

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STEENROD CEBİRİNDE ADEM ÇARPIMININ
BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OSMAN RAŞİT IŞIK

ARALIK - 2007
MUĞLA

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STEENROD CEBİRİNDE ADEM ÇARPIMININ
BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OSMAN RAŞİT IŞIK

MUĞLA 2007

Onay Sayfası

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yrd.Doç.Dr.BEKİR TANAY danışmanlığında OSMAN RAŞİT IŞIK tarafından hazırlanan STEENROD CEBİRİNDE ADEM ÇARPIMININ BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE adlı çalışma 28/12/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Zekeriya GÜNEY

İMZA :

Danışman : Yrd.Doç.Dr.Bekir TANAY

İMZA :

Üye : Yrd.Doç.Dr.Fatih KOYUNCU

İMZA :

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasını sağlayan gerek ders aşamasında, gerekse tez aşamasında bilgisini, desteğini, ilgisini hiç esirgemeyen, anlayışı ve çalışma azmiyle hepimize örnek olan Yrd. Doç. Dr. Bekir TANAY'a, yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Murat ATMACA'ya, Tarkan ÖNER'e, Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, hayatımın her döneminde benden desteklerini, sevgilerini ve ilgilerini hiç esirgemeyen aileme, M.Burç KANDEMİR'e, Nejmettin AVCI'ya ve Ali ÖZAD'a teşekkür ederim.

Osman Raşit IŞIK

MUĞLA 2007

İÇİNDEKİLER

SayfaNo:

ÖNSÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
SEMBOLLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
2.1. Homoloji Teori	3
2.2. Singüler Homoloji	3
2.3. Singüler Kohomoloji	8
3. MATERYAL ve YÖNTEM	10
3.1. Cup Çarpım	10
3.2. Özel Kohomoloji Operasyonları(Transformasyonları)	11
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	13
4.1. Steenrod Cebiri	13
4.2. Adem Bağlılıkları(Relations)	20
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	21
5.1. Adem Bağlılıklarında Katsayılar	21
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	38

STEENROD CEBİRİNDE ADEM ÇARPIMININ BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

(Yüksek lisans Tezi)

OSMAN RAŞİT IŞIK

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2007

ÖZET

$Mod - 2$ Steenrod Cebirinde, hem Milnor Bazına göre hem de Admissible baza göre aynı şekilde ifade edilebilen bazı elemanlar için Adem Bağlıtlarında(çarpımında) var olan kombinatorik hesaplamalar, J.Silverman (Silverman,J.H.1996) tarafından farklı bir metodla verilmiştir. Bu tezde, Silverman (Silverman,J.H.1996) tarafından geliştirilen bu ve benzeri kombinatorik hesaplamaların p tek asal sayı olmak üzere $Mod - p$ Steenrod Cebirinde de geçerli olup olmadığı araştırılmış ve $Mod - 2$ Steenrod Cebirinde verilen metod, $Mod - p$ Steenrod Cebir yapısında var olan farklılıklarla uyumlu olacak şekilde genelleştirilmiştir. Ayrıca özel tipte bazı elemanların çarpımında bulunan terimler bu kombinatorik hesaplamalarla elde edilmiştir.

Türkçe Anahtar Kelimeler : Steenrod Cebiri, Kombinatorik, Adem Bağlıtları (Çarpımı)

Sayfa Adedi : 38

Tez Yöneticisi :Yrd.Doç.Dr.Bekir TANAY

ON SOME PROPERTIES OF ADEM PRODUCT IN THE STEENROD
ALGEBRA

(M. Sc. Thesis)

OSMAN RAŞİT IŞIK

MUĞLA UNIVERSITY

INSTITUTE of SCIENCE and TECHNOLOGY

2007

ABSTRACT

Some combinatorial calculations, in $mod - 2$ Steenrod Algebra, represented in Adem Relations for common elements in both Milnor Bases and Admissible Bases are given by J.Silverman (Silverman,J.H.1996) in a different method.In this thesis, it is searched throughly that wheather this method is valid in $mod p$ Steenrod Algebra or not. Then, this method succesfully generalised to $mod - p$ Steenrod Algebra with respect to structural differences from $mod - 2$ Steenrod Algebra. Besides, this generalised method is used to determine summands in the Adem Product for certain special elements.

Key Words : Steenrod Algebra, Combinatorics, Adem Relations

Page Number : 38

Adviser :Yrd.Doç.Dr.Bekir TANAY

Sembol	Tanımı	Sayfa No:
$H_n(X)$	n -inci homoloji grubu	3
σ_p	Standart p -simpleks	4
$f_{\#}$	Singüler p -simpleks	5
$S_n(X)$	X uzayının n -boyutlu singüler zincir grubu	5
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif Tam Sayılar Kümesi	5
∂_i	i . yüz operatörü	5
∂	Sınır homomorfizması	5
$S_n(X)$	n -devirlerin grubu	6
$B_n(X)$	n -sınırların grubu	6
$H_n(X)$	X uzayının singüler n .homoloji grubu	6
$H_n(X; G)$	G katsayılı n -inci homoloji grubu	7
$Hom(A, G)$	A 'dan G 'ye homomorfizmaların kümesi	8
$Z^n(C)$	n -kodevirlerin grubu	9
$B^n(C)$	n -kosınırların grubu	9
$H^n(C)$	C kozincir kompleksinin n .kohomoloji grubu	9
$H^*(X)$	n -inci kohomoloji grubu	9
$H^n(X; G)$	G katsayılı singüler kozincir kompleksinin n -inci kohomoloji grubu	9
$c^p \cup c^q$	c^p ile c^q kozincirlerinin cup çarpımı	10
$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	11
β	Bockstein ko-sınır operasyonu	11
Sq^i	$H^q(X) \longrightarrow H^{q+i}(X)$	11
P^i	$P^i : H^q(X, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{q+2i(p-1)}(X, \mathbb{Z}_p)$	12
$M \otimes N$	M ile N graded modüllerinin tensör çarpımı	13
$f \otimes g$	f ile g fonksiyonlarının tensör çarpımı	14
P^T	$P^{t_1} P^{t_2} \dots P^{t_m}$ monomiali	15
$P(R)$	$R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ olmak üzere $P(r_1, r_2, \dots, r_m)$ şeklinde tanımlı Milnor elemanı	15

$\deg(P(R))$	$P(R)$ Milnor elemanın derecesi	17
$ex(P(R))$	$P(R)$ Milnor elemanın excessi	18
$l(P(R))$	$P(R)$ Milnor elemanın uzunluğu	18
$M_0(f)$	$(m_1, m_2, \dots, m_{q_{\mu(f)}})$	19
$M_s(f)$	$((p^{s+1} - (p-1)).m_1, (p^{s+1} - (p-1)).m_2, \dots, (p^{s+1} - (p-1)).m_{q_{\mu(f)}})$	19
$a \succeq b$	a sayısı b sayısını domine eder	22
$F^{[i]}$	F pozitif tamsayısının p -adik açılımının	
.	$f_i \cdot p^i + f_{i-1} \cdot p^{i-1} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0$ kısmı	22
$J(a, b)$	Sabit bir a, b ve $a < p \cdot b$ için $\binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj}$ katsayısını	
.	sıfırdan farklı olan j 'lerin kümesi	22
$K(F)$	$\left\{ k \in p\mathbb{N} : \binom{k}{p} \not\equiv 0 \pmod{p} \right\}$	22
$K^i(F)$	$\left\{ \left\{ k \in K(F) : (p-1) \cdot \frac{k}{p} + F \geq i \pmod{p}, i \neq 0 \right\}, 1 \leq i \leq p-1 \right\}$. .	22
a'	$a - i, a \equiv i \pmod{p}$	23
$S_{g_l}^{p_l}$	$1 \leq l \leq n_F$ ve $p_{l-1} + 1 \leq g_l \leq p_l$ için $\sum_{i=g_l}^{p_l} p^i \in K(F)$ elemanı	25
F_k^i	$\frac{F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p}}{p^i}$	25
$\Lambda(f)$	$\log_p(f + (p-1))$	34

1. GİRİŞ

Cebirsel topoloji, "iki uzayın homeomorf olmadığını göstermek" gibi bazı topolojik sorulara yanıt aranırken oluşmuş, topolojik kavramları cebir ile birleştiren bir çalışma alanıdır. Herhangi iki topolojik uzay verildiğinde bunların homeomorf olduğunu göstermek, homeomorf olmayan uzayları araştırmaktan daha zordur. Çünkü bu iki uzay arasında birebir-örten, sürekli ve tersi sürekli bir fonksiyon bulmamız gerekir. Bu da genelde pek kolay değildir. Mesela, $\mathbb{R}$ 'nin $\mathbb{R}^2$ 'ye homeomorf olmadığını yol bağlantılılığı kullanarak şöyle bulabiliriz: $\mathbb{R}$ 'den tek nokta çıkarırsak yol bağlantılılık bozulurken $\mathbb{R}^2$ 'den tek nokta çıkarırsak yol bağlantılılık bozulmaz, dolayısıyla bu iki uzay homeomorf olamaz. Fakat $\mathbb{R}^2$ 'nin $\mathbb{R}^3$ 'e homeomorf olmadığı bilinen topolojik özelliklerle (bağlantılılık, yol bağlantılılık, kompaktlık, metriklenebilirlik, T_0, T_1, T_2 vb.) gösterilemez. Bu sorunun cevabı içinde homotopi gruplarının tanımlanması gerekir. Yani, homotopi fonktoru bu iki uzaya uygulanarak elde edilen cebirsel yapılar izomorf olmadığı için bu iki uzay homeomorf olamazlar.

Cebirsel topolojide, topoloji ile cebir arasında bu birleştirme fonktörler aracılığı ile yapılır. Homoloji, kohomoloji, temel grup, homotopi fonktörleri gibi çeşitli fonktörlerle, verilen herhangi iki topolojik uzaydan oluşturulan cebirsel yapılar incelenerek, bu uzaylar hakkında bilgi elde etmeye çalışılır. Bu cebirsel yapıların ortaya çıkışı genelde bir sorunun çözümü için ihtiyaç duyulması üzerine oluşturulmuştur.

Steenrod cebiri de Norman Steenrod'un $\mathbb{Z}_2$ katsayılı kohomoloji teori üzerindeki kararlı kohomoloji operasyonlarının hareketini inşa ederken özel bir kohomoloji operasyonuna ihtiyaç duymasıyla başlamıştır. Bu cebir yapısı Adem (1952), Cartan (1955) ve Sere (1956) tarafından açıklanmaya çalışılmış ve Adem Bağntılarına göre bölüm tensör cebiri olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Milnor (1958) de, Steenrod cebirinin ko-komütatif Hopf cebiri yapısına sahip olduğunu göstermiştir; sonuçta bu cebirin duali de komütatif cebir olacaktır ve bu cebire cebir yapısı veren çarpım Milnor çarpımı olarak adlandırılır. Steenrod cebirinde Admissible baz, Milnor bazı, Arnon bazı gibi birden çok baz vardır. J.Silverman Mod-2 Steenrod Cebirinde Milnor çarpımı ve Adem çarpımlarının ifadelerinde var olan ikiterimli (binomial) ve çok terimli (multinomial) kombinasyonları (Silverman, J.H. 1996) geliştirdiği bazı kombinatorik hesaplamalarla yapmıştır. Bu hesaplamalarda, Lucas'ın (Lucas, E. 1878), Kraines'in (Kraines, D. 1971) sonuçlarını da kullanmıştır.

İkinci ve üçüncü bölümde cebirsel topolojide önemli yeri olan singüler homoloji, singüler kohomoloji, cup çarpım konularında temel tanım ve teoremler verilmiş olup bütünlüğün bozulmaması açısından teoremler ispatsız olarak verilmiştir. Dördüncü bölümde Steenrod cebir yapısı, bu cebirdeki bazlar ve özel kohomoloji trasformasyonları hakkında temel tanımlar verilmiştir. Son bölümde de Adem bağıntıları verilmiş ve Silverman (Silverman,J.H.1996) tarafından $mod - 2$ Steenrod cebiri için verilen yöntem $mod - p$ Steenrod cebirine genelleştirilerek hem Admissible baza göre hem de Milnor bazına göre aynı şekilde ifade edilebilen herhangi iki Steenrod elemanın çarpımında bulunan terimlerin elde edilmesi başarılmış ve bazı özel tipte elemanlar için genel formüller oluşturulmuştur.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Homoloji Teori

Tanım 2..1 X bir topolojik uzay olsun. Bir homoloji teori

$$H_*(X) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(X)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ için X uzayını $H_n(X)$ değişmeli gruplarının bir ailesine ayırır. Burada X ve X' aynı homotopi tipine sahip uzaylar ise her n için

$$H_n(X) \simeq H_n(X')$$

(grup izomorfizması) şartı sağlanır.

$H_*(X)$ direkt toplamına X 'in bir homolojisi ve her n için $H_n(X)$ direkt toplam terimine de X 'in n -inci homoloji grubu denir.

Tanımdan görülür ki; herhangi n için n -ci homoloji grupları $H_n(X)$ ve $H_n(X')$ izomorf değilse X ve X' aynı homotopi tipine sahip değildir. Böylece homoloji grupları farklı olan uzaylar homeomorf olamazlar.

Homoloji teori tek değildir. Bir X topolojik uzayının homoloji gruplarını, bu homoloji teorilerinden Singüler Homoloji Teori ile açıklayalım.

2.2. Singüler Homoloji

Tanım 2..2 $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası

$$\{(1-t)x + yt | 0 \leq t \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2..3 $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. $\forall x, y \in C$ için x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası C 'de kalıyorsa C 'ye konveks küme denir.

Tanım 2..4 $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. A kümesini kapsayan konveks kümelerin kesişim kümesine A 'nın konveks hull'u denir.

Tanım 2..5 $\mathbb{R}^n$ 'nin $p + 1$ noktası $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ olsun. Eğer

$$\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$$

vektörleri lineer bağımsız ise $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ kümesinin konveks hull'una bir p -simpleks denir.

S köşeleri $x_0, x_1, \dots, x_p$ olan sıralanmış p -simpleks olsun. σ_p kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$\sigma_p = \{(t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0, i \in \{0, \dots, p\}\}$$

$$\begin{aligned} f : \sigma_p &\longrightarrow S \\ (t_0, t_1, \dots, t_p) &\longmapsto \sum t_i x_i \end{aligned}$$

fonksiyonu bir homeomorfizmadır. Böylece her sıralanmış p -simpleksi σ_p 'nin homeomorfik görüntüsüdür.

Tanım 2..6 σ_p , köşeleri $x'_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, x'_p = (0, \dots, 0, 1)$ olan bir sıralanmış p -simplekstir. σ_p 'ye standart p -simpleks denir.

Tanım 2..7 X topolojik uzayı verilsin.

$$\phi : \sigma_p \longrightarrow X$$

sürekli fonksiyonuna singüler p -simpleks denir.

Tanım 2..8 ϕ bir singüler p -simpleks ve $i \in \{0, 1, \dots, p\}$ ise $\partial_i \phi$ singüler $(p - 1)$ -simpleksi

$$\begin{aligned} \partial_i \phi : \sigma_{p-1} &\longrightarrow X \\ (t_0, \dots, t_p) &\longmapsto \phi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\partial_i \phi$ 'ye ϕ 'nini i . yüzü denir.

$f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve $\phi \in X$ 'de singüler p -simpleks olsun. Bu takdirde Y 'de bir $f_{\#}(\phi)$ singüler p -simpleksi

$$f_{\#}(\phi) = f \circ \phi$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $g : Y \longrightarrow W$, $1_X : X \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonları için

$$(g \circ f)_{\#}(\phi) = (g_{\#} \circ f_{\#})(\phi)$$

ve

$$1_{\#}(\phi) = \phi$$

eşitlikleri vardır.

Tanım 2..9 X topolojik uzayı verilsin. X uzayındaki tüm singüler n -simplekslerin üretmiş olduğu serbest değişmeli grubu $S_n(X)$ ile gösterelim. $S_n(X)$ 'in bir elemanına n -zincir denir ve bir n -zincir

$$\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi$$

formundadır öyleki $n_{\phi} \in \mathbb{Z}^+$ ve sonlu sayıda ϕ hariç sıfırdır.

∂_i , i . yüz operatörü singüler n -simplekslerden singüler $(n-1)$ -simplekslere bir fonksiyon olduğu için tek bir

$$\partial_i : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

$$\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi \longmapsto \sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \partial_i \phi$$

homomorfizması vardır. Bu homomorfizmalar yardımı ile sınır operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \cdots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$$

Özellik 2..1 $\partial \circ \partial = 0$

Tanım 2..10 $c \in S_n(X)$ n -zinciri için $\partial(c) = 0$ ise c 'ye n -devir denir. $d \in S_n(X)$ n -zinciri için $\partial(e) = d$ olacak şekilde bir $e \in S_{n+1}(X)$ $(n+1)$ -zinciri varsa d 'ye n -sınır denir.

∂ homomorfizma olduğundan n -devirlerden oluşan $\text{Ker } \partial$ kümesi $S_n(X)$ 'in alt grubudur ve $Z_n(X)$ ile gösterilir. Benzer şekilde n -sınırlardan oluşan $\text{Im } \partial$ kümesi $S_n(X)$ 'in alt grubudur ve $B_n(X)$ ile gösterilir. Özellik 2.1 'den $B_n(X) \subset Z_n(X)$ elde edilir.

Tanım 2..11

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$$

$H_n(X)$ X uzayının n . homoloji grubu denir.

Tanım 2..12 $\wp, (X, A)$ ikilisi ve n tamsayısını $\wp_n(X, A)$ değişmeli grubu ile ve her

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

ikililerin dönüşümünü

$$f_* : \wp_n(X, A) \longrightarrow \wp_n(Y, B)$$

homomorfizması ile eşleştiren bir fonksiyon ve her n için

$$\partial : \wp_n(X, A) \longrightarrow \wp_{n-1}(X, A)$$

homomorfizması var olsun. Eğer $\wp$ aşağıdaki aksiyomları sağlar ise $\wp$ bir homoloji teori üretir denir.

1. $id : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ birim dönüşüm ise

$$id_* \wp_n(X, A) \longrightarrow \wp_n(X, A)$$

birim homomorfizmadır.

2. $f : (X, A) \longrightarrow (X', A'), g : (X', A') \longrightarrow (X'', A'')$ ikililerin dönüşümleri ise

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

dır.

3. $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ ikililerin dönüşümü ise

$$\partial \circ f_* = (f|_A)_* \circ \partial$$

4. $i : (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$ ve $j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ içermeye dönüşümleri ise

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \wp_n(A) \xrightarrow{i_*} \wp_n(X) \xrightarrow{j_*} \wp_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \wp_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

dizisi tamdır.

5. $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ ikili dönüşümleri homotopik ise

$$f_* = g_*$$

6. (X, A) ikilisinde $U \subset A$ ve $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ ise

$$i : (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$$

içermeye dönüşümü için

$$i_* : \wp_n(X - U, A - U) \longrightarrow \wp_n(X, A)$$

izomorfizmadır.

7. $n \neq 0$ için $\wp_n(pt) = 0$ dır ve $\wp_n(pt)$ 'ye katsayı grubu denir.

Tanım 2..13 $S(X)$ bir singüler zincir kompleksi ve G bir değişmeli grup olsun.

$S(X) \otimes G$ de bir singüler zincir kompleksidir ve

$$H_n(S(X); G) = \frac{\ker(\partial_n \otimes 1)}{\text{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1)}$$

grubuna G katsayılı n -inci homoloji grubu denir. Bu grup $H_n(X; G)$ ile gösterilir.

2.3. Singüler Kohomoloji

Tanım 2..14 A ve G değişmeli gruplar olmak üzere

$$\text{Hom}(A, G) = \{f \mid f : A \longrightarrow G, f \text{ homomorfizma}\}$$

şeklinde tanımlanır. $\text{Hom}(A, G)$ kümesi fonksiyonların toplama işlemine göre değişmeli gruptur.

Tanım 2..15 G değişmeli grubu ve $\{C, \partial\}$ zincir kompleksi verilsin. Her n için C^n değişmeli grupları

$$C^n = \text{Hom}(C_n, G)$$

şeklinde tanımlanır. $\partial : C_{n+1} \longrightarrow C_n$ sınır operatörü için

$$\partial^\# : C^n \longrightarrow C^{n+1}$$

homomorfizması vardır ve

$$\partial^\# \circ \partial^\# = (\partial \circ \partial)^\# = 0$$

olur.

Tanım 2..16 $\{C^n, \delta\}$, $\delta : C^n \longrightarrow C^{n+1}$ olacak şekilde değişmeli grupların ve homomorfizmaların bir topluluğu olsun. Eğer

$$\delta \circ \delta = 0$$

ise bu diziye kozincir kompleks, δ homomorfizmasında kosınır operatörü denir.

$c^n \in C^n$ elemanına da n -kozincir denir.

$\{C^n, \delta\}$ kozincir kompleksi için $D_n = C^{-n}$ ve $\partial = \delta : D_n \longrightarrow D_{n-1}$ tanımlamalarını yaparsak $\{D_n, \partial\}$ bir zincir kompleks olur. Böylece bu iki yapının birbirinin duali olduğu görülmüş olur.

Tanım 2..17 $C = \{C^n, \delta\}$ kozincir kompleks olsun. n -kodevirlerin grubu

$$Z^n(C) = \text{Ker} \delta^n$$

n -kosınurların grubu

$$B^n(C) = \text{Im} \delta^{n-1}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$$

ifadesine C kozincir kompleksinin n .kohomoloji grubu denir.

Tanım 2..18 G değişmeli grup ve $S(X) = \{S_n(X), \partial_n\}$ singüler zincir kompleksi olsun. Bu durumda,

$$C^n(X; G) = C^n(S(X); G) = \text{Hom}(S_n(X), G)$$

kümesine $S(X)$ in G katsayılı n -inci kozinciri denir.

Tanım 2..19 $\{C^n(X; G), \delta^n\}$ G katsayılı singüler kozincir kompleksinin n -inci kohomoloji grubu

$$H^n(X; G) = H^n(S(X); G) = \frac{\text{ker} \delta^{n+1}}{\text{im} \delta^n}$$

olarak tanımlanır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Cup Çarpım

Tanım 3..1 X topolojik uzayı ve R değişmeli halkası verilsin. $\phi : \sigma_{p+q} \longrightarrow X$ olmak üzere

$$S^p(X; R) \times S^q(X; R) \xrightarrow{\cup} S^{p+q}(X; R)$$

$$\langle c^p \cup c^q, \phi \rangle = \langle c^p, \phi \circ l(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \rangle \cdot \langle c^q, \phi \circ l(\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_{p+q}) \rangle$$

dönüşümü tanımlansın. Buradaki $c^p \cup c^q$ kozincirine c^p, c^q kozincirlerinin cup(bardak) çarpımı denir. $\phi \circ l(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ dönüşümü ϕ singüler $(p+q)$ -simpleksinin ön p yüzüne, $\phi \circ l(\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_{p+q})$ dönüşümü ise ϕ singüler $(p+q)$ -simpleksinin arka q yüzüne kısıtlanışlarıdır.

Teorem 3..1 Kozincirlerin cup çarpımı bilineer ve birleşmelidir. z^0 tüm 0-simplekslerdeki değeri 1 olan kozincir olsun. z^0 birim elemandır. Ayrıca

$$\delta(c^p \cup c^q) = (\delta c^p) \cup c^q + (-1)^p c^p \cup (\delta c^q)$$

kosunur formülü geçerlidir.

Teorem 3..2 Kozincirlerin cup çarpımı bilineer ve birleşmeli

$$H^p(X; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X; R)$$

operatörünü üretir. $[z^0]$ kohomoloji sınıfı birim elemandır.

Tanım 3..2 $H^*(X; R) = \bigoplus H^i(X; R)$ olmak üzere cup çarpımı bu grubu birimli halkaya dönüştürür ve bu halkaya X uzayının R katsayılı kohomoloji halkası denir.

3.2. Özel Kohomoloji Operasyonları (Transformasyonları)

Tanım 3..3 $f : X \longrightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, G) & \xrightarrow{\Phi_X} & H^q(X, G') \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^p(Y, G) & \xrightarrow{\Phi_Y} & H^q(Y, G') \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan Φ_X fonksiyonlarının ailesine X uzayı için $(G, p; G', q)$ tipinde bir kohomoloji operatörü denir ve $o(G, p; G', q)$ ile gösterilir.

$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ve p tek asal sayı olsun. $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$ tam dizisine karşılık gelen

$$\beta : H^q(X; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{q+1}(X; \mathbb{Z}_p)$$

Bockstein ko-sınır operasyonu, $\beta^2 = 0$ ve $\beta(x.y) = \beta(x)y + (-1)^q x\beta(y)$, $\dim(x) = q$ özelliklerini sağlayan bir doğal homomorfizma olarak bilinmektedir.

Tanım 3..4 Steenrod kare operasyonları olarak bilinen Sq^i operasyonları, her biri her q için $(\mathbb{Z}_2, q; \mathbb{Z}_2, q + i)$ tipinde kohomoloji operasyonlarıdır.

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{q+i}(X, \mathbb{Z}_2) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^q(Y, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{q+i}(Y, \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

$$Sq^i : H^q(X) \longrightarrow H^{q+i}(X)$$

Steenrod kare operasyonları aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

1. $Sq^0 : H^q(X) \longrightarrow H^q(X)$, $Sq^0 = 1$
2. $\deg u = q$ ise $Sq^q(u) = u^2$
3. $\deg u < q$ ise $Sq^q(u) = 0$
4. Cartan formülü: $Sq^i(u.v) = \sum_{i=j+k} Sq^j(u).Sq^k(v)$

5. $Sq^1 : H^q(X) \longrightarrow H^{q+1}(X)$ homomorfizması $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$ tam dizisine karşılık gelen Bockstein ko-sınır homomorfizmasıdır.

$G = \mathbb{Z}_p$ alırsak, P^i Steenrod kuvvet operasyonu her q için $(\mathbb{Z}_p, q; \mathbb{Z}_p, q + 2i(p-1))$ tipinde kohomolji operasyonudur. $P^i : H^q(X, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{q+2i(p-1)}(X, \mathbb{Z}_p)$ Steenrod kuvvet operasyonları aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

1. $P^0 : H^q(X) \longrightarrow H^q(X)$, $P^0 = 1$
2. $\deg u = q$ ise $P^q(u) = u^p$
3. $\deg u < 2q$ ise $P^q(u) = 0$
4. Cartan formülü: $P^i(u.v) = \sum_{j+l=i} P^j(u).P^l(v)$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Steenrod Cebiri

R değişmeli halka ve $i \geq 0$ olmak üzere, $M = (M_i)$ R -modüllerinin bir dizisi ise M 'ye graded(dereceli) modül ve M_i nin elemanlarına da i boyutlu veya i -inci dereceden denir. M ve N graded modüller ise,

$$f_i : M_i \longrightarrow N_i$$

homomorfizm dizisine graded modül homomorfizmi denir ve

$$f : M \longrightarrow N$$

şeklinde gösterilir. M ve N graded modüller ise,

$$(M \otimes N)_r = \sum_i M_i \otimes N_{r-i}$$

olmak üzere $M \otimes N = ((M \otimes N)_r)$ dizisi de bir graded modüldür. Eğer

$$\phi : A \otimes A \longrightarrow A$$

homomorfizma ve 1 birim elemanı varsa A graded R -modülüne graded cebir denir. Eğer

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\phi \otimes 1} & A \otimes A \\ \downarrow \phi \otimes 1 & & \downarrow \phi \\ A \otimes A & \xrightarrow[\phi]{} & A \end{array}$$

diyagramı komütatif ise bu graded cebire birleşmeli denir. B bir graded cebir ve $\text{boy}(a) = p$, $\text{boy}(b) = q$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T : A \otimes B &\longrightarrow B \otimes A \\ T(a \otimes b) &= (-1)^{pq} b \otimes a \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{T} & A \otimes A \\
\phi \searrow & & \swarrow \phi \\
& A &
\end{array}$$

diagramı komütatif ise bu graded cebire komütatif denir. Bir

$$f : A \longrightarrow B$$

graded cebir homomorfizması

1. $f(1) = 1$
2. $f(\phi_A) = \phi_B(f \otimes f)$

özelliklerini sağlayan bir modül homomorfizmasıdır.

$A = (A_i)$ graded vektör uzayı olsun öyleki $i < 0$ için $A_i = 0$ olsun. Bu durumda $A_0 = \langle 1 \rangle$ ise (A, ϕ) graded cebirine bağlantılı cebir denir.

M bir bağlantılı graded cebir, $\gamma : M \longrightarrow M \otimes M$ bir homomorfizma olsun. Eğer γ birimli bir cebir homomorfizması ve $\dim(a) > 0, \dim(b_i) > 0, \dim(c_i) > 0$ için

$$\gamma(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum b_i \otimes c_i$$

formunda ise (M, ϕ, γ) ya bağlantılı Hopf cebiri denir. (M, ϕ, γ) bir Hopf cebiri ise, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\chi : M \longrightarrow M$ homomorfizması vardır:

1. $\chi(1) = 1$
2. $\dim(a) > 0$ için $\gamma(a) = \sum a'_i \otimes a''_i$ ise $\sum a'_i \otimes \chi(a''_i) = 0$

M bir graded modül ve A da bir graded cebir olsun. Eğer A cebirine ait birim elemanı koruyan ve aşağıdaki diagramı komütatif yapan bir

$$\psi : A \otimes M \longrightarrow M$$

dönüşümü var ise M ye bir A -modülü denir.

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{1 \otimes \psi} & A \otimes M \\
\downarrow \phi \otimes 1 & & \downarrow \psi \\
A \otimes M & \xrightarrow{\psi} & M
\end{array}$$

Eğer B graded cebir ise $A \otimes B$ deki graded cebir yapısı

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\phi \otimes \phi} A \otimes B$$

çarpımı yardımıyla tanımlanır. Eğer N bir B -modül ise

$$A \otimes B \otimes M \otimes N \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A \otimes M \otimes B \otimes N \xrightarrow{\psi \otimes \psi} M \otimes N$$

dönüşümüyle $M \otimes N$ de bir $A \otimes B$ -modül olur. R halkası $i > 0$ için $R_i = 0$ olan bir graded modül olarak düşünülebilir.

$A \bmod -p$ Steenrod cebiri, dercesi 1 olan β elemanı ve derecesi $2i(p-1)$ olan P^i elemanlarıyla üretilen komütatif graded cebir olarak tanımlanır. A Steenrod cebirine ait bir monomial; $\varepsilon_i = 0$ veya 1 ve $r_i \geq 0$ olmak üzere

$$\beta^{\varepsilon_0} P^{r_1} \beta^{\varepsilon_1} P^{r_2} \beta^{\varepsilon_2} \dots P^{r_k} \beta^{\varepsilon_k}$$

şeklinde ifade edilebilir. $I = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, r_2, \varepsilon_2, \dots, r_k, \varepsilon_k)$ olmak üzere bu monomiali P^I şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4..1 $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ elemanları negatif olmayan bir tamsayı dizisi olsun. Eğer $1 \leq i \leq m$ için $t_i \geq pt_{i+1}$ eşitsizliği varsa bu diziye admissible dizi ve $P^{t_1} P^{t_2} \dots P^{t_m}$ monomialine de admissible monomial denir.

Bütün admissible monomiallerin oluşturduğu küme A steenrod cebiri için bir baz oluşturur ve β_{Adm} ile gösterilir. $P^{t_1} P^{t_2} \dots P^{t_m}$ monomiali P^T ile de gösterilir.

Tanım 4..2 Milnor, A Steenrod cebirinin A^* dualinin, dereceleri $2(p^i - 1)$ olan ξ_i üreteçlere sahip $F_p[\xi_1, \xi_2, \dots]$ polinom cebri ile dereceleri $2p^i - 1$ olan τ_i üreteçlere sahip $E[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots]$ exterior cebirin tensör çarpımı olduğunu göstermiştir. A^* daki bu monomial bazın A daki dual bazı Milnor bazı diye adlandırılır ve β_{Mil} ile gösterilir. A^* daki $\tau_0^{\varepsilon_0}, \xi_1^{r_1}, \tau_1^{\varepsilon_1}, \xi_2^{r_2}, \dots$ elemanının duali $P(r_1, r_2, \dots)$ ile gösterilir.

$R = (r_1, r_2, \dots)$ negatif olmayan tamsayılardan oluşan sonlu bir dizi ise $P(r_1, r_2, \dots)$ yerine $P(R)$ kullanırız.

Notasyonlar kıyaslandığında $P(n) = P^n$ olduğu bilinmelidir.

Milnor bazında cebir yapısı Milnor çarpımı denilen çarpım ile verilir. $P(r_1, r_2, \dots)$, $P(s_1, s_2, \dots)$ Milnor elemanları olmak üzere, Milnor çarpımı

$$P(r_1, r_2, \dots).P(s_1, s_2, \dots) = \sum_X \beta(X)P(t_1, t_2, \dots)$$

şeklinde verilir ki buradaki toplam aşağıdaki şartları sağlayan bütün $X = (x_{ij})$ matrisleri üzerinden alınır;

1. $\sum_i x_{ij} = s_j$
2. $\sum_j x_{ij} p^j = r_i$
3. $\beta(X) = \prod_h (x_{h,0}, x_{h-1,1}, \dots, x_{0,h}) \in Z_p$,

burada

$$(x_{h,0}, x_{h-1,1}, \dots, x_{0,h}) \equiv \frac{(x_{h,0} + x_{h-1,1} + x_{h-2,2} + \dots + x_{0,h})!}{x_{h,0}! \cdot x_{h-1,1}! \cdot x_{h-2,2}! \cdot \dots \cdot x_{0,h}!} \mod p \text{ dir.}$$

4. $\sum_{i+j=k} x_{ij} = t_k$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & t_1 & & t_2 & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & \\
 X = & \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \dots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{matrix} \rightarrow r_1 \\ \rightarrow r_2 \end{matrix} & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & s_1 & & s_2 & & &
 \end{array}$$

Hesaplamalarda $x_{0,0} = 0$ kabul edilir. 1 ve 2 şartlarını sağlayan $X = (x_{ij})$ matrisine $(R - S)$ -toleranslı matris denir. Ayrıca sadece 4. maddeyi sağlayan X matrisine $P(t_1, t_2, \dots)$ elemanını üretir denir.

Örnek 4..1 $p = 5$ için $P(1, 5).P(6)$ çarpımını bulalım. Yukarıdaki koşulları sağlayan sadece

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri vardır.

X_1 matrisi için $\beta(X_1)$ 'i hesaplayalım.

$$h = 1 \text{ için } \frac{(x_{10} + x_{01})!}{x_{10}!.x_{01}!} = \frac{(1 + 6)!}{1!.6!} = 7 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$h = 2 \text{ için } \frac{(x_{20} + x_{11} + x_{02})!}{x_{20}!.x_{11}!.x_{02}!} = \frac{(5 + 0 + 0)!}{5!.0!.0!} = 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$h = 3 \text{ için } \frac{(x_{30} + x_{21} + x_{12} + x_{03})!}{x_{30}!.x_{21}!.x_{12}!.x_{03}!} = \frac{(0 + 0 + 0 + 0)!}{0!.0!.0!.0!} = 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\beta(X_1) = \prod_h (x_{h,0}, x_{h-1,1}, \dots, x_{0,h}) = 2.1.1 = 2 \pmod{5}.$$

X_2 matrisi için $\beta(X_2)$ 'yi hesaplayalım.

$$h = 1 \text{ için } \frac{(x_{10} + x_{01})!}{x_{10}!.x_{01}!} = \frac{(1 + 5)!}{1!.5!} = 5 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$h = 2 \text{ için } \frac{(x_{20} + x_{11} + x_{02})!}{x_{20}!.x_{11}!.x_{02}!} = \frac{(0 + 0 + 0)!}{0!.0!.0!} = 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$h = 3 \text{ için } \frac{(x_{30} + x_{21} + x_{12} + x_{03})!}{x_{30}!.x_{21}!.x_{12}!.x_{03}!} = \frac{(0 + 1 + 0 + 0)!}{0!.1!.0!.0!} = 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\beta(X_2) = \prod_h (x_{h,0}, x_{h-1,1}, \dots, x_{0,h}) = 1.1.1 = 1 \pmod{5}$$

$$P(1, 5).P(6) = 2.P(7, 5) + 1.P(6, 0, 1) \text{ olarak bulunur.}$$

Tanım 4..3 $P(R) = P(r_1, r_2, \dots, r_m)$ formundaki Milnor baz elemanının derecesi

$$|R| = \sum_{k=1}^m (p^k - 1).r_k$$

olmak üzere 2. $|R|$ şeklinde tanımlanır ve

$$\deg(P(R)) = \deg(P(r_1, r_2, \dots, r_m)) = |P(R)|$$

ifadelerinden birisiyle gösterilir.

Tanım 4.4 $P(R) = P(r_1, r_2, \dots, r_m)$ formundaki Milnor baz elemanının *excess*'i

$$ex(R) = \sum_{k=1}^m r_k$$

olmak üzere $2.ex(R)$ olarak tanımlanır ve

$$ex(P(R)) = ex(P(r_1, r_2, \dots, r_m))$$

ile gösterilir.

Tanım 4.5 $P(R) = P(r_1, r_2, \dots, r_m)$ formundaki Milnor baz elemanının uzunluğu R dizisinin eleman sayısı yani m olarak tanımlanır ve $l(P(R))$ ile gösterilir.

Örnek 4.2 $p = 3$, $T = (2, 5, 1)$ için,

$$\begin{aligned} |T| &= 2.(3^1 - 1) + 5.(3^2 - 1) + 1.(3^3 - 1) = 70 \\ deg(P(T)) &= 2. |T| = 2.70 = 140 \\ ex(T) &= 2 + 5 + 1 = 8 \\ l(P(T)) &= 3 \end{aligned}$$

f bir pozitif tamsayı olsun. $\mu(f)$ olarak da f 'nin $p^i - (p - 1)$ formundaki yazılımlarında bulunan terim sayısı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots &\leq q_{p^2-p} < q_{p^2-p+1} \leq q_{p^2-p+2} \leq \dots \\ &\leq q_{p^2} < q_{p^2+1} \leq q_{p^2+2} \leq \dots \\ &\leq q_{p^2+p} < \dots \\ &< q_{p^2+(\mu(f)-3).p+1} \leq q_{p^2+(\mu(f)-3).p+2} \leq \dots \\ &\leq q_{p^2+(\mu(f)-2).p} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$f = \sum_{i=1}^{p^2+(\mu(f)-2).p} (p^{q_i} - (p - 1))$$

formunda tek türlü yazılımı vardır. m_i i 'ye eşit olan q_j lerin sayısı olmak üzere

$$M_0(f) = (m_1, m_2, \dots, m_{q_{\mu(f)}})$$

dizisini tanımlayalım. Bu takdirde

$$ex(P(M_0(f))) = m_1 + m_2 + \dots + m_{q_{\mu(f)}} = \mu(f)$$

dir.

Önerme 4.1 $s \geq 0$ ve bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$M_s(f) = ([p^{s+1} - (p-1)].m_1, [p^{s+1} - (p-1)].m_2, \dots, [p^{s+1} - (p-1)].m_{q_{\mu(f)}})$$

dizisinin dercesi

$$deg(P(M_s(f))) = 2.(p^{s+1} - (p-1)).(f + (p-2).\mu(f))$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} deg(P(M_s(f))) &= 2.[(p^{s+1} - (p-1)).m_1.(p^1 - 1) + (p^{s+1} - (p-1)).m_2.(p^2 - 1) + \\ &\quad \dots + (p^{s+1} - (p-1)).m_{q_{\mu(f)}}.(p^{q_{\mu(f)}} - 1)] \\ &= 2.(p^{s+1} - (p-1))[m_1.(p^1 - 1) + m_2.(p^2 - 1) + \\ &\quad \dots + m_{q_{\mu(f)}}.(p^{q_{\mu(f)}} - 1)] \\ &= 2.(p^{s+1} - (p-1))[m_1.(p^1 - (p-1)) + m_2.(p^2 - (p-1)) + \\ &\quad \dots + m_{q_{\mu(f)}}.(p^{q_{\mu(f)}} - (p-1)) + (p-2).m_1 + (p-2).m_2 + \\ &\quad \dots + (p-2).m_{q_{\mu(f)}}] \\ &= 2.(p^{s+1} - (p-1)).(f + (p-2).\mu(f)) \quad \square \end{aligned}$$

Önerme 4.2 $s \geq 0$ ve bir tamsayı olsun.

$$M_s(f) = ([p^{s+1} - (p-1)].m_1, [p^{s+1} - (p-1)].m_2, \dots, [p^{s+1} - (p-1)].m_{q_{\mu(f)}})$$

dizisinin excess' i

$$ex(P(M_s(f))) = (p^{s+1} - (p-1)).\mu(f)$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
 ex(P(M_s(f))) &= (p^{s+1} - (p-1)).m_1 + (p^{s+1} - (p-1)).m_2 + \dots \\
 &\quad + (p^{s+1} - (p-1)).m_{\mu(f)} \\
 &= (p^{s+1} - (p-1)).[m_1 + m_2 + \dots + m_{\mu(f)}] \\
 &= (p^{s+1} - (p-1)).\mu(f) \cdot \square
 \end{aligned}$$

4.2. Adem Bağlılıları(Relations)

Steenrod kare operasyonlarının veya kuvvet operasyonlarının bileşkesi alındığı zaman, bileşke Adem Relations olarak bilinen aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$a < 2b \text{ ise } Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j,$$

$$a < pb \text{ ise } P^a P^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} P^{a+b-j} P^j,$$

$$a \leq pb \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
 P^a \beta P^b &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)}{a-pj} \beta P^{a+b-j} P^j + \\
 &\quad \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a-1}{p} \rfloor} (-1)^{a+j-1} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj-1} P^{a+b-j} \beta P^j
 \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\binom{m}{n} = 0 \Leftrightarrow m < n \text{ veya } m \text{ veya } n \text{ negatifse.}$$

Örnek 4.3 $p = 3$ için

$$\begin{aligned}
 P^9.P^5 &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{9}{3} \rfloor} (-1)^{9+j} \binom{(3-1)(5-j)-1}{9-3j} P^{9+5-j} P^j \\
 &= \sum_{j=0}^3 (-1)^{9+j} \binom{9-2j}{9-3j} P^{9+5-j} P^j \\
 &= -\binom{9}{9}.P^{14}.P^0 + \binom{7}{6}.P^{13}.P^1 - \binom{5}{3}.P^{12}.P^2 + \binom{3}{0}.P^{11}.P^3 \\
 &= -P^{14} + P^{13}.P^1 - P^{12}.P^2 + P^{11}.P^3
 \end{aligned}$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

5.1. Adem Bağıntılarında Katsayılar

Tanım 5..1 n pozitif bir tamsayı ve p tek asal sayı olsun. $0 \leq \alpha_i(n) < p$ olmak üzere n sayısının

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(n) \cdot p^i$$

şeklinde tek türlü belirli bir açılımı vardır ve buna n -tamsayısının p -adik açılımı denir.

Lemma 5..1 $a, b \in \mathbb{N}$, $b < a$, p tek asal sayı ve $0 \leq \alpha_i, \beta_i < p$ olmak üzere $a = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot p^i$, $b = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \cdot p^i$ de bu sayıların p -adik açılımları olsun. Bu durumda

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i} \mod p$$

denkliği geçerlidir.

İspat: Lemmanın ispatında kullanacağımız, her p asal sayısı için geçerli olan

$$(1+x)^{p^i} \equiv (1+x^{p^i}) \mod p$$

denkliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} (1+x)^{P^i} &= 1 + p^i \cdot x + \frac{p^i \cdot (p^i - 1)}{2} x^2 + \frac{p^i \cdot (p^i - 1) \cdot (p^i - 2)}{2} x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{p^i \cdot (p^i - 1)}{2} x^{p^i-2} + p^i \cdot x^{p^i-1} + x^{p^i} \\ &\equiv (1+x^{p^i}) \mod p \end{aligned}$$

dir. $\mod p$ ye göre

$$(1+x)^a = (1+x)^{\sum_i \alpha_i p^i} = \prod_i (1+x)^{\alpha_i p^i} \equiv \prod_i (1+x^{p^i})^{\alpha_i} \mod p$$

dir. Bu denklikteki $(1+x)^a$ nın açılımında x^b nin katsayısı $\binom{a}{b}$ ve $(1+x^{p^i})^{\alpha_i}$ nin açılımındaki x^b nin katsayısı da $\prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ olduğundan $\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i} \mod p$ elde edilir. $\square$

Lemma 5..1 de $\forall i$ için $\alpha_i \geq \beta_i$ ise a sayısı b sayısını domine eder denir ve $a \succeq b$ ile gösterilir. Bu notasyon dikkate alındığında;

$$\binom{n}{k} \neq 0 \mod p \Leftrightarrow n \succeq k \quad (5.1)$$

olduğu bilinmektedir. p tek asal sayı olmak üzere keyfi bir $F > 0$ tamsayısının

$$F = f_n \cdot p^n + f_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0$$

p -adik açılımının $f_i \cdot p^i + f_{i-1} \cdot p^{i-1} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0$ kısmını $F^{[i]}$ notasyonu ile gösterelim. Bu notasyon ve Lemma 5..1 gözönüne alındığında ve $k > 0$ tamsayısının p -adic açılımı $k = \kappa_t \cdot p^t + \kappa_{t-1} \cdot p^{t-1} + \dots + \kappa_1 \cdot p^1 + \kappa_0$ olmak üzere

Lemma 5..2 $(p-1) \cdot \frac{k}{p} + F \succeq k$ gerek ve yeter koşul

$$(p-1)\kappa_{i+1} + f_i + \left[\frac{F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p}}{p^i} \right] \geq \kappa_i \mod p$$

olmasıdır. $\square$

Bu tezde, yukarıda verilen Adem çarpımının sağ tarafındaki ikiterimli (binomial) kombinasyon katsayısının $\mod p$ de sıfırdan farklı olduğu durumları tespit eden farklı bir metod geliştireceğiz.

Sabit bir a, b ve $a < p \cdot b$ için $J(a, b)$ kümesi

$$\binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj}$$

katsayısını sıfırdan farklı yapan j ' lerin kümesi olsun. $J(a, b)$ kümesinin oluşturulması a ve b sayıları yerine sadece

$$F = (p-1) \cdot b + (p-1) \cdot \left[\frac{a}{p} \right] - 1$$

sayısına bağlı olarak bulunabilir. Verilen bir F pozitif tamsayısı için

$$\begin{aligned} K(F) &= \left\{ k \in p\mathbb{N} : \binom{(p-1) \cdot \frac{k}{p} + F}{k} \neq 0 \mod p \right\} \\ K^i(F) &= \left\{ \left\{ k \in K(F) : (p-1) \cdot \frac{k}{p} + F \geq i \mod p, i \neq 0 \right\}, 1 \leq i \leq p-1 \right\} \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Bununla beraber Admissible olmayan bir $P^a.P^b = P(a).P(b)$ Steenrod elemanı verildiğinde,

$$\begin{aligned} a' &= a - i, \quad a \equiv i \pmod{p} \\ K_a(F) &= \begin{cases} \{k \in K(F) : k \leq a'\} & a \equiv 0 \pmod{p} \\ \{k \in K^i(F) : k \leq a'\} & a \equiv i \pmod{p} \end{cases} \end{aligned}$$

tanımlamalarını yapalım.

Teorem 5.1 *Yukarıdaki notasyonlar ile,*

$$j \in J(a, b) \text{ olması için gerek ve yeter koşul } k = a' - p.j \in K_a(F)$$

olmasıdır.

İspat: Bu ispatı iki durumda inceleyelim.

Durum 1: $a \equiv 0 \pmod{p}$ ise $a = a'$ olur. $J(a, b)$ ve $K_a(F)$ kümelerinin tanımından, $j \in J(a, b)$ ise

$$0 \neq \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} = \binom{(p-1)(b-j)-1}{a'-pj} = \binom{(p-1)\frac{k}{p}+F}{k}$$

olur.

Tersine $k = a' - p.j \in K_a(F)$ ise

$$0 \neq \binom{(p-1)\frac{k}{p}+F}{k} = \binom{(p-1)(b-j)-1}{a'-pj} = \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj}$$

olur.

Durum 2: $a \equiv i \pmod{p}$ olsun. Bu durumda $a' = a - i$ ve $a = a' + i$ olur. $j \in J(a, b)$ ise

$$0 \neq \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} = \binom{(p-1)\frac{k}{p}+F}{a'+i-p.j}$$

olur ve sağdaki kombinasyonun $\pmod{p}$ de sıfırdan farklı olması için gerek ve yeter koşul

$$\binom{(p-1)\frac{k}{p}+F}{a'-p.j} \neq 0 \pmod{p} \text{ ve } \binom{(p-1)\frac{k}{p}+F}{i} \neq 0 \pmod{p}$$

olmasıdır. Gerçekten $a' - p.j$ p 'nin bir katı olup $1 \leq i < p$ sayısı $(p-1) \cdot \frac{k}{p} + F \succeq a' - p.j$ olmasını değiştirmez. Yani $j \geq 1$ için p^j 'inci adımdaki dominantlık i 'den bağımsız ve p^0 'ıncı adımdaki dominantlık sadece i 'ye bağlıdır. Soldaki kombinasyonun sıfırdan farklı olduğu, ilk durumdan açıktır. $K^i(F)$ 'nin tanımından $(p-1) \cdot \frac{k}{p} + F \geq i$ olduğu için sağdaki kombinasyon da sıfırdan farklıdır.

Bu durumda $1 \leq \alpha_k < p$ olmak üzere

$$P(a).P(b) = \sum_{k \in K_a(F)} \alpha_k . P(a + b - \frac{a' - k}{p}) . P(\frac{a' - k}{p}) \quad (5.2)$$

olur.

Burada özel olarak $a' = a$ ve $a > p.F$ ise $K_a(F) = \{k \in K(F) : k \leq a\}$ olur ve $K(F)$ 'nin tanımından $\binom{(p-1) \cdot \frac{k}{p} + F}{k} \not\equiv 0 \pmod{p}$ yapan k 'lar $p.F$ 'den dolayısıyla a 'dan küçüktür. Buradan $K_a(F) = K(F)$ dir.

Örnek 5..1 $p = 3$ için $P(5).P(7)$ çarpımındaki elemanları belirleyelim ve $5 \equiv 2 \pmod{p}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} F &= (p-1).b + (p-1) \cdot \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor - 1 \\ &= (3-1).7 + (3-1) \cdot \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor - 1 \\ &= 11 \\ K(F) &= \left\{ k \in p\mathbb{N} : \binom{(p-1) \cdot \frac{k}{p} + F}{k} \not\equiv 0 \pmod{p} \right\} \\ K(11) &= \left\{ k \in 3\mathbb{N} : \binom{2 \cdot \frac{k}{3} + 11}{k} \not\equiv 0 \pmod{3} \right\} \\ &= \{0, 3, 6, 9, 18, 21, 27, 30, 33\} \\ K^2(F) &= \left\{ k \in K(F) : (p-1) \cdot \frac{k}{p} + F \geq 2 \pmod{p} \right\} \\ K^2(11) &= \left\{ k \in K(11) : 2 \cdot \frac{k}{3} + 11 \geq 2 \pmod{p} \right\} \\ &= \{0, 9, 18, 27\} \\ K_a(F) &= \{k \in K^i(F) : k \leq a'\} \\ K_5(11) &= \{k \in K^1(11) : k \leq 3\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Bu durumda

$$P(5 + 7 - \frac{3-0}{3}).P(\frac{3-0}{3}) = \alpha.P(11).P(1)$$

terimi $P(5).P(7)$ 'nin tek toplam terimidir.

Bundan sonraki ifadeleri daha kısa ifade edebilmek amacıyla $1 \leq l \leq n_F$ ve $p_{l-1} + 1 \leq g_l \leq p_l$ için $\sum_{i=g_l}^{p_l} p^i \in K(F)$ elemanını $S_{g_l}^{p_l}$ ile gösterelim.

Önerme 5..1 $F = f_n.p^n + f_{n-1}.p^{n-1} + \dots + f_1.p^1 + f_0$ olsun.

$1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{n_F} = n + 1$ indis kümesini $f_{p_l} = 0$ iken $f_{p_{l-1}} \neq 0$ ve $f_{p_l} = p - 1$ iken $f_{p_{l-1}} = 0$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda $1 \leq l \leq n_F$ ve $p_{l-1} + 1 \leq g_l \leq p_l$ için

$$k = \sum_i \kappa_i.p^i = \sum_{i=g_l}^{p_l} p^i \in K(F)$$

dir.

İspat: $k = p^{p_l} + p^{p_l-1} + \dots + p^{g_l}$ alalım ve Lemma 5..2 'yi kullanarak $k \in K(F)$ olduğunu yani $(p-1)\frac{k}{p} + F \succeq_i k$ olduğunu gösterelim.

$$F_k^i := \left[\frac{F^{[i-1]} + (p-1).\frac{k^{[i]}}{p}}{p^i} \right]$$

olsun.

Durum 1: $f_{p_l} \neq 0$ ve $f_{p_{l-1}} = f_{p_{l-2}} = \dots = f_{p_{l-1}} = 0$ için,

Durum 1.1: $i = p_l$ ise $\kappa_{i+1} = 0, \kappa_i = 1$ olup

$$\begin{aligned} F_k^i &= \left[\frac{f_{p_{l-1}}.p^{p_l-1} + f_{p_{l-2}}.p^{p_l-2} + \dots + f_1.p^1 + f_0 + (p-1).p^{p_l-1} + (p-1).p^{p_l-2} + \dots + (p-1).p^{g_l-1}}{p^{p_l}} \right] \\ &= \left[\frac{(f_{p_{l-1}}+p-1).p^{p_l-1} + (f_{p_{l-2}}+p-1).p^{p_l-2} + \dots + (f_{g_{l-1}}+p-1).p^{g_l-1} + \dots + f_1.p^1 + f_0}{p^{p_l}} \right] \end{aligned}$$

dır. Bu durumda $F_k^i = 0$ olur ve dolayısıyla $0 + f_{p_l} + 0 \geq 1$ elde edilir.

Durum 1.2: $g_l \leq i < p_l$ için $\kappa_{i+1} = 1, \kappa_i = 1$ ve $F_k^i = 0$ olur ve dolayısıyla $1 + 0 + 0 \geq 1$ sağlanır.

Durum 2: $f_{p_l} \neq p - 1$ iken $f_{p_{l-1}} = f_{p_{l-2}} = \dots = f_{p_{l-1}+1} = p - 1$ olsun.

Durum 2.1: $i = p_l$ ise $\kappa_{i+1} = 0, \kappa_i = 1, f_{p_l} \neq p - 1$

$$\begin{aligned} F_k^i &= \left[\frac{f_{p_l-1} \cdot p^{p_l-1} + f_{p_l-2} \cdot p^{p_l-2} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0 + (p-1) \cdot p^{p_l-1} + (p-1) \cdot p^{p_l-2} + \dots + (p-1) \cdot p^{g_l-1}}{p^{p_l}} \right] \\ &= \left[\frac{(f_{p_l-1} + p-1) \cdot p^{p_l-1} + (f_{p_l-2} + p-1) \cdot p^{p_l-2} + \dots + (f_{g_l-1} + p-1) \cdot p^{g_l-1} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0}{p^{p_l}} \right] \end{aligned}$$

olup $F_k^i = 1$ 'dir ve $0 + f_{p_l} + 1 \geq 1$ bulunur.

Durum 2.2: $g_l \leq i < p_l$ için $\kappa_{i+1} = 1, \kappa_i = 1, f_i = p - 1$ ve $F_k^i = 1$ olur ve dolayısıyla $1 + (p - 1) + 1 \geq 1$ sağlanır.

Örnek 5..2 $p = 3$ ve $F = 268 = 1.3^5 + 0.3^4 + 0.3^3 + 2.3^2 + 2.3^1 + 1.3^0$ olsun. Bu durumda $p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 6$ olup

$$\begin{aligned} K(F) = \{ & 3^3, 3^3 + 3^2, 3^3 + 3^2 + 3^1, 3^3 + 3^2 + 2.3^1, 2.3^3, 2.3^3 + 3^2 + 3^1, 2.3^3 + 3^2 + 2.3^1, \\ & 2.3^3 + 2.3^2, 2.3^3 + 2.3^2 + 3^1, 3^5, 3^5 + 3^3, 3^5 + 3^3 + 3^2, 3^5 + 3^3 + 3^2 + 3^1, \\ & 3^5 + 3^3 + 3^2 + 2.3^1, 3^5 + 2.3^3, 3^5 + 2.3^3 + 3^2, 3^5 + 2.3^3 + 3^2 + 3^1, \\ & 3^5 + 2.3^3 + 3^2 + 2.3^1, 3^5 + 2.3^3 + 2.3^2, 3^5 + 2.3^3 + 2.3^2 + 3^1, 3^5 + 3^4, \\ & 2.3^5, 2.3^5 + 3^3, 2.3^5 + 3^3 + 3^2, 2.3^5 + 3^3 + 3^2 + 3^1, 2.3^5 + 3^3 + 3^2 + 2.3^1, \\ & 2.3^5 + 2.3^3, 2.3^5 + 2.3^3 + 3^2, 2.3^5 + 2.3^3 + 3^2 + 3^1, 2.3^5 + 2.3^3 + 3^2 + 2.3^1, \\ & 2.3^5 + 2.3^3 + 2.3^2, 2.3^5 + 2.3^3 + 2.3^2 + 3^1, 2.3^5 + 3^4, 2.3^5 + 2.3^4, \\ & 2.3^5 + 2.3^4 + 3^3, 2.3^5 + 2.3^4 + 3^3 + 3^2, 2.3^5 + 2.3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1, \\ & 2.3^5 + 2.3^4 + 3^3 + 3^2 + 2.3^1, 3^6, 3^6 + 3^3, 3^6 + 3^3 + 3^2, 3^6 + 3^3 + 3^2 + 3^1, \\ & 3^6 + 3^3 + 3^2 + 2.3^1, 3^6 + 2.3^3, 3^6 + 2.3^3 + 3^2, 3^6 + 2.3^3 + 3^2 + 3^1, \\ & 3^6 + 2.3^3 + 3^2 + 2.3^1, 3^6 + 2.3^3 + 2.3^2, 3^6 + 2.3^3 + 2.3^2 + 3^1 \} \end{aligned}$$

dir ve birkaç $S_{g_l}^{p_l}$ elemanını yazalım.

$S_1^3 = 3^3 + 3^2 + 3^1 \in K(F), S_4^5 = 3^5 + 3^4 \in K(F)$ 'dir.

Önerme 5..2 $F = f_n \cdot p^n + f_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0, 1 \leq j \leq t \leq n, f_{t+1} \neq p - 1, f_t = f_{t-1} = \dots = f_j = p - 1, f_{j-1} \neq 0, p - 1$ olmak üzere $f_{j-1} \leq \gamma \leq p - 2$ ve $\gamma + f_{t+1} < p$ için

$$\gamma p^{t+1} + \gamma p^t + \gamma p^{t-1} + \dots + \gamma p^{j+1} + (\gamma + 1)p^j \in K(F)$$

dir.

İspat: Lemma 5..2 'nin sağlandığını gösterelim.

Durum 1: $i = t + 1$ olsun. Bu durumda $\kappa_{i+1} = 0$, $\kappa_i = \gamma$, $f_i \neq p - 1$ dir.

$$F_k^i = \left[\frac{F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p}}{p^i} \right]$$

diyelim.

$$\begin{aligned} F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p} &= (p-1) \cdot p^{i-1} + (p-1) \cdot p^{i-2} + \dots + (p-1) \cdot p^j + \\ &\quad f_{j-1} \cdot p^{j-1} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0 + (p-1) \cdot \gamma \cdot p^{i-1} + \dots + \\ &\quad (p-1) \cdot \gamma \cdot p^j + (p-1) \cdot (\gamma+1) \cdot p^{j-1} \\ &= (p-1) \cdot (\gamma+1) \cdot p^{i-1} + (p-1) \cdot (\gamma+1) \cdot p^{i-2} + \dots + \\ &\quad (p-1) \cdot (\gamma+1) \cdot p^j + [(p-1) \cdot (\gamma+1) + f_{j-1}] \cdot p^{j-1} + \\ &\quad f_{j-2} \cdot p^{j-2} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0 \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

dir. Verilen şartlar altında $[(p-1) \cdot (\gamma+1) + f_{j-1}] \equiv \gamma \pmod{p}$ olup p^j nin katsayısı $(p-1) \cdot (\gamma+1) + \gamma$ olur. Bu da $(p-1) \cdot (\gamma+1) + \gamma \equiv \gamma$ eşit olup p^{j+1} nin katsayısı $(p-1) \cdot (\gamma+1) + \gamma \equiv \gamma \pmod{p}$ olur. Bu şekilde devam edilirse $F_k^i = \gamma$ olur. Dolayısıyla $0 + f_i + \gamma \succeq \gamma$ elde edilir.

Durum 2: $j < i < t + 1$ olsun. Bu durumda $\kappa_{i+1} = \gamma$, $\kappa_i = \gamma$, $f_i = p - 1$ dir. (5.3) eşitliği, verilen şartlar altında $[(p-1) \cdot (\gamma+1) + f_{j-1}] \equiv \gamma \pmod{p}$ olup $p^{j'}$ nin katsayısı $(p-1) \cdot (\gamma+1) + \gamma$ olur. Bu da $(p-1) \cdot (\gamma+1) + \gamma \equiv \gamma$ eşit olup p^{j+1} , nin katsayısı $(p-1) \cdot (\gamma+1) + \gamma \equiv \gamma \pmod{p}$ olur. Bu şekilde devam edilirse $F_k^i = \gamma$ olur. Bu durumda $(p-1) \cdot \gamma + (p-1) + \gamma \equiv p-1 \succeq \gamma$ elde edilir.

Durum 3: $i = j$ olsun. Bu durumda $\kappa_{i+1} = \gamma$, $\kappa_i = \gamma + 1$, $f_i = p - 1$ olup

$$F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p} = f_{i-1} \cdot p^{i-1} + \dots + f_1 \cdot p^1 + f_0 + (p-1) \cdot (\gamma+1) \cdot p^{i-1}$$

dir. p^{i-1} , in katsayısı $(p-1) \cdot (\gamma+1) + f_{i-1} \equiv \gamma \pmod{p}$ olup $F_k^i = \gamma$ dir ve dolayısıyla $(p-1) \cdot \gamma + (p-1) + \gamma \equiv p-1 \succeq \gamma+1$ bulunur.

Önerme 5..3 Her $k \in K(F)$ elemanı $\sum_{l=1}^{n_F} \epsilon_l \cdot S_{g_l}^{p_l}$, $\epsilon_l = 0, 1, 2, \dots, (p-1)$ ve önerme 5..2'deki elemanların lineer kombinasyonudur.

İspat: $F = f_n.p^n + f_{n-1}.p^{n-1} + \dots + f_1.p^1 + f_0$ olmak üzere her i için $f_i \neq p-1$ ve ardarda gelen herhangi iki f_i sıfırdan farklı ise $p^1, p^2, \dots, p^{n+1} \in K(F)$ olduğundan lineer kombinasyon olarak yazılır. Bu durumda bakmamız gereken sadece en az bir $f_i = p-1$ ve ardışık iki f_i 'nin sıfır olma durumlarıdır.

Durum 1: $f_{t+1} \neq p-1$, $f_t = f_{t-1} = \dots = f_j = p-1$, $f_{j-1} \neq 0, p-1$ olsun.

Eğer $k = \kappa_t.p^t + \kappa_{t-1}.p^{t-1} + \dots + \kappa_j.p^j$ için $\kappa_i \leq \kappa_{i+1}$, $j < i \leq t$ ve $\kappa_j \leq \kappa_{j+1} + 1$ ise önerme 5..1 ve önerme 5..2 den bu k elemanı önerme 5..1 ve önerme 5..2 deki elemanların lineer toplamı olarak yazılır. Önermeyi ispatlamak için $K(F)$ 'de $\sum_{l=1}^{n_F} \epsilon_l.S_{g_l}^{p_l}$, $\epsilon_l = 0, 1, 2, \dots, (p-1)$ ve önerme 5..2 'deki elemanların lineer kombinasyonu olarak yazılamayan elemanların bulunmadığını göstermek yeterlidir.

Durum 1.1 $\kappa_i > \kappa_{i+1}$, $j < i \leq t$ $K(F)$ ' de olmadığını gösterelim. Varsayalım ki $\exists i$ için $\kappa_i > \kappa_{i+1}$ ve $j+1$ 'den i ' ye kadar olan tüm κ_i 'ler için $\kappa_i \leq \kappa_{i+1}$ ve $\kappa_j \leq \kappa_{j+1} + 1$ olsun. Bu durumda $(p-1)\frac{k}{p} + F \succeq_i k$ olamayacağını gösterelim.

$$\begin{aligned}
F^{[i-1]} + (p-1).\frac{k^{[i]}}{p} &= (p-1).p^{i-1} + (p-1).p^{i-2} + \dots + (p-1).p^j + \\
&\quad f_{j-1}.p^{j-1} + \dots + f_1.p^1 + f_0 + (p-1).\kappa_i.p^{i-1} + \\
&\quad \dots + (p-1).\kappa_j.p^{j-1} \\
&= (p-1).(\kappa_i + 1).p^{i-1} + (p-1).(\kappa_{i-1} + 1).p^{i-2} + \\
&\quad \dots + [(p-1).\kappa_j + f_{j-1}].p^{j-1} + \dots + f_1.p^1 + f_0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

dir. p^{j-1} ' nin katsayısı $[(p-1).\kappa_j + f_{j-1}] \equiv \kappa_j \pmod{p}$ veya $[(p-1).\kappa_j + f_{j-1}] \equiv \kappa_j + 1 \pmod{p}$ dir. p^j ' nin katsayısı $(p-1).(\kappa_{j+1} + 1) + \kappa_j$ veya $(p-1).(\kappa_{j+1} + 1) + \kappa_j + 1$ her ikisi de κ_{j+1} ' e denktir. p^{j+1} ' in katsayısı $(p-1).(\kappa_{j+2} + 1) + \kappa_{j+1}$ ' e dentir. Bu şekilde devam edilirse $F_k^i = \kappa_i$ ' dir ve dolayısıyla $(p-1).\kappa_{i+1} + (p-1) + \kappa_i \equiv \kappa_i - \kappa_{i+1} - 1 \not\equiv \kappa_i$ elde edilir.

Durum 1.2: $i = j$ için $\kappa_j > \kappa_{j+1} + 1$ olmadığını gösterelim. Varsayalım ki $\kappa_j > \kappa_{j+1} + 1$ olsun. (5.4) eşitliğinden p^{j-1} ' nin katsayısı $f_{j-1} \geq \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_j + f_{j-1} \equiv \kappa_j \pmod{p}$ olup $F_k^i = \kappa_j$ ve $f_{j-1} < \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_j + f_{j-1} \equiv \kappa_j - 1 \pmod{p}$ olup $F_k^i = \kappa_j - 1$ 'dir ve dolayısıyla $f_{j-1} \geq \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_{j+1} + p-1 + \kappa_j \equiv \kappa_{j+1} + 1 \not\equiv \kappa_j$ ve $f_{j-1} < \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_{j+1} + p-1 + \kappa_j - 1 \equiv \kappa_{j+1} + 1 \not\equiv \kappa_j$ olur.

Durum 2: $f_t = f_{t-1} = \dots = f_j = 0$, $f_{t+1}, f_{j-1} \neq 0$ olsun.

$k = \kappa_t.p^t + \kappa_{t-1}.p^{t-1} + \dots + \kappa_j.p^j \in K(F)$ için $j \leq i < t$ iken $\kappa_i > \kappa_{i+1}$ olmadığını gösterelim. Varsayalım ki $\exists i$ için $\kappa_i > \kappa_{i+1}$ ve j 'den i 'ye kadar olan tüm κ_i 'ler için $\kappa_i \leq \kappa_{i+1}$ olsun. Bu durumda $(p-1)\frac{k}{p} + F \succeq_i k$ olamayacağını gösterelim.

$$\begin{aligned} F^{[i-1]} + (p-1).\frac{k^{[i]}}{p} &= f_{j-1}.p^{j-1} + \dots + f_1.p^1 + f_0 + (p-1).\kappa_i.p^{i-1} + \\ &\quad \dots + (p-1).\kappa_j.p^{j-1} \\ &= (p-1).\kappa_i.p^{i-1} + \dots + (p-1).\kappa_{j+1}.p^j + \\ &\quad [(p-1).\kappa_j + f_{j-1}].p^{j-1} + f_2.p^{j-2} + \dots + f_1.p^1 + f_0 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda p^{j-1} 'in katsayısı $f_{j-1} \geq \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_j + f_{j-1} \equiv \kappa_j$ ve $f_{j-1} < \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_j + f_{j-1} \equiv \kappa_j - 1$ 'dir. p^j 'nin katsayısı $f_{j-1} \geq \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_{j+1} + \kappa_j \equiv \kappa_{j+1}$ veya $(p-1).\kappa_{j+1} + \kappa_j \equiv \kappa_{j+1} - 1$ ve $f_{j-1} < \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_{j+1} + \kappa_j - 1 \equiv \kappa_{j+1} - 1$ dir. Bu şekilde devam edilirse $F_k^i = \kappa_j$ veya $F_k^i = \kappa_j - 1$ olarak bulunur ve dolayısıyla $F_k^i = \kappa_j$ için $(p-1).\kappa_{i+1} + f_i + \kappa_i = (p-1).\kappa_{i+1} + \kappa_i \equiv \kappa_{i+1} \not\equiv \kappa_i$ ve $F_k^i = \kappa_j - 1$ için $(p-1).\kappa_{i+1} + f_i + \kappa_i - 1 = (p-1).\kappa_{i+1} + \kappa_i - 1 \equiv \kappa_{i+1} \not\equiv \kappa_i$ olur. $\square$

Önerme 5..4 $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$ ve $c \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda $1 \leq n < \alpha - 1$ ve $\forall i \in \{n, n+1, \dots, \alpha-2\}$ için $\gamma_i \geq \gamma_{i-1}$ ve $\gamma_{\alpha-1} + 1 \geq \gamma_{\alpha-2}$, $\gamma_{\alpha-1} \neq p-1$ olmak üzere $P(p.c + (p-1).p^\alpha + p^{\alpha-1} + \sum_{i=\alpha-n}^{\alpha-1} \gamma_i p^{i-1}).P(c + (p-2).p^{\alpha-1} + \sum_{i=\alpha-n+1}^{\alpha-1} (p-1-\gamma_i).p^{i-1} + (p-\gamma_{\alpha-n}).p^{\alpha-n-1})$ elemanı

$$P(p.c + (p-1).p^\alpha).P(c + p^\alpha)$$

çarpımının bir toplam terimidir.

İspat: $\alpha = 0$ için $a = p.c + p - 1$, $b = c + 1$ ve $a = p.b - 1$ 'dir. Adem Bağıntısından j 'nin alacağı değerler $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor = b - 1$ aralığında olup bu aralıktaki j 'ler için $(p-1).(b-j) - 1 < p.b - 1 - p.j$ olduğundan

$$\binom{(p-1).(b-j) - 1}{p.b - 1 - p.j}$$

kombinasyonu sıfırdır. Eşitliğin sağ tarafı da $P(p.c + p - 1).P(c)$ olup $p.c + p - 1 \geq p.c$ olduğundan Admissible iki elemanın çarpımı sıfırdır.

$\alpha \geq 2$ için,

$$\begin{aligned} F &= (p-1) \cdot [(c+p^\alpha) - (c+(p-1) \cdot p^{\alpha-1})] - 1 \\ &= (p-1) \cdot [p^{\alpha-1} \cdot (p-p+1)] - 1 \\ &= (p-1) \cdot p^{\alpha-1} - 1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$F = (p-2) \cdot p^{\alpha-2} + (p-1) \cdot p^{\alpha-3} + \dots + (p-1) \cdot p^0$$

olup $K(F)$ kümesinin elemanları $1 \leq n < \alpha$ için

$$k = \gamma_{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-1} + \gamma_{\alpha-2} \cdot p^{\alpha-2} + \dots + \gamma_{\alpha-n} \cdot p^{\alpha-n},$$

$1 \leq i < \alpha - 1$ için $\gamma_i \geq \gamma_{i-1}$ ve $\gamma_{\alpha-1} + 1 \geq \gamma_{\alpha-2}$ şeklindedir. Gerçekten $\forall i$ için $(p-1) \cdot \frac{k}{p} + F \geq_i k$ olduğunu gösterelim.

Durum 1: $i = \alpha - 1$ için $\kappa_{i+1} = 0$, $\kappa_i = \gamma_{\alpha-1}$, $f_i = 0$ olup

$$\begin{aligned} F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p} &= (p-2) \cdot p^{\alpha-2} + (p-1) \cdot p^{\alpha-3} + \dots + (p-1) \cdot p^0 + \\ &\quad (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} + (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-2} \cdot p^{\alpha-3} + \dots + \\ &\quad (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-n} \cdot p^{\alpha-n-1} \\ &= p^{\alpha-2} \cdot (p-2 + (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-1}) + p^{\alpha-3} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_{\alpha-2}) + \\ &\quad \dots + p^{\alpha-n-1} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_{\alpha-n}) + (p-1) \cdot p^{\alpha-n-2} + \\ &\quad \dots + (p-1) \cdot p^0 \end{aligned}$$

olup $F_k^i = \gamma_{\alpha-1}$ 'dir ve dolayısıyla $0 + 0 + \gamma_{\alpha-1} \geq \gamma_{\alpha-1}$ sağlanır.

Durum 2: $i = \alpha - 2$ için $\kappa_{i+1} = \gamma_{\alpha-1}$, $\kappa_i = \gamma_{\alpha-2}$, $f_i = p-2$ olup

$$\begin{aligned} F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p} &= (p-1) \cdot p^{\alpha-3} + (p-1) \cdot p^{\alpha-4} + \dots + (p-1) \cdot p^0 + \\ &\quad (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-2} \cdot p^{\alpha-3} + (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-3} \cdot p^{\alpha-4} + \dots + \\ &\quad (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-n} \cdot p^{\alpha-n-1} \\ &= p^{\alpha-3} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_{\alpha-2}) + p^{\alpha-4} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_{\alpha-3}) + \\ &\quad \dots + p^{\alpha-n-1} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_{\alpha-n}) + (p-1) \cdot p^{\alpha-n-2} + \\ &\quad \dots + (p-1) \cdot p^0 \end{aligned}$$

ve $F_k^i = \gamma_{\alpha-2}$ 'dir. Bu durumda $(p-1).\gamma_{\alpha-1} + p-2 + \gamma_{\alpha-2} \geq \gamma_{\alpha-2}$ 'nin sağlandığını gösterelim.

$\gamma_{\alpha-1} = \gamma_{\alpha-2} - 1$ ise $(p-1).\gamma_{\alpha-2} - (p-1) + p-2 + \gamma_{\alpha-2} \equiv p-1 \geq \gamma_{\alpha-2}$ elde edilir.

$\gamma_{\alpha-1} > \gamma_{\alpha-2} - 1$ ise $\gamma_{\alpha-1} - \gamma_{\alpha-2} + 1 = k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ 'dir.

$k = 1$ için $\gamma_{\alpha-1} = \gamma_{\alpha-2}$ olup $(p-1).\gamma_{\alpha-2} + p-2 + \gamma_{\alpha-2} \equiv p-2 \geq \gamma_{\alpha-2}$ elde edilir.

$k = 2$ için $\gamma_{\alpha-1} = \gamma_{\alpha-2} + 1$ olup $(p-1).(\gamma_{\alpha-2} + 1) + p-2 + \gamma_{\alpha-2} \equiv p-3 \geq \gamma_{\alpha-2}$ elde edilir.

$\vdots$

$k = p-2$ için $\gamma_{\alpha-1} = \gamma_{\alpha-2} + p-3$ olup $(p-1).(\gamma_{\alpha-2} + p-3) + p-2 + \gamma_{\alpha-2} \equiv 1 \geq \gamma_{\alpha-2}$ elde edilir.

Durum 3: $\alpha - 2 < i \leq \alpha - n$ için $\kappa_{i+1} = \gamma_{i+1}$, $\kappa_i = \gamma_i$, $f_i = p-1$ olup

$$\begin{aligned} F^{[i-1]} + (p-1).\frac{k^{[i]}}{p} &= (p-1).p^{i-1} + (p-1).p^{i-2} + \dots + (p-1).p^0 + \\ &\quad (p-1).\gamma_i.p^{i-1} + (p-1).\gamma_{i-1}.p^{i-2} + \dots + \\ &\quad (p-1).\gamma_{\alpha-n}.p^{\alpha-n-1} \\ &= p^{i-1}.(p-1).(1 + \gamma_i) + p^{i-2}.(p-1).(1 + \gamma_{i-1}) + \dots + \\ &\quad p^{\alpha-n-1}.(p-1).(1 + \gamma_{\alpha-n}) + (p-1).p^{\alpha-n-2} + \dots + \\ &\quad (p-1).p^0 \end{aligned}$$

ve $F_k^i = \gamma_i$ 'dir. Bu durumda $(p-1).\gamma_{i+1} + p-1 + \gamma_i \geq \gamma_i$ olduğunu gösterelim.

$\gamma_{i+1} = \gamma_i$ ise $(p-1).\gamma_i + p-1 + \gamma_i \equiv p-1 \geq \gamma_i$ olur.

$\gamma_{i+1} > \gamma_i$ ise $\gamma_{i+1} - \gamma_i = k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ 'dir.

$k = 1$ için $\gamma_{i+1} = \gamma_i + 1$ olup $(p-1).(\gamma_i + 1) + p-1 + \gamma_i \equiv p-2 \geq \gamma_i$ elde edilir.

$k = 2$ için $\gamma_{i+1} = \gamma_i + 2$ olup $(p-1).(\gamma_i + 2) + p-1 + \gamma_i \equiv p-3 \geq \gamma_i$ elde edilir.

$\vdots$

$k = p-2$ için $\gamma_{i+1} = \gamma_i + p-2$ olup $(p-1).(\gamma_i + p-2) + p-1 + \gamma_i \equiv 1 \geq \gamma_i$ elde edilir.

$a > p.F$ olduğundan $K_a(F) = K(F)$ 'dir ve teorem 5.1 'den bu $k \in K(F)$ 'lere karşılık gelen $j \in J(a, b)$ 'ler,

$$\begin{aligned} j &= \frac{a' - k}{p} \\ &= \frac{c.p + (p-1).p^\alpha - [\gamma_{\alpha-1}.p^{\alpha-1} + \gamma_{\alpha-2}.p^{\alpha-2} + \dots + \gamma_{\alpha-n}.p^{\alpha-n}]}{p} \\ &= c + (p-1).p^{\alpha-1} - [\gamma_{\alpha-1}.p^{\alpha-2} + \gamma_{\alpha-2}.p^{\alpha-3} + \dots + \gamma_{\alpha-n}.p^{\alpha-n-1}] \end{aligned}$$

olup Adem Bağıntısından

$$\begin{aligned} &P(p.c + (p-1).p^\alpha + c + p^\alpha - j).P(j) = P(p.c + (p-1).p^\alpha + c + p^\alpha - \\ &[c + (p-1).p^{\alpha-1} - [\gamma_{\alpha-1}.p^{\alpha-2} + \gamma_{\alpha-2}.p^{\alpha-3} + \dots + \gamma_{\alpha-n}.p^{\alpha-n-1}]]) \times \\ &P(c + (p-1).p^{\alpha-1} - [\gamma_{\alpha-1}.p^{\alpha-2} + \gamma_{\alpha-2}.p^{\alpha-3} + \dots + \gamma_{\alpha-n}.p^{\alpha-n-1}]) \\ &= P(p.c + (p-1).p^\alpha + p^{\alpha-1} + \gamma_{\alpha-1}.p^{\alpha-2} + \gamma_{\alpha-2}.p^{\alpha-3} + \dots + \gamma_{\alpha-n}.p^{\alpha-n-1}) \times \\ &\times P(c + (p-2).p^{\alpha-1} + (p-1-\gamma_{\alpha-1}).p^{\alpha-2} + (p-1-\gamma_{\alpha-2}).p^{\alpha-3} \\ &+ \dots + (p-1-\gamma_{\alpha-n+1}).p^{\alpha-n-2} + (p-\gamma_{\alpha-n}).p^{\alpha-n-1}) \end{aligned}$$

dır, bu da önermenin tam olarak sağ taraftaki kısmına eşittir.

Önerme 5..5 $\alpha \geq 0$ ve $c \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda için $1 < i \leq \alpha - 1$ için $\gamma_i \geq \gamma_{i-1}$, $\gamma_2 = p - 2$ iken $\gamma_1 \leq 1 + \gamma_2$ ve $\gamma_2 = p - 1$ iken $\gamma_1 \leq \gamma_2 - 1$ olmak üzere $P(p.c + p^\alpha + \sum_{i=n-1}^{\alpha-2} (1 + \gamma_{i+1}).p^i + \sum_{i=0}^{n-2} p^i).P(c + \sum_{i=n}^{\alpha-2} (p - \gamma_{i+1}).p^i + (p - \gamma_n).p^{n-1})$ ifadesi

$$P(p.c + p^\alpha).P(c + \sum_{i=0}^{\alpha-1} p^i)$$

nin bir toplam terimidir.

İspat: $\alpha = 0$ için $P(p.c + 1).P(c)$ ifadesi admissible olduğundan sıfır olup her iki tarafta sıfır olur.

$\alpha = 1$ için $P(p.c + p).P(c + 1)$ ifadesi admissible olduğundan çarpımları sıfır, $P(p.c + p).P(c)$ ifadesi de admissible olduğundan çarpımları sıfırdır.

$\alpha \geq 2$ için $a = p.c + p^\alpha, b = c + \sum_{i=0}^{\alpha-1} p^i$ ve $F = p^{\alpha-1} - 2 = (p-1).p^{\alpha-2} + (p-1).p^{\alpha-3} + \dots + (p-1).p^1 + (p-2).p^0$ olup bunlara karşılık gelen $k \in K(F)$ elemanları $1 < i \leq \alpha - 1$ için $\gamma_i \geq \gamma_{i-1}$ ve $\gamma_2 = p - 2$ iken $\gamma_1 \leq 1 + \gamma_2$, $\gamma_2 = p - 1$ iken $\gamma_1 \leq \gamma_2 - 1$ olmak üzere $\sum_{i=n}^{\alpha-1} \gamma_i p^i$ formundadır. Gerçekten;

Durum 1: $n > 1$, $i = \alpha - 1$ için, $\kappa_i = \gamma_{\alpha-1}$, $\kappa_{i+1} = 0$, $f_i = 0$ olup

$$\begin{aligned}
F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p} &= (p-1) \cdot p^{\alpha-2} + (p-1) \cdot p^{\alpha-3} + \dots + (p-2) \cdot p^0 + \\
&\quad (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} + (p-1) \cdot \gamma_{\alpha-2} \cdot p^{\alpha-3} + \dots + \\
&\quad (p-1) \cdot \gamma_n \cdot p^{n-1} \\
&= p^{\alpha-2} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_{\alpha-1}) + p^{\alpha-3} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_{\alpha-2}) + \\
&\quad \dots + p^{n-1} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_n) + (p-1) \cdot p^{n-2} + \dots + \\
&\quad (p-2) \cdot p^0
\end{aligned}$$

dir ve $F_k^i = \gamma_{\alpha-1}$ 'dir. Buradan (*) ifadesi $0 + 0 + \gamma_{\alpha-1} \geq \gamma_{\alpha-1}$ sağlanır.

Durum 2: $n \leq i < \alpha - 1$ için $\kappa_i = \gamma_i$, $\kappa_{i+1} = \gamma_{i+1}$, $f_i = p - 1$ olup

$$\begin{aligned}
F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p} &= (p-1) \cdot p^{i-1} + (p-1) \cdot p^{i-2} + \dots + (p-2) \cdot p^0 + \\
&\quad (p-1) \cdot \gamma_i \cdot p^{i-1} + (p-1) \cdot \gamma_{i-1} \cdot p^{i-2} + \dots + \\
&\quad (p-1) \cdot \gamma_n \cdot p^{n-1} \\
&= p^{i-1} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_i) + p^{i-2} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_{i-1}) + \dots + \\
&\quad p^{n-1} \cdot (p-1) \cdot (1 + \gamma_n) + (p-1) \cdot p^{n-2} + \dots + (p-2) \cdot p^0
\end{aligned}$$

olup $F_k^i = \gamma_i$ 'dir. Bu durumda $(p-1) \cdot \gamma_{i+1} + p - 1 + \gamma_i \geq \gamma_i$ 'nin sağlandığını gösterelim. $\gamma_{i+1} = \gamma_i$ ise $(p-1) \cdot \gamma_i + p - 1 + \gamma_i \equiv p - 1 \geq \gamma_i$ sağlanır.

$\gamma_{i+1} > \gamma_i$ ise $\gamma_{i+1} - \gamma_i = k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ 'dir.

$k = 1$ için $\gamma_{i+1} = \gamma_i + 1$ olup $(p-1) \cdot (\gamma_i + 1) + p - 1 + \gamma_i \equiv p - 2 \geq \gamma_i$ elde edilir.

$k = 2$ için $\gamma_{i+1} = \gamma_i + 2$ olup $(p-1) \cdot (\gamma_i + 2) + p - 1 + \gamma_i \equiv p - 3 \geq \gamma_i$ elde edilir.

$\vdots$

$k = p - 2$ için $\gamma_{i+1} = \gamma_i + p - 2$ olup $(p-1) \cdot (\gamma_i + p - 2) + p - 1 + \gamma_i \equiv 1 \geq \gamma_{\alpha-2}$ elde edilir.

Durum 3: $n = i = 1$ için $\kappa_i = \gamma_1, \kappa_{i+1} = \gamma_2, f_i = p - 1$ olup

$$F^{[i-1]} + (p-1) \cdot \frac{k^{[i]}}{p} = (p-2) \cdot p^0 + (p-1) \cdot \gamma_1 \cdot p^0$$

olup $F_k^i = \gamma_1 - 1$ 'dir ve $(p-1) \cdot \gamma_2 + p - 1 + \gamma_1 - 1 \geq \gamma_1$ sağlandığını gösterelim.

Buradaki işlemler yukarıdakine benzer olarak yapılır. Sadece farklı olarak $\gamma_2 = p - 2, \gamma_1 = p - 1$ olduğunu ve $\gamma_2 = p - 1, \gamma_1 = p - 1$ olamayacağını gösterelim.

$\gamma_2 = p - 2, \gamma_1 = p - 1$ olsun. Bu durumda $(p-1) \cdot (p-2) + p - 1 + p - 2 \equiv p - 1 \geq p - 1$ 'dir.

$\gamma_2 = p - 1, \gamma_1 = p - 1$ olsun. Bu durumda $(p-1) \cdot (p-1) + p - 1 + p - 2 \equiv p - 2 \not\geq p - 1$ 'dir.

$p \cdot c + p^\alpha > p^{\alpha-1} - 2$ yani $a > p \cdot F$ olduğundan $K_a(F) = K(F)$ 'dir ve teorem 5.1 'den bu $k \in K(F)$ 'lere karşılık gelen $j \in J(a, b)$ 'ler,

$$\begin{aligned} j &= \frac{a' - k}{p} \\ &= \frac{p \cdot c + p^\alpha - [\gamma_{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-1} + \gamma_{\alpha-2} \cdot p^{\alpha-2} + \dots + \gamma_n \cdot p^n]}{p} \\ &= c + p^{\alpha-1} - [\gamma_{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} + \gamma_{\alpha-2} \cdot p^{\alpha-3} + \dots + \gamma_n \cdot p^{n-1}] \end{aligned}$$

olup Adem Bağıntısından

$$\begin{aligned} &P(p \cdot c + p^\alpha + c + \sum_{i=0}^{\alpha-1} p^i - c - p^{\alpha-1} + [\gamma_{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} + \gamma_{\alpha-2} \cdot p^{\alpha-3} + \dots + \gamma_n \cdot p^{n-1}]) \times \\ &\quad P(c + p^{\alpha-1} - [\gamma_{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} + \gamma_{\alpha-2} \cdot p^{\alpha-3} + \dots + \gamma_n \cdot p^{n-1}]) \\ &= P(p \cdot c + p^\alpha + \sum_{i=n-1}^{\alpha-2} (1 + \gamma_{i+1}) \cdot p^i + \sum_{i=0}^{n-2} p^i) \cdot P(c + \sum_{i=n}^{\alpha-2} (p - \gamma_{i+1}) \cdot p^i + (p - \gamma_n) \cdot p^{n-1}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\square$

Verilen bir f sayısı için, $\lambda(f)$ ve $\Lambda(f)$ 'i aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Lambda(f) = [\log_p(f + (p - 1))]$$

Önerme 5.6 $\gamma_{\Lambda+1} \leq 1, \beta \geq 2$ ve $\gamma_{\Lambda+1} = 1$ iken $\gamma_\Lambda = 0, \gamma_{\Lambda+1} = 0$ iken $1 \leq i \leq \Lambda$ için $\gamma_i = 0, 1$ ve $\gamma_i \geq \gamma_{i-1}$

olmak üzere

$$P(p.f - (p-2-\gamma_{\Lambda+1}).p^\Lambda - (p-1-\gamma_\Lambda).p^{\Lambda-1} - \dots - (p-1-\gamma_\beta).p^{\beta-1} + (p-1). \sum_{i=0}^{\beta-2} p^i) \times \\ \times P(f - p^\Lambda(1 + \gamma_{\Lambda+1}) - \sum_{i=\beta-1}^{\Lambda-1} \gamma_{i+1}.p^i) \text{ elemanı}$$

$$P(p.f - (p-1). \sum_{i=0}^{\Lambda} p^i).P(f)$$

çarpımının bir toplam terimidir.

İspat: $a = p.f - (p-1). \sum_{i=0}^{\Lambda} p^i$ ve $b = f$ için

$$\begin{aligned} F &= (p-1)(f - f + (p-1). \sum_{i=0}^{\Lambda-1} p^i + 1) - 1 \\ &= (p-1).(p^\Lambda - 1 + 1) - 1 \\ &= (p-1).p^\Lambda - 1 \\ &= (p-2).p^\Lambda + (p-1).p^{\Lambda-1} + (p-1).p^{\Lambda-2} + \dots + (p-1).p^0 \end{aligned}$$

olup bunlara karşılık gelen $k \in K(F)$ 'ler $\gamma_{\Lambda+1} + 1 \geq \gamma_\Lambda$, $\gamma_{\Lambda+1} \neq p-1$ ve $1 \leq i \leq \Lambda$ için $\gamma_i \geq \gamma_{i-1}$ olmak üzere $k = \gamma_{\Lambda+1}.p^{\Lambda+1} + \gamma_\Lambda.p^\Lambda + \dots + \gamma_\beta.p^\beta$ formunda olduğu önceki önermede olduğu gibi kolayca gösterilebilir.

Teorem 5..1 'den $a \equiv p-1$, $K_a(F) = \{k \in K^{p-1}(F) : k \leq a'\}$,
 $K^i(F) = \{k \in K(F) : (p-1).\frac{k}{p} + F \geq p-1 \text{ mod } p\}$ olup

$$\begin{aligned} (p-1).\frac{k}{p} + F \geq p-1 &\Rightarrow (p-1).\frac{k}{p} + (p-1).p^\Lambda - 1 \equiv p-1 \\ &\Rightarrow (p-1).\left(\frac{k}{p} + p^\Lambda\right) \equiv 0 \\ &\Rightarrow \frac{k}{p} \equiv t.p, 1 \leq t \leq p^{\Lambda-1}, t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

olur. Yani $K(F)$ kümesindeki p^1 'i içeren k 'lar $K_a(F)$ kümesinde yoktur ve $k = \sum_{i=\beta}^{\Lambda+1} \gamma_i.p^i$, $\gamma_{\Lambda+1} \leq 1, \beta \geq 2$ ve $\gamma_{\Lambda+1} = 1$ iken $\gamma_\Lambda = 0$, $\gamma_{\Lambda+1} = 0$ iken $1 \leq i \leq \Lambda$ için $\gamma_i = 0, 1$ ve $\gamma_i \geq \gamma_{i-1}$ formundadır.

Buradan $j \in J(a, b)$ elemanlarını bulalım.

$$\begin{aligned}
 j &= \frac{a' - k}{p} = \frac{p \cdot f - p^{\Lambda+1} - \gamma_{\Lambda+1} \cdot p^{\Lambda+1} - \gamma_{\Lambda} \cdot p^{\Lambda} - \dots - \gamma_{\beta} \cdot p^{\beta}}{p} \\
 &= \frac{p \cdot f - (\gamma_{\Lambda+1} + 1) \cdot p^{\Lambda+1} - \gamma_{\Lambda} \cdot p^{\Lambda} - \dots - \gamma_{\beta} \cdot p^{\beta}}{p} \\
 &= f - p^{\Lambda}(1 + \gamma_{\Lambda+1}) - \gamma_{\Lambda} \cdot p^{\Lambda-1} - \dots - \gamma_{\beta} \cdot p^{\beta-1}
 \end{aligned}$$

olur. Adem Bağıntılarından $P(p \cdot f - (p-1) \cdot \sum_{i=0}^{\Lambda} p^i) \cdot P(f) = I$ ifadesi

$$\begin{aligned}
 I &= P(p \cdot f - (p-1) \cdot \sum_{i=0}^{\Lambda} p^i + f - (f - p^{\Lambda}(1 + \gamma_{\Lambda+1}) - \gamma_{\Lambda} \cdot p^{\Lambda-1} - \dots - \gamma_{\beta} \cdot p^{\beta-1})). \\
 &\quad P(f - p^{\Lambda}(1 + \gamma_{\Lambda+1}) - \gamma_{\Lambda-1} \cdot p^{\Lambda-1} - \dots - \gamma_{\beta-1} \cdot p^{\beta-1}) \\
 &= P(p \cdot f - (p-2 - \gamma_{\Lambda+1}) \cdot p^{\Lambda} - (p-1 - \gamma_{\Lambda}) \cdot p^{\Lambda-1} - \dots - (p-1 - \gamma_{\beta}) \cdot p^{\beta-1} + \\
 &\quad (p-1) \cdot \sum_{i=0}^{\beta-2} p^i) \cdot P(f - p^{\Lambda}(1 + \gamma_{\Lambda+1}) - \sum_{i=\beta-1}^{\Lambda-1} \gamma_{i+1} \cdot p^i)
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

KAYNAKLAR

- Adem, J.**,1952.The iteration of the Steenrod Squares in Algebraic Topology,Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,38,(0):720-726
- Aksu Çelik,Ş.**, Spectral Diziler ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, 2003
- Kraines, D.**,1971. On Excess in the Milnor Basis, Bull. London Math. Soc. 363-365.
- Karaca,İ.**, Nilpotence in the Mod-p Steenrod Algebra, Phd. Thesis,1996
- Karaca, İ.**, 2005. Monomial Bases In The Mod-p Steenrod Algebra. Czh. Math. Journal,55,(3):699-707
- Lucas, E.**,1878. Theorie Des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques, Amer. J. Math. 1:184-240 289-321.
- Milnor, J.**,1958. The Steenrod Algebra and its Dual, Ann. Of Math. 67,(2):150-171.
- Milnor, J. and Moore, J.**,1965. On the Structure of Hopf Algebra, Ann. of Math. 81:211-264.
- Munkres,J.R.**,1984. Elements of Algebraic Topology,Perseus Books Publishings, Cambridge,455p.
- Oner, T.**, Steenrod Cebirinde Tarak Yapısı ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, 2007.
- Silverman, J.H.**,1993. Conjugation and Excess in the Steenrod Algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 119,(2):657-661.
- Silverman, J.H.**, 1996.Multiplication and the combinatorics in the Steenrod Algebra, Journal of Pure and Applied Algebra. 111,(1):303-323.
- Steenrod, N.E. ve Epstein, D .B.A.**,1962. Cohomology Operations, Princeton University Press,143p.
- Steenrod, N.E.**,1952. Reduced Powers of Cohomology classes. Ann. Of Math., 56,(1):47-67.
- Tanay, B.,Karaca,İ.**,2004. The Bundled and partitionedComb in the Mod-p Steenrod Algebra, Int. Journal of Pure and Aplied Algebra.16(3):285-297
- Tanay, B.**, Steenrod Cebirinde Bazlar Üzerine, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, 2003

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Karaman’da doğdu. İlk öğrenimini burda tamamladıktan sonra 1993 kurumlar sınavı ile Konya Atatürk Sağlık Meslek Lisesini kazandı. 1998 yılında Muğla Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde yüksek öğrenimine başladı. 2003-2004 yılları arasında Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği tezsiz Yüksek Lisans Programını tamamladı. 2004 yılında Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde Yüksek Lisans çalışmalarına başladı. 2001-2004 yılları arasında Sağlık Bakanlığı bünyesinde sağlık memuru olarak çalıştı. 2004 yılında Muğla Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlayan Osman Raşit IŞIK, halen bu kurumdaki görevini sürdürmektedir.