



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**KUAZİLİNEER DİNAMİK SİSTEMLER VE
ONLARIN VİSKOELASTİK TİTREŞİMLERE
UYGULAMALARI**

**Cemal ÇİÇEK
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman
Prof. Dr. Musa İLYASOV**

Ocak, 2007

İSTANBUL

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin T-20/15122006 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Musa İLYASOV'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Eşim Dr. Gülseren Çiçek'e Rusça tercümelerinde ve tez yazımı sırasında yardımından dolayı teşekkürler. Ayrıca küçük kızım Aylin Çiçek'e karmaşık hayatımıza gerçek mutluluk kattığı için teşekkürler.

Ocak, 2007

Cemal ÇİÇEK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	6
2.1. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR	6
2.2. KARARLILIK TEORİSİ	8
2.2.1. Lyapunov Fonksiyonu Yöntemi	10
2.2.2. Çözümün Başlangıç Koşullarına ve Parametrelere Bağlılığı	13
3. BULGULAR	15
3.1. İKİ SERBESTLİK DERECELİ KUAZİLİNEER DİNAMİK SİSTEMLERİN İNCELENMESİ VE VİSKOELASTİK TİTREŞİMLERE UYGULAMALARI	15
3.2. PROBLEMİN KONUMU	16
3.3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ	17
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	54
4.1. GENLİKLERİN PROGRAM DEĞİŞİMLERİNİN DENKLEMLERİNİN KURULMASI	55
KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	71

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	: Yayla bağlanmış iki sarkaç 16
Şekil 4.1	: (4.4) sisteminin $\nu = 1.1$, $A = 0.3$, $B = .7$, $C = 0.8$, $D = -1$ $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, $0 \leq t \leq 25$ için çözümü 57
Şekil 4.2	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.8$, $A = 3$, $B = 11$, $C = 6$, $D = -6$ $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, $0 \leq t \leq 25$ için çözümü 58
Şekil 4.3	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.9$, $A = 3$, $B = 14$, $C = 8$, $D = -6$ $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, $0 \leq t \leq 20$ için çözümü 58
Şekil 4.4	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.4$, $A = 0.3$, $B = 1$, $C = 0.8$, $D = -1$ $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, (a) $0 \leq t \leq 10$ (b) $0 \leq t \leq 20$ (c) $0 \leq t \leq 30$ (d) $0 \leq t \leq 50$ (e) $0 \leq t \leq 80$ (f) $0 \leq t \leq 85$ (g) $0 \leq t \leq 90$ (h) $0 \leq t \leq 120$ (i) $0 \leq t \leq 150$ (j) $0 \leq t \leq 800$ için çözümü 61
Şekil 4.5	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.1$, $A = 0.3$, $B = 1$, $C = 0.8$, $D = -1$ $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, (a) $0 \leq t \leq 10$ (b) $0 \leq t \leq 20$ için çözümü..... 61
Şekil 4.6	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.2$, $A = 0.3$, $B = 0.7$, $C = 0.8$, $D = -1$ $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, (a) $0 \leq t \leq 10$ (b) $0 \leq t \leq 25$ (c) $0 \leq t \leq 30$ (d) $0 \leq t \leq 45$ (e) $0 \leq t \leq 120$ (f) $0 \leq t \leq 300$ için çözümü.....63
Şekil 4.7	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.25$, $A = 0.3$, $B = 0.1$, $C = 0.2$, $D = -2$ $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, (a) $0 \leq t \leq 10$ (b) $0 \leq t \leq 20$ (c) $0 \leq t \leq 40$ (d) $0 \leq t \leq 46$ (e), (f) $0 \leq t \leq 120$ (g), (h) $0 \leq t \leq 1220$ için çözümü65

Şekil 4.8	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.9$, $A = 3$, $B = 4$, $C = 10$, $D = -6$ $\varphi(0) = 3$, $\psi(0) = 3.15$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$ (a), (b) $0 \leq t \leq 20$ için çözümü.....	65
Şekil 4.9	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.9$, $A = 3$, $B = 4$, $C = 10$, $D = -6$ $\varphi(0) = 3$, $\psi(0) = 3.15$, $\dot{\varphi}(0) = 2$, $\dot{\psi}(0) = 0$ (a), (b) $0 \leq t \leq 20$ için çözümü	66
Şekil 4.10	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.9$, $A = 3$, $B = 4$, $C = 10$, $D = -6$ $\varphi(0) = 3$, $\psi(0) = 3.15$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 2$ (a), (b) $0 \leq t \leq 20$ için çözümü	66
Şekil 4.11	: (4.4) sisteminin $\nu = 0.9$, $A = 3$, $B = 4$, $C = 10$, $D = -6$ $\varphi(0) = 3$, $\psi(0) = 3.15$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 2$ (a), (b) $0 \leq t \leq 20$ için çözümü	67

SEMBOL LİSTESİ

f_j	: Lineer olmayan fonksiyonlar
$F_j(t)$	: Zamana bağlı fonksiyonlar
a_{jk}, c_{jk}, d_{jk}	: Sabit katsayılar
q_k	: t 'nin lineer olmayan fonksiyonları
$\dot{q}_k, \ddot{q}_k$	: q_k 'nin t 'ye göre sırasıyla birinci ve ikinci türevleri
φ, ψ	: Sarkaçların dikey eksenenden sapma açıları
m_1, m_2	: Sarkaçların kütleleri
c	: Yay sabiti
l	: Sarkaçların uzunluğu
d	: Sarkaçların dönme eksenlerinden yayın bağlantı noktasına olan uzaklık
u_1, u_2, U_1, U_2	: Kontrol momentleri
M_1, M_2	: Kuvvet momentleri
ν, ν_1, ν_2	: Sönüm katsayısı
w, w_i	: Yörünge eğrileri
g	: Yerçekim ivmesi
ω	: Frekans
$\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$	: Lyapunov karakteristik belirticileri
A	: Sistemin katsayılar matrisi
T	: Periyot
λ_i	: Karakteristik denklemin kökleri
a, b, β_1, β_2	: Zamanın zayıf değişmeli fonksiyonları
k_1, k_2	: Esas frekanslar

ÖZET

KUAZİLİNEER DİNAMİK SİSTEMLER VE ONLARIN VİSKOELASTİK TİTREŞİMLERE UYGULAMALARI

Bu tez çalışmasında lineer olmayan bir sınıftan dinamik sistemlerin temel problemlerinin konumu ve önemli çözüm yöntemleri ele alınmaktadır. Çözümler bilim ve teknolojinin birçok alanında kullanılabilir hale getirilmiştir. Burada matematiksel problemler çok zor olduğundan tam analitik çözümler mevcut değildir. Özellikle bu sisteme sönüm (viskozite) de eklenirse problemin çözümü daha da zorlaşmaktadır. Sistemlerin çözümlerinin bulunması ve onların davranışının kontrolü güncel bir problem olmaktadır. Tez çalışmasında böyle bir kaç inceleme de yapılmaktadır.

Eksponansiyel çekirdek fonksiyonunun üssü sönüm katsayısı ile bağlı olduğundan elde edilen çözümlerin bu parametreye bağımlılığı incelenmektedir. Viskoelastik titreşimli dinamik sistem yayla birbirine bağlanmış iki sarkacın hareket denklemlerine uyarlanmaktadır. Çözümlerin kararlılığı, asimptotik kararlılığı ve kararsızlığı, parametrelerin farklı değerleri için Maple 10 programı yardımıyla çözülmekte, çeşitli iki ve üç boyutlu yörüngeler elde edilmektedir. Problemin analitik çözümü çok zor olduğu için elde edilen grafiklerin incelenmesiyle ortaya çıkan kritik noktalar, bulunan sonuçlar ve çözüm yöntemi farklı alanlardaki araştırmacılar tarafından kullanılabilir.

SUMMARY

QUASILINEAR DYNAMIC SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS TO VISCOELASTIC VIBRATIONS

The statement of fundamental problems and solution methods in a nonlinear class of dynamic systems is studied in the present thesis. The solutions of dynamical problems are used in a number of areas of science and technology. Here the mathematical problems are very difficult, so exact analytic solutions don't exist. Especially, the solution of the problem gets harder if viscosity is added to the systems. Obtaining the solutions of the systems and controlling their behavior are actual problem. There are some investigations of this kind in the thesis, too.

Since the power of exponential kernel function is related with the viscosity coefficient, the dependence of the solutions obtained on this parameter is studied. Viscoelastic dynamic system with vibration is adapted to the equations of motion of two binding pendulums spring to each other. Stability, asymptotic stability and instability of the solutions are solved by using Maple 10 programme for the different values of parameters. There are some orbits in two and three dimensions. Since the analytic solution of the problem is hard to be found, the results obtained and the critical points got by investigating the graphs and can be used by investigators in various fields.

ÖZET

KUAZİLİNEER DİNAMİK SİSTEMLER VE ONLARIN VİSKOELASTİK TİTREŞİMLERE UYGULAMALARI

Bu tez çalışmasında lineer olmayan bir sınıftan dinamik sistemlerin temel problemlerinin konumu ve önemli çözüm yöntemleri ele alınmaktadır. Çözümler bilim ve teknolojinin birçok alanında kullanılabilir hale getirilmiştir. Burada matematiksel problemler çok zor olduğundan tam analitik çözümler mevcut değildir. Özellikle bu sisteme sönüm (viskozite) de eklenirse problemin çözümü daha da zorlaşmaktadır. Sistemlerin çözümlerinin bulunması ve onların davranışının kontrolü güncel bir problem olmaktadır. Tez çalışmasında böyle bir kaç inceleme de yapılmaktadır.

Eksponansiyel çekirdek fonksiyonunun üssü sönüm katsayısı ile bağlı olduğundan elde edilen çözümlerin bu parametreye bağımlılığı incelenmektedir. Viskoelastik titreşimli dinamik sistem yayla birbirine bağlanmış iki sarkacın hareket denklemlerine uyarlanmaktadır. Çözümlerin kararlılığı, asimptotik kararlılığı ve kararsızlığı, parametrelerin farklı değerleri için Maple 10 programı yardımıyla çözülmekte, çeşitli iki ve üç boyutlu yörüngeler elde edilmektedir. Problemin analitik çözümü çok zor olduğu için elde edilen grafiklerin incelenmesiyle ortaya çıkan kritik noktalar, bulunan sonuçlar ve çözüm yöntemi farklı alanlardaki araştırmacılar tarafından kullanılabilir.

SUMMARY

QUASILINEAR DYNAMIC SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS TO VISCOELASTIC VIBRATIONS

The statement of fundamental problems and solution methods in a nonlinear class of dynamic systems is studied in the present thesis. The solutions of dynamical problems are used in a number of areas of science and technology. Here the mathematical problems are very difficult, so exact analytic solutions don't exist. Especially, the solution of the problem gets harder if viscosity is added to the systems. Obtaining the solutions of the systems and controlling their behavior are actual problem. There are some investigations of this kind in the thesis, too.

Since the power of exponential kernel function is related with the viscosity coefficient, the dependence of the solutions obtained on this parameter is studied. Viscoelastic dynamic system with vibration is adapted to the equations of motion of two binding pendulums spring to each other. Stability, asymptotic stability and instability of the solutions are solved by using Maple 10 programme for the different values of parameters. There are some orbits in two and three dimensions. Since the analytic solution of the problem is hard to be found, the results obtained and the critical points got by investigating the graphs and can be used by investigators in various fields.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında lineer olmayan dinamik sistemlerin temel problemlerinin konumu ve önemli çözüm yöntemleri ele alınmaktadır. Özellikle son yıllarda literatürde sık sık görülen özlü elastikiyet (esneklik) problemlerinin dinamik sistemleri [1],[2] ve viskozite özelliğinin çözümlere olan etkisi incelenmektedir [3]. Bilindiği gibi viskozite olmadığı durumda iyi konulmuş problem, viskozite halinde de iyi konulmuş olmaktadır [4]. Dolayısıyla ele aldığımız problemlerde viskozite özelliği dikkate alınmakla dinamik sistemlerin çözümünün varlık ve teklik problemleri ile ilgilenilmemektedir. Uygun elastik problemin çözümünün varlığı ve tekliği bizim böyle bir adım atmamıza neden olmaktadır.

Dinamik sistem kavramı mekanik titreşim [5], [6], [7] kavramının genelleştirilmesi halinde ortaya çıkmıştır ve diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Her bir bilim dalı gibi dinamik sistemler teorisi de sürekli olarak yenilenmekte ve daha da derinleşmektedir. Viskozite özelliğinin dikkate alınması bu olaylardan biridir. Genellikle bu özellik dikkate alınırken dinamik sistem integro-diferansiyel denklemler sistemi [8] ile yazılmaktadır. Buradaki çekirdek fonksiyonuna bağlı olarak uygulamada karşımıza çıkan çeşitli olayların matematiksel modelleri yazılabilmektedir.

Bu çalışmada eksponansiyel çekirdek fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu durumda integro-diferansiyel denklemler bir mertebe daha yüksek diferansiyel denklemler sistemine indirgenir[8]. Böyle bir yaklaşım çeşitli bilim adamları tarafından titreşim problemlerinde uygulanmaktadır. Eksponansiyel fonksiyonun üssü sönüm katsayısı ile sıkı bağlı olduğu için elde ettiğimiz çözümlerin bu parametreye bağlılığı incelenmiştir. Çözümlerin kararlılığı, asimptotik kararlılığı ve kararsızlığı [9], [10], [11], [12], [13] parametrelerin çeşitli değerleri için Maple 10 program yardımıyla çözülmüş, çeşitli iki ve üç boyutlu yörüngeler elde edilmiştir. Problemin analitik çözümü çok zor olduğu için

kritik noktalar, elde edilmiş grafiklerin incelenmesiyle ortaya çıkmıştır. Elde edilen grafikler tezde bulunmuş sonuçların mühendisler ve diğer uygulamacılar tarafından kullanılabilmesini kolaylaştıracaktır.

Lineer olmayan dinamik sistemlerin çözümü bilim ve teknolojinin birçok alanında kullanılmaktadır. Bu problem matematiksel açıdan çok zor olup, analitik araştırmalar bulunmamaktadır [14]. Özellikle bu sisteme sönüm (viskozite) de eklenirse problemin çözümü daha da zorlaşmaktadır. Böyle sistemlerin çözümlerinin bulunması ve bu çözümlerin davranışının kontrolü güncel bir problem olmaktadır. Bu tez çalışmasında böyle bir sınıftan olan bir kaç inceleme yapılmaktadır. Tezde bazı asimptotik yöntemler ve bilgisayar çizimleri kullanılmaktadır. Bunlar sırasıyla ortalamaştırma, lineerleştirme, küçük parametre ve stasyoner faz yöntemleridir [3], [4], [7], [15].

Bu tez çalışmasında hareket denklemleri genel haliyle $j = 1, 2, \dots, s$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + d_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = \mu f_j(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) + F_j(t) \quad (1.1)$$

şeklinde olan genel dinamik sistemlerin özellikleri incelenmektedir [4], burada μ küçük parametredir, f_j 'ler $q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t$ 'nin lineer olmayan fonksiyonları, $F_j(t)$ zamana bağlı fonksiyonlar ve a_{jk}, c_{jk}, d_{jk} sabit katsayılar ve $d_{jk} \dot{q}_k$ 'ler sönüm olayını yansıtan terimlerdir. Gözlemlenen dinamik sistem, $F_j(t) = 0$ durumunda $\mu = 0$ ve sönüm olmadığı durumda enerjinin korunumu kanununu gerçeklemektedir [4]. Böyle kuazilineer sistemlerin incelenmesindeki yöntemlerin geliştirilmesi ve belirli problemlerin çözümlenmesinde bu yöntemlerin uygulanmasına değinen birçok kaynak vardır. Bunlar arasında temel oluşturan lineer olmayan sistemlerde asimptotik yöntemler kullanarak incelemelerde bulunan [4], [16], [17], [18], [19] çalışmaları gösterilebilir. Bu metotların temelinde, elde edilen çözümün varlığı hipotezi yatmaktadır ve (1.1) sisteminin $\mu = 0$ için çözümü alınmaktadır.

Konunun güncelliği, incelenecek olan alanda yayın sayılarının giderek artmasından belli olmaktadır. Tarafımdan bu alanda literatür taraması yapılmış ve gereken ön bilgilere

varılmıştır. Konuya en yakın olan [4], [19], [20] yayınlarıdır. Mevcut literatür taranmış ve sönüm olayını yansıtan terimlerin bulunduğu lineer olmayan dinamik sistemlerin incelenmediği görülmüştür.

Amacım sönümlü titreşimli dinamik sistemler için çözüm bulmak ve sonuçları bilgisayar ortamında çizmektir. Ayrıca dinamik sistemlerin faz yörüngelerinin elde edilmesi ve çözümlerinin kararlılığının incelenmesi de amaçlanmaktadır.

Bugüne kadar viskoelastik sistemleri inceleyen yayınların az olmasına rağmen viskoelastik terimin varlığına mühendislik problemlerinde sıkça rastlanmaktadır [21], [22]. Bu açıdan tezde ele alınacak problemler yenidir, günceldir ve yapılacak incelemeler özgün olmaktadır. Elde edilecek sonuçlar köprülerin, yeraltı ve yer üstü mühendislik yapılarının ve hareket halinde olan tüm teknolojik sistemlerin (uçaklar, helikopterler, trenler, gemiler, otomobiller vs.) incelenmesinde uygulanabilecektir.

İki serbestlik derecesi bulunan lineer olmayan dinamik sistemlerin kontrolü problemi [19] ele alınmaktadır. Kontrol hedefi (zayıf değişken parametreler arasında istenen bağıllığın bulunması) C^1 sınıfından olan ve yörüngelere parçalanmış global yapıya sahip olan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x, y) \\ \dot{y} &= Y(x, y)\end{aligned}\tag{1.2}$$

şeklindeki diferansiyel denklemler sistemi ile verilmektedir. Göz önüne alınan bölgenin her bir noktasında dinamik sistemin çözümünün varlığı ve tekliği bu bölgenin her bir noktasından bir ve yalnız bir yörünge geçtiğini ve yörünge geçmeyen hiç bir nokta bulunmadığını göstermektedir. Bu durumda bölge, yörüngelere parçalanmış yapıya sahiptir denir [10]. İstenen kontrolün elde edilmesi, mekanik sistemin verilen hareket denklemlerinin lineerleştirilmesini, ortalastırılmasını veya herhangi bir sadeleşmeyi ön görmemektedir.

Kuazilineer kontrol sistemi

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + d_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = \mu (f_j + u_j), \quad (j=1,2,\dots,s) \quad (1.3)$$

şeklindeki denklemler ile ifade edilen mekanik sistemlerin istenen özelliklerini sağlamaktadır [4], burada μ küçük parametre; $j=1,2,\dots,s$ için f_j 'ler $q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ ve t 'nin lineer olmayan fonksiyonları; u_j 'ler kontrollere dir. Birbirine bağlanmış iki sarkacın zayıf değişmeli genlikli titreşimleri problemi bu sistemle yazılabilen örneklerden biridir [19].

Butenin, Nejmark ve Fufaev 1987'de [4]

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= \mu f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= \mu g_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) \end{aligned}$$

denklemleri ile ifade edilen dinamik sistemleri incelemiştir. Daha sonra Volkov 2002 yılında [9] genel hali

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_1 \sin q_1 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= \mu (f + u_1) \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_2 \sin q_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= \mu (g + u_2) \end{aligned}$$

olan dinamik sistemlerde $a_{12} = a_{22} = 0$ alarak u_1 ve u_2 kontrol momentlerini bulmuştur.

Bu tezde Bu tezde $e_1 \dot{q}_1, e_2 \dot{q}_2$ sönüm olayını belirten terimleri sırasıyla 1. ve 2. denkleme ilave edilerek ve $a_{12} = a_{22} = 0$ alınarak viskoelastik titreşimli dinamik sistem yayla birbirine bağlanmış iki sarkacın hareket denklemlerine uyarlanacaktır. Burada viskozite, yayların bağlandığı noktalardaki sürtünme, hava direnci, sarkaçları birbirine bağlayan yayın (viskoelastik) özellikleri ve farklı nedenlerle ortaya çıkabilir [8]. Elde edilecek sistemin çözüm ailesi bulunup Mapple 10 programı yardımıyla

bilgisayar ortamına aktarılacak ve çizdirilecektir. Dinamik sistemler için mevcut olan yöntemler yani ortalamaştırma, lineerleştirme, küçük parametre ve stasyoner faz kullanılacaktır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Çok sayıda mekanik, elektrik ve farklı türden olan makinelerin çalışması ve diğer olaylar, genellikle birkaç bilinmeyen fonksiyon ve onların bir değişkene göre türevlerini içeren denklemler sistemi ile yazılır.

Tanım. Bağımsız değişkeni, bu değişkenin fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemler sistemine diferansiyel denklemler sistemi denir.

Bağımsız değişkeni t ile, bilinmeyen fonksiyonları $x_1, x_2, \dots$ (veya x, y, z) ile, bunların türevlerini ise $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \dots$ ile gösterirsek, diferansiyel denklemler sistemi

$$F_i \left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n_1)}, \dots, x_n, \dot{x}_n, \dots, x_n^{(n_n)} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır. Burada F_i fonksiyonları, kendi argümanları uzayın belli bir D bölgesinde tanımlı olan bilinen fonksiyonlardır [2].

Tanım. x_i fonksiyonunun (2.1) sisteminde bulunan türevlerinin en yüksek n_i basamağına, sistemin x_i bilinmeyenine göre basamağı, $n_1 + n_2 + \dots + n_n$ sayısına ise sistemin basamağı denir [2], [9].

Tanım. (2.1) sistemi yüksek basamaktan türevlere göre çözülebilirse, elde edilen

$$x_i^{(n_i)} = f_i \left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n_1-1)}, \dots, x_n, \dot{x}_n, \dots, x_n^{(n_n-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

sistemine kanonik sistem denir [9], [15].

Tanım. Bilinmeyen fonksiyonların yalnız birinci basamaktan türevlerini içeren

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

sistemine normal sistem denir [2], [9].

Normal olmayan her kanonik sistem bir normal sisteme indirgenebilir. (2.3) sisteminin basamağı denklemlerin n sayısına eşittir [9].

Tanım. Bağımsız değişkeni açık şekilde içermeyen normal sisteme otonom (dinamik, konservatif, stasyonör veya sabit katsayılı) sistem denir [10].

Otonom olmayan normal sistem $t = x_{n+1}$ koymakla otonom sisteme indirgenir. Serbestlik derecesi sınırlı olan fiziksel olayları formüle ederken otonom sistemlerin ortaya çıktığı bilinmektedir.

Tanım. (a, b) aralığında sırasıyla $n_1, n_2, \dots, n_n$ inci basamaktan türevleri bulunan ve

(2.1) sisteminin her bir denklemini $t \in (a, b)$ 'ye göre özdeşliğe dönüştüren

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ fonksiyonları kümesine (2.1) sisteminin (a, b) aralığında çözümü denir [9], [10].

Bu tanımda her $t \in (a, b)$ için

$$\left(t, \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \dots, \varphi_1^{(n_1)}(t), \dots, \varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t), \dots, \varphi_n^{(n_n)}(t) \right) \in D$$

koşulunun sağlanması şarttır. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vektör fonksiyonları yardımıyla (2.3) sistemi

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.4)$$

şeklinde yazılır.

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ olmak üzere $x = \varphi(t)$, (2.4) denkleminin (a, b) aralığında herhangi bir çözümü olsun. Her $t \in (a, b)$ için $(t, \varphi(t))$ noktalarının geometrik yeri $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında bir eğri oluşturur. Bu eğriye (2.4) sisteminin (a, b) aralığında $\varphi(t)$ çözümüne uygun integral eğrisi denir. $\varphi(t_0) = x_0$ olursa, integral eğrisi $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktasından geçer. $\dot{x} = f(x)$ otonom sisteminin sağ tarafının tanım kümesi D olsun. D açık bölgesinin her x noktasına karşılık $f(x)$ vektörünü koymakla f vektör alanı elde edilmektedir. D bölgesinde sürekli bir ortamın hareket ettiğini düşünürsek, $\dot{x}$ parçacıkların hızını gösterir. Her $x \in D$ noktasında (2.4) denkleminde göre ortamın hızı alanın bu noktadaki vektörüne orantılıdır. İntegral eğrisinin teğeti, alanın bu noktadaki vektörü ile çakışır. Dolayısıyla, integral eğrileri alanın vektör eğrileridir. Burada ortamın sıkıştırılmaz olduğu varsayılır, çünkü vektör eğrileri üzerinde ortamın her sınırlı hacmi hareket sırasında değişmemelidir. İntegral eğrisi başlangıç anında verilen noktada bulunan parçacığın hareketinin yörüngesi olarak da isimlendirilir.

Tanım. $f(x)$ fonksiyonunun sıfır olduğu noktalara vektör alanının tekil (stasyoner, durgunluk, sabit) noktaları denir [2], [10].

2.2. KARARLILIK TEORİSİ

Uygulamalarda birçok haller için, diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak mümkün olmasa (zor olsa) da, denklemin kendisinden çözümün sonsuz aralıktaki

karakterinin bilinmesi ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Çözümün başlangıç koşullarına ve parametrelere bağıllığı teoremi [2], bağımsız değişkenin yalnız sonlu aralıktaki değerleri için geçerli olduğundan, söz konusu problemi tam olarak yansıtmamaktadır. Başlangıç değerlerin bütün $t \geq t_0$ sonsuz aralığında küçük değişimlerinin, çözümün karakterine olan etkileri diferansiyel denklemlerin kararlılık (stabilite) teorisinde öğrenilmektedir [2], [9], [10], [11].

$$\dot{y} = F(y, t), \quad y, F \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (2.5)$$

sistemi ele alalım. Bu sistemin $y(t_0) = \tilde{y}_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü $\tilde{y}(t)$ olsun. Başlangıç verileri yakın olan çözümlerin davranışı ile ilgilenilmektedir. (2.5) sisteminin herhangi bir başka $y(t_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü $y(t)$ ile gösterelim.

Tanım. Başlangıç değerlerin çok küçük değişimine karşılık gelen $y(t)$ çözümlerinin bütün sonraki zamanlarda $\tilde{y}(t)$ çözümünün yeterince yakın bir civarında kalması durumunda

$\tilde{y}(t)$ çözümüne Lyapunov anlamında kararlı denir [12], [14]. Matematiksel olarak, bu tanım

$$|y_0 - \tilde{y}_0| < \delta \quad \text{halinde} \quad \max_{t_0 \leq t < \infty} |y(t) - \tilde{y}(t)| < \varepsilon \quad (2.6)$$

gibi yazılır, burada δ ve ε küçük pozitif sabitlerdir. (2.6) sağlanmıyorsa, $\tilde{y}(t)$ çözümü Lyapunov anlamında kararsızdır denir.

Ayrıca (2.6) koşulu ile $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - \tilde{y}(t)| = 0$ koşulu da sağlanırsa, $\tilde{y}(t)$ çözümü asimptotik kararlıdır denir.

Çözümün kararlılığı ile sınırlılığı kavramlarının farklı olduklarına dikkat edelim; kararlı çözüm sınırsız, sınırlı çözüm de kararsız olabilir [2], [13].

$$y = \tilde{y}(t) + x \text{ dönüşümü ile (2.5) sistemi } \dot{x} = \dot{y} - \dot{\tilde{y}}(t) = F(x + \tilde{y}(t), t) - \dot{\tilde{y}}(t)$$

veya

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f(0, t) = 0 \quad (2.7)$$

sistemine, $\tilde{y}(t)$ çözümünün kararlılığının incelenmesi ise (2.7) sisteminin $x = 0$ triviyal çözümünün incelenmesine indirgenir.

Kararlılık probleminde iki yöntem izlenmektedir. Lyapunov'un birinci yönteminde diferansiyel denklemler sisteminin çözümü bulunur ve çözümün kararlı veya kararsız olduğu sonucu çözümünden elde edilir [13]. İkinci yöntemde ise çözüm bulunmaz (veya bulunamaz), ancak Lyapunov fonksiyonu denen bir $V(x, t)$ fonksiyonu bulunur ve bu fonksiyon yardımı ile kararlılık incelenir [7], [9].

2.2.1. Lyapunov Fonksiyonu Yöntemi

Önce serbestlik derecesi bir olan lineer ossilatörün (salınım) titreşimlerini inceleyelim.

Bu titreşimlerin $\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega^2 x = 0$ ($\lambda > 0$) denklemi $(x, \dot{x})$ faz düzleminde

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 - 2\nu x_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

sistemi şeklinde yazılır, burada ν sönüm katsayısıdır. $\nu = 0$ alır ve birinci denklemi $2\omega^2 x_1$, ikinci denklemi ise $2x_2$ ile çarpıp toplarsak,

$$2\omega^2 x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 0, \quad \frac{d}{dt}(\omega^2 x_1^2 + x_2^2) = 0, \quad \omega^2 x_1^2 + x_2^2 = \text{sabit}$$

bulunur. $E(x_1, x_2) = \omega^2 x_1^2 + x_2^2$ fonksiyonu $\nu = 0$ halinde (2.8) sisteminin ilk integralidir.

$\nu = 0$ iken $\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = \tilde{E}$, $\omega^2 = \frac{c}{m}$ (burada m kütle, c ise pozitif yay sabitidir) ifadesinden $E = \frac{2}{m} \tilde{E}$, yani ilk integralin tam enerjiyle orantılı olduğu sonucuna varılır.

E fonksiyonu $x_1 = 0, x_2 = 0$ triviyal çözümü (sistemin sabit noktası veya denge konumu) üzerinde minimal değer alır. Faz düzleminde $E = \text{sabit}$ eğrileri elipslerdir.

$\nu > 0$ iken sürtünmeden dolayı tam enerji azalacaktır; gerçekten, E fonksiyonunun (2.8) sistemine göre türevi ((2.8) sisteminin çözümleri üzerinde değişmesi hızı)

$$\frac{d}{dt}E = 2\omega^2 x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2\omega^2 x_1 x_2 + 2x_2 \left(-\omega^2 x_1 - 2\nu x_2 \right) = -2\nu x_2^2 < 0$$

olduğundan fonksiyon t büyüdükçe azalmaktadır. Bu türevi

$\frac{dE}{dt} \equiv \text{grad}E(x) \cdot f(x) < 0$ iç çarpımı şeklinde yazılabilir. Buradan $f(x)$ hız vektörü (yörüngelerin teğeti) ile $\text{grad}E(x)$ vektörü arasındaki açının $\pi/2$ den büyük olduğu, yani yörüngelerin $E = \text{sabit}$ seviye eğrilerini dışarıdan içe doğru keserek merkeze yaklaştıkları görülmektedir. Bu durum triviyal çözümün asimptotik kararlı olduğu anlamına gelmektedir. $\nu = 0$ halinde $\text{grad}E(x)$ ve $f(x)$ vektörleri birbirine dik olurlar; faz düzleminde hareket elips şeklinde olup merkeze yaklaşmaz. Triviyal çözüm kararlıdır fakat asimptotik kararlı değildir. Eğer $\nu < 0$ ise (her an enerji verilen sistemlerde negatif sürtünme olabilir; örneğin parametrik rezonans olayı [23], [24]). $\text{grad}E(x)$ ve $f(x)$ vektörleri arasındaki açı $\pi/2$ den küçük olur; yörüngeler

$E = \text{sabit elipslerini içten dışarıya doğru keserler, yani triviyal çözüm (hareket) kararsız olur.}$

Bu incelemelerde E fonksiyonunun tam enerjiye orantılı olmasının hiçbir önemi yoktur. Önemli olan bu fonksiyonun sabit nokta (denge durumu, triviyal çözüm) civarında minimuma sahip olması ve yörüngeler boyunca değişmesidir (artması veya azalması). Genel olarak sabit noktası $x = 0$ olan

$$\dot{x} = f(x) \quad (f(0) = 0) \quad (2.9)$$

sistemi göz önüne alınmaktadır, burada $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli diferansiyellenebilir vektör-fonksiyon, U ise $x = 0$ 'ın bir civarındır [7], [9].

Tanım. Aşağıdaki özelliklere sahip olan sürekli diferansiyellenebilir $V(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna Lyapunov fonksiyonu denir [7], [9].

$$(i) \ V(x) > 0, \ x \neq 0, \quad (ii) \ V(0) = 0, \quad (iii) \ f(x) \text{grad} V(x) \leq 0.$$

Lemma (Lyapunov) 2.1. Eğer Lyapunov fonksiyonu varsa, (2.9) sisteminin $x = 0$ triviyal çözümü Lyapunov anlamında kararlıdır [9].

İspat. $\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sayı, S_ε ise merkezi $x = 0$ da ve yarıçapı ε olan küresel yüzey ve $S_\varepsilon \subset U$ olsun, S_ε üzerinde sürekli ve pozitif olan $V(x)$ fonksiyonu bu yüzey üzerinde en küçük $m_\varepsilon > 0$ değerini alır (Weierstrass teoremi). $V(0) = 0$ ve V sürekli olduğu için öyle $\delta > 0$ vardır ki, bütün $|x| < \delta$ için $V(x) < m_\varepsilon$ olsun. (iii) koşuluna göre V fonksiyonu (2.9) sisteminin çözümleri üzerinde azalandır, yani, $|x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her x_0 başlangıç değerine uygun $x(t)$ çözümü üzerinde $V(x(t)) \leq V(x_0) < m_\varepsilon$ olur. Şimdi, $|x_0| < \delta$ için öyle $t_1 > 0$ bulunsun ki, $x(t_1) = \varepsilon$, veya $x(t_1) \in S_\varepsilon$ olsun. m_ε , $V(x)$ in S_ε üzerinde minimumu olduğu için,

bu durumda $V(x(t_1)) \geq m_\varepsilon$ olur. Bu ise yukarıdaki eşitsizliğe aykırıdır. Dolayısıyla, bütün $t \geq 0$ ve $|x_0| < \delta$ için $|x(t)| < \varepsilon$ olur. O halde $x = 0$ çözümü kararlıdır. (iii) koşulundaki eşitsizlik kesin olduğunda $x = 0$ çözümü asimptotik kararlı olur.

Tanım. Sabit katsayılı $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$ sisteminde A matrisinin özdeğerlerinin reel kısımlarının artmayan dizilişi $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ olsun (her özdeğer kendi katı kadar yazılıyor). Bu sayılara Lyapunov karakteristik belirticileri denir. κ_1 'e çoğu hallerde sistemin baş karakteristik belirticisi denir. Bu sayıların rolü aşağıdaki önermede tespit edilir: eğer $\kappa_1(A) < 0$ (> 0) ise $\dot{x} = Ax$ sisteminin çözümü asimptotik kararlıdır (kararsızdır) [9], [12].

Tanım. Periyodik katsayılı sistemlerde $A(t+T) = A(t)$, $T > 0$, $A(0)$ sabit matrisinin Lyapunov karakteristik göstercileri ile $\dot{x} = A(t)x$ sisteminin multiplikatörleri arasında $\kappa_i(A) = \frac{1}{T} \ln |\mu_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$ bağıntıları vardır [3], [23]. Sistemin triviyal olmayan çözümünün bütün Lyapunov karakteristik sayıları kümesine sistemin spektrumu denir.

Titreşimler teorisi, diferansiyel denklemler teorisi uygulamalarının bir bölümü olarak, doğada ve teknikte titreşim olaylarını incelemektedir.

2.2.2. Çözümün Başlangıç Koşullarına ve Parametrelere Bağlılığı

Diferansiyel denklemler için başlangıç-değer probleminin iyi konulmuş olduğunun bilinmesi önemlidir. Uygulamadaki birçok problemlerde başlangıç değerleri kesin olarak verilmemektedir. Bu nedenle başlangıç değerlerinin küçük değişimi halinde çözümün de yalnızca küçük değişebildiği koşulunun bilinmesi gerekmektedir. Bu soruya, çözümlerin başlangıç değerlerine sürekli bağlılığı teoremi yanıt vermektedir.

Teorem 2.1. $f \in C(D)$ olmak üzere $\dot{x} = f(t, x)$ denklemi alınsın ve x 'e göre Lipschitz koşulunu sağlasın. $I \subset \{t \mid (t, x) \in D\}$ aralığı üzerinde $x = x(t, t_0, x_0)$, bu denklemin $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun $(t_0 \in I, (t_0, x_0) \in D)$. Her $\varepsilon > 0$ ve t_0 'ın her kapalı $J \subset I$ civarı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$ eşitsizliğine uygun olan her $x(t, t_0, \tilde{x}_0)$ çözümü J 'de tanımlanmıştır ve her $t \in J$ için $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \tilde{x}_0)| < \varepsilon$ olur [9].

Bu teorem aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir:

$f(t, x)$ vektör fonksiyonu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bölgesinde sürekli ve $\dot{x} = f(t, x)$ sistemi basit olsun, yani her $(t_0, x_0) \in G$ noktasından bu sistemin yalnız bir $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ integral eğrisi geçsin. G bölgesinin sınırlarına dek devam ettirilmiş φ vektör-fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir. Bu fonksiyonun her bir bileşeni kendi $n+2$ argümanının sürekli fonksiyonudur. f_i fonksiyonlarının $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'lere göre $r \geq 1$ olmak üzere r 'inci sürekli kısmi türevleri varsa, φ_i fonksiyonlarının t ve t_0 'a göre birinci, diğer argümanlarına göre ise r 'inci defa sürekli kısmi türevleri vardır. Eğer f bütün argümanlarına göre r mertebeden sürekli diferansiyellenebilirse, φ de bütün kendi argümanlarına göre r mertebeden sürekli diferansiyellenebilirdir (Lindelöf).

f_i fonksiyonları $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ parametrelerine bağlı ise, yani

$f_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ise, φ_i çözümleri de bu parametrelere bağlı

olacaktır. f parametrelere sürekli bağlı ise, bu φ için de geçerlidir; f 'in parametrelere göre diferansiyellenebilirliği de φ çözümüne yansımaktadır. Bu konuda küçük parametre yöntemi, ortalama yöntemi, tedirginlik teorisi de bilinmektedir [13], [15], [20].

3. BULGULAR

3.1. İKİ SERBESTLİK DERECELİ KUAZİLİNEER DİNAMİK SİSTEMLERİN İNCELENMESİ VE VİSKOELASTİK TİTREŞİMLERE UYGULAMALARI

Yörüngelere parçalanış yapısına sahip C^1 sınıfındaki bir yüzeyde dinamik sistemlerin sentez metodu kontrollerin analitik inşasında kullanılabilir. Kontroller

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + d_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = \mu (f_j + u_j), \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (3.1)$$

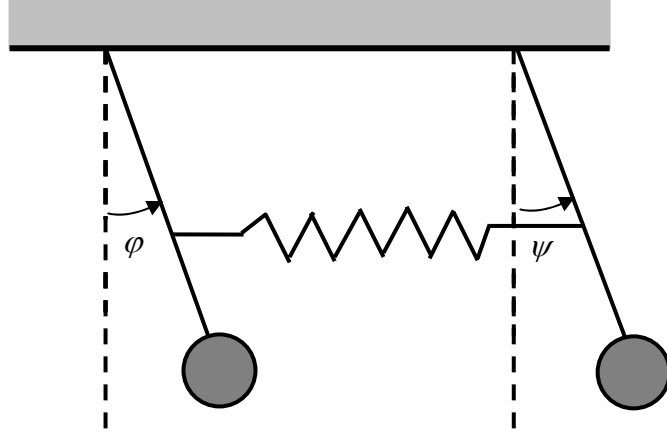
şeklindeki denklemler ile ifade edilen mekanik sistemlerin istenen özelliklerini sağlamaktadır; burada μ küçük parametre, $j = 1, 2, \dots, s$ için f_j 'ler $q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ ve t 'nin lineer olmayan fonksiyonları, u_j 'ler kontrollerdir. Birbirine bağlanmış iki sarkacın zayıf değişmeli genlikli titreşimleri problemi ele alınmaktadır [6].

Bu tez çalışmasında

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + e_1 \dot{q}_1 + b_1 \sin q_1 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= \mu (f + u_1) \\ a_{21} \ddot{q}_1 + e_2 \dot{q}_2 + b_2 \sin q_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= \mu (g + u_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

viskoelastik dinamik sistemi ele alınmıştır. Bu sistem yayla birbirine bağlanmış iki sarkacın hareket denklemlerine uyarlanmaktadır.

3.2. PROBLEMİN KONUMU



Şekil 3.1: Yayla bağlanmış iki sarkaç

φ, ψ – birinci ve ikinci sarkacın dikey eksenenden sapma açıları, m_1 ve m_2 – sırasıyla sarkaçların kütleleri, c – yayın sertliği, l – sarkaçların uzunluğu, d – sarkaçların dönme eksenlerinden yayın bağlantı noktasına dek olan uzaklık olsun. Öyle u_1 ve u_2 momentlerini bulmak gerekir ki onların birinci ve ikinci sarkaçlara etkisiyle verilen mekanik sistem “geniş anlamda kararlı” biharmonik hareket etsin. Bu durumda periyodik değişken a ve b genlikleri (a, b) düzleminin birinci bölgesinde verilen yörüngelere parçalanışa uygun olan $w_0(a, b) = 0$ kararlı limit devresi bağıntısıyla bağlanmış olmaktadır.

$$w_1 \equiv a = 0, w_2 \equiv b = 0, w_3 \equiv (a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 = r^2 \quad (3.3)$$

$$w_0 \equiv w(a, b, 0.9) = 0, w(a, b, \lambda) \equiv -(1 - \lambda)w_1w_2 + \lambda w_3 = 0 \quad (3.4)$$

bağıntılarıyla bu bölgede $w_1 = 0$ ve $w_2 = 0$ doğruları sarkaçların salınım hareketini birbirinden ayıran bölgelerin sınırları olduğu için ayrık doğrular olarak adlandırılır. $w_3 = 0$ ise $w_0 = 0$ limit devresi içinde bulunan kararsız odaktır.

3.3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Aşağıdaki denklemler sistemi

$$m_1 l^2 \ddot{\varphi} + m_1 l^2 \nu_1 \dot{\varphi} + m_1 g l \sin \varphi + c d^2 \varphi - c d^2 \psi = M_1 (\varphi, \dot{\varphi}, \psi, \dot{\psi}, t) + U_1 \quad (3.5)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\psi} + m_2 l^2 \nu_2 \dot{\psi} + m_2 g l \sin \psi + c d^2 \psi - c d^2 \varphi = M_2 (\varphi, \dot{\varphi}, \psi, \dot{\psi}, t) + U_2$$

sarkaçlar sisteminin hareket denklemleridir, burada M_1 ve M_2 kuvvet momentleridir.

(3.5) sisteminin

$$t = 0 : \varphi = \dot{\varphi} = 0 \quad (3.6)$$

$$\psi = \dot{\psi} = 0$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümünü inceleyelim ve U_1 ve U_2 kontrol momentlerini bulalım.

$$n_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{c d^2}{m_1 l^2}, \quad n_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{c d^2}{m_2 l^2}, \quad B_1 = -\frac{c d^2}{m_1 l^2}, \quad B_2 = -\frac{c d^2}{m_2 l^2} \quad (3.7)$$

büyükliklerini kullanalım. (3.7) ifadeleri (3.5) de yerine yazılırsa,

$$\ddot{\varphi} + \nu_1 \dot{\varphi} + B_1 \psi + n_1^2 \varphi = \frac{g}{l} (\varphi - \sin \varphi) + \frac{1}{m_1 l^2} (M_1 + U_1) \quad (3.8)$$

$$\ddot{\psi} + \nu_2 \dot{\psi} + B_2 \varphi + n_2^2 \psi = \frac{g}{l} (\psi - \sin \psi) + \frac{1}{m_2 l^2} (M_2 + U_2)$$

denklemler sistemi elde edilir. (3.8) denklem sisteminde $\varphi = e^{-\nu_1 t/2} \Phi$, $\psi = e^{-\nu_2 t/2} \Psi$ dönüşümü yapılırsa

$$\dot{\phi} = -\frac{\nu_1}{2} e^{-\nu_1 t/2} \Phi + e^{-\nu_1 t/2} \dot{\Phi}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{\nu_1^2}{4} e^{-\nu_1 t/2} \Phi - \frac{\nu_1}{2} e^{-\nu_1 t/2} \dot{\Phi} - \frac{\nu_1}{2} e^{-\nu_1 t/2} \dot{\Phi} + e^{-\nu_1 t/2} \ddot{\Phi} \\ &= \frac{\nu_1^2}{4} e^{-\nu_1 t/2} \Phi - \nu_1 e^{-\nu_1 t/2} \dot{\Phi} + e^{-\nu_1 t/2} \ddot{\Phi}, \end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\dot{\psi} = -\frac{\nu_2}{2} e^{-\nu_2 t/2} \Psi + e^{-\nu_2 t/2} \dot{\Psi}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\nu_2^2}{4} e^{-\nu_2 t/2} \Psi - \nu_2 e^{-\nu_2 t/2} \dot{\Psi} + e^{-\nu_2 t/2} \ddot{\Psi}$$

ifadeleri bulunur ve bunlar (3.8) de yerine konursa

$$\begin{aligned} e^{-\nu_1 t/2} \ddot{\Phi} - \cancel{\nu_1 e^{-\nu_1 t/2} \dot{\Phi}} + \frac{\nu_1^2}{4} e^{-\nu_1 t/2} \Phi + \cancel{\nu_1 e^{-\nu_1 t/2} \dot{\Phi}} - \frac{\nu_1^2}{2} e^{-\nu_1 t/2} \Phi + \\ + B_1 e^{-\nu_2 t/2} \Psi + n_1^2 e^{-\nu_1 t/2} \Phi = F \\ e^{-\nu_2 t/2} \ddot{\Psi} - \cancel{\nu_2 e^{-\nu_2 t/2} \dot{\Psi}} + \frac{\nu_2^2}{4} e^{-\nu_2 t/2} \Psi + \cancel{\nu_2 e^{-\nu_2 t/2} \dot{\Psi}} - \frac{\nu_2^2}{2} e^{-\nu_2 t/2} \Psi + \\ + B_2 e^{-\nu_1 t/2} \Phi + n_2^2 e^{-\nu_2 t/2} \Psi = G \end{aligned}$$

ya da

$$e^{-\nu_1 t/2} \ddot{\Phi} + B_1 e^{-\nu_2 t/2} \Psi + \left(n_1^2 - \frac{\nu_1^2}{4} \right) e^{-\nu_1 t/2} \Phi = F$$

$$e^{-\nu_2 t/2} \ddot{\Psi} + B_2 e^{-\nu_1 t/2} \Phi + \left(n_2^2 - \frac{\nu_2^2}{4} \right) e^{-\nu_2 t/2} \Psi = G$$

elde edilir. Burada

$$F = \frac{g}{l} \left(e^{-\nu_1 t/2} \Phi - \sin \left(e^{-\nu_1 t/2} \Phi \right) \right) + \frac{1}{m_1 l^2} (\tilde{M}_1 + \tilde{U}_1),$$

$$G = \frac{g}{l} \left(e^{-\nu_2 t/2} \Psi - \sin \left(e^{-\nu_2 t/2} \Psi \right) \right) + \frac{1}{m_2 l^2} (\tilde{M}_2 + \tilde{U}_2),$$

$$\tilde{M}_i = M_i(\Phi, \dot{\Phi}, \Psi, \dot{\Psi}, t) \quad \text{ve} \quad \tilde{U}_i = U_i(\Phi, \dot{\Phi}, \Psi, \dot{\Psi}, t), \quad i = 1, 2.$$

olmaktadır ve sonuçta

$$\ddot{\Phi} + B_1 e^{-(\nu_2 - \nu_1)t/2} \Psi + \left(n_1^2 - \frac{\nu_1^2}{4} \right) \Phi = e^{\nu_1 t/2} F \quad (3.9)$$

$$\ddot{\Psi} + B_2 e^{-(\nu_1 - \nu_2)t/2} \Phi + \left(n_2^2 - \frac{\nu_2^2}{4} \right) \Psi = e^{\nu_2 t/2} G$$

yazılabilir. $\varphi = e^{-\nu_1 t/2} \Phi$, $\psi = e^{-\nu_2 t/2} \Psi$ dönüşümü sonucunda (3.6) başlangıç koşullarını bulalım.

$$t = 0 \quad \text{için} \quad 0 = \varphi = \Phi \quad \text{ve} \quad 0 = \psi = \Psi,$$

benzer şekilde

$$\dot{\varphi} = -\frac{\nu_1}{2} e^{-\nu_1 t/2} \Phi + e^{-\nu_1 t/2} \dot{\Phi} \text{ denkleminde } 0 = \dot{\varphi} = \dot{\Phi} \text{ ve}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\nu_2}{2} e^{-\nu_2 t/2} \Psi + e^{-\nu_2 t/2} \dot{\Psi} \text{ denkleminde } 0 = \dot{\psi} = \dot{\Psi}$$

elde edilir. $\varphi = e^{-\nu_1 t/2} \Phi$, yani $\Phi = e^{\nu_1 t/2} \varphi$ olduğundan $t = 0$ için $\Phi = 0$ ve

$\psi = e^{-\nu_2 t/2} \Psi$, yani $\Psi = e^{\nu_2 t/2} \psi$ olduğundan $t = 0$ için $\Psi = 0$ bulunur. Dolayısıyla yeni başlangıç koşulları

$$t = 0 : \quad \Phi = \dot{\Phi} = 0$$

(3.10)

$$\Psi = \dot{\Psi} = 0$$

şeklinde yazılır.

(3.9) denklem sisteminde $\nu_1 = \nu_2 = 2\nu$ durumu incelenecektir.

Bu halde (3.9) sistemi

$$\ddot{\Phi} + B_1 \Psi + (n_1^2 - \nu^2) \Phi = \tilde{F}$$

(3.11)

$$\ddot{\Psi} + B_2 \Phi + (n_2^2 - \nu^2) \Psi = \tilde{G}$$

şeklinde yazılır; burada $\tilde{F} = e^{\nu t} F$, $\tilde{G} = e^{\nu t} G$ alınmaktadır.

(3.11) denklem sisteminin oldukça küçük sağ yanlı (eşit sıfır alınabilir) olması halinde, yani

$$\ddot{\Phi} + B_1 \Psi + (n_1^2 - \nu^2) \Phi = 0 \quad (3.12)$$

$$\ddot{\Psi} + B_2 \Phi + (n_2^2 - \nu^2) \Psi = 0$$

denklemler sisteminin çözümünü operatör yöntemiyle bulalım. Bu sistemi aşağıdaki şekilde yazalım:

$$(D^2 + n_1^2 - \nu^2) \Phi + B_1 \Psi = 0$$

$$B_2 \Phi + (D^2 + n_2^2 - \nu^2) \Psi = 0$$

Burada $D = \frac{d}{dt}$ türev operatörüdür. Son sisteme Φ ve Ψ bilinmeyenlerine göre lineer homojen cebirsel denklemler sistemi gibi bakarsak, triviyal olmayan çözümün bulunması için sistemin determinanı sıfır olmalıdır, yani

$$\begin{vmatrix} D^2 + n_1^2 - \nu^2 & B_1 \\ B_2 & D^2 + n_2^2 - \nu^2 \end{vmatrix} = 0$$

yada

$$D^4 + (n_1^2 + n_2^2 - 2\nu^2) D^2 + (n_1^2 - \nu^2)(n_2^2 - \nu^2) - B_1 B_2 = 0.$$

Demek ki, Φ ve Ψ bilinmeyenlerinin ikisi de bu operatörün oluşturduğu dördüncü mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemi sağlamaktadır. Bu denklemlerin

$$\lambda^4 + (n_1^2 + n_2^2 - 2\nu^2) \lambda^2 + (n_1^2 - \nu^2)(n_2^2 - \nu^2) - B_1 B_2 = 0$$

karakteristik denklemini yazalım. Buradan

$$\lambda^2 = \frac{-\left(n_1^2 + n_2^2 - 2v^2\right) \pm \sqrt{\left(n_1^2 + n_2^2 - 2v^2\right)^2 - 4\left(n_1^2 - v^2\right)\left(n_2^2 - v^2\right) + 4B_1B_2}}{2}$$

$$= \frac{-\left(n_1^2 + n_2^2 - 2v^2\right) \pm \sqrt{\left(n_1^2 - n_2^2\right)^2 + 4B_1B_2}}{2}$$

olduğundan,

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-\left(n_1^2 + n_2^2 - 2v^2\right) \pm \sqrt{\left(n_1^2 - n_2^2\right)^2 + 4B_1B_2}}{2}}$$

kökleri bulunur. (3.7)'yi kullanarak,

$$n_1^2 + n_2^2 - 2v^2 = \frac{2g}{l} + \frac{cd^2}{l^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - 2v^2 = \frac{2g}{l} + \frac{cd^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l^2} - 2v^2 = \rho$$

ve

$$\left(n_1^2 - n_2^2\right)^2 + 4B_1B_2 = \left[\frac{cd^2}{l^2} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right]^2 + \frac{4c^2 d^4}{m_1 m_2 l^4}$$

$$= \frac{c^2 d^4}{l^4} \left[\frac{(m_1 - m_2)^2 + 4m_1 m_2}{m_1^2 m_2^2} \right] = \frac{c^2 d^4}{l^4} \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^2 m_2^2} = \left[\frac{cd^2}{l^2} \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right]^2 = \sigma^2$$

dersek son olarak

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-\rho \pm \sqrt{\sigma^2}}{2}} = \pm \sqrt{-\frac{g}{l} + v^2 - \frac{cd^2(m_1 + m_2) \mp cd^2(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2 l^2}},$$

yani

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{v^2 - \frac{g}{l}} , \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{v^2 - \frac{g}{l} - \frac{cd^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l^2}}$$

karakteristik kökleri elde edilir. Aşağıdaki halleri inceleyelim:

I. Hal : $v^2 = \frac{g}{l}$ olsun.

Bu halde kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ve $\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{-\frac{cd^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l^2}} = \pm \sqrt{B_1 + B_2} = \pm ib$

olur. Dolayısıyla (3.12) sisteminin çözümü

$$\Phi = c_1 + c_2 t + c_3 \cos bt + c_4 \sin bt \quad (3.13)$$

$$\Psi = k_1 + k_2 t + k_3 \cos bt + k_4 \sin bt$$

şeklinde yazılır. Buradaki c_i ve k_i ($i=1,2,3,4$) sabitleri arasındaki bağıntıları bulalım. (3.13) deki Φ fonksiyonu t' ye göre iki kez türetilirse

$$\dot{\Phi} = c_2 - c_3 b \sin bt + c_4 b \cos bt$$

$$\ddot{\Phi} = -c_3 b^2 \cos bt - c_4 b^2 \sin bt$$

bulunur. $\ddot{\Phi}$, Φ ve Ψ değerleri (3.12)'ün ilk denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& -c_3 b^2 \cos bt - c_4 b^2 \sin bt + B_1 k_1 + B_1 k_2 t + B_1 k_3 \cos bt + B_1 k_4 \sin bt + \\
& + c_1 (n_1^2 - \nu^2) + c_2 (n_1^2 - \nu^2) t + c_3 (n_1^2 - \nu^2) \cos bt + c_4 (n_1^2 - \nu^2) \sin bt = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left(B_1 k_1 + c_1 (n_1^2 - \nu^2) \right) + \left(B_1 k_2 + c_2 (n_1^2 - \nu^2) \right) t + \\
& + \left(-c_3 b^2 + B_1 k_3 + c_3 (n_1^2 - \nu^2) \right) \cos bt + \left(-c_4 b^2 + B_1 k_4 + c_4 (n_1^2 - \nu^2) \right) \sin bt = 0,
\end{aligned}$$

buradan

$$B_1 k_1 + c_1 (n_1^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{\nu^2 - n_1^2}{B_1} c_1$$

$$B_1 k_2 + c_2 (n_1^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{\nu^2 - n_1^2}{B_1} c_2$$

$$-c_3 b^2 + B_1 k_3 + c_3 (n_1^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow k_3 = \frac{b^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} c_3$$

$$-c_4 b^2 + B_1 k_4 + c_4 (n_1^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow k_4 = \frac{b^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} c_4$$

bulunur. O halde (3.13) çözümü

$$\Phi = c_1 + c_2 t + c_3 \cos bt + c_4 \sin bt$$

(3.14)

$$\Psi = \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_1 c_2 t + \varepsilon_2 c_3 \cos bt + \varepsilon_2 c_4 \sin bt$$

olmaktadır, burada $\varepsilon_1 = \frac{v^2 - n_1^2}{B_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{b^2 + v^2 - n_1^2}{B_1}$, dir.

(3.10) başlangıç koşullarından $t = 0$ için $\Phi = 0$ olduğundan $c_1 + c_3 = 0$ ve $\Psi = 0$ olduğundan $\varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_3 = 0$ elde edilir. Ayrıca

$$\dot{\Phi} = c_2 - c_3 b \sin bt + c_4 b \cos bt$$

ve

$$\dot{\Psi} = \varepsilon_1 c_2 - b \varepsilon_2 c_3 \sin bt + b \varepsilon_2 c_4 \cos bt$$

ifadelerinden $t = 0$ için $\dot{\Phi} = 0$ olduğundan $c_2 + b c_4 = 0$ ve $\dot{\Psi} = 0$ olduğu için $\varepsilon_1 c_2 + b \varepsilon_2 c_4 = 0$ bulunur. O halde bilinmeyen sabitler için

$$c_1 + c_3 = 0$$

$$c_2 + b c_4 = 0$$

$$\varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 c_2 + b \varepsilon_2 c_4 = 0$$

homojen cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Sistemin katsayılar matrisinin determinanı

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & b \varepsilon_2 \end{vmatrix} \quad -\varepsilon_1 R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{B_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & b\varepsilon_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & \frac{b^2}{B_1} & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & b\varepsilon_2 \end{vmatrix} = \frac{b^3 \varepsilon_2}{B_1} - \frac{b^3 \varepsilon_1}{B_1}$$

$$= \frac{b^3}{B_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \frac{b^5}{B_1^2} \neq 0 \quad (b \neq 0)$$

olduğundan sistemin yalnız $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ çözümü vardır.

O halde (3.13) 'in sadece

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0 \tag{3.15}$$

triviyal çözümü elde edilir.

II. Hal : $\nu^2 > \frac{g}{l}$ olması halinde iki durum incelenmektedir.

$$(i) \quad \nu^2 - \frac{g}{l} - \frac{cd^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l^2} > 0 \text{ hali.}$$

Bu halde kökler $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\nu^2 - \frac{g}{l}} = \pm a$, $\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\nu^2 - \frac{g}{l} - \frac{cd^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l^2}} = \pm b$

şeklindedir. Dolayısıyla (3.12) sisteminin çözümü

$$\Phi = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} + c_3 e^{bt} + c_4 e^{-bt} \tag{3.16}$$

$$\Psi = k_1 e^{at} + k_2 e^{-at} + k_3 e^{bt} + k_4 e^{-bt}$$

şeklinde bulunur. Sabitler arasındaki bağıntıları bulmak için (3.16)'deki Φ fonksiyonu t' ye göre iki kez türetilirse

$$\dot{\Phi} = c_1 a e^{at} - c_2 a e^{-at} + c_3 b e^{bt} - c_4 b e^{-bt}$$

$$\ddot{\Phi} = c_1 a^2 e^{at} + c_2 a^2 e^{-at} + c_3 b^2 e^{bt} + c_4 b^2 e^{-bt}$$

ve $\ddot{\Phi}$, Φ ve Ψ (3.12) in ilk denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & c_1 a^2 e^{at} + c_2 a^2 e^{-at} + c_3 b^2 e^{bt} + c_4 b^2 e^{-bt} + B_1 \left(k_1 e^{at} + k_2 e^{-at} + k_3 e^{bt} + k_4 e^{-bt} \right) + \\ & + \left(n_1^2 - \nu^2 \right) \left(c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} + c_3 e^{bt} + c_4 e^{-bt} \right) = 0 \end{aligned}$$

bulunur ve düzenleyerek

$$\begin{aligned} & \left(c_1 a^2 + \left(n_1^2 - \nu^2 \right) c_1 + B_1 k_1 \right) e^{at} + \left(c_2 a^2 + \left(n_1^2 - \nu^2 \right) c_2 + B_1 k_2 \right) e^{-at} + \\ & \left(c_3 b^2 + \left(n_1^2 - \nu^2 \right) c_3 + B_1 k_3 \right) e^{bt} + \left(c_4 b^2 + \left(n_1^2 - \nu^2 \right) c_4 + B_1 k_4 \right) e^{-bt} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$c_1 a^2 + \left(n_1^2 - \nu^2 \right) c_1 + B_1 k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{\nu^2 - n_1^2 - a^2}{B_1} c_1$$

$$c_2 a^2 + \left(n_1^2 - \nu^2 \right) c_2 + B_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{\nu^2 - n_1^2 - a^2}{B_1} c_2$$

$$c_3 b^2 + \left(n_1^2 - \nu^2 \right) c_3 + B_1 k_3 = 0 \Rightarrow k_3 = \frac{\nu^2 - n_1^2 - b^2}{B_1} c_3$$

$$c_4 b^2 + (n_1^2 - v^2) c_4 + B_1 k_4 = 0 \Rightarrow k_4 = \frac{v^2 - n_1^2 - b^2}{B_1} c_4$$

katsayıları bulunur. O halde (3.16) çözümü

$$\Phi = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} + c_3 e^{bt} + c_4 e^{-bt} \quad (3.17)$$

$$\Psi = \gamma_1 c_1 e^{at} + \gamma_1 c_2 e^{-at} + \gamma_2 c_3 e^{bt} + \gamma_2 c_4 e^{-bt}$$

şeklinde yazılır, burada $\gamma_1 = \frac{v^2 - n_1^2 - a^2}{B_1}$, $\gamma_2 = \frac{v^2 - n_1^2 - b^2}{B_1}$ alınmaktadır.

(3.10) başlangıç koşullarından $t = 0$ için $\Phi = 0$ olduğundan $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$ ve

$\Psi = 0$ olduğundan $\gamma_1 c_1 + \gamma_1 c_2 + \gamma_2 c_3 + \gamma_2 c_4 = 0$, ayrıca

$$\dot{\Phi} = c_1 a e^{at} - c_2 a e^{-at} + c_3 b e^{bt} - c_4 b e^{-bt}$$

ve

$$\dot{\Psi} = \gamma_1 c_1 a e^{at} - \gamma_1 c_2 a e^{-at} + \gamma_2 c_3 b e^{bt} - \gamma_2 c_4 b e^{-bt}$$

.

ifadelerinden $t = 0$ için $\dot{\Phi} = 0$ olduğundan $c_1 a - c_2 a + c_3 b - c_4 b = 0$ ve

$\dot{\Psi} = 0$ olduğundan $\dot{\Psi} = \gamma_1 c_1 a - \gamma_1 c_2 a + \gamma_2 c_3 b - \gamma_2 c_4 b = 0$ bulunur. O halde

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$a c_1 - a c_2 + b c_3 - b c_4 = 0$$

$$\gamma_1 c_1 + \gamma_1 c_2 + \gamma_2 c_3 + \gamma_2 c_4 = 0$$

$$\gamma_1 a c_1 - \gamma_1 a c_2 + \gamma_2 b c_3 - \gamma_2 b c_4 = 0$$

homojen cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Sistemin katsayılar matrisinin determinanı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -a & b & -b \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1 a & -\gamma_1 a & \gamma_2 b & -\gamma_2 b \end{vmatrix} \quad aR_1 + R_2 \rightarrow R_2, \quad -\gamma_1 R_1 + R_3 \rightarrow R_3, \quad a\gamma_1 R_1 + R_4 \rightarrow R_4$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 0 & a+b & a-b \\ 0 & 0 & \gamma_2 - \gamma_1 & \gamma_2 - \gamma_1 \\ 2\gamma_1 a & 0 & \gamma_1 a + \gamma_2 b & \gamma_1 a - \gamma_2 b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2a & a+b & a-b \\ 0 & \gamma_2 - \gamma_1 & \gamma_2 - \gamma_1 \\ 2\gamma_1 a & \gamma_1 a + \gamma_2 b & \gamma_1 a - \gamma_2 b \end{vmatrix} =$$

$$= -2a(\gamma_2 - \gamma_1) \begin{vmatrix} 1 & a+b & a-b \\ 0 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_1 a + \gamma_2 b & \gamma_1 a - \gamma_2 b \end{vmatrix} = 4ab(\gamma_1 - \gamma_2)^2$$

$$= 4ab \left(\frac{b^2 - a^2}{B_1} \right)^2 \neq 0 \quad (0 \neq |b| \neq |a| \neq 0)$$

olduğundan sistemin yalnız $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ çözümü vardır.

O halde (3.16) nın yine de

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0 \tag{3.18}$$

triviyal çözümü elde edilir.

$$(ii) \quad \nu^2 - \frac{g}{l} - \frac{cd^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l^2} < 0 \text{ hali.}$$

$$\text{Kökler } \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\nu^2 - \frac{g}{l}} = \pm a, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\nu^2 - \frac{g}{l} - \frac{cd^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l^2}} = \pm ib$$

olduğundan (3.12) sisteminin çözümü

$$\Phi = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} + c_3 \cos bt + c_4 \sin bt \quad (3.19)$$

$$\Psi = k_1 e^{at} + k_2 e^{-at} + k_3 \cos bt + k_4 \sin bt$$

şeklinde ifade edilir. Sabitler arasındaki bağıntıları bulmak için (3.19)'daki Φ fonksiyonu t 'ye göre iki kez türetilirse

$$\dot{\Phi} = c_1 a e^{at} - c_2 a e^{-at} - c_3 b \sin bt + c_4 b \cos bt$$

$$\ddot{\Phi} = c_1 a^2 e^{at} + c_2 a^2 e^{-at} - c_3 b^2 \cos bt - c_4 b^2 \sin bt,$$

sonra $\ddot{\Phi}$, Φ ve Ψ fonksiyonları (3.12)'nin ilk denkleminde yerine yazılırsa

$$c_1 a^2 e^{at} + c_2 a^2 e^{-at} + B_1 (k_1 e^{at} + k_2 e^{-at} + k_3 \cos bt + k_4 \sin bt) -$$

$$-c_3 b^2 \cos bt - c_4 b^2 \sin bt + (n_1^2 - \nu^2) (c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} + c_3 \cos bt + c_4 \sin bt) = 0$$

elde edilir. Düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} & \left(c_1 a^2 + B_1 k_1 + c_1 (n_1^2 - v^2) \right) e^{at} + \left(c_2 a^2 + B_1 k_2 + c_2 (n_1^2 - v^2) \right) e^{-at} + \\ & + \left(-c_3 b^2 + B_1 k_3 + c_3 (n_1^2 - v^2) \right) \cos bt + \left(-c_4 b^2 + B_1 k_4 + c_4 (n_1^2 - v^2) \right) \sin bt = 0 \end{aligned}$$

ifadesinden

$$c_1 a^2 + (n_1^2 - v^2) c_1 + B_1 k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{v^2 - n_1^2 - a^2}{B_1} c_1$$

$$c_2 a^2 + (n_1^2 - v^2) c_2 + B_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{v^2 - n_1^2 - a^2}{B_1} c_2$$

$$-c_3 b^2 + (n_1^2 - v^2) c_3 + B_1 k_3 = 0 \Rightarrow k_3 = \frac{v^2 - n_1^2 + b^2}{B_1} c_3$$

$$-c_4 b^2 + (n_1^2 - v^2) c_4 + B_1 k_4 = 0 \Rightarrow k_4 = \frac{v^2 - n_1^2 + b^2}{B_1} c_4$$

bulunur. O halde (3.19) çözümü

$$\Phi = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} + c_3 \cos bt + c_4 \sin bt \quad (3.20)$$

$$\Psi = \chi_1 c_1 e^{at} + \chi_1 c_2 e^{-at} + \chi_2 c_3 \cos bt + \chi_2 c_4 \sin bt$$

şeklindedir, burada $\chi_1 = \frac{v^2 - n_1^2 - a^2}{B_1}$, $\chi_2 = \frac{v^2 - n_1^2 + b^2}{B_1}$ alınmaktadır.

(3.10) başlangıç koşullarından $t = 0$ için $\Phi = 0$ olduğundan $c_1 + c_2 + c_3 = 0$,

$\Psi = 0$ olduğundan $\chi_1 c_1 + \chi_1 c_2 + \chi_2 c_3 = 0$ ve (3.20) eşitliklerinden

$$\dot{\Phi} = c_1 a e^{at} - c_2 a e^{-at} - c_3 b \sin bt + c_4 b \cos bt ,$$

$$\dot{\Psi} = \chi_1 c_1 a e^{at} - \chi_1 c_2 a e^{-at} - b \chi_2 c_3 \sin bt + b \chi_2 c_4 \cos bt$$

ifadelerinden $t = 0$ için $\dot{\Phi} = 0$ olduğundan $ac_1 - ac_2 + bc_4 = 0$ ve

$\dot{\Psi} = 0$ olduğundan $a\chi_1 c_1 - a\chi_1 c_2 + b\chi_2 c_4 = 0$ bulunur. O halde

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$ac_1 - ac_2 + bc_4 = 0$$

$$\chi_1 c_1 + \chi_1 c_2 + \chi_2 c_3 = 0$$

$$a\chi_1 c_1 - a\chi_1 c_2 + b\chi_2 c_4 = 0$$

homojen cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Sistemin katsayılar matrisinin determinanı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & -a & 0 & b \\ \chi_1 & \chi_1 & \chi_2 & 0 \\ a\chi_1 & -a\chi_1 & 0 & b\chi_2 \end{vmatrix} - \chi_1 R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 & 0 \\ a\chi_1 & -a\chi_1 & 0 & b\chi_2 \end{vmatrix} = (\chi_2 - \chi_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -a & b \\ a\chi_1 & -a\chi_1 & b\chi_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\chi_2 - \chi_1) \cdot 2ab(\chi_1 - \chi_2) = -2ab(\chi_1 - \chi_2)^2 = -2ab \left(\frac{b^2 - a^2}{B_1} \right)^2 \neq 0$$

olduğundan sistemin yalnız $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ çözümü vardır. O halde (3.20) 'in

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0$$

triviyal çözümü elde edilir.

III. Hal : $v^2 < \frac{g}{l}$ durumunda karakteristik kökler

$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{g}{l} - v^2} = \pm ib, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{g}{l} - v^2 + \frac{cd^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l^2}} = \pm ia$$

biçiminde bulunur. (3.12) sisteminin çözümü

$$\Phi = c_1 \cos at + c_2 \sin at + c_3 \cos bt + c_4 \sin bt \quad (3.21)$$

$$\Psi = k_1 \cos at + k_2 \sin at + k_3 \cos bt + k_4 \sin bt$$

şeklinde yazılır. Sabitler arasındaki bağıntıları bulmak için (3.21)'deki Φ fonksiyonu t' ye göre iki kez türetilirse

$$\dot{\Phi} = -c_1 a \sin at + c_2 a \cos at - c_3 b \sin bt + c_4 b \cos bt$$

$$\ddot{\Phi} = -c_1 a^2 \cos at - c_2 a^2 \sin at - c_3 b^2 \cos bt - c_4 b^2 \sin bt$$

elde edilir. Şimdi $\ddot{\Phi}$, Φ ve Ψ fonksiyonları (3.12) sistemin ilk denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& -c_1 a^2 \cos at - c_2 a^2 \sin at - c_3 b^2 \cos bt - c_4 b^2 \sin bt + B_1 k_1 \cos at + \\
& + B_1 k_2 \sin at + B_1 k_3 \cos bt + B_1 k_4 \sin bt + c_1 (n_1^2 - \nu^2) \cos at + \\
& + c_2 (n_1^2 - \nu^2) \sin at + c_3 (n_1^2 - \nu^2) \cos bt + c_4 (n_1^2 - \nu^2) \sin bt = 0
\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
& \left(-c_1 a^2 + B_1 k_1 + c_1 (n_1^2 - \nu^2) \right) \cos at + \left(-c_2 a^2 + B_1 k_2 + c_2 (n_1^2 - \nu^2) \right) \sin at + \\
& + \left(-c_3 b^2 + B_1 k_3 + c_3 (n_1^2 - \nu^2) \right) \cos bt + \left(-c_4 b^2 + B_1 k_4 + c_4 (n_1^2 - \nu^2) \right) \sin bt = 0
\end{aligned}$$

ifadesi, buradan da

$$-c_1 a^2 + B_1 k_1 + c_1 (n_1^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{a^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} c_1$$

$$-c_2 a^2 + B_1 k_2 + c_2 (n_1^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{a^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} c_2$$

$$-c_3 b^2 + B_1 k_3 + c_3 (n_1^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow k_3 = \frac{b^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} c_3$$

$$-c_4 b^2 + B_1 k_4 + c_4 (n_1^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow k_4 = \frac{b^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} c_4$$

katsayıları bulunur. Bu durumda (3.12) sisteminin çözümü

$$\Phi = c_1 \cos at + c_2 \sin at + c_3 \cos bt + c_4 \sin bt$$

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{a^2 + v^2 - n_1^2}{B_1} c_1 \cos at + \frac{a^2 + v^2 - n_1^2}{B_1} c_2 \sin at + \\ & + \frac{b^2 + v^2 - n_1^2}{B_1} c_3 \cos bt + \frac{b^2 + v^2 - n_1^2}{B_1} c_4 \sin bt \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılır. (3.22)' deki ilk ifadede $c_1 = C \sin c_1$, $c_2 = C \cos c_1$, $c_3 = D \sin c_3$ ve $c_4 = D \cos c_3$ yazarak

$$\Phi = C \sin c_1 \cos at + C \cos c_1 \sin at + D \sin c_3 \cos bt + D \cos c_3 \sin bt$$

$$= C \sin(at + c_1) + D \sin(bt + c_3)$$

$$\Psi = \left(\frac{a^2 + v^2 - n_1^2}{B_1} \right) C \sin(at + c_1) + \left(\frac{b^2 + v^2 - n_1^2}{B_1} \right) D \sin(bt + c_3)$$

elde edilir. Burada $\frac{a^2 + v^2 - n_1^2}{B_1} = \alpha_1$ ve $\frac{b^2 + v^2 - n_1^2}{B_1} = \alpha_2$ denirse

$$\Phi = C \sin(at + c_1) + D \sin(bt + c_3)$$

$$\Psi = \alpha_1 C \sin(at + c_1) + \alpha_2 D \sin(bt + c_3)$$

çözümü bulunur.

Son iki eşitlikte a yerine k_1 , b yerine k_2 , C yerine a , D yerine b , c_1 yerine β_1 ve c_3 yerine β_2 yazılırsa, (3.12) denklem sisteminin çözümü

$$\Phi = a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) \quad (3.23)$$

$$\Psi = a\alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + b\alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2)$$

şeklinde bulunur, burada a, b, β_1, β_2 'lar zamanın zayıf değişmeli fonksiyonları; k_1 ve k_2 ise

$$k^4 - (n_1^2 + n_2^2 - 2\nu^2)k^2 + (n_1^2 - \nu^2)(n_2^2 - \nu^2) - B_1 B_2 = 0$$

baş frekans denklemi ile belirlenen esas frekanslardır. ($0 < k_1 < k_2$ alınmaktadır)

Baş frekans denkleminde

$$k_1^4 - (n_1^2 + n_2^2 - 2\nu^2)k_1^2 + (n_1^2 - \nu^2)(n_2^2 - \nu^2) - B_1 B_2 = 0,$$

$$k_2^4 - (n_1^2 + n_2^2 - 2\nu^2)k_2^2 + (n_1^2 - \nu^2)(n_2^2 - \nu^2) - B_1 B_2 = 0$$

yazılırsa sırasıyla

$$\frac{k_1^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} = \frac{B_2}{k_1^2 + \nu^2 - n_2^2}, \quad \frac{k_2^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} = \frac{B_2}{k_2^2 + \nu^2 - n_2^2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\alpha_1 = \frac{k_1^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} = \frac{B_2}{k_1^2 + \nu^2 - n_2^2} \quad (3.24)$$

$$\alpha_2 = \frac{k_2^2 + \nu^2 - n_1^2}{B_1} = \frac{B_2}{k_2^2 + \nu^2 - n_2^2}$$

açılım (dağılım) katsayıları elde edilir. Sabitlerin değişim yöntemi uygulanırsa , önce (3.23)'teki ifadelerin zamana göre türevleri alınarak

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2) + \dot{a} \sin(k_1 t + \beta_1) + \\ &\quad + \dot{b} \sin(k_2 t + \beta_2) + a\dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b\dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) \\ \dot{\Psi} &= a\alpha_1 k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b\alpha_2 k_2 \cos(k_2 t + \beta_2) + \dot{a}\alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + \\ &\quad + \dot{b}\alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2) + \alpha_1 a\dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b\dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2)\end{aligned}$$

bağıntılarından sırasıyla

$$\dot{\Phi} = ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2) \quad (3.25)$$

$$\dot{\Psi} = a\alpha_1 k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b\alpha_2 k_2 \cos(k_2 t + \beta_2)$$

ve

$$\begin{aligned}\dot{a} \sin(k_1 t + \beta_1) + \dot{b} \sin(k_2 t + \beta_2) + a\dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \\ + b\dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) = 0\end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}\dot{a}\alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + \dot{b}\alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2) + \alpha_1 a\dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \\ + \alpha_2 b\dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) = 0\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. (3.25) zamana göre türetilerek

$$\begin{aligned}
\ddot{\Phi} &= \dot{a}k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) - ak_1(k_1 + \dot{\beta}_1) \sin(k_1 t + \beta_1) + \\
&\quad + \dot{b}k_2 \cos(k_2 t + \beta_2) - bk_2(k_2 + \dot{\beta}_2) \sin(k_2 t + \beta_2) \\
\ddot{\Psi} &= \dot{a}\alpha_1 k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) - a\alpha_1 k_1(k_1 + \dot{\beta}_1) \sin(k_1 t + \beta_1) + \\
&\quad + \dot{b}\alpha_2 k_2 \cos(k_2 t + \beta_2) - b\alpha_2 k_2(k_2 + \dot{\beta}_2) \sin(k_2 t + \beta_2).
\end{aligned}$$

ve $k_1 t + \beta_1 = \xi$, $k_2 t + \beta_2 = \eta$ alınarak Ψ , $\ddot{\Psi}$, Φ ve $\ddot{\Phi}$ ifadeleri (3.11) sisteminde yerine yazılır.

$$\begin{aligned}
&\dot{a}k_1 \cos \xi - ak_1(k_1 + \dot{\beta}_1) \sin \xi + \dot{b}k_2 \cos \eta - bk_2(k_2 + \dot{\beta}_2) \sin \eta + \\
&+ B_1 \alpha_1 a \sin \xi + B_1 \alpha_2 b \sin \eta + (n_1^2 - \nu^2) a \sin \xi + (n_1^2 - \nu^2) b \sin \eta = \tilde{F} \\
&\dot{a}\alpha_1 k_1 \cos \xi - a\alpha_1 k_1(k_1 + \dot{\beta}_1) \sin \xi + \dot{b}\alpha_2 k_2 \cos \eta - b\alpha_2 k_2(k_2 + \dot{\beta}_2) \sin \eta + \\
&+ B_2 a \sin \xi + B_2 b \sin \eta + (n_2^2 - \nu^2) \alpha_1 a \sin \xi + (n_2^2 - \nu^2) \alpha_2 b \sin \eta = \tilde{G}
\end{aligned}$$

eşitliklerini ve (3.26)'yı alt alta yazıp $\dot{a}$, $\dot{b}$, $a\dot{\beta}_1$, $b\dot{\beta}_2$ 'i bilinmeyenlerine göre çözelim:

$$\begin{aligned}
&\dot{a} \sin \xi + \dot{b} \sin \eta + a\dot{\beta}_1 \cos \xi + b\dot{\beta}_2 \cos \eta = 0 \\
&\dot{a}\alpha_1 \sin \xi + \dot{b}\alpha_2 \sin \eta + a\dot{\beta}_1 \alpha_1 \cos \xi + b\dot{\beta}_2 \alpha_2 \cos \eta = 0 \\
&\dot{a}k_1 \cos \xi + \dot{b}k_2 \cos \eta - a\dot{\beta}_1 k_1 \sin \xi - b\dot{\beta}_2 k_2 \sin \eta = A \\
&\dot{a}\alpha_1 k_1 \cos \xi + \dot{b}\alpha_2 k_2 \cos \eta - a\dot{\beta}_1 \alpha_1 k_1 \sin \xi - b\dot{\beta}_2 \alpha_2 k_2 \sin \eta = B,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

burada

$$A = ak_1^2 \sin \xi + bk_2^2 \sin \eta - B_1 \alpha_1 a \sin \xi - B_1 \alpha_2 b \sin \eta - \\ - a(n_1^2 - \nu^2) \sin \xi - b(n_1^2 - \nu^2) \sin \eta + \tilde{F}$$

$$B = a\alpha_1 k_1^2 \sin \xi + b\alpha_2 k_2^2 \sin \eta - B_2 a \sin \xi - B_2 b \sin \eta - \\ - a\alpha_1 (n_2^2 - \nu^2) \sin \xi - b\alpha_2 (n_2^2 - \nu^2) \sin \eta + \tilde{G}.$$

(3.27) sisteminin katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \xi & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ \alpha_1 \sin \xi & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ \alpha_1 k_1 \cos \xi & \alpha_2 k_2 \cos \eta & -\alpha_1 k_1 \sin \xi & -\alpha_2 k_2 \sin \eta \end{vmatrix} \begin{array}{l} -\alpha_1 R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -\alpha_1 R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \xi & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ 0 & (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \eta & 0 & (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \eta \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ 0 & (\alpha_2 - \alpha_1) k_2 \cos \eta & 0 & -(\alpha_2 - \alpha_1) k_2 \sin \eta \end{vmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu determinanı 1.sütuna göre açarsak,

$$\Delta = -k_1 \sin^2 \xi \left[-k_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sin^2 \eta - k_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cos^2 \eta \right] + k_1 k_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cos^2 \xi \\ = -k_1 \sin^2 \xi \left[-k_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\sin^2 \eta + \cos^2 \eta) \right] + k_1 k_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cos^2 \xi \\ = k_1 k_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sin^2 \xi + k_1 k_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \cos^2 \xi$$

$$\Delta = k_1 k_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \quad \text{yada} \quad \Delta = \frac{k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2)^2}{B_1^2}$$

bulunur.

$$\Delta_{\dot{a}} = \begin{vmatrix} 0 & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ 0 & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ A & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ B & \alpha_2 k_2 \cos \eta & -\alpha_1 k_1 \sin \xi & -\alpha_2 k_2 \sin \eta \end{vmatrix} \begin{matrix} -\alpha_2 R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -\alpha_2 R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ 0 & 0 & (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \xi & 0 \\ A & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ -\alpha_2 A + B & 0 & k_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \xi & 0 \end{vmatrix}.$$

Yukarıdaki determinanı 2.satıra göre açarsak,

$$\Delta_{\dot{a}} = (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \xi \begin{vmatrix} 0 & \sin \eta & \cos \eta \\ A & k_2 \cos \eta & -k_2 \sin \eta \\ B - \alpha_2 A & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= k_2 (\alpha_2 A - B) (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \xi \quad \text{yada} \quad \Delta_{\dot{a}} = \frac{k_2 (\alpha_2 A - B) (k_2^2 - k_1^2)}{B_1} \cos \xi$$

olur ve buradan

$$\dot{a} = \frac{\Delta_{\dot{a}}}{\Delta} = \frac{\frac{k_2 (\alpha_2 A - B) (k_2^2 - k_1^2)}{B_1} \cos \xi}{\frac{k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2)^2}{B_1^2}} = \frac{-(\alpha_2 A - B) B_1}{k_1 (k_1^2 - k_2^2)} \cos \xi$$

$$= \frac{1}{k_1(k_1^2 - k_2^2)} (B_1 B - B_1 \alpha_2 A) \cos \xi$$

bulunur.

$$\Delta_{\dot{b}} = \begin{vmatrix} \sin \xi & 0 & \cos \xi & \cos \eta \\ \alpha_1 \sin \xi & 0 & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ k_1 \cos \xi & A & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ \alpha_1 k_1 \cos \xi & B & -\alpha_1 k_1 \sin \xi & -\alpha_2 k_2 \sin \eta \end{vmatrix} \begin{array}{l} -\alpha_1 R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -\alpha_1 R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \xi & 0 & \cos \xi & \cos \eta \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \eta \\ k_1 \cos \xi & A & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ 0 & -\alpha_1 A + B & 0 & -k_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \eta \end{vmatrix}$$

determinantı 2. satıra göre açılırsa,

$$\Delta_{\dot{b}} = (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \eta \begin{vmatrix} \sin \xi & 0 & \cos \xi \\ k_1 \cos \xi & A & -k_1 \sin \xi \\ 0 & B - \alpha_1 A & 0 \end{vmatrix}$$

$$= k_1 (B - \alpha_1 A) (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \eta \text{ yada } \Delta_{\dot{b}} = \frac{k_1 (B - \alpha_1 A) (k_2^2 - k_1^2)}{B_1} \cos \eta$$

olur. Buradan

$$\dot{b} = \frac{\Delta_{\dot{b}}}{\Delta} = \frac{\frac{k_1 (B - \alpha_1 A) (k_2^2 - k_1^2)}{B_1} \cos \eta}{\frac{k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2)^2}{B_1^2}} = \frac{(B - \alpha_1 A) B_1}{k_2 (k_2^2 - k_1^2)} \cos \eta$$

$$= \frac{-1}{k_2(k_1^2 - k_2^2)} (B_1 B - B_1 \alpha_1 A) \cos \eta$$

bulunur.

$$\Delta_{a\dot{\beta}_1} = \begin{vmatrix} \sin \xi & \sin \eta & 0 & \cos \eta \\ \alpha_1 \sin \xi & \alpha_2 \sin \eta & 0 & \alpha_2 \cos \eta \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & A & -k_2 \sin \eta \\ \alpha_1 k_1 \cos \xi & \alpha_2 k_2 \cos \eta & B & -\alpha_2 k_2 \sin \eta \end{vmatrix} \begin{matrix} -\alpha_2 R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -\alpha_2 R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \xi & \sin \eta & 0 & \cos \eta \\ (\alpha_1 - \alpha_2) \sin \xi & 0 & 0 & 0 \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & A & -k_2 \sin \eta \\ k_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \xi & 0 & -\alpha_2 A + B & 0 \end{vmatrix}$$

determinantı 2. satıra göre açılırsa,

$$\Delta_{a\dot{\beta}_1} = (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \xi \begin{vmatrix} \sin \eta & 0 & \cos \eta \\ k_2 \cos \eta & A & -k_2 \sin \eta \\ 0 & B - \alpha_2 A & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -k_2 (\alpha_2 A - B) (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \xi \quad \text{yada} \quad \Delta_{a\dot{\beta}_1} = \frac{-k_2 (\alpha_2 A - B) (k_2^2 - k_1^2)}{B_1} \sin \xi$$

olur. Buradan

$$a\dot{\beta}_1 = \frac{\Delta_{a\dot{\beta}_1}}{\Delta} = \frac{\frac{-k_2 (\alpha_2 A - B) (k_2^2 - k_1^2)}{B_1} \sin \xi}{\frac{k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2)^2}{B_1^2}} = \frac{(\alpha_2 A - B) B_1}{k_1 (k_1^2 - k_2^2)} \sin \xi$$

$$= \frac{-1}{k_1(k_1^2 - k_2^2)} (B_1 B - B_1 \alpha_2 A) \sin \xi$$

bulunur.

$$\Delta_{b\dot{\beta}_2} = \begin{vmatrix} \sin \xi & \sin \eta & \cos \xi & 0 \\ \alpha_1 \sin \xi & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & 0 \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & A \\ \alpha_1 k_1 \cos \xi & \alpha_2 k_2 \cos \eta & -\alpha_1 k_1 \sin \xi & B \end{vmatrix} \begin{array}{l} -\alpha_1 R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -\alpha_1 R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \xi & \sin \eta & \cos \xi & 0 \\ 0 & (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \eta & 0 & 0 \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & A \\ 0 & k_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \eta & 0 & B - \alpha_1 A \end{vmatrix}$$

determinantı 2. satıra göre açılırsa,

$$\Delta_{b\dot{\beta}_2} = (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \eta \begin{vmatrix} \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ k_1 \cos \xi & -k_1 \sin \xi & A \\ 0 & 0 & B - \alpha_1 A \end{vmatrix}$$

$$= k_1 (\alpha_1 A - B) (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \eta \text{ yada } \Delta_{b\dot{\beta}_2} = \frac{k_1 (\alpha_1 A - B) (k_2^2 - k_1^2)}{B_1} \sin \eta$$

olur. Buradan

$$b\dot{\beta}_2 = \frac{\Delta_{b\dot{\beta}_2}}{\Delta} = \frac{\frac{k_1 (\alpha_1 A - B) (k_2^2 - k_1^2)}{B_1} \sin \eta}{\frac{k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2)^2}{B_1^2}} = \frac{(B - \alpha_1 A) B_1}{k_2 (k_1^2 - k_2^2)} \sin \eta$$

$$= \frac{1}{k_2 (k_1^2 - k_2^2)} (B_1 B - B_1 \alpha_1 A) \sin \eta$$

bulunur. (3.27) nin çözümü

$$\dot{a} = \frac{1}{k_1 (k_1^2 - k_2^2)} (B_1 B - B_1 \alpha_2 A) \cos \xi$$

$$\dot{b} = \frac{-1}{k_2 (k_1^2 - k_2^2)} (B_1 B - B_1 \alpha_1 A) \cos \eta$$

$$a \dot{\beta}_1 = \frac{-1}{k_1 (k_1^2 - k_2^2)} (B_1 B - B_1 \alpha_2 A) \sin \xi$$

$$b \dot{\beta}_2 = \frac{1}{k_2 (k_1^2 - k_2^2)} (B_1 B - B_1 \alpha_1 A) \sin \eta$$

şeklinde yazılır. (3.24)'ün ilk eşitliğinden $B_1 = \frac{k_1^2 + \nu^2 - n_1^2}{\alpha_1}$, ikinci eşitliğinden

$$B_2 = \alpha_2 (k_2^2 + \nu^2 - n_2^2) \text{ yazarak } \frac{B_2}{B_1} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (k_2^2 + \nu^2 - n_2^2)}{k_1^2 + \nu^2 - n_1^2} \text{ ifadesinden}$$

$$B_1 = \frac{(k_1^2 + \nu^2 - n_1^2)}{\alpha_1 \alpha_2 (k_2^2 + \nu^2 - n_2^2)} B_2 \text{ bulunur.}$$

$$B_1 B - B_1 \alpha_2 A = B_1 B + \frac{(n_1^2 - \nu^2 - k_1^2)}{\alpha_1 (k_2^2 + \nu^2 - n_2^2)} B_2 A$$

$$B_1 B - B_1 \alpha_1 A = B_1 B + \frac{(n_1^2 - \nu^2 - k_1^2)}{\alpha_2 (k_2^2 + \nu^2 - n_2^2)} B_2 A$$

eşitliklerinde $\frac{n_1^2 - \nu^2 - k_1^2}{k_2^2 + \nu^2 - n_2^2} A = f^*$ ve $B = g^*$ yazılırsa (3.27)'in çözümü

$$\dot{a} = \frac{1}{k_1 (k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{B_2}{\alpha_1} f^* + B_1 g^* \right) \cos \xi$$

$$\dot{b} = \frac{-1}{k_2 (k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{B_2}{\alpha_2} f^* + B_1 g^* \right) \cos \eta$$

(3.28)

$$a \dot{\beta}_1 = \frac{-1}{k_1 (k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{B_2}{\alpha_1} f^* + B_1 g^* \right) \sin \xi$$

$$b \dot{\beta}_2 = \frac{1}{k_2 (k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{B_2}{\alpha_2} f^* + B_1 g^* \right) \sin \eta$$

şeklinde bulunur.

f^* ve g^* fonksiyonlarındaki $\Phi, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Psi}$ değişkenleri (3.23) ve (3.25) teki ifadeleriyle alındığında aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} f^* &= f^* \left(a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) \right), \\ &a \alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + b \alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2), \\ &a k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b k_2 \cos(k_2 t + \beta_2), \\ &a \alpha_1 k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + b \alpha_2 k_2 \cos(k_2 t + \beta_2) \end{aligned}$$

(3.29)

$$\begin{aligned}
g^* &= g^* \left(a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) \right), \\
a\alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1) &+ b\alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2), \\
ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) &+ bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2), \\
a\alpha_1 k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) &+ b\alpha_2 k_2 \cos(k_2 t + \beta_2)
\end{aligned}$$

Kurulan problemin çözümü için $a > 0$, $b > 0$ bölgesinin yörüngeler parçalanış yapısına sahip

$$\dot{a} = \mu K(a, b), \quad \dot{b} = \mu L(a, b) \quad (\mu \geq 0) \quad (3.30)$$

denklem sistemini kuralım. (3.28) ve (3.30) denklemlerinde karşılıklı gelen sağ tarafları

$$\text{eşitleyerek } \frac{1}{k_1(k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{B_2}{\alpha_1} f^* + B_1 g^* \right) \cos \xi = \mu K \quad \text{ve}$$

$$\frac{-1}{k_2(k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{B_2}{\alpha_2} f^* + B_1 g^* \right) \cos \eta = \mu L \quad \text{eşitliklerinden}$$

$$-\left(\frac{B_2}{\alpha_1 k_1} f^* + \frac{B_1}{k_1} g^* \right) \cos \xi = -\mu(k_1^2 - k_2^2) K = \mu_1 K$$

ve

$$\left(\frac{B_2}{\alpha_2 k_2} f^* + \frac{B_1}{k_2} g^* \right) \cos \eta = -\mu(k_1^2 - k_2^2) L = \mu_1 L$$

bulunur. Buradan $\mu = \frac{\mu_1}{k_2^2 - k_1^2}$, yani

$$-\left(\frac{B_2}{\alpha_1 k_1} f^* + \frac{B_1}{k_1} g^*\right) \cos \xi = \mu_1 K \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{B_2}{\alpha_2 k_2} f^* + \frac{B_1}{k_2} g^*\right) \cos \eta = \mu_1 L$$

denklemleri elde edilir. (3.31) denklemlerinde $\mu_1 = \mu_2 \cos^2 \xi \cos^2 \eta$ yazalım ve f^* ve g^* 'a göre çözelim.

$$-\frac{B_2}{\alpha_1 k_1} f^* - \frac{B_1}{k_1} g^* = \mu_2 K \cos \xi \cos^2 \eta$$

$$\frac{B_2}{\alpha_2 k_2} f^* + \frac{B_1}{k_2} g^* = \mu_2 L \cos^2 \xi \cos \eta$$

Yukarıdaki sistemde 1. denklemi $\frac{1}{k_2 \alpha_2}$, 2. denklemi $\frac{1}{k_1 \alpha_1}$ ile çarpıp toplarsak

$$\frac{B_1}{k_1 k_2} \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2} \right) g^* = \mu_2 \left(\frac{K \cos \eta}{k_2 \alpha_2} + \frac{L \cos \xi}{k_1 \alpha_1} \right) \cos \xi \cos \eta$$

elde edilir ve buradan

$$g^* = \frac{-\mu_2}{B_1 (\alpha_1 - \alpha_2)} \left(k_1 \alpha_1 K \cos \eta + k_2 \alpha_2 L \cos \xi \right) \cos \xi \cos \eta$$

bulunur.

Şimdi de 1. denklemi $\frac{1}{k_2}$, 2. denklemi $\frac{1}{k_1}$ ile çarpıp toplarsak

$$\frac{B_2}{k_1 k_2} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right) f^* = \mu_2 \left(\frac{K}{k_2} \cos \eta + \frac{L}{k_1} \cos \xi \right) \cos \xi \cos \eta$$

elde edilir ve buradan

$$f^* = \frac{\mu_2 \alpha_1 \alpha_2}{B_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} (k_1 K \cos \eta + k_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta$$

bulunur.

f^* ve g^* 'ın çözülmüş şekli

$$f^* = \frac{\mu_2 \alpha_1 \alpha_2}{B_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} (k_1 K \cos \eta + k_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta$$

(3.32)

$$g^* = \frac{-\mu_2}{B_1 (\alpha_1 - \alpha_2)} (k_1 \alpha_1 K \cos \eta + k_2 \alpha_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta$$

olup bu ifadeler (3.28) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{k_1 (k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{\mu_2 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (k_1 K \cos \eta + k_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (k_1 \alpha_1 K \cos \eta + k_2 \alpha_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta \right) \cos \xi \\ &= \frac{\mu_2}{k_2^2 - k_1^2} K \cos^2 \xi \cos^2 \eta = \frac{\mu \mu_2}{\mu_1} K \cos^2 \xi \cos^2 \eta \end{aligned}$$

$$= \mu_3 K \cos^2 \xi \cos^2 \eta,$$

elde edilir ki, burada $\mu_3 = \frac{\mu\mu_2}{\mu_1}$ tür.

$$\dot{b} = \frac{-1}{k_2(k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{\mu_2 \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} (k_1 K \cos \eta + k_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta - \right. \\ \left. - \frac{\mu_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (k_1 \alpha_1 K \cos \eta + k_2 \alpha_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta \right) \cos \eta$$

$$= \frac{\mu_2}{k_2^2 - k_1^2} L \cos^2 \xi \cos^2 \eta = \frac{\mu\mu_2}{\mu_1} L \cos^2 \xi \cos^2 \eta$$

$$= \mu_3 L \cos^2 \xi \cos^2 \eta,$$

$$a\dot{\beta}_1 = \frac{-1}{k_1(k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{\mu_2 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (k_1 K \cos \eta + k_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta - \right. \\ \left. - \frac{\mu_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (k_1 \alpha_1 K \cos \eta + k_2 \alpha_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta \right) \sin \xi$$

$$= \frac{-\mu\mu_2}{\mu_1} K \cos \xi \sin \xi \cos^2 \eta = -\mu_3 K \cos \xi \sin \xi \cos^2 \eta,$$

$$b\dot{\beta}_2 = \frac{1}{k_2(k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{\mu_2 \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} (k_1 K \cos \eta + k_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta - \right. \\ \left. - \frac{\mu_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (k_1 \alpha_1 K \cos \eta + k_2 \alpha_2 L \cos \xi) \cos \xi \cos \eta \right) \sin \eta$$

$$= \frac{-\mu\mu_2}{\mu_1} L \cos^2 \xi \cos \eta \sin \eta = -\mu_3 L \cos^2 \xi \cos \eta \sin \eta$$

bulunur. Yani

$$\dot{a} = \mu_3 K \cos^2 \xi \cos^2 \eta$$

$$\dot{b} = \mu_3 L \cos^2 \xi \cos^2 \eta$$

(3.33)

$$a\dot{\beta}_1 = -\mu_3 K \cos \xi \sin \xi \cos^2 \eta$$

$$b\dot{\beta}_2 = -\mu_3 L \cos^2 \xi \cos \eta \sin \eta$$

denklem sistemi elde edilir. a, b, β_1 ve β_2 nin (μ_3 ün seçimine göre) yavaş değiştiğini göz önüne alarak

$\frac{2\pi}{k_1}$ ve $\frac{2\pi}{k_2}$ periyotları için (3.33) denklemlerinin sağ yanlarını sağlayalım.

Sonuçta kısaltılmış

$$\dot{a} = \mu_3 K, \quad \dot{b} = \mu_3 L, \quad \dot{\beta}_1 = 0, \quad \dot{\beta}_2 = 0 \quad (3.34)$$

denklem sistemi elde edilmektedir. (3.34) denklem sisteminin çözümleri $\dot{\beta}_1 = 0, \dot{\beta}_2 = 0$ ve a ile b olmaktadır. a ve b ' nin değişimleri, (a,b) düzleminin $a > 0, b > 0$ bölgesindeki yörüngelere parçalanışı gibi olmaktadır. (3.23) ve (3.25) bağıntılarını kullanarak, a ve b değişkenlerini ve $\cos \xi, \cos \eta$ fonksiyonlarını $\Phi, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Psi}$ ile ifade edelim.

$$a \sin \xi + b \sin \eta = \Phi$$

$$a\alpha_1 \sin \xi + b\alpha_2 \sin \eta = \Psi$$

$$ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta = \dot{\Phi}$$

$$a\alpha_1 k_1 \cos \xi + b\alpha_2 k_2 \cos \eta = \dot{\Psi}.$$

Yukarıdaki sistemde 1. denklemi α_2 ile çarpıp, 2. denklemi taraf tarafa ve 3. denklemi de α_2 ile çarpıp 4. denklemi taraf tarafa çıkaralım.

$$a(\alpha_2 - \alpha_1) \sin \xi = \alpha_2 \Phi - \Psi \quad \text{ve} \quad ak_1(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \xi = \alpha_2 \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \quad \text{elde edilir. Son iki}$$

eşitliğin kareleri alınıp taraf tarafa toplayıp düzenlersek,

$$a = \left[\frac{k_1^2 (\alpha_2 \Phi - \Psi)^2 + (\alpha_2 \dot{\Phi} - \dot{\Psi})^2}{k_1^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right]^{1/2}$$

bulunur.

Yukarıdaki sistemde 1. denklemi α_1 ile çarpıp, 2. denklemi taraf tarafa ve 3. denklemi de α_1 ile çarpıp 4. denklemi taraf tarafa çıkaralım.

$$b(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \eta = \alpha_1 \Phi - \Psi \quad \text{ve} \quad bk_2(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \eta = \alpha_1 \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \quad \text{elde edilir. Son iki}$$

eşitliğin kareleri alınıp taraf tarafa toplayıp düzenlersek,

$$b = \left[\frac{k_2^2 (\alpha_1 \Phi - \Psi)^2 + (\alpha_1 \dot{\Phi} - \dot{\Psi})^2}{k_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right]^{1/2}$$

bulunur. Yukarıdaki sistemden elde edilen

$$ak_1(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \xi = \alpha_2 \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \text{ denkleminde } \cos \xi = \frac{\alpha_2 \dot{\Phi} - \dot{\Psi}}{k_1(\alpha_2 - \alpha_1)} a^{-1} \text{ ve}$$

$$bk_2(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \eta = \alpha_1 \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \text{ denkleminde } \cos \eta = \frac{\alpha_1 \dot{\Phi} - \dot{\Psi}}{k_2(\alpha_1 - \alpha_2)} b^{-1}$$

olur. a ve b yerine değerleri yazılırsa sırasıyla

$$\cos \xi = \frac{\alpha_2 \dot{\Phi} - \dot{\Psi}}{k_1(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{k_1^2 (\alpha_2 \Phi - \Psi)^2 + (\alpha_2 \dot{\Phi} - \dot{\Psi})^2}{k_1^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right]^{-1/2}$$

ve

$$\cos \eta = \frac{\alpha_1 \dot{\Phi} - \dot{\Psi}}{k_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[\frac{k_2^2 (\alpha_1 \Phi - \Psi)^2 + (\alpha_1 \dot{\Phi} - \dot{\Psi})^2}{k_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right]^{-1/2}$$

şeklinde yazılır. (3.32) de $\Phi, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Psi}$ değişkenlerine geçilirse,

$$F_p = \mu_2 H_1(\Phi, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Psi}), \quad G_p = \mu_2 H_2(\Phi, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Psi})$$

bulunur. (3.11)'deki eşitliklerin sağ taraflarını sırasıyla F_p ve G_p 'ye eşitlersek

$$\tilde{U}_1 = m_1 l^2 \left[e^{-\nu t} \mu_2 H_1 - \frac{g}{l} \left(e^{-\nu t} \Phi - \sin \left(e^{-\nu t} \Phi \right) \right) \right] - \tilde{M}_1$$

$$\tilde{U}_2 = m_2 l^2 \left[e^{-\nu t} \mu_2 H_2 - \frac{g}{l} \left(e^{-\nu t} \Psi - \sin \left(e^{-\nu t} \Psi \right) \right) \right] - \tilde{M}_2$$

ifadeleri elde edilir ve son iki eşitlikte $\Phi = e^{\nu t} \varphi$, $\Psi = e^{\nu t} \psi$ dönüşümü yapıldığında

$$U_1 = m_1 l^2 \left[e^{-\nu t} \mu_2 \tilde{H}_1 - \frac{g}{l} \left(\varphi - \sin(\varphi) \right) \right] - M_1$$

$$U_2 = m_2 l^2 \left[e^{-\nu t} \mu_2 \tilde{H}_2 - \frac{g}{l} \left(\psi - \sin(\psi) \right) \right] - M_2$$

kontrol eden momentleri bulunur. Burada μ_2 negatif olmayan çarpanı, (3.11) denklem sisteminin sağ tarafının küçük alınması durumunda seçilmektedir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada ikinci mertebeden iki kuazilineer denklemden oluşan dinamik sistem ele alınmıştır. Bu sistem çok çeşitli mekanik titreşimli hareketleri yansıtmakta olup, tez çalışmasında özellikle iki sarkaçtan oluşan bir salınım mekanizması incelenmiştir. Sarkaçların bağlandıkları yerde veya aralarındaki yayda viskozite özelliği bulunmaktadır. Önce (3.12) lineer denklem sistemi çözülmüş ve viskozite katsayısının çözümlerin karakterine etkisi incelenmiştir. Katsayılara, başlangıç değerlerine ve viskozite katsayısına bağlı olarak sistemin kararlılığı, asimptotik kararlılığı ve kararsızlığı araştırılmış, viskozite katsayısının kritik değerleri bulunmuştur. Her bir durum Maple 10 programında çözülmüş, gereken düzlemsel ve uzaysal eğriler (yörüngeler) çizilerek incelenmiştir.

Yukarıdaki paragrafta yapılan incelemeler lineer olmayan sistem için de yapılmıştır. Sağ taraf fonksiyonları küçük parametreye orantılı olmakta ve bilinmeyen fonksiyonlara karmaşık şekilde bağlı olmaktadırlar. Sistemin sağ yanları, lineer sistemin çözümlerine uyumlu seçilerek bu sistemin çözümlerinin karakteri bilgisayar yardımıyla incelenmiştir. Bu sırada çözümlerin Lyapunov anlamında kararlı (Şekil 4.1, Şekil 4.2, Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.6, Şekil 4.7, Şekil 4.8, Şekil 4.9, Şekil 4.10, Şekil 4.11), asimptotik kararlı (Şekil 4.1, Şekil 4.2, Şekil 4.3, Şekil 4.8, Şekil 4.9, Şekil 4.10, Şekil 4.11) ve kararsızlığına (Şekil 4.5) önem verilmiştir. Kritik parametrenin bazı değerlerinde sarkaçlar sisteminin hareketinin karakterinin değiştiği gözlenmiştir. Bu olaylara literatürde bulunan hiçbir yayında rastlanmamaktadır ve bu bulguların kararlılık problemlerinde önemli bir rolü vardır. Parametrelerimizi farklı şekilde değiştirmekle, özel durumlarda literatürde bulunan çözümler elde edilmektedir. Kararlı çözümlerin zamana bağlılıklarının incelenmesi sırasında t 'nin belli bir değerine kadar saat yönünde devam eden hareketin, bu değerden sonra saat yönünün aksine geçtiği gözlenmiştir (Şekil 4.4, Şekil 4.6, Şekil 4.7). t 'nin bu değerini belli bir anlamda kritik değer olarak isimlendirebiliriz. Bu değer sistemin diğer parametrelerine (katsayılar,

viskozite katsayısı, sağ yanlar) de bağlıdır. Bu bağıllık tez çalışmasında çeşitli grafikler üzerinde incelenmiştir. Bu çalışmada Lyapunov fonksiyonu bulunmamış ancak bu yönde incelemeler bilgisayar yardımıyla yapılmıştır.

4.1 GENLİKLERİN PROGRAM DEĞİŞİMLERİNİN DENKLEMLERİNİN KURULMASI

Tezde genliklerin zayıf değişken sistemler (vizkosite olayı dışında) de ele alınmıştır. Bu yöndeki çalışmaları özetlemek için aşağıdakileri dikkate alalım. (3.3) denklemleri ile tanımlanan özel yörüngeler alanını inşa etmek için λ 'yı (3.4)' den

$$\lambda = -\frac{w_1 w_2}{w_3 - w_1 w_2} \equiv \Omega$$

açık şekilde çekelim, Ω fonksiyonundan kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\Omega = \frac{w_1 w_2}{w_3 + w_1 w_2} = \frac{ab}{(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 + ab} \text{ ifadesinden}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \frac{b \left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 - 2a(a - 6.6) \right]}{\left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 + ab \right]^2},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial b} = \frac{a \left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 - 2b(b - 6.4) \right]}{\left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 + ab \right]^2}$$

bulunur.

$$n_a = b \left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 - 2a(a - 6.4) \right],$$

$$n_b = a \left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 - 2b(b - 6.4) \right]$$

olmak üzere

$$\mathbf{n} = \{n_a; n_b\}, \quad \boldsymbol{\tau} = \{n_b; -n_a\} \quad (4.1)$$

yazalım.

Verilen yapıda (Şekil 4.8) $a > 0$, $b > 0$ bölgesinin yörüngelere ayrılışını tanımlayan (3.11) denklem sisteminin sağ yanlarından oluşan $\mathbf{P} = \{A, B\}$ vektörü ile yukarıdaki vektörlerin skaler çarpım fonksiyonlarını kuralım. Bu çarpımlar $a > 0$, $b > 0$ bölgesinin yörüngelere parçalanışını belirlemektedir. Özel halde bu özelliğe sahip olan aşağıdaki fonksiyonları yazalım:

$$F_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \xi_1 w_0 w_1 w_2 w_3 \quad (4.2)$$

$$F_2 = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} = \xi_2 w_3,$$

burada $w_0 = 0$ ın kararlı limit devresine karşılık gelmesi için $\xi_1 > 0$ alıyoruz. $\xi_2 > 0$ ise hareketi ifade eden nokta $w_2 = 0$ noktası civarında saatin aksi yönündeki harekete karşılık gelmektedir. (4.2)'deki F_1 ve F_2 fonksiyonlarına verilen sistemin aşağıdaki sağ yanları uygun gelmektedir:

$$\begin{aligned} A = & \xi_1 w_0 w_1 w_2 w_3 b \left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 - 2a(a - 6.4) \right] + \\ & + \xi_2 w_3 a \left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 - 2b(b - 6.4) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} B = & \xi_1 w_0 w_1 w_2 w_3 a \left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 - 2b(b - 6.4) \right] + \\ & + \xi_2 w_3 b \left[(a - 6.4)^2 + (b - 6.4)^2 - 2a(a - 6.4) \right] \end{aligned}$$

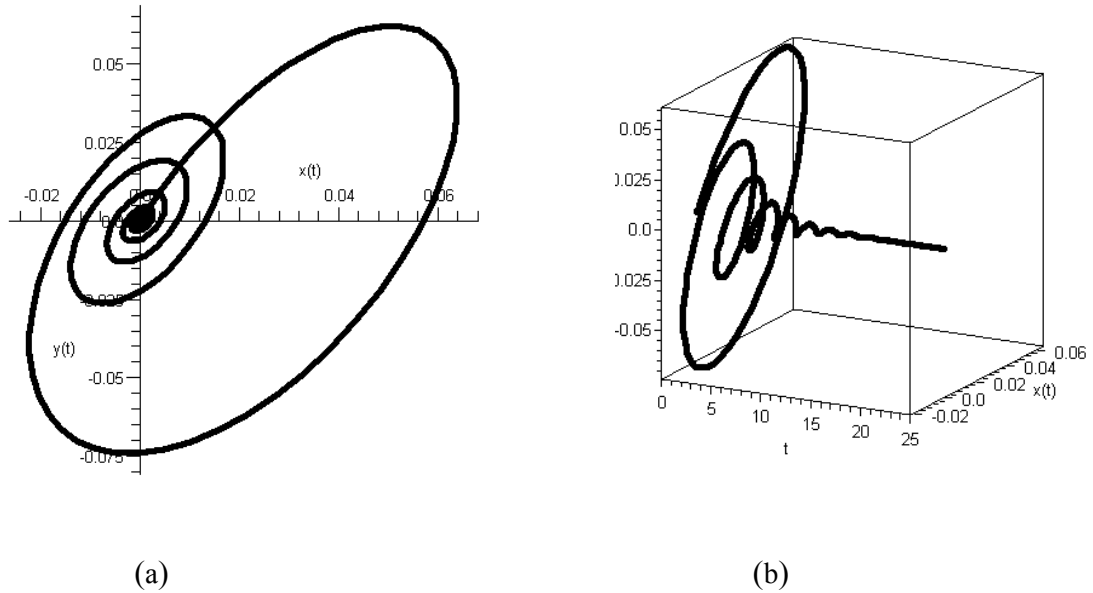
(4.2) deki F_1 ve F_2 fonksiyonlarının ve (4.3) teki A ve B 'nin kurulmasının doğruluğu Maple 10 bilgisayar programının matematik paketi yardımıyla çizilen şekil 4.8 ile onaylanmaktadır.

C^1 sınıfından, yörüngelere parçalanışın daha karmaşık yapıda olduğu (3.8) şeklindeki denklem sistemlerinin sentezi için bir metod geliştirilmiştir [25].

$$\ddot{\varphi} + \nu \dot{\varphi} - 0,074.\psi + 8,98.\varphi = 8,909.(\varphi - \sin \varphi) + e^{-\nu t} (A \cos t + B \sin t) \quad (4.4)$$

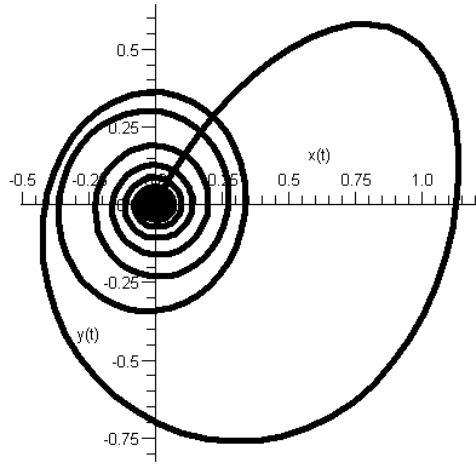
$$\ddot{\psi} + \nu \dot{\psi} - 0,061.\varphi + 8,97.\psi = 8,909.(\psi - \sin \psi) + e^{-\nu t} (C \cos t + D \sin t)$$

sistemi için çözümlerin kararlılığını, asimptotik kararlılığını ve kararsızlığını, parametrelerin farklı değerleri için Maple 10 programı yardımıyla çeşitli iki ve üç boyutlu yörüngeler ile gösterelim (Grafik çizimlerinde $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ yerine sırasıyla $x(t)$ ve $y(t)$ alınmıştır).

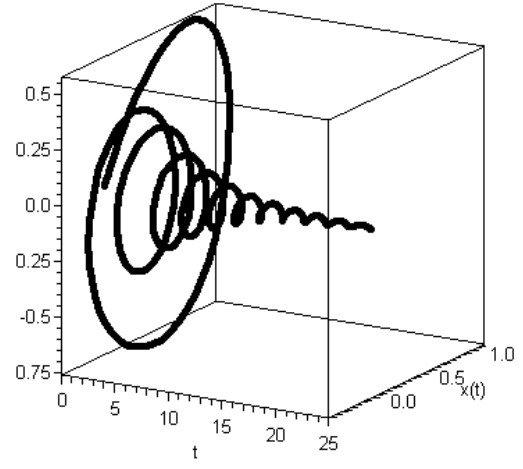


Şekil 4.1: $\nu = 1.1$, $A = 0.3$, $B = 0.7$, $C = 0.8$, $D = -1$, $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, $0 \leq t \leq 25$

(a) iki boyutlu, (b) üç boyutlu



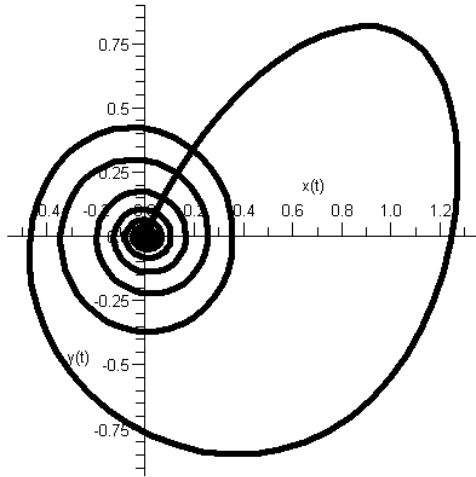
(a)



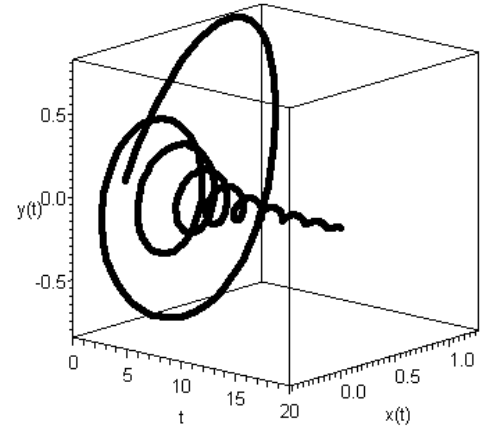
(b)

Şekil 4.2: $\nu = 0.8$, $A = 3$, $B = 11$, $C = 6$, $D = -6$, $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, $0 \leq t \leq 25$

(a) iki boyutlu, (b) üç boyutlu



(a)

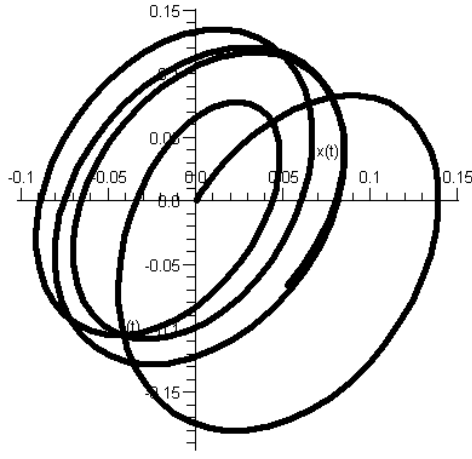


(b)

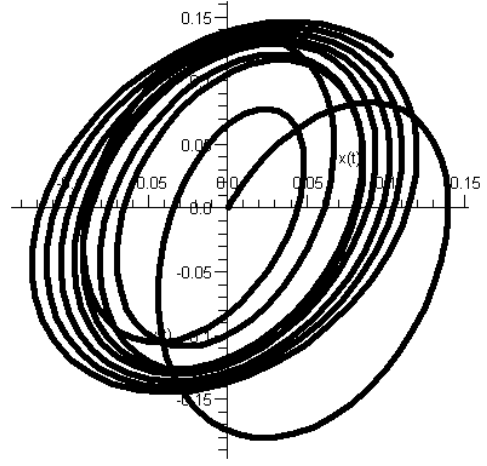
Şekil 4.3: $\nu = 0.9$, $A = 3$, $B = 14$, $C = 8$, $D = -6$, $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, $0 \leq t \leq 20$

(a) iki boyutlu, (b) üç boyutlu

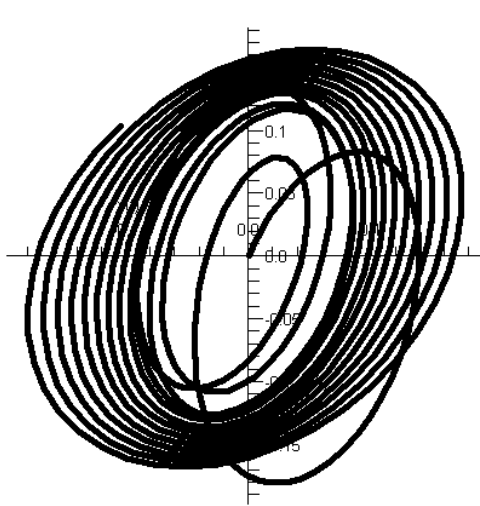
t' nin verilen değerlerinde farklı parametreler için (4.4) sisteminin çözüm grafikleri Şekil 4.4, Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7’de verilmektedir.



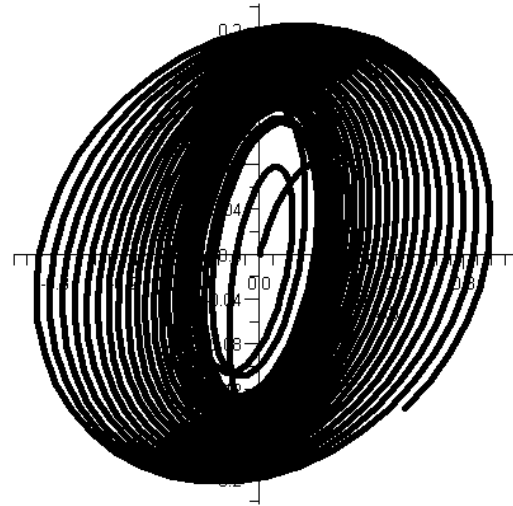
(a)



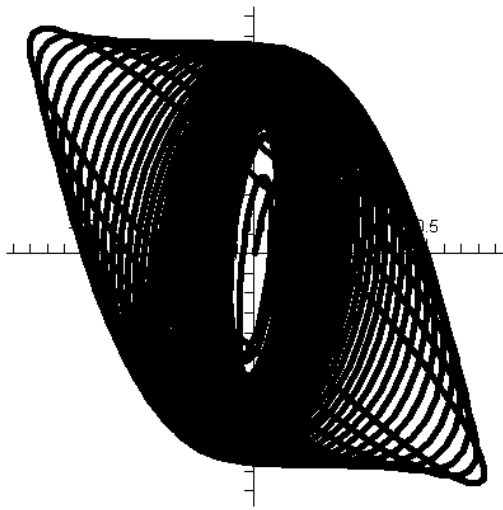
(b)



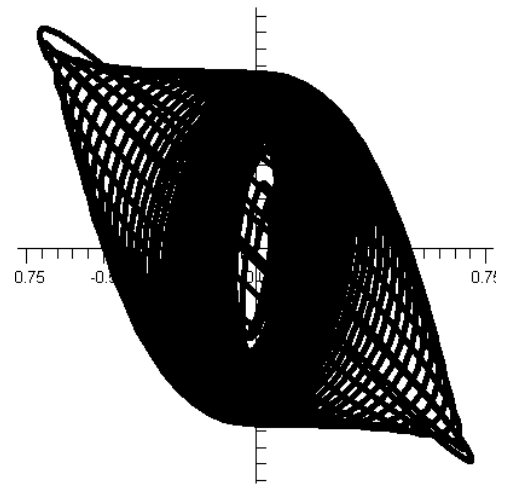
(c)



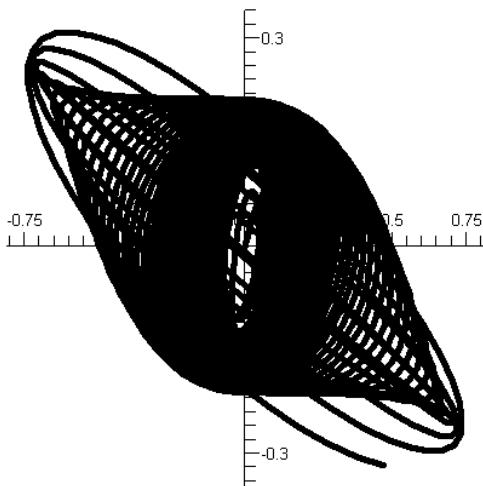
(d)



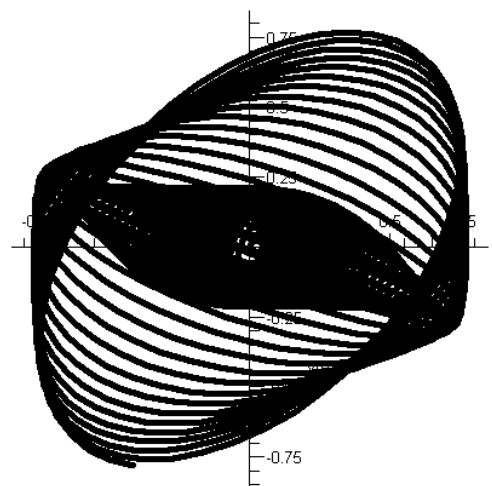
(e)



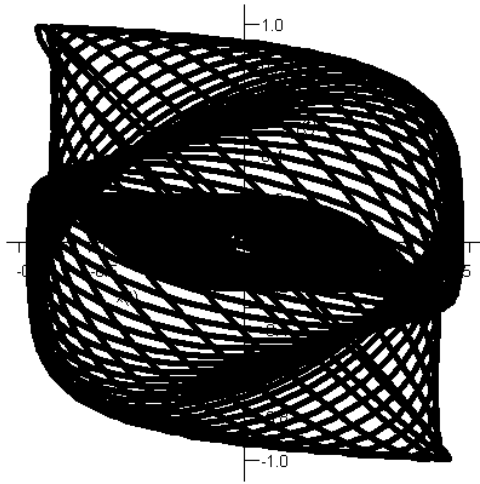
(f)



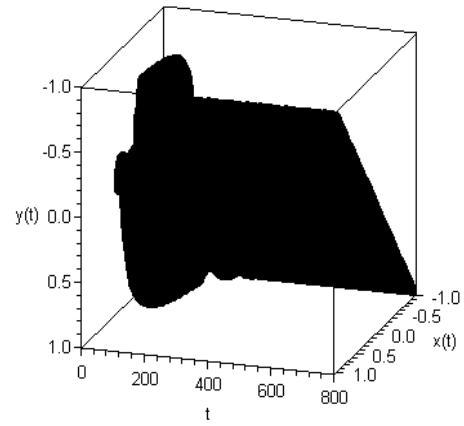
(g)



(h)



(i)



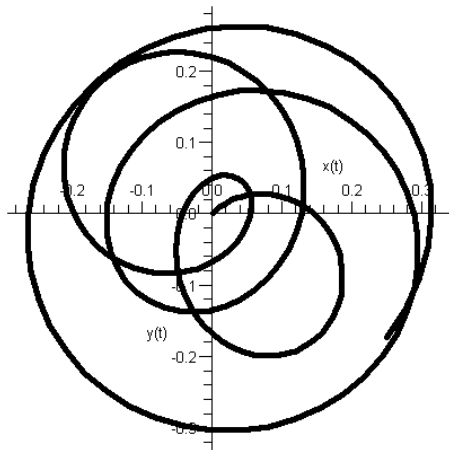
(j)

Şekil 4.4: $\nu = 0.4$, $A = 0.3$, $B = 1$, $C = 0.8$, $D = -1$, $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$

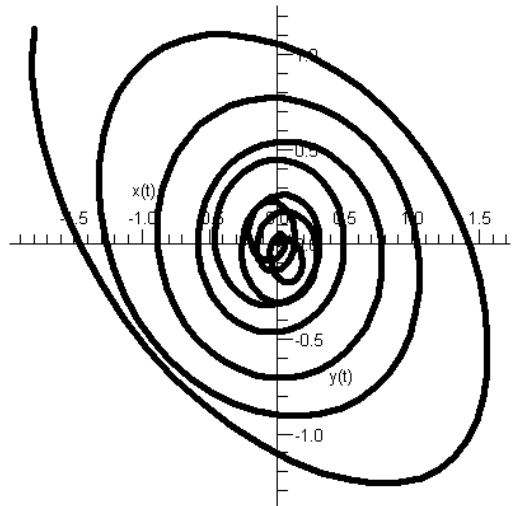
(a) $0 \leq t \leq 10$ (b) $0 \leq t \leq 20$ (c) $0 \leq t \leq 30$ (d) $0 \leq t \leq 50$ (e) $0 \leq t \leq 80$

(f) $0 \leq t \leq 85$ (g) $0 \leq t \leq 90$ (h) $0 \leq t \leq 120$ (i) $0 \leq t \leq 150$

(j) $0 \leq t \leq 800$, üç boyutlu grafik



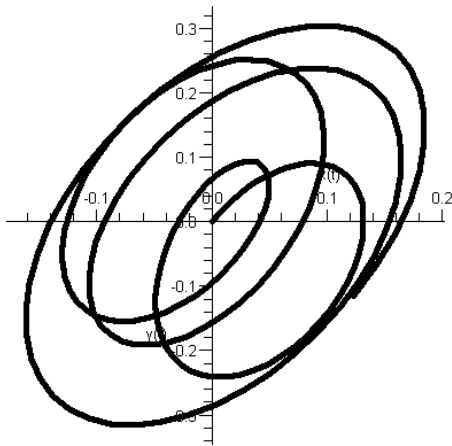
(a)



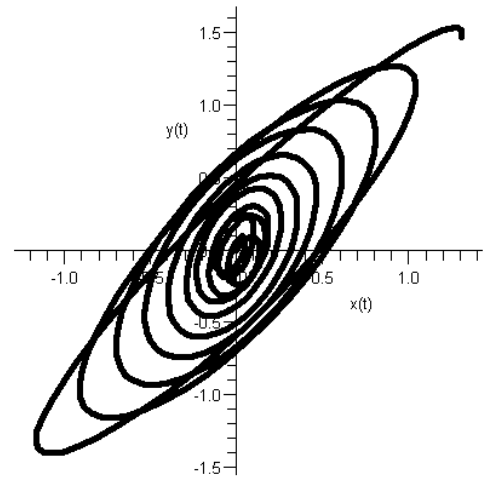
(b)

Şekil 4.5: $\nu = 0.1$, $A = 0.3$, $B = 1$, $C = 0.8$, $D = -1$, $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$

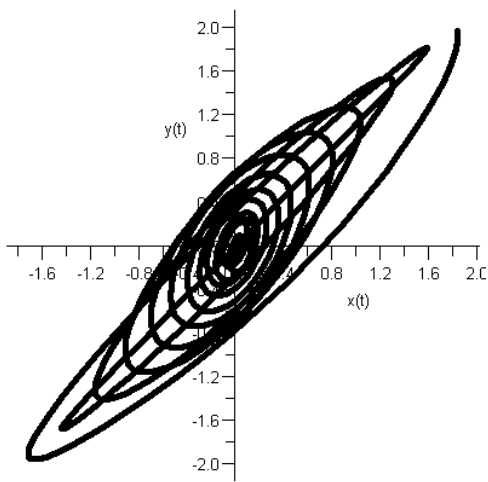
(a) $0 \leq t \leq 10$ (b) $0 \leq t \leq 20$



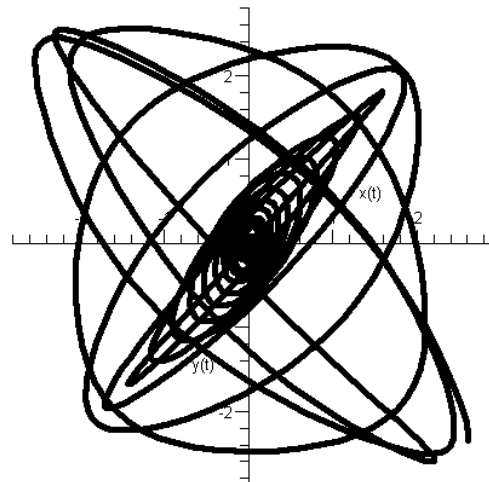
(a)



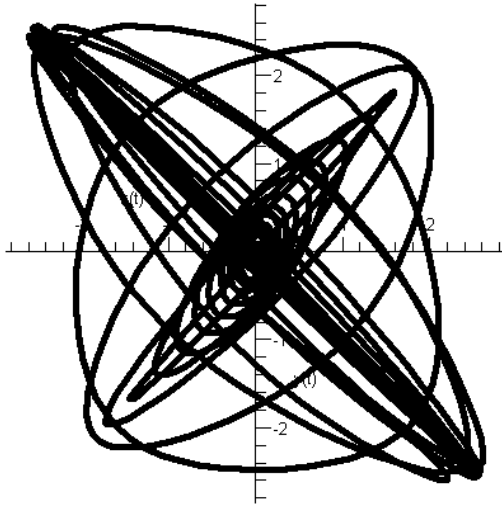
(b)



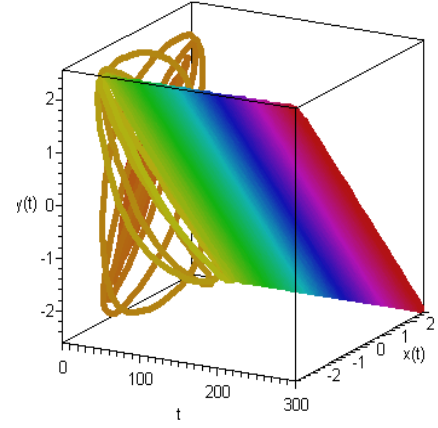
(c)



(d)



(e)

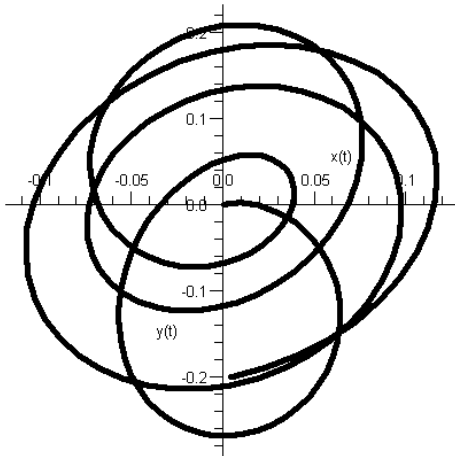


(f)

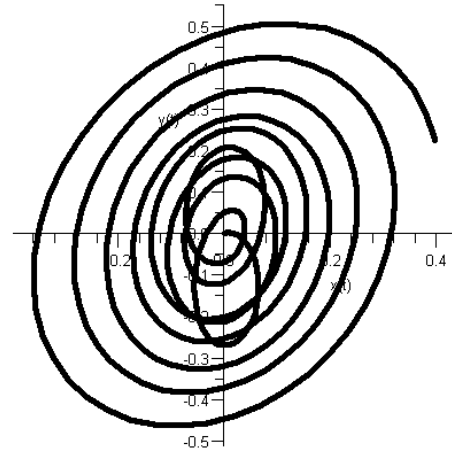
Şekik 4.6: $\nu = 0.2$, $A = 0.3$, $B = 0.7$, $C = 0.8$, $D = -1$, $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$

(a) $0 \leq t \leq 10$ (b) $0 \leq t \leq 25$ (c) $0 \leq t \leq 30$ (d) $0 \leq t \leq 45$ (e) $0 \leq t \leq 120$

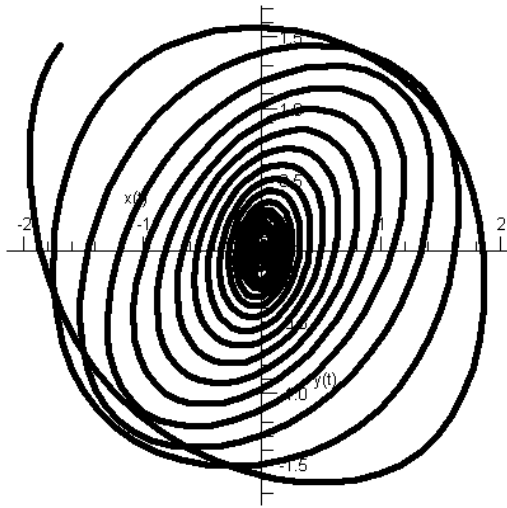
(f) $0 \leq t \leq 300$ üç boyutlu grafik



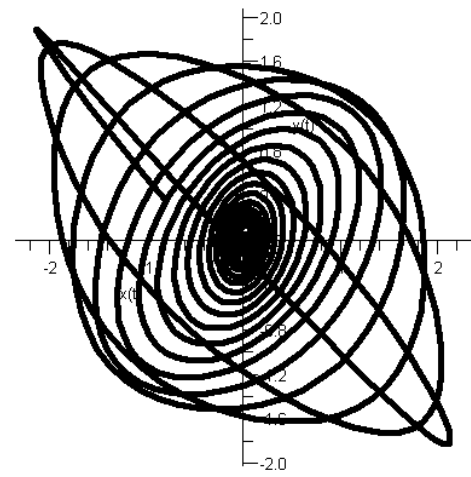
(a)



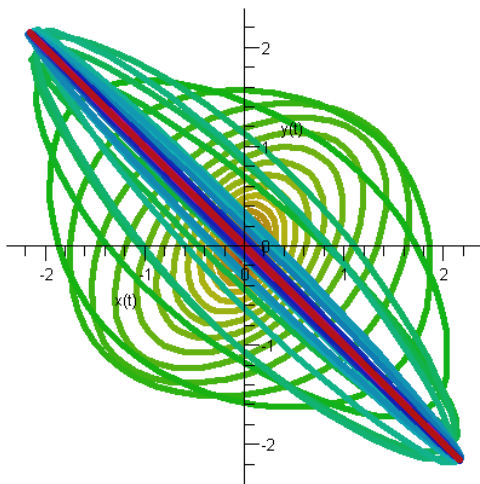
(b)



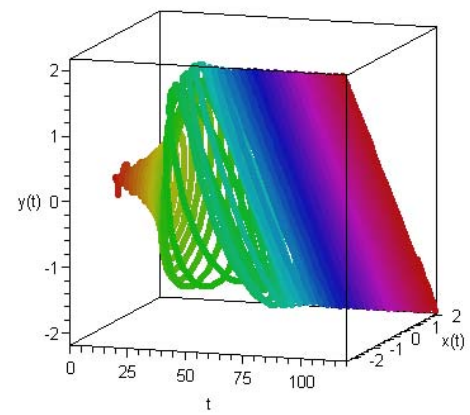
(c)



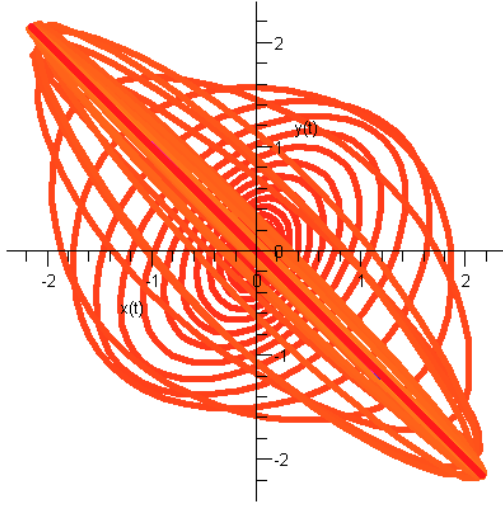
(d)



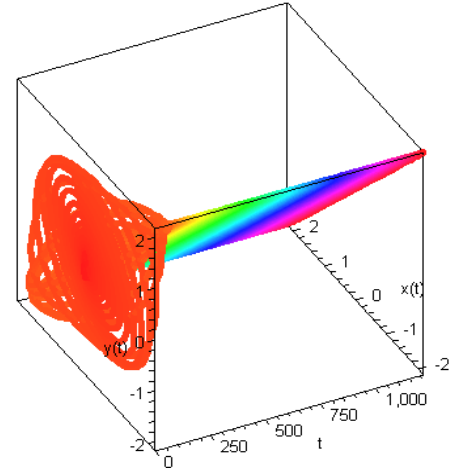
(e)



(f)



(g)



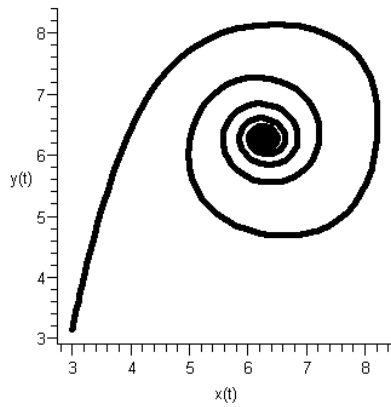
(h)

Şekil 4.7: $\nu = 0.25$, $A = 0.3$, $B = 0.1$, $C = 0.2$, $D = -2$, $\varphi(0) = \psi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$

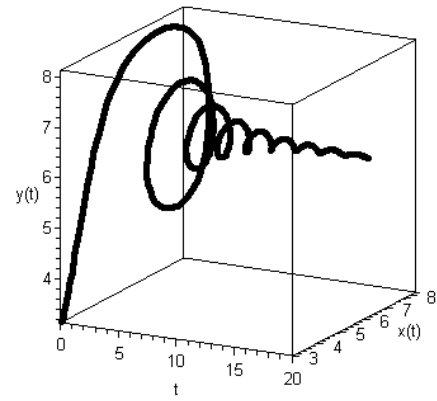
(a) $0 \leq t \leq 10$ (b) $0 \leq t \leq 20$ (c) $t = 0 \leq t \leq 40$ (d) $0 \leq t \leq 46$ (e) $0 \leq t \leq 120$

(f) $0 \leq t \leq 120$ üç boyutlu grafik (g) $0 \leq t \leq 1220$ (h) $0 \leq t \leq 1220$ üç boyutlu grafik

$0 \leq t \leq 20$ ve parametrelerin $\nu = 0.9$, $A = 3$, $B = 4$, $C = 10$, $D = -6$ değerleri için (4.4) sisteminin farklı başlangıç değerlerindeki çözüm grafikleri Şekil 4.8, Şekil 4.9, Şekil 4.10 ve Şekil 4.11’de verilmektedir.

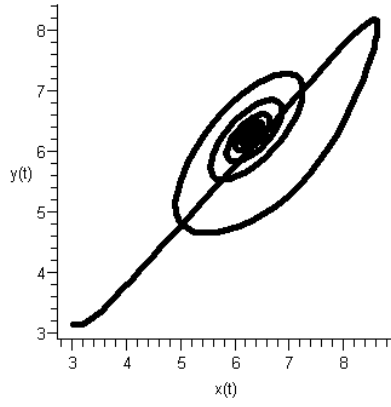


(a)

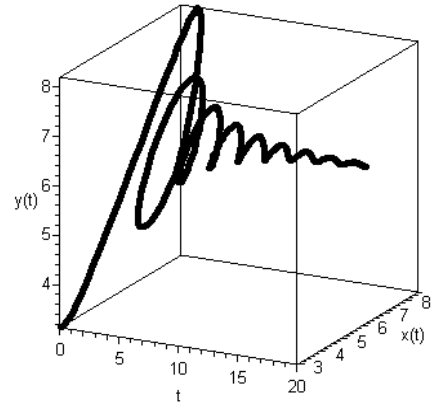


(b)

Şekil 4.8: $\varphi(0) = 3$, $\psi(0) = 3.15$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$: (a) iki boyutlu (b) üç boyutlu

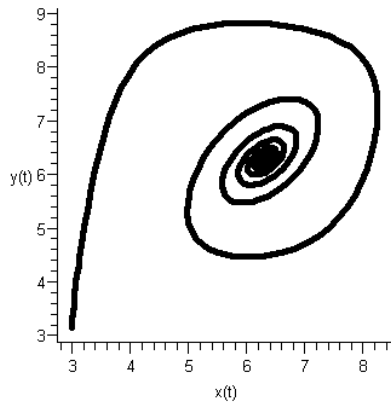


(a)

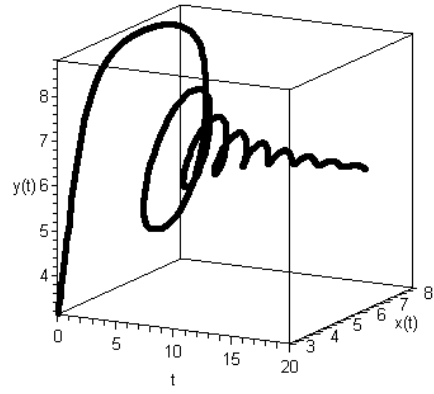


(b)

Şekil 4.9: $\varphi(0)=3$, $\psi(0)=3.15$, $\dot{\varphi}(0)=2$, $\dot{\psi}(0)=0$: (a) iki boyutlu (b) üç boyutlu

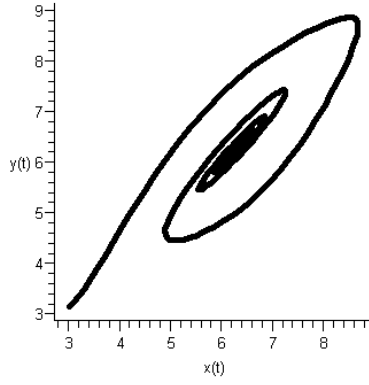


(a)

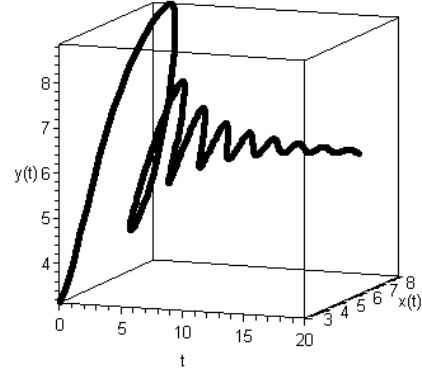


(b)

Şekil 4.10: $\varphi(0)=3$, $\psi(0)=3.15$, $\dot{\varphi}(0)=0$, $\dot{\psi}(0)=2$: (a) iki boyutlu (b) üç boyutlu



(a)



(b)

Şekil 4.11: $\varphi(0)=3$, $\psi(0)=3.15$, $\dot{\varphi}(0)=\dot{\psi}(0)=2$: (a) iki boyutlu (b) üç boyutlu

Şekil 4.5 teki kararsızlık durumu tam olarak Lyapunov kararsızlığına uymamaktadır. Başlangıçtan çıkan yörüngeler bir elips spirali şeklinde hareket ederek belli bir zamandan sonra büyük eksen dönen başka elipsler ile devam etmekte ve bazen denge konumundan da geçmektedir. Şekil 4.9 daki başlangıç değer bölgesinin sınırına yakın bir yerde verildiği için yörünge (iç kuvvetlerin etkisiyle) hemen dönmüş ve hareket eliptik spiraller ile devam ederek denge konumuna gelmiştir.

Bu tezdeki bulgular ve sonuçlar ν_1 ve ν_2 parametrelerinin birbirinden farklı değerleri için geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

1. FABRIZIO, M., MORRO, A., 1992, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, SIAM, Philadelphia, 0-89871-266-1.
2. BRAUN, M., 1992, *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*, Springer-Verlag, N.Y., 0-387-97894-1.
3. SEYRANIAN, A.P., MAILYBAEV, A.A., 2004, *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications*, World Scientific Pub. Co.
4. BUTENIN, N.V., NEIMARK, Yu.I., FUFAEV, N.A., 1987, *Introduction to Nonlinear Vibrations Theory*, Nauka, Moskova.
5. MINORSKY, N., 1962, *Nonlinear Oscillations*, D. Van Nostrand Co., Inc., N.Y.
6. WIRSCHING, P.H., PAEZ, T.L., ORTIZ, K., 1995, *Random Vibrations; Theory and Practice*; John Willey & Sons Inc.
7. GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, N.Y., Berlin, 0-387 90819-6.
8. BOLOTIN, V.V. 1995, *Nonlinear Stability of Structures ; Theory and Computational Techniques, Dynamic Stability of Structures*, Springer-Verlag, N.Y., 3-211-82651-3.

9. HIRSCH, M.W., SMALE, S., DEVANEY, R.L., 2004, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction Chaos*, Elsevier Acad. Press, 0-12-349703-5.
10. PERKO, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, N. Y., Berlin, 0-387-97443-1.
11. RAND, R.H., 2003, *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*,
<http://www.tam.cornell.edu/rnaddocs/> [Ziyaret Tarihi: 10 Aralık 2005].
12. KUZNETSOV, Y.A., 2004, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer Verlag, 0-387-21906-4.
13. BOLOTİN, V.V., 1964, *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, Inc, San Francisco, London.
14. JORDAN, D.W., SMITH, P. 1977, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Clarendon Pres, Oxford, 0-19-859620-0.
15. JOANDRONOV. A.A., VITT, A.A., KHAIKIN, S.E., 1966, *Theory of Oscillators*, Addison- Wesley Pub. Co., Inc., 63-19610.
16. KRILOV, N.M., BOGOLJUBOV, N.N., 1934, *New Methods in Nonlinear Mechanics*, M.: ONTİ.
17. KRILOV, N.M. , BOGOLJUBOV, N.N., 1937, *Introduction to Nonlinear Mechanics*, Kiev: İzd. AN, USSR.
18. BOGOLJUBOV, N.N., MİTROPOLSKİ, Yu. A., 1958, *Asimptotic Methods in Nonlinear Vibrations Theory*, M.: Fizmatgiz.

19. VOLKOV, S.V. , 2002, İki Serbestlik Dereceli Kuazilineer Dinamik Sistemlerin Kontrolü, *Dokladi Akademii Nauk*, 384, no 1, 43-46.
20. BAKRİ, T., NABERGOJ, R., TONDL, A., VERHULST, F., 2004, Parametrik excitation in non-linear dynamics, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 39, Issue 2, , Pages 311-329.
21. İLYASOV, M.H., AKÖZ, A.Y., 2000, The Vibrations and Dynamic Stability of Viscoelastic Plates, *International Journal of Engineering Science*, 38, 697-714.
22. İLYASOVA, N.M., 2002-2003, Free Damped Vibrations of Viscoelastic Materials, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Dergisi*, 61-62, 29-40.
23. İLYASOVA, N.M., 2002-2003, Parametric Vibrations and Resonance , *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Dergisi*, 61-62, 41-55.
24. SEYRANIAN, A.P., MAİLYBAEV, A.A., 2001, Parametric Resonance in Systems with Dissipation, *Doklady Physics, Doklady Physics*, 46(6), 429-433.
25. VOLKOV, S.V., 1999, *Dinamik sistemlerin diferansiyel operatörlerinin kurulması*, M.: İzd-vo Ros. Un-ta Drujbi narodov, 212.

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Edirne'nin Meriç İlçesinin Kavaklı Köyünde doğdu. İlkokulu Kavaklı'da, Ortaokulu Meriç'te ve 1982 yılında Lise öğrenimini Edirne'de tamamladı. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. Matematikçi ünvanını aldıktan sonra Özel Eğitim Kurumlarında matematik öğretmenliği yaptı. 1990'da Milli Eğitim Bakanlığının 1416 sayılı kanunla yurt dışında Lisans üstü yapmak üzere açmış olduğu sınavı Türkiye birincisi olarak kazandı. 1991-1993 yılları arası Michigan State University'de Master derecesini başarıyla aldı. 1995 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı ve halen bu görevine devam etmektedir. Ayrıca İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde Doktora öğrencisidir. Evli ve bir kız babasıdır.