

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CONWAY POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Melih YILDIRIM
DANIŞMAN: Doç. Dr. Yılmaz ALTUN

VAN - 2008

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CONWAY POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Melih YILDIRIM

VAN - 2008

KABUL ve ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Yılmaz ALTUN danışmanlığında, Melih YILDIRIM tarafından hazırlanan “*Conway Polinomları*” isimli bu çalışma 13/03/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cemil TUNÇ..... İmza:

Üye : Doç. Dr. Yılmaz ALTUN..... İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Kamil ARI..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 12/ 02 / 2008. gün ve 2008/4-XVII sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

CONWAY POLİNOMLARI

YILDIRIM, Melih

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yılmaz ALTUN

Şubat 2008, 32 sayfa

Düğüm teorisinde kolayca tarif edilen fakat hesaplanması oldukça zor olan geometrik sabitler vardır. Minimal geçit sayısı, Arf sabiti bu sabitlerden bazılarıdır. Bu sayısal sabitler, Alexander polinomları ve Conway polinomları gibi cebirsel sabitler kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu çalışmada, normalize edilmiş Alexander polinomu ile Conway polinomları arasında var olan $\Delta_K(t^2) = \nabla_K(t - t^{-1})$ formülü kullanılarak, Alexander polinomu bilinen bazı düğümlerin Conway polinomları elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler : Alexander polinom, Conway polinomu, Düğüm, Düğüm sabiti, Halka.

ABSTRACT

CONWAY POLYNOMIALS

YILDIRIM, Melih

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz ALTUN

February 2008, 32 pages

In knot theory there are easily defining geometric invariants but fairly difficult to count. Minimal crossing number and Arf invariant are some of these invariants. Those numerical invariants are calculated using algebraic invariants as Alexander polynomials and Conway polynomials. In this study it is gotten Conway polynomials of some knots known Alexander polynomial to be used $\Delta_K(t^2) = \nabla_K(t - t^{-1})$ formula which is between normalized Alexander polynomial and Conway polynomials.

Key words : Alexander polynomial, Conway polynomial, Knot, Knot invariant, Link.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada düğümlerin Conway polinomları incelenmektedir. Bu doğrultuda öncelikle konuyla ilgili bazı temel tanım ve bilgiler verilmiştir. Daha sonra düğüm polinomlarının birbiriyle ilgisi ele alınmıştır. Bu doğrultuda, normalize edilmiş Alexander polinomu ile Conway polinomları arasında var olan $\Delta_K(t^2) = \nabla_K(t - t^{-1})$ formülü kullanılarak, Alexander polinomu bilinen bazı düğümlerin Conway polinomları elde edilmeye çalışılarak sonuçları ortaya konulmuştur.

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde düğümler ve düğüm polinomları (Alexander, Conway, Jones, Homfly polinomları vs) hakkında genel bilgiler verildi. Son bölümde bazı düğümlerin Conway polinomları ile aralarındaki ilişkiler verilerek uygulamaları yapılmıştır.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, sayın Doç. Dr. Yılmaz ALTUN 'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Melih YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. ÖN BİLGİLER	2
3. CONWAY POLİNOMUNUN TAYİNİ ve BAZI UYGULAMALAR	13
KAYNAKLAR	21
ÖZ GEÇMİŞ	23

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Normal düzlemsel izdüşümleri ile bazı düğümler	2
Şekil 2.2. Bazı düğüm diyagramları	4
Şekil 2.3. Bazı düğüm hareketleri	5
Şekil 2.4. Bazı diyagramlar	5
Şekil 2.5. Diyagram hareketleri	6
Şekil 2.6. Diyagram durumu	6
Şekil 2.7. 7_4 ve 9_2 düğümleri	10
Şekil 2.8. Kinoshita-Terasaka düğümü	10
Şekil 2.9. Skein bağıntısı	11
Şekil 3.1. 3_1 düğümü için skein bağıntısı	19
Şekil 3.2. 4_1 düğümü için skein bağıntısı	20

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

p	: İzdüşüm fonksiyonu
$p(K)$: Düzlemsel bir poligon
$p(K - A)$: K düğümünün A kümesine göre normal diyagramı
h	: İzotop fonksiyonu
ε	: Komşuluk
Δ	: Alexander polinomu
V	Jones polinomu
$\nabla_K(z)$	Conway polinomu
D	Diyagram
W	Laurent polinomu

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Düğüm teorisinde minimal geçit sayısı, Arf sabiti gibi tarifi kolay fakat hesaplanması oldukça zor olan bazı geometrik sabitler vardır. Bu sayısal sabitler, önceleri Alexander polinomları gibi cebirsel sabitler kullanılarak hesaplanmıştır. Bununla beraber son yıllarda Conway polinomları gibi bazı nümerik sabitler hesaplamada çok kullanışlı olmaktadır. Bu çalışmada öncelikle farklı düğüm polinomları ele alınarak normalize edilmiş Alexander polinomu ile Conway polinomları arasında var olan ve

$$\Delta_K(t^2) = \nabla_K(t - t^{-1})$$

formülü yardımıyla Alexander polinomu bilinen bazı düğümlerin Conway polinomları elde edilmeye çalışılacaktır.

Alexander (1928), düğümler ve halkalar için Alexander polinomunu tanımladı. Crowell ve Fox (1963), bazı özel düğümler için Alexander polinomlarını hesapladılar. Conway (1970), yönlendirilmiş halkalar için tamsayı katsayılı bir $\nabla(t)$ polinomu tanımladı. Birman (1974), Jones polinomunun belirlenmesinde kullanılan bir teoreminin bir ispatını vermiştir. Altun ve Bozhüyük (1981), çoban düğümlerini incelemiştir. Altun ve Bozhüyük (1984), burulmalı düğümlerin Alexander polinomlarını hesapladılar. Jones (1985), düğüm ve halkalara ait yeni bir polinom sabiti tanımladı. Daha sonra “Jones Polinomu” diye adlandırılan bu buluş, düğüm teorisinde yeni bir çığır açtı. Jones polinomu sabit operatör cebirleri aracılığıyla tanımlanmaktaydı. Diğer taraftan bir düğümün BLM/Ho polinomu, Brandt ve ark. (1986) çalışmasında ele alınmıştır. Kauffman (1987a; 1987b), Jones polinomunun hesabı için pratik bir metot geliştirdi. Jones (1987) çalışmasında bu metodu sürdürdü. Bu metotta, düğüm diyagramının parantez polinomu kullanılmaktadır. Kanenobu ve Sumi (1993), Homfly ve BLM/Ho polinomları arasında bir ilgiyi belirlemiştir. Morton (1992) ise Homfly polinomu ile Jones polinomu arasında ki ilişkiyi inceledi. Küçük (1996-1997), 7_4 düğümünün Conway polinomunu hesaplamıştır. Lickorish (1997), Arf sabiti ile Jones polinomu arasındaki bir ilişkiyi inceledi. Şimşek (2001) çalışmasında bu konuda yeni bazı ilgiler tespit edilmiştir. Yine Altun (2006), T_n burulmalı düğümlerinde n 'nin tek ve çift oluşuna göre Conway polinomunu veren

birer formül geliştirdi ve bu dđđümlerin Jones polinomları ile ilgili bazı sonuçlar elde etmiştir. Conway polinomu üzerine faktörizasyonu Yasuhara ve Tsukamoto (2007) ele almıştır. Murasugi, (1996), dđđüm teorisinde lokal ve global problemlere değinmiştir.

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde dđđümler ve dđđüm polinomları (Alexander, Conway, Jones, Homfly, Kauffman, BLM/Ho polinomları) hakkında genel bilgiler verildi. Son bölümde bazı dđđümlerin Conway polinomları hesaplanmıştır.

2. ÖNBİLGİLER

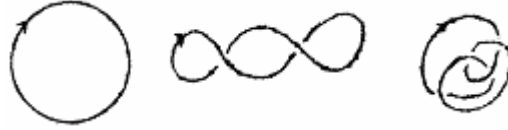
Bu bölümde konuyla ilgili bazı temel tanım ve bilgiler ifade edilecektir.

2.1. Düğümler Hakkında Genel Bilgiler

Bu kısımda düğümlerle ilgili bazı bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Düğüm)

Üç boyutlu olan bir küreyi $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$ ile gösterelim. Bu durumda S^3 içinde, $S^1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ çemberi ile topolojik eşyapılı yani homeomorfik olan herhangi bir kümeye bir düğüm denir. Yani düğüm, uzayda basit kapalı bir eğridir. Diğer bir deyişle düğüm, birim çemberin uzay içinde bir konumudur. Aşağıda bu şekil ile örneklenmektedir.



Şekil 2.1. Normal düzlemsel izdüşümleri ile bazı düğümler

S^3 üzerinde ayrık, düzgün, yönlendirilmiş kapalı eğrilerin sonlu bir ailesine halka denir. Halkalar, düzlemde diyagramlarla gösterilmektedir. Düğüm bir bileşenli bir halkadır (Birman, 1974).

K , S^3 içinde bir düğüm olsun. Eğer K sonlu sayıda doğru parçalarından ibaret ise, K 'ya bir poligonal düğüm denir.

Tanım 2.1.2. (Denk Düğümler)

K ve L , S^3 içinde iki yönlendirilmiş düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde bir $h : S^3 \rightarrow S^3$ topolojik eşyapı dönüşümü yani homeomorfizm varsa K düğümü L düğümüne denktir denir.

Tanım 2.1.3. (Düğüm Tipi)

İki düğümün denklik tanımı, S^3 ün basit kapalı eğrileri kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı, söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına düğüm tipi denir. Denk iki düğüm aynı düğüm tipindedir.

Yönlendirilmiş bir üçgen ile veya çember ile aynı tipte olan düğümlere düğümlenmemiş düğümler denir. Düğüm problemi, düğüm tiplerini ayırt eden sabitlerin bulunmasıdır.

Tanım 2.1.4.

$p: S^3 \rightarrow S^3$, $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile tanımlanan fonksiyona izdüşüm fonksiyonu denir.

Eğer K , S^3 içinde bir düğüm ise K 'nın p izdüşüm fonksiyonu altındaki resmi olan $p(K)$, K 'nın (x, y) –düzlemindeki izdüşümüdür. K poligonal bir düğüm ise $p(K)$ düzlemsel bir poligondur.

Tanım 2.1.5. (Düğüm Diyagramı)

Bir düğüm şematik olarak 2-boyutlu bir şekille yani düzlemsel bir eğriyle temsil edilecektir. Bu şekle düğümün diyagramı denir.

Tanım 2.1.1'deki eğri, bütün düğüm bir anda görüş sahası içine gelecek biçimde uzayın yeteri kadar uzak bir noktasından bakılarak çizilen resimdir (Crowell ve Fox, 1963).

Tanım 2.1.6. (Geçit Noktası)

K , S^3 içinde bir düğüm ve p , yukarıda geçen izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$, n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise a 'ya $p(K)$ 'nın bir n – katlı noktası denir.

Eğer $n = 2$ ise a noktasına geçit noktası (çift katlı nokta-iki katlı nokta-çift nokta-kavşak noktası) denir.

Tanım 2.1.7.

Yukarıdaki tanım uyarınca bir çift nokta K 'ya ait tam iki noktanın resmi olup bu iki noktadan z koordinatı daha büyük olana üst geçit noktası ve diğerine alt geçit noktası denir.

Tanım 2.1.8.

K bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer

(i) $p(K)$ 'nın katlı noktaları sadece sonlu sayıda geçit noktası ise

(ii) Hiçbir geçit noktası K 'ya ait bir köşe noktasının p altında resmi değilse $p(K)$ 'ya K 'nın regüler izdüşümü denir. Eğer $p(K)$ izdüşümü regüler ise K düğümü uzayda regüler pozisyonadadır denir.

Bir düğümün regüler izdüşümüne o düğümün regüler diyagramı denir.

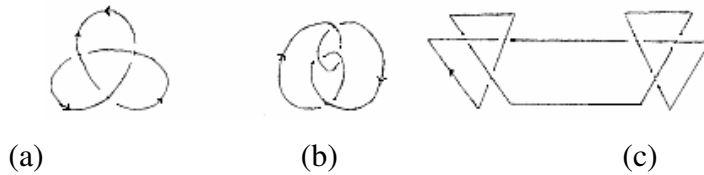
Tanım 2.1.9. (Ayna Resmi)

Regüler diyagram, düğümün uzayın yeteri kadar uzak ve uygun bir noktasından çizilen resmi gibidir algılanır. Buna düğümün ayna resmi denir. Bir K düğümünün ayna resmi K^* ile gösterilir.

Tanım 2.1.10.

Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. K 'nın her alt geçit noktasından uzaklığı ε 'dan küçük olan noktaların kümesi A ise $p(K - A)$ kümesine K düğümünün normal diyagramı denir.

Böylece K düğümünün normal diyagramı ayrık yay parçalarından veya doğru parçalarından oluşur. Şekil(a), yonca yaprağı düğümünün regüler diyagramını ve Şekil(b) ve Şekil(c), sırasıyla (3,2)-türk düğümü ve kare düğümünün normal diyagramlarını göstermektedir. Diyagramdaki ok işareti düğümün yönünü belirtir.



Şekil 2.2. Bazı düğüm diyagramları

Bir K düğümünün normal diyagramında, herhangi bir geçit noktasından bir eğri parçası geçmekte ve diğer iki eğri parçasının birer ucu bu geçit noktasının bir ε – civarında bulunmaktadır. Bu eğri parçalarından birincisine o geçit noktasına ait üst geçit ve diğer ikisine alt geçitler denir. Normal diyagramın kesikli yerlerinde alt geçitler algılanmak suretiyle düğümün kendisi gibi ele alınmaktadır.

Tanım 2.1.11.

K , S^3 içinde bir düğüm olmak üzere S^3 ün yönlendirilmesini tersine çeviren bir $h: S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi altında $h(K) = K$ oluyorsa K 'ya iki yanlı düğüm denir.

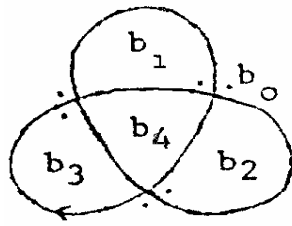
Normal diyagramı Şekil 2.2(b)'de verilen sekiz şekilli düğümün iki yanlı olduğu daha önce ispatlanmıştır.

Tanım 2.1.12. (Diyagramın Bölgeleri)

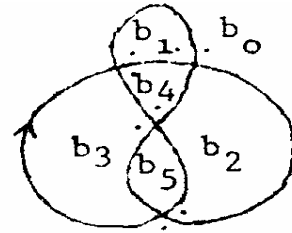
Bir düğümün regüler diyagramının düzlemde ayırdığı bölgelere diyagramın bölgeleri denir ve b_i ($i = 0,1,2,\dots$) ile gösterilir. Bu bölgelerden sınırsız olanı b_0 ile gösterilir. Bir düğümün diyagramında n tane geçit noktası varsa Euler teoremine göre bu diyagramın bölgeleri sayısı $(n + 2)$ 'dir.

Tanım 2.1.13.

Bir düğümün yönlendirilmiş regüler diyagramında herhangi bir geçit noktasında kesişen iki daldan hangisinin alt geçit olduğunu belirtmek için diyagram şu şekilde beneklenir. Düğümün yönünde hareket ederken diyagram eğrisi bir geçit noktasında alt geçit oluyorsa o geçit noktası etrafındaki dört bölgeden sol tarafta kalan iki bölgeye (geçit noktasının bir ε – civarı içine) birer nokta konur. Böylelikle elde edilen diyagrama benekli diyagram denir.



(a)



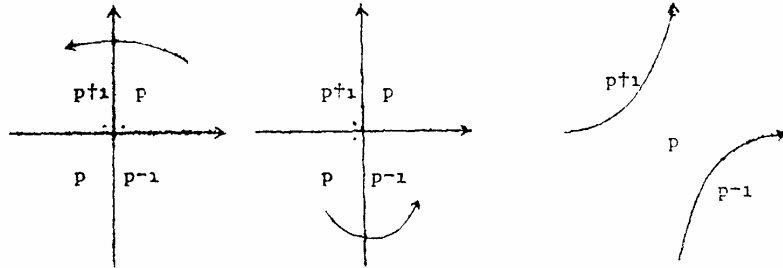
(b)

Şekil 2.3. Bazı diyagramlar

Tanım 2.1.14. (Diyagram Bölgelerinin İndislenmesi)

Diyagramın her bölgesine iliştilirilecek olan belirli bir tamsayıya bölgenin indisi denir.

Diyagramın bölgelerinden birinin indisi keyfi bir tamsayı olarak seçilir ve diğer bölgelerin indisleri buna göre hesaplanır. Burada dikkat edilecek husus, bir kavşak noktasına komşu olan dört bölgenin indislerinin sırasıyla $p+1$, p , $p-1$, p olmasıdır.



Şekil 2.4. Diyagram hareketleri

Tanım 2.1.15. (Diyagram Denklemleri)

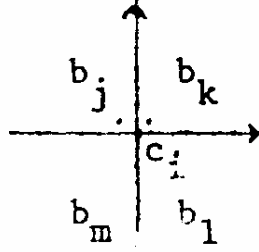
Düğüm problemi, aynı tip düğümleri gösteren farklı iki diyagramın tanınması problemine indirgenebilir. Bir düğümü belirtmek için o düğüme ait diyagramı tamamen bilmek gerekli değildir. Şimdi ifade edeceğimiz denklem sistemi ile diyagram anlatılacaktır.

Tanım 2.1.16.

n tane geçit noktası olan bir düğümün benekli diyagramında b_j ilk benekli bölge olmak üzere bir c_i geçit noktası etrafındaki bölgeler sırasıyla b_j , b_k , b_l , b_m ise c_i 'ye

$$c_i(b) = xb_j - xb_k + b_l - b_m = 0$$

şeklinde bir denklem iliştilir. n geçit noktasına karşılık tutulan bu şekildeki n denkleme düğümün diyagram diğer kavşak noktalarına ait $(n-1)$ denklem de benzer şekilde yazılır. Bu n denkleme diyagramın denklemleri denir.



Şekil 2.6. Diyagram durumu

Örnek 2.1.1.

Yukarıdan hareketle

$$xb_3 - xb_0 + b_1 - b_4 = 0$$

$$xb_1 - xb_0 + b_2 - b_4 = 0$$

$$xb_2 - xb_0 + b_3 - b_4 = 0$$

biçiminde sistemli sekiz şeklindeki 2. çoban düğümünün diyagram denklemleri yazılabilir.

Diyagram denklemleri, her geçit noktasındaki alt geçiti belirlediğinden diyagram denklemleri bilinen bir düğümün diyagramını çizmek mümkündür. Diyagram denklemleri, düğümün Alexander polinomunun hesaplanmasında kullanılmaktadır.

Tanım 2.1.17 (Düğüm Teorisinin Esas Problemleri: Lokal ve Global Problemler)

Bu problemleri lokal ve global olarak iki kısımda inceleyebiliriz. Ancak burada sadece lokal problemlere değineceğiz (Murasugi, 1996). Buna göre verilen bir K düğümü ile onun ayna resmi olan K^* düğümleri ne zaman denktirler? Eğer K ve K^* düğümleri denk iseler bu durumda K bir iki yanlı (amphicheiral) düğüm olarak

ifade edilir. Eğer iki düğüm denk iseler onların tümleyenleri homeomorfturlar. Yine eğer iki düğüm denk ise o zaman onların sabitleri de denktir.

2.2. Düğüm Polinomları Hakkında Genel Bilgiler

Alexander polinomu (Alexander, 1928) bir değişkenli bir polinomdur. Yönlendirilmiş bir K düğümünün Alexander polinomu $\Delta_K(x)$ veya $\Delta(x)$ ile gösterilir.

$\Delta(x)$ ile ilgili bazı özellikler şunlardır: (Crowell ve Fox, 1963)

(i) $\Delta(-1)$ daima tek bir sayıdır.

(ii) $\Delta(1) = \pm 1$

(iii) $\Delta(t) = \Delta(t^{-1})$ dir.

Altun ve Bozhüyük (1984), burulmalı düğümlerin Alexander polinomlarını

$$\Delta_{2n}(x) = nx^2 - (2n+1)x + n \quad (2.1)$$

$$\Delta_{2n+1}(x) = (n+1)x^2 - (2n+1)x + n + 1 \quad (2.2)$$

şeklinde hesapladılar. Burada (2.1) ve (2.2) normalize edilmiş denklemlerdir.

$\Delta(t)$, $\left(\sqrt{t} - \sqrt{t^{-1}}\right)$ e baęlı bir polinom olarak bilinir (Yasuhara ve Tsukamoto, 2007).

Conway polinomu, Conway'in (1970) çalışmasında ortaya konulmuştur. Bir K düğümünün Conway polinomu 1 değişkenli olup $\nabla(x)$ ile gösterilir. $\Delta(x)$ ile $\nabla(x)$ arasında

$$\Delta(x^2) = \nabla(x - x^{-1}) \quad (2.3)$$

bağıntısı vardır (Lickorish, 1997).

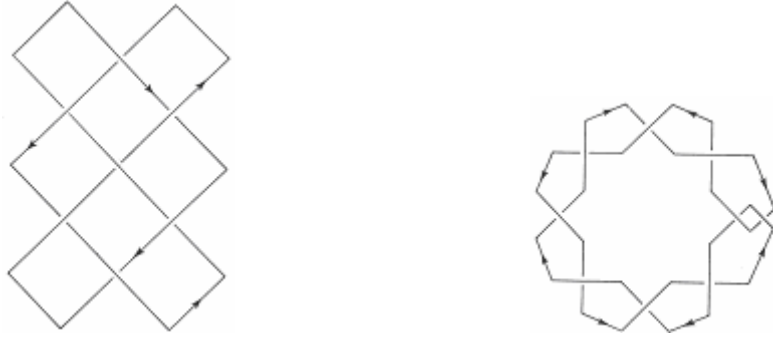
Küçük (1996), 7_4 düğümünün Conway polinomunu hesaplamıştır. Altun (2006) çalışmasında burulmalı düğümlerin Conway polinomları tayin edilmiştir.

Jones polinomu, Jones (1985) tarafından ortaya konulmuştur. Bir K düğümünün Jones polinomu $V_K(t)$ ile gösterilir. Altun (2006), burulmalı düğümlerin Jones polinomlarını şu şekilde hesaplamıştır: $n = 1, 2, \dots$ için

$$V_{T_{2n}}(t) = t^{-2n} - t^{1-2n} + t^{2-2n} + 2 \sum_{k=3-2n}^0 (-1)^k t^k - t + t^2 \quad (2.4)$$

$$V_{T_{2n+1}}(t) = -t^{-2n-4} + t^{-2n-3} - t^{-2n-2} + 2 \sum_{k=-2n-1}^{-3} (-1)^{k+1} t^k - t^{-2} + t^{-1} \quad (2.5)$$

$\Delta(t)$ polinomu, düğüm tipini sınıflandırıcı bir sabit değildir. Çünkü Alexander polinomu eşit olan farklı tipte düğümler vardır. Mesela, 7_4 ve 9_2 düğümleri farklı olduğu halde bunların Alexander polinomları eşittir. Dolayısıyla bu iki düğümün Conway polinomları da aynıdır (Crowell ve Fox, 1963).



Şekil 2.7. 7_4 ve 9_2 düğümleri

Yine biliyoruz ki, aşık düğümün Alexander polinomu 1 olmasına rağmen tersi doğru değildir, yani Alexander polinomu 1 olan ve aşık olmayan düğümler de vardır. Mesela Kinoshita-Terasaka düğümü, böyle bir düğüme örnektir.



Şekil 2.8. Kinoshita-Terasaka düğümü

K_1 ve K_2 düğümleri için

$$V_{K_1+K_2} = V_{K_1} V_{K_2} \quad (2.6)$$

yazılabilir (Lickorish, 1997). Ayrıca K' , K 'nin ayna resmi ise

$$V_{K'}(t) = V_K(t^{-1}) \quad (2.7)$$

olur (Jones, 1985).

Tanım 2.2.1.

Bir K düğümünün Laurent polinomu

$$W_K(t) = \frac{1 - V_K(t)}{(1 - t^3)(1 - t)} \quad (2.8)$$

şeklinde tarif edilir (Jones, 1985). ($V(1) = 1$ olup $1 - V(t)$, $1 - t$ ile bölünebilir).

Tanım 2.2.2.

Bir K düğümünün Arf sabiti

$$ArfK = W_K(1) \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir (Jones, 1985).

Homfly polinomu; Freyd ve ark. (1985) tarafından belirlenmiştir. Bir düğümün Homfly polinomu o düğümün Jones polinomunun genel hali olup $P(\ell, m)$ ile gösterilir.

$P(\ell, m)$ ile $V(t)$ arasında şu bağıntı vardır: (Lickorish, 1997)

$$V(t) = P(it^{-1}, i(t^{-1/2} - t^{1/2})) \quad (2.10)$$

Ayrıca $P(\ell, m)$ ile $\Delta(x)$ arasında şu bağıntı vardır: (Lickorish, 1997)

$$\Delta(x) = P(i, i(x^{1/2} - x^{-1/2})) \quad (2.11)$$

Bir düğümün BLM/Ho polinomu, Brandt ve ark. (1986) çalışmasında ele alınmıştır. Bu polinom bir değişkenli olup $Q(x)$ ile gösterilir.

Bir düğümün Kauffman polinomu, $F(a, z)$ ile gösterilir (Kauffman (1987b)), $F(a, z)$ biliniyorken $Q(x)$ ve $V(t)$,

$$Q(x) = F(1, x) \quad (2.12)$$

$$V(t) = F(-t^{3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4}) \quad (2.13)$$

formülleri ile hesaplanabilir (Lickorish, 1997). Ayrıca $P(\ell, m)$ ile $Q(x)$ arasında

$$\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = \lim_{\ell, m \rightarrow (1,0)} P(\ell, m) \quad (2.14)$$

ifadesi sağlanmaktadır (Kanenobu ve Sumi, 1993). Ayrıca 2 köprü düğümleri için

$$(2x^{-1}(V(t)V(t^{-1}))-1) = Q(x) \quad (2.15)$$

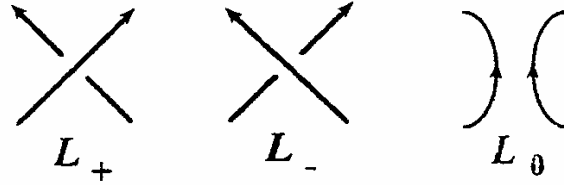
bağıntısı vardır (Kanenobu ve Sumi, 1993). Burada $V(t)V(t^{-1})$ 'in değeri, $x = -t - t^{-1}$ olmak üzere x cinsinden alınmaktadır.

2.3. Polinomlarda Skein Bağıntısı

Yönlendirilmiş L_+ , L_- , L_0 linkleri bir geçit noktasının komşuluğu dışında, (Bkz: Şekil 2.9) de gösterilen durumlar hariç aynı oluyorsa, Jones polinomu için Skein bağıntısı

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V_{L_0}(t) = 0 \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir (Lickorish, 1997).



Şekil 2.9. Skein bağıntısı

3. CONWAY POLİNOMLARININ TAYİNİ İLE İLGİLİ BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde bazı düğümler için Conway polinomu hesaplanacaktır.

Örnek 3.1.

Seçili bir düğüm alalım. Buna göre;

(i)



biçimindeki yonca yaprağı düğümünün Alexander polinomu normalize olarak

$$\Delta(x) = x^{-1} - 1 + x$$

şeklindedir. Bu düğümün Conway polinomu

$$\Delta(x^2) = \nabla(x - x^{-1})$$

formülü gereğince $\Delta(x)$ de x yerine x^2 alınmak suretiyle ve verilen eşitlikte bu kullanılarak

$$\Delta(x^2) = (x^2)^{-1} - 1 + (x^2) = x^{-2} - 1 + x^2 = (x - x^{-1})^2 + 1 = \nabla(x - x^{-1})$$

olur ve sonra $x - x^{-1} = u$ alınırsa $\nabla(u)$ Conway polinomu

$$\nabla(u) = u^2 + 1$$

elde edilir.

(ii) Sekiz şekilli düğümün



Alexander polinomu normalize olarak

$$\Delta(x) = -x^{-1} + 3 - x$$

şeklindedir. Bu düğümün Conway polinomu

$$\Delta(x^2) = \nabla(x - x^{-1})$$

formülü gereğince $\Delta(x)$ de x yerine x^2 alınmak suretiyle ve verilen eşitlikte bu kullanılarak

$$\Delta(x^2) = -(x^2)^{-1} + 3 - (x^2) = -x^{-2} + 3 - x^2$$

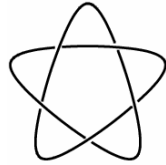
$$= 1 - (x^{-2} - 2 + x^2) = 1 - (x - x^{-1})^2 = \nabla(x - x^{-1})$$

olur ve $x - x^{-1} = u$ alınırsa $\nabla(u)$ Conway polinomu

$$\nabla(u) = 1 - u^2$$

elde edilir.

(iii)



biçimindeki Solomon seal düğümünün Alexander polinomu normalize olarak

$$\Delta(x) = x^{-2} - x^{-1} + 1 - x + x^2$$

şeklindedir. Bu düğümün $\nabla(x)$ Conway polinomu

$$\Delta(x^2) = \nabla(x - x^{-1})$$

formülü gereğince $\Delta(x)$ de x yerine x^2 alınmak suretiyle ve verilen eşitlikte bu kullanılarak

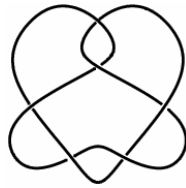
$$\begin{aligned}\Delta(x^2) &= (x^2)^{-2} - (x^2)^{-1} + 1 - (x^2) + (x^2)^2 = x^{-4} - x^{-2} + 1 - x^2 + x^4 \\ &= x^{-4} - (4-3)x^{-2} + (1+6-6) - (4-3)x^2 + x^4 \\ &= (x^4 - 4x^2 + 6 - 4x^{-2} + x^{-4}) + 3(x^2 - 2 + x^{-2}) + 1 \\ &= (x - x^{-1})^4 + 3(x - x^{-1})^2 + 1\end{aligned}$$

olur ve sonra $x - x^{-1} = u$ alınırsa $\nabla(u)$ Conway polinomu

$$\nabla(u) = u^4 + 3u^2 + 1$$

elde edilir.

(iv)



biçimindeki Stevedore düğümünün Alexander polinomu normalize olarak

$$\Delta(x) = -2x^{-1} + 5 - 2x$$

şeklindedir. Bu düğümün Conway polinomu

$$\Delta(x^2) = \nabla(x - x^{-1})$$

formülü gereğince $\Delta(x)$ de x yerine x^2 alınmak suretiyle ve verilen eşitlikte bu kullanılarak

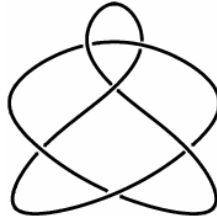
$$\begin{aligned} \Delta(x^2) &= -2(x^2)^{-1} + 5 - 2(x^2) = -2x^{-2} + 5 - 2x^2 \\ &= -2x^2 + (1+4) - 2x^{-2} = (1+4) - 2x^2 - 2x^{-2} \\ &= 1 - 2x^2 + 4 - 2x^{-2} = 1 - 2(x^2 - 2 + x^{-2}) = 1 - 2(x - x^{-1})^2 \end{aligned}$$

olur ve sonra $x - x^{-1} = u$ alınırsa $\nabla(u)$ Conway polinomu

$$\nabla(u) = 1 - 2u^2$$

elde edilir.

(v)



biçimindeki Miller Institute düğümünün Alexander polinomu normalize olarak

$$\Delta_K(x) = -x^{-2} + 3x^{-1} - 3 + 3x - x^2$$

şeklindedir. Bu düğümün Conway polinomu

$$\Delta_K(x^2) = \nabla_K(x - x^{-1})$$

formülü gereğince $\Delta(x)$ de x yerine x^2 alınmak suretiyle ve verilen eşitlikte bu kullanılarak

$$\begin{aligned}\Delta(x^2) &= -(x^2)^{-2} + 3(x^2)^{-1} - 3 + 3(x^2) - (x^2)^2 = -x^{-4} + 3x^{-2} - 3 + 3x^2 - x^4 \\ &= -x^{-4} + (4-1)x^{-2} - (6-2-1) + (4-1)x^2 - x^4 \\ &= (-x^{-4} + 4x^{-2} - 6 + 4x^{-2} - x^{-4}) + (-x^2 + 2 - x^{-2}) + 1 \\ &= -(x^{-4} - 4x^{-2} + 6 - 4x^{-2} + x^{-4}) - (x^2 - 2 + x^{-2}) + 1 \\ &= -(x - x^{-1})^4 - (x - x^{-1})^2 + 1\end{aligned}$$

elde edilir ve sonra $x - x^{-1} = u$ alınırsa $\nabla(u)$ Conway polinomu

$$\nabla(u) = -u^4 - u^2 + 1$$

şeklinde ortaya çıkar.

Örnek 3.2.

7_4 ve 9_2 düğümleri farklı olduğu halde bunların Alexander polinomları eşittir. Dolayısıyla bu iki düğümün Conway polinomları da aynıdır (Crowell ve Fox, 1963).

Düğümü normalize etmek için t 'ye bölmek gerekir. Buna göre

$$\Delta(t^2) = \nabla(t - t^{-1})$$

$$\Delta(t) = 4t^2 - 7t + 4$$

$$\Delta(t) = -(7t - 4(t^2 + 1))$$

$$\Delta(t) = 7 - 4(t + t^{-1})$$

$$\Delta(t) = 7 - 4(t + t^{-1} - 2 + 2)$$

$$= 7 - 8 - 4(t + t^{-1} - 2)$$

$$= -1 - 4(t + t^{-1} - 2)$$

olup 7_4 ve 9_2 düğümlerinin Conway polinomu

$$\Delta(t^2) = -1 - 4(t - t^{-1})^2$$

$$\Delta(t^2) = \nabla(t - t^{-1})$$

$$\nabla(t - t^{-1}) = -1 - 4(t - t^{-1})^2$$

$$\nabla_{T_7}(t) = 1 + 4t^2$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.3.

7_4 düğümünün Conway polinomu başka bir metotla da hesaplanabilir. $\nabla(v) = P(i, iv)$ formunu kullanalım (Kauffman, 1987b). Burada P , ilgili düğümün Homfly polinomudur.

9_2 düğümü T_7 düğümüne denktir. P_{T_7} Homfly polinomu belli iken ∇_{T_7} bulmak istiyoruz. Altun (2007) gereğince

$$P(\ell, m) = -\ell^2 + (\ell^8 + \ell^{10}) + m^2(\ell^2 - \ell^4 + \ell^6 - \ell^8)$$

olup

$$\nabla(v) = P(i, iv)$$

ve

$$P(\ell, m) = -\ell^2 + (\ell^8 + \ell^{10}) + m^2(\ell^2 - \ell^4 + \ell^6 - \ell^8)$$

yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{7_4}(v) &= P(i, iv) = -i^2 + i^8 + i^{10} + i^2 v^2 (i^2 - i^4 + i^6 - i^8) \\ &= 1 + 1 - 1 - v^2(-1 - 1 - 1 - 1) \\ &= 1 + 4v^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç, Örnek 3.2 de bulunan polinom ile aynıdır.

Örnek 3.4.

T_{2n} düğümünün Conway polinomu,

$$\Delta_{T_{2n}}(t) = nt^2 - (2n+1)t + n$$

formülü yardımıyla hesaplanırsa

$$\nabla_{T_{2n}}(t) = 1 - nt^2$$

bulunur (Altun, 2006).

Örnek 3.5.

T_{2n+1} düğümünün Conway polinomu,

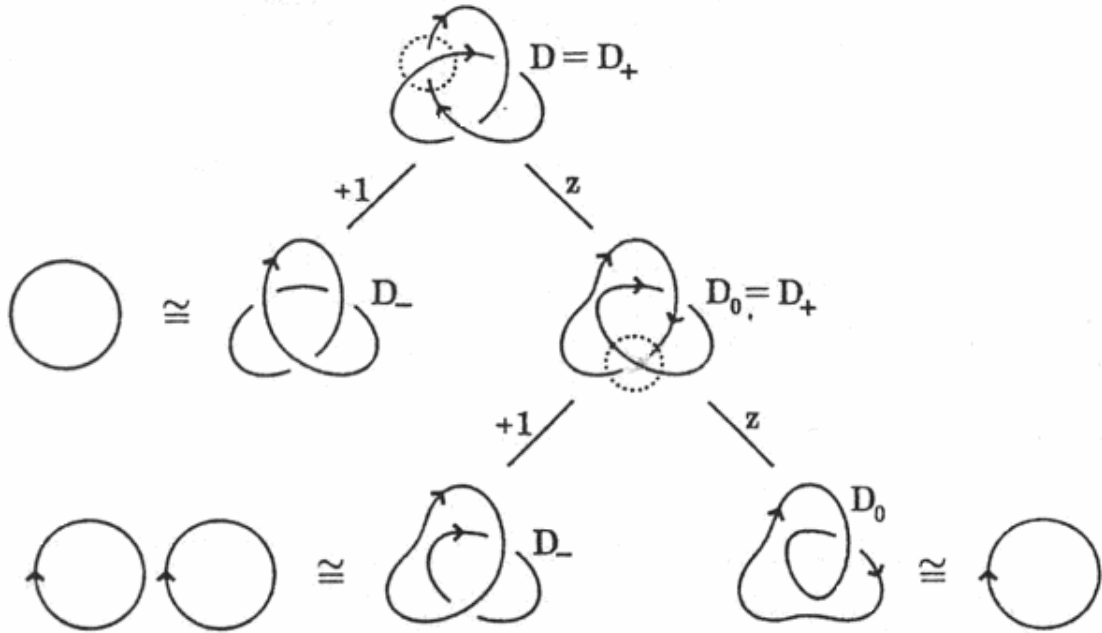
$$\Delta_{T_{2n+1}}(t) = (n+1)t^2 - (2n+1)t + n+1$$

formülü yardımıyla hesaplanırsa

$$\nabla_{T_{2n+1}}(t) = 1 + (n+1)t^2$$

bulunur (Altun, 2006).

Örnek 3.6. (∇_{3_1} polinomunun skein bağıntısı ile hesabı)



Şekil 3.1. 3_1 düğümü için skein bağıntısı

$$\nabla_{3_1}(t) = 1 \cdot \nabla_o(t) + \nabla_{oo}(t) + t^2 \nabla_o(t)$$

dir. Burada

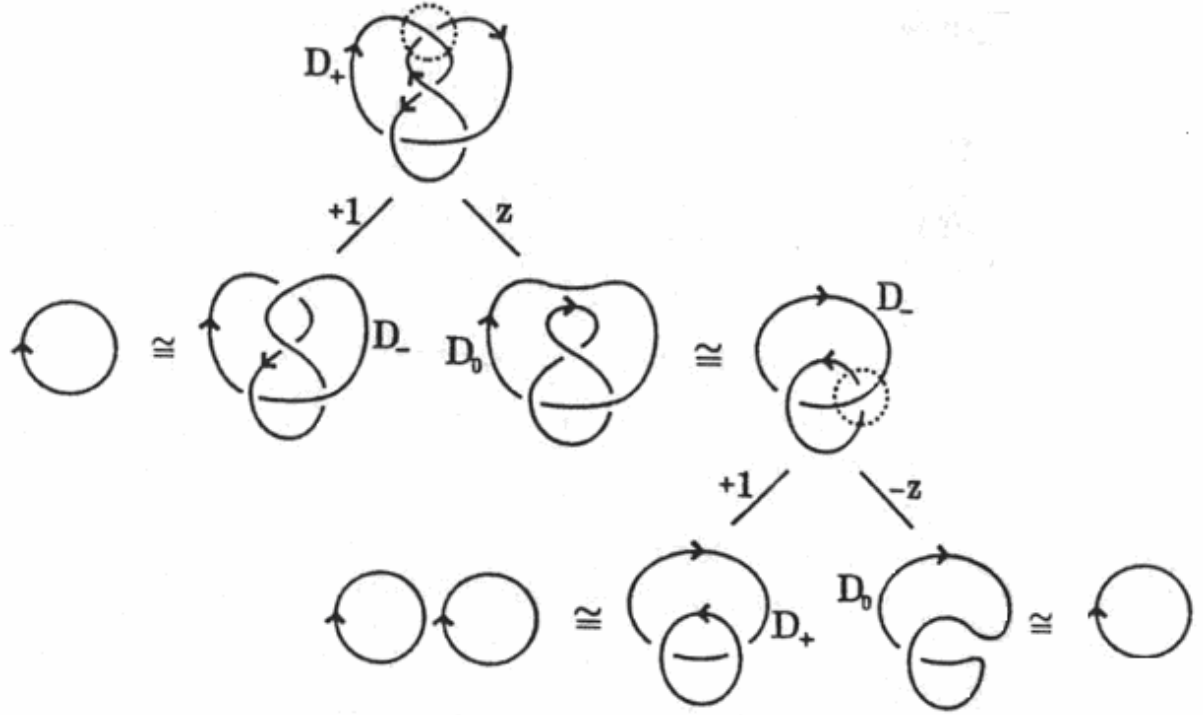
$$\nabla_o(t) = 1, \nabla_{oo}(t) = 0$$

olup

$$\nabla_{3_1}(t) = 1 + t^2$$

elde edilir (Murasugi, 1996).

Örnek 3.7. (∇_{4_1} polinomunun skein bağıntısı ile hesabı)



Şekil 3.2. 4_1 düğümü için skein bağıntısı

$$\nabla_{4_1}(t) = 1 \cdot \nabla_o(t) + \nabla_{oo}(t) - t^2 \nabla_o(t)$$

dir. Burada

$$\nabla_o(t) = 1, \quad \nabla_{oo}(t) = 0$$

olup

$$\nabla_{3_1}(t) = 1 - t^2$$

elde edilir (Murasugi, 1996).

KAYNAKLAR

- Alexander, J. W., 1928. Topological inv. of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30**: 275-306.
- Altun, Y., Bozhüyük, M. E., 1981. Çoban düğümleri ve bazı devirli örtü uzayları. *Doğa Bilim Dergisi.Temel Bil.*, **5**: 143-145.
- Altun, Y., Bozhüyük, M. E., 1984. Some properties of shepherd's knots (in Turkish). *Doga Seri A₁*, **8**: 1-5.
- Altun, Y., 2006. The Jones polynomial of twist knots. *Int. Jour. of Math. Game Theory and Algebra*, **15**(1): 21-26.
- Altun, Y., 2007. On the Homfly polynomial, *International Mathematical Forum*, **2**(56): 2753-2757.
- Birman, J. S., 1974. *Braids, Links and Mapping Class Groups*. Princeton University Press. USA.
- Brandt, R. D., Lickorish, W. B. R., Millett, K. C., 1986. A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Invent. Math.*, **84**(3): 563-573.
- Conway, J. H., 1970. *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*. Pergamon, Oxford, London. 329-358.
- Crowell, R. H., Fox, R. H., 1963. *Introduction to Knot Theory*. Ginn. Co. Boston, Mass. 182.
- Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W. B. R., Millett, K., Ocneanu, A., 1985. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **12**(2): 239-246.
- Jones, V. F. R., 1985. A polinomial invariant for knots via Von Neumann algebras. *Bull. AMS.*, **12**: 103-111.
- Jones, V. F. R., 1987. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. Math.*, **126**: 335-388.
- Kanenobu, T.; Sumi, T., 1993. Polynomial invariants of 2 bridge knots through 22 crossings. *Math. Comp.*, **60**(202): 771-778.
- Kauffman, L. H., 1987a. State models and the Jones polynomial. *Topology*, **26**(3): 395-407.

- Kauffman, L. H., 1987b. *On Knots*, Princeton University Press, USA, 480.
- Küçük, A., 1996-1997. The state polynomial of knot $K_{(3,3)}$. *Istanbul Univ. Fen Fak. Mat. Derg.* **55-56**: 275-281.
- Lickorish, W. B. R., 1997. *An Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag. Newyork.
- Morton, H. R., 1992. *Invariants of links and 3-manifolds from skein theory and from quantum groups: M. E. Bozhüyük(ed.) Topics in knot theory* . Kluwer Acad. Pub., Printed in Netherlands, 107—155.
- Murasugi, K., 1996. *Knot Theory and its Applications*. Birkhäuser, Boston.
- Şimşek, H., 2001. **Pozitif Conway Polinomuna Sahip Pozitif Düğümler**. Atatürk Üniv. Fen-Bil. Enst., Dok. Tez., Erzurum.
- Yasuhara, A., Tsukamoto, T., 2007. A factorization of the Conway polynomial and covering linkage invariants, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **16**: 631-640.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1992 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 1997 yılında bölümü başarıyla bitirdikten sonra aynı yıl Van Bahçesaray Atatürk İlköğretim Okulunda görevine başladı. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen Bitlis ili Mutki ilçesi Dağarcık İlköğretim Okulunda görevine devam etmektedir.