

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

ESNEK TOPOLOJİK GRUPLAR ÜZERİNE

**Hazırlayan
Mehmet ERSÖZ**

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye ALEMDAR**

Yüksek Lisans Tezi

**Ocak 2019
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

ESNEK TOPOLOJİK GRUPLAR ÜZERİNE

**Hazırlayan
Mehmet ERSÖZ**

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye ALEMDAR**

Yüksek Lisans Tezi

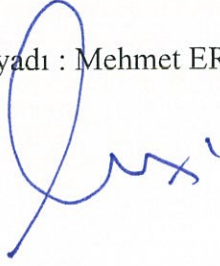
**Ocak 2019
KAYSERİ**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı : Mehmet ERSÖZ

İmza :



“Esnek Topolojik Gruplar Üzerine” adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır

Tezi Hazırlayan

Mehmet ERSÖZ

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye ALEMDAR

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

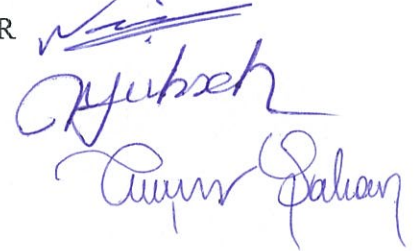
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDIŞ

Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye ALEMDAR danışmanlığında **Mehmet ERSÖZ** tarafından hazırlanan “**Esnek Topolojik Gruplar Üzerine**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

23 /01 /2019

JÜRİ:

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye ALEMDAR
Üye : Doç. Dr. Nural YÜKSEL
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN

**ONAY:**

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 05/02/2019 tarih ve 2019/09-17 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bilimin ve bilgiye ulaőmanın öneminin giderek arttığı çağımızda, benimde bilime katkıda bulunmamda yardımcı olan, bilgisini benimle her zaman paylaşan ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye ALEMDAR' a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu zorlu süreçte her zaman yanımda olup benden desteklerini esirgemeyen, beni motive eden başta annem olmak üzere babam ve kardeşime çok teşekkür ederim.

Mehmet ERSÖZ
Kayseri, Ocak 2019

ESNEK TOPOLOJİK GRUPLAR ÜZERİNE

Mehmet ERSÖZ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye ALEMDAR

ÖZET

Bu tez çalışmasında esnek küme, esnek grup, esnek normal altgrup, esnek grup homomorfizmi, esnek topoloji, esnek topolojik uzay, esnek topolojik grup kavramları verilip, Nazmul ve Samanta'nın [23] makalesinden yola çıkılarak esnek topolojik esnek grup, esnek topolojik esnek normal altgrup yapıları incelenmiştir. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde esnek küme ile ilgili bazı temel kavramlar, teoremler ve bunlarla ilgili örnekler verilmiştir.

İkinci bölümde esnek grup, esnek normal alt grup, grup homomorfizmi, topolojik grup, esnek topoloji ve esnek topolojik uzay konuları verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise esnek topolojik esnek grup, esnek topolojik esnek normal altgrup ve temel homomorfizm teoremi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, esnek grup, esnek topoloji, esnek topolojik uzay, esnek topolojik esnek grup, esnek topolojik esnek normal altgrup.

ON SOFT TOPOLOGICAL GROUPS**Mehmet ERSÖZ****Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences****M.Sc. Thesis, January 2019****Supervisor: Dr. Nazmiye ALEMDAR****ABSTRACT**

In this paper notions of soft set, soft group, soft normal subgroup, homomorphism of soft group, soft topology, soft topological space, soft topological group are explained and soft topological soft group, soft topological soft normal subgroup are studied based on the article of Nazmul and Samanta [23]. This thesis has three sections.

In the first section some fundamental facts about soft set, theorems and examples about soft set, theorems and examples about them are given.

In the second section, the concepts of soft group, soft normal subgroup, homomorphism of group, topological group, soft topology and soft topological space are given.

In the third section soft topological soft group, soft topological soft normal subgroup and basic homomorphism theorem are given.

Keywords: Soft set, soft group, soft topology, soft topological space, soft topological soft group, soft topological soft normal subgroup.

ESNEK TOPOLOJİK GRUPLAR

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK.....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	iii
KABUL VE ONAY	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar LİSTESİ.....	x
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM

ESNEK YAPI KAVRAMI

1.1. Esnek Yapı Kavramı.....	4
------------------------------	---

2. BÖLÜM

ESNEK GRUP, TOPOLOJİK GRUP VE ESNEK TOPOLOJİK UZAY

2.1. Esnek grup	15
2.2. Topolojik Grup.....	19
2.3. Esnek Topolojik Uzay.....	20

3. BÖLÜM

ESNEK TOPOLOJİK ESNEK GRUP

3.1. Esnek Topolojik Grup 23

KAYNAKÇA 39

ÖZGEÇMİŞ..... 41



TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1. Esnek bir kümenin tablo gösterimi	5
--	---



GİRİŞ

Gerçek dünya bizim hızlı ve doğrudan anlayışımız için fazla karışık bir yapıya sahiptir. Bu karışıklığı gidermek için çeşitli matematiksel modeller üretilmiştir. Fakat bu matematiksel modeller de net çözümler sunamamıştır. Mühendislik, fizik, bilgisayar bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler, sağlık bilimleri ve daha birçok alandaki problemleri biçimlendirirken verilerdeki belirsizlik, geleneksel klasik metotları kullanmayı başarısız hale getirmiştir. Bunun sebebi doğal çevre olgusunda ve insanın gerçek dünya hakkında bilgisindeki belirsizliklerden ya da objeleri ölçme araçlarının sınırlandırılmasından kaynaklı olabilmektedir. Örneğin şehir, il ve ilçe gibi bölgeler arasındaki sınır belirsizliği, net popülasyon artış oranındaki belirsizlik ya da veri tabanı bilgilerini kullanarak makineleşmiş bir çevre içinde verilen karardaki belirsizlik gibi. Yeni ve net durumlar üzerine kurulmuş klasik küme teorisi bu tarz belirsizliklerle ilgili problemleri çözerken tam anlamıyla uygun olmamaktadır.

Bulanık küme teorisi [1], sezgisel bulanık küme teorisi [2], belirsiz küme teorisi, matematiksel zaman teorisi [3,4] ve kaba küme teorisi [5] gibi farklı teoriler vardır. Bu teoriler kesin olmayan durumlara karşı araç olarak kullanılabilir ama tüm bu teorilerin kendi içinde zorlukları vardır. Molodtsov'a göre bu zorlukların sebebi yüksek ihtimalle teorilerin parametreleştirme araçlarındaki yetersizliktir. Molodtsov [6] da bu problemlerden arınmış olarak esnek küme teorisini yeni bir matematik teorisi olarak ortaya koymuştur. Çalışmalarında yeni teorisinin asıl sonuçlarını başarılı bir şekilde başka yönlere uygulamıştır. Molodtsov çalışmasında esnek küme teorisinin bulanık küme teorisi, kaba küme teorisi, olasılık teorisi ve oyun teorisinin parametritasyon sendromundan ne kadar uzak olduğunu da göstermiştir. Esnek sistemler, parametrelerin dahil olmasıyla genel bir yapı oluşturur.

Maji vd. [7,8] de uygun nesne seçimini muhafaza etmek için parametrelerin azaltılmasına dayanan karar verme problemlerinde esnek küme uygulamalarını sunmuştur. Chen [9] da esnek küme parametrizasyonunu azaltma ve kaba küme teorisinde öznitelik azalması ile karşılaştırılması için yeni bir tanım sunmuştur. Pei ve Miao [10] da esnek kümelerin yeni bir bilgi sistemleri sınıfı olduğunu göstermiştir. Kong vd. [11] de esnek kümelerin normal parametrelerinin azaltılması kavramını ortaya koymuştur. Bunu kullanmadaki amacı ise, isteğe bağlı seçenek seçimini araştırmak ve esnek kümelere bir parametre kümesi eklemektir. Zoe ve Xiao [12] de esnek veri analizi yaklaşımını ele almıştır.

Esnek küme teorisi ve uygulama alanları hakkında yapılan araştırmalar hızlı bir şekilde ilerlemektedir. 2001'den 2003'e kadar Maji vd. [13] de esnek kümelerin ve bulanık esnek kümelerin matematiksel yönü üzerinde çalışmıştır. Bunun yanı sıra Biswas, Nanda [14] ve Rosenfeld [15] bulanık gruplar üzerinde ayrı ayrı çalışmalar yapmışlardır. 2007 yılında Aktaş ve Çağman [16] de esnek grup teorisinin temel versiyonunu tanıtmış ve daha sonra bu çalışma 2011'de bulanık grup olarak genişletilmiştir. Jun [17,18] ise esnek BCK/BCI-cebirini ve onun ideal teorisindeki uygulamalarını araştırmıştır. Feng vd. [19] de esnek yarı halkalar, esnek idealler ve idealistik esnek yarı halkalar üzerine çalışmıştır. Ali vd. [20], Shabir ve İrfan Ali [20,21] genelleştirilmiş bulanık idealler ve bulanık idealleri karakterize eden bir yarı grup üzerinde çalışmışlardır. 2012 de Shabir ve Naz [22] de esnek topolojik esnek uzay kavramını tanımlamışlar. Esnek topolojik uzayın klasik topolojik uzaydan daha kapsamlı ve genelleştirilmiş olduğu söylemişlerdir. Esnek topolojik uzaylar için esnek ayrıştırma aksiyomları tanımlanmış ve daha ileri araştırmalarda değerli olabilecek bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun devamı olarak esnek küme teorisinde topolojik yapının ya da cebirsel ve topolojik yapıların kombinasyonunu incelemek doğal bir hal almıştır. Nazmul ve Samanta [23] de bu hali incelemek ve Haar ölçümü, Haar integralini geliştirirken topolojik grup yapısının önemi de göz önünde bulundurarak bu çalışmada esnek topolojik esnek grup kavramı tanıtmışlardır. Nazmul ve Samanta'nın [23] çalışmalarında ki amaç esnek topolojik esnek gruplar, alt sistemleri ve morfizmi kavramını tanıtmak ve özelliklerini incelemektir. Bulanık kümelerle ilgili de Foster [24], Liang ve Hai [25] tarafından bulanık topolojik grup yapısı ile ilgili önemli çalışmalara imza atılmıştır. [26] de ise esnek kümelerde esnek topolojik gruplar üzerine çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında esnek küme kavramdan yola çıkarak esnek grup, esnek normal altgrup, esnek grup homomorfizmi, topolojik grup, esnek topoloji, esnek topolojik uzay kavramları açıklanmış, Nazmul ve Samanta'nın [23] makalesinden yola çıkarak esnek topolojik esnek grup, esnek topolojik esnek normal altgrup tanıtılıp bazı özellikleri incelenmiştir.



1.BÖLÜM

ESNEK YAPI KAVRAMI

Molodtsov [6] esnek yapı kavramını şu şekilde tanımladı. U bir başlangıç evrensel kümesi ve E bir parametre kümesi olsun. $P(U)$ da U nun kuvvet kümesini gösterecek şekilde $A \subset E$ olsun.

Tanım 1.1.1. $F: A \rightarrow P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere bir (F,A) çiftine U üzerinde bir esnek küme denir. Başka bir deyişle U üzerinde bir esnek küme U kümesinin parametrelendirilmiş alt kümelerinin bir ailesidir [8].

Örnek 1.1.1.

U üzerinde çalışacak evlerin kümesi ve E parametre kümesi olsun. Burada her parametre bir kelime veya bir cümledir.

$$E = \{\text{pahalı; güzel; ahşap; ucuz; yeşil çevrede; modern; iyi durumda; kötü durumda}\}$$

olarak seçilsin. Bu durumda, tanımlanan esnek yapı pahalı evleri, güzel evleri ve benzerlerini belirtir. (F,E) esnek kümesi, bay X tarafından satılacak olan “evlerin özelliklerini” tanımlar.

Kabul edelim ki U altı evden oluşan bir küme olarak verilsin. Bu durumda

$$U = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \} \text{ olur. } E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \}$$

e_1 ‘pahalı’ parametresini gösterecek şekilde,

e_2 ‘güzel’ parametresini gösterecek şekilde,

e_3 ‘ahşap’ parametresini gösterecek şekilde,

e_4 ‘ucuz’ parametresini gösterebilirsin,

e_5 ‘yeşil çevrede’ parametresini gösterebilirsin.

Kabul edelim ki

$$F(e_1) = \{ h_2, h_4 \}$$

$$F(e_2) = \{ h_1, h_3 \}$$

$$F(e_3) = \{ h_3, h_4, h_5 \}$$

$$F(e_4) = \{ h_1, h_3, h_5 \}$$

$$F(e_5) = \{ h_1 \}$$

olsun. (F, E) esnek kümesine U kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş ailesi $\{F(e_i) : i = 1,2,3,4,5\}$ dir ve bir objenin aynı özelliğe yakın olan koleksiyonlarını tanımlar. Burada $F(e_1)$ “pahalı evler” demektir ve fonksiyonun değer kümesinde $\{h_2, h_4\}$ anlamındadır. Seçtiğimiz ücret fonksiyonuna göre h_2 ve h_4 evleri pahalı evler kategorisindedir. Böylece, (F, E) esnek kümesini aşağıdaki gibi bir yaklaşım koleksiyonu olarak görebiliriz:

$$(F, E) = \{ \text{pahalı evler} = \{ h_2, h_4 \}, \text{güzel evler} = \{ h_1, h_3 \}, \text{ahşap evler} = \{ h_3, h_4, h_5 \}, \\ \text{ucuz evler} = \{ h_1, h_3, h_5 \} \text{ yeşil çevrede} = \{ h_1 \} \},$$

şeklinde gösterilir ki her bir yaklaşım iki parçadan oluşur. Örneğin, “pahalı evler = $\{h_2, h_4\}$ ” yaklaşımı aşağıdaki gibi iki parçadan oluşur

- i) Yaklaşımın seçilecek özelliği pahalı olması
- ii) Yaklaşımın değer kümesi $\{h_2, h_4\}$ ikilisi ile oluşur.

Çizelge 1. Esnek bir kümenin tablo gösterimi [8]

U	‘Pahalı’	‘Güzel’	‘Ahşap’	‘Ucuz’	‘Yeşil çevrede’
h_1	0	1	0	1	1
h_2	1	0	0	0	0
h_3	0	1	1	1	0
h_4	1	0	1	0	0
h_5	0	0	1	1	0
h_6	0	0	0	0	0

Bir esnek kümenin bilgisayar içerisinde depolanmasındaki amaç Tablo 1 deki esnek kümeyi temsil etmesidir. Yukarıda yer alan örnek esnek kümeye karşılık gelir.

Tanım 1.1.2. Bir (F, E) esnek kümesinin tüm değer kümelerinin sınıfı, esnek kümenin değer sınıfı olarak adlandırılır ve $C_{(F,E)}$ ile gösterilir. Yukarıdaki örnek için açıkça, $C_{(F,E)} \subseteq P(U)$ dir [8].

Tanım 1.1.3. Aynı başlangıç U evrensel kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) iki esnek küme olsun.

- (i) $A \subset B$
- (ii) $\forall e \in A, F(e) \subset G(e)$

şartları sağlanıyorsa (F, A) ya (G, B) nin esnek bir alt kümesidir denir ve $(F,A) \simeq (G,B)$ şeklinde gösterilir. (G,B) , (F,A) nın esnek bir alt kümesi ise (F,A) esnek kümesi (G,B) esnek kümesini esnek kapsar denir ve $(F,A) \supseteq (G,B)$ şeklinde gösterilir [8].

Tanım 1.1.4. (F, A) ve (G,B) , U üzerinde iki esnek küme olsun. (F, A) , (G,B) nin bir esnek alt kümesi ve (G,B) de (F, A) nın bir esnek alt kümesi ise bu iki esnek kümeye U üzerinde eşit esnek kümeler denir [8].

Örnek 1.1.2. Örnek 1.1.1 i göz önüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset E$ olsun Açıkça $A \subset B$ dir. (F,A) ve (G,B) aynı $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrenseli üzerinde iki esnek kümedir öyle ki

$$\begin{aligned} G(e_1) &= \{h_2, h_4\} & F(e_1) &= \{h_2, h_4\} \\ G(e_2) &= \{h_1, h_3\} & F(e_3) &= \{h_3, h_4, h_5\} \\ G(e_3) &= \{h_3, h_4, h_5\} & F(e_5) &= \{h_1\} \\ G(e_5) &= \{h_1\} \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle $(F,A) \simeq (G,B)$ olduğu kolayca görülebilir [8].

Tanım 1.1.5. $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ bir parametre kümesi olsun. E kümesinin “olmayan kümesi” $\neg E$ ile gösterilsin. $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$, $\neg e_1 = e_1$ in olumsuzudur. Burada belirtelim ki \neg ve \neg in farklı operatörlerdir.

Buna göre aşağıdaki sonuçlar [8] de verilmiştir.

Önerme 1.1.1. $A \neq \emptyset$ bir parametre kümesi olmak üzere,

1. $\neg(\neg A) = A$
2. $\neg(A \cup B) = (\neg A \cap \neg B)$
3. $\neg(A \cap B) = (\neg A \cup \neg B)$ [8].

Örnek 1.1.3. Örnek 1.1.1. de verilen örneği gözönüne alalım.

$$\neg E = \{\text{pahalı olmayan; güzel olmayan; ahşap olmayan; ucuz olmayan; yeşil çevrede olmayan}\}$$

dir [8].

Tanım 1.1.6. (F, A) esnek kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ ile gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ şeklinde tanımlanır. Burada $F^c : \neg A \rightarrow P(U)$ her $\alpha \in \neg A$ için $F^c(\alpha) = U - F(\neg \alpha)$ dir. F^c fonksiyonu f fonksiyonunun esnek tümleyen fonksiyonu olarak adlandırılır. Açıkça $(F^c)^c = F$, yani $((F, A)^c)^c = (F, A)$ dır [8].

Örnek 1.1.4. Örnek 1.1.1. e göre

$$(F, E)^c = \{\text{pahalı olmayan evler} = \{h_1, h_3, h_5, h_6\}, \text{ güzel olmayan evler} = \{h_2, h_4, h_5, h_6\}, \\ \text{ahşap olmayan evler} = \{h_1, h_2, h_6\}, \text{ ucuz olmayan evler} = \{h_2, h_4, h_6\}, \\ \text{yeşil çevrede olmayan evler} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}\}$$

dir [8].

Tanım 1.1.7. Her $e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ($\emptyset =$ Boş Küme) ise (F, A) esnek kümesi U üzerinde boş esnek küme olarak adlandırılır ve $\tilde{\emptyset}$ şeklinde gösterilir [8].

Örnek 1.1.5. Kabul edelim ki U ahşap evler kümesi ve A parametre kümesi olsun. U başlangıç evrensel kümesinde beş ev aşağıdaki şekilde verilsin;

$$U = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \} \text{ ve } A = \{ \text{tuğla}; \text{çamurlu}; \text{çelik}; \text{taş} \}.$$

(F, A) esnek kümesi “Evlerin yapısı” ile tanımlansın. (F, A) esnek kümesi;

$F(\text{tuğla})$ tuğladan yapılmış evler anlamına gelir,

$F(\text{çamurlu})$ çamurdan yapılmış evler anlamına gelir,

$F(\text{çelik})$ çelikten yapılmış evler anlamına gelir,

$F(\text{taş})$ taştan yapılmış evler anlamına gelir.

(F, A) esnek kümesi yaklaşım koleksiyonu

$$(F, A) = \{ \text{tuğladan yapılmış evler} = \phi, \text{ çamurdan yapılmış evler} = \phi, \\ \text{ çelikten yapılmış evler} = \phi, \text{ taştan yapılmış evler} = \phi \}$$

şeklinindedir. O halde (F, A) burada boş bir esnek kümedir [8].

Tanım 1.1.8. Her $e \in A$ için $F(e) = U$ ise (F, A) esnek kümesi U üzerinde tam esnek küme olarak adlandırılır ve \tilde{U} şeklinde gösterilir. Açıkça $\tilde{U}^c = \tilde{\phi}$ ve $\tilde{\phi}^c = \tilde{U}$ dir [8].

Örnek 1.1.6. Kabul edelim ki, U ahşap evler kümesi A , parametre kümesi olsun. U başlangıç evrensel kümesinde beş ev aşağıdaki şekilde verilsin

$$U = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \} \text{ ve } B = \{ \text{tuğla yok}; \text{çamur yok}; \text{çelik yok}; \text{taş yok} \}.$$

(G, B) esnek kümesi “Evlerin inşası” olarak tanımlansın.

$G(\text{tuğla yok})$ tuğladan inşa edilmeyen evler anlamına gelir,

$G(\text{çamur yok})$ çamurdan inşa edilmeyen evler anlamına gelir,

$G(\text{çelik yok})$ çelikten inşa edilmeyen evler anlamına gelir,

$G(\text{taş yok})$ taştan inşa edilmeyen evler anlamına gelir.

(G, B) esnek kümesi yaklaşım koleksiyonu aşağıdaki gibidir;

$$(G, B) = \{ \text{tuğladan inşa edilmeyen evler} = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \},$$

$$\text{ çamurdan inşa edilmeyen evler} = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \},$$

$$\text{ çelikten inşa edilmeyen evler} = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \},$$

$$\text{ taştan inşa edilmeyen evler} = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \} \}.$$

Burada (G,B) bir tam esnek kümedir.

Molodtsov [6] da AND ve OR kavramlarını aşağıdaki gibi iki esnek küme üzerinde tanımlandı [8].

Tanım 1.1.9. (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olmak üzere “ (F,A) AND (G,B) ” $(F,A) \wedge (G,B)$ şeklinde gösterilir ve $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır. Burada her $(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ dir [8].

Örnek 1.1.7. (F,A) evlerin maliyetini gösteren esnek küme ve (G,B) de evlerin çekiciliğini gösteren esnek küme olsun. Kabul edelim ki

$$U = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10} \}$$

$$A = \{ \text{çok pahalı, pahalı, ucuz} \} \text{ ve } B = \{ \text{güzel, yeşil çevrede, ucuz} \}$$

olsun.

$$F(\text{çok pahalı}) = \{ h_2, h_4, h_7, h_8 \}$$

$$G(\text{güzel}) = \{ h_2, h_3, h_7 \}$$

$$F(\text{pahalı}) = \{ h_1, h_3, h_5 \}$$

$$G(\text{yeşil çevrede}) = \{ h_5, h_6, h_8 \}$$

$$F(\text{ucuz}) = \{ h_6, h_9, h_{10} \}$$

$$G(\text{ucuz}) = \{ h_6, h_9, h_{10} \}$$

Şeklinde tanımlansın. Burada $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ olmak üzere;

$$H(\text{çok pahalı, güzel}) = \{ h_2, h_7 \}$$

$$H(\text{çok pahalı, yeşil çevrede}) = \{ h_8 \}$$

$$H(\text{çok pahalı, ucuz}) = \phi$$

$$H(\text{pahalı, güzel}) = \{ h_3 \}$$

$$H(\text{pahalı, yeşil çevrede}) = \{ h_5 \}$$

$$H(\text{pahalı, ucuz}) = \phi$$

$$H(\text{ucuz, güzel}) = \phi$$

$$H(\text{ucuz, yeşil çevrede}) = \{ h_6 \}$$

$$H(\text{ucuz, ucuz}) = \{ h_6, h_9, h_{10} \}$$

dir [8].

Tanım 1.1.10. (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olmak üzere “ (F,A) OR (G,B) ” $(F,A) \vee (G,B)$ şeklinde gösterilir. $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ şeklinde tanımlanır. Burada her $(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $O(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ dir [8].

Örnek 1.1.8. Örnek 1.1.7. ye göre $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ olmak üzere, Burada;

$$O(\text{çok pahalı, güzel}) = \{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\}$$

$$O(\text{çok pahalı, yeşil çevrede}) = \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$$

$$O(\text{çok pahalı, ucuz}) = \{h_2, h_4, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$$

$$O(\text{pahalı, güzel}) = \{h_1, h_2, h_3, h_5, h_7\}$$

$$O(\text{pahalı, yeşil çevrede}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\}$$

$$O(\text{pahalı, ucuz}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\}$$

$$O(\text{ucuz, güzel}) = \{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\}$$

$$O(\text{ucuz, yeşil çevrede}) = \{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\}$$

$$O(\text{ucuz, ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$$

De Morgan kuralına benzer sonuçların buradada doğru olduğu aşağıdaki sonuçta verilmiştir [8].

Önerme 1.1.2. (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olmak üzere

- i) $((F,A) \vee (G,B))^c = (F,A)^c \wedge (G,B)^c$
- ii) $((F,A) \wedge (G,B))^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$ dir [8].

İspat :

- i) $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ olduğunu varsayalım
 $((F,A) \vee (G,B))^c = (O, A \times B)^c = (O^c, \uparrow(A \times B))$
 $(F,A)^c \wedge (G,B)^c = (F^c, \uparrow A) \wedge (G^c, \uparrow B),$
 $= (J, \uparrow(A \times B)),$ burada $J(x,y) = F^c(x) \cap G^c(y)$
 $= (J, \uparrow(A \times B)),$
 $(\uparrow \alpha, \uparrow \beta) \in \uparrow(A \times B)$ olsun. Burada

$$\begin{aligned}
O^c(\gamma\alpha, \gamma\beta) &= U - O(\alpha, \beta), \\
&= U - [F(\alpha) \cup G(\beta)], \\
&= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)], \\
&= F^c(\gamma\alpha) \cap G^c(\gamma\beta) \\
&= J(\gamma\alpha, \gamma\beta)
\end{aligned}$$

olur ki O^c ve J nin eşit olduğu görülür [8].

ii) $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ olduğunu varsayalım

$$((F,A) \wedge (G,B))^c = (H, A \times B)^c = (H^c, \mathcal{I}(A \times B))$$

$$(F,A)^c \vee (G,B)^c = (F^c, \mathcal{I}A) \vee (G^c, \mathcal{I}B),$$

$$= (K, \mathcal{I}(A \times B)), \quad \text{burada } K(x,y) = F^c(x) \cup G^c(y)$$

$$= (K, \mathcal{I}(A \times B)),$$

$(\gamma\alpha, \gamma\beta) \in \mathcal{I}(A \times B)$ olsun. Burada

$$H^c(\gamma\alpha, \gamma\beta) = U - H(\alpha, \beta),$$

$$= U - [F(\alpha) \cap G(\beta)],$$

$$= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)],$$

$$= F^c(\gamma\alpha) \cup G^c(\gamma\beta)$$

$$= K(\gamma\alpha, \gamma\beta)$$

olur ki H^c ve K nın eşit olduğu görülür [8].

Tanım 1.1.11. U evrensel başlangıç kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & \text{öyle ki } e \in A - B \\ G(e) & \text{öyle ki } e \in B - A \\ F(e) \cup G(e), & \text{öyle ki } e \in A \cap B \end{cases}$$

ise (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin esnek birleşimi denir ve $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.1.9. Örnek 1.1.7. yi göz önüne alalım $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,C)$ esnek birleşim kümesi için

$$H(\text{çok pahalı}) = \{ h_2, h_4, h_7, h_8 \}$$

$$H(\text{pahalı}) = \{ h_1, h_3, h_5 \}$$

$$H(\text{ucuz}) = \{ h_6, h_9, h_{10} \}$$

$$H(\text{güzel}) = \{ h_2, h_3, h_7 \}$$

$$H(\text{yeşil çevrede}) = \{ h_5, h_6, h_8 \}$$

şeklindedir [8].

Tanım 1.1.12. U evrensel başlangıç kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. Burada $C = A \cap B$ ve her $e \in C$ için $H(e) = G(e) \cap F(e)$ olmak üzere (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin esnek kesişimi denir ve $(F,A) \cap (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir. O halde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin esnek kesişimi (H,C) yine bir esnek kümedir.

Örnek 1.1.10 Örnek 1.1.7. yi göz önüne alalım $C = A \cap B = \{\text{ucuz}\}$ ve $H(\text{ucuz}) = \{ h_6, h_9, h_{10} \}$ dır [8].

Önerme 1.1.3. U evrensel başlangıç kümesi üzerinde (F,A) iki esnek küme olsun.

i) $(F,A) \tilde{\cup} (F,A) = (F,A)$

ii) $(F,A) \tilde{\cap} (F,A) = (F,A)$

iii) $(F,A) \tilde{\cup} \tilde{\phi} = \tilde{\phi}$

iv) $(F,A) \tilde{\cap} \tilde{\phi} = \tilde{\phi}$

v) $(F,A) \tilde{\cup} \tilde{A} = \tilde{A}$

vi) $(F,A) \tilde{\cap} \tilde{A} = (F,A)$ dir [8].

Önerme 1.1.4. U evrensel başlangıç kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun.

i) $((F,A) \tilde{\cup} (G,B))^c = (F,A)^c \tilde{\cup} (G,B)^c$

ii) $((F,A) \tilde{\cap} (G,B))^c = (F,A)^c \tilde{\cap} (G,B)^c$ dir [8].

İspat:

i) $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,A \cup B)$, burada

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \text{öyle ki } \alpha \in A - B \\ G(\alpha) & \text{öyle ki } \alpha \in B - A \\ F(\alpha) \cup G(\alpha), & \text{öyle ki } \alpha \in A \cap B \end{cases}$$

$$F(\alpha) \cup G(\alpha), \text{ öyle ki } \alpha \in A \cap B.$$

$$\begin{aligned} \text{Buradan } ((F,A) \tilde{\cup} (G,B))^c &= (H,A \cup B)^c, \\ &= (H^c, \lrcorner A \cup \lrcorner B) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Şimdi $H^c(\lrcorner \alpha) = U - H(\alpha)$, her $\lrcorner \alpha \in \lrcorner A \cup \lrcorner B$

$$H^c(\lrcorner \alpha) = \begin{cases} F^c(\lrcorner \alpha), & \text{öyle ki } \lrcorner \alpha \in \lrcorner A - \lrcorner B \\ G^c(\lrcorner \alpha), & \text{öyle ki } \lrcorner \alpha \in \lrcorner B - \lrcorner A \\ F^c(\lrcorner \alpha) \cup G^c(\lrcorner \alpha), & \text{öyle ki } \lrcorner \alpha \in \lrcorner A \cap \lrcorner B \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ((F,A)^c \tilde{\cup} (G,B))^c &= (F^c, \lrcorner A) \tilde{\cup} (G^c, \lrcorner B) \\ &= (K, \lrcorner A \cup \lrcorner B), \end{aligned}$$

olmak üzere benzer şekilde

$$K(\lrcorner \alpha) = \begin{cases} F^c(\lrcorner \alpha), & \text{öyle ki } \lrcorner \alpha \in \lrcorner A - \lrcorner B \\ G^c(\lrcorner \alpha), & \text{öyle ki } \lrcorner \alpha \in \lrcorner B - \lrcorner A \\ F^c(\lrcorner \alpha) \cup G^c(\lrcorner \alpha), & \text{öyle ki } \lrcorner \alpha \in \lrcorner A \cap \lrcorner B \end{cases}$$

dir. Buradan H^c ve K eşit olduğunu gösterilmiş olur [8].

ii) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,A \cap B)$ olduğunu kabul edelim

$$\begin{aligned} \text{O halde } ((F,A) \tilde{\cap} (G,B))^c &= (H^c, \lrcorner A \cap \lrcorner B) \\ (F,A)^c \tilde{\cap} (G,B)^c &= (F^c, \lrcorner A) \tilde{\cap} (G^c, \lrcorner B) \\ &= (K, \lrcorner A \cap \lrcorner B) \end{aligned}$$

dir. Burada her $\gamma \alpha \in (\neg A \cap \neg B)$ için

$$\begin{aligned} K(\gamma \alpha) &= F^c(\gamma \alpha) \cap G^c(\gamma \alpha) \\ &= F(\alpha) \cap G(\alpha), \text{ burada } \alpha \in A \cap B, \\ &= H(\alpha) \\ &= H^c(\gamma \alpha) \end{aligned}$$

dir. Buradan K ve H^c nin eşit olduğu gösterilmiş olur [8].

Önerme 1.1.5. (F,A) , (G,B) ve (H,C) , U üzerinde üç esnek küme olsun.

- i) $(F,A) \tilde{\cup} ((G,B) \tilde{\cup} (H,C)) = ((F,A) \tilde{\cup} (G,B)) \tilde{\cup} (H,C)$,
- ii) $(F,A) \tilde{\cap} ((G,B) \tilde{\cap} (H,C)) = ((F,A) \tilde{\cap} (G,B)) \tilde{\cap} (H,C)$,
- iii) $(F,A) \tilde{\cup} ((G,B) \tilde{\cap} (H,C)) = ((F,A) \tilde{\cup} (G,B)) \tilde{\cap} ((F,A) \tilde{\cup} (H,C))$,
- iv) $(F,A) \tilde{\cap} ((G,B) \tilde{\cup} (H,C)) = ((F,A) \tilde{\cap} (G,B)) \tilde{\cup} ((F,A) \tilde{\cap} (H,C))$ dir [8].

Önerme 1.1.6. (F,A) , (G,B) ve (H,C) , U üzerinde üç esnek küme olsun.

- i) $(F,A) \vee ((G,B) \vee (H,C)) = ((F,A) \vee (G,B)) \vee (H,C)$,
- ii) $(F,A) \wedge ((G,B) \wedge (H,C)) = ((F,A) \wedge (G,B)) \wedge (H,C)$,
- iii) $(F,A) \vee ((G,B) \wedge (H,C)) = ((F,A) \vee (G,B)) \wedge ((F,A) \vee (H,C))$,
- iv) $(F,A) \wedge ((G,B) \vee (H,C)) = ((F,A) \wedge (G,B)) \vee ((F,A) \wedge (H,C))$ dir [8].

2. BÖLÜM

ESNEK GRUP , TOPOLOJİK GRUP VE ESNEK TOPOLOJİK UZAY

2.1. Esnek Grup

Bu bölümde G, G_1, G_2 ve K birer grup ve A boştan farklı bir küme olarak göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.1.1. (F, A) , G grubu üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $x \in A$ için $F(x)$, G nin bir alt grubu yani her $x \in A$ için $F(x) \leq G$ ise (F, A) ya G üzerinde esnek grup denir [16].

Teorem 2.1.1. I indis cümlesi olmak üzere $\{(F_i, A); i \in I\}$, G grubunun esnek gruplarının boştan farklı bir ailesi ise $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (F_i, A)$ da G grubu üzerinde bir esnek gruptur [16].

Tanım 2.1.2. (F, A) , G grubu üzerinde bir esnek grup olsun.

- i) e , G grubunun birim elemanı olmak üzere eğer her $x \in A$ için $F(x) = \{e\}$ ise (F, A) ya G grubu üzerinde bir birim esnek grup denir.
- ii) Eğer her $x \in A$ için $F(x) = G$ ise (F, A) ya tam esnek grup denir [16].

Teorem 2.1.2. (F, A) , G grubu üzerinde bir esnek grup ve $f : G \rightarrow K$ bir grup homomorfizmi olsun.

- i) Eğer her $x \in A$ için $F(x) = \text{Ker}f$, f in çekirdeği ise $(f(F), A)$, K üzerinde birim esnek gruptur.

- ii) Eğer (F,A) , G grubu üzerinde tam esnek grup ve f örten ise $(f(F),A)$ da K üzerinde tam esnek gruptur [16].

Tanım 2.1.3. (F_1,A) ve (F_2,A) , G grubu üzerinde iki esnek grup olsun. Eğer her $x \in A$ için

$$F_1(x) \leq F_2(x) \quad ((F_1,A) \triangleleft (F_2,A))$$

ise (F_1,A) ya (F_2,A) nin *esnek alt grubu* (*esnek normal alt grubu*) adı verilir ve

$$(F_1,A) \lesssim (F_2,A) \quad ((F_2,A) \gtrsim (F_1,A))$$

şeklinde gösterilir [16].

Teorem 2.1.3. (F, A) , G grubu üzerinde bir esnek grup ve I indis cümlesi olmak üzere $\{(H_i, A); i \in I\}$, (F, A) nin esnek alt gruplarının (esnek normal alt gruplarının) boştan farklı bir ailesi ise $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (H_i, A)$, (F, A) nin bir esnek alt grubudur (esnek normal alt grubudur) [16].

Teorem 2.1.4. (F_1, A) ve (F_2, A) , G üzerinde iki esnek grup ve (F_1, A) da (F_2, A) nin bir esnek alt bir grubu olsun. Eğer $f: G \rightarrow K$ bir grup homomorfizmi ise $(f(F_1), A)$ ve $(f(F_2), A)$, K üzerinde birer esnek alt gruptur. Ayrıca $(f(F_1), A)$ da $(f(F_2), A)$ nin bir esnek alt grubudur [16].

İspat:

- (1) e_k, K grubunun birim elemanı olmak üzere $x \in A$ için $f(F(x)) = e_k$ olacağından $(f(F),A)$, K üzerinde birim esnek gruptur.
- (2) (F,A) , G üzerinde tam esnek grup olduğundan $f(F(x)) = f(G)=K$ dır. Buradan $(f(F),A)$, K üzerinde bir tam esnek gruptur [16].

Tanım 2.1.4. (F, A) , G_1 grubu üzerinde bir esnek grup ve $f: G_1 \rightarrow G_2$ bir grup homomorfizmi olsun. Her $x \in A$ için

$$K_f(x) = [Ker(f)]_{F(x)} = (Kerf) \cap F(x) = \{g \in F(x); f(g) = e_{G_2}\}$$

olacak şekilde bir $K_f : A \rightarrow P(G_1)$ fonksiyonu tanımlansın. Burada (K_f, A) , G_1 üzerinde bir esnek gruptur. Ayrıca (K_f, A) , (F, A) nın bir esnek normal alt grubu olduğu açıktır [27].

Tanım 2.1.5. (N, A) , (F, A) nın bir normal esnek alt grubu olacak şekilde (N, A) ve (F, A) , G üzerinde iki esnek grup olsun. A üzerinde bir $\frac{F}{N}$ dönüşümü her $x \in A$ için

$\frac{F}{N}(x) = \frac{F(x)}{N(x)}$ şeklinde tanımlanırsa $\frac{F(x)}{N(x)}$ bölüm grubu her bir $x \in A$ için bir gruptur.

Böylece her bir $x \in A$ için $\frac{F(x)}{N(x)}$ şeklinde bir bölüm grup elde ederiz. Yani esnek bölüm grubu olarak adlandırdığımız genelleşmiş bir esnek grup üretiriz ki buna esnek bölüm grup denir ve $(\frac{F}{N}, A)$ ile gösterilir [27].

Tanım 2.1.6. (F_1, A) ve (F_2, A) sırasıyla G_1 ve G_2 grupları üzerinde iki esnek grup olsun. Herbir $x \in A$ için $\alpha_x(F_1(x)) = F_2(x)$ olacak şekilde bir $\alpha_x : F_1(x) \rightarrow F_2(x)$ homomorfizmi mevcut ise (F_1, A) , (F_2, A) ya esnek homomorfiktir denir ve $(F_1, A) \sim (F_2, A)$, şeklinde gösterilir. Bu tanımda eğer her $x \in A$ için $\alpha_x : F_1(x) \rightarrow F_2(x)$ izomorfizm ise (F_1, A) , (F_2, A) ya esnek izomorfiktir denir ve $(F_1, A) \simeq (F_2, A)$ şeklinde gösterilir [27].

Tanım 2.1.7. (F_1, A) ve (F_2, A) sırasıyla G_1 ve G_2 grupları üzerinde birer esnek grup olsun. Ayrıca (F_1, A) , (F_2, A) ya esnek homomorfik olsun. α_x Tanım 2.1.7 ye karşılık gelen homomorfizm olmak üzere her $x \in A$ için

$$(\alpha F_1)(x) = (\alpha_x(F_1(x))), \alpha F_1 : A \rightarrow P(G_2)$$

$$(\alpha^{-1} F_2)(x) = (\alpha^{-1}(F_2(x))), \alpha_x^{-1} F_2 : A \rightarrow P(G_1)$$

şeklinde tanımlıdır [27].

Teorem 2.1.5. (F_1, A) ve (F_2, A) sırasıyla G_1 ve G_2 grupları üzerinde birer esnek grup olsun. Ayrıca (F_1, A) da (F_2, A) ya esnek homomorfik olsun.

- i) Eğer her bir $x \in A$ ya karşılık gelen homomorfizm $\alpha_x: F_1(x) \rightarrow F_2(x)$ ise $(\alpha F_1, A)$ ve $(\alpha^{-1} F_2, A)$ sırasıyla G_1 ve G_2 üzerinde birer esnek gruptur.
- ii) Eğer (F_3, A) , (F_1, A) nin esnek normal alt grubu ise $(\alpha F_3, A)$, $(\alpha F_1, A)$ nin esnek normal alt grubudur.
- iii) Eğer (F_4, A) , (F_2, A) nin esnek normal alt grubu ise $(\alpha^{-1} F_4, A)$ da $(\alpha^{-1} F_2, A)$ nin bir esnek normal alt grubudur [27].

İspat:

- i) $\alpha_x : F_1(x) \rightarrow F_2(x)$ homomorfizm olduğundan her bir $x \in A$ için $(\alpha F_1)(x) = (\alpha_x(F_1(x)))$, $F_2(x)$ in bir alt grubudur ve buradan G_2 nin bir alt grubu olur. Dolayısıyla $(\alpha F_1, A)$, G_2 grubu üzerinde bir esnek gruptur. Benzer şekilde her bir $x \in A$ için $(\alpha^{-1} F_2)(x) = (\alpha_x^{-1}(F_2(x)))$, $F_1(x)$ in bir alt grubudur ve buradan G_1 in bir alt grubudur ki burada $(\alpha_x^{-1}(F_2(x)))$, α_x altında $F_2(x)$ in ters görüntüsüdür. Böylece $(\alpha^{-1} F_2, A)$, G_1 de bir esnek gruptur.
- ii) Her $x \in A$ için $\alpha_x, F_1(x)$ den $F_2(x)$ üzerine bir homomorfizm olduğundan $\alpha_x(F_1(x))$ ve $\alpha_x(F_3(x))$, $F_2(x)$ in birer alt grubudur. Benzer şekilde $F_3(x)$, $F_1(x)$ in bir normal alt grubu ve α_x homomorfizm olduğundan $\alpha_x(F_3(x))$ de $\alpha_x(F_1(x))$ in bir alt grubudur. $y \in \alpha_x(F_1(x))$ olsun. Bu durumda $y = \alpha_x(z)$ olacak şekilde $z \in F_1(x)$ vardır. Şimdi her $x \in A$ için $y \in \alpha_x(F_3(x)) = \alpha_x(z)$ $\alpha_x(F_3(x)) = \alpha_x(z F_3(x)) = \alpha_x(F_3(x)z) = \alpha_x(F_3(x)) \alpha_x(z) = \alpha_x(F_3(x)) y$ dir. Buradan her $x \in A$ için $\alpha_x(F_3(x))$, $\alpha_x(F_1(x))$ in bir normal alt grubudur. Dolayısıyla $(\alpha F_3, A)$ da $(\alpha F_1, A)$ nin normal esnek alt grubudur.
- iii) İspat (ii) ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.1.6. (N,A) , (F,A) nın bir esnek alt grubu ve her $x \in A$ için $\phi_x : F(x) \rightarrow F(x)/N(x)$, $\phi_x(\zeta) = \zeta N(x)$, $\zeta \in F(x)$ şeklinde tanımlı kanonik dönüşüm bir örten homomorfizmdir [27].

Tanım 2.1.8. (F_1, A) , (F_2, A) ya esnek homomorfik olacak şekilde (F_1, A) ve (F_2, A) sırasıyla G_1 ve G_2 grupları üzerinde birer esnek grup olsun. Ayrıca her bir $x \in A$ ya karşılık gelen homomorfizm $\alpha_x : F_1(x) \rightarrow F_2(x)$ ve K_x de α_x in çekirdeği olsun $K : A \rightarrow P(G_1)$, $K(x) = K_x$ olacak şekilde bir dönüşüm tanımlayalım. Açıkça (K, A) , G_1 üzerinde bir esnek gruptur ve $\{\alpha_x; x \in A\}$ ya karşılık gelen esnek çekirdek olarak adlandırılır. Ayrıca (K, A) , (F_1, A) nın bir esnek normal alt grubudur [27].

Teorem 2.1.7. (F_1, A) , (F_2, A) ya esnek homomorfik olacak şekilde (F_1, A) ve (F_2, A) sırasıyla G_1 ve G_2 grupları üzerinde birer esnek grup olsun. Ayrıca kabul edelim ki her bir $x \in A$ ya karşılık gelen homomorfizm $\alpha_x : F_1(x) \rightarrow F_2(x)$ ve (K, A) da $\{\alpha_x, x \in A\}$, homomorfizmlerin ailesine karşılık gelen esnek çekirdeği ise $(\frac{F_1}{K}, A)$ esnek grubu (F_2, A) esnek grubuna esnek izomorfiktir [27].

2.2. Topolojik Grup

Tanım 2.2.1. G bir grup, τ da G üzerinde bir topoloji olmak üzere eğer

- i) $f : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$, her $x, y \in G$ için $f(x, y) = xy$
- ii) $g : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ tanımlı her $x \in G$ için $g(x) = x^{-1}$

dönüşümler sürekli ise (G, τ) ya bir topolojik grup denir [23].

Teorem 2.2.1. (G, τ) bir topolojik grup olsun.

- a) Eğer H , G nin cebirsel alt grubu ise (H, τ_H) bir topolojik gruptur. Burada τ_H alt topolojidir.
- b) H , G nin normal alt grubu ve $\phi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ bölüm dönüşümü olsun. Eğer

$$\tau' = \{A \subset \frac{G}{H} : \phi^{-1}(A) \in \tau\}$$

ise τ' bir bölüm topolojisidir ve $(\frac{G}{H}, \tau')$ bir topolojik gruptur.

c) H, G nin normal alt grubu ve $x \in G$ için $\phi : (G, \tau) \rightarrow (\frac{G}{H}, \tau')$ $\phi(x) = xH$ kanonik dönüşümü bir açık homomorfizmdir [28].

Teorem 2.2.2. α bir (G, τ) topolojik grubundan bir (G_1, τ_1) topolojik grubuna grup homomorfizmi olsun. α nın çekirdeği H ve $\phi : (G, \tau) \rightarrow (\frac{G}{H}, \tau')$ bölüm dönüşümü olsun. Bir $\alpha_0 : (\frac{G}{H}, \tau') \rightarrow (G_1, \tau_1)$ için $\alpha = \alpha_0 \phi$ ise $\alpha : (G, \tau) \rightarrow (G_1, \tau_1)$ nin sürekli (açık) olması için gerek şart $\alpha_0 : (\frac{G}{H}, \tau') \rightarrow (G_1, \tau_1)$ sürekli (açık) olmasıdır [28].

Teorem 2.2.3. Her $\alpha \in A$ için (G_α, τ_α) bir topolojik grup olsun ve $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ çarpım topolojisi ile birlikte bir topolojik uzay olmak üzere $(\prod_{\alpha \in A} G_\alpha, \prod_{\alpha \in A} \tau_\alpha)$ bir topolojik gruptur [28].

2.3. Esnek Topolojik Uzay

Bu kısımda Shabir ve Naz'ın [22] referansında verilen esnek topoloji tanımı kullanılarak esnek topolojinin bazı özellikleri incelenecektir. Aksi belirtilmedikçe X başlangıç evrensel olarak kullanılacaktır. A parametrelerin boştan farklı kümesi $S(X, A)$, A parametre kümesi altında X üzerindeki tüm esnek kümelerin koleksiyonunu gösterecektir.

Tanım 2.3.1. X üzerinde esnek kümelerin bir koleksiyonu τ olsun. Eğer τ

- i) $(\tilde{\phi}, A), (\tilde{X}, A) \in \tau$ burada her $\alpha \in A$ için $\tilde{\phi}(\alpha) = \phi, \tilde{X}(\alpha) = X$
- ii) τ da herhangi iki esnek kümenin esnek kesişimi yine τ nun elemanıdır.
- iii) τ da herhangi sayıdaki esnek kümenin esnek birleşimide τ nun elemanıdır.

şartları sağlıyorsa τ ya X üzerinde esnek topoloji ve (X, A, τ) üçlüsüne esnek topolojik uzay denir [22].

Önerme 2.3.1. (X, A, τ) , X üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda her bir $\alpha \in A$ için $\tau^\alpha = \{F(\alpha) : (F, A) \in \tau\}$, X üzerinde bir topoloji tanımlar [22].

Önerme 2.3.2. (X, A, τ_1) ve (X, A, τ_2) , X üzerinde iki esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $\tau_1 \tilde{\cap} \tau_2 = \{(F, A) : (F, A) \in \tau_1 \text{ ve } (F, A) \in \tau_2\}$ olmak üzere $(X, A, \tau_1 \tilde{\cap} \tau_2)$, X üzerinde bir esnek topolojik uzaydır. Ayrıca X üzerinde iki esnek topolojik uzayın birleşimi esnek topolojik uzay olmak zorunda değildir [22].

Tanım 2.3.2. τ_1 ve τ_2 , X üzerinde iki esnek topoloji olsun. Eğer $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_2 esnek topolojisi τ_1 esnek topolojisine göre esnek incedir denir [23].

Tanım 2.3.3. τ ve ν sırasıyla X ve Y üzerinde sırasıyla iki esnek topoloji ve $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. f altında τ nun görüntüsü $f(\tau)$ ve ν nin ters görüntüsü $f^{-1}(\nu)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

- i) $f(\tau) = \{(G, A) \in S(Y, A) : f^{-1}(G, A) = (f^{-1}(G), A) \in \tau\}$
- ii) $f^{-1}(\nu) = \{f^{-1}(G, A) = (f^{-1}(G), A) : (G, A) \in \nu\}$ [23].

Teorem 2.3.1. τ ve ν sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek topoloji ve $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda

- i) $f^{-1}(\nu)$, X üzerinde esnek bir topolojidir.
- ii) $f(\tau)$, Y üzerinde esnek bir topolojidir [23].

Teorem 2.3.2. τ_1 ve τ_2 , X üzerinde iki esnek topoloji olsun. $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise $f(\tau_1) \subseteq f(\tau_2)$ dir [23].

Teorem 2.3.3. v_1 ve v_2 , Y üzerinde iki esnek topoloji olsun. $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

Eğer $v_1 \subseteq v_2$ ise $f^{-1}(v_1) \subseteq f^{-1}(v_2)$ dir [23].



3.BÖLÜM

ESNEK TOPOLOJİK ESNEK GRUP

Bu bölümde esnek topolojik esnek grup tanımını yapacağız ve bazı özellikleri üzerinde duracağız. Temel homomorfizm teoremini esnek topolojik esnek grup içerisinde göstereceğiz. Bu bölüm boyunca X ve Y yi grup olarak alacağız.

Tanım 3.1.1. (F,A) , X üzerinde bir esnek grup, τ da X üzerinde esnek topoloji olsun. Eğer herbir $\alpha \in A$ için $[F(\alpha), \tau_{F(\alpha)}^\alpha]$, $F(\alpha)$ üzerinde bir topolojik grup ise (F,A, τ) ya X üzerinde esnek topolojik esnek grup denir. Burada $\tau_{F(\alpha)}^\alpha$, $F(\alpha)$ üzerinde τ^α ile elde edilen alt topolojidir [23].

Örnek 3.1.1. $X = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, $A = \{ \alpha_1, \alpha_2 \}$ ve

$$F(\alpha_1) = \{e, (12)\}, \quad F(\alpha_2) = \{e, (13)\}$$

olmak üzere (F,A) da esnek kümesi tanımlansın. Ayrıca

$$F_1(\alpha_1) = \{e\}, \quad F_2(\alpha_1) = \{(12)\}, \quad F_3(\alpha_1) = \{e, (12)\},$$

$$F_1(\alpha_2) = \{e\}, \quad F_2(\alpha_2) = \{(13)\}, \quad F_3(\alpha_2) = \{e, (13)\},$$

olmak üzere

$$\tau = \{(\tilde{\phi}, A), (\tilde{X}, A), (F_1, A), (F_2, A), (F_3, A)\}$$

şeklinde tanımlansın. (F,A) nın X üzerinde bir esnek grup olduğu açıktır.

$$\tau^{\alpha_1} = \{ \phi, X, \{e\}, \{(12)\}, \{e, (12)\} \}$$

$$\tau_{F(\alpha_1)}^{\alpha_1} = \{ \phi, \{e\}, \{(12)\}, \{e, (12)\} \}$$

$\tau_{F(\alpha_1)}^{\alpha_1}$, $F(\alpha_1)$ üzerinde topolojik grup olduğu kolayca görülebilir. Benzer şekilde $\tau_{F(\alpha_2)}^{\alpha_2}$, $F(\alpha_2)$ üzerinde bir topolojik gruptur. Buradan (F, A, τ) X üzerinde bir esnek topolojik esnek gruptur [23].

Tanım 3.1.2. (F_1, A, τ_1) ve (F_2, A, τ_2) , X üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Bu iki esnek topolojik esnek grubun kesişimi $(F_1, A, \tau_1) \tilde{\cap} (F_2, A, \tau_2) = (F_1 \tilde{\cap} F_2, A, \tau_1 \tilde{\cap} \tau_2)$ şeklinde tanımlanır. Burada her $\alpha \in A$ için $\tau_1 \tilde{\cap} \tau_2$ Önerme 2.3.2 deki gibi tanımlanmak üzere $(F_1 \tilde{\cap} F_2)(\alpha) = F_1(\alpha) \cap F_2(\alpha)$ dır [23].

Not 3.1.1. (F_1, A, τ_1) ve (F_2, A, τ_2) , X üzerinde iki esnek topolojik esnek grup ise $(F_1 \tilde{\cap} F_2, A)$ bir esnek grup ve $\tau_1 \tilde{\cap} \tau_2$ da X üzerinde esnek topolojidir. Fakat genelde $(F_1 \tilde{\cap} F_2, A, \tau_1 \tilde{\cap} \tau_2)$ bir esnek topolojik esnek grup olmak zorunda değildir. Bunu bir sonraki örnek de göstereceğiz. Ancak $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ olduğunda Teorem 3.1.3 den esnek topolojik esnek grupların kesişimi bir esnek topolojik esnek gruptur [23].

Örnek 3.1.2.

$$X = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}, A = \{\alpha\},$$

$$F(\alpha) = \{e, (123), (132)\}$$

olacak şekilde (F, A) esnek bir küme olsun. Burada (F, A) , X üzerinde esnek bir gruptur.

Ayrıca,

$$(F_1, A) = \{\alpha/\{e\}\},$$

$$(F_2, A) = \{\alpha/\{(123)\}\},$$

$$(F_3, A) = \{\alpha/\{(132)\}\},$$

$$(F_4, A) = \{\alpha/\{e, (123)\}\},$$

$$(F_5, A) = \{\alpha/\{e, (132)\}\},$$

$$(F_6, A) = \{\alpha/\{(123), (132)\}\},$$

$$(F_7, A) = \{\alpha/\{e, (123), (132)\}\},$$

$$(F_8, A) = \{\alpha/\{(12), (132)\}\},$$

$$(F_9, A) = \{\alpha/\{(12), (123), (132)\}\},$$

$$(F_{10}, A) = \{\alpha / \{e, (12), (132)\}\}$$

$$(F_{11}, A) = \{\alpha / \{e, (12), (123), (132)\}\}$$

X üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer

$$\tau = \{(\tilde{\phi}, A), (\tilde{X}, A), (F_1, A), (F_2, A), (F_3, A), (F_4, A), (F_5, A), (F_6, A), (F_7, A)\}$$

ise τ , X üzerinde esnek topolojidir. Böylece

$$\tau^\alpha = \{\phi, X, \{e\}, \{(123)\}, \{(132)\}, \{e, (123)\}, \{e, (132)\}, \\ \{(123), (132)\}, \{e, (123), (132)\}\}$$

$$\tau_{F(\alpha)}^\alpha = \{\phi, \{e\}, \{(123)\}, \{(132)\}, \{e, (123)\}, \{e, (132)\}, \\ \{(123), (132)\}, \{e, (123), (132)\}\}$$

$F(\alpha)$ üzerinde bir topolojik gruptur. Benzer şekilde

$$v = \{(\tilde{\phi}, A), (\tilde{X}, A), (F_1, A), (F_2, A), (F_4, A), (F_8, A), (F_9, A), (F_{10}, A), (F_{11}, A)\}$$

ise v , X üzerinde esnek topolojidir.

$$v^\alpha = \{\phi, X, \{e\}, \{(123)\}, \{e, (123)\}, \{(12), (132)\}, \{(12), (123), (132)\}, \\ \{e, (12), (132)\}, \{e, (12), (123), (132)\}\}$$

$$v_{F(\alpha)}^\alpha = \{\phi, \{e\}, \{(123)\}, \{(132)\}, \{e, (123)\}, \{e, (132)\}, \\ \{(123), (132)\}, \{e, (123), (132)\}\}$$

$F(\alpha)$ üzerinde bir topolojik gruptur. Burada (F, A, τ) ve (F, A, v) X üzerinde esnek topolojik esnek gruptur. Şimdi

$$\tau \tilde{\cap} v = \{(\tilde{\phi}, A), (\tilde{X}, A), (F_1, A), (F_2, A), (F_4, A)\}$$

$$(\tau \tilde{\cap} v)^\alpha = \{\phi, X, \{e\}, \{(123)\}, \{e, (123)\}\}$$

$$(\tau \tilde{\cap} v)_{F(\alpha)}^\alpha = \{\phi, \{e\}, \{(123)\}, \{e, (123)\}, \{e, (123), (132)\}\}$$

dır. Burada $(123), (132) \in F(\alpha)$ ve $(123)(132) = (e) \in \{e\}$ fakat (132) yi içeren tek açık $\{e, (123), (132)\}$ ve $(123)\{e, (123), (132)\} = \{e, (123), (132)\} \not\subseteq \{e\}$ dir. Bundan dolayı $(\tau \tilde{\cap} v)_{F(\alpha)}^\alpha$, $F(\alpha)$ üzerinde topolojik grup değildir. Buradan $(F, A, \tau \tilde{\cap} v)$, X üzerinde esnek topolojik esnek grup değildir [23].

Teorem 3.1.1. H ve G , X in iki alt grubu ve τ , X üzerinde esnek topoloji olsun. Eğer $u \in \tau_H^\alpha$ ve $v \in \tau_G^\alpha$ ise $u \cap v \in \tau_{H \cap G}^\alpha$ dir [23].

İspat: $u \in \tau_H^\alpha$ olduğundan $u_1 \in \tau^\alpha$ vardır öyle ki $u = u_1 \cap H$ dir. Şimdi $u_1 \in \tau^\alpha$ olduğundan $F_1(\alpha) = u_1$ olacak şekilde en az bir $(F_1, A) \in \tau$ vardır. Benzer şekilde $v \in \tau_G^\alpha$ olduğundan $v_1 \in \tau^\alpha$ dir öyle ki $v = v_1 \cap G$ dir. Bundan dolayı da $v_1 \in \tau^\alpha$ olduğundan en az bir $(F_2, A) \in \tau$ vardır öyle ki $F_2(\alpha) = v_1$ dir. O halde

$$(F_1 \tilde{\cap} F_2, A) \in \tau \text{ ve } (F_1 \tilde{\cap} F_2)(\alpha) = F_1(\alpha) \cap F_2(\alpha) = u_1 \cap v_1$$

dir. Böylece

$$u_1 \cap v_1 \in \tau^\alpha \Rightarrow H \cap G \cap u_1 \cap v_1 \in \tau_{H \cap G}^\alpha \Rightarrow (H \cap u_1) \cap (G \cap v_1) = u \cap v \in \tau_{H \cap G}^\alpha$$

dir.

Teorem 3.1.2. H ve G , X in iki alt grubu ve τ da X üzerinde bir esnek topoloji olsun. (H, τ_H^α) , (G, τ_G^α) sırasıyla H üzerinde iki topolojik grup ise $[H \cap G, \tau_{H \cap G}^\alpha]$, $H \cap G$ üzerinde bir topolojik gruptur [23].

İspat: $x, y \in H \cap G$ ve $W \in \tau_{H \cap G}^\alpha$ olsun öyle ki $xy^{-1} \in W$ ise en az bir $w \in \tau^\alpha$ vardır öyle ki $W = w \cap H \cap G$ ise en az bir $(F, A) \in \tau$ öyle ki $F(\alpha) = w \in \tau^\alpha$ dir. Şimdi $F(\alpha) \cap H \in \tau_H^\alpha$ ve $xy^{-1} \in F(\alpha) \cap H$ τ_H^α topolojik grup olduğundan en az bir $u_1, v_1 \in \tau_H^\alpha$ ve $x \in u_1, y \in v_1$ öyle ki $u_1 v_1^{-1} \subseteq F(\alpha) \cap H$ dir. Benzer şekilde en az bir $u_2, v_2 \in \tau_G^\alpha$ ve $x \in u_2, y \in v_2$ öyle ki $u_2 v_2^{-1} \subseteq F(\alpha) \cap G$ dir. Teorem 3.1.1 den dolayı biz $u_1 \cap u_2 \in \tau_{H \cap G}^\alpha$ ve $v_1 \cap v_2 \in \tau_{H \cap G}^\alpha$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $x \in u_1 \cap u_2, y \in v_1 \cap v_2$ öyle ki

$$(u_1 \cap u_2)(v_1 \cap v_2)^{-1} \subseteq u_1 v_1^{-1} \cap u_2 v_2^{-1} \subseteq F(\alpha) \cap G \cap H = W$$

dir. Burada $[H \cap G, \tau_{H \cap G}^\alpha]$ $H \cap G$ üzerinde bir topolojik gruptur.

Teorem 3.1.3. (F, A, τ) ve (G, A, τ) , X üzerinde iki esnek topolojik grup ise $(F, A, \tau) \tilde{\cap} (G, A, \tau) = (F \tilde{\cap} G, A, \tau)$, X üzerinde esnek topolojik esnek gruptur [23].

İspat: (F, A, τ) ve (G, A, τ) , X üzerinde iki esnek topolojik esnek grup ise (F, A) ve (G, A) , X üzerinde iki esnek grup ve bundan dolayı $(F \tilde{\cap} G, A)$ da X üzerinde bir esnek gruptur.

Ayrıca her bir $\alpha \in A$ için $[F(\alpha), \tau_{F(\alpha)}^\alpha]$ ve $[G(\alpha), \tau_{G(\alpha)}^\alpha]$ sırasıyla $F(\alpha)$ ve $G(\alpha)$ üzerinde iki topolojik gruptur. Teorem 3.1.2 den dolayı her $\alpha \in A$ için

$$[F(\alpha) \cap G(\alpha), \tau_{F(\alpha) \cap G(\alpha)}^\alpha] = [(F \tilde{\cap} G)(\alpha), \tau_{(F \tilde{\cap} G)(\alpha)}^\alpha]$$

$F(\alpha) \cap G(\alpha)$ üzerinde bir topolojik gruptur. Böylece $(F, A, \tau) \tilde{\cap} (G, A, \tau)$, X üzerinde esnek topolojik esnek gruptur.

Not 3.1.2. I indis kümesi olmak üzere $\{(H_i, A, \tau); i \in I\}$ X üzerinde esnek topolojik esnek alt grupların boştan farklı bir ailesi olsun. $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (H_i, A, \tau) = (\tilde{\bigcap}_{i \in I} H_i, A, \tau)$, X üzerinde bir esnek topolojik esnek altgruptur [23].

Teorem 3.1.4. (F, A, τ) , X üzerinde esnek topolojik esnek grup ve $f: X \rightarrow Y$ bir açık homomorfizm ise $(f(F), A, f(\tau))$ da Y üzerinde esnek topolojik esnek gruptur [23].

İspat: $(f(F), A)$ açıkça Y üzerinde esnek bir grup ve $f(\tau)$ da Y üzerinde esnek topolojidir. Her bir $\alpha \in A$ için $[f(\tau)]_{f(F(\alpha))}^\alpha, f(F(\alpha))$ üzerinde topolojik grup olduğunu göstermemiz yeterlidir. $y_1, y_2 \in f(F(\alpha))$ ve $W \in [f(\tau)]_{f(F(\alpha))}^\alpha$ öyle ki $y_1 y_2^{-1} \in W$ olsun. Şimdi $y_1, y_2 \in f(F(\alpha))$ ise en az bir $x_1 x_2 \in F(\alpha)$ öyle ki $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ dir. Yine $W \in [f(\tau)]_{f(F(\alpha))}^\alpha$ ise en az bir $(G, A) \in f(\tau)$ öyle ki $W = G(\alpha) \cap f(F(\alpha))$ dir. Burada $(f^{-1}(G), A) \in \tau$ dir. Bundan dolayı her $\alpha \in A$ için $f^{-1}(G(\alpha)) \cap F(\alpha) \in [\tau]_{F(\alpha)}^\alpha$ dir. Benzer şekilde

$$f(x_1 x_2^{-1}) = f(x_1)(f(x_2))^{-1} = y_1 y_2^{-1} \in W = G(\alpha) \cap f(F(\alpha)) \subset G(\alpha)$$

dir. Buradan $x_1 x_2^{-1} \in f^{-1}(G(\alpha))$ dir. Ayrıca $x_1, x_2 \in F(\alpha)$ ve $F(\alpha)$ bir grup olduğundan $x_1 x_2^{-1} \in F(\alpha)$ dir. Bundan dolayı $x_1 x_2^{-1} \in f^{-1}(G(\alpha)) \cap F(\alpha)$ dir. $[\tau]_{F(\alpha)}^\alpha, F(\alpha)$ üzerinde bir topolojik grup ve $x_1 x_2^{-1} \in f^{-1}(G(\alpha)) \cap F(\alpha) \in [\tau]_{F(\alpha)}^\alpha$ dan $u, v \in [\tau]_{F(\alpha)}^\alpha$ vardır öyleki $x_1 \in u, x_2 \in v$ ve $uv^{-1} \subseteq f^{-1}(G(\alpha)) \cap F(\alpha)$ dir. Buradan da en az bir $(H, A) \in \tau$ vardır öyle ki $u = H(\alpha) \cap F(\alpha)$ dir. f açık olduğunda $[f(H), A] \in f(\tau)$ ve

$$y_1 \in f(u) = f[H(\alpha) \cap F(\alpha)] \subseteq f(H(\alpha)) \cap f(F(\alpha)) \in [f(\tau)]_{F(\alpha)}^\alpha$$

elde ederiz. Benzer şekilde $y_2 \in f(v) \in [f(\tau)]_{F(\alpha)}^\alpha$ dir. Böylece

$f(u)[f(v)]^{-1} = f(uv^{-1}) \subseteq [f^{-1}(G(\alpha)) \cap f(\alpha)] \subseteq ff^{-1}(G(\alpha)) \cap f(F(\alpha)) \subseteq G(\alpha) \cap f(F(\alpha)) = W$ dir. O halde $(f(F), A, f(\tau))$, Y üzerinde esnek topolojik esnek gruptur.

Teorem 3.1.5. (G, A, ν) , Y üzerinde esnek topolojik esnek grup ve $f: X \rightarrow Y$ bir örten homomorfizm ise $(f^{-1}(G), A, f^{-1}(\nu))$, X üzerinde bir esnek topolojik esnek gruptur [23].

İspat: Açıkça $(f^{-1}(G), A)$, X üzerinde bir esnek grup ve $f^{-1}(\nu)$, X üzerinde esnek topolojidir. Her $\alpha \in A$ için $[f^{-1}(\nu)]_{f^{-1}G(\alpha)}^\alpha$, $f^{-1}(G(\alpha))$ üzerinde bir topolojik grup olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x_1, x_2 \in f^{-1}(G(\alpha))$ ve $W \in [f^{-1}(\nu)]_{f^{-1}G(\alpha)}^\alpha$ olsun öyle ki $x_1 x_2^{-1} \in W$ dir. $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olsun. Böylece $y_1, y_2 \in G(\alpha)$ dir. Yine $W \in [f^{-1}(\nu)]_{f^{-1}G(\alpha)}^\alpha$ ise en az bir $(F, A) \in f^{-1}(\nu)$ öyle ki $W = F(\alpha) \cap f^{-1}(G(\alpha))$ dir. Şimdi $(F, A) \in f^{-1}(\nu)$ ise en az bir $(H_1, A) \in \nu$ öyle ki $f^{-1}(H_1, A) = (F, A)$ dir.

$$W = f^{-1}(H_1(\alpha) \cap f^{-1}(G(\alpha)) = f^{-1}[G(\alpha) \cap H_1(\alpha)]$$

dir. Böylece

$$y_1 y_2^{-1} = f(x_1)[f(x_2)]^{-1} = f(x_1 x_2^{-1}) \in f(W)$$

ve f örten olduğundan

$$f(W) = ff^{-1}[H_1(\alpha) \cap G(\alpha)] = H_1(\alpha) \cap G(\alpha) \in [\nu]_{G(\alpha)}^\alpha$$

dir. $[\nu]_{G(\alpha)}^\alpha$, $G(\alpha)$ üzerinde bir topolojik grup olduğundan $u, v \in [\nu]_{G(\alpha)}^\alpha$ vardır. Burada $(y_1 \in u$ ve $y_2 \in v)$ öyle ki $uv^{-1} \subseteq H_1(\alpha) \cap G(\alpha)$ dir. Ayrıca $u \in [\nu]_{G(\alpha)}^\alpha$ ise en az bir $(H_2, A) \in \nu$ öyle ki $u = H_2(\alpha) \cap G(\alpha)$ dir. Buradan

$$[f^{-1}(H_2), A] \in f^{-1}(\nu)$$

ve

$$x_1 \in f^{-1}(u) = f^{-1}[H_2(\alpha) \cap G(\alpha)] = f^{-1}(H_2(\alpha)) \cap f^{-1}(G(\alpha)) \in [f^{-1}(\nu)]_{f^{-1}G(\alpha)}^\alpha$$

dir. Benzer şekilde $x_2 \in f^{-1}(v) \in [f^{-1}(\nu)]_{f^{-1}G(\alpha)}^\alpha$ dir. Böylece

$$f^{-1}(u)[f^{-1}(v)]^{-1} = f^{-1}(uv^{-1}) \subseteq f^{-1}[H_1(\alpha) \cap G(\alpha)] = W$$

dir. Buradan da $(f^{-1}(G), A, f^{-1}(\nu))$, X üzerinde bir esnek topolojik esnek gruptur.

Tanım 3.1.3. (F, A, τ) , X üzerinde esnek topolojik grup olsun.

- i) Eğer her $a \in A$ için $F(a) = \{e\}$ (e burada X in birim elemanı) ise (F, A, τ) ya bir birim esnek topolojik esnek gruptur denir.
- ii) Eğer her $a \in A$ için $F(a) = X$ ise (F, A, τ) tam esnek topolojik esnek gruptur denir [23].

Teorem 3.1.6. τ , X üzerinde bir esnek topoloji ve $f: X \rightarrow Y$ açık homomorfizm olsun:

- i) Eğer (F, A, τ) X üzerinde birim esnek topolojik esnek grup ise $(f(F), A, f(\tau))$, Y üzerinde birim esnek topolojik esnek gruptur.
- ii) Eğer (F, A, τ) , X üzerinde bir esnek topolojik esnek grup ve her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) = \text{Ker}f$ ise $(f(F), A, f(\tau))$, Y üzerinde birim esnek topolojik esnek gruptur.
- iii) Eğer f örten ve (F, A, τ) , X üzerinde tam esnek topolojik esnek grup ise $(f(F), A, f(\tau))$, Y üzerinde tam esnek topolojik esnek gruptur [23].

İspat :

Teorem 3.1.4 de ki (i) de $(f(F), A, f(\tau))$, Y üzerinde esnek topolojik esnek gruptur. (F, A, τ) birim esnek topolojik esnek grup olduğundan her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) = \{e\}$ ve bundan dolayı her bir $\alpha \in A$ için $[f(F)](\alpha) = f[F(\alpha)] = \{e\}$, burada e , Y nin birim elemanıdır. Buradan $(f(F), A, f(\tau))$, Y üzerinde birim esnek topolojik esnek gruptur. (ii) ve (iii) ün de ispatı benzer şekildedir.

Teorem 3.1.7. ν , Y üzerinde bir esnek topoloji ve $f: X \rightarrow Y$ açık homomorfizm olsun.

- i) Eğer (G, A, ν) Y üzerinde bir birim esnek topolojik esnek grup ve $\text{Ker}f = \{e\}$ ise $(f^{-1}(G), A, f^{-1}(\nu))$ da X üzerinde bir birim esnek topolojik esnek gruptur.
- ii) Eğer (G, A, ν) , Y üzerinde bir tam esnek topolojik esnek grup ise $(f^{-1}(G), A, f^{-1}(\nu))$ de X üzerinde bir tam esnek topolojik esnek gruptur [23].

Tanım 3.1.4. (F_1, A, τ_1) ve (F_2, A, τ_2) , X üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun.

Eğer

- i) $(F_1, A), (F_2, A)$ nın esnek altgrubu (esnek normal altgrubu)
 ii) Her $\alpha \in A$ için $[\tau_1^\alpha]_{F_1(\alpha)} = [[\tau_2^\alpha]_{F_2(\alpha)}]_{F_1(\alpha)} = [\tau_2^\alpha]_{F_2(\alpha)/F_1(\alpha)}$ dir.

şartları sağlanıyorsa (F_1, A, τ_1) esnek topolojik esnek grubuna (F_2, A, τ_2) nın esnek topolojik esnek altgrubu (esnek topolojik esnek normal altgrubu) denir ve

$$(F_1, A, \tau_1) \tilde{\leq} (F_2, A, \tau_2) \text{ ve } (F_1, A, \tau_1) \tilde{\simeq} (F_2, A, \tau_2)$$

şeklinde gösterilir [23].

Örnek 3.1.3. $X = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ve $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ olsun. Ayrıca

$$(F_1, A) = \{\{e\}, \{e, (12)\}\},$$

$$(F_2, A) = \{\{e, (123), (132)\}, \{e, (12)\}\},$$

$$(H_1, A) = \{\{e\}, \{e\}\},$$

$$(H_2, A) = \{\{(123)\}, \{(12)\}\},$$

$$(H_3, A) = \{\{(132)\}, \{(13)\}\},$$

$$(H_4, A) = \{\{e, (123)\}, \{e, (12)\}\},$$

$$(H_5, A) = \{\{e, (132)\}, \{e, (13)\}\},$$

$$(H_6, A) = \{\{(123), (132)\}, \{(12), (13)\}\},$$

$$(H_7, A) = \{\{e, (123), x(132)\}, \{e, (12)(13)\}\} \text{ ve}$$

$$\tau_1 = \{(\tilde{\phi}, A), (\tilde{X}, A), (H_1, A), (H_2, A), (H_4, A)\},$$

$$\tau_2 = \{(\tilde{\phi}, A), (\tilde{X}, A), (H_1, A), (H_2, A), (H_3, A), (H_4, A), (H_5, A), (H_6, A), (H_7, A)\}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça $(F_1, A), (F_2, A)$ nın esnek altgrubudur (esnek normal altgrubudur). Şimdi

$$\tau_1^{\alpha_1} = \{\phi, X, \{e\}, \{(123)\}, \{e, (123)\}\}$$

dir. Bundan dolayı $[\tau_1^{\alpha_1}]_{F_1(\alpha_1)} = \{\phi, \{e\}\}$ olup $F_1(\alpha_1)$ üzerinde bir diskre topolojidir ve

bundan dolayı $(F_1(\alpha_1), [\tau_1^{\alpha_1}]_{F_1(\alpha_1)})$, $F_1(\alpha_1)$ üzerinde bir topolojik gruptur. Benzer şekilde

$$[\tau_1^{\alpha_2}]_{F_1(\alpha_2)} = \{\phi, \{e\}, \{(12)\}, \{e, (12)\}\}$$

$$[\tau_2^{\alpha_1}]_{F_2(\alpha_1)} = \{\phi, \{e\}, \{(123)\}, \{(132)\}, \{e, (123)\}, \{e, (132)\},$$

$$\{(123), (132)\}, \{e, (123), (132)\}\}$$

$$[\tau_2^{\alpha_2}]_{F_2(\alpha_2)} = \{\phi, \{e\}, \{(12)\}, \{e, (12)\}\}$$

sırasıyla $F_1(\alpha_2)$, $F_2(\alpha_1)$, $F_2(\alpha_2)$ üzerinde diskre topolojidir ve bundan dolayı $(F_1(\alpha_2), [\tau_1^{\alpha_2}]_{F_1(\alpha_2)})$, $(F_2(\alpha_1), [\tau_2^{\alpha_1}]_{F_2(\alpha_1)})$, ve $(F_2(\alpha_2), [\tau_2^{\alpha_2}]_{F_2(\alpha_2)})$ sırasıyla $F_1(\alpha_2), F_2(\alpha_1), F_2(\alpha_2)$ üzerinde topolojik gruplardır. Böylece (F_1, A, τ_1) ve (F_2, A, τ_2) , X üzerinde iki esnek topolojik esnek gruptur. Aynı şekilde

$$[\tau_2^{\alpha_1}]_{F_2(\alpha_1)/F_1(\alpha_1)} = \{\phi, \{e\}\} = [\tau_1^{\alpha_1}]_{F_1(\alpha_1)}$$

ve

$$[\tau_2^{\alpha_2}]_{F_2(\alpha_2)/F_1(\alpha_2)} = \{\phi, \{e\}, \{(12)\}, \{e, (12)\}\} = [\tau_1^{\alpha_2}]_{F_1(\alpha_2)}$$

dir. Burada (F_1, A, τ_1) , (F_2, A, τ_2) nin esnek topolojik esnek altgrubudur (esnek topolojik esnek normal altgrubudur) [23].

Teorem 3.1.8. (F, A, τ) ve (G, A, τ) , X üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Eğer her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) \subseteq G(\alpha)$ ise $(F, A, \tau) \lesssim (G, A, \tau)$ dir [23].

Teorem 3.1.9. (F, A, τ) , X üzerinde esnek topolojik esnek grup olsun ve $\{(H_i, A, \tau); i \in I\}$ ailesi (F, A, τ) nin esnek topolojik esnek altgruplarının (esnek topolojik esnek normal altgrup) boştan farklı bir ailesi olsun. I indis olmak üzere bu durumda $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (H_i, A, \tau) = (\tilde{\bigcap}_{i \in I} H_i, A, \tau)$, (F, A, τ) nun esnek topolojik esnek altgrubudur (esnek topolojik esnek normal altgrubudur) [23].

İspat: Teorem 3.1.1 den $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (H_i, A, \tau)$ X üzerinde esnek topolojik esnek grup olduğu elde edilir. Ayrıca her $\alpha \in A$ için $(\bigcap_{i \in I} H_i)(\alpha)$, $F(\alpha)$ nin bir altgrubudur (normal altgrubudur). Bundan dolayı $(\bigcap_{i \in I} H_i, A)$, (F, A) nin bir esnek altgrubudur (esnek normal altgrubudur). Aynı şekilde $[\tau^\alpha]_{\bigcap_{i \in I} H_i(\alpha)} = [\tau^\alpha]_{F(\alpha)/(\bigcap_{i \in I} H_i)(\alpha)}$ dir. Buradan $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (H_i, A, \tau)$, (F, A, τ) nin esnek topolojik esnek altgrubudur (esnek topolojik esnek normal altgrubudur).

Teorem 3.1.10. (F, A, τ) , X üzerinde esnek topolojik esnek grup olsun. Eğer (N, A) , (F, A) nin esnek bir altgrubu ise (N, A, τ) , (F, A, τ) nin esnek topolojik esnek altgrubudur [23].

İspat: (F, A, τ) , X üzerinde esnek topolojik esnek grup olduğundan her bir $\alpha \in A$ için $[F(\alpha), \tau_{F(\alpha)}^\alpha]$, $F(\alpha)$ üzerinde topolojik gruptur. Ayrıca her $\alpha \in A$ için $N(\alpha)$, $F(\alpha)$ nin bir altgrubudur. Böylece her $\alpha \in A$ için $[\tau_{F(\alpha)}^\alpha]_{N(\alpha)} = [\tau_{N(\alpha)}^\alpha]$, $N(\alpha)$ üzerinde bir topolojik gruptur. Buradan da (N, A, τ) , X üzerinde bir esnek topolojik esnek gruptur. Ayrıca Tanım 3.1.7 den (N, A, τ) , (F, A, τ) nin esnek topolojik esnek altgrubudur.

Teorem 3.1.11. τ , X üzerinde esnek bir topoloji olsun. Ayrıca (F_1, A, τ) ve (F_2, A, τ) , X üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Eğer $f : X \rightarrow Y$ bir açık esnek homomorfizm ise $(f(F_1), A, f(\tau))$ ve $(f(F_2), A, f(\tau))$ lerin her ikisi de Y üzerinde esnek topolojik esnek gruptur. Eğer ayrıca

$$(F_1, A, \tau) \lesssim (\tilde{\sphericalangle}) (F_2, A, \tau) \text{ ise } (f(F_1), A, f(\tau)) \lesssim (\tilde{\sphericalangle}) (f(F_2), A, f(\tau))$$

dır [23].

İspat: Teorem 3.1.4 den $(f(F_1), A, f(\tau))$ ve $(f(F_2), A, f(\tau))$ her ikisinin de Y üzerinde esnek topolojik esnek grup olduğunu biliyoruz. Ayrıca $(F_1, A, \tau) \lesssim (\tilde{\sphericalangle}) (F_2, A, \tau)$ den $(F_1, A) \lesssim (\tilde{\sphericalangle}) (F_2, A)$ ve $\tau_{F_1(\alpha)}^\alpha = \tau_{F_2(\alpha)/F_1(\alpha)}^\alpha$ dir. Böylece $(f(F_1), A) \lesssim (\tilde{\sphericalangle}) (f(F_2), A)$ ve her $\alpha \in A$ için $[f(\tau)]_{F_1(\alpha)}^\alpha = [f(\tau)]_{f(F_1(\alpha))/f(F_2(\alpha))}^\alpha$ dir. Buradan da

$$(f(F_1), A, f(\tau)) \lesssim (\tilde{\sphericalangle}) (f(F_2), A, f(\tau))$$

dır.

Teorem 3.1.12. ν , Y üzerinde bir esnek topoloji olsun. Ayrıca (G_1, A, τ_1) ve (G_2, A, τ_2) Y üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Eğer $f : X \rightarrow Y$ bir örten esnek homomorfizm ise $(f^{-1}(G_1), A, f^{-1}(\nu))$ ve $(f^{-1}(G_2), A, f^{-1}(\nu))$ her ikisi de X üzerinde esnek topolojik esnek gruptur. Eğer ayrıca $(G_1, A, \tau) \lesssim (\tilde{\sphericalangle}) (G_2, A, \tau)$ ise

$$(f^{-1}(G_1), A, f^{-1}(\nu)) \lesssim (\tilde{\sphericalangle}) (f^{-1}(G_2), A, f^{-1}(\nu))$$

dır [23].

İspat: Teorem 3.1.4 den $(f^{-1}(G_1), A, f^{-1}(\nu))$ ve $(f^{-1}(G_2), A, f^{-1}(\nu))$ her ikisinin de X üzerinde esnek topolojik esnek grup olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$(G_1, A, \nu) \cong (\tilde{\Delta})(G_2, A, \nu)$ olduğundan $(G_1, A) \cong (\tilde{\Delta})(G_2, A)$ ve $\nu_{G_1(\alpha)}^\alpha = \nu_{G_2(\alpha)/G_1(\alpha)}^\alpha$ dir.

Buradan da $(f^{-1}(G_1), A) \cong (\tilde{\Delta})(f^{-1}(G_2), A)$ ve her $\alpha \in A$ için

$$[f^{-1}(\nu)]_{G_1(\alpha)}^\alpha = [f^{-1}(\nu)]_{f^{-1}(G_2(\alpha))/f^{-1}(G_1(\alpha))}^\alpha$$

dir. Bundan dolayı

$$(f^{-1}(G_1), A, f^{-1}(\nu)) \cong (\tilde{\Delta})(f^{-1}(G_2), A, f^{-1}(\nu)) \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.13. (F, A, τ) , X üzerinde esnek topolojik esnek grup ve $f : X \rightarrow Y$ bir homomorfizm olsun. Her $\alpha \in A$ için $K_f(\alpha)$ kümesi

$$K_f(\alpha) = [Ker(f)]_{F(\alpha)} = (Ker f) \cap F(\alpha) = \{g \in F(\alpha); f(g) = e_y\}$$

şeklinde tanımlanır ise

- i) (K_f, A, τ) , X üzerinde esnek topolojik esnek gruptur
- ii) (K_f, A, τ) , (F, A, τ) nin esnek topolojik normal esnek altgrubudur [23].

İspat: Teorem 3.1.10 ve Tanım 2.1.5 de görülür.

Not 3.1.3. (N, A, τ) , (F, A, τ) nin esnek topolojik esnek normal altgrubu olacak şekilde (N, A, τ) ve (F, A, τ) , X üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. $\frac{F}{N}$ dönüşümü A

üzerinde her $\alpha \in A$ için $\frac{F}{N}(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}$ bölüm grubu olarak tanımlansın. Burada $(\frac{F}{N}, A)$

bir bölüm esnek gruptur. Aynı şekilde her $\alpha \in A$ için $\tau_{F(\alpha)}^\alpha$, $F(\alpha)$ üzerinde bir topolojik

gruptur. $\psi_\alpha : F(\alpha) \rightarrow \frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}$ kanonik dönüşüm olsun ve $\tau_{\frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}}^\alpha = \left\{ U \subseteq \frac{F(\alpha)}{N(\alpha)} : \psi_\alpha^{-1}(U) \in \tau_{F(\alpha)}^\alpha \right\}$

şeklinde tanımlansın. Buradan her bir $\alpha \in A$ için $\left(\frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}, \tau_{\frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}}^\alpha \right)$, $\frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}$ üzerinde topolojik

gruptur (Teorem 2.2.1 Bölüm b) [23].

Tanım 3.1.5. (F_1, A, τ) ve (F_2, A, ν) sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Eğer her bir $\alpha \in A$ için

- i) $\varphi_\alpha : F_1(\alpha) \rightarrow F_2(\alpha)$ bir homomorfizmdir (üzerine homomorfizmdir).

ii) $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), \nu_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ süreklidir

şartlar sağlanacak şekilde en az bir $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), \nu_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ varsa (F_1, \mathcal{A}, τ) , (F_2, \mathcal{A}, ν) ye (üzerine) esnek topolojik esnek homomorfiktir denir ve $(F_1, \mathcal{A}, \tau) \sim (F_2, \mathcal{A}, \nu)$ şeklinde gösterilir [23].

Tanım 3.1.6. $(F_1, \mathcal{A}, \tau_1)$ ve $(F_2, \mathcal{A}, \tau_2)$ sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Ayrıca $(F_1, \mathcal{A}, \tau_1), (F_2, \mathcal{A}, \tau_2)$ ye esnek topolojik esnek homomorfik olsun. Her $\alpha \in A$ için φ_α Tanım 3.1.5 deki i) ve ii) şartlarını sağlamak üzere $\varphi F_1 : A \rightarrow P(Y)$ $(\varphi F_1)(\alpha) = (\varphi_\alpha(F_1(\alpha)))$ şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 3.1.7. $(F_1, \mathcal{A}, \tau_1)$ ve $(F_2, \mathcal{A}, \tau_2)$ sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Ayrıca $(F_1, \mathcal{A}, \tau_1), (F_2, \mathcal{A}, \tau_2)$ ye esnek topolojik esnek homomorfik olsun. Her $\alpha \in A$ için φ_α Tanım 3.1.5 deki i) ve ii) şartlarını sağlamak üzere $\varphi^{-1} F_2 : A \rightarrow P(X)$ $(\varphi^{-1} F_2)(\alpha) = (\varphi_\alpha^{-1}(F_2(\alpha)))$ şeklinde tanımlanır [23].

Teorem 3.1.14. (F_1, \mathcal{A}, τ) ve (F_2, \mathcal{A}, ν) sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Ayrıca $(F_1, \mathcal{A}, \tau), (F_2, \mathcal{A}, \nu)$ ye esnek topolojik esnek homomorfik olsun. Eğer her bir $\alpha \in A$ için $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), \nu_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ karşılık gelen homomorfizm olmak üzere

- i) $(\varphi F_1, \mathcal{A}, \tau)$, Y üzerinde esnek topolojik esnek grup ve $(\varphi F_1, \mathcal{A}, \tau) \cong (F_2, \mathcal{A}, \nu)$ dır.
- ii) $(\varphi^{-1} F_2, \mathcal{A}, \tau)$, X üzerinde esnek topolojik esnek grup ve $(\varphi^{-1} F_2, \mathcal{A}, \tau) \cong (F_2, \mathcal{A}, \tau)$ dır [23].

İspat:

- i) Her bir $\alpha \in A$ için $(\varphi F_1)(\alpha) = (\varphi_\alpha(F_1(\alpha)))$, $F_2(\alpha)$ nın bir alt grubudur. Bundan dolayı $(\varphi F_1, \mathcal{A}), (F_2, \mathcal{A})$ nın esnek alt grubudur. Teorem 3.1.9 den $(\varphi F_1, \mathcal{A}, \tau), Y$ üzerinde esnek topolojik esnek gruptur ve $(\varphi F_1, \mathcal{A}, \tau) \cong (F_2, \mathcal{A}, \nu)$ dır.

- ii) Her bir $\alpha \in A$ için $(\varphi^{-1}F_2)(\alpha) = (\varphi_\alpha^{-1}(F_2(\alpha)))$, $F_1(\alpha)$ nin bir alt grubudur. Bundan dolayı $(\varphi^{-1}F_2, A), (F_1, A)$ nin esnek alt grubudur. Teorem 3.1.9 den $(\varphi^{-1}F_2, A, \tau)$, X üzerinde esnek topolojik esnek gruptur ve $(\varphi^{-1}F_2, A, \tau) \lesssim (F_1, A, \tau)$ dir.

Teorem 3.1.15. (F_1, A, τ_1) ve (F_2, A, τ_2) sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Ayrıca $(F_1, A, \tau_1), (F_2, A, \tau_2)$ üzerine esnek topolojik esnek homomorfik olsun.

- i) Eğer $(F_3, A, \tau_1), (F_1, A, \tau_1)$ nin esnek topolojik esnek normal alt grubu ise $(\varphi F_1, A, \tau_2), (\varphi F_3, A, \tau_2)$ nin esnek topolojik esnek normal alt grubudur. Burada φF Tanım 3.1.9 deki gibi tanımlanır.
- ii) Eğer $(F_4, A, \tau_2), (F_2, A, \tau_2)$ nin esnek topolojik esnek normal alt grubu ise $(\varphi^{-1}F_4, A, \tau_1), (\varphi^{-1}F_2, A, \tau_1)$ nin esnek topolojik esnek normal alt grubudur. Burada $\varphi^{-1}F$ Tanım 3.1.7 deki gibi tanımlanır [23].

İspat:

- i) $(F_1, A, \tau_1), (F_2, A, \tau_2)$ üzerine esnek topolojik esnek homomorfik olduğundan, açıkça $(\varphi F_3, A, \tau_2)$ ve $(\varphi F_1, A, \tau_2)$, Y üzerinde esnek topolojik esnek alt gruptur. Ayrıca her $\alpha \in A$ için $\varphi_\alpha(F_1(\alpha))$ ve $\varphi_\alpha(F_3(\alpha))$ ların her ikisinde $F_2(\alpha)$ nin alt grubudur ve $\varphi_\alpha F_3(\alpha), \varphi_\alpha F_1(\alpha)$ nin bir normal alt grubudur. Böylece $(\varphi F_3, A), (\varphi F_1, A)$ nin esnek normal alt grubudur. Burada $(\varphi F_3, A, \tau_2), (\varphi F_1, A, \tau_2)$ nin bir esnek topolojik esnek normal alt grubudur.
- ii) $(F_1, A, \tau_1), (F_2, A, \tau_2)$ üzerine esnek topolojik esnek homomorfik olduğundan açıkça $(\varphi^{-1}F_3, A, \tau_1)$ ve $(\varphi^{-1}F_1, A, \tau_1)$, X üzerinde esnek topolojik esnek alt gruptur. Ayrıca her $\alpha \in A$ için $\varphi_\alpha^{-1}(F_4(\alpha)), \varphi_\alpha^{-1}(F_2(\alpha))$ ların her ikisinde $F_1(\alpha)$ nin alt grubu ve $\varphi_\alpha^{-1}F_4(\alpha), \varphi_\alpha^{-1}F_2(\alpha)$ nin bir normal alt grubudur.

Böylece her $\alpha \in A$ için $\varphi_\alpha^{-1}(F_3(\alpha)), \varphi_\alpha^{-1}(F_2(\alpha))$ nin normal alt grubudur. Burada $(\varphi^{-1}F_3, A), (\varphi^{-1}F_2, A)$ nin esnek normal alt grubudur. Buradanda $(\varphi^{-1}F_3, A, \tau_1), (\varphi^{-1}F_2, A, \tau_1)$ nin bir esnek topolojik esnek normal alt grubudur.

Tanım 3.1.8. (F_1, A, τ) ve (F_2, A, ν) sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Eğer her bir $\alpha \in A$ için

- i) $\varphi_\alpha : F_1(\alpha) \rightarrow F_2(\alpha)$ bir izomorfizmdir
- ii) $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), \nu_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ bir homeomorfizmdir

şartları sağlayan en az bir $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), \nu_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ varsa $(F_1, A, \tau), (F_2, A, \nu)$ ya esnek topolojik esnek izomorfiktir denir ve $(F_1, A, \tau) \simeq (F_2, A, \nu)$ şeklinde gösterilir [23].

Teorem 3.1.16. $(N, A, \tau), (F, A, \tau)$ nin esnek topolojik esnek normal alt grubu olsun. Her bir $\alpha \in A$ için $\psi_\alpha : (F(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (\frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}, \tau_{\frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}}^\alpha)$, $\psi_\alpha(\xi) = N(\alpha)$ $\xi \in F(\alpha)$ şeklinde tanımlanan kanonik dönüşüm bir açık homomorfizmdir [23].

İspat: $(N, A, \tau), (F, A, \tau)$ nin esnek topolojik esnek normal alt grubu olsun. Her $\alpha \in A$ için $N(\alpha), F(\alpha)$ nin normal alt grubudur. $(N(\alpha), \tau_{N(\alpha)}^\alpha), (F(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha)$ nin topolojik normal alt grubudur. Bu nedenle Teorem 2.2.1 Bölüm c den $\psi_\alpha : (F(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (\frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}, \tau_{\frac{F(\alpha)}{N(\alpha)}}^\alpha)$ kanonik dönüşümü açık homomorfizmdir.

Teorem 3.1.17. (F_1, A, τ) ve (F_2, A, ν) sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek topolojik esnek grup olsun. Ayrıca $(F_1, A, \tau_1), (F_2, A, \tau_2)$ ye esnek topolojik esnek homomorfik olsun. Eğer her bir $\alpha \in A$ için $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), \nu_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ karşılık gelen homomorfizm ve $K(\alpha), \varphi_\alpha$ nin çekirdeği ise $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), \nu_{F_2(\alpha)}^\alpha)$

sürekli (açık fonksiyondur) ve $\varphi_\alpha^0(\xi K(\alpha)) = \varphi_\alpha(\xi)$ olmak üzere

$$\varphi_\alpha^0 : \left(\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}, \tau_{\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}}^\alpha \right) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha) \text{ sürekli (açıktır) [23].}$$

İspat: $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ yöndeş homomorfizm ve $K(\alpha)$, φ_α nın çekirdeği olsun. $F_1(\alpha) \rightarrow \frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}$ kanonik dönüşümü, $\xi \in F_1(\alpha)$ $\psi_\alpha(\xi) = K(\alpha)$ şeklinde

tanımlansın. Aynı şekilde $\varphi_\alpha^0 : \left(\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}, \tau_{\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}}^\alpha \right) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ de $\varphi_\alpha^0[\xi K(\alpha)] = \varphi_\alpha(\xi)$

$\xi \in F_1(\alpha)$ ve her $\xi \in F_1(\alpha)$ için $\varphi_\alpha(\xi) = \varphi_\alpha^0[\xi K(\alpha)] = \varphi_\alpha^0(\psi_\alpha(\xi)) = \varphi_\alpha^0 \psi_\alpha(\xi)$ şeklinde tanımlansın. Buradan $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^0 \psi_\alpha$ dır ve dolayısıyla Teorem 2.2.2 dan eğer

$$\varphi_\alpha^0 : \left(\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}, \tau_{\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}}^\alpha \right) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha) \text{ sürekli (açıktır), } \varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$$

sürekli (açıktır).

Teorem 3.1.18. (Temel Homomorfizm Teoremi) (F_1, A, τ) ve (F_2, A, v) sırasıyla X ve Y üzerinde sırasıyla iki esnek topolojik esnek grup ve $(F_1, A, \tau) \sim (F_2, A, v)$ olsun. Ayrıca $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ karşılık gelen homomorfizm ve her $\alpha \in A$ için $K(\alpha)$ φ_α nın çekirdeği olsun. Eğer φ_α açık ve $F_1(\alpha) \rightarrow \frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}$ kanonik dönüşüm ise

her $\alpha \in A$ için $\varphi_\alpha^0 : \left(\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}, \tau_{\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}}^\alpha \right) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ bir homeomorfizm olmak üzere $(F_1/K, A) \sim (F_2, A)$ dir [23].

İspat: $(F_1, A, \tau) \sim (F_2, A, v)$ ve $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ karşılık gelen homomorfizm ise $\varphi_\alpha : F_1(\alpha) \rightarrow F_2(\alpha)$ dönüşümü cebirsel olarak bir homomorfizm ve $\varphi_\alpha : (F_1(\alpha), \tau_{F_1(\alpha)}^\alpha) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ sürekli. Ayrıca $K(\alpha)$, φ_α nın çekirdeği ise Teorem 2.1.7 den $(F_1/K, A) \sim (F_2, A)$ dır.

Aynı şekilde dönüşüm $\varphi_\alpha^0 : \left(\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}, \tau_{\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}}^\alpha \right) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ dönüşümü her

$\xi \in F_1(\alpha)$ için $\varphi_\alpha^0[\xi K(\alpha)] = \varphi_\alpha(\xi)$ şeklinde tanımlı olduğundan her $\alpha \in A$ için $\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}$

grubundan $F_2(\alpha)$ grubu üzerine cebirsel olarak izomorfizmdir. Bundan dolayı

$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^0 \psi_\alpha$ sürekli ve açık olduğundan Teorem 3.1.17 dan, her $\alpha \in A$ için

$\varphi_\alpha^0 : \left(\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}, \tau_{\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}}^\alpha \right) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ sürekli ve açıktır. φ_α^0 biyektif ve açık olduğundan

$[\varphi_\alpha^0]^{-1}$ sürekli dir. Bu nedenle her $\alpha \in A$ için $\varphi_\alpha^0 : \left(\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}, \tau_{\frac{F_1(\alpha)}{K(\alpha)}}^\alpha \right) \rightarrow (F_2(\alpha), v_{F_2(\alpha)}^\alpha)$ bir

homeomorfizmdir.

KAYNAKÇA

- [1] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, *Inf. Control.* **8**, (1965) 338–353.
- [2] Atanassov, K., Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems.* **20**, (1986) 87–96.
- [3] Atanassov, K., Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems.* **64**, (1994) 159–174.
- [4] Gorzalzany, M.B., A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems.* **21**, (1987) 1–17.
- [5] Pawlak, Z., Rough sets, *Int. J. Comput. Sci.* **11**, (1982) 341–356.
- [6] Molodtsov, D., Soft set theory first results, *Comput. Math. Appl.* **37**, (1999) 19–31.
- [7] Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R., An application of soft sets in a decision making problem, *Comput. Math. Appl.* **44**, (2002) 1077–1083.
- [8] Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R., Soft set theory, *Comput. Math. Appl.* **45**, (2003) 555–562.
- [9] Chen, D., The parametrization reduction of soft sets and its applications, *Computers and Math. with Appl.* **49**, (2005) 757–763.
- [10] Pie, D., Miao, D., From soft sets to information systems, *Granular computing, IEEE Inter. Conf.* **2**, (2005) 617–621.
- [11] Kong, Z., Gao, L., Wong, L., Li, S., The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, *J. Comp. Appl. Math.* **56**, (2008) 3029–3037.
- [12] Yan Zou, Zhi Xiao, Data analysis approaches of soft sets under incomplete information, *Knowl.-Based Syst.* **21**, (2008) 941–945.
- [13] Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A., Fuzzy soft sets, *The Journal of Fuzzy Mathematics.* **9**, (3), (2001) 589–602
- [14] Biswas, R., Nanda, S., Rough groups and rough subgroups. *Bull. Polish Acad. Math.* **42**, (1994) 251–254
- [15] Rosenfeld, A., Fuzzy groups. *J. Math. Anal. Appl.* **35**, (1971) 512–517
- [16] Aktas, H, Cagman, N: Soft sets and soft groups. *Information Sciences.* **177**, (2007) 2726–2735
- [17] Jun, Y.B., Soft BCK/BCI-algebras, *Computers and Math. with Appl.* **56**, (2008) 1408–1413.

- [18] Jun, Y.B., Park, C.H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-Algebras, **Inform. Sci.** **178**, (2008) 2466–2475.
- [19] Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X.Z., Soft semirings, **Computers and Math. with Appl.** **56**, (2008) 2621–2628
- [20] Ali, M.I., Feng, F., Liu, X.Y., Min, W.K., Shabir, M., On some new operations in soft set theory, **Computers and Math. with Appl.** **57**, (2009) 1547–1553.
- [21] Shabir, M., Irfan Ali, M., Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups, **New Math. Nat. Comput.** **5**, (2009) 599–615.
- [22] Shabir, M, Naz, M: On soft topological spaces. **Computers and Mathematics with Applications.** **61**, (2011) (7), 1786–1799
- [23] Nazmul S., Samanta, S.K., Soft topological soft groups **Mathematical Sciences** **6**, (2012) 66
- [24] Foster, D.H., Fuzzy topological groups. **J. Math. Anal. Appl.** **67**, (1979) 549–564
- [25] Liang, M.J., Hai, Y.C., Fuzzy topological groups. **Fuzzy Sets and Systems.** **12**, (1984) 289–299
- [26] Nazmul, S., Samanta, S.K., Soft topological groups. **Kochi J. Math** **5**, (2010) 151–161
- [27] Nazmul, S., Samanta, S.K., Fuzzy soft group. **The Journal of Fuzzy Mathematics.** **19** (2011) (1), 101–114
- [28] Husain, T., Introduction to Topological Group. W. B. Saunders Company, **Philadelphia** (1966)

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Mehmet ERSÖZ

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 4 Ekim 1989, Kayseri

Medeni Durumu: Bekâr

Tel: +90 507 949 53 42

email: mehmeterso09@hotmail.com

Yazışma Adresi: Mevlana Mah. Karasu Cad. 19 Mayıs Apartmanı Kat.4 No.24 Anayurt
38280 Talas/KAYSERİ

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Erciyes Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği	-
Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2014
Lise	Boğazlıyan Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2007

İŞ DENEYİMLERİ

- 2012-2013 Kayseri Final Dergisi Dergisi Dersaneleri Matematik Öğretmeni
- 2014-2015 Boğazlıyan Anadolu Lisesinde Ücretli Matematik Öğretmeni
- 2016-2017 Kayseri Çözüm Temel Lisesi Matematik Öğretmeni
- 2017-2018 Özel Kayseri Doğa Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni
- 2018-2019 Melikgazi Halk Eğitim Merkezi Destekleme ve Yetiştirme Kursu Matematik Öğretmeni

YABANCI DİL

İngilizce