{\lambda j}b, \mu)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman S bir tam basit yarıgruptur.

Tersine her tam basit yarıgrup bu şekilde inşa edilmiş bir yarıgruba izomorfiktir.

Tanımladığımız çarpıma sahip $I \times G \times J$ yarıgrubunu $M[G; I, J; P]$ ile gösteriyoruz. Bu yarıgruba Rees matris yarıgrubu denir. (bkz. Howie, *1995*; Teorem *3.3.1*)

2.1 Bağıntılar ve Denklikler

$X \neq \varnothing$ bir küme olsun. $X \times X$ in herhangi bir alt kümesi ρ ya X üzerinde bir **bağıntı** denir. Mesela $\varnothing$, $X \times X$, $X \times X$ in (aşikar) bağıntılarıdır. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini $B(X)$ ile gösterelim. β X üzerinde bir bağıntı ve $(x, y) \in \beta$ olsun. Biz $(x, y) \in \beta$ yerine $x\beta y$ yi tercih ederiz. Bir başka önemli bağıntı eşlik bağıntısı;

$$1_X = \Delta_X = \{(x, x) \,/\, x \in X\}$$

bağıntısıdır.

ρ, X üzerinde bir bağıntı ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$\rho[A] = \{y \in X: (a, y) \in \rho, (a \in A)\}$$

olarak tanımlayalım. $x \in X$ için $\rho[\{x\}]$ yerine $\rho[x]$ yazacağız.

Önerme 2.1.1. $B(X)$ X üzerindeki tüm bağıntıların oluşturduğu küme olmak üzere aşağıda tanımlanan o (bileşke işlemi) ile bir yarıgruptur:

$$\rho\, o\, \sigma = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X, (x, z) \in \rho, (z, y) \in \sigma\}.$$

Her ρ, σ, $\tau \in B(X)$ için $\rho \subseteq \sigma$ ise $\rho\, o\, \tau \subseteq \sigma\, o\, \tau$ ve $\tau\, o\, \rho \subseteq \tau\, o\, \sigma$ sağlanır. $\rho \in B(X)$ olmak üzere

$$dom(\rho) = \{x \in X : \exists y \in X, x \rho y\}$$

kümesine ρ nun **tanım kümesi** ve

$$ran(\rho) = \{y \in X : \exists x \in X, y \rho x\}$$

kümesine ρ nun **değer kümesi** denir.

$x \in X$ ve $\rho \in B(X)$ olsun. $x\rho = \{y \in X : \exists x \in X, x \rho y\}$ şeklinde tanımlanır. $A \subseteq X$ için $A\rho = \bigcup_{x \in A} x\rho$ şeklinde tanımlanır. $\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in \rho\}$ ρ nun tersidir. Buna göre $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$, $(\rho\, o\, \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} o \rho^{-1}$ ve $\rho \subseteq \sigma$ ise $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$ sağlanır.

Ayrıca ρ, β, α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in B(X)$ olmak üzere

$$(\alpha_1\, o\, \alpha_2\, o \ldots o\, \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1}\, o\, \alpha_{n-1}^{-1} o \ldots o \alpha_1^{-1}$$

sağlanır. Dikkat edilecek olursa $dom(\rho) = ran(\rho^{-1})$, $ran(\rho) = dom(\rho^{-1})$ ve $\rho^{-1}[x] \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in ran(\rho)$ dir.

ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer $\Delta_X \subseteq \rho$ ise ρ ya **yansımalı**, $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya **simetrik**, $\rho^2 = \rho\, o\, \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya **geçişmeli** denir. Eğer ρ, hem yansımalı, hem simetrik hem de geçişken ise ρ ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir.

$\rho[x]$ kümesine ρ **-sınıfı** veya **denklik sınıfı** diyeceğiz. X/ρ notasyonu ile tüm denklik sınıflarının kümesini göstereceğiz.

$\rho^*: X \to X/\rho$ dönüşümü, her $x \in X$ için $\rho^*(x) = \rho[x]$ olarak tanımlanır ve bu dönüşüme **doğal dönüşüm** denir.

$\phi: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. O zaman

$$ker\phi = \phi \; o \; \phi^{-1} = \{ (a, b) \in X \times X : a\phi = b\phi \}$$

ile tanımlanan kümeye ϕ nin çekirdeği denir. $\{ \alpha_i : i \in I \}$ X üzerindeki denklik bağıntılarının bir ailesi olsun. O zaman $\cap \{ \alpha_i : i \in I \}$ de bir denklik bağıntısıdır. R X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. X üzerinde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi R^e ile gösterilir. Bu bağıntı X üzerinde R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. $R^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ kümesine R nin **geçişmeli kapanışı** denir.

Lemma 2.1.1. R X kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. R^∞ X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: $(x, y) \in R^\infty$ ve $(y, z) \in R^\infty$ iken $(x, z) \in R^\infty$ olduğunu göstermeliyiz. $(x, y) \in R^\infty$ ise $(x, y) \in R^n$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Benzer şekilde $(y, z) \in R^\infty$ olduğundan $(y, z) \in R^m$ olacak şekilde bir m tamsayısı vardır. O halde $(x, z) \in R^m \; o \; R^n = R^{m+n} \subseteq R^\infty$ sağlanır. O halde R^∞ geçişmelidir. Şimdi R^∞ un bu şekildeki en küçük bağıntı olduğunu gösterelim. $R^1 = R \subseteq R^\infty$ olduğu görülür. Q X üzerinde R yi içeren başka bir geçişmeli bağıntı olsun. $R^2 = R \; o \; R \subseteq Q \; o \; Q \subseteq Q$ sağlanır. Tümevarımla devam edilirse $n = 1, 2, \ldots$ için $R^n \subseteq Q$ olduğu görülür. O halde $R^\infty \subseteq Q$ sağlanır. R^∞ X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır. ■

Önerme 2.1.2. X üzerinde herhangi bir R bağıntısı için $R^e = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]^\infty$ sağlanır.

İspat: $S = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]^\infty$ ve $E = S^\infty$ olsun. $\Delta_X \subseteq S = S^1 \subseteq E$ olup E yansımalıdır. S tanımından dolayı simetriktir, yani $S = S^{-1}$ sağlanır. Her $n \in N$ için $S^n = (S^{-1})^n = (S^n)^{-1}$ sağlanır. O halde S^n simetriktir. $E^{-1} = (S^\infty)^{-1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n = E$ sağlanır. O halde E simetriktir. σ R yi içeren bir denklik bağıntısı ise $\Delta_X \subseteq \sigma$ olup σ yansımalıdır. Ayrıca $R^{-1} \subseteq \sigma^{-1} = \sigma$ olup $S = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]^{\infty} \subseteq \sigma$ bulunur. $E = S^{\infty}$, X üzerinde S yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır. σ geçişmeli olduğundan $E \subseteq \sigma$ bulunur. Bu durumda $S \circ S \subseteq \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$ olup her $n \in N$ için $E^n = S^n \subseteq \sigma$ olur. $E = R^e$ bulunur. ■

Önerme 2.1.3. R X üzerinde bir bağıntı ve R^e de R yi içeren en küçük denklik bağıntısı olsun. O zaman $(x, y) \in R^e$ olması için gerek ve yeter koşul ya $x = y$ ya da $\exists$ $n \in N$ için aşağıdaki formda bir dizi vardır:

$$x = z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_{n-1} \to z_n = y$$

öyle ki ya $(z_i, z_{i+1}) \in R$ ya da $(z_{i+1}, z_i) \in R$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

İspat: $S = R \cup R^{-1} \cup \Delta_X$ olsun. W kümesi $(x, y) \in X \times X$ ikililerinden oluşsun öyle ki $x, y \in W$ için ya $x = y$ sağlansın veya $\exists n \in N$ için aşağıdaki formda bir dizi olsun:

$$x = z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_{n-1} \to z_n = y.$$

Bu dizide ya $(z_i, z_{i+1}) \in R$ ya da $(z_{i+1}, z_i) \in R$ $(\forall i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sağlanır. Daha açık bir ifadeyle W $(x, y) \in X \times X$ ikililerinden oluşur öyle ki $n \geq 2$ ve her $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için $(z_i, z_{i+1}) \in S$ olmak üzere

$$x = z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_{n-1} \to z_n = y$$

dizisi vardır. Özel olarak $S \subseteq W$ dur. $n \geq 2$ ve $(x, y) \in S^{n-1}$ olsun. Bu durumda yukarıda verilen formda bir dizi mevcuttur. Buradan $(x, y) \in W$ bulunur ve $R^e \subseteq W$ elde edilir. Tersinin ispatı için $(x, y) \in W$ alalım. Yine yukarıda verilen formda bir diziye sahibiz.. Buradan $(x, y) \in S^{n-1} \subseteq R^e$ bulunur. $W = R^e$ elde edilir. ■

2.2 Kongrüanslar

S bir yarıgrup, R de S üzerinde bir bağıntı (yani $R \subseteq S \times S$) olsun. Eğer her $(s, t) \in R$ ve $\forall a \in S$ için

i) $(as, at) \in R$ ise R ye **sol uyumlu,**

ii) $(sa, ta) \in R$ ise R ye **sağ uyumlu** ve

iii) R hem sağ hem de sol uyumlu ise R ye **uyumlu** denir.
Sol uyumlu bir denklik bağıntısına **sol kongrüans**, sağ uyumlu denklik bağıntısına **sağ kongrüans**, uyumlu bir denklik bağıntısına da **kongrüans** denir.

Teorem 2.2.1. ρ bir S yarıgrubu üzerinde bir kongruans olsun.
a) Eğer $(a, b) \in \rho$ ve $(c, d) \in \rho$ ise o zaman $(ac, bd) \in \rho$ sağlanır..
b) $S/\rho = \{a\rho : a \in S\}$ üzerinde $(a\rho).(b\rho) = (ab\rho)$ işlemini tanımlayalım.
S/ρ bu işlemle bir yarıgrup ve $\rho^*: S \to S/\rho$ bir homomorfizmadır.
İspat: *a)* $(a, b) \in \rho$ ve $(c, d) \in \rho$ olsun. ρ denklik bağıntısı olduğundan $(c, c) \in \rho$ olur. ρ kongruans olduğundan uyumludur ve dolayısıyla $(ac, bc) \in \rho$ olur. Benzer şekilde $(bc, bd) \in \rho$ olur. ρ geçişme özelliğine sahip olduğundan $(ac, bd) \in \rho$ olur.
b) $(a\rho.\ b\rho).\ c\rho = a\rho(b\rho.\ c\rho)$ olup S/ρ bu işlemle bir yarıgrup olur. $a\rho^* = a\rho$ olarak tanımlayalım. O halde $a\rho^*.\ b\rho^* = a\rho.\ b\rho = ab\rho = ab\rho^*$ sağlanır. $\rho^*: S \to S/\rho$ bir homomorfizmadır. ∎

Teorem 2.2.2. S ve T birer yarıgrup ve $\phi : S \to T$ bir homomorfizm olsun. O zaman $\ker \phi = \phi \circ \phi^{-1} = \{(a,b) \in S^2 \mid a\phi = b\phi\}$ S üzerinde bir kongruans olup $\alpha : S/\ker\phi \to im\phi$ izomorfizması vardır öyle ki $(\ker\phi)^* \circ \alpha = \phi$ sağlanır.
İspat: $\ker \phi$ nin denklik bağıntısı olduğunu önceden gösterdik. $(s, t) \in \ker \phi$ ve $a \in S$ olsun. $(as)\phi = (a\phi)(s\phi) = (a\phi)(t\phi) = (at)\phi$ olup $(as, at) \in \ker \phi$ sağlanır. Benzer şekilde $(sa, ta) \in \ker \phi$ olup $\ker \phi$ bir kongruanstır.

$\sigma = \ker \phi$ ve $\alpha : S/\ker\phi \to im\phi$ $\forall(s\sigma \in S/\ker\phi)$ için $(s\sigma)\alpha = s\phi$ olsun. $\forall$ $(s\sigma), (t\sigma) \in S/\ker\phi$ için $((s\sigma)\alpha) = ((t\sigma)\alpha) = (s\phi)(t\phi) = (st\phi) = (st\sigma)\alpha$ sağlanır. α nın örten olduğu açıkça görülür. $(s\sigma)\alpha = (t\sigma)\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $s\phi = t\phi$ olmasıdır. Buradan da $(s, t) \in \ker\phi = \sigma$ bulunur. O halde $s\sigma = t\sigma$ sağlanır. $\alpha : S/\ker\phi \to im\phi$ izomorfizmadır. ∎

Teorem 2.2.3. α bir S yarıgrubu üzerinde bir kongruans olsun. $\phi : S \to T$ bir homomorfizm olsun ve $\alpha \subseteq \ker\phi$ sağlansın. $\alpha^*: S \to S/\alpha$ doğal homomorfizm olmak üzere $\alpha^* \circ \beta = \phi$ olacak şekilde ve $im(\phi) = im(\beta)$ olacak şekilde bir $\beta : S/\alpha \to T$ homomorfizması vardır.

İspat: $\beta : S/\alpha \to T$ ye $\beta(s\alpha) = \phi(s)$ olacak şekilde tanımlansın. $s, s' \in S$ için $s\alpha = s'\alpha$ olsun. Bu durumda $(s, s') \in \alpha$ ve $\alpha \subseteq ker\phi$ olduğundan $(s, s') \in ker\phi$ sağlanır. O halde $\phi(s) = \phi(s')$ olur. Buradan α nın iyi tanımlı olduğu görülür. ϕ homomorfizm olduğundan β nın homomorfizm olduğu görülür. $\alpha^* \circ \beta = \phi$ sağlandığı görülmektedir. β nın tanımından $im(\phi) = im(\beta)$ sağlanır. $\alpha^* \circ \beta = \phi$ olup β tektir. ■

α ve β S yarıgrubu üzerinde $\alpha \subseteq \beta$ olacak şekilde kongrüanslar olsun. $a\alpha = b\alpha$ ise $a\beta = b\beta$ sağlanır. $\alpha \subseteq ker\beta^*$ sağlanır ve Teorem 2.2.3 ten bir $\phi : S/\alpha \to S/\beta$ homomorfizması vardır öyle ki $\alpha^* \circ \phi = \beta^*$ sağlanır. $\phi : S/\alpha \to S/\beta$ $\phi(a\alpha) = (a\beta)$ şeklinde tanımlanır. S/α üzerindeki kerϕ kongruansı ker$\phi = \{ (a\alpha, a\beta) \in S/\beta \times S/\beta \mid (a,b) \in \beta \}$ şeklinde tanımlanır. kerϕ yerine β/α yazılabilir. Bu durumda $\delta : (S/\alpha) / (\beta/\alpha) \to S/\alpha$ izomorfizmi şöyle tanımlanabilir:

$$\delta((\beta/\alpha)(a\alpha)) = a\beta$$

O halde

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\beta^*"'] & S/\alpha \\
S/\beta \arrow[r, "(\beta/\alpha)^*"'] & (S/\alpha)/(\beta/\alpha) \arrow[u, "\delta"']
\arrow[from=1-2, to=2-1, "\phi"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Aşağıdaki teorem özet olarak verilebilir:

Teorem 2.2.4. α ve β S yarıgrubu üzerinde $\alpha \subseteq \beta$ olacak şekilde kongrüanslar olsun. O zaman

$$\beta/\alpha = \{ (x\alpha, y\alpha) \in (S/\alpha)^2 \mid (x, y) \in \beta \}$$

bağıntısı S/α üzerinde bir kongruans olup $(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta$ sağlanır.

Önerme 2.2.1. Eğer ρ_i $(i \in I)$ S yarıgrubu üzerine kongruansların bir ailesi ise $T = \bigcap_{i\in I} \rho_i$ de S üzerinde bir kongruanstır.

Tanım 2.2.1. R bir S yarıgrubu üzerinde bir bağıntı olsun. O zaman $R^C = \{(xay, xby) \,/\, x, y \in S^1, (a, b) \in R\}$ kümesi R yi içeren tüm kongruansların kesişimidir.

Teorem 2.2.5. R ve P bir S yarıgrubu üzerinde iki bağıntı olsun.

(i) $(R^{-1})^C = (R^C)^{-1}$

(ii) $R \subseteq R^C$

(iii) $R \subseteq P$ ise $R^C \subseteq P^C$ sağlanır ve $\{R_i : i \in I\}$ S üzerindeki bağıntıların ailesi ise

$(\bigcup_{i\in I} R_i)^C = \bigcup_{i\in I} R_i^C$ sağlanır.

(iv) $(R^C)^C = R^C$

(v) $R = R^C$ olması için gerek ve yeter koşul R nin uyumlu olmasıdır.

(vi) $(1_S)^C = 1_S$.

İspat:

(i) $(a, b) \in R$ olsun. O halde $(b, a) = (xuy, xvy)$ ve $(u, v) \in R$ olacak şekilde $x, y \in S$ elemanları vardır. Bu durumda $(a, b) = (xuy, xvy) \in (R^{-1})^C$ sağlanır.

(ii) $(a, b) \in R$ alalım. $(a, b) = (1a1, 1b1) \in R^C$ olduğundan $R \subseteq R^C$ bulunur.

(iii) $R \subseteq P$ ve $(a, b) \in R^C$ alalım. Bu durumda $(a, b) = (xuy, xvy)$ olacak şekilde $x, y \in S$ ve $(u, v) \in R \subseteq P$ vardır. $(a, b) = (xuy, xvy) \in P^C$ bulunur. Her $i \in I$ için $R_i \subseteq \bigcup_{i\in I} R_i$ sağlanır. Az önce gösterdiğimiz gibi her $i \in I$ için $(R_i)^C \subseteq (\bigcup_{i\in I} R_i)^C$ sağlanır. Böylece $\bigcup_{i\in I} (R_i)^C \subseteq (\bigcup_{i\in I} R_i)^C$ sağlanır. Şimdi $(a, b) \in (\bigcup_{i\in I} R_i)^C$ olsun. $a = xuy$ ve $b = xvy$ olacak şekilde $x, y \in S$ ve $(u, v) \in (\bigcup_{i\in I} R_i)$ vardır. O halde bir $i \in I$ için (u, v)

$\in R_i$ sağlanır. Bu durumda $(a, b) = (xuy, xvy) \in (R_i)^C \subseteq \bigcup_{i\in I} R_i^{\ C}$ sağlanır. O halde

$(\bigcup_{i\in I} R_i)^C = \bigcup_{i\in I} R_i^{\ C}$ bulunur.

(iv) *(ii)* ve *(iii)* ten $R \subseteq R^C$ sağlandığından $R^C \subseteq (R^C)^C$ bulunur. Şimdi $(R^C)^C \subseteq R^C$ olduğunu gösterelim. $(a, b) \in (R^C)^C$ olsun. $a = xuy$ ve $b = xvy$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. $u = kpr$ ve $v = kqr$ ve $k, r \in S^1$ olacak şekilde $(u, v) \in R^C$ sağlanır. Bu durumda $a = (xk)p(ry)$ ve $b = (x\ k)q(ry)$ sağlanır. O halde $(a, b) \in R^C$ olup $(R^C)^C \subseteq R^C$ bulunur. $(R^C)^C = R^C$ elde edilir.

(v) $R = R^C$ kabul edelim. $(c, d) \in R$ ve $u, v \in S^1$ alırsak $(ucv, udv) \in R^C = R$ bulunur. O halde R uyumludur. Tersini göstermek için R nin uyumlu olduğunu kabul edelim. $(a, b) \in R^C$ olsun. O halde $x, y \in S^1$ ve $(c, d) \in R$ vardır öyle ki $a = xcy$ ve $b = xdy$ sağlanır. R uyumlu olduğundan $(a, b) = (xcy, xdy) \in R$ sağlanır. $R^C \subseteq R$ elde edilir. *(ii)* den dolayı $R^C = R$ bulunur.

(vi) $(a, b) \in 1_S^{\ C}$ olsun. $a = xuy$ ve $b = xuy$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ bulunabilir. $1_S^{\ C} \subseteq 1_S$ elde edilir. $1_S \subseteq 1_S^{\ C}$ olduğunu zaten biliyoruz. O halde $1_S = 1_S^{\ C}$ bulunur. ■

Lemma 2.2.6. Q S yarıgrubu üzerinde uyumlu bir bağıntı olsun. O zaman

(i) $\forall n \in N$ için Q^n de uyumludur.

(ii) Q^∞ uyumludur.

İspat: $(x, y) \in Q^n$ ve $a \in S$ olsun. $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in S$ vardır öyle ki $(x, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_{n-1}, y) \in Q$ sağlanır. Q uyumlu olduğundan $(ax, az_1), (az_1, az_2), \ldots, (az_{n-1}, ay) \in Q$ olup $(ax, ay) \in Q^n$ elde edilir. Benzer şekilde $(xa, ya) \in Q^n$ olduğu gösterilir. O halde Q^n uyumludur.

$(Q^\infty)^C = (\bigcup_{n\in N} Q^n)^C = \bigcup_{n\in N} (Q^n)^C = \bigcup_{n\in N} Q^n = Q^\infty$ sağlanır ve dolayısıyla Q^∞ uyumludur.

Önerme 2.2.2. R bir S yarıgrubu üzerinde bir bağıntı olsun. α_i $(i \in I)$ S üzerinde R yi içeren kongruansların tümü olsun. O zaman $R^{\#} = \bigcap_{i \in I} \alpha_i$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2.3. R bir S yarıgrubu üzerinde bir bağıntı ise $R^{\#} = (R^C)^e$ sağlanır.

İspat: $(R^C)^e = \bigcup_{n \in N} (R^C \cup (R^C)^{-1} \cup \Delta_S{}^C)^n = \bigcup_{n \in N} ((R \cup R^{-1} \cup \Delta_S)^C)^n$ bir kongruanstır. α S üzerinde R yi içeren bir kongruans olsun. O halde α uyumludur yani $\alpha^C = \alpha$ sağlanır. $R \subseteq \alpha$ olduğundan $R^C \subseteq \alpha^C = \alpha$ olur ve buradan $(R^C)^e \subseteq \alpha$ bulunur. ■

$c, d \in S$ olsun. $c = xay$ ve $d = xby$ $(x, y \in S^1)$ ve $(a, b) \in R$ veya $(b, a) \in R$ sağlansın. Bu durumda c d ye bir R – geçişi ile bağlantılıdır denir.

Teorem 2.2.6. R, bir S yarıgrubu üzerinde bir bağıntı olsun. O zaman $(a, b) \in R^{\#}$ olması için gerek ve yeter koşul $a = b$ olmasıdır veya bir $n \in N$ için

$$x = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \ldots \rightarrow z_{n-1} \rightarrow z_n = y$$

formunda R- geçişlerinin bir dizisi vardır.

İspat: İspat Önerme 2.1.3 ve Önerme 2.2.3 den çıkar.

α S üzerinde bir bağıntı, β ise bir kongrüans olsun. O zaman α / β bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanan S üzerinde bir bağıntıdır:

$$\{(x\beta, y\beta) : (x, y) \in \alpha\}$$

Eğer $\alpha \subseteq \beta$ ise $\alpha / \beta = 1_{S/\beta}$ sağlanır.

Önerme 2.2.4. α ve β S üzerinde birer kongruans ve $\alpha \subseteq \beta$ olsun. δ S üzerinde $\beta = \delta^{\#}$ olacak şekilde bir bağıntı olsun. Bu durumda $\beta / \alpha = (\delta / \alpha)^{\#}$ sağlanır.

İspat: β/α, S/α üzerinde δ/α yı içeren bir kongrüans olup $\beta/\alpha \supseteq (\delta/\alpha)^{\#}$ elde edilir. Şimdi $(\delta/\alpha)^{\#} \subseteq \beta/\alpha$ olduğunu gösterelim. $(x\alpha, y\alpha) \in \beta/\alpha$ ise $(x, y) \in \alpha$ sağlanır. Teorem 2.2.6 dan

$$x = a_1 z_1 t_1 \to a_1 z_1 t_1 = a_2 z_2 t_2 \to \ldots \to a_{n-1} z_{n-1} t_{n-1} = a_n z_n t_n = y$$

formunda R- geçişlerinin bir dizisi vardır.

O halde

$$x\alpha = (a_1\alpha)(z_1\alpha)(t_1\alpha) \to (a_1\alpha)(z_1\alpha)(t_1\alpha) = (a_2\alpha)(z_2\alpha)(t_2\alpha) \to \ldots \to (a_{n-1}\alpha)(z_{n-1}\alpha)(t_{n-1}\alpha) = (a_n\alpha)(z_n\alpha)(t_n\alpha) = y\alpha$$

dizisi vardır. Buna göre $x\alpha$ ve $y\alpha$ δ/α geçişi ile bağlantılıdır. Buradan $(x\alpha, y\alpha) \in (\delta/\alpha)^{\#}$ bulunur. ∎

R S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $R^{\flat}$ kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$R^{\flat} = \{(a, b) \in S \times S \,/\, (\forall x, y \in S^1)\ (xay, xby) \in R\}$$

Önerme 2.2.5. R S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $R^{\flat}$ S üzerinde R nin içerdiği en büyük kongruanstır.

İspat: Öncelikle $R^{\flat}$ nin bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Ayrıca, eğer $(a, b) \in R^{\flat}$ ve $c \in S$ ise x ve y nin S^1 deki her seçimi için $(xcay, xcby) \in R$ sağlanır. Dolayısıyla $(ca, cb) \in R^{\flat}$ sağlanır. Benzer şekilde $(ac, bc) \in R^{\flat}$ sağlanır. O halde $R^{\flat}$ bir kongruanstır ve $R^{\flat} \subseteq R$ elde edilir. $(a, b) \in R^{\flat}$ ise $(1a1, 1b1) \in R$ ve dolayısıyla $(a, b) \in R$ sağlanır.

En son α S üzerinde R tarafından içerilen bir kongruans olsun. O zaman $(a, b) \in \alpha$ ise $(\forall x, y \in S^1)\ (xay, xby) \in \alpha$ sağlanır. Buradan $(\forall x, y \in S^1)\ (xay, xby) \in R$ bulunur. Bu ise $(a, b) \in R^{\flat}$ olduğu anlamına gelir. ∎

2.3. İdealler

S bir yarıgrup olsun. Eğer $SL \subseteq L$ $(RS \subseteq R)$ ise S nin boştan farklı L (R) alt kümesine S nin sol ideali (sağ ideali) denir. Eğer S nin boştan farklı bir A alt kümesi hem sağ ideal hem de sol ideal ise A ya S nin bir ideali veya iki yanlı ideali denir. Dikkat edilirse bir yarıgrubun iki yanlı her ideali bir alt yarıgruptur. Fakat bir alt yarıgrubun bir ideal olması gerekmez.

2.4. Green Bağıntıları

S bir yarıgrup, $a \in S$ olsun. S nin a yı içeren en küçük sol ideali $Sa \cup \{a\}$ kümesidir ve S^1a ile gösterilir. Bu ideale a tarafından doğurulan temel sol ideal denir. $\mathcal{L}$ denkliği S üzerinde aşağıdaki kuralla tanımlanır:

$a \mathcal{L} b$ olması için gerek ve yeter koşul a ve b nin aynı temel sol ideali doğurmasıdır, yani $S^1a = S^1b$ olmasıdır.

Benzer şekilde $\mathcal{R}$ denkliği S üzerinde şöyle tanımlanır:

$a \mathcal{R} b$ olması için gerek ve yeter koşul $aS^1 = bS^1$ olmasıdır.

Aşağıdaki önermeyle $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ denkliklerini daha açık bir şekilde tanımlayabileceğiz:

Önerme 2.4.1. $a, b \in S$ olsun. O zaman $a \mathcal{L} b$ olması için gerek ve yeter koşul $xa = b$ ve $yb = a$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ olmasıdır. Ayrıca $a \mathcal{R} b$ olması için gerek ve yeter koşul $au = b$ ve $bv = a$ olacak şekilde $u, v \in S^1$ olmasıdır.

$\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ nin başka bir özelliği aşağıdaki şekildedir.

Önerme 2.4.2. $\mathcal{L}$ bir sağ kongruans ve $\mathcal{R}$ bir sol kongruanstır.

Bir S yarıgrubu üzerindeki iki denliğin kesişimi yine bir denkliktir. (Howie, 1995; Bölüm 1.4) $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ nin kesişimi yarıgrup teorisinin gelişmesinde önemli bir rol oynar. Biz bu denkliği $\mathcal{H}$ ile gösteriyoruz. $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ bağıntısını $\mathcal{D}$ ile gösteriyoruz. (Howie, 1995; Bölüm 1.5) ten iki denkliğin birleşimini tanımlamak oldukça zordur, fakat aşağıdaki önerme yardımıyla bu tür zorluklardan kurtulabiliriz:

Önerme 2.4.3. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ bağıntıları değişmelidir.

İspat: (Howie, 1995; Önerme 2.1.3) e bakınız.

(Howie, 1995; Sonuç 1.5.12)den $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ sağlanır. Böylece $\mathcal{D}$ bağıntısının umulandan daha kolay ele alındığı görülmektedir.

3. TAKDİMLER

Bu bölümde ilk olarak yarıgruplar için doğuray ve serbest yarıgrup kavramlarından bahsedeceğiz. Daha sonra grup, monoid ve yarıgrup takdimleri ve yarıgrupların(monoid veya grup) etkinliği hakkında bilgi vereceğiz.

3.1 Doğuraylar:

X S nin bir alt kümesi olsun. S nin X i içeren en küçük alt yarıgrubuna X **tarafından doğurulan alt yarıgrup** denir ve $\langle X\rangle$ ile gösterilir. (Ayık, 1998; Bölüm 1.2)

S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq X \subseteq S$ olsun. O zaman

$$\langle X\rangle = \{x_1x_2 \dots x_n : x_i \in X,\ n \in N\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer S nin $S = \langle X\rangle$ olacak şekilde sonlu bir alt kümesi varsa S ye **sonlu doğuraylıdır** denir. S nin **rankı**

$$rank(S) = \min\{\ |X|\ /\ X\ S \text{ nin bir doğuray kümesi}\}$$

şeklinde tanımlanır ve $rank(S)$ ile gösterilir.

Lemma 3.1.1. S bir yarıgrup, $X \subseteq S \neq \varnothing$ olsun. O zaman

$$\langle X\rangle = \cap\{A_i : A_i\ S \text{ nin } X \text{ i içeren bir alt yarıgrubu}\}$$

şeklindedir.

İspat: $\mathcal{A} = \cap \{ A_i : A_i$ S nin X i içeren bir alt yarıgrubu $\}$ ise $\mathcal{A}$ X i içeren bir altyarıgrup olduğundan $<X> \subseteq \mathcal{A}$ sağlanır. $<X>$ aynı zamanda X i içerir. O halde $<X> \in \{ A_i : A_i$ S nin X i içeren bir alt yarıgrubu $\}$ bulunur. Bu durumda $\mathcal{A} = \cap \{ A_i : A_i$ S nin X i içeren bir alt yarıgrubu $\} \subseteq <X>$ olduğundan $<X> = \mathcal{A}$ elde edilir. ■

S bir yarıgrup olsun. Eğer S bir $X = \{x\}$ kümesi tarafından doğuruluyora S ye **monogenic yarıgrup** denir. $S = <x>$ yazılır. $S = <x>$ monogenic yarıgrubunda eğer her $i \neq j \in N$ için $a^i \neq a^j$ ise S sonsuz olup S ye **serbest monogenic yarıgrup** denir. Serbest monogenic yarıgrup $(N, +)$ yarıgrubuna izomorfiktir.

m elemanlı L_m sol sıfır yarıgrubunu düşünelim Her $x, y \in L_m$ için $xy = x$ sağlandığından L_m nin en küçük doğuray kümesi kendisidir. Dolayısıyla $rank(L_m) = |L_m| = m$ dir. Şimdi $n \geq 2$ için $Z_n = \{ x_0, x_1, ..., x_{n-1} \}$ sıfır yarıgrubunu düşünelim. Her $x_i, x_j \in Z_n$ için $x_i x_j = x_0$ sağlandığından Z_n in en küçük doğuray kümesi $\{ x_1, ..., x_{n-1} \}$ kümesidir. Dolayısıyla $rank(Z_n) = n - 1$ dir. Daha sonra bir A kümesi üzerindeki SL_A serbest semilatisini ele alalım. Her $a \in A$ için $\bigcup_{i \in I} X_i = \{a\}$ olması demek her $i \in I$ için $X_i = \{a\}$ olmasıdır. SL_A nın her elemanı bazı $\{a\}$ $(a \in A)$ kümelerinin birleşimi olduğundan $\{\{a\} \mid a \in A\}$ kümesi SL_A nın en küçük doğuray kümesidir. Sonuç olarak $rank(SL_A) = |A|$ bulunur.

3.2. Serbest Yarıgruplar

A bir alfabe olsun. A^+ kümesi alfabedeki boş olmayan sonlu kelimelerden oluşur. A^+ üzerindeki ikili işlem yan yana getirme yöntemiyle aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(a_1...a_n).(b_1...b_m) = a_1....a_n b_1...b_m \qquad (\text{her } a_1...a_n.b_1...b_m \in A^+ \text{ için}) \qquad (3.2.1)$$

Bu işlemle A^+ bir yarıgruptur ve A üzerindeki **serbest yarıgrup** olarak adlandırılır. Benzer şekilde ε boş kelime olmak üzere $A^* = A^+ \cup \{ \varepsilon \}$ **serbest monoidi** tanımlanır.

Teorem 3.2.1: A bir alfabe ve S bir yarıgrup olsun. $f: A \to S$ herhangi bir dönüşüm olsun. O zaman her $a \in A$ için $\phi(a) = f(a)$ sağlayan bir $\phi: A^+ \to S$ homomorfizmi vardır ve tektir.

İspat: $\phi: A^+ \to S$ homomorfizmi $w = a_1a_2...a_n \in A^+$ için $\phi(a_1a_2...a_n) = f(a_1)f(a_2)...f(a_n)$ şeklinde tanımlansın.Dikkat edersek her $a \in A$ için $\phi(a) = f(a)$ sağlanır. $g : A^+ \to S$ her $a \in A$ için $g(a) = f(a)$ sağlayan başka bir homomorfizm olsun. Bu durumda her $w = a_1a_2...a_n \in A^+$ için $g(a_1a_2...a_n) = g(a_1)\, g(a_2)...\, g(a_n) = f(a_1)\, f(a_2)...\, f(a_n) = \phi(a_1a_2...a_n)$ sağlanır. $\phi = g$ olduğu görülür. ■

Lemma 3.2.2. Her yarıgrup bir serbest yarıgrubun homomorfik görüntüsüdür.

3.3. Yarıgrup Takdimleri

Yarıgrup takdimindeki en sık karşılaşılan önemli problemler:

(i) verilen bir yarıgrubun bir takdimini bulmak,

(ii) verilen bir takdim tarafından temsil edilen yarıgrubu bulmaktır.

Bu bölümde iki temel problemi çözmek için uygulanan yöntemleri vereceğiz.

A bir alfabe olsun. $R \subseteq A^+ \times A^+$ $(R \subseteq A^* \times A^*)$ olmak üzere $< A \mid R >$ sıralı ikilisine bir **yarıgrup takdimi** denir. A nın bir a elemanına **doğuray sembolü** ve $(u, v) \in R$ elemanına **tanımlayıcı bağıntı** denir ve genelde $u = v$ ile gösterilir. Ayrıca $A = \{ a_1, ..., a_m \}$ ve $R = \{ u_1 = v_1, ..., u_n = v_n \}$ ise $< A \mid R >$ takdimi

$$< a_1, ..., a_m \mid u_1 = v_1, ..., u_n = v_n >$$

şeklinde gösterilir. Bu aşamada önemle belirtelim ki bir takdim sembollerin bir dizisidir. (Ruskuc, 1995; Bölüm 2)

$< A \ / R >$ takdimi ile tanımlı yarıgrup A^+ / ρ **bölüm yarıgrubudur.** ρ A^+ üzerinde R yi içeren en küçük kongruanstır. Daha genel olarak eğer $S \cong A^+ / \rho$ ise S yarıgrubu $< A \ / R >$ takdimi ile tanımlıdır denir. Dolayısıyla S nin elemanları A^+ daki kelimelerin kongruans sınıflarıyla birebir eşlenebilirler. Başka bir ifadeyle A^+daki her kelime S nin bir elemanını temsil eder. Genel olarak bazen karışıklık olsa bile kelimeleri ve temsil ettikleri elemanları denk getirme yolu kullanışlıdır. Bir karışıklık olmaması için eğer $w_1, w_2 \in A^+$ kelimeleri birbirine eş ise $w_1 \equiv w_2$ denir ve S nin aynı elemanını temsil ediyorlarsa $w_1 = w_2$ denir. (veya $(w_1, w_2) \in \rho$ ise). Dolayısıyla örneğin $A = \{ a, b \}$ ve $R = \{ ab = ba\}$ ise $aba = a^2b$ olur fakat aba kelimesi a^2b ye denk değildir.

T herhangi bir yarıgrup ve B T nin bir doğuray kümesi olsun. $\phi: A \to B$ bir örten dönüşüm olsun. Teorem *3.2.1* den ϕ dönüşümü $\overline{\phi} : A^+ \to T$ epimorfizmine tek şekilde genişletilebilir. Her $(u, v) \in R$ için $u\overline{\phi} = v\overline{\phi}$ sağlanıyorsa veya başka bir ifadeyle $R \subseteq ker(\overline{\phi})$ ise T R deki bağıntıları sağlıyor denir. Tanımdan $< A \ / R >$ ile tanımlı S yarıgrubunun R deki bağıntıları sağladığı görülür. ρ nun minimalliğinden S nin R deki bağıntıları sağlayan tüm yarıgruplar içinde maksimal olduğunu elde edebiliriz. Bunun için aşağıdaki önermeyi vereceğiz:

Teorem 3.3.1. $< A \ / R >$ bir yarıgrup takdimi, α R yi içeren en küçük kongruans olsun. $S = A^+ / \alpha$ ve $u_1, u_2 \in A^+$ olsun. $u_1 / \alpha = u_2 / \alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $u_1 = u_2$ nin $< A \ / R >$ takdiminin bir sonucu olmasıdır.

İspat: $\beta = \{(v_1, v_2) \in A^+ \times A^+ \ / \ v_1 = v_2$ $< A \ / R >$ nin bir sonucudur$\}$ kümesini tanımlayalım. $(u_1, u_2) \in \beta$ için eğer $u_1 = u_2$ ise k_{i+1} k_i den R deki bir bağıntı uygulanmasıyla elde edilecek şekilde aşağıdaki formda bir dizi vardır:

$$u_1 = k_1, k_2, \dots, k_n = u_2$$

Burada $k_i = xry$ ve $k_{i+1} = xsy$ ise $k_i / \alpha = (x / \alpha)(r / \alpha)(y / \alpha) = (x / \alpha)(s / \alpha)(y / \alpha) = k_{i+1} / \alpha$ elde edilir. Buradan $u_1 / \alpha = u_2 / \alpha$ ve $\beta \subseteq \alpha$ dır. $R \subseteq \beta$ olduğu görülebilir. α kongruans olduğundan $\alpha \subseteq \beta$ sağlanır. $\alpha = \beta$ elde edilir. ■

Önerme 3.3.1. $< A \ / R >$ bir yarıgrup takdimi ve S bu takdimle tanımlanan yarıgrup olsun. T R deki bağıntıları sağlayan bir yarıgrup ise T S nin doğal homomorfik görüntüsüdür.

İspat: $\delta : A^+ \to S$ her $a \in A$ için $\delta(a) = a$ şeklinde tanımlı bir doğal homomorfizm vardır. $\beta = (R^{\#})^* : A^+ \to A^+ / R^{\#}$ alalım. S, R deki ilişkileri sağlar ve dolayısıyla her $(r, s) \in R$ için $\delta(r) = \delta(s)$ sağlanır. O halde $R \subseteq ker(\delta)$ elde edilir. $ker(\delta)$ bir kongrüans olduğundan $R^{\#} \subseteq ker(\delta)$ bulunur. ■

$w_1, w_2 \in A^+$ iki kelime olsun. Eğer $w_1 \equiv \alpha u \beta$ ve $w_2 \equiv \alpha v \beta$ olacak şekilde α, $\beta \in A^*$ ve $(u, v) \in R$ varsa w_2 w_1 den **R den bir bağıntı uygulanmasıyla** elde edilmiştir denir. Eğer w_1 den w_2 ye her α_{i+1} α_i den R deki bir bağıntı yardımıyla elde edilecek şekilde aşağıdaki formda bir dizi varsa

$$w_1 \equiv \alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \ \alpha_{k-1}, \ \alpha_k \equiv w_2$$

w_2 w_1 **den elde edilmiştir** denir. Başka bir ifadeyle $w_1 = w_2$ R nin bir sonucudur denir.

Önerme 3.3.2. $< A \ / R >$ bir yarıgrup takdimi olsun ve S yarıgrubu $< A \ / R >$ takdimi ile tanımlansın. $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. S de $w_1 = w_2$ sağlanması için gerek ve yeter koşul w_2 nin w_1 den elde edilmiş olmasıdır.

Aşağıdaki önerme daha güçlü bir sonuç vermektedir.

Önerme 3.3.3. S yarıgrubu bir A kümesi tarafından doğurulsun ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. O zaman $< A \ / R >$ nin S için bir takdim olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:

i-) S R deki bütün bağıntıları sağlar ve *ii-)* Eğer $u, v \in A^+$ için $u = v$ bağıntısı S de sağlanıyorsa, o zaman $u = v$ R deki bağıntıların bir sonucudur.

İspat: $\Rightarrow$ Eğer $<A \;/\; R>$ S için bir takdim ise S R deki bütün bağıntıları sağlar. *(ii)* ise Önerme 3.3.2 den çıkar.

$\Leftarrow$ $\phi : A^+ \to S$ epimorfizmi $id : A \to A$ birim dönüşümünün genişlemesi olsun. ve α A^+ üzerinde R yi içeren en küçük kongruans olsun. S R deki tüm bağıntıları sağladığından $R \subseteq ker\phi$ ve dolayısıyla $\alpha \subseteq ker\phi$ elde edilir. Diğer yandan $(u, v) \in ker\phi$ ise S $u = v$ bağıntısını sağlar. O halde $u = v$ R deki bağıntıların bir sonucudur. Önerme 3.3.2 den $(u, v) \in \alpha$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha = ker\phi$ olup $S \cong A^+ / ker\phi = A^+ / \alpha$ yarıgrubu $<A \;/\; R>$ takdimi ile tanımlanır. ■

Şimdi bazı yarıgrup takdimlerine ve bu takdimler tarafından tanımlanan yarıgruplara örnekler vereceğiz.

Örnek 3.3.1. A^+ üzerinde boş kümeyi içeren en küçük kongruans $\{ (w, w) \;/\; w \in A^+\}$ köşegen bağıntısıdır. Dolayısıyla $< A \;/\; >$ takdimi ile tanımlı yarıgrup A^+ serbest yarıgrubudur.

Örnek 3.3.2. $< a \;/\; a^2 = a >$ takdimi aşikar yarıgrubu tanımlar. Buna karşılık gelen kongruans $\{ a \}^+$ üzerindeki tam kongruanstır.

Örnek 3.3.3. $<a \;/\; a^{n+1} = a >$ takdimi n elemanlı devirli grubun yarıgrup takdimidir. Açıkça görülür ki her a^k kelimesi $a^{n+1} = a$ bağıntısı yardımıyla $\{ a, a^2, \ldots , a^n \}$ kümesinde bir kelimeye dönüştürülebilir ve dolayısıyla $< a \;/\; a^{n+1} = a >$ takdimine sahip S yarıgrubu en fazla n elemana sahiptir. Diğer yandan modülo n ye göre a nın üssünün $a^{n+1} = a$ bağıntısına göre değişmez olduğunu hatırlarsak Önerme *3.3.4* ten a, $a^2, \ldots , a^n$ S nin farklı elemanlarını temsil eder ve dolayısıyla S n elemanlı devirli gruptur. Daha genel olarak $< a \;/\; a^{n+r} = a^r >$ takdimi $n + r - 1$ elemanlı ve n periyotlu monogenic yarıgrubu tanımlar.

Örnek 3.3.4. T bir yarıgrup olsun. $A = \{ a_t \mid t \in T \}$ bir alfabe ve $x, y \in T$ olmak üzere R bağıntılar kümesi $a_x a_y = a_{xy}$ formundaki bağıntılardan oluşsun. S yarıgrubu $< A \mid R >$ takdimi ile tanımlansın. Bağıntılardaki seçimimizden T yarıgrubu R deki bağıntıları sağlar ve Önerme *1.2.1* den bir $\phi: S \to T$, $a_t \to t$ şeklinde tanımlı doğal epimorfizmi vardır. $w_1, w_2 \in A^+$ ve $\phi(w_1) = \phi(w_2)$ olsun. $w_1 = a_x$ ve $w_2 = a_y$ S de sağlanacak şekilde $x, y \in T$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\phi(a_x) = \phi(a_y)$ yani $x = y$ sağlanır. O halde $a_x = a_y$ olur. Buradan ϕ bir izomorfizmdir ve $T < A \mid R >$ takdimi ile tanımlanır.

Şimdi vereceğimiz örnekte Önerme *3.3.4* yardımıyla sonlu bir A kümesi üzerindeki SL_A serbest semilatisi için bir takdim bulacağız:

Örnek 3.3.5. $\wp = < a_1, a_2, \ldots , a_n \mid a_i^2 = a_i \ (1 \le i \le n),\ a_j a_i = a_i a_j \ (1 \le i < j \le n) >$ takdimi $A = \{ a_1, a_2, \ldots , a_n \}$ kümesi üzerindeki SL_A serbest semilatisini tanımlar.

İspat: Bu bölümün başında bahsettiğimiz gibi A kümesi SL_A için bir doğuray kümesidir. Ek olarak, SL_A idempotentlerden oluşan değişmeli yarıgrup olduğundan $\wp$ deki bağıntıları sağlar.

$W = \{ a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n} \in A^+ \mid \varepsilon_i \in \{0,1\} \ (1 \le i \le n) \}$ olsun. $w \in A^+$ olsun. Öncelikle $a_j a_i = a_i a_j$ bağıntıları uygun şekilde uygulanırsa $\lambda_i \ge 0$ olacak şekilde $a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ $(1 \le i \le n)$ formunda w\` kelimesi elde edilir. Daha sonra $a_i^2 = a_i$ bağıntıları mümkün olduğunca çok sayıda uygulanırsa bir $\overline{w} \in W$ kelimesi elde edilir.

$|W| = 2^n - 1$ olduğundan Önerme *3.3.4* den $\wp$ takdimi SL_A serbest semilatisini tanımlar. ■

3.4. Monoid Takdimi

$\varepsilon^2 = \varepsilon$ ve her $w \in A^+$ için üzerinde $w\varepsilon = \varepsilon w = w$ çarpması tanımlanan $A^+ \cup \{\varepsilon\}$ kümesine A^* denir. A bir alfabe, $R \subseteq A^* \times A^*$ ın bir alt kümesi olmak üzere bir $< A / R >$ ikilisine bir **monoid takdimi** denir.

M bir monoid ve $< A / R > M$ nin bir monoid takdimi olsun. O zaman $e \notin A$ için

$$< A, e \ / \ \overline{R}, e^2 = e, ae = a, ea = a \ (a \in A) >$$

M nin bir **yarıgrup takdimidir**. Burada $\overline{R}$ R den $r = 1$ ya da $1 = s$ şeklindeki ilişkinin $r = e$ ya da $e = s$ ile değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

Bir $\langle A / R \rangle$ yarıgrup takdimini monoid takdimi olarak düşünebiliriz. Eğer $\langle A / R \rangle S$ yarıgrubunu tanımlıyorsa monoid takdimi olarak düşünüldüğünde $S^1 = S \cup \{ 1 \}$ monoidini tanımlar. Eğer S bir birim elemana sahipse bu eleman $S \cup \{ 1 \}$ in birim elemanı olamaz.

3.5 Grup Takdimi

A bir alfabe, $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ A ile birebir eşlenen bir alfabe olsun. $R \subseteq (A \cup A^{-1})^* \times (A \cup A^{-1})^*$ olmak üzere $\langle A / R \rangle$ ikilisine bir grup takdimi denir. G bir grup, $\langle A / R \rangle$ de G nin bir grup takdim olsun. O zaman

$$\langle A, A^{-1} / R, aa^{-1} = 1, a^{-1}a = 1 \ (a \in A) \rangle$$

G nin monoid takdimidir. R deki ilişkileri sağlayan ve A tarafından doğurulan her grup $< A / R \rangle$ takdimi tarafından tanımlanan grubun bir homomorfik görüntüsüdür. $< A / R \rangle$ takdimi tarafından tanımlanan $F(A) / N$ **bölüm grubudur**. Burada $F(A)$ A üzerindeki **serbest gruptur** ve $N \{ rs^{-1} / (r, s) \in R \}$ yi içeren en küçük normal alt gruptur. Eğer $\alpha \{ (aa^{-1}, \varepsilon), (a^{-1}a, \varepsilon) / a \in A \}$ kümesini içeren en küçük kongruans ise $F(A)$ ile $A \cup A^{-1} / \alpha$ birbirine izomorfiktirler.

A üzerindeki $F(A)$ serbest grubu aşağıdaki monoid takdimi ile tanımlanabilir:

$$\langle A \cup A^{-1} \,/\, aa^{-1} = \varepsilon,\ a^{-1}a = \varepsilon\ (a \in A) \rangle$$

Ek olarak $< A \,/\, R \rangle$ takdimi ile tanımlı grup aşağıdaki monoid takdimi ile tanımlanabilir:

$$\langle A \cup A^{-1} / R \cup \{aa^{-1} = \varepsilon,\ a^{-1}a = \varepsilon \,/\, a \in A\} \rangle$$

Teorem 3.5.1. G grubu bir $< A \,/\, R \rangle$ takdimi ile tanımlansın. $F(A)$ A üzerindeki serbest grup ve $N\,\{(r / \alpha)(s / \alpha)^{-1} \,/\, (r = s) \in R\}$ kümesinin normal kapanışı olsun. O zaman $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1}$ olup G grubu $F(A) \,/\, N$ bölüm grubuna izomorfiktir.

Tanım 3.5.1. $< A \,/\, R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $< A \,/\, R \rangle$ takdimi ile tanımlı yarıgrup S ve $< A \,/\, R \rangle$ takdimi ile tanımlı grup G olsun. Eğer S nin grup olan bir K ideali var ve $K \cong G$ ise K ya S nin **grup kerneli** denir.

Sonuç 3.5.1. $< A \,/\, R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $< A \,/\, R \rangle$ takdimi ile tanımlı yarıgrup S ve $< A \,/\, R \rangle$ takdimi ile tanımlı grup G olsun. Eğer S bir grup ise $S \cong G$ sağlanır.

İspat: S bir grup ise $Se = S$ olup Se S nin grup kernelidir. ■

3.6. Yarıgrup Takdimi Bulmak İçin Genel Metodlar

Bir S yarıgrubu için takdim bulurken üç farklı yöntem uygulanabilir:

i) Direkt Yöntem (Tahmin ve İspat)
ii) Tietze Dönüşümleri uygulama
iii) Yarıgrubun yapısına göre takdim bulma
En çok direkt yöntem kullanılır. Bu yöntemi şöyle özetleyebiliriz:

i) S nin bir X doğuray kümesini bulmak,

ii) X deki doğuraylar tarafından sağlanan ve S yi tanımlamaya yarayan bir R bağıntılar kümesi bulmak,

iii) R deki bağıntılar yardımıyla X^+ daki her kelime W daki bir kelimeye karşılık gelecek şekilde bir $W \subseteq X^+$ kümesi bulmak.

iv) W daki farklı kelimelerin S deki farklı kelimeleri temsil ettiğini göstermek.

Son iki koşulu sağlayan W kümesine S için **kanonik (normal) formların kümesi** denir.

Önerme 3.3.3 ve Önerme 3.3.4 te bir $\langle A \mid R \rangle$ takdiminin bir S yarıgrubunu tanımlaması için gerek ve yeter koşulu vermiştik. Şimdi aşağıdaki Önermede bir $\langle A \mid R \rangle$ takdiminin bir S yarıgrubunu tanımlaması için daha farklı bir yaklaşım tanımlayacağız:

Önerme 3.6.1. S bir yarıgrup, A S nin bir doğuray kümesi ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. $W \subseteq A^+$ olsun. Eğer

(i) S R deki tüm bağıntıları sağlıyor;

(ii) $\forall w \in A^+$ için $w = \overline{w}$ R nin bir sonucu olacak şekilde bir $\overline{w} \in W$ varsa; ve

(iii) $u, v \in W$ için eğer u v ye denk değilse $u = v$ S de sağlanmaz ise

$\langle A \mid R \rangle$ S nin bir takdimidir.

İspat: $w_1, w_2 \in A^+$ ve $w_1 = w_2$ S de sağlansın. *(ii)* den dolayı öyle $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in W$ vardır ki $w_1 = \overline{w_1}$ ve $w_2 = \overline{w_2}$ R nin bir sonucudur. $w_1 = w_2$ olduğundan $\overline{w_1} = \overline{w_2}$ olur ki *(iii)* $\overline{w_1} \equiv \overline{w_2}$ olmasını gerektirir. O halde $w_1 = w_2$ R nin bir sonucudur. ■

Önerme 3.6.2. S yarıgrubu bir A kümesi tarafından doğurulsun. $R \subseteq A^+ \times A^+$ ve $W \subseteq A^+$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\langle A \mid R \rangle$ S nin bir takdimidir:

a-) S R deki bütün bağıntıları sağlar;

b-) Her $w \in A^+$ için $w = \overline{w}$ R nin sonucu olacak şekilde bir $\overline{w} \in W$ vardır;

c-) $|W| \leq |S|$.

İspat: *a-), b-)* ve *c-)* nin Önerme 3.6.1 deki *(i), (ii)* ve *(iii)* no'lu koşulları gerektirdiğini göstereceğiz. *a-)* ve *b-)* sırasıyla *(i)* ve *(ii)* ye denk olduğundan *c-)* yi *(i), (ii)* ve *(iii)* ün gerektirdiğini göstereceğiz. A R deki bağıntıları sağladığından *b-)* den dolayı S nin her elemanı W dan gelen bir elemanla temsil edilebilir. Dolayısıyla $|W| \geq |S|$ bulunur. Bu durumda *c-)* den $|W| = |S|$ elde edilir. Bu ise S sonlu olduğundan W nun farklı elemanlarının S nin farklı elemanlarını temsil ettiğini gösterir. ■

S yarıgrubu için bir takdim bulmada kullanılan başka bir yöntem **Tietze dönüşümleri** uygulamaktır. Neumann bu yöntemi (Neumann, 1967) de sol sıfır yarıgruplara takdim bulmada kullanmıştı.

Tietze dönüşümlerini uygulayabilmemiz için öncelikle bir S yarıgrubunu tanımlayan bir $\wp = < A \ / R >$ takdimine ihtiyacımız vardır. Tietze dönüşümleri yardımıyla bir yarıgrubu tanımlayan başka tipte bir takdim belirlemek mümkün olabilir. 4 temel tipte dönüşüm vardır ve elemanter Tietze dönüşümleri olarak adlandırılır:

(T1) Eğer $b \notin A$ ve $w \in A^+$ ise $< A \ / R >$ takdimi $< A \cup \{b\} \ / R \cup \{(w = b)\} >$ takdimine dönüşür. **(yeni bir doğuray ekleme)**

(T2) Eğer $b \in A$ ve $w \in (A \setminus \{b\})^+$ olmak üzere $w = b \in R$ ise $< A \ / R >$ takdimi $< A \setminus \{b\} \ / \overline{R} >$ takdimine dönüşür. **(doğuray çıkarma)**

(T3) Eğer $r = s$ bağıntısı $< A \ / R >$ takdimi ile tanımlı yarıgrupta sağlanıyorsa $< A \ / R >$ takdimi $< A \ / R \cup \{(r = s)\} >$ takdimine dönüşür. **(yeni bir bağıntı ekleme)**

(T4) Eğer $r = s$ bağıntısı $< A \ / R >$ takdimi ile tanımlı yarıgrupta sağlanıyorsa $< A \ / R \cup \{(r=s)\} >$ takdimi $< A \ / R >$ takdimine dönüşür. **(bağıntı çıkarma)**

Burada $\overline{R}$ $R \setminus \{ (w = b)$ den b görülen her yere w konularak elde edilmiştir. (Ayık, 1998; Bölüm 1.4)

Bu dönüşümler grup teorisindeki Tietze dönüşümleri ile benzerlik gösterir.

Teorem 3.6.1. İki sonlu $< A \;/\; R >$ ve $< B \;/\; Q >$ yarıgrup takdiminin izomorfik yarıgrupları tanımlaması için gerek ve yeter koşul birinin diğerinden sonlu sayıda Tietze dönüşümleri uygulanmasıyla elde edilmiş olmasıdır.

İspat: $\Leftarrow$ Tietze dönüşümlerinin tanımları gereği yarıgruplar izomorfiktir.

$\Rightarrow < A \;/\; R > \cong < B \;/\; Q >$ olsun. $< A \;/\; R >$ den $< B \;/\; Q >$ yu elde edelim.

(i) $< A \;/\; R >$ yarıgrubu tanımladığından B nin elemanları A nın elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazılabilir. $B = B(A)$ ile gösterelim.

(ii) *(T1)* i uygularsak $< A,\ B \;/\; R,\ B = B(A) >$ takdimi elde edilir. B de A yı doğuracağından B nin elemanları bir çarpım şeklinde $A = A(B)$ yazılabilir.

(iii) *(T3)* ü uygularsak $< A,\ B \;/\; R,\ B = B(A),\ A = A(B) >$ takdimi elde edilir. $R(A(B))$ ile R nin bağıntılarındaki a lar yerine B^+ daki a ları temsil eden kelimelerle değiştirilmesiyle elde edilen bağıntılar kümesini gösterelim.

(iv) *(T3)* ü uygularsak $< A,\ B \;/\; R,\ B = B(A),\ A = A(B),\ R(A(B)) >$ takdimi elde edilir. $A = A(B),\ R(A(B))$ bağıntılarından dolayı R gereksizdir.

(v) *(T4)* ü uygularsak $< A,\ B \;/\; B = B(A),\ A = A(B),\ R(A(B)) >$ takdimi elde edilir. A lar gereksiz olduğundan

(vi) *(T2)* yi uygularsak $< B \;/\; B = B(A(B)),\ R(A(B)) >$ takdimi elde edilir. Q daki bağıntılar sağlandığından

(vii) *(T3)* uygulanırsa $< B \;/\; B = B(A(B)),\ R(A(B)),\ Q >$ takdimi elde edilir.

(viii) En son *(T4)* uygulanırsa $< B \;/\; Q >$ takdimi elde edilir. ■

4. YARIGRUPLARDA ETKİNLİK

4.1. Yarıgruplarda ve Monoidlerde etkinlik problemi

$\wp = \langle A \ / \ R \rangle$ sonlu bir yarıgrup (monoid veya grup) takdimi olsun. $\wp$ nin deficiencysi $|R|-|A|$ ile tanımlanır ve *def*($\wp$) ile gösterilir. Sonlu takdimli bir S yarıgrubunun yarıgrup deficiencysi $def_S(S)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$def_S(S) = \min \{ \, def(\wp) \ / \ \wp \ S \text{ için sonlu bir yarıgrup takdimi} \}.$$

Sonlu takdime sahip bir M monoidinin monoid deficiencysi ise şöyle tanımlanır:

$$def_M(M) = \min \{ \, def(\wp) \ / \ \wp \ M \text{ için sonlu bir monoid takdimi} \}.$$

Sonlu takdime sahip bir G grubunun grup deficiencysi benzer şekilde şöyle tanımlanır:

$$def_G(G) = \min \{ \, def(\wp) \ / \ \wp \ G \text{ için sonlu bir grup takdimi} \}.$$

Dolayısıyla sonlu takdimli bir G grubu için *3* deficiency vardır. Bunlar $def_G(G)$, $def_M(G)$ ve $def_S(G)$ dir. Sonlu takdimli bir M monoidinin *2* deficiencysi vardır. Bunlar ise $def_M(M)$ ve $def_S(M)$ dir. (Ayık, 1998; Bölüm 1.7)

$\wp$ sonlu takdimli bir S yarıgrubu için sonlu bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer $def(\wp) = def_S(S)$ ise $\wp$ bir minimal yarıgrup takdimidir denir. Benzer şekilde bir monoid için minimal monoid takdimi ve bir grup için minimal grup takdimi tanımlanır.

Eğer $\langle A \ / \ R \rangle$ grup takdimi sonlu bir G grubunu tanımlıyorsa $|R|-|A| \geq 0$ olduğu bilinmektedir. (bkz. Macdonald, 1968). Ek olarak eğer $\langle A \ / \ R \rangle$ sonlu bir S

yarıgrubunu tanımlıyorsa takdimle tanımlı G grubu (grup takdimi olarak) S nin homomorfik görüntüsü olduğundan G sonludur ve $|R|-|A| \geq 0$ dır.

Schur'un (Schur, 1907) deki çalışmasından sonra $< A \ / \ R >$ grup takdimi sonlu bir G grubunu tanımlıyorsa

$$|R|-|A| \geq rank(H_2(G)) \tag{4.1.1}$$

olduğu bilinmektedir. (bkz. Rotman, Sonuç *10.17*)

Eğer (sonlu) bir G grubu $|R|-|A| = rank(H_2(G))$ olacak şekilde bir grup takdimine sahipse etkindir denir. Sahip değilse etkin değildir denir. G grubunun $|R|-|A| = rank(H_2(G))$ olacak şekilde bir $< A \ / \ R >$ takdimi varsa bu takdime etkin grup takdimi denir. Birçok grup ailelerinin etkin gruplar olduğu bilinmektedir. (bkz. Baik and Pride, 1997; Beetham, 1971; Campbell and Robertson, 1980; Campbell ve diğerleri, 1990.). Etkin olmayan gruplara ilk örnekler Swan tarafından (Swan, 1965) te verildi. Etkin olmayan gruplara verilen çeşitli örnekler (Jamali, 1996; Kovacs, 1995; Robertson ve diğerleri, 1995) de bulunabilir.

Yakın zamanda Steve Pride sonlu bir $< A \ / \ R >$ monoid takdimi için (M sonlu monoid)

$$|R|-|A| \geq rank(H_2(M)) \tag{4.1.2}$$

olduğunu gösterdi.

Bir S yarıgrubu için sonlu bir yarıgrup takdimi S^1 monoidi için monoid takdimi olacağından $< A \ / \ R >$ sonlu S yarıgrubunun sonlu bir takdimi ise

$$|R|-|A| \geq rank(H_2(S^1)) \tag{4.1.3}$$

olur.

Eğer S yarıgrubu (monoidi) $|R|-|A| = rank(H_2(S^1))$ olacak şekilde bir $<A \ / \ R>$ yarıgrup (monoid) takdimine S yarıgrubu (monoidi) etkindir denir. Sahip değilse etkin değildir denir. S yarıgrubunun (monoidinin) $|R|-|A| = rank(H_2(S^1))$ sağlayan bir $<A \ / \ R>$ takdimi varsa bu takdime etkin yarıgrup (monoid) takdimi denir.

Dolayısıyla bir grubun etkinliği için *3* farklı düşünce ve monoid için *2* farklı düşünce vardır.

Dikkat edelim ki bir S yarıgrubu (monoid veya grup) etkin ise bir yarıgrup (monoid veya grup) takdiminin S için etkin takdim olması için gerek ve yeter koşul bu takdimin S için minimal takdim olmasıdır.

Teorem 4.1.1. S yarıgrubu sağ veya sol sıfır elemana sahip olsun. O zaman $n \geq 1$ için S nin n inci homolojisi aşikar gruptur.

İspat: (Ayık, 1998; Teorem 6.1) e bakınız.

Şimdi sonlu bir A kümesi üzerindeki SL_A serbest semilatisinin etkin olmadığını aşağıdaki Teoremde göstereceğiz. SL_A A nın boş olmayan bütün alt kümelerinden oluşur ve üzerinde tanımlı ikili işlem kümelerin birleşimi $(\cup)$ işlemidir.

Teorem 4.1.2. A n elemanlı boş olmayan sonlu bir küme olsun. O zaman $def_S(SL_A) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ dir. Özel olarak, $n \geq 2$ için SL_A etkin değildir.

İspat: $\wp = <X \ / \ R> SL_A$ için bir takdim olsun. R de $(w = w)$ $(w \in X^+)$ ve $w=x$ $(x \in X,\ w \in (X \setminus \{x\})^+)$ formunda bağıntılar olmadığını varsayalım.

Her $a \in A$ için

$$X_a = \{ x \in X \ / \ x \ \{a\} \text{ yı temsil etsin} \}$$

kümesini tanımlayalım. $\{a\}$ SL_A nın her doğuray kümesine aittir, dolayısıyla $X_a \neq \emptyset$.

$$R_1 = ((X \times X^+) \cup (X^+ \times X)) \cap R = \{ (u = v) \in R \ / \ u \in X \text{ veya } v \in X \}$$

kümesini tanımlayalım. Her $x \in X$ için $x^2 = x$ bağıntısı SL_A da sağlanır. Dolayısıyla R de $w \in X^+$ olmak üzere bir $w = x$ bağıntısı vardır. $\wp$ nin ve $|A|$ nın minimalliğinden $|w| \geq 2$ olduğuna dikkat edelim. O halde

$$|R_1| \geq |X| \qquad (4.1.4)$$

elde edilir.

Ayrıca dikkat edersek eğer $w_1 = w_2$ bağıntısı SL_A da sağlanıyorsa ve $w_1 \in X_a^+$ ise $w_2 \in X_a^+$ olur. Şimdi $a, b \in A$ $(a \neq b)$ ve $x \in X_a$, $y \in X_b$ elemanları keyfi seçilsin. $xy = yx$ bağıntısı SL_A da sağlandığından R deki bağıntıların bir sonucudur. xy ye R_1 den bağıntılar uygulandığında geriye hep $X_a^+ X_b^+$ dan gelen kelimeler kalır, fakat yx bu formda değildir. Sonuç olarak bir $(u = v) \in R \setminus R_1$ bağıntısı vardır öyle ki u ve v SL_A nın $\{ a, b \}$ elemanını temsil eder. Dolayısıyla

$$|R/R_1| \geq \frac{n(n-1)}{2} \qquad (4.1.5)$$

elde edilir.

$(4.1.4)$ ve $(4.1.5)$ i birleştirirsek,

$$|R| - |X| = |R_1| + |R/R_1| - |X| \geq \frac{n(n-1)}{2} \qquad (4.1.6)$$

elde edilir.

Eğer $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ ise aşağıdaki takdimin SL_A yı tanımladığını Örnek *3.3.5* de göstermiştik:

$$< a_1, a_2, \ldots, a_n \ / \ a_i^2 = a_i \quad (1 \leq i \leq n),\ a_j a_k = a_k a_j \quad (1 \leq j < k \leq n) >.$$

Bu takdimin deficiencysi $\frac{n(n-1)}{2}$ dir. Buradan $def_S(SL_A)$ = $\frac{n(n-1)}{2}$ sonucu elde edilir.

$A \in SL_A$ sıfır elemanı olduğundan Teorem *4.1.1* den SL_A nın ikinci integral homolojisinin aşikar grup olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $|A| = n \geq 2$ için SL_A etkin değildir.

Dikkat edelim ki $A = \{a\}$ ise $SL_A \cong < a \ / \ a^2 = a >$ olur. Dolayısıyla $|A| = 1$ ise SL_A etkindir. ■

Teorem *3.7.1* den sıfır yarıgruplarının ikinci homolojisinin aşikar olduğunu söyleyebiliriz. Aşağıdaki teorem sonlu sıfır yarıgruplarının etkin olmadığını gösterir:

Teorem 4.1.3. Z_n yarıgrubu $n \geq 2$ olmak üzere n elemanlı sıfır yarıgrubu olsun. O zaman $def_S(Z_n) = (n-1).(n-2)$ olur. $n \geq 3$ için Z_n etkin değildir.
İspat: Teoremin ispatı (Ayık,1998; Teorem 6.3) de verilmiştir.

4.2. Yarıgruplarda Gömme Problemi

Sayısal gruplar teorisinde bir grubu etkin olmayan bir gruba gömme problemi oldukça zordur. (Kovacs, 1995; Swan, 1965). Fakat, sayısal yarıgrup teorisinde bir yarıgrubu etkin olmayan yarıgruba gömmek daha kolaydır. Sayısal grup teorisinde sonlu takdimli bir G grubu etkin bir gruba gömülebilir. Başka bir ifadeyle p herhangi bir asal sayı olmak üzere G nin Z_p devirli grubunun bazı kopyalarıyla direkt çarpımı denilebilir. (Ayık ve diğerleri, 2000e; Teorem *4.1*). Sayısal yarıgrup teorisinde yarıgrup veya monoidlerin direkt çarpımlarının ikinci integral homoloji grubunun bulunmasıyla ilgili hiçbir formül yoktur.

Bölüm 4.5 te herhangi bir yarıgrubu etkin olmayan bir yarıgruba gömme problemine açıklık getireceğiz.

4.3. CL_n nin Etkinliği

Yarıgrupların etkinliği ilk defa (Ayık ve diğerleri, 2000a) da incelendi. Daha sonra bu konuda birçok makale yayınlandı. Sıfır elemana sahip (sağ veya sol) yarıgrupların ikinci integral homolojisinin aşikar grup olduğu bilinmektedir. (Ayık ve diğerleri, 2000a). Bu makalede n elemanlı Z_n sıfır yarıgrubunun deficiencysinin $(n-1).(n-2)$ olduğu ve 2^n-1 elemanlı SL_n serbest semilatisinin deficiencysinin $\dfrac{n(n-1)}{2}$ olduğu gösterilmişti. O halde $n \geq 3$ için Z_n ve SL_n sıfır elemanlı yarıgruplardır ve etkin değildirler. Ayrıca Teorem *4.1.2* ve Teorem *4.1.3* te bu yarıgrupların etkin olmadıklarını göstermiştik. Sıfır elemanlı değişmeli bütün yarıgrupların etkin olup olmadığı sorusu akla gelebilir. İlk önce sıfır elemanlı değişmeli bir yarıgrup olan n elemanlı zincirin (CL_n) etkin olduğunu göstereceğiz.

$X_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ $(1 \leq k \leq n)$ ve $CL_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ kümeleri tanımlansın. CL_n üzerinde ikili işlem olarak kümelerin birleşimi $(\cup)$ işlemi tanımlansın. CL_n bu işlemle idempotentlerden oluşan değişmeli bir yarıgrup olur. Bu yarıgrubun sıfır elemanı X_n dir. CL_n n elemanlı zincir olarak adlandırılır.

Bu bölümde öncelikle CL_n yi tanımlayan etkin bir takdim vereceğiz. Dolayısıyla CL_n etkin bir yarıgruptur diyebileceğiz.

Teorem 4.3.1. $\wp_n = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \,\middle|\, a_1^2 = a_1,\ a_i a_{i+1}^2 a_i = a_{i+1}\ (1 \leq i \leq n-1) \right\rangle$ takdimi n elemanlı zinciri (CL_n) tanımlar. Dolayısıyla, $n \geq 1$ için CL_n yarıgrubu etkindir.

İspat: H_n $\wp_n$ takdimi ile tanımlı yarıgrup olsun. ϕ homomorfizmi H_n den CL_n ye aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\phi : H_n \to CL_n$$
$$\phi(a_i) = X_i \tag{4.3.1}$$

ϕ nin örten olduğu açıktır ve dolayısıyla CL_n yarıgrubu H_n yarıgrubunun homomorfik görüntüsüdür. Şimdi H_n in derecesinin n olduğunu gösterelim. $a_1 a_2^2 a_1 = a_2$ ve

$a_1^2=a_1$ bağıntılarından $a_1a_2=a_1(a_1a_2^2a_1)=$ $a_1a_2^2a_1=a_2$ ve $a_2a_1=(a_1a_2^2a_1)a_1=$ $a_1a_2^2a_1=a_2$ bağıntıları elde edilir. Buradan $a_2^2=(a_1a_2)(a_2a_1)=a_2$ bağıntısı elde edilir. Eğer tümevarımla devam edersek aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$a_ia_{i+1}=a_{i+1},\ a_{i+1}a_i=a_{i+1} \text{ ve } a_{i+1}^2=a_{i+1} \quad (1 \le i \le n-1) \tag{4.3.2}$$

Şimdi $1 \le i \prec j \le n$ için $a_ia_j=a_j$ ve $a_ja_i=a_j$ olduğunu gösterelim. Bunun için j-i üzerinde tümevarım uygulayacağız. j-$i=1$ için sağlandığını göstermiştik. j-$i=k$ için $a_ia_{i+k}=a_{i+k}$ sağlandığını varsayalım. Şimdi j-$i=k+1$ için $a_ia_{i+k+1}=a_{i+k+1}$ olduğunu gösterelim:

$a_{i+k}a_{(i+k)+1}=a_{i+k+1}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$a_ia_j \equiv a_ia_{i+k+1} = a_i(a_{i+k}a_{i+k+1}) \equiv (a_ia_{i+k})a_{i+k+1} = a_{i+k}a_{i+k+1} = a_{i+k+1} \equiv a_j$$

elde edilir. Benzer şekilde $a_ja_i=a_j$ $(1 \le i \prec j \le n)$ bağıntısı da elde edilir.

Dolayısıyla $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ olmak üzere her $w \in A^+$ için bir $a_i \in A$ doğurayı vardır öyle ki $w=a_i$ bağıntısı $\wp_n$ ile tanımlı H_n yarıgrubunda sağlanır. Dolayısıyla $\wp_n$ takdimi CL_n yarıgrubunu tanımlar. (bkz. Önerme 3.3.4)

$\wp_n$ takdiminin deficiencysi 0 olduğundan CL_n zinciri etkindir. ■

Dikkat edersek m elemanlı sonlu bir CL_m zincirini $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki ikili işlemle tanımlı yarıgrup olarak düşünebiliriz:

$$a_ia_j = a_{max\{i,j\}} \tag{4.3.3}$$

4.4. $CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ yarıgrubunun takdimi ve etkinlik durumu

Daha önce (Ayık ve diğerleri, 2000a) da sonlu sol sıfır yarıgrubu ile sonlu sağ sıfır yarıgrubunun direkt çarpımının (sonlu bir karesel band) etkin olduğu gösterilmişti. Şimdi bunun genel olarak doğru olmadığını göstereceğiz. Bunun için

$CL_m = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ ve $CL_n = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ zincirlerinin direkt çarpımı olan $CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ yarıgrubunu düşüneceğiz. Öncelikle $CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ üzerindeki ikili işlem; $(a_i, b_j).(a_k, b_l) \in CL_m \times CL_n$ ise

$$(a_i, b_j).(a_k, b_l) = (a_{max\{i,k\}}, b_{max\{j,l\}}) \tag{4.4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi aşağıdaki Lemmada $CL_m \times CL_n$ için minimum doğuray kümesini belirleyeceğiz:

Lemma 4.4.1. $A = \{(a_i, b_1), (a_1, b_j) | 1 \le i \le m, 2 \le j \le n\}$ kümesi $CL_{m,n}$ için minimum doğuray kümesidir.

İspat: Bunun için A nın $CL_{m,n}$ için bir doğuray kümesi olduğunu ve $CL_{m,n}$ in her doğuray kümesinin A yı içerdiğini göstereceğiz. Her $(a_i, b_j) \in CL_{m,n}$ için $(a_i b_j) = (a_i, b_1).(a_1, b_j)$ olduğundan A $CL_{m,n}$ in bir doğuray kümesidir.

$(a_k, b_l).(a_p, b_q) = (a_i, b_1)$ eşitliğinden $l=q=1$ ve $max\{k, p\}=i$ olduğu elde edilir. Ayrıca $(a_k, b_l).(a_p, b_q) = (a_1, b_j)$ eşitliğinden $k = p = 1$ ve $max\{l, q\}=j$ elde edilir.

O halde $A = \{(a_i, b_1), (a_1, b_j) | 1 \le i \le m, 2 \le j \le n\}$ kümesi $CL_{m,n}$ nin her doğuray kümesi tarafından içerilmelidir. A kümesi $CL_{m,n}$ nin minimum doğuray kümesidir. ■

Sonlu doğuraylı bir yarıgrubun rankı S nin minimum doğuray kümesinin kardinalitesi idi. O halde Lemma 4.4.1 den $rank(CL_{m,n}) = m + n - 1$ bulunur. Şimdi Teorem 4.4.1 de $CL_{m,n}$ yi tanımlayan bir takdim belirleyeceğiz:

Teorem 4.4.1.

$$\wp_{m,n} = \left\langle x_1, x_2, ..., x_m, y_1, ..., y_n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2 = x_1,\ x_1 x_i^2 x_1 = x_i\ (2 \le i \le m),\ y_1 y_j^2 y_1 = y_j\ (2 \le j \le n), \\ x_1 = y_1,\ x_i y_j = y_j x_i\ (2 \le i \le n, 2 \le j \le m) \end{array} \right\rangle$$

yarıgrup takdimi $CL_{m,n}$ yarıgrubunu tanımlar.

İspat: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ olsun. ϕ homomorfizmi X^+ dan $CL_{m,n}$ ye aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\phi : X^+ \to CL_m \times CL_n$$

$$x_i \to (a_i, b_1),\ y_j \to (a_1, b_j)\ (1 \leq i \leq m,\ 2 \leq j \leq n).$$

$\phi(X)=A$ olduğundan Lemma 4.4.1 den ϕ örtendir.

Ayrıca

$$\phi(x_1^2) = \phi(x_1).\phi(x_1) = (a_1, b_1).(a_1, b_1) = (a_1, b_1) = \phi(x_1) \quad (4.4.2)$$

$$\phi(x_1x_i^2x_1) = \phi(x_1)\phi(x_i)\phi(x_i)\phi(x_1) = (a_1, b_1).(a_i, b_1).(a_i, b_1).(a_1, b_1) = (a_i, b_1) = \phi(x_i) \quad (4.4.3)$$

$$\phi(x_1) = \phi(y_1) \quad (4.4.4)$$

bağıntılari sağlanır. Benzer şekilde $\phi(x_1y_j^2x_1) = \phi(y_j)$ ve $\phi(x_i.y_j) = \phi(y_j\ x_i)$ bağıntılarının sağlandığı da gösterilebilir. O halde $CL_{m,n}$ $\wp_{m,n}$ ile tanımlı yarıgrubun homomorfik görüntüsüdür. (bkz. Önerme 3.3.1)

$$W = \{\, x_i \mid 1 \leq i \leq m \,\} \cup \{\, y_j \mid 2 \leq j \leq n \,\} \cup \{\, x_iy_j \mid 2 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n \,\} \subseteq X^+$$

kümesini tanımlayalım. Her $w \in X^+$ için $w = z$ $\wp_{m,n}$ deki bağıntıların sonucu olacak şekilde bir $z \in W$ olduğunu göstereceğiz. (bkz. Önerme 3.3.4) Eğer $w \in X \setminus \{y_1\}$ ise $w \in W$ olduğu görülür. $w \equiv y_1$ ise $y_1 = x_1$ bağıntısından $w \equiv y_1 = x_1$ olup $x_1 \in W$ sağlanır.

Şimdi w nun X ten gelen en az iki kelimeden oluştuğunu varsayalım. $x_1 = y_1$, $x_i.y_j = y_jx_i$ $(2 \leq i \leq m,\ 2 \leq j \leq n)$ bağıntılarından $w_1 \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}^+$ ve $w_2 \in \{y_1, \ldots, y_n\}^+$ kelimeleri vardır öyle ki $w = w_1w_2$ sağlanır. Teorem 4.3.1 de gösterdiğimiz gibi $x_1^2 = x_1$, $x_1x_i^2x_1 = x_i$ $(2 \leq i \leq m)$ bağıntılarından x_i $(1 \leq i \leq m)$ vardır öyle ki $w_1 = x_i$ sağlanır. Benzer şekilde y_j $(1 \leq j \leq m)$ vardır öyle ki $w_2 = y_j$ sağlanır. O halde $w = x_iy_j$ bağıntısı $\wp_{m,n}$ ile tanımlı yarıgrupta sağlanır. Eğer $j = 1$ (veya $i = 1$) ise $x_1 = y_1$

bağıntısından $w = x_i x_1$ (veya $w = y_1 y_j$) olur. Bu durumda Teorem 4.3.1 in ispatında gösterdiğimiz gibi $w = x_i \in W$ (veya $w = y_j \in W$) bulunur. Eğer i ve j 1 den farklıysa $w = x_i y_j \in W$ elde edilir. O halde $\wp_{m,n}$ ile tanımlı yarıgrupta en fazla mn eleman vardır. Dolayısıyla $CL_{m,n}$ $\wp_{m,n}$ ile tanımlı yarıgruba izomorfiktir. ■

Dikkat edersek $n, m \geq 2$ için $def(\wp_{m,n}) = (n-1)(m-1)$dir. $CL_{m,n}$ nin sıfır elemanı (a_m, b_n) olduğundan sıfır elemanlı bir yarıgruptur. O halde $def(\wp_{m,n}) \neq rank(H_2(CL_{m,n}))$ olduğu görülür. (bkz. Teorem 4.1.1) Bu durumda $\wp_{m,n}$ $CL_{m,n}$ için etkin bir takdim değildir.

Aşağıda vereceğimiz Teoremde $def(CL_{m,n})=(m-1).(n-1)$ olduğunu göstereceğiz. $m, n \geq 2$ için $CL_{m,n}$ nin etkin olmayan bir yarıgrup olduğu sonucunu elde edeceğiz.

Teorem 4.4.2. $def(CL_{m,n})=(m-1).(n-1)$ dir.

İspat: $\wp = \langle X \mid R \rangle$ $CL_{m,n}$ için herhangi bir takdim olsun. R de $u=u$ ($u \in X^+$) formunda ve $x \in X$, $w \in (X/\{x\})^+$ olmak üzere $w=x$ formunda bağıntıların olmadığını varsayalım. (Bu tür bağıntılar varsa $\wp$ nin deficiencysini artırmadan elimine edebiliriz.).

Her $x \in X$ için $x^2=x$ bağıntısı sağlandığından aşağıdaki formda bir diziye sahibiz:

$$x^2 \equiv \alpha_1 r_1 \beta_1 \rightarrow \alpha_1 s_1 \beta_1 = \alpha_2 r_2 \beta_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha_{p-1} s_{p-1} \beta_{p-1} = \alpha_p r_p \beta_p \rightarrow \alpha_p s_p \beta_p \equiv x .$$

Bu dizide $\alpha_k, \beta_k \in X^*$ ve $(r_k, s_k) \in R$ ya da $(s_k, r_k) \in R$ $(1 \leq k \leq p)$ sağlanır. $\alpha_p s_p \beta_p \equiv x$ ve $s_p \neq \varepsilon$ olduğundan $s_p \equiv x$ ve $\alpha_p \equiv \beta_p \equiv \varepsilon$ olmalıdır. Dolayısıyla R de (r_p, x) veya (x, r_p) formunda bağıntılar vardır. Varsayımımızdan $|r_p| \geq 2$ olduğunu söyleyebiliriz.

Notasyon kolaylığı açısından eğer $(r, s) \in R$ ise $|r| \geq |s|$ olduğunu düşünelim. O zaman $x \in X$ için

$$Q_x = R \cap \{(u, x) \mid u \in X^+\} \neq \varnothing$$

sağlanır. Eğer $Q = \bigcup_{x \in X} Q_x$ şeklinde tanımlarsak $|Q| \geq |X|$ olduğunu görebiliriz.

π X^+ dan $CL_{m,\,n}$ ye doğal homomorfizm olsun. $\{(a_i,\ b_1),\ (a_1,\ b_j)\ /\ 1 \leq i \leq m,\ 2 \leq j \leq n\}$ kümesinin $CL_{m,\,n}$ nin her doğuray kümesinde olduğunu Lemma 4.4.1 de göstermiştik. O halde her $(1 \leq i \leq m)$ ve $(2 \leq j \leq n)$ için

$$X_i = \{x \in X /\ \pi(x) = (a_i,\ b_1)\} \text{ ve}$$

$$Y_j = \{y \in X /\ \pi(y) = (a_1,\ b_j)\}$$

kümelerinin boş olmadığını söyleyebiliriz.

Şimdi $A_i = \bigcup_{1 \leq k \leq i} X_k$, $Y_1 = X_1$ ve $B_j = \bigcup_{1 \leq l \leq j} Y_l$ kümelerini tanımlayalım. $w \in X^+$ ve $x_i \in X_i$ olmak üzere $w = x_i$ (veya $w = y_j$) bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter koşul $w \in A_i^+$ (veya $w \in B_j^+$) olmasıdır. O halde herhangi bir $w \in A_i^+ B_j^+$ kelimesine Q dan bağıntı uygulandığında geriye yine $A_i^+ B_j^+$ dan gelen bir kelime kalır. Ek olarak eğer $u \in A_i^+ B_j^+$ ise ve $u = v$ $(v \in X^+)$ bağıntısı Q dan uygulanan bazı bağıntıların sonucu ise v kelimesi $A_i^+ B_j^+$ da olmalıdır. $x_i \in X_i$ $(2 \leq i \leq m)$ ve $y_j \in Y_j$ $(2 \leq j \leq n)$ için $CL_{m,\,n}$ de sağlanan $x_i\, y_j = y_j\, x_i$ bağıntısını düşünelim. O zaman aşağıdaki formda bir diziye sahibiz:

$$x_i y_j \equiv w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_{p-1} \to w_p \equiv y_j x_i .$$

Bu dizide w_{k+1} w_k dan R den bir bağıntı uygulanmasıyla elde edilmiştir. q değeri $w_q \in A_i^+ B_j^+$ fakat $w_{q+1} \notin A_i^+ B_j^+$ olacak şekilde en küçük indeks olsun. O zaman w_{q+1}

w_q dan $r_{i,\,j} \in A_i^+ \ B_j^+$ ve $s_{i,\,j} \notin A_i^+ \ B_j^+$ olacak şekilde bir $r_{i,\,j}=s_{i,\,j}$ bağıntısı uygulanmasıyla elde edilmiştir. Veya $s_{i,\,j} \in A_i^+ \ B_j^+$ ve $r_{i,\,j} \notin A_i^+ \ B_j^+$ olacak şekilde bir $r_{i,\,j}=s_{i,\,j}$ bağıntısı uygulanmasıyla elde edilmiştir. O halde R de fazladan $(m-1).(n-1)$ tane bağıntı olduğunu görebiliyoruz. Dolayısıyla $def(\wp) \geq (m-1).(n-1)$ olur. Teorem 4.4.1 den

$$def(CL_{m,\,n}) = (m-1)(n-1)$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.4.1. $m, n \geq 2$ için $CL_{m,\,n}$ etkin olmayan bir yarıgruptur.

4.5. Bir Yarıgrubu Etkin olmayan bir yarıgruba gömme Problemi

Bu bölümde herhangi bir yarıgrubun etkin olmayan bir yarıgruba gömülebileceğini göstereceğiz. Bunun için öncelikle rankı n olan serbest semilatisin tanımını hatırlayalım:

Tanım 4.5.1. A_n n elemanlı boş olmayan bir küme ve SL_n A_n nin boş olmayan bütün alt kümelerinden oluşan küme olsun. O zaman SL_n aşağıda tanımlı ikili işlemle idempotentlerden oluşan değişmeli bir yarıgruptur:

$$X, Y \in SL_n \text{ ise } X.Y = X \cup Y.$$

SL_n yarıgrubu rankı n olan serbest semilatis olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.2 den $n \geq 2$ için $def(SL_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ olduğunu ve etkin olmayan bir yarıgrup olduğunu biliyoruz.

Tanım 4.5.2. S bir yarıgrup, SL_n rankı n olan serbest semilatis ve $T = S \cup SL_n$ olsun. T üzerindeki ikili işlem aşağıdaki şekilde tanımlansın:

Eğer $s_1, s_2 \in S$ ise $s_1.s_2 \in S$, (S de tanımlı işlem),

Eğer $t_1, t_2 \in SL_n$ ise $t_1.t_2 \in SL_n$, (SL_n de tanımlı işlem),

Eğer $s \in S$ ve $t \in SL_n$ ise $s.t = t.s = t \in SL_n$.

T bu ikili işlemle sıfır elemanlı bir yarıgruptur. T nin sıfır elemanı X_n dir.

Aşağıdaki Teoremde T nin etkin olmayan bir yarıgrup olduğunu ve S nin T içine gömülebileceğini göstereceğiz.

Teorem 4.5.1. S sonlu takdimli bir yarıgrup olsun. O zaman yukarıdaki notasyonla T etkin olmayan bir yarıgruptur. Dolayısıyla S etkin olmayan bir yarıgruba gömülebilir.

İspat: Yukarıdaki notasyonu kullanalım. $P = \langle X \mid R \rangle$ T için bir takdim olsun. Genelliği kaybetmeksizin X in T nin alt kümesi olduğunu varsayabiliriz. $X_1 = X \cap S$ ve $X_2 = X \cap SL_n$ olsun.

$t \in S$ için eğer $t = x_1x_2...x_n$ $(x_i \in X)$ şeklinde yazılırsa T de tanımlı çarpımdan $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla X_1 S nin bir doğuray kümesidir. $t \in SL_n$ için $t = x_1x_2...x_m$ $(x_i \in X)$ şeklinde yazılsın. Varsayalım ki $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \in SL_n$, fakat $x_k \in S$ olsun. Bu durumda $m \geq 2$ dir. Çarpımın tanımından, $k \geq 2$ için,

$$t=(x_1x_2...x_{k-1})x_k...x_m = x_1x_2...x_{k-2}(x_{k-1}x_k)...x_m = x_1x_2...x_{k-1}x_{k+1}...x_m$$

olur. $k = 1$ için

$$t = x_1(x_2...x_m) = x_2...x_m$$

elde edilir.

O halde X_2 nin SL_n için bir doğuray kümesi olduğunu görebiliriz.

$R_1 = \{ (r, s) \in R \ / \ r, s \in X_1^+ \}$ şeklinde tanımlansın. $< X_1 \ / \ R_1 >$ takdiminin S yi tanımladığı açıktır ve dolayısıyla

$$|R_1| - |X_1| \geq def(S) \tag{4.5.1}$$

sağlanır.

$R_2=R \setminus R_1$ olsun. Her $\{a\} \in A_n$ için

$$X_a = \{ x \in X_2 / x \ \{a\} \text{ yı temsil etsin} \}$$

kümesini tanımlayalım. Dikkat edersek $\{a\}$ SL_n nin her doğuray kümesine aittir ve dolayısıyla X_a boş küme değildir. (Ayık ve diğerleri, 2000a).

$R_3 = \{ (r, x) \in R \ / \ x \in X_2 \}$ şeklinde tanımlansın. Her $x \in X_2$ için $x^2 = x$ bağıntısı SL_n de sağlandığından R_3 te $r \in X^+$ olmak üzere $r = x$ formunda bir bağıntı vardır. Ek olarak, eğer $x \in X_a$ ve $(r, x) \in R_3$ ise $r \in (X_1 \cup X_a)^+$ olduğu açıktır ve dolayısıyla

$$|R_3| \geq |X_2| \qquad (4.5.2)$$

elde edilir.

Şimdi $a \neq b$ olsun ve $x \in X_a$ ve $y \in X_b$ elemanları keyfi seçilmiş elemanlar olsunlar. O zaman $xy = yx$ bağıntısı SL_n de sağlanır ve dolayısıyla R deki bağıntıların bir sonucudur. xy ye $(R_1 \cup R_3)$ ten bağıntılar uygulandığında geriye hep $(X_a \cup X_1)^+ . (X_b \cup X_1)^+$ dan gelen kelimeler kalır, fakat yx bu formda değildir. Sonuç olarak bir $(u=v) \in R_2 \setminus R_3$ bağıntısı elde edilir öyle ki u ve v SL_n nin aynı $\{a, b\}$ elemanını temsil eder.

Dolayısıyla

$$|R_2 / R_3| \geq \frac{n(n-1)}{2} \qquad (4.5.3)$$

bulunur.

Buradan

$$|R|-|X|=|R_1|-|X_1|+|R_2|-|X_2|\geq def(S)+|R_3|+|R_2/R_3|-|X_2|\geq def(S)+\frac{n(n-1)}{2}$$

bulunur.

Eğer $def(S) \geq 0$ ise $n \geq 2$ için $def(\wp)\geq def(S)+\frac{n(n-1)}{2}\geq\frac{n(n-1)}{2}>0$

bulunur.

$def(S) = m < 0$ olsun. n için öyle bir aralık seçmeliyiz ki $def(S) + \frac{n(n-1)}{2} =$ $m+\frac{n(n-1)}{2} > 0$ olsun. $\frac{2m+n(n-1)}{2} > 0$ olmalıdır. $\frac{2m+n^2-n}{2} > 0$ olmalıdır. $n \geq -2m+1$ seçersek $\frac{2m+n^2-n}{2} \geq \frac{2m+(-2m+1)^2-(-2m+1)}{2} =$ $\frac{2m+4m^2-4m+1+2m-1}{2} = 2m^2 > 0$ bulunur.

Dolayısıyla $n \geq -2m+1$ seçilirse $|R|-|X|=def(\wp)>0$ bulunur.

T sıfır elemanlı bir yarıgrup olduğundan T nin ikinci integral homoloji grubu aşikardır. (bkz. Teorem 4.1.1)

$def(T)=min\ \{ def(\wp)\ /\ \wp$ T yi tanımlayan bir takdim$\} > 0$ olduğundan T etkin olmayan bir yarıgruptur. ■

4.6. CL_m^n nin takdimi ve etkinlik durumu

Grupların direkt çarpımının etkinliği ile ilgili problemler üzerinde uzun yıllar çalışılmıştır. (Vatansever, 1992) ve (Vatansever, 1997) ye bakınız.

Bölüm 4.3 ve 4.4 te CL_n n elemanlı zincirinin ve $CL_m \times CL_n$ direkt çarpım yarıgrubunun etkinliğini incelemiştik. Şimdi genel olarak $CL_m = \{ a_1, a_2, ..., a_m\}$ zincirinin n kopyası olan $CL_m^n = CL_m \times CL_m \times ... \times CL_m$ direkt çarpım yarıgrubunun etkin olup olmadığını inceleyeceğiz.

Aşağıdaki Lemmada CL_m^n için minimum doğuray kümesini belirleyeceğiz:

Lemma 4.6.1. $A = \{ (a_{1i_1}, a_{21}, a_{31},..., a_{n1}), (a_{11}, a_{2i_2}, a_{31},..., a_{n1}), (a_{11}, a_{21}, a_{3i_3},..., a_{n1}),..., (a_{11}, a_{21}, a_{31},..., a_{(n-1)1}, a_{ni_n}) \mid 1 \leq i_1 \leq m, 2 \leq i_2 \leq m, 2 \leq i_3 \leq m, ..., 2 \leq i_n \leq m \}$

kümesi CL_m^n için minimum doğuray kümesidir.

İspat: Bunun için A nın CL_m^n için bir doğuray kümesi olduğunu ve CL_m^n nin her doğuray kümesinin A yı içerdiğini göstereceğiz.

$$(a_{1i_1}, a_{21}, a_{31},..., a_{n1})(a_{11}, a_{2i_2}, a_{31},..., a_{n1})...(a_{11}, a_{21}, a_{31},..., a_{(n-1)1}, a_{ni_n}) = (a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3},..., a_{ni_n})$$

sağlandığından A CL_m^n nin bir doğuray kümesidir.

$$(a_{1q_1}, a_{2q_2}, a_{3q_3},..., a_{nq_n})(a_{1s_1}, a_{2s_2}, a_{3s_3},..., a_{ns_n}) = (a_{1i_1}, a_{21}, a_{31},..., a_{n1})$$

bağıntısından $q_2 = s_2 = 1,\ q_3 = s_3 = 1,..., q_n = s_n = 1$ ve $max\{q_1, s_1\} = i_1$ elde edilir. Benzer şekilde

$$(a_{1q_1}, a_{2q_2}, a_{3q_3},..., a_{nq_n})(a_{1s_1}, a_{2s_2}, a_{3s_3},..., a_{ns_n}) = (a_{11}, a_{2i_2}, a_{31},..., a_{n1})$$

bağıntısından $q_1 = s_1 = 1,\ q_3 = s_3 = 1,..., q_n = s_n = 1$ ve $max\{q_2, s_2\} = i_2$ elde edilir. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse A kümesi $CL_{m,\ n}$ nin her doğuray kümesi tarafından içerilmelidir. ■

Sonlu doğuraylı bir yarıgrubun rankı S nin minimum doğuray kümesinin kardinalitesi idi. O halde Lemma 4.6.1 den $rank(CL_m^n) = m + (m-1) + ... + (m-1) = m + (n-1)(m-1)$ bulunur. Şimdi Teorem 4.6.2 de CL_m^n yi tanımlayan bir takdim belirleyeceğiz:

Teorem 4.6.1. $\wp = \langle x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m}, x_{21}, x_{22},..., x_{2m}, x_{31}, x_{32},..., x_{3m}, ..., x_{(n-1)1}, x_{(n-1)2},..., x_{(n-1)m}, x_{n1}, x_{n2},..., x_{nm} \ / \ x_{11} = x_{21},\ x_{21} = x_{31},..., x_{(n-1)1} = x_{n1},\ x_{11}^2 = x_{11}, x_{11} x_{1i_1}^2 x_{11} = x_{1i_1}\ (2 \leq i_1 \leq m),\ x_{21} x_{2i_2}^2 x_{21} = x_{2i_2}\ (2 \leq i_2 \leq m),..., x_{n1} x_{ni_n}^2 x_{n1} = x_{ni_n}$ (2

$\leq i_n \leq m)$, $x_{1i_1}x_{2i_2} = x_{2i_2}x_{1i_1}$ $(2 \leq i_1 \leq m,\ 2 \leq i_2 \leq m)$, $x_{2i_2}x_{3i_3} = x_{3i_3}x_{2i_2}$ $(2 \leq i_2 \leq m,\ 2 \leq i_3 \leq m), \dots,$ $x_{1i_1}x_{ni_n} = x_{ni_n}x_{1i_1}$ $(2 \leq i_1 \leq m,\ 2 \leq i_n \leq m) >$

takdimi CL_m^n yarıgrubunu tanımlar.

İspat: $X=\{ x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}, x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3m}, \dots, x_{(n-1)1}, x_{(n-1)2}, \dots, x_{(n-1)m}, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}\}$ olsun. $\phi : X^+ \to CL_m^n$ aşağıdaki şekilde tanımlı homomorfizmi düşünelim:

$$x_{1i_1} \to (a_{1i_1}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}),\ x_{2i_2} \to (a_{11}, a_{2i_2}, a_{31}, \dots, a_{n1})$$
$$x_{3i_3} \to (a_{11}, a_{21}, a_{3i_3}, \dots, a_{n1}), \dots, x_{ni_n} \to (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{ni_n})$$
$$(1 \leq i_1 \leq m,\ 2 \leq i_2 \leq m,\ 2 \leq i_3 \leq m, \dots, 2 \leq i_n \leq m),$$

o zaman CL_m^n nin $\wp$ tarafından tanımlanan yarıgrubun homomorfik görüntüsü olduğu açıktır.

$W=\{ x_{1i_1} x_{2i_2} x_{3i_3} \cdots x_{ni_n} / 1 \leq i_1 \leq m,\ 1 \leq i_2 \leq m, \dots, 1 \leq i_n \leq m \} \subseteq X^+$. olsun. Her $w \in X^+$ için $w = z$ $\wp$ deki bağıntıların sonucu olacak şekilde $z \in W$ olduğunu göstereceğiz.

Bunu w nun uzunluğu $(|w|)$ üzerinde tümevarımla gösterelim. $|w| = 1$ olsun. O zaman $w \equiv x_{ki_k}$ $(1 \leq k \leq m,\ 1 \leq i_k \leq m)$ şeklindedir. Eğer $w \equiv x_{ki_k}$ $(1 \leq k \leq m,\ 1 \leq i_k \leq m)$ ise $x_{11}= x_{21},\ x_{21}= x_{31}, \dots, x_{(n-1)1}= x_{n1}$ bağıntılarından $w \equiv x_{ki_k} = x_{11}\, x_{11}\, x_{11} \dots x_{11}\, x_{ki_k}\, x_{11} \dots x_{11} = x_{11}\, x_{21}\, x_{31} \dots x_{ki_k}\, x_{(k+1)1} \dots x_{n1} \in W$ elde edilir. $(< x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km} \,/\, x_{k1}^2 = x_{k1},\ x_{k1}\, x_{ki_k}{}^2 x_{k1} = x_{ki_k}$ $(2 \leq i_k \leq m) >$ takdimi CL_m yarıgrubunu tanımladığından, (Ayık, Minisker ve Vatansever) deki Teorem 2.1 in ispatından $x_{kq_1}x_{kq_2} = x_{k\max\{q_1, q_2\}}$ $(1 \leq q_1, q_2 \leq m)$ elde edilir.

Şimdi $|w| = n \geq 2$ olsun. O zaman $w \equiv x_{kj_k}\, u_k$ ($x_{kj_k} \in X$ ve $u_k \in X^+$ $(1 \leq k \leq n)$) şeklindedir.

Eğer $w \equiv x_{kj_k} u_k$, ise tümevarım hipotezinden $x_{1i_1} x_{2i_2} x_{3i_3} \dots x_{ni_n} \in W$ vardır öyle ki $u_k = x_{1i_1} x_{2i_2} x_{3i_3} \dots x_{ni_n}$. $x_{1i_1} x_{ki_k} = x_{ki_k} x_{1i_1}$ $(2 \le i_1 \le m,\ 2 \le i_k \le m)$, $x_{2i_2} x_{ki_k} = x_{ki_k} x_{2i_2}$ $(2 \le i_2 \le m,\ 2 \le i_k \le m), \dots,$ $x_{(k-1)i_{k-1}} x_{ki_k} = x_{ki_k} x_{(k-1)i_{k-1}}$ $(2 \le i_{k-1} \le m,\ 2 \le i_k \le m)$ bağıntılarından $w \equiv x_{kj_k}(x_{1i_1} x_{2i_2} x_{3i_3} \cdots x_{ni_n}) = x_{1i_1}(x_{kj_k} x_{2i_2}) x_{3i_3} \cdots x_{ni_n} = x_{1i_1} x_{2i_2}(x_{kj_k} x_{3i_3}) \dots x_{ni_n} = \dots = x_{1i_1} x_{2i_2} x_{3i_3} \cdots x_{(k-1)i_{(k-1)}}(x_{kj_k} x_{ki_k}) x_{(k+1)i_{(k+1)}} \cdots x_{ni_n} = x_{1i_1} x_{2i_2} x_{3i_3} \cdots x_{(k-1)i_{(k-1)}} x_{k\max\{i_k, j_k\}} \cdots x_{ni_n} \in W$ elde edilir.

Dolayısıyla $\wp$ ile tanımlı yarıgrup en fazla m^n elemena sahiptir , ve dolayısıyla CL_m^n $\wp$ ile tanımlı yarıgruba izomorfiktir. ■

Dikkat edersek $n \ge 2$ için, $def(\wp) = \binom{n}{2}.(m-1)^2$ dir. CL_m^n sıfır elemanlı bir yarıgrup olduğundan $((a_{1m}, a_{2m}, a_{3m}, \dots, a_{nm}))$ ikinci integral homoloji grubu aşikar gruptur. Dolayısıyla $def(\wp) \ne rank(H_2(CL_m^n))$ olup $\wp$ CL_m^n nin etkin takdimi olamaz.

Şimdi $def(CL_m^n) = \binom{n}{2}.(m-1)^2$ olduğunu ve dolayısıyla CL_m^n nin $n \ge 2$ için etkin olmadığını gösterelim.

Teorem 4.6.2. $def(CL_m^n) = \binom{n}{2}.(m-1)^2$ dir.

İspat: $\wp = \langle X | R \rangle$ CL_m^n nin bir yarıgrup takdimi olsun. Varsayalım ki R de $u = u$ $(u \in X^+)$ veya $w = x$ ($x \in X$, $w \in (X \setminus \{x\})^+$) formunda bağıntılar olmasın. (Eğer olsaydı bu formdaki bağıntıları $\wp$ nin deficiencysini artırmadan elimine edebilirdik.).

Her $x \in X$ için, $x^2 = x$ olduğundan aşağıdaki formda bir diziye sahibiz:

$$x^2 \equiv \alpha_1 r_1 \beta_1 \to \alpha_1 s_1 \beta_1 = \alpha_2 r_2 \beta_2 \to \dots \to \alpha_{p-1} s_{p-1} \beta_{p-1} = \alpha_p r_p \beta_p$$
$$\to \alpha_p s_p \beta_p \equiv x$$

Bu dizide $\alpha_k, \beta_k \in X^*$ ve $(r_k, s_k) \in R$ veya $(s_k, r_k) \in R$ $(1 \le k \le p)$ sağlanır $\alpha_p s_p \beta_p \equiv x$ ve $s_p \ne \varepsilon$ olduğundan $s_p \equiv x$ ve $\alpha_p \equiv \beta_p \equiv \varepsilon$ sağlanır. Dolayısıyla R de (r_p, x) veya (x, r_p)

formunda bağıntılar vardır. Varsayımımızdan $|r_p| \geq 2$ olmalıdır. Notasyon kolaylığı açısından eğer $(r, s) \in R$ ise $|r| \geq |s|$ kabul edelim. O zaman, $x \in X$ için

$$Q_x = R \cap \{ (r, x) \ / \ r \in X^+ \} \neq \emptyset.$$

sağlanır. πX^+ dan $CL_m{}^n$ ye doğal homomorfizm olsun ve

$$X_{1i_1} = \{ x \in X \ / \ \pi(x) = (a_{1i_1}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}) \} \ (1 \leq i_1 \leq m),$$

$$X_{2i_2} = \{ x \in X \ / \ \pi(x) = (a_{11}, a_{2i_2}, a_{31}, \ldots, a_{n1}) \} \ (2 \leq i_2 \leq m),$$

$$X_{3i_3} = \{ x \in X \ / \ \pi(x) = (a_{11}, a_{21}, a_{3i_3}, \ldots, a_{n1}) \} \ (2 \leq i_3 \leq m),$$

$$\vdots$$

$$X_{ni_n} = \{ x \in X \ / \ \pi(x) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{(n-1)1}, a_{ni_n}) \} \ (2 \leq i_n \leq m).$$

olsun. $\{ (a_{1i_1}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}), (a_{11}, a_{2i_2}, a_{31}, \ldots, a_{n1}), (a_{11}, a_{21}, a_{3i_3}, \ldots, a_{n1}), \ldots, (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{(n-1)1}, a_{ni_n}) \ / \ 1 \leq i_1 \leq m, 2 \leq i_2 \leq m, \ldots, 2 \leq i_n \leq m \}$ kümesi her doğuray kümesi içinde olduğundan her $(1 \leq i_1 \leq m)$, $(2 \leq i_2 \leq m), \ldots, (2 \leq i_n \leq m)$ için X_{1i_1}, $X_{2i_2}, \ldots, X_{ni_n}$ kümeleri boş değildir.

Şimdi

$$A_{1i_1} = \bigcup_{1 \leq k_1 \leq i_1} X_{1k_1} \quad , X_{11} = X_{21} = \ldots = X_{n1}, \ A_{2i_2} = \bigcup_{1 \leq k_2 \leq i_2} X_{2k_2} \, ,$$

$$A_{3i_3} = \bigcup_{1 \leq k_3 \leq i_3} X_{3k_3} \, , \ldots, \ A_{ni_n} = \bigcup_{1 \leq k_n \leq i_n} X_{nk_n} \, .$$

kümelerini tanımlayalım.

O zaman $w \in X^+$ ve $x_{1i_1} \in X_{1i_1}$ $(x_{2i_2} \in X_{2i_2},\ x_{3i_3} \in X_{3i_3}, \ldots,\ x_{ni_n} \in X_{ni_n})$ için $w = x_{1i_1}$ $(w = x_{2i_2},\ w = x_{3i_3}, \ldots,\ w = x_{ni_n})$ sağlanırsa $w \in A_{1i_1}{}^+$ $(w \in A_{2i_2}{}^+,\ w \in A_{3i_3}{}^+, \ldots,\ w \in A_{ni_n}{}^+)$ sağlanır.

Dolayısıyla herhangi bir $w \in A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$ $(w \in A_{2i_2}{}^+ A_{3i_3}{}^+,\ w \in A_{3i_3}{}^+ A_{4i_4}{}^+, \ldots,\ w \in A_{(n-1)i_{(n-1)}}{}^+ A_{ni_n}{}^+)$ Q dan bir bağıntı uygulandığında bir $w \in A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$ $(w \in A_{2i_2}{}^+ A_{3i_3}{}^+,\ w \in A_{3i_3}{}^+ A_{4i_4}{}^+, \ldots,\ w \in A_{(n-1)i_{(n-1)}}{}^+ A_{ni_n}{}^+)$ kelimesi elde edilir. Ek olarak eğer $u \in A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$ $(u \in A_{2i_2}{}^+ A_{3i_3}{}^+,\ u \in A_{3i_3}{}^+ A_{4i_4}{}^+, \ldots,\ u \in A_{(n-1)i_{(n-1)}}{}^+ A_{ni_n}{}^+)$ ve $u = v(v \in X^+)$ bağıntısı Q daki bazı bağıntıların bir sonucu ise $v \in A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$ $(A_{2i_2}{}^+ A_{3i_3}{}^+,\ A_{3i_3}{}^+ A_{4i_4}{}^+, \ldots,\ A_{(n-1)i_{(n-1)}}{}^+ A_{ni_n}{}^+)$ olmalıdır. $x_{1i_1} \in X_{1i_1}$ $(2 \leq i_1 \leq m)$ ve $x_{2i_2} \in X_{2i_2}$ $(2 \leq i_2 \leq m)$ için $CL_m{}^n$ de sağlanan $x_{1i_1}\, x_{2i_2} = x_{2i_2}\, x_{1i_1}$ bağıntısını düşünelim. O zaman aşağıdaki formda bir diziye sahibiz:

$$x_{1i_1} x_{2i_2} \equiv w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_{p-1} \to w_p \equiv x_{2i_2} x_{1i_1}\,.$$

Burada $w_{\lambda+1}$ w_λ dan R den bir bağıntı uygulanmasıyla elde edilmiştir. q sayısı $w_q \in A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$, $w_{q+1} \notin A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$ olacak şekilde en küçük indeks olsun. O zaman w_{q+1} w_q dan $r_{i_1,i_2} = s_{i_1,i_2}$ formunda bir bağıntı uygulanarak elde edilmiştir öyle ki $r_{i_1,i_2} \in A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$, fakat $s_{i_1,i_2} \notin A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$ veya $s_{i_1,i_2} \in A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$, fakat $r_{i_1,i_2} \notin A_{1i_1}{}^+ A_{2i_2}{}^+$ sağlanır. R de fazladan $(m\text{-}1)^2$ bağıntı olmalıdır. $x_{2i_2}\, x_{3i_3} = x_{3i_3}\, x_{2i_2}$ $(2 \leq i_2 \leq m,\ 2 \leq i_3 \leq m), \ldots,\ x_{1i_1}\, x_{ni_n} = x_{ni_n}\, x_{1i_1}$ $(2 \leq i_1 \leq m,\ 2 \leq i_n \leq m)$ bağıntıları $CL_m{}^n$ de sağlandığından benzer şekilde R de en az $\left(\binom{n}{2} - 1\right)(m\text{-}1)^2$ fazla bağıntı olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla R de toplam olarak $\binom{n}{2}$ $(m-1)^2$ fazla bağıntı vardır, ve $def(\wp) \geq \binom{n}{2}$ $(m-1)^2$ sağlanır.

Teorem 4.6.2 den $def(CL_m^n) = \binom{n}{2}$ $(m-1)^2$ bulunur. ■

Sonuç 4.6.1..$n \geq 2$için CL_m^n etkin olmayan bir yarıgruptur.

4.7 Etkin iki Rees matris yarıgrubunun direkt çarpımının etkinliği

Bu bölümde özel seçilmiş iki etkin Rees matris yarıgrubunun direkt çarpımına izomorfik etkin bir Rees matris yarıgrubu inşa edeceğiz. Öncelikle aşağıdaki Teoremde S herhangi bir tam basit yarıgrup ise $S \times S$ nin de tam basit olduğunu gösterelim.

Teorem 4.7.1. S herhangi bir tam basit yarıgrup ise $S \times S$ de tam basit yarıgruptur.

İspat: $S \times S$ nin basit olduğunu ve bir primitif idempotent eleman içerdiğini gösterelim. Öncelikle $S \times S$ nin basit olduğunu göstereceğiz. Her a, $b \in S \times S$ için $xay = b$ olacak şekilde x, $y \in S \times S$ olduğunu gösterelim. (Howie, *1995*; Sonuç *3.1.2*) a, $b \in S \times S$ olsun. O zaman $a = (s_1, s_2)$ $(s_1, s_2 \in S)$ ve $b = (t_1, t_2)$ $(t_1, t_2 \in S)$ şeklindedir. S basit olduğundan ve s_1, $t_1 \in S$ olduğundan bazı k_1, $z_1 \in S$ vardır öyle ki $k_1s_1z_1 = t_1$ sağlanır. Ayrıca s_2, $t_2 \in S$ için bazı k_2, $z_2 \in S$ vardır öyle ki $k_2s_2z_2 = t_2$ sağlanır. Dolayısıyla (k_1, k_2) (s_1, s_2) (z_1, z_2) $= (k_1s_1z_1, k_2s_2z_2) = (t_1, t_2)$ bağıntısı $S \times S$ yarıgrubunda sağlanır. O halde $S \times S$ yarıgrubu basittir. (Howie, *1995*; Sonuç *3.1.2*)

Şimdi $S \times S$ nin bir primitif idempotent eleman içerdiğini gösterelim. e S nin bir primitif idempotent elemanı olsun. (e, e) nin de $S \times S$ nin bir primitif idempotent elemanı olduğunu gösterelim. (f_1, f_2) $S \times S$ nin bir idempotent elemanı olsun. $(e, e).(f_1, f_2) = (f_1, f_2).(e, e) = (f_1, f_2) \neq 0 \Rightarrow (e, e) = (f_1, f_2)$ olduğunu göstermeliyiz. (Howie, *1995*; Bölüm *3.2*)

$(e, e). (f_1, f_2) = (f_1, f_2). (e, e) \neq 0$ olsun. O zaman $(e, e). (f_1, f_2) = (ef_1, ef_2) = (f_1, f_2). (e, e) = (f_1e, f_2e) = (f_1, f_2)$ sağlanır. Buradan $ef_1 = f_1$ ve $f_1e = f_1$ elde edilir. e S nin bir primitif idempotent elemanı olduğundan $e = f_1$ elde edilir. Benzer şekilde $ef_2 = f_2$ ve $f_2e = f_2$ eşitliklerinden $e = f_2$ bulunur. Dolayısıyla $(e, e) = (f_1, f_2)$ olur ve (e, e) $S \times S$ nin bir primitif idempotent elemanıdır.

Dolayısıyla $S \times S$ tam basit yarıgruptur. ■

G bir grup, I ve J boş olmayan kümeler ve $P = (P_{\lambda i})$ $|J| \times |I|$ tipinde elemanları G den gelen bir matris olsun. $S = I \times G \times J$ olsun ve S üzerindeki çarpım:

$$(i, a, \lambda).(j, b, \mu) = (i, ap_{\lambda j}b, \mu)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman S bir tam basit yarıgruptur. (Howie, *1995*; Teorem *3.3.1*)

Tanımladığımız çarpıma sahip $I \times G \times J$ yarıgrubunu $M[G; I, J; P]$ ile gösteriyoruz. Bu yarıgruba Rees matris yarıgrubu denir.

G grubu C_n, n elemanlı devirli grup, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1\}$ ve P de normal matris olsun. Yani P matrisinde her $i \in I$ için $p_{11} = p_{1i} = 1_G$ sağlansın. O zaman $M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubu üzerindeki çarpım:

$$(i, g, 1).(j, h, 1) = (i, gp_{\lambda j}h, 1) = (i, gh, 1)$$

şeklindedir.

Aşağıdaki Teoremde $M[C_n; I, \{1\}; P] \times M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubunun bir Rees matris yarıgrubuna izomorfik olduğunu göstereceğiz. Burada P matrisi elemanları 1_{C_n} den gelen $1 \times m$ tipinde normal bir matristir.

Teorem 4.7.2. $M[C_n; I, \{1\}; P] \times M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubu bir Rees matris yarıgrubuna izomorfiktir.

İspat: $M[C_n; I, \{1\}; P] \times M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubu üzerinde aşağıdaki ikili işlem tanımlanmış bir yarıgruptur:

$$((i_1, a^{k_1}, 1), (i_2, a^{k_2}, 1)). ((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1)) = ((i_1, a^{k_1+k_3}, 1), (i_2, a^{k_2+k_4}, 1))$$

$S = M[C_n; I, \{1\}; P]$ olsun. S nin elemanları $\{ (i, a^k, 1) \mid i \in I, 1 \leq k \leq n\}$ şeklindedir. Ayrıca $S \times S$ nin elemanları $\{ ((i, a^k, 1), (j, a^l, 1)) \mid i, j \in I$ ve $1 \leq k, l \leq n\}$ şeklindedir. $|S \times S| = m^2.n^2$ olduğuna dikkat edelim.

$S \times S$ tam basit yarıgrup olduğundan bir Rees matris yarıgrubuna izomorfiktir. (bkz. Howie, *1995*; Teorem *3.3.1*) Şimdi $S \times S$ ye izomorfik olan Rees matris yarıgrubunu inşa edeceğiz.

$S \times S$ tam basit yarıgrup olduğundan bir primitif idempotent eleman içerir. $e = ((i_1, a^{k_1}, 1), (i_2, a^{k_2}, 1))$ $S \times S$ nin bir primitif idempotent elemanı olsun. $\{ ((i_1, a^{k_1+k}, 1), (i_2, a^{k_2+l}, 1)) \mid 1 \leq (k_1 + k) \ (mod\ n), (k_2 + l) \ (mod\ n) \leq n \} = e\, S \times S = R_e$ (e yi içeren R – sınıfı) bulunur. (Howie, *1995*; Lemma *3.2.4*) $((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1))$ $S \times S$ nin bir elemanı olsun. $\{ ((i_3, a^{k_3+k}, 1), (i_4, a^{k_4+l}, 1)) \mid 1 \leq (k_3 + k) \ (mod\ n), (k_4 + l) \ (mod\ n) \leq n \} = ((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1))S \times S = R_{((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1))}$. ($((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1))$ elemanını içeren R- sınıfı) (Howie, 1995; Lemma 3.2.5) Benzer şekilde $\{ ((i, a^{k+k_3}, 1), (j, a^{l+k_4}, 1)) \mid 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq (k + k_3) \ (mod\ n), (l + k_4) \ (mod\ n) \leq n \} = S \times S((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1)) = L_{((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1))}$ ($((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1))$ elemanını içeren L- sınıfı) (Howie, 1995; Lemma 3.2.6) Dikkat edersek $L_{((i_3, a^{k_3}, 1), (i_4, a^{k_4}, 1))} = S \times S$ olduğu görülür.

(Howie, *1994;* Lemma *3.2.7*) den $S \times S$ regülerdir ve sadece bir $\mathcal{D}$ sınıfı içerir. $D = S \times S$ dir. Ayrıca aynı Lemmadan $a, b \in D$ ise $ab \in R_a \cap L_b$ bulunur.

H $S \times S$ nin bir $\mathcal{H}$-sınıfı olsun $D = S \times S$ olmak üzere H $\mathcal{D}$ sınıfının içindedir. $a, b \in H$ olsun. O zaman $ab \in R_a \cap L_b = H$ sağlanır. (Howie, *1995*; Teorem *2.2.5*) ten H bir gruptur. Dolayısıyla D içindeki $\mathcal{H}$-sınıflarını grup $\mathcal{H}$-sınıfları olarak düşünebiliriz.

Şimdi $S \times S$ yi bir Rees matris yarıgrubu formuna dönüştürme işlemine hazırız. $S \times S$ nin $\mathcal{R}$-sınıflarından oluşan küme I_1, $\mathcal{L}$-sınıflarından oluşan küme J_1 olsun. Notasyon olarak I_1 ve J_1 i indeks kümeleri olarak düşüneceğiz. $\mathcal{R}$-sınıflarını R_i ($i \in I_1$) ve $\mathcal{L}$-sınıflarını L_j ($j \in J_1$) şeklinde göstereceğiz. $\mathcal{H}$-sınıfı $R_i \cap L_j$ kümesidir ve

H_{ij} ile gösterilir. Dolayısıyla $J_1 = S \times S$ ve $I_1 = \{ R_{((i,a^k,1),(j,a^l,1))} \,/\, i, j \in I,\ 1 \le k,\ l \le n\}$ olur.

D regüler bir $\mathcal{D}$ sınıfı olduğundan (Howie, 1995; Önerme 2.3.2) den her R_i en az bir grup H_{ij} $\mathcal{H}$-sınıfını içerir. Benzer şekilde her L_j en az bir grup $\mathcal{H}$-sınıfını içerir. Genelliği kaybetmeksizin $1 \in I_1 \cap J_1$ elemanı olduğunu varsayabiliriz öyle ki H_{11} bir grup $\mathcal{H}$-sınıfıdır. H_{11} in birim elemanını e ile gösterelim. Dikkat edersek hangi $\mathcal{H}$-sınıfını seçersek seçelim seçimimiz grubun temel özelliklerini değiştirmeyecektir, çünkü bir $\mathcal{D}$ sınıfı içerisindeki bütün grup $\mathcal{H}$-sınıfları birbirine izomorfiktir. (Howie, 1995; Önerme 2.3.6) H_{11} grubu bizim aradığımız Rees matris yarıgrubunun içindeki grup olacaktır.

$((1, a, 1), (1, a, 1)) \in S \times S$ sağlanır. $L_{((1,a,1),(1,a,1))} = S \times S$ ve $R_{((1,a,1),(1,a,1))} = \{ ((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)) \,/\, 1 \le r,\ s \le n\}$ bulunur. $H_{((1,a,1),(1,a,1))} = L_{((1,a,1),(1,a,1))} \cap R_{((1,a,1),(1,a,1))} = R_{((1,a,1),(1,a,1))} = \{ ((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)) \,/\, 1 \le r,\ s \le n\}$ olur.

Şimdi $G_1 = H_{((1,a,1),(1,a,1))}$ alacağız ve abelyen bir grup olduğunu göstereceğiz. $G_1 \subset S \times S$ olduğundan ve $S \times S$ yarıgrup olduğundan birleşme özelliği G_1 de sağlanır. $((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)), ((1, a^k, 1), (1, a^l, 1)) \in G_1$ olsun. $((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)), ((1, a^k, 1), (1, a^l, 1)).= ((1, a^{r+k}, 1), (1, a^{s+l}, 1))$ $(1 \le (r + k) \pmod n \le n,\ 1 \le (s + l) \pmod n \le n)$ olduğundan G_1 $S \times S$ de tanımlı işlemle kapalıdır. $((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)).\ ((1, a^n, 1), (1, a^n, 1)) = ((1, a^{r+n}, 1), (1, a^{s+n}, 1)) = ((1, a^r, 1), (1, a^s, 1))$ $(1 \le r,\ s \le n)$ ve $((1, a^n, 1), (1, a^n, 1)).\ ((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)) = ((1, a^{n+r}, 1), (1, a^{n+s}, 1)) = ((1, a^r, 1), (1, a^s, 1))$ $(1 \le r,\ s \le n)$ bulunur. O halde $e = ((1, a^n, 1), (1, a^n, 1))$ bulunur ve G_1 grubunun birim elemanıdır.

$((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)) \in G_1$ $(1 \le r,\ s \le n)$ olsun. $((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)).\ ((1, a^{n-r}, 1), (1, a^{n-s}, 1)) = ((1, a^n, 1), (1, a^n, 1)) = e$ sağlanır. Her $((1, a^r, 1), (1, a^s, 1))$ elemanının bir tersi vardır.

Eğer $((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)) \in G_1$ $(1 \le r,\ s \le n)$ ve $((1, a^k, 1), (1, a^l, 1)) \in G_1$ $(1 \le k,\ l \le n)$ ise $((1, a^r, 1), (1, a^s, 1)).\ ((1, a^k, 1), (1, a^l, 1)) = ((1, a^{r+k}, 1), (1, a^{s+l}, 1)) = ((1, a^{k+r}, 1), (1, a^{l+s}, 1)) = ((1, a^k, 1), (1, a^l, 1)).\ ((1, a^r, 1), (1, a^s, 1))$ bulunur. O halde G_1 bir abelyen gruptur.

Şimdi $S \times S$ yarıgrubuna izomorfik olan $M[G_1;\ I_1,\ J_1;\ P_1]$ Rees matris yarıgrubunu belirleyeceğiz. $J_1 = \{\ L_{((i\ ,a^k\ ,1),(j\ ,a^l\ ,1))}\ /\ 1 \le i, j \le m,\ 1 \le k,\ l \le n\ \} = \{\ S \times S\ \}$ olur ve $|J_1| = 1$ dir. Dikkat edersek $|G_1| = n.n = n^2$ bulunur. $I_1 = \{\ R_{((i\ ,a^k\ ,1),(j\ ,a^l\ ,1))}\ /\ 1 \le i, j \le m,\ 1 \le k,\ l \le n\ \}$ şeklindedir. $R_{((i\ ,a^k\ ,1),(j\ ,a^l\ ,1))} = \{((i,\ a^k,\ 1),\ (j,\ a^l,\ 1))\ /\ 1 \le k,\ l \le n\ \}$ ve $I = \{\ 1,\ 2,\ ...,\ m\}$ olduğundan farklı (i, j) çiftlerinin sayısı m^2 dir. O halde $|I_1| = m^2$ bulunur. P_1 $1 \times m^2$ tipinde elemanları $G_1 = H_{((1,\ a,\ 1),\ (1,\ a,\ 1))}$ kümesinden gelen normal matristir. ■

Sonuç 4.7.1. $M[C_n;\ I,\ \{1\};\ P] \times M[C_n;\ I,\ \{1\};\ P]$ etkin bir yarıgruptur.

İspat: $M[C_n;\ I,\ \{1\};\ P] \times M[C_n;\ I,\ \{1\};\ P]$ yarıgrubu $G_1 = H_{((1,\ a,\ 1),\ (1,\ a,\ 1))}$, $I_1 = \{\ R_{((i\ ,a^k\ ,1),(j\ ,a^l\ ,1))}\ /\ 1 \le i, j \le m,\ 1 \le k,\ l \le n\}$, $J_1 = \{\ L_{((i\ ,a^k\ ,1),(j\ ,a^l\ ,1))}\ /\ 1 \le i,\ j \le m,\ 1 \le k,\ l \le n\ \}$ ve P_1 $1 \times m^2$ tipinde elemanları $G_1 = H_{((1,\ a,\ 1),\ (1,\ a,\ 1))}$ kümesinden gelen normal matris olmak üzere $M[G_1;\ I_1,\ J_1;\ P_1]$ Rees matris yarıgrubuna izomorfiktir. G_1 abelyen grup olduğundan $M[G_1;\ I_1,\ J_1;\ P_1]$ Rees matris yarıgrubu etkindir. (Ayık 1998; Sonuç 7.7) ■

4.8. İki semilatisin direkt çarpımının etkinliği

S_1 ve S_2 birim elemansız, sıfır elemanlı iki serbest semilatis olsun. z_1 S_1 in sıfır elemanı ve z_2 S_2 nin sıfır elemanı olsun. Öncelikle S_1 ve S_2 nin 0-basit olduğu durumu inceleyeceğiz.

Lemma 4.8.1. S_1 ve S_2 birim elemansız, sıfır elemanlı iki serbest semilatis olsun. S_1 ve S_2 0-basit semilatislerse $S_1 \times S_2$ de 0-basit semilatistir.

İspat: S_1 ve S_2 birim elemansız, sıfır elemanlı iki serbest semilatis olsun. $(s_1,\ s_2) \neq 0 \in S_1 \times S_2$ ve $(s_3,\ s_4) \neq 0 \in S_1 \times S_2$ olsun. $s_1,\ s_3 \in S_1$ ve S_1 0-basit olduğundan $x_1,\ y_1 \in S_1$ vardır öyle ki $x_1 s_1 y_1 = s_3$ sağlanır. (Howie, Önerme *3.1.1*) Benzer şekilde $s_2,\ s_4 \in S_2$ ve S_2 0-basit olduğundan $x_2,\ y_2 \in S_2$ vardır öyle ki $x_2 s_2 y_2 = s_4$ sağlanır. O halde $(x_1,$

$x_2)(s_1, s_2)(y_1, y_2) = (x_1s_1y_1, x_2s_2y_2) = (s_3, s_4)$ sağlanır. $S_1 \times S_2$ de 0-basit semilatistir. $S_1 \times S_2$ 0-basit yarıgrup olduğundan tam 0-basittir. (bkz. Howie, Önerme 3.2.) ■

Şimdi $S_1 \times S_2$ nin bir Rees matris yarıgrubuna izomorfik olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.8.1. S_1 ve S_2 birim elemansız, sıfır elemanlı iki serbest semilatis olsun. S_1 ve S_2 0-basit semilatislerse $S_1 \times S_2$ bir Rees matris yarıgrubuna izomorfiktir.

İspat: S tam *0*-basittir ve bir primitif idempotent (e_1, e_2) elemanı içerir. (Howie, Teorem *3.2.3*) Howie, Teorem *3.2.3* ün ispatındaki Lemma *3.2.4* ten $R_{(e_1,e_2)} = (e_1, e_2)\ (S_1 \times S_2) \setminus (z_1, z_2) = \{\ (e_1s_1, e_2s_2) \ /\ s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\} \setminus (z_1, z_2)$ bulunur. Lemma *3.2.5* ten $S_1 \times S_2$ nin her $(a_1, a_2) \neq (z_1, z_2)$ elemanı için $R_{(a_1,a_2)} = (a_1, a_2)\ (S_1 \times S_2) \setminus (z_1, z_2) = \{\ (a_1s_1, a_2s_2) \ /\ s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\} \setminus (z_1, z_2)$ bulunur. Lemma 3.2.6 dan $S_1 \times S_2$ nin her $(a_1, a_2) \neq (z_1, z_2)$ elemanı için $L_{(a_1,a_2)} = (S_1 \times S_2)\ (a_1, a_2) \setminus (z_1, z_2) = \{\ (t_1a_1, t_2a_2) \ /\ t_1 \in S_1,\ t_2 \in S_2\} \setminus (z_1, z_2)$ bulunur. Lemma *3.2.7* den $S_1 \times S_2$ regülerdir ve iki tane $\mathcal{D}$-sınıfına sahiptir. Bu sınıflar $\{(z_1, z_2)\}$ ve $(S_1 \times S_2) \setminus (z_1, z_2)$ dir. Eğer $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathcal{D}$ ise ya $(a_1, a_2).\ (b_1, b_2) = (z_1, z_2)$ veya $(a_1, a_2).\ (b_1, b_2) \in R_{(a_1,a_2)} \cap L_{(b_1,b_2)}$ sağlanır. $(a_1, a_2).\ (b_1, b_2) \in R_{(a_1,a_2)} \cap L_{(b_1,b_2)}$ sağlanması için gerek ve yeter koşul $L_{(a_1,a_2)} \cap R_{(b_1,b_2)}$ nin bir idempotent içermesidir. (Howie, Önerme *2.3.7*) $D = (S_1 \times S_2) \setminus (z_1, z_2)$ bir (primitif) idempotent eleman içerdiğinden , tamamı regüler elemanlardan oluşur. (Howie, Bölüm *2.3*) (z_1, z_2) de regüler eleman olduğundan $S_1 \times S_2$ nin regüler olduğu sonucunu elde ederiz.

H $S_1 \times S_2$ nin $D = (S_1 \times S_2) \setminus (z_1, z_2)$ $\mathcal{D}$- sınıfı içindeki $\mathcal{H}$ sınıfı olsun. $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathcal{H}$ olsun. O zaman $(a_1, a_2).\ (b_1, b_2) \in R_{(a_1,a_2)} \cap L_{(b_1,b_2)} = H$ veya $(a_1, a_2).\ (b_1, b_2) = (z_1, z_2)$ dir. Birinci durumda Green Teoremi gereğince H bir gruptur. (Howie, Teorem *2.2.5*). İkinci durumda $H^2 = \{(z_1, z_2)\}$ dir, çünkü (c_1, c_2) ve (d_1, d_2) H nin herhangi iki elemanı ise $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S_1 \times S_2$ vardır öyle ki $(c_1, c_2) = (x_1, x_2)\ (a_1, a_2),\ (d_1, d_2) = (b_1, b_2).\ (y_1, y_2)$ ve buradan $(c_1, c_2).\ (d_1, d_2) = ((x_1, x_2)\ (a_1, a_2)).$

$((b_1, b_2).(y_1, y_2)) = (x_1, x_2)((a_1, a_2).(b_1, b_2).)(y_1, y_2) = (z_1, z_2)$ elde edilir. Dolayısıyla D içindeki $\mathcal{H}$ sınıfları ya grup $\mathcal{H}$ sınıflarıdır ya da (z_1, z_2) ye eşit $\mathcal{H}$ sınıflarıdır.

Şimdi $S_1 \times S_2$ direkt çarpımına izomorfik olan bir Rees matris yarıgrubu inşa edeceğiz. $S_1 \times S_2$ nin (z_1, z_2) den farklı $\mathcal{R}$–sınıflarını I ile ve (z_1, z_2) den farklı $\mathcal{L}$ –sınıflarını Λ ile gösterelim. Notasyon olarak I ve Λ yı indeks kümeleri olarak alacağız ve $\mathcal{R}$–sınıflarını R_i $(i \in I)$ ve $\mathcal{L}$ –sınıflarını L_λ $(\lambda \in \Lambda)$ ile göstereceğiz. $R_i \cap L_\lambda$ $\mathcal{H}$-sınıfı $H_{i\lambda}$ ile gösterilir.

D bir regüler $\mathcal{D}$ – sınıfı olduğundan (Howie, Önerme *2.3.2*) den her R_i en az bir grup $H_{i\lambda}$ $\mathcal{H}$ - sınıfı içerir. Benzer şekilde her L_λ en az bir grup $\mathcal{H}$ - sınıfı içerir. Genelliği kaybetmeksizin varsayabiliriz ki $1 \in I \cap \Lambda$ vardır öyle ki H_{11} bir grup $\mathcal{H}$ – sınıfıdır. H_{11} in birim elemanını e ile gösterelim. Dikkat edersek herhangi bir grup $\mathcal{H}$ – sınıfının seçimi grubun temel özelliklerini etkilemez, çünkü (Howie, Önerme *2.3.6*) dan bir $\mathcal{D}$ – sınıfı içindeki bütün $\mathcal{H}$ – sınıfları birbirine izomorfiktir. H_{11} grubu bizim aradığımız Rees matris yarıgrubunun inşasında kullanılacaktır.

$(a_1, a_2) \neq (z_1, z_2)$ için $R_{(a_1,a_2)} \cap L_{(a_1,a_2)} = (a_1, a_2)(S_1 \times S_2) \setminus (z_1, z_2) \cap (S_1 \times S_2)(a_1, a_2) \setminus (z_1, z_2) = \{ (a_1s_1, a_2s_2) \,/\, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\} \setminus (z_1, z_2) \cap \{ (t_1a_1, t_2a_2) \,/\, t_1 \in S_1, t_2 \in S_2\} \setminus (z_1, z_2) = \{ (a_1s_1, a_2s_2) \,/\, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\} \setminus (z_1, z_2) \cap \{ (a_1t_1, a_2t_2) \,/\, t_1 \in S_1, t_2 \in S_2\} \setminus (z_1, z_2) = \{ (a_1s_1, a_2s_2) \,/\, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \} \setminus (z_1, z_2) = H_{(a_1,a_2)}$. $(a_1s_1, a_2s_2) \in H_{(a_1,a_2)}$ için $(a_1s_1, a_2s_2) = (a_1^2s_1^2, a_2^2s_2^2) = ((a_1a_1)(s_1s_1), (a_2a_2)(s_2s_2)) = ((a_1s_1)(a_1s_1), (a_2s_2)(a_2s_2)) = (a_1s_1, a_2s_2)$. (a_1s_1, a_2s_2) olup $(a_1s_1, a_2s_2) \in H^2_{(a_1,a_2)}$ olur. Buradan $H_{(a_1,a_2)} \subseteq H^2_{(a_1,a_2)}$ ve dolayısıyla $H_{(a_1,a_2)} = H^2_{(a_1,a_2)}$ elde edilir. (Howie, Teorem 2.2.5) ten H S nin altgrubudur. O halde $G = H_{(a_1,a_2)}$ $((a_1, a_2) \neq (z_1, z_2))$ alabiliriz.

Şimdi $M[G; I, J; P]$ Rees matris yarıgrubunu belirleyeceğiz. $J = \{ L_{(a,b)} \,/\, (a, b) \in S_1 \times S_2 \setminus (z_1, z_2) \}$ olur. $G = H_{(a_1,a_2)}$ bulunur. $I = \{ R_{(c,d)} \,/\, (c, d) \in S_1 \times S_2 \setminus (z_1, z_2) \}$ şeklindedir. P $|J| \times |I|$ tipinde elemanları $G = H_{(a_1,a_2)}$ kümesinden gelen normal matristir.

$G = H_{(a_1,a_2)} = \{ (a_1s_1, a_2s_2) / s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \} \setminus (z_1, z_2)$ dir. $(a_1s_1, a_2s_2) \in G$ $(s_1 \in S_1, s_2 \in S_2)$ ve $(a_1t_1, a_2t_2) \in G$ $(t_1 \in S_1, t_2 \in S_2)$ olsun. $(a_1s_1, a_2s_2).(a_1t_1, a_2t_2) = (a_1s_1 a_1t_1, a_2s_2 a_2t_2) = (a_1t_1 a_1s_1, a_2t_2 a_2s_2) = (a_1t_1, a_2t_2).(a_1s_1, a_2s_2)$ sağlanır. Çünkü S_1 ve S_2 semilatisler olduğundan değişmelidir. O halde G bir abelyen gruptur. $S_1 \times S_2$ direkt çarpımı $M[G; I, J; P]$ Rees matris yarıgrubuna izomorfiktir. ■

Sonuç 4.8.1. $M[G; I, J; P]$ etkin bir yarıgruptur.

İspat: $S_1 \times S_2$ semilatisi $G = H_{(a_1,a_2)}$, $I = \{ R_{(c,d)} / (c, d) \in S_1 \times S_2 \setminus (z_1, z_2) \}$, $J = \{ L_{(a,b)} / (a, b) \in S_1 \times S_2 \setminus (z_1, z_2) \}$ ve P $|J| \times |I|$ tipinde elemanları $G = H_{(a_1,a_2)}$ kümesinden gelen normal matristir. $S_1 \times S_2$ semilatisi $M[G; I, J; P]$ Rees matris yarıgrubuna izomorfiktir. G abelyen grup olduğundan $M[G; I, J; P]$ Rees matris yarıgrubu etkindir. (bkz. Ayık 1998; Sonuç 7.7) O halde $S_1 \times S_2$ semilatisi etkin bir yarıgruptur. ■

Böylece S_1 ve S_2 0-basit iken $S_1 \times S_2$ direkt çarpımının da basit olduğunu gösterdik. Ayrıca $S_1 \times S_2$ ye izomorfik olan etkin bir Rees matris yarıgrubu inşa ettik. Şimdi S_1 veya S_2 nin 0-basit olmaması durumunda $S_1 \times S_2$ nin etkin olup olmadığını inceleyeceğiz. Genelliği kaybetmeksizin varsayalım ki S_1 0-basit olmasın. Aşağıdaki Teoremde $S_1 \times S_2$ nin etkin olmadığını göstereceğiz.

Teorem 4.8.2. S_1 ve S_2 birim elemansız, sıfır elemanlı iki serbest semilatis olsun. Eğer S_1 0-basit değilse ve $S_1^2 = 0$ ise $S_1 \times S_2$ nin etkin olması için gerek ve yeter koşul S_2 nin etkin olmasıdır. $S_1^2 \neq 0$ ise $S_1 \times S_2$ etkin değildir.

İspat: S_1 ve S_2 birim elemansız, sıfır elemanlı iki serbest semilatis ve S_1 0-basit olmasın. Öncelikle varsayalım ki $S_1^2 = 0$ olsun. Varsayalım ki $S_1 \times S_2$ etkin olsun. O zaman S_1 semilatis olduğundan her elemanı idempotenttir ve dolayısıyla $S_1^2 = S_1 = 0$ sağlanır. Bu durumda $S_1 \times S_2 = \{0\} \times S_2 \cong S_2$ olduğundan S_2 de etkin olur. Şimdi tersinin doğruluğunu gösterelim. S_2 etkin ise $S_1^2 = S_1 = 0$ sağlandığından $S_2 \cong \{0\} \times S_2 = S_1 \times S_2$ olur. Yine bu durumda da $S_1 \times S_2$ etkin olur.

Şimdi varsayalım ki $S_1^2 \neq 0$ ve S_1 in bir I ideali olsun öyle ki $S_1 \neq I$ sağlansın. O zaman $I \times S_2 \subset S_1 \times S_2$ bir ideal olur. Çünkü her $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ve $(t_1, s_3) \in I \times S_2$ için $(t_1, s_3).(s_1, s_2) = (t_1s_1, s_3s_2)$ olup I S_1 in ideali olduğundan $t_1s_1 \in I$ sağlanır. $(t_1s_1, s_3s_2) \in I \times S_2$ bulunur. Şimdi $S_1 \times S_2$ nin etkin olmadığını göstereceğiz.

$\wp = \langle X / R \rangle$ $S_1 \times S_2$ yi tanımlayan herhangi bir takdim olsun. $X_1 = X \cap (I \times S_2)$ ve $X_2 = X \cap (S_1 \times S_2 / I \times S_2)$ olsun. $X = X_1 \cup X_2$ olur. $X_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $X_2 = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ olsun.

$R_1 = \{(r, x) \in R / r \in X_2^+, x \in X_2\} \subseteq R$, $R_2 = R / R_1$, $R_3 = \{(s, y) \in R / s \in X^+, y \in X_1\} \subseteq R_2$.

Her $x \in X_2$ için $x^2 = x$ $S_1 \times S_2$ de sağlanır. $x^2 = x$ bağıntısı R deki bağıntıların bir sonucudur. O halde R_1 de $r = x$ formunda bir bağıntı vardır. O halde

$$/ R_1 / \geq / X_2 / \tag{4.8.1}$$

bulunur.

Diğer yandan her $y \in X_1$ için $y^2 = y$ bağıntısı $I \times S_2 \subseteq S_1 \times S_2$ de sağlandığından R_3 de $s = y$ formunda bir bağıntı vardır. Buradan

$$/ R_3 / \geq / X_1 / \tag{4.8.2}$$

bulunur.

Her $x \in X_1$ ve her $y \in X_2$ için $xy = yx$ bağıntısı $S_1 \times S_2$ de sağlanır ve dolayısıyla R deki bağıntıların sonucudur. xy ye $(R_1 \cup R_3)$ ten bağıntılar uygulandığında geriye hep $(X_1 \cup X_2)^+ . (X_1 \cup X_2)^+$ dan gelen kelimeler kalır, fakat yx bu formda değildir. $X_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $X_2 = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ olduğundan

$$/ R_2 / R_3 / \geq nm \tag{4.8.3}$$

elde edilir.

(4.8.1), *(4.8.2)* ve *(4.8.3)* ü birleştirirsek;

$$
\begin{aligned}
|R| - |X| &= |R_1| + |R / R_1| - |X_1| - |X_2| = |R_1| + |R_3| + |R_2 / R_3| - |X_1| - |X_2| \\
&= |R_1| - |X_2| + |R_3| - |X_1| + |R_2 / R_3| \geq |R_2 / R_3| \geq nm > 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $def(\wp) > 0$ ve dolayısıyla $def(S_1 \times S_2) > 0$ elde edilir. Diğer yandan S_1 in sıfır elemanı z_1 ve S_2 nin sıfır elemanı z_2 ise (z_1, z_2) $S_1 \times S_2$ nin sıfır elemanıdır. O halde $rank(H_2(S_1 \times S_2)) = 0$ olduğundan $def(S_1 \times S_2) \neq rankH_2(S_1 \times S_2)$ bulunur. Dolayısıyla $S_1 \times S_2$ etkin değildir. ■

Eğer S_1 ve S_2 tam 0-basit semilatisler değilse yine Teorem 4.8.2 nin koşulları sağlanır. Aynı sonuçlar elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada daha önce etkinliği araştırılmamış bazı sıfır elemanlı özel yarıgrupların etkinliğini inceledik. Yarıgrupların etkinliği ilk defa (Ayık ve diğerleri, 2000a) da incelendi. Daha sonra bu konuda birçok makale yayınlandı. Sıfır elemana sahip (sağ veya sol) yarıgrupların ikinci integral homolojisinin aşikar grup olduğu bilinmektedir. (Ayık ve diğerleri, 2000a). Bu makalede n elemanlı Z_n sıfır yarıgrubunun deficiencysinin $(n-1).(n-2)$ olduğu ve 2^n-1 elemanlı SL_n serbest semilatisinin deficiencysinin $\frac{n(n-1)}{2}$ olduğu gösterilmişti. O halde $n \geq 3$ için Z_n ve SL_n sıfır elemanlı yarıgruplardır ve etkin değildirler. Sıfır elemanlı değişmeli bütün yarıgrupların etkin olup olmadığı sorusu akla gelebilir.

Bölüm 4.3. te CL_n yi tanımlayan etkin bir takdim verdik. (bkz. Teorem 4.3.1) Dolayısıyla CL_n nin etkin bir yarıgrup olduğu sonucuna vardık. Bölüm 4.4. te $CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ yarıgrubunu tanımlayan minimal $\wp_{m,n}$ takdimini belirledik. (bkz. Teorem 4.4.1) $n, m \geq 2$ için $def(\wp_{m,n}) = (n-1)(m-1)$ dir. $CL_{m,n}$ nin sıfır elemanı (a_m, b_n) olduğundan sıfır elemanlı bir yarıgruptur. O halde $def(\wp_{m,n}) \neq rank(H_2(CL_{m,n}))$ olduğu görülür. Bu durumda $\wp_{m,n}$ $CL_{m,n}$ için etkin bir takdim değildir.

Teorem 4.4.2 de $def(CL_{m,n})=(m-1).(n-1)$ olduğunu gösterdik. $m, n \geq 2$ için $CL_{m,n}$ nin etkin olmayan bir yarıgrup olduğu sonucunu elde ettik. Böylece değişmeli ve sıfır elemanlı bütün yarıgruplar etkin olup olmadığı sorusuna açıklık getirmiş bulunuyoruz. (Ayık, H., Minisker, M. and Vatansever, B.)

Bölüm 4.5 te herhangi bir yarıgrubun etkin olmayan bir yarıgruba gömülebileceğini gösterdik. S herhangi bir yarıgrup olmak üzere rankı n olan serbest semilatis yardımıyla $T = S \cup SL_n$ yarıgrubunu inşa ettik. (bkz. Tanım 4.5.2) Teorem 4.5.1 in ispatında S nin $T = S \cup SL_n$ yarıgrubuna gömülebileceğini ve T nin etkin olmadığını gösterdik. Böylece S nin etkin olmayan bir yarıgruba gömülebileceği sonucuna vardık.

Bölüm 4.6. da CL_m^n yarıgrubunu tanımlayan minimal takdimi belirledik (bkz. Teorem 4.6.1.) ve etkin olmadığı sonucuna vardık. (bkz. Teorem 4.6.2 ve Sonuç 4.6.1)

Bölüm 4.7 de özel seçilmiş iki etkin Rees matris yarıgrubunun direkt çarpımına izomorfik etkin bir Rees matris yarıgrubu inşa ettik. G grubu C_n, n elemanlı devirli grup, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1\}$ ve P de normal matris olsun. Yani P matrisinde her $i \in I$ için $p_{11} = p_{1i} = 1_G$ sağlansın. O zaman $M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubu üzerindeki çarpım:

$$(i, g, 1).(j, h, 1) = (i, gp_{\lambda j}h, 1) = (i, gh, 1)$$

şeklindedir. C_n abelyen grup olduğundan $M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubu etkindir. (Ayık, 1998; Sonuç 7.7) $M[C_n; I, \{1\}; P] \times M[C_n; I, \{1\}; P]$ direkt çarpım yarıgrubunun etkin olup olmadığını araştırdık. Teorem 4.7.2 nin ispatında $M[C_n; I, \{1\}; P] \times M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubunun bir Rees matris yarıgrubuna izomorfik olduğunu gösterdik. Sonuç 4.7.1 de $M[C_n; I, \{1\}; P] \times M[C_n; I, \{1\}; P]$ nin etkin bir yarıgrup olduğunu gördük. Sonuç 4.7.1 den iki etkin yarıgrubun direkt çarpımının etkin olabileceğini gördük.

Bölüm 4.3 de incelediğimiz CL_n yarıgrubu etkin olduğu halde bölüm 4.4 de $CL_{m,n} = CL_m \times CL_n$ yarıgrubunun etkin olmadığı sonucunu elde etmiştik. Bölüm 4.7 de ele aldığımız $M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubu etkindir. Teorem 4.7.2 ve Sonuç 4.7.1 den $M[C_n; I, \{1\}; P] \times M[C_n; I, \{1\}; P]$ yarıgrubunun etkin olduğu sonucuna vardık. Bu sonuca göre etkin iki yarıgrubun direkt çarpımı etkin olabilir. Bu durumda iki etkin yarıgrubun direkt çarpımının etkinliği konusunda etkindir veya değildir şeklinde kesin bir yargı olmadığı sonucunu elde etmiş bulunuyoruz.

Bölüm 4.8 de sıfır elemanlı iki semilatisin direkt çarpımının etkinliğini araştırdık. Teorem 4.8.1 de S_1 ve S_2 0-basit semilatislerse $S_1 \times S_2$ direkt çarpımının bir Rees matris yarıgrubuna izomorfik olduğunu gösterdik. Sonuç *4.8.1* de ise elde ettiğimiz Rees matris yarıgrubunun etkin olduğunu gösterdik. Daha sonra S_1 veya S_2 nin 0-basit olmaması durumunda $S_1 \times S_2$ nin etkin olup olmadığını inceledik. Teorem 4.8.2 de $S_1 \times S_2$ nin etkin olmadığını gösterdik.

Bundan sonraki çalışmalarda yarıgrupların etkinliği konusundaki çalışmalar geliştirilebilir. Direkt çarpım yarıgruplarının değişik kombinasyonları incelenebilir. $M[PSL(2, p); I, J; P] \times M[PSL(2, p); I, J; P]$ (p asal) yarıgruplarının etkinliği araştırılabilir. Sıfır elemanlı iki bandın direkt çarpımının etkinliği araştırılabilir.

KAYNAKLAR:

AYIK, H., 1998. Presentations and efficiency of semigroups. Ph. D. Thesis, University of St. Andrews.

AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., and RUSKUC, N., 2000a. Minimal presentations and efficiency of semigroups. Semigroup Forum, 60: 231-242.

AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., and RUSKUC, N., 2000b. On the efficiency of finite simple semigroups. Turkish Journal of Mathematics, 24: 129-146.

AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., and RUSKUC, N., 2000c. The semigroup efficiency of groups and monoids. Math. Proc. R. Ir. Acad., 100A: 171-176.

AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., and RUSKUC, N., 2000d. The semigroup efficiency of direct products of groups. Proc. Internat. Conf. Semigroups, eds. P. Smith, E. Giraldes and P. Martins, World Scientific, 19-25.

AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., and RUSKUC, N., 2000e. On the efficiency of wreath products of finite groups. Groups- Korea `98 (Pusan), de Gruyter, Berlin, 39-51.

AYIK, H., MİNİSKER, M. and VATANSEVER, B. Minimal Presentations and Embedding into Inefficient Semigroups. To appear in Algebra Colloquium.

BAIK, Y.G., and PRIDE, S.J., 1997. On the efficiency of Coxeter Groups. Bull London Mat. Soc., 29: 32-36.

BEETHAM, M.J., 1971. A set of generators and relations for the group *PSL(2, q)*, *q* odd. J. London Math. Soc., 2: 554-557.

BROOKES, M.J., CAMPBELL, C.M., and ROBERTSON, E.F., 1995. Efficiency and direct products of groups. Proc.Groups-Korea, Walter de Gruyter, 25-33.

BROOKES, M.J., 1995. On the efficiency of finite groups. Ph. D. Thesis, University of St. Andrews.

CAMPBELL, C.M. and ROBERTSON, E.F., 1980. A deficiency zero presentation for *SL(2,p)*. Bull. London Math. Soc., 12: 17-20.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., and WILLIAMS, P.D., 1990. Efficient presentations of the groups $PSL(2,p)\times PSL(2,p)$, p prime. J. London Math. Soc., (2) 41: 69-77.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., and THOMAS, R.M., 1992. Symmetric semigroup presentations. Semigroup Forum, 36: 55-68.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., and THOMAS, R.M., 1993a. On a class of semigroups with symmetric presentations. Semigroup Forum, 46: 286-306.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., and THOMAS, R.M., 1993b. Semigroup presentations and number sequences. Appl. Of Fibonacei Numbers, 5: 77-83.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., and THOMAS, R.M., 1994. Fibonacci Semigroups. Journal of Pure and Appl. Algebra, 94: 49-57.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., and THOMAS, R.M., 1995a. On semigroups defined by Coxeter type presentations. Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh, 125: 1063-1075.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., and THOMAS, R.M., 1995b. Reidemeister-Schreier type rewriting for semigroups. Semigroup Forum, 51: 47-62.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., and THOMAS, R.M., 1995c. Rewriting for semigroup presentation. International Journal of Algebra and Computation, 5(1): 81-103.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., THOMAS, R.M., and ÜNLÜ, Y., 1995. Certain one relator products of semigroups. Communications in Algebra, 23(14): 5207-5219.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., and THOMAS, R.M., 1996. On subsemigroups of finitely presented semigroups. Journal of Algebra, 180: 1-21.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., and WILLIAMS, P.D., 1997. Efficient presentations for direct powers of imperfect groups. Algebra Colloq., 4: 21-27.

CAMPBELL, C.M., MIYAMOTO, I., ROBERTSON, E.F., and WILLIAMS, P.D., 1997. The efficiency of $PSL(2,p)^3$ and other direct products of groups. Glasgow Math. Journal, 39: 259-268.

HOWIE, J.M., and RUSKUC, N., 1994. Constructions and presentations for monoids. Communications in Algebra, 22(15): 6209-6224.

HOWIE, J.M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press.

JAMALI, A., 1996. On the efficiency of some wreath products of groups. Bull. Iranian Math. Soc., 22: 23-24

JOHNSON, D.L.,1990. Presentations of Groups. London Math. Soc. Student Texts, 15, Cambridge University Press.

KOVACS, L. G., 1995. Finite groups with trival multiplicator and large deficiency. Proceedings Groups-Korea 1994, eds. A.C. Kim and D.L. Johnson, Walter de Gruyter, 211-225.

MACDONALD, I.D., 1968. The Theory of Groups. Oxford University Press, Oxford.

NEUMANN, B.H., 1967. Some remarks on semigroup presentations. Canad. J. Math., 19: 1018-1026.

ROBERTSON, E.F., 1982. Efficiency of finite simple groups and their covering groups. Finite groups coming of age. Montreal, Que, 287-294.

ROBERTSON, E.F., and ÜNLÜ, Y., 1992. On semigroup presentations. Proc. of Edinburgh Soc., 36: 55-68.

ROBERTSON, E.F., THOMAS, R.M. and WOTHERSPOON, C.I., 1995. A class of inefficient groups with symmetric presentation. in Kim, A.C. and Johnson, D.L.(eds). 'Groups-Korea 94'. Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York, 276-284.

ROTMAN, J.J, 1979. An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, New York, San Fransisco, London.

RUSKUC, N., 1995. Matrix semigroups-generators and relations. Semigroup Forum, 51: 319-333.

RUSKUC, N., 1995. Semigroup Presentations. Ph. D. Thesis, University of St.

Andrews.

SCHUR, I., 1907. Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. Reine Angew. Math. ,132: 85-137.

SWAN, R.G., 1965. Minimal resolutions for finite groups. Topology 4, 193-208.

VATANSEVER, B., 1992. Certain Classes of Group Presentations. Ph. D. Thesis, University of St. Andrews.

VATANSEVER, B., 1997. Efficient Presentations of the group $PSL(2, Z_n) \times PSL(2, Z_m)$, for certain n, m. Math. Scand., 80: 188-194.

ÖZGEÇMİŞ:

2. 5. 1974 tarihinde Mersin'de doğdum. İlköğrenimimi Mersin'de tamamladım. Ortaöğrenimimi İçel Anadolu Lisesi'nde tamamladım. 1992'de Özel Çukurova Bilfen Lisesi'ni bitirdim ve lisenin ilk mezunlarındanım. Bana Matematiği sevdiren 2000 yılında kaybettiğimiz lise Matematik hocam sayın Ali Avcı'yı da anmak istiyorum. 1992 Eylül'de Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladım. 1996'da Matematik Bölümünden fakülte birincisi olarak mezun oldum. 1998'de Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Prof. Dr. Melih Boral danışmanlığına yüksek lisansı tamamladım. Aynı yıl doktoraya başladım ve danışman hocam sayın Prof. Dr. Bilal Vatansever danışmanlığında çalışmalar yaptık.