T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASCAL MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Hurşit KARAKILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI
KONYA, 2008

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASCAL MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Hurşit KARAKILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

Bu tez 25/08/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Eşref HATIR
(üye)

Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK
(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. A. Selçuk KURBANLI
(üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PASCAL MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Hurşit KARAKILIÇ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Programı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman Solak

2008, sayfa 41

Jüri:

Prof. Dr. Eşref HATIR
Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK
Yrd. Doç. Dr. A. Selçuk KURBANLI

Bu çalışmada Pascal matrislerinin tanımları (Tang 2004,1), Stirling sayıları (Çam 2005) ve genelleştirilmiş Pascal matrislerinin özellikleri (Zhang 1998) verilmiştir. Ayrıca Pascal matrisleri yardımıyla bazı diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pascal matrisi, Stirling sayıları, genelleştirilmiş Pascal matrisleri

ABSTRACT

Ms Thesis

PASCAL MATRICES AND PROPERTIES

Hurşit KARAKILIÇ

Selçuk University
Graduate School Of Natural Applied Sciences
Department Of Elementary Education
Program Of Mathematics Teacher

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Süleyman SOLAK

2008, pages 41

Jury:

Prof. Dr. Eşref HATIR
Assist. Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Assist. Prof. Dr. A. Selçuk KURBANLI

In this study, the definitions of Pascal matrices (Tang 2004,1), Stirling numbers (Çam 2005) and properties of the generated Pascal matrices (Zhang 1998) are given. As well as, the solution of the differential equation with Pascal matrices is examined.

Key Words: Pascal matrix, Stirling numbers, generated Pascal matrices

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmamdaki yardımlarından dolayı saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca bana her zaman destek olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Hurşit KARAKILIÇ

Konya,2008

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Pascal üçgeni binom açılımındaki katsayıları bulmaya yarar. Pascal üçgeni olasılıklar kuramıyla birlikte, matematik, istatistik, bazı fizik uygulamalarında ve biyolojideki uygulamalarda kullanılır. Pascal üçgeni, Pascal matrislerini oluşturmaktadır, çünkü Pascal matrislerinin elemanları Pascal sayı üçgeninden meydana gelmektedir.

Z. Zhang, M. Liu (1998), simetrik ve alt üçgen Pascal matrislerini genelleştirmişler ve bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Z. Zhang, T. Wang (1998), genelleştirilmiş Pascal matrisleri üzerindeki araştırmalara devam ederek, bu matrisler hakkında bazı yeni özdeşlikler elde etmelerinin yanı sıra yeni bir genelleştirilmiş Pascal matrisi tanımlamışlardır. Genelleştirilmiş Pascal matrislerinin rekürans dizileri ile arasındaki ilişkilerini incelemişler ve bu matrislerin özdeğerleri üzerinde araştırmalarda bulunmuşlardır.

P.Maltais, T.A Gulliver (1998), Stirling sayıları ile Pascal matrisleri arasındaki ilişkileri ifade etmişlerdir.

A. Edelman, G. Strang (2003), Pascal matrislerinin birbirleriyle ilişkilerini ortaya koymuşlardır. Aynı zamanda Pascal matrislerinin kuvvetleri, tersleri, logaritmaları ve özdeğerlerini incelemişlerdir.

J.M. Zobitz (2003), yaptığı araştırmada bazı homojen olmayan diferansiyel denklemlerin Pascal matrisleri yardımıyla çözülebileceğini ortaya koymuştur.

Z.Tang, R. Duraiswami (2004), Pascal matrislerinin literatürde önemli yer tutan bazı özel matrislerle olan ilişkilerini incelemişlerdir.

R.Bacher, R. Chapman (2004), simetrik Pascal matrislerinin elemanlarının p modülüne göre denk olan sayıları ile yeni matrisler oluşturmuşlar ve bu matrislerin özdeğerleri üzerinde araştırmalar yapmışlardır.

Ş. Çam (2005), Striling sayıları ile ilgili bazı özellikleri incelemiştir.

Bu çalışmada; ilk olarak, Pascal üçgeni, Pascal matrisleri (Tang 2004,1) ve Stirling sayıları (Çam 2005) tanıtılmıştır. Pascal matrislerinin özellikleri üzerinde durulmuş ve Stirling sayıları ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bazı homojen olmayan diferansiyel denklemlerin, Pascal matrisleri yardımıyla çözümü yapılmış (Zobitz 2003) ve genelleştirilmiş Pascal matrisleri (Zhang 1998) tanıtılarak bazı özellikleri açıklanmıştır.

2. PASCAL MATRİSLERİ

2.1. Pascal Üçgeni

$(a+b)$ teriminin kuvvetlerinin açılımı,

$$\begin{array}{lc}
(a+b)^0 & 1 \\
(a+b)^1 & a+b \\
(a+b)^2 & a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
 & \vdots
\end{array}$$

şeklindedir. Ancak açılımı büyük kuvvetler için yapmak oldukça zordur. Şimdi $(a+b)^7$ teriminin açılımını bulmaya çalışalım. $(a+b)^7$ açılımında,

$$a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7$$

monomları olacaktır. Dikkat edilirse açılım, $i+j=7$ eşitliğini sağlayacak i ve j doğal sayıları için,

$$a^ib^j$$

biçiminde monomlardan oluşmaktadır. Ancak açılımın tamamlanabilmesi bu monomların katsayılarını hesaplamak gerekir. Yukarıdaki açılımlarda bulduğumuz katsayıları Tablo 1'de gösterelim.

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

$$\vdots$$

(Pascal üçgeni)
Tablo 1

Tablo 1' i dikkatlice incelersek, oluşan sayı üçgeninde, üçgenin her sayısı bir üstteki ve onun hemen solundaki sayıların toplamı olmaktadır. Oluşan bu sayı üçgenine "**Pascal üçgeni**" adı verilmektedir. $(a+b)^7$ ifadesinin açılımı için Pascal üçgeni oluştulursa 8. satır bu açılımdan gelen monomların katsayılarını verecektir. Dolayısıyla $(x+y)^n$ ifadesinin açılımından gelen monomların katsayılarını bu üçgende görmek oldukça kolaydır.

Örnek 2.1.1. $(a+b)^7$ ifadesinin açılımını Pascal üçgenini kullanarak bulmaya çalışalım.

$$\left(a+b\right)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Ancak bu üçgeni her seferinde yazmak ya da açılımın büyük kuvvetleri için oluşturmak oldukça zordur. Bu yüzden bu üçgenin oluşturulmasındaki temel mantığı bulmak gerekir.

$(a+b)^n$ teriminin açılımından kaç tane $a^i b^j$ monomu geldiğini hesaplayalım. $(a+b)^n$ açılımı yapılırken $(a+b)$ ifadesi kendisi ile n kere çarpılır. Yani,

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b).$$

Şimdi yukarıdaki ifadeleri birbiri ile çarpalım. Çarpma işleminde yaptığımız şey a ve b'ler den birini seçmek ve diğerleri ile bu ifadeleri çarpmak olacaktır. Şimdi her parantezden a' i seçer, bu ifadeleri birbiriyle çarparsak a^n monomunu bulmuş oluruz. Biri dışında her parantezden a' yı seçersek, a' yı $n-1$ kez ve b'yi bir kez seçmiş oluruz. Bu seçimleri çarparak $a^{n-1}b$ monomunu elde ederiz. İkisi dışında her parantezden a' yı seçersek $a^{n-2}b^2$ monomunu elde ederiz. Eğer a' yı "i" kez seçersek, b'yi de "$n-i$" kez seçmiş oluruz. Demek ki $(a+b)^n$ açılımında kaç tane $a^i b^j$ monomu belirdiğini hesaplamak için, n parantez arasından kaç değişik biçimde i'i seçebileceğimizi hesaplamamız gerekiyor. Bu durumda,

$$\binom{n}{i}$$

tane seçim yapmamız gerekir.

Örnek 2.1.2. $(a+b)^5$ ifadesinin açılımını yapınız.

$$\left(a+b\right)^5 = \binom{5}{5}a^5 + \binom{5}{4}a^4b + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}ab^4 + \binom{5}{0}b^5$$

$$\left(a+b\right)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Şimdi yukarıda bulduğumuz ifadeyi genelleştirmeye çalışalım. Bu durumda,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-i}a^{n-i}b^i + ... + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}a^{n-i}b^i$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $(x+y)^n$ açılımından gelen monomların katsayılarını ve açılımın genel formülünü bulmuş oluruz.

2.2. Pascal Matrisleri

Pascal üçgeninden elde edilen sayılar bir matrisin elemanları biçiminde yazılırsa yeni bir matris formu elde edilmiş olur. Bu yeni matris formuna Pascal matrisi adı verilir. Bu matris formunun üç farklı biçimi bulunmaktadır (Tang 2004).

Tanım 2.2.1. $S_n = (s_{ij})_{nxn}$, $s_{ij} = \binom{i+j}{i} (i, j = 0,1,2,...,n-1)$ olsun. Bu S_n matrisine simetrik Pascal matrisi denir (Tang 2004,1). Bu matrisin genel formu:

$$S_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdots & C_{n+2}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^0 & C_n^1 & C_{n+1}^2 & C_{n+2}^3 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{bmatrix}_{nxn} .$$

Örnek 2.2.1. Yukarda tanımlanan S_n simetrik Pascal matrisi $n = 4$ için,

$$S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

Tanım 2.2.2. $u_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{i} & , j \geq i \\ 0 & , i > j \end{cases} \quad (i, j = 0,1,2,...,n-1)$ olmak üzere,

$U_n = \left(u_{ij}\right)_{nxn}$ matrisine üst üçgen Pascal matrisi denir (Tang 2004,1). Bu matrisin genel formu:

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & C_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & C_{n-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}_{nxn} .$$

Örnek 2.2.2. Yukarıda tanımlanan U_n üst üçgen Pascal matrisi n=4 için,

$$U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

Tanım 2.2.3. $l_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} & , i \geq j \\ 0 & , j > i \end{cases}$ $(i, j = 0,1,2,...,n-1)$ olmak üzere,

$L_n = (l_{ij})_{nxn}$ matrisine alt üçgen Pascal matrisi denir (Tang 2004,1). Bu matrisin genel formu:

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^{0} & C_{n-1}^{1} & C_{n-1}^{2} & C_{n-1}^{3} & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}_{nxn} .$$

Örnek 2.2.3. Yukarıda tanımlanan L_n alt üçgen Pascal matrisi n=4 için,

$$L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

2.3. Stirling Sayıları

Stirling sayıları ilk defa James Stirling tarafından tanımlanmıştır [10]. Stirling sayıları ile ilgili literatürde birçok kaynak bulunmaktadır [4,9].Bu çalışmalardan biri Çam (2005) tarafından yapılmıştır.

Tanım 2.3.1. $n, k \geq 0$ olmak üzere,

$$P_n(x) = x(x+1)...(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k$$

polinomunda, x^k ların katsayılarına birinci Stirling sayıları denir ve $s(n,k)$ biçiminde gösterilir (Çam 2005).

Genel anlamda, birinci Stirling sayılarını bulabilmek için aşağıdaki probleme çözüm aramak gerekir. Bu problemin çözümü bize sonsuz sayıda birinci Stirling sayılarını verecektir.

Problem 2.3.1. n kişiyi k tane yuvarlak masaya, her masada en az bir kişi olmak koşulu ile kaç değişik biçimde yerleştirebiliriz? (Çam 2005)

Çözüm.

Özel durumlar: 0 kişinin olduğunu düşünelim, bu durumda hiç kimseyi hiçbir yere oturtturmayız. Böylece bir farklı şekilde kişileri yerleştirmiş oluruz, $s(0,0)=1$.Şimdi birden fazla kişinin olduğunu ve hiç masanın olmadığını düşünelim, bu durumda hiç kimse bir yere oturamaz ki, $s(n,0)=0$ olur. Eğer n kişi ve bir tek masa varsa o zaman kişileri $(n-1)!$ şeklinde yerleştirebiliriz. Bu durumda $s(n,1)=(n-1)!$ olacaktır. Şayet kişi sayısı masa sayısına eşit olursa bu durumda herkes bir masaya oturacaktır ve $s(n,n)=1$ olacaktır. Masa sayısının kişi sayısından bir eksik olduğunu düşünelim. Bu durumda kişi sayısı n ise masa sayısı $n-1$ olacaktır. Bir masaya iki kişi diğerlerine birer kişi oturacağı açıktır. Önemli olan n kişi arasında 2 kişi belirleyebilmektir. Çünkü 2 kişi belirlenir ise geriye kalanların her birinin bir masaya oturacağı açıktır. Bu durumda $s(n,2)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ olacaktır.

Genel durum: Genel durumu incelemek için,*"n kişi birbirinden farksız n masaya kaç değişik şekilde oturabilir?"*sorusuna iki ayrı yanıt bulup bu yanıtları eşleştirmek gerekecektir.(Ana problemin aksine bazı masalar boş kalabilir)

Birinci cevap: n kişi 1 masaya $s(n,1)$, 2 masaya $s(n,2)$ve genel olarak $1\le k\le n$ kişi k tane masaya $s(n,k)$ farklı şekilde oturabilir. Öyleyse, doldurdukları masa sayısını göz önünde tutarak, n kişi n masaya $\sum_{k=1}^{n} s(n,k)$ değişik biçimde yerleşecektir.

İkinci cevap: Masalar birbirinden ayırt edilmediklerinden, birinci kişinin tek bir hamlesi vardır, herhangi bir masaya oturmak. İkinci kişi ya boş masalardan birine oturacak (Masaların arasında ayrım yapılmadığından hangi masaya oturacağı önemli değildir.) ya da birincinin oturduğu masaya yerleşecektir. Demek ki ikinci kişinin iki değişik hamlesi mevcuttur. Üçüncünün 3 ve dördüncünün 4 tane hamlesi mevcuttur. Genel olarak $k.$'nın k tane hamlesi vardır. Demek ki n kişi n tane masaya $n!$ biçimde oturabilir.

Yukarda bulduğumuz iki yanıtı eşleyelim. Bu urumda,

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)=n!$$

sonucunu elde ederiz.

$n=9$ için birinci Stirling sayılarını Tablo 2'de gösterelim.

$s(0,k)$	1							
$s(1,k)$	0	1						
$s(2,k)$	0	1	1					
$s(3,k)$	0	2	3	1				
$s(4,k)$	0	6	11	6	1			
$s(5,k)$	0	24	50	35	10	1		
$s(6,k)$	0	120	274	225	85	15	1	
$s(7,k)$	0	720	1764	1624	735	175	21	1

$s(8,k)$	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
$s(9,k)$	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

(Birinci Stirling sayıları)
Tablo 2

Örnek 2.3.1. 4 kişi 2 yuvarlak masaya kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm. Şimdi bu durumu $s(4,2)$ biçiminde gösterelim ve $s(4,2)$ değerini hesaplamaya çalışalım. Bu durumda kişiler,

(1),(2,3,4)	(3),(1,2,4)	(1,2),(3,4)
(1),(2,4,3)	(3),(1,4,2)	(1,3),(2,4)
(2),(1,3,4)	(4),(1,2,3)	(1,4),(2,3)
(2),(1,4,3)	(4),(1,3,2)	

şeklinde masalara oturacaklardır. $s(4,2)=11$ olarak bulunur.

Teorem 2.3.1. $n \geq k \geq 1$ olmak üzere,

$$s(n,k)=s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k) \text{ (Çam 2005).}$$

Tanım 2.3.2. $n,k \geq 0$ olmak üzere,

$$q_n(x)=x(x-1)...(x-n+1)$$

polinomu için ,

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, q_k(x)$$

ifadesindeki $S(n,k)$ katsayılarına ikinci Stirling sayıları denir (Çam 2005).

Genel anlamda, ikinci Stirling sayılarını bulabilmek için aşağıdaki probleme çözüm aramak gerekir. Bu problemin çözümü bize sonsuz sayıda ikinci Stirling sayılarını verecektir.

Problem 2.3.2. n kişi her grupta en az bir kişi olacak şekilde k gruba ayrılmak isteniyor. Buna göre kaç grup oluşturulabilir? (Çam 2005)

Çözüm. Çözümü yapmak için, n kişinin bulunduğu bir kümenin k tane alt kümeye ayırmamız gerekmektedir.

Özel durumlar: Eğer hiç kimse yoksa bu kişileri tek bir biçimde sıfır gruba ayırabiliriz, $S(0,0)=1$. $n>0$ ise, $S(n,0)=0$. Eğer $k=1$ ise, tek bir parçalanış vardır ve herkes bir grupta toplanabilir , $S(n,1)=1$. Ancak $k=n$ ise, tek bir parçalanış vardır ve her grup bir kişiden teşekkül eder, $S(n,n)=1$. Eğer $k>n$ ise, bütünü parçalayan kümelerden en az biri boş küme olmak zorundadır, bu durumda $S(n,k)=0$. Şimdi de $S(n,n-1)$'i hesaplamaya çalışalım. $n-1$ kümeden birinde iki eleman diğerler kümelerde ise bir eleman olmalıdır. Bu durumda hangi iki elamanın aynı kümede olduğunu bulmak gerekir. Buna göre, $S(n,n-1)=\binom{n}{2}=\frac{n.(n-1)}{2}$. Son olarak $S(n,2)$ hesaplamaya çalışalım. Eğer birinci grubu oluşturabilir isek diğer grubu da oluşturmuş oluruz. Kümelerden biri A ise diğer kümede A'nın tümleyeni olacaktır. Bu kümeye de A^T diyelim. Ancak A kümesi ne bütün elemanları içine alan bir küme ne de boş bir küme olamaz. n elemanlı bir kümenin 2^n tane alt kümesi vardır. Bu durumda biz $2^n - 2$ tane seçim yapabiliriz. Ancak $\left(A, A^T\right)$ ve $\left(A^T, A\right)$ aynı parçalanış olacağından bu durumda seçimin yarısı yapılabilecektir. Sonuç olarak, $S\left(n,2\right) = 2^{n-1} - 1$.

Genel durum: İkinci Stirling sayıları için tümevarımsal bir ilişki bulabilirsek, küçük sayılardan başlayarak bütün sayıları hesaplayabiliriz.

Teorem 2.3.2. $n \geq k \geq 1$ için,

$$S\left(n,k\right) = S\left(n-1,k-1\right) + k.S\left(n-1,k\right)$$

eşitliği mevcuttur(Çam 2005).

$n = 9$ için ikinci Stirling sayılarını tablo 3'te gösterelim.

$S(0,k)$	1									
$S(1,k)$	0	1								
$S(2,k)$	0	1	1							
$S(3,k)$	0	1	3	1						
$S(4,k)$	0	1	7	6	1					
$S(5,k)$	0	1	15	25	10	1				
$S(6,k)$	0	1	31	90	65	15	1			
$S(7,k)$	0	1	63	301	350	140	21	1		
$S(8,k)$	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
$S(9,k)$	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

(İkinci Stirling sayıları)
Tablo 3

Örnek 2.3.2. 4 kişiyi her grupta en az bir kişi olacak şekilde 2 gruba nasıl ayırabiliriz?

Çözüm. Bu durumda $S\left(4,2\right)$'yi hesaplamamız gerekmektedir. Oluşturacağımız grupları aşağıdaki tabloda belirtelim.

$\{1\},\{2,3,4\}$	$\{1,2,3\},\{4\}$
$\{1,2\},\{3,4\}$	$\{1,2,4\},\{3\}$
$\{1,3\},\{2,4\}$	$\{1,3,4\},\{2\}$
$\{1,4\},\{2,3\}$	

Buna göre, $S\left(4,2\right) = 7$'dir.

2.4. Stirling Sayıları ve Pascal Matrisleri

Bir sayının küpünün açılımının genel formülü,

$$\binom{n}{1} + 6.\binom{n}{2} + 6.\binom{n}{3} = n^3$$

şeklindedir.

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

ifadesini hesaplamak için,

$$\binom{k}{l} = \binom{k-1}{l} + \binom{k-1}{l-1}$$

Pascal özdeşliğinden faydalanalım. Bu durumda,

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{k}{1} + 6.\binom{k}{2} + 6.\binom{k}{3} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{k+1}{2} - \binom{k}{2} \right\} + 6.\sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{k+1}{3} - \binom{k}{3} \right\} + 6.\sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{k+1}{4} - \binom{k}{4} \right\}$$

$$= \binom{n+1}{2} + 6.\binom{n+1}{3} + 6.\binom{n+1}{4}$$

$$S_3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = \left(\frac{n.(n+1)}{2} \right)^2 . \qquad (2.4.1)$$

Dolayısıyla,

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 .$$

$N = \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right)$ şeklinde bir N seçelim ve (2.4.1) denklemini yeniden düzenleyelim. Bu durumda,

$$S_3 = N.(N+1) + N + 1 \quad \sum_{i=0}^{N} (2i+1)$$

olur. Bulduğumuz bu sonucu n'nin k. kuvvetlerinin hesaplanması için kullanalım. $S_k(n) = \sum_{i=0}^{n} i^k$ ifadesini binom özdeşliklerinden faydalanarak genelleştirmeye çalışalım.

$$a^k = \{(a-1)+1\}^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (a-1)^i + (a-1)^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (a-1)^i + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (a-2)^i + ... + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} 1^i + 1$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \sum_{m=1}^{a-1} (m)^i + 1$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} S_i(a-1) + 1$$

Yukarıdaki ifadede $a = n+1$ şeklinde seçelim ve denklemi yeniden düzenleyelim. Bu durumda,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} S_i(n) = (n+1)^k - 1 \text{ (Maltais 1998).}$$

Yukarıdaki ifade,

$$\hat{P}S = Pn \tag{2.4.2}$$

şeklinde bir sistem olarak yazılabilir. Şöyle ki $k=5$ için, bu sistemdeki matrisler

$$\hat{P}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$S_5 = \begin{bmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \\ S_2(n) \\ S_3(n) \\ S_4(n) \end{bmatrix}, \qquad n_5 = \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradaki P matrisi, alt üçgen Pascal matrisinin ilk satır ve sütunu silinmiş şeklidir.

Tanım 2.4.1. $\widehat{P}$ matrisi,

$$P_{ij} = \begin{cases} \dbinom{i}{i-j+1} & ,i \geq j \\ 0 & ,i < j \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Maltais 1998).

Q matrisi, P matrisinin tersi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \hat{P}S &= Pn \\ Q\hat{P}S &= QPn \\ \tilde{P}S &= n\,. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Bu son eşitlikteki $\tilde{P}$ matrisini tanımlayalım.

Tanım 2.4.2. $\tilde{P}$ matrisi, $\tilde{P} = Q\hat{P}$ şeklinde oluşur,

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j}\dbinom{i}{i-j+1} & ,i \geq j \\ 0 & ,i < j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Maltais 1998).

(2.4.3) denklemini matris formatında yazalım,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 & \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & \\ & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \\ S_2(n) \\ S_3(n) \\ S_4(n) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Bu matris denklemine göre,

$$S_0(n) = n$$

$$-S_0(n) + 2S_1(n) = n^2 \qquad S_1(n) = \frac{n^2+n}{2}$$

$$S_0(n) - 3S_1(n) + 3S_2(n) = n^3 \qquad S_2(n) = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

$$-S_0(n) + 4S_1(n) - 6S_2(n) + 4S_3(n) = n^3 \qquad S_3(n) = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. $\widetilde{P}$ matrisinden faydalanarak birinci ve ikinci Stirling sayıları ile binom katsayıları arasında bir ilişki elde edilebilir. N_1 matrisinin elemanları birinci Stirling sayılarından $(s_1(i,j))$ ve N_2 matrisinin elemanları da ikinci Stirling sayılarından $(s_2(i,j))$ oluşsun. Stirling sayıları arasında,

$$s_1(i,i) = 1 \text{ ve } s_1(i,0) = 0 \quad (i > 0),$$
$$s_1(i,j) = 0 \quad (j < 0 \text{ veya } j > i),$$
$$s_1(i+1,j) = s_1(i,j-1) - i.s_1(i,j),$$
$$s_2(i,i) = 1 \text{ ve } s_2(i,0) = 0 \quad (i > 0),$$
$$s_2(i,j) = 0 \quad (j < 0 \text{ veya } j > i),$$
$$s_1(i+1,j) = s_1(i,j-1) + j.s_1(i,j)$$

özdeşlikleri mevcuttur. O zaman $i, j \le 5$ için,

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 & 0 \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{bmatrix}.$$

olup, N_1 ve N_2 matrisleri arasında,

$$N_1N_2 = N_2N_1 = I$$

bağıntısı vardır.

Ayrıca Λ matrisi, $\widetilde{P}$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan köşegen bir matris olsun. Bu durumda,

$$\widetilde{P}N_2 = N_2\Lambda \tag{2.4.4}$$

ve

$$\widetilde{P} = N_2\Lambda N_1 \tag{2.4.5}$$

denklemleri mevcuttur. Eşitliğin her iki yanındaki matrisler için $i.$ satır ve $j.$ sütun elemanları eşitlenirse,

$$\binom{i}{1}s_2(i,j) - \binom{i}{2}s_2(i-1,j) + \binom{i}{3}s_2(i-2,j) - \ldots + (-1)^{i-j}\binom{i}{i-j+1}s_2(j,j) = js_2(i,j) \tag{2.4.6}$$

(Maltais 1998).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ PASCAL MATRİSLERİ

3.1. Genelleştirilmiş Alt Üçgen Pascal Matrisleri

Tanım 3.1.1. x ve y sıfırdan farklı reel değişkenler olmak üzere; $\Phi(x,y)$ genelleştirilmiş alt üçgen Pascal matrisleri,

$$\Phi(x,y;i,j)=\begin{cases} x^{i-j}.y^{i+j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} & ,i\geq j \\ 0 & ,i<j \end{cases} \quad i,j=0,1,2,...,n$$

biçiminde tanımlanır. Tanımdan faydalanarak $\Phi_n(x,1)=P_n(x)$ ve $\Phi_n(1,y)=Q_n(y)$ şeklinde $P_n(x)$ ve $Q_n(y)$ matrisleri yazılabilir (Zhang 1998).

Teorem 3.1.1. $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\Phi_n(x_1,y_1).\Phi_n(x_2,y_2)=\Phi_n\left(\frac{x_1}{y_2}+x_2.y_1,y_1.y_2\right) \text{ (Zhang 1998).}$$

İspat: $\Phi_n(x_1,y_1).\Phi_n(x_2,y_2)=\left(C_n(x_1,y_1,x_2,y_2;i,j)\right)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} C_n(x_1,y_1,x_2,y_2;i,j) &= \sum_{k=0}^{n} x_1^{i-k}.y_1^{i+k}.\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}.x_2^{k-j}.y_2^{k+j}.\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x_1^{i-k}.y_1^{i+k}.x_2^{k-j}.y_2^{k+j}.\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} i-j \\ i-k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}.(y_1.y_2)^{i+j}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} i-j \\ i-k \end{pmatrix}\left(\frac{x_1}{y_2}\right)^{i-k}(x_2y_1)^{k-j}, \\ &= \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}.(y_1.y_2)^{i+j}\left(\frac{x_1}{y_2}+x_2y_1\right)^{i-j} \end{aligned}$$

Kural 3.1.1. $P_n[x].P_n[y]=P_n[x+y]$ (Zhang 1998).

Teorem 3.1.2 . $x_i,y_i\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\prod_{i=1}^{k}\Phi_n[x_i,y_i]=\Phi\left[\left(x_1+\sum_{i=2}^{k}x_iy_1(y_2...y_{i-1})^2y_i\right)\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{y_j},\prod_{i=1}^{k}y_i\right]$$

(Zhang 1998).

Örnek 3.1.1.

$\Phi_3\left[x_1, y_1\right].\Phi_3\left[x_2, y_2\right].\Phi_3\left[x_3, y_3\right]$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ x_1y_1 & y_1^2 & 0 & 0\\ x_1^2y_1^2 & 2x_1y_1^3 & y_1^4 & 0\\ x_1^3y_1^3 & 3x_1^2y_1^4 & 3x_1y_1^5 & y_1^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ x_2y_2 & y_2^2 & 0 & 0\\ x_2^2y_2^2 & 2x_2y_2^3 & y_2^4 & 0\\ x_2^3y_2^3 & 3x_2^2y_2^4 & 3x_2y_2^5 & y_2^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ x_3y_3 & y_3^2 & 0 & 0\\ x_3^2y_3^2 & 2x_3y_3^3 & y_3^4 & 0\\ x_3^3y_3^3 & 3x_3^2y_3^4 & 3x_3y_3^5 & y_3^6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2}{y_2}\right)(y_1y_2) & (y_1y_2)^2 & 0 & 0\\ \left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2}{y_2}\right)^2(y_1y_2)^2 & 2\left(\dfrac{x1+x_2y_1y_2}{y_2}\right)(y_1y_2)^3 & (y_1y_2)^4 & 0\\ \left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2}{y_2}\right)^3(y_1y_2)^3 & 3\left(\dfrac{x1+x_2y_1y_2}{y_2}\right)^2(y_1y_2)^4 & 3\left(\dfrac{x1+x_2y_1y_2}{y_2}\right)(y_1y_2)^5 & (y_1y_2)^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ x_3y_3 & y_3^2 & 0 & 0\\ x_3^2y_3^2 & 2x_3y_3^3 & y_3^4 & 0\\ x_3^3y_3^3 & 3x_3^2y_3^4 & 3x_3y_3^5 & y_3^6\end{pmatrix}$$

$$=\Phi_3\left[\frac{x_1+x_2y_1y_2}{y_2}, y_1y_2\right]\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ x_3y_3 & y_3^2 & 0 & 0\\ x_3^2y_3^2 & 2x_3y_3^3 & y_3^4 & 0\\ x_3^3y_3^3 & 3x_3^2y_3^4 & 3x_3y_3^5 & y_3^6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2+x_3y_1y_2^2y^3}{y_2y_3}\right)(y_1y_2y_3) & (y_1y_2y_3)^2 & 0 & 0\\ \left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2+x_3y_1y_2^2y^3}{y_2y_3}\right)^2(y_1y_2y_3)^2 & 2\left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2+x_3y_1y_2^2y^3}{y_2y_3}\right)(y_1y_2y_3)^3 & (y_1y_2y_3)^4 & 0\\ \left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2+x_3y_1y_2^2y^3}{y_2y_3}\right)^3(y_1y_2y_3)^3 & 3\left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2+x_3y_1y_2^2y^3}{y_2y_3}\right)^2(y_1y_2y_3)^4 & 3\left(\dfrac{x_1+x_2y_1y_2+x_3y_1y_2^2y^3}{y_2y_3}\right)(y_1y_2y_3)^5 & (y_1y_2y_3)^6\end{pmatrix}$$

$$\Phi_3=\left[\frac{x_1+x_2y_1y_2+x_3y_1y_2^2y_3}{y_2y_3}, y_1y_2y_3\right]$$

Eğer $x_1 = x_2 = \ldots = x$ ve $y_1 = y_2 = \ldots = y$ alırsak, genelleştirilmiş Pascal matrisinin kuvvetlerini bulmuş oluruz.

Kural 3.1.2.

$$\Phi_n^k[x,y] = \Phi_n\left[xy^{-(k-1)}\left(1+y^2+y^4+\ldots+y^{2(k-1)}\right), y^k\right]$$

$$=\Phi_n\left[\frac{xy^{-(k-1)}\left(1-y^{2k}\right)}{1-y^2}, y^k\right]$$

(Zhang 1998).

$I_n, S_n[x], D_n[x], \quad W_n[x,y], U_n[x,y], J_n[x,y]$ matrisleri $(n+1)\times(n+1)$ tipindeki matrisleri göstermek üzere, şu şekilde tanımlansınlar:

$$I_n = k\ddot{o}ş(1,1,\ldots,1)$$

$$S_n(x;i,j)=\begin{cases} x^{i-j} & , j\le i \\ 0 & , j>i \end{cases}$$

$$D_n(x;i,i)=1,\ i=0,1,2,\ldots,n$$

$$D_n(x;i+1,i)=-x,\ i=0,1,2,\ldots,n$$

$$D_n(x;i,j)=0 \quad j>i,\ j<i-1$$

$$\overline{P}_k[x]=\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & P_k[x] \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(k+2)\times(k+2)}, k\ge 0$$

$$G_k[x]=\begin{bmatrix} I_{n-k-1} & 0 \\ 0 & S_k[x] \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, k = 0,1,2,\ldots,k-1$$

$$G_n[x]=S_n[x]$$

$$S_n[x]=D^{-1}[x]$$

$$W_n(x,y;i,j)=\begin{cases} x^{i-j}y^{i+j} & , j\le i \\ 0 & , j>i \end{cases}$$

$$U_n(x,y;i,i)=y^{-2i},\ i=0,1,2,\ldots,n$$

$$U_n(x,y;i+1,i) = -\frac{x}{y^{2i-1}},\ i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$U_n\left(x,y;i,j\right)=0,\ \ j>i\ \text{ veya }\ j<i-1$$

$$J_n\left[y\right]=k\ddot{o}\c{s}\left(1,-\frac{1}{y^2},\frac{1}{y^4},-\frac{1}{y^6},\ldots,\left(-1\right)^n\frac{1}{y^{2n}}\right).$$

(Zhang 1998).

Teorem 3.1.3. Φ_n, W_n ve U_n matrisleri için,

$$\Phi_n\left[-x,y\right]=\Phi_n\left[x,-y\right] \tag{3.1.1}$$

$$\Phi_n^{-1}\left[x,y\right]=\Phi_n\left[-x,\frac{1}{y}\right]=\Phi_n\left[x,-\frac{1}{y}\right] \tag{3.1.2}$$

$$W_n^{-1}\left[x,y\right]=U_n\left[x,y\right]. \tag{3.1.3}$$

(Zhang 1998).

Örnek 3.1.2. n=3 için (3.1.3) teoreminin (3.1.2) ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

$$\Phi_3\left[x,y\right].\Phi_3\left[-x,\frac{1}{y}\right]=\Phi_3\left[x,y\right].\Phi_3\left[x,-\frac{1}{y}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ xy & y^2 & 0 & 0\\ x^2y^2 & 2xy^3 & y^4 & 0\\ x^3y^3 & 3x^2y^4 & 3xy^5 & y^6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{x}{y} & \frac{1}{y^2} & 0 & 0\\ \frac{x^2}{y^2} & -2\frac{x}{y^3} & \frac{1}{y^4} & 0\\ -\frac{x^3}{y^3} & 3\frac{x^2}{y^4} & -3\frac{x}{y^5} & \frac{1}{y^6}\end{bmatrix}=I_3$$

(Zhang 1998).

Örnek 3.1.3. *n*=3 için(3.1.3) teoreminin (3.1.3) ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

$$W_3[x,y].U_3[x,y]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ xy&y^2&0&0\\ x^2y^2&xy^3&y^4&0\\ x^3y^3&x^2y^4&xy^5&y^6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ -\frac{x}{y}&\frac{1}{y^2}&0&0\\ 0&-\frac{x}{y^3}&\frac{1}{y^4}&0\\ 0&0&-\frac{x}{y^5}&\frac{1}{y^6}\end{bmatrix}=I_3$$

(Zhang 1998).

Lemma 3.1.1. W_k, P_{k-1}, Φ_k matrisleri için, $k \geq 1$ olmak üzere,

$$W_k[x,y]\overline{P_{k-1}}\left[\frac{x}{y}\right]=\Phi_k[x,y] \text{(Zhang 1998).}$$

İspat:

$W_k[x,y]\overline{P_{k-1}}\left[x/y\right]=\left(C_k(x,y;i,j)\right)$ olmak üzere,

$i<j$ iken ,

$$C_k(x,y;i,0)=x^iy^i\ (i=0,1,...,n) \text{ ve } C_k(x,y;i,j)=0\,.$$

$i>j$ iken,

$$C_k(x,y;i,j)=\sum_{h=0}^{k}x^{i-h}y^{i+h}\binom{h-1}{j-1}\left(\frac{x}{y}\right)^{h-j}=x^iy^i\sum_{h=0}^{i}\binom{h-1}{j-1}x^{-h+h-j}y^{h-h+j}$$
$$=x^{i-j}y^{i+j}\binom{i}{j}.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.1.4. *n*=3 için Lemma 3.1.1' in doğruluğunu gösterelim.

$$W_3[x,y]\overline{P_2}\left[\frac{x}{y}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ xy&y^2&0&0\\ x^2y^2&xy^3&y^4&0\\ x^3y^3&x^2y^4&xy^5&y^6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&\frac{x}{y}&1&0\\ 0&\frac{x^2}{y^2}&2\frac{x}{y}&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ xy & y^2 & 0 & 0 \\ x^2y^2 & 2xy^3 & y^4 & 0 \\ x^3y^3 & 3x^2y^4 & 3xy^5 & y^6 \end{bmatrix} \Phi[x,y]$$

(Zhang 1998).

Teorem 3.1.4. $\Phi_n[x,y]$ genelleştirilmiş Pascal matrisleri $G_k[x/y]$ ve $W_n[x,y]$ matrislerinin çarpılmasıyla elde edilir.

$$\Phi_n[x,y] = W_n[x,y]G_{n-1}\left[\frac{x}{y}\right]G_{n-2}\left[\frac{x}{y}\right]...G_1\left[\frac{x}{y}\right]$$

(Zhang 1998).

Teorem 3.1.5. $F_k[x] = G_k^{-1}[x] = \begin{pmatrix} I_{n-k-1} & 0 \\ 0 & \bar{D}_k[x] \end{pmatrix}, k = 1,2,...,n-1$ ve $F_n[x] = G_n^{-1}[x] = D_n[x]$

olsun, bu durumda

$$\Phi_n^{-1}[x,y] = \Phi_n\left[-x, \frac{1}{y}\right] = \Phi_n\left[x, -\frac{1}{y}\right]$$

$$= F_1\left[\frac{x}{y}\right]F_2\left[\frac{x}{y}\right]...F_{n-1}\left[\frac{x}{y}\right]U_n\left[\frac{x}{y}\right]$$

(Zhang 1998).

Lemma 3.1.2. $\Phi_n^{-1}[x,y] = J_n[y]\Phi_n[x,y]J_n[y]$ (Zhang 1998).

3.2. Genelleştirilmiş Simetrik Pascal Matrisleri

Tanım 3.2.1. x ve y sıfırdan farklı iki reel değişken olmak üzere, $\Psi(x,y)$ genelleştirilmiş simetrik Pascal matrisleri,

$$\Psi(x,y) = x^{i-j}y^{i+j}\binom{i+j}{j} \quad i,j = 0,1,2,...,n$$

biçiminde tanımlanır (Zhang 1998).

Teorem 3.2.1. Ψ_n, Q_n, Φ_n ve P_n matrisleri nxn tipinde matrisler olmak üzere,

$$\Psi_n[x,y] = Q_n[xy]\Phi_n^T\left[y, \frac{1}{x}\right]$$

$$= \Phi_n[x,y]P_n^T\left[\frac{y}{x}\right]$$

(Zhang 1998).

İspat: $Q_n[xy]\Phi_n^T\left[y, {}^{1}\!\!/_{x}\right] = \left(C_n(x,y;i,j)\right)$ olsun.

$$C_n(x.y;i,j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{j}\binom{i}{k}\binom{j}{k}x^{i-j}y^{i+j}, i \geq j \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{j}{k}x^{i-j}y^{i+j}, i < j \end{cases}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{j}{k} = \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{j}{j-k} = \binom{i+j}{j},$$

$$\sum_{k=0}^{j}\binom{i}{k}\binom{j}{k} = \sum_{k=0}^{j}\binom{i}{i-k}\binom{j}{k} = \binom{i+j}{i}$$

olmak üzere,

$$\Psi_n[x,y] = Q_n[xy]\Phi_n^T\left[y, \frac{1}{x}\right]$$

eşitliği vardır. Benzer olarak,

$$\Psi_n[x,y] = \Phi_n[xy]P_n^T\left[\frac{y}{x}\right]$$

eşitliğini elde ederiz.

Örnek 3.2.1. n=3 için $Q_n[xy]\Phi_n^T\left[y, \frac{1}{x}\right] = \Phi_n[xy]P_n^T\left[\frac{y}{x}\right]$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$\Psi_3[x,y] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x} & \frac{y^2}{x^2} & \frac{y^3}{x^3} \\ xy & 2y^2 & 3\frac{y^3}{x} & 4\frac{y^4}{x^2} \\ x^2y^2 & 3xy^3 & 6y^4 & 10\frac{y^5}{x} \\ x^3y^3 & 4x^2y^4 & 10xy^5 & 20y^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ xy & x^2y^2 & 0 & 0 \\ x^2y^2 & 2x^3y^3 & x^4y^4 & 0 \\ x^3y^3 & 3x^4y^4 & 3x^5y^5 & x^6y^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x} & \frac{y^2}{x^2} & \frac{y^3}{x^3} \\ 0 & \frac{1}{x^2} & 2\frac{y}{x^3} & 3\frac{y^2}{x^4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^4} & 3\frac{y}{x^5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^6} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ xy & y^2 & 0 & 0 \\ x^2y^2 & 2xy^3 & y^4 & 0 \\ x^3y^3 & 3x^2y^4 & 3xy^5 & y^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x} & \frac{y^2}{x^2} & \frac{y^3}{x^3} \\ 0 & 1 & 2\frac{y}{x} & 3\frac{y^2}{x^4} \\ 0 & 0 & 1 & 3\frac{y}{x^5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

(Zhang 1998).

Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.2.1 ‘den hareketle aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.2.2.

$$
\Psi_n^{-1}[x,y] = P_n^T\left[-\frac{y}{x}\right]\Phi_n\left[x,-\frac{1}{y}\right] \Phi_n^T[y,-x]Q_n\left[-\frac{1}{xy}\right]
$$

(Zhang 1998).

Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.2.1 ‘den hareketle aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.2.3.

$$
\begin{aligned}
\Psi_n^{-1}[x,y] &= J_n[1]P_n^T\left[\frac{y}{x}\right]J_n[1]J_n[y]\Phi_n[x,y]J_n[y] \\
&= J_n\left[\frac{1}{x}\right]\Phi_n\left[y,\frac{1}{x}\right]J_n\left[\frac{1}{x}\right]J_n[y]Q_n^T[xy]J_n[y]
\end{aligned}
$$

(Zhang 1998).

Teorem 3.2.4. Genelleştirilmiş iki Pascal matris çeşidi için,

$$
\begin{aligned}
\det \Phi_n[x,y] &= y^{n(n+1)}, \\
\det \Phi_n^{-1}[x,y] &= y^{-n(n+1)}, \\
\det \Psi_n[x,y] &= y^{n(n+1)}, \\
\det \Psi_n^{-1}[x,y] &= y^{-n(n+1)}.
\end{aligned}
$$

(Zhang 1998).

4. PASCAL MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

S_n simetrik Pascal matrislerini, U_n üst üçgen Pascal matrislerini ve L_n alt üçgen Pascal matrislerini göstermek üzere,

1)
$\det(S_n) = 1$
$\det(U_n) = 1$,
$\det(L_n) = 1$

2) $U_n = L_n^T$ ve $L_n = U_n^T$,

3) $S_n = U_n.L_n$ ve $S_n = L_n.U_n$

özellikleri vardır.

Yukarıdaki özelliklerden ilk ikisi kolaylıkla görülmektedir. Şimdi, 3. özdeşliği farklı yöntemlerle ispatlamaya çalışalım (Edelman 2003).

4.1. Matrislerin Çarpımı Yöntemi

$S = LU$ olacak şekilde, $S_n = (s_{ij})_{nxn}$ matrisini $L_n = (l_{ij})_{nxn}$ ve $U_n = \left(u_{ij}\right)_{nxn}$ matrislerinin çarpımı şeklinde yazalım ve $i, j = 0,1,2,...,n$ için,

$$\sum_{k=0}^{n} l_{ik}.u_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k}.\binom{j}{k} = \binom{i+j}{i} = s_{ij} \tag{4.1.1}$$

denkleminin doğruluğunu ispatlamaya çalışalım.

$i+j$ tane nesneden, i ve j tane nesne içeren iki grup oluşturalım. Birinci gruptan $i-k$ tane nesne ve ikinci gruptan da k tane nesne seçersek, toplamda $i+j$ tane nesneden i tanesini seçmiş oluruz. Bu seçimi birinci grupta $\binom{i}{i-k} = \binom{i}{k}$ tane farklı yolla ve ikinci grupta $\binom{j}{k}$ farklı yolla yapabiliriz. Bu durumda k, 0 ile $\min(i, j)$ arasında değer alması gerekir. Buna göre (4.1.1) denklemi tekrar düzenler isek,

$$\sum_{k=0}^{\min(i,j)} l_{ik}.u_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k}.\binom{j}{k} = \binom{i+j}{i} = s_{ij}$$

denklemini elde ederiz. Burada L_n ve U_n matrisleri için $k > i$ ve $k > j$ değerlerinde binom katsayılarının 0 değerini aldığı açıkça ortadadır (Edelman 2003).

Örnek 4.1.1 $n = 4$ için ,

$$S_4 = L_4.U_4$$

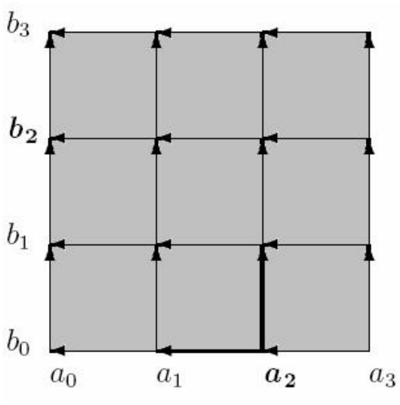
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(Edelman 2003).

4.2. Yapışık Kareler Yöntemi

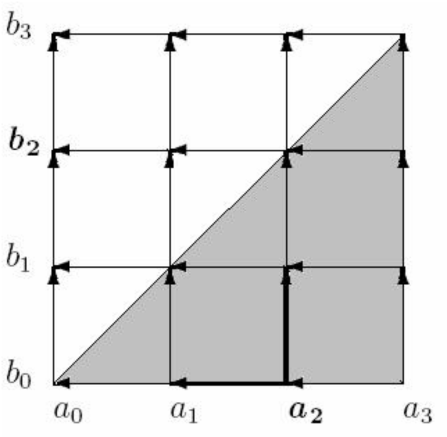
$S_n = \left(s_{ij}\right)_{nxn}$ simetrik Pascal matrisinin yapışık kareler metodu ile $S_n = L_n U_n$ şeklinde yazılabildiğini gösterelim.



Tablo 4

s_{ij} 'yi hesaplamak için, Tablo 4 üzerinde a_i 'den b_j 'ye kadar yalnızca yukarı ve sola gitmek kaydı ile kaç farklı yolun olduğunu hesaplamamız gerekir.

Tablo üzerinde dikkat edilirse a_i den b_0 'a yalnızca bir tane yoldan gidilebilmektedir. Bu durumda $s_{i0} = 1$ olur. Aynı zamanda a_0 noktasından b_j noktasına da yalnızca bir farklı yoldan gidilebilir. Bu durumda $s_{0j} = 1$ olur. Eğer a_i 'den b_j 'ye gitmek istersek temel olarak iki farklı güzergâh kullanabiliriz. Öncelikle a_i 'den a_{i-1} 'e gideriz. Daha sonra buradan b_j 'e gidebiliriz. Bu güzergâh kullanılırsa, a_i 'den b_j 'e giden yol sayısı $s_{i-1,j}$ tanedir. Eğer a_i 'den bir adım yukarı çıkar isek bu güzergâhtan giden yol sayısı $s_{i,j-1}$ tanedir. Bu durumda a_i 'den b_j 'ye giden yol sayıları toplamı $s_{ij} = s_{i-1,j} + s_{i,j-1}$ tanedir.



Tablo 5

Şimdi Tablo 4'ü 45°'lik açı ile ortadan ikiye ayıralım ve Tablo 5'i oluşturalım. Burada a_i noktasından(k,k) (örneğin (1,1),(2,2) gibi) noktasına kaç farklı yolun bulunduğunu hesaplamaya çalışacağız. Böylece l_{ik}'yı hesaplamaya çalışacağız. a_i noktasından (0,0) noktasına yalnızca bir tane yol mevcuttur. Bu durumda $l_{i0}=1$'dir. Aynı zamanda a_i noktasından (i,i) noktasına giden yalnızca bir tane yol mevcuttur. Bu durumda $l_{ii}=1$'dir. Şimdi a_i noktasından (k,k) noktasına giden kaç tane yol mevcut olduğunu hesaplamaya çalışalım. a_i noktasından bir birim sola kayalım, böylece a_{i-1} noktasına gelmiş oluruz. Buradan (k,k) noktasına $l_{i-1,k}$ tane yol mevcuttur. Şimdide a_i noktasından bir birim yukarı ve sola kayalım, buradan$(k-1,k-1)$ noktasına gitmeye çalışalım. Bu durumda bu güzergâh üzerinde $l_{i-1.k-1}$ tane yol mevcuttur. Bu durumda a_i noktasından(k,k) noktasına $l_{ik}=l_{i-1,k}+l_{i-1,k-1}$ tane yol mevcuttur. Benzer şekilde(k,k) noktasından b_j noktasına kaç tane yol olduğu hesaplanarak u_{kj} de hesaplanabilir.

Bu durumda, a_i'den b_j'ye (k,k) noktasından geçmek şartıyla $l_{ik}.u_{kj}$ tane yol mevcuttur ve $s_{ij}=l_{ik}.u_{kj}$'dir. Bu durumda $S_n=L_nU_n$ (Edelman 2003).

Örnek 4.2.1. a_2 noktasından b_2 noktasına, (k,k) noktalarından geçmek şartıyla kaç farklı yoldan gidilebilir? (Edelman 2003)

Çözüm: a_2 noktasından $(0,0)$ noktasına 1 yoldan ve $(0,0)$ noktasından b_2 noktasına da 1 yoldan gidilebilir. a_2 noktasından b_2 noktasına, $(0,0)$ noktalarından geçmek şartıyla 1.1 yoldan gidilebilir. a_2 noktasından $(1,1)$ noktasına 2 yoldan ve $(1,1)$ noktasından b_2 noktasına da 2 yoldan gidilebilir. a_2 noktasından b_2 noktasına, $(1,1)$ noktalarından geçmek şartıyla 2.2 yoldan gidilebilir. a_2 noktasından $(2,2)$ noktasına 1 yoldan ve $(2,2)$ noktasından b_2 noktasına da 1 yoldan gidilebilir. a_2 noktasından b_2 noktasına, $(2,2)$ noktalarından geçmek şartıyla 1.1 yoldan gidilebilir.Toplamda da a_2 noktasından b_2 noktasına, (k,k) noktalarından geçmek şartıyla 1.1+2.2+1.1=6 farklı yoldan gidilebilir.

4.3. Gauss Eliminasyon Yöntemi

Bir E_n matrisi ,

$$E_n = \left(e_{ij}\right)_{nxn}, e_{ij} \quad \begin{cases} 1 & , j = i \\ -1 = & , j \quad i-1 \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu E_n matrisine Eliminasyon matrisi denir (Edelman 2003). E_n matrisinin genel formu:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$E_n.L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix}$ ve benzer şekilde $U_n.E_n^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}$. Şimdi buradan hareketle $\left(E_nL_n\right)\left(U_nE_n^T\right) = E_nS_nE_n^T$ eşitliğinin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayalım.

$n = 2$ için;

$$E_2.L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{bmatrix},$$

$$U_2.E_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}$$

olup buradan

$$\left(E_2L_2\right)\left(U_2E_2^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(E_2S_2E_2^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\left(E_2L_2\right)\left(U_2E_2^T\right)=\left(E_2S_2E_2^T\right).$$

$L_{n-1}.U_{n-1}=S_{n-1}$ eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Buradan hareketle,

$$\left(E_nL_n\right)\left(U_nE_n^T\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & L_{n-1}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & U_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & S_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$E_n^{-1}.\left(E_nL_n\right).\left(U_nE_n^T\right).\left(E_n^T\right)^{-1}=E_n^{-1}.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & S_{n-1}\end{bmatrix}.\left(E_n^T\right)^{-1}$$

$$L_n.U_n=S_n$$

olur ki n için doğruluğu ispatlanmış olur.

$E_nS_nE_n^T$ matrisinin $i.$ satır ve $j.$ sütunu için:

$$\left(E_nS_n\right)_{ij}=S_{ij}-S_{i-1,j}$$

olmak üzere,

$$\left(E_nS_nE_n^T\right)_{ij}=\left(S_{ij}-S_{i-1,j}\right)-\left(S_{i,j-1}-S_{i-1,j-1}\right)$$

$$\left(E_nS_nE_n^T\right)_{ij}=\left(S_{ij}-S_{i-1,j}-S_{i,j-1}\right)+S_{i-1,j-1}$$

$$\left(E_nS_nE_n^T\right)_{ij}=S_{i-1,j-1}$$

$$E_nS_nE_n^T=S_{n-1}$$

olduğu görülür (Edelman 2003).

Örnek 4.3.1. n=4 için Gauss Eliminasyon metodunu uygulayalım (Edelman 2003).

$$E_{4.}L_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & L_3\end{bmatrix},$$

$$U_4.E_4^T=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&U_3\end{bmatrix}$$

olup, buradan

$$\left(E_4L_4\right)\left(U_4E_4^T\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&S_3\end{bmatrix}$$

$$\left(EL_n\right)\left(U_nE^T\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&L_{n-1}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0\\0&U_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&S_{n-1}\end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left(E_4S_4E_4^T\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&S_3\end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\left(E_4L_4\right)\left(U_4E_4^T\right)=\left(E_4S_4E_4^T\right).$$

4.4. Fonksiyonların Eşitliği

Teorem 4.4.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ serisi yakınsak ise, her $|x|<1$ için $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ kuvvet serisi yakınsaktır.

İspat. Her $n\in IN$ için $s_n=c_o+c_1+...c_{n-1}+c_n$ ve $s_{-1}=0$ yazalım. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ serisi yakınsak olduğundan, (s_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve her yakınsak dizi sınırlı olacağı için de (s_n) dizisi sınırlı sınırlıdır yani her $n\in IN$ için $|s_n|\le K$ olacak şekilde bir $K>0$ sabiti vardır. Böylece her $n\in IN$ ve her $|x|<1$ için

$$\left|s_nx^n\right|=|s_n|\left|x^n\right|=|s_n||x|^n\le K|x|^n$$

olduğundan, her $|x|<1$ için $\sum_{n=0}^{\infty}|x|^n.K$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}\left|s_n x^n\right|$ yakınsak dolayısıyla, $\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n$ serisi her $|x|<1$ için yakınsaktır. Ayrıca yakınsak her serinin genel terim dizisi sıfıra yakınsak olacağından ya da her $m \in IN$ için her $|x|<1$ için

$$0 \leq \left|s_m x^m\right| = |s_m|\left|x^m\right| \leq K.\left|x^m\right|$$

eşitsizliğinden ve $\lim_{m\to\infty}\left|x^m\right| = 0$ olmasından dolayı $\lim_{m\to\infty} s_m x^m = 0$ bulunur. Diğer taraftan, her $m \in IN$ için her $|x|<1$ için

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} c_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m$$

olduğundan, $\lim_{m\to\infty} t_m = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n$ elde edilir. Böylece her $|x|<1$ için $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsak olduğunu elde etmiş olduk. Her $|x|<1$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

yazalım. Şimdi $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ olduğunu göstereceğiz. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s$ yazalım. O halde $\lim_{x\to 1-0} f(x) = s$ olduğunu ispatlamalıyız. Bunu yapmak için herhangi bir ε pozitif sayısı alalım. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ olduğundan, $\frac{\varepsilon}{2}$ pozitif sayısı için $n \geq n_o$ olduğunda $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir n_o doğal sayısı vardır. $\lim_{x\to 1-0}(1-x) = 0$ olduğundan, $\frac{\varepsilon}{2}$ pozitif sayısı için $1 > x > 1-\delta$ olduğunda

$$1 - x < \frac{\varepsilon}{2\sum_{n=0}^{n_o}|s_n - s|}$$

olacak şekilde $0<\delta<1$ özelliğini sağlayan bir δ pozitif sayısı vardır. Burada $\sum_{n=0}^{n_o}|s_n - s| > 0$ kabul ediyoruz, çünkü, aksi halde durum aşikar olur. $|x|<1$ için $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1$ olduğundan dolayı, $1 > x > 1-\delta$ olduğunda

$$|f(x)-s| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. O halde $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dir.

$v = (1, x, x^2, ...)$ olacak şekilde sonsuz bir vektör olsun. Bu vektörü S simetrik Pascal matrisi ile çarpalım.

$$Sv = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & . \\ 1 & 3 & 6 & 10 & . \\ 1 & 4 & 10 & 20 & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(1-x) \\ 1/(1-x)^2 \\ 1/(1-x)^3 \\ 1/(1-x)^4 \\ . \end{bmatrix}$$

S matrisinin ilk satırı ile v vektörünün çarpılması ile $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$ geometrik serisi elde edilir. Ancak $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisinin yakınsak olabilmesi için $|x|<1$ olması gerekir.(x kompleks bir sayı olabilir.) Dikkat edilirse diğer satırlar ile v vektörünün çarpılması sonucu ise $1/(1-x)$ in kuvvetleri çıkmaktadır.

Şimdi U Pascal matrisi ile v vektörünü çarpalım:

$$Uv = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 0 & 1 & 2 & 3 & . \\ 0 & 0 & 1 & 3 & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(1-x) \\ x/(1-x)^2 \\ x^2/(1-x)^3 \\ x^3/(1-x)^4 \\ . \end{bmatrix}$$

Uv matrisinden $1/(1-x)$ çarpımını dışarı çıkaralım, bu durumda Uv matrisi $a = x/(1-x)$ in kuvvetleri olacaktır. Şimdi Uv matrisini L Pascal matrisi ile çarpalım.

$$L\left(Uv\right)=\frac{1}{1-x}\begin{bmatrix}1&0&0&0&.\\1&1&0&0&.\\1&2&1&0&.\\1&3&3&1&.\\.&.&.&.&.\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\a\\a^2\\a^3\\.\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\left(1-x\right)\\1/\left(1-x\right)^2\\1/\left(1-x\right)^3\\1/\left(1-x\right)^4\\.\end{bmatrix}.$$

Bu durumda $v=\left(1,x,x^2,...\right)$ vektörü için , $Sv=LUv$ 'dir. Acaba bu durumda $S=LU$ eşitliğinden bahsedilebilir mi? $x=0$ seçelim, bu durumda $v_0=\left(1,0,0,..\right)$ olacaktır. Bunun neticesinde $S_0=LU_0$ sonucuna varılır. Eğer v vektörünün diğer koordinat vektörleri için de denersek S ve LU 'nun bütün sütunları aynı çıkar.

$\left(0,1,0,...\right)$ 'a ulaşmanın en kolay yolu ise, v'nin $x=0$ noktasındaki türevini hesaplamaktır. $v_\Delta=\left(1,\Delta,\Delta^2,...\right)$ olmak üzere, v_0 ve v_Δ'nın lineer kombinasyonları,

$$S\left(\frac{v_\Delta-v_0}{\Delta}\right)=LU\left(\frac{v_\Delta-v_0}{\Delta}\right)$$

şeklinde olur.

$\Delta\rightarrow 0$ için, her analitik fonksiyon her mertebeden türevlenebilir olduğundan yüksek türevler alınırsa diğer koordinat vektörleri elde edilir. Dolayısıyla S ve LU 'nun sütunları aynıdır (Edelman 2003).

4.5. Pascal Matrislerinin Kuvvetleri, Tersleri ve Logaritmaları

$\alpha=\left(a_0,a_1,a_2,...\right)$ katsayılar vektörü ile $v=\left(1,x,x^2,...\right)$ vektörünün iç çarpımı “0” civarında Taylor serilerini verir. Taylor serilerini $f(x)$ fonksiyonu ile gösterirsek;

$$f(x)=\sum a_k x^k=a^T v=a^T.L^{-1}Lv\,.$$

Bu denklemdeki L bütün sonsuz alt üçgen Pascal matrislerini simgelesin. Bu denklemdeki Lv çarpımı $(1+x)$ in kuvvet serisini vermektedir.

$$Lv=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&\cdots\\1&2&1&0&\cdots\\1&3&3&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\\x^3\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1+x\\(1+x)^2\\(1+x)^3\\\vdots\end{bmatrix}.$$

Bu denklem oldukça kullanışlı bir denklemdir. Eğer bulunan sonuç tekrar L matrisi ile çarpılır ise bulunan matrisin elemanları $\left(2+x\right)$'in kuvvetleri olacaktır. Eğer bu işleme p defa tekrar edilirse bulunan $L^p v$ çarpım matrisinin elemanları $\left(p+x\right)$'in kuvvetleri olacaktır. Bu durumda L^p matrisinin $i.$ satır ve $j.$sütun elamanı $p^{i-j}\binom{i}{j}$ şeklinde olup, bu durumu genel bir formda yazarsak,

$$L_n^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ p^2 & 2p & 1 & 0 & \cdots \\ p^3 & 3p^2 & 3p & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Ayrıca $L^p.L^q = L^{p+q}$ (Edelman 2003).

Diğer taraftan $p = -1$ için, L matrisinin tersi,

$$L_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ (-1)^2 & 2(-1) & 1 & 0 & \cdots \\ (-1)^3 & 3(-1)^2 & 3(-1) & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 3 & -3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi bir D matrisi tanımlayalım,

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \text{ ve } i \text{ tek} \\ -1 & , i = j \text{ ve } i \text{ çift} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda D matrisinin genel formu:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{ii} = \begin{cases} 1, & i \quad tekse \\ -1, & i \quad çiftse \end{cases} \end{bmatrix}.$$

Bu durumda $L^{-1} = D.L.D^{-1}$ biçiminde yazılabilir (Edelman 2003).

Örnek 4.5.1. n=4 için L_n ve L_n^{-1} matrisleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu araştıralım(Edelman 2003).

$$L_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D_4.L_4.D_4^{-1}$$

$L^p = e^{Ap}$ olmak üzere, $A = \log L$ matrisini hesaplarsak

$$A = \lim_{p \to 0} \frac{e^{Ap} - I}{p} = \lim_{p \to 0} \frac{L^p - I}{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \end{bmatrix}$$

olup, $p = 1$ için, $L = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots$ elde edilir (Edelman 2003).

4.6. Pascal Matrislerinin Özdeğerleri

$L^{-1} = D.L.D^{-1}$ ve $U^{-1} = D.U.D^{-1}$ olduğunu daha önce göstermiştik. U ve L matrisleri benzer olduğu gibi tersleri de benzerdir. Bu durumda S ve S^{-1} matrisleri benzerdir. S matrisinin karşıt özdeğer çiftleri λ ve $\frac{1}{\lambda}$ dır.Benzer matrislerin özdeğerleri de benzerdir. S ve S^{-1} matrisleri için,

$$S^{-1} = U^{-1}.L^{-1} = DUD^{-1}.DLD^{-1}$$

$$(DU)(LU)\left(U^{-1}D^{-1}\right) = (DU).S.(DU)^{-1}$$

olup S^{-1} ve S matrisleri benzerdir. Bu durumda özdeğerleri aynıdır (Edelman 2003).

Örnek 4.6.1.

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(3×3) tipindeki simetrik Pascal matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1, \lambda_2 \; 4 + \sqrt{15}$ ve $\lambda_3 = 4 - \sqrt{15}$.

Aynı zamanda $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_3}$ 'tür.

$$S_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(3×3) tipindeki simetrik Pascal matrisinin tersinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4+\sqrt{15}$ ve $\lambda_3 = 4-\sqrt{15}$. Aynı zamanda $\lambda_2 = \dfrac{1}{\lambda_3}$'tür. Bu durumda simetrik Pascal matrisi ile tersinin özdeğerleri aynıdır.

4.7. Simetrik Pascal Matrislerinin Modülleri

Tanım 4.7.1. $\overline{P}(n)_2$ matrisi, $P(n)$ simetrik Pascal matrisinin iki modülüne göre indirgenmiş matrisini göstermek üzere,

$$\left(\overline{P}(n)_2\right)_{i,j} = \left(\binom{i+j}{i} \pmod 2\right) \in \{0,1\}$$

şeklinde tanımlanır (Bacher 2004).

$n = \sum v_i 2^i$ şeklinde gösterilen rakamlar (çift) için, $s(n) = \sum v_i \pmod 2$ dizisi elde edilir. Bu durumda, $s(0) = 0, s(2k) = s(k)$ ve $s(2k+1) = 1 - s(k)$.

Tanım 4.7.2. $\overline{P}(n)_3$ matrisi, $P(n)$ simetrik Pascal matrisinin üç modülüne göre indirgenmiş matrisini göstermek üzere,

$$\left(\overline{P}(n)_3\right)_{i,j} = \left(\binom{i+j}{i} \pmod 3\right) \in \{-1,0,1\}$$

şeklinde tanımlanır (Bacher 2004).

Ardışık bir $t(n)$ dizisi düşünelim ve $t(0) = 0$, $t(3n) = t(n), t(3n+1) = t(n)+1$ ve $t(3n+2) = t(n)-1$ şeklinde tekrar etsin.

Teorem 4.7.1.

(i) $\overline{P}(n)_2$ matrisinin Z üzerindeki determinantı,

$$\det\left(\overline{P}(n)_2\right) = \prod_{k=0}^{n-1} (-1)^{s(k)}.$$

(ii) $\overline{P}(n)_3$ matrisinin Z üzerindeki determinantı,

$$\det\left(\overline{P}(n)_3\right) = \prod_{k=0}^{n-1} (-1)^{t(k)} \text{ (Bacher 2004).}$$

4.8. Bazı Homejen Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Pascal Matrisleri Yardımıyla Çözümü

$n.$ dereceden sabit katsayılı homojen olmayan bir diferansiyel denklemin genel formu,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 = \left(q_0 + q_1 t + ... + q_m t^m\right) e^{at} \qquad (4.8.1)$$

şeklinde olsun.

$L(y)$; y 'nin $n.$ mertebeden lineer diferansiyel denklemini göstermek üzere,

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k(y)$$

olsun. Burada D^k, y 'nin t'ye göre $k.$ dereceden türevini göstersin.(4.8.1) denkleminin sol tarafını $L(y)$ ile, denklemin sağ tarafını da matris formunda gösterirsek,

$$\left(q_0 + q_1 t + ... + q_m t^m\right) e^{at} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & ... & q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix} e^{at}.$$

O halde (4.8.1) denklemini yeniden düzenlersek,

$$L(y) = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & ... & q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix} e^{at}. \qquad (4.8.2)$$

$y^* = \left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_m t^m\right) e^{at}$ ifadesi (4.8.1) denkleminin özel bir çözümü olsun. $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_m t^m$ polinomu (4.8.2) denkleminde seçtiğimiz polinomun bir benzeridir. $L(y^*)$ 'yi hesaplayarak (4.8.2) denklemiyle kıyaslayalım. Şimdi y^* ifadesinin matris formuna bakalım.

$$L\left(y^*\right) = L\left(\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & ... & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix} e^{at} \right) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & ... & c_m \end{bmatrix} L\left(\begin{bmatrix} e^{at} \\ te^{at} \\ t^2 e^{at} \\ \vdots \\ t^m e^{at} \end{bmatrix} \right)$$

$$=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} L\left(e^{at}\right) \\ L\left(te^{at}\right) \\ L\left(t^2e^{at}\right) \\ \vdots \\ L\left(t^m e^{at}\right) \end{bmatrix}\right). \qquad (4.8.3)$$

Şimdi $0 \le k \le m$ olduğu durumlarda $L\left(t^k e^{at}\right)$ ifadesi

$$L\left(e^{at}\right)=\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\left(e^{at}\right)=\sum_{k=0}^{n} a_k a^k e^{at}=e^{at}\sum_{k=0}^{n} a_k a^k$$
$$=p(a)e^{at}\left(P(a)=\sum_{k=0}^{n} a_k a^k\right)$$

şeklinde düzenlenir, burada $p(a)$ diferansiyel denklemin karekteristik polinomudur. $L\left(e^{at}\right)$ yüksek türevlerini hesaplamaya çalışalım. Birinci olarak $L\left(e^{at}\right), a$ ve t ye bağlı bir fonksiyon olsun. Şimdi karışık kısmi türevin yerlerini değiştirelim.

$$L\left(t^k e^{at}\right)=L\left(\frac{\partial^k\left(e^{at}\right)}{\partial a^k}\right)=\frac{\partial^k\left(L\left(e^{at}\right)\right)}{\partial a^k}=\frac{\partial^k\left(p(a)e^{at}\right)}{\partial a^k}$$

İkinci olarak, Leibinz kuralından u ve v gibi iki fonksiyonun yüksek mertebeden türevini hesaplayabiliriz.

$$(uv)^{(n)}=uv^{(n)}+\binom{n}{1}u'v^{(n-1)}+\dots+uv^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(r)}v^{(n-r)}.$$

$L\left(t^k e^{at}\right)$'yi hesaplamak için $\dfrac{\partial^k\left(p(a)e^{at}\right)}{\partial a^k}$'yı Leibinz kuralına göre hesaplayabiliriz.

$$L\left(t^k e^{at}\right)=\frac{\partial^k\left(p(a)e^{at}\right)}{\partial a^k}=\sum_{l=0}^{n}\binom{k}{l}\left[p(a)\right]^{(k-l)}\left[e^{at}\right]^{(l)}$$
$$=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}p^{(k-l)}t^l e^{at}=e^{at}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}p^{(k-l)}t^l \qquad (4.8.4)$$

$p^{(k-l)}$ ifadesi , p ’nin a ’ya göre $(k-l)$. türevidir. $\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}p^{(k-l)}t^l$ ifadesi bir polinomdur ve katsayıları p ’nin türevleridir. Eğer bu katsayılar bir matrisle ifade edilmek istenirse P gibi $(m+1\times m+1)$ tipinde bir matris oluşturulabilir.

P_{k+1}, P matrisinin $(k+1)$. satırını göstersin. P matrisini düzenlersek, $L\left(e^{at}\right)=L\left(t^0 e^{at}\right)=p(a)e^{at}$ ifadesi P_{11} elemanını oluşturacaktır. k ’ya kadar 0'dan m'ye bir dizi oluşturursak, $L\left(t^k e^{at}\right)$ $(k+1)$. satıra karşılık gelir. Benzer olarak (4.8.4) denklemini t'nin kuvvetlerine göre açarsak P matrisinin sütunlarını bulabiliriz.

P alt üçgen bir matristir. $P_{k,l}=0$ $(k<l)$ ve matrisin genel formu,

$$P_{k+1,l+1}=\begin{cases}\binom{k}{l}p^{(k-l)} & k\geq l \\ 0 & k<l\end{cases},0\leq k,l\leq m. \tag{4.8.5}$$

şeklindedir.

Eğer t'nin kuvvetlerini sütun vektörleri şeklinde yazarsak,

$$L\left(\begin{bmatrix} e^{at} \\ te^{at} \\ t^2e^{at} \\ \vdots \\ t^m e^{at}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p' & p & 0 & \cdots & 0 \\ p'' & 2p' & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{(m)} & \binom{m}{1}p^{(m-1)} & \cdots & \binom{m}{m-1}p' & p\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^m\end{bmatrix}e^{at}. \tag{4.8.6}$$

Şimdi $\vec{c}=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m\end{bmatrix}$ ve $\vec{q}=\begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_m\end{bmatrix}$ katsayılarını belirlemeye çalışalım.(4.8.2) denklemi ve (4.8.6) denkleminden faydalanarak,

$$L\left(y^*\right)=\vec{c}\,P\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^m\end{bmatrix}e^{at}=\vec{q}\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^m\end{bmatrix}e^{at} \tag{4.8.7}$$

$$\vec{q}=\vec{c}\,P \tag{4.8.8}$$

eşitliklerini elde ederiz. P matrisi altüçgen bir Pascal matrisidir. P matrisinin elemanları bir fonksiyonun yüksek mertebeden türevleri ile oluşmaktadır (Zobitz 2003).

$\vec{c}$ vektörünün elemanlarını bulmak istiyorsak, P^{-1} matrisini hesaplamamız gerekmektedir. Ancak P^{-1} matrisinin mevcut olabilmesi için $\det(P)\neq 0$ olması gerekir. P alt üçgen bir Pascal matrisi olduğuna göre $\det(P)=\left[p(a)\right]^m$'dir.Biz burada $p(a)\neq 0$ olduğunu kabul edelim.

Teorem 4.8.1. P, (4.8.5)'te tanımlanan genel matris formuna uygun bir matris ve $p(a) \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$Q_{k+1,l+1} = \begin{cases} \binom{k}{l}\left(\frac{1}{p}\right)^{(k-l)} & k \geq l \\ 0 & k < l \end{cases} \tag{4.8.9}$$

ve $Q = P^{-1}$'dir (Zobitz 2003).

İspat: Alt üçgen matrislerin genel özelliklerinden ispat açıktır.

$$(PQ)_{k+1,l+1} = \begin{cases} 0\,, k < l \\ 1\,, k = l \end{cases}$$

$k < l$ olduğu durumlarda matrisin elemanları 0 olduğu açıktır. $k - l = 0$ için $p^{(k-l)} = p$ ve benzer olarak $\left(\frac{1}{p}\right)^{(k-l)} = \frac{1}{p}$ olduğuna göre, bu iki ifadenin çarpımı da 1'dir.

Şimdi $(PQ)_{k+1,l+1} = 0 \; (l < k)$ ifadesini ispatlamaya çalışalım. $l < k$ olduğunu düşünelim, $q > 0$ için $k = l + q$'nun açılımına bakalım.

$$(PQ)_{k+1,l+1} = \sum_{r=0}^{q} P_{l+q+1,l+r+1}.Q_{l+r+1,l+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{q} \binom{l+q}{l+r}\binom{l+q}{l} p^{(q-r)} \left(\frac{1}{p}\right)^{(r)} \tag{4.8.10}$$

$$(PQ)_{k+1,l+1} = \sum_{r=0}^{q} \frac{(l+q)!(l+r)!}{(l+r)!(q-r)!r!l!} p^{(q-r)} \left(\frac{1}{p}\right)^{(r)}$$

$$(PQ)_{k+1,l+1} = \binom{l+q}{q} \sum_{r=0}^{q} \frac{q!}{(q-r)!r!} p^{(q-r)} \left(\frac{1}{p}\right)^{(r)} = \binom{l+q}{q} \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} p^{(q-r)} \left(\frac{1}{p}\right)^{(r)} \tag{4.8.11}$$

Yukarıdaki denklemde $l + q = k$ şeklinde seçelim ve denklemi yeniden düzenleyelim.

$$(PQ)_{k+1,l+1} = \binom{k}{q} \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} p^{(q-r)} \left(\frac{1}{p}\right)^{(r)} \tag{4.8.12}$$

(4.8.12) denkleminde yüksek mertebeden türevleri hesaplayabilmek için Leibniz kuralını uygulayalım.

$$(PQ)_{k+1,l+1} = \binom{k}{q} \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} p^{(q-r)} \left(\frac{1}{p}\right)^{(r)} = \binom{k}{q}\left(\frac{1}{p}.p\right)^{(q)}$$

Yukarıdaki denkleme göre, $q > 0$ için $\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix}\left(\frac{1}{p}.p\right)^{(q)} = \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix}(1)^{(q)} = 0$ 'dır.Bu durumda $k > l$ için $(PQ)_{k+1,l+1} = 0$ 'dır.Buna göre ifadenin genel formu,

$$(PQ)_{k+1,l+1} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

şeklindedir. Bu durumda $Q = P^{-1}$ 'dur.

P^{-1} matrisini bulduk, (4.8.8) denkleminde $\vec{c}$ vektörünün elemanlarını belirleyebiliriz. Bu durumda diferansiyel denklemin y^* özel çözümü,

$$\vec{c} = \vec{q}\,P^{-1} \text{ ve } y^* = \vec{c}\,\vec{t}\,e^{at} \tag{4.8.13}$$

şeklinde olacaktır (Zobitz 2003).

Örnek 4.8.1. $y''' - y' + 3y = (1+5t)e^{4t}$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz (Zobitz 2003).

Çözüm. Denklemi $L(D) = (D^3 - D + 3)y = (1+5t)e^{4t}$ şeklinde yazalım. Burada

$$L(e^{4t}) = 63e^{4t} = p(4)e^{4t} \quad \left(p(a) = a^3 - a + 3\right).$$

Şimdi denklemi matris formunda yeniden düzenleyelim. Bu durumda denklem,

$$L(y) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}e^{4t}$$

şeklinde olacaktır. $y^* = (c_0 + c_1 t)e^{4t}$ denklemin özel bir çözümü olsun. y yerine denklemin sol tarafında $y*$ özel çözümünü yazalım.

$$L(y^*) = L\left(\begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}e^{4t}\right) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}e^{4t}\right).$$

Denklemin diğer tarafını hesaplayalım, $L(te^{4t}) = (63t + 47)e^{4t}$. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L(e^{4t}) \\ L(te^{4t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 63 & 0 \\ 47 & 63 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}e^{4t} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}e^{4t}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 63 & 0 \\ 47 & 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklemi çözersek, $c_0 = -\frac{172}{3969}$ ve $c_1 = \frac{5}{63}$ olarak buluruz. Buna göre denklemin özel çözümü,

$$y* = \left(-\frac{172}{3969} + \frac{5}{63}t\right)e^{4t}$$

olarak bulunur.

Ancak metodun sınırlı olan tarafı $p(a)=0$ durumudur. P^{-1}'i hesaplayabilmek için matrisin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. $p(a)=0$ ise matrisin esas köşegeninin elemanları sıfırdır. Bu durumda $\det(P)=0$ olacaktır. Bu durumda yukarıdaki metod geçersiz olur.

Eğer her $0 \le j < q < m$ için $p^{(j)}(a)=0$ ise, y_h (4.8.1) denkleminin homojen çözümü,

$$\sum_{j=0}^{q-1} r_j t^j e^{at} \quad \left(r_j \text{ sabittir.}\right)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda denklemin özel çözümünün genel formu,

$$\left(c_q t^q + c_{q+1} t^{q+1} + \ldots + c_m t^m + \ldots + c_{q+m} t^{q+m}\right) e^{at}$$

şeklindedir. Çözümün c_i katsayılarını bulmak için, diğer çözümü bulmakta kullandığımız yönteme benzer bir yöntem kullanalım. $p^{(j)}(a)=0$ $(j<q)$ için (4.8.6) denkleminin girişleri "0" olabilir.(4.8.6) denklemindeki matris formatını yazalım. Bu durum,

$$L\left(\begin{bmatrix} t^q e^{at} \\ t^{q+1} e^{at} \\ t^{q+2} e^{at} \\ \vdots \\ t^{q+m} e^{at} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p^{(q)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p^{(q+1)} & \binom{q+1}{1} p^{(q)} & 0 & \cdots & 0 \\ p^{(q+2)} & \binom{q+2}{1} p^{(q+1)} & \binom{q+2}{2} p^{(q)} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{(q+m)} & \binom{q+m}{1} p^{(q+m-1)} & \cdots & \binom{q+m}{m-1} p^{(q+1)} & \binom{q+m}{m} p^{(q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix} e^{at}$$

şeklindedir. Yukarıda oluşan P matrisinin genel formu,

$$P_{k+1,l+1} = \begin{cases} \binom{q+k}{l} \left(p^{(q)}\right)^{(k-l)} & k \ge l \\ 0 & k < l \end{cases} \left(0 \le k, l \le m \text{ ve } p^{(j)} = 0 \left(j<q\right)\right). \tag{4.8.14}$$

$p^{(q)} \ne 0$ ise $\det(P) \ne 0$ ve P^{-1} mevcuttur (Zobitz 2003).

Örnek 4.8.2. $y'' - 16y = \left(1+t^2\right)e^{4t}$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz(Zobitz 2003).

Çözüm: Denklemi $L(D) = \left(D^2 - 16\right)y = \left(1+t^2\right)e^{4t}$ şeklinde yazalım. Burada,

$$p(a) = a^2 - 16 \text{ ve } p(4) = 0$$

$$p'(a) = 2a \text{ ve } p'(4) = 8$$

Denklemin özel çözümü $y^* = \left(c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3\right)e^{4t}$ şeklinde olsun. $p'(4)=8$ ifadesini P matrisinde yerine koyalım,

$$P = \begin{bmatrix} 1.8 & 0 & 0 \\ 1.2 & 2.8 & 0 \\ 1.0 & 3.2 & 3.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 0 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix}.$$

P matrisinin tersi

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{64} & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{256} & -\frac{1}{64} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

dir. Denklemin özel çözümü,

$$y^{*}=\left(\frac{33}{256}t-\frac{1}{64}t^{2}+\frac{1}{24}t^{3}\right)e^{4t}$$

şeklinde olacaktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Pascal matrisleri ve özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Öncelikle Pascal matrislerinin tanımları verilmiş, daha sonra Pascal matrisleri ile sayılar teorisinde önemli bir yer işgal eden Stirling sayıları ele alınmıştır. Ayrıca Pascal matrislerinin diferansiyel denklemlere uygulanışı incelenmiştir.

Bunlarla birlikte Pascal matrislerinin normları ile ilgili çalışma literatürde fazla bulunmamakta olup, bu matrislerin normu incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] http://En.Wikipedia.Org/Pascal_Matrix.

[2] Z. Zhang, M. Liu, An Extension of The Generalized Pascal Matrix and Its Algebraic Properties , Linear Algebra and Its Aplications, 271:169-177 (1998).

[3] Z. Zhang, T. Wang, Generalized Pascal Matrix and Recurrence Sequences, Linear Algebra and Its Applications, 283 289-299 (1998).

[4] P.Maltais, T.A Gulliver, Pascal Matrices and Stirling Numbers, Appl. Math. Lett. Vol. II, No:2, 7–11 (1998).

[5] A. Edelman, G. Strang, Pascal Matrices,American Montly,March 1004 (2003).

[6] J.M. Zobitz, Pascal Matrices and Particular Solutions to Differential Equations,Pascal Matrix and Differantial Equations, Pi Mu Epsilon Journal,11(8) 437-444, March (2003).

[7] Z.Tang , R. Duraiswami, N. Gumerov, UMIACS-TR-08,CS-TR-4563 (2004).

[8] R.Bacher, R. Chapman, Symmetric Pascal Matrices Modulo p, European Journal Of Comninatorics 25 (2004).

[9] Ş. Çam, Matematik Dünyası Dergisi, Bahar (2005).

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/James_Stirling_(mathematician)