

**ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLARIN BAZI AİLELERİ İÇİN
DOĞURUCU FONKSİYONLAR**

Nejla ÖZMEN

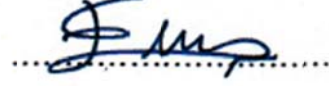
**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2014
ANKARA**

Nejla ÖZMEN tarafından hazırlanan "ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLARIN BAZI AİLELERİ İÇİN DOĞURUCU FONKSİYONLAR" adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı



Bu çalışma jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniv.



Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniv.



Doç. Dr. Fatma AYZAZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniv.



Doç. Dr. Nuri ÖZALP
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniv.



Doç. Dr. Meryem KAYA
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniv.



Tez Savunma Tarihi: 15/04/2014

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri enstitüsü Yönetim Kurulu doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına atıf yapıldığını bildiririm.

Nejla ÖZMEN



ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLARIN BAZI AİLELERİ İÇİN DOĞURUCU FONKSİYONLAR

(Doktora Tezi)

Nejla ÖZMEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2014

ÖZET

Bu tezin amacı çok değişkenli polinomların bazı sınıfları için çeşitli özellikler vermektir. Öncelikle bilinen bazı çok değişkenli fonksiyonların farklı doğurucu fonksiyonları ve toplam formülleri verilmiştir. Daha sonra yeni bir çok değişkenli polinom ailesi tanımlanmış ve bu polinomlar için bir integral gösterimi, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar, rekürans bağıntıları elde edilmiştir. Ayrıca bu polinomlar ve genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonlarını kapsayan yeni bir polinom ailesi arasında bir doğurucu fonksiyon bağıntısı verilmiştir. Son olarak özel durumlar incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138

Anahtar Kelimeler : Doğurucu fonksiyon, Pochhammer sembolü, rekürans bağıntısı, hipergeometrik fonksiyon, toplam formülü.

Sayfa Adedi : 82

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

**GENERATING FUNCTIONS FOR SOME FAMILIES OF
MULTIVARIABLE POLYNOMIALS**

(Ph. D.Thesis)

Nejla ÖZMEN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2014

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to give various properties for some families of polynomials in several variables. Firstly, some generating functions and summation formulae for well-known multivariable polynomials are introduced. Later, a new family of multivariable polynomials is defined, and an integral representation, multilinear and multilateral generating functions and recurrence relations for these polynomials are obtained. Furthermore, a generating function relation between these polynomials and a new family of polynomials involving generalized Lauricella functions are derived. At the end of the thesis, we investigate some special cases.

Science Code : 204.1.138

Key Words : Generating function, Pochhammer symbol, recurrence relation, hypergeometric function, addition formula.

Page Number : 82

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

TEŐEKKÖR

Bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan danışman hocam, Sayın Doç.Dr. Esra ERKUŞ DUMAN' a ve hayat boyu her türlü sıkıntıda yanımda yer alan ve çalışmalarım esnasında bana anlayıő gösteren sevgili aileme en içten saygı ve teőekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Gamma Fonksiyonu	3
2.2. Pochhammer Sembolü ve Hipergeometrik Fonksiyonlar	3
2.3. Doğurucu Fonksiyon.....	5
2.4. Lagrange Polinomları.....	5
2.5. Lagrange Polinomlarından Jacobi Polinomlarına Geçiş	7
2.6. Chan-Chyan-Srivastava Polinomları.....	7
2.7. Multilineer ve Multilateral Doğurucu Fonksiyonlar	8
2.8. İkinci Çeşit Stirling Sayıları ile İlişkili Bir Doğurucu Fonksiyon	10
2.9. Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar İçin İki Temel Teorem.....	12
3. CHAN-CHYAN-SRIVASTAVA POLİNOMLARI İÇİN FARKLI DOĞURUCU FONKSİYONLAR VE TOPLAM FORMÜLLERİ.....	16
4. BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ VE BELİRLİ SINIFLARI İÇİN TOPLAM FORMÜLLERİ.....	29
4.1. Hipergeometrik Polinomların Bir Ailesi İçin Toplam Formülleri	29
4.2. Genişletilmiş Jacobi Polinomları İçin Toplam Formülleri.....	31

	Sayfa
4.3. Laguerre Polinomları İçin Toplam Formülleri.....	34
4.4. Hermite Polinomları İçin Toplam Formülleri.....	38
4.5. Çok Değişkenli Polinomların Bir Sınıfı İçin Toplam Formülleri.....	40
5. ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLARIN BİR SINIFI İÇİN BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAURICELLA FONKSİYONLARI.....	45
6. ÇOK DEĞİŞKENLİ $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ POLİNOMLARI.....	59
6.1. Çok Değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ Polinomları.....	59
6.2. Doğurucu Fonksiyonlar.....	59
6.3. $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ Polinomlarının Bazı Özellikleri	65
6.4. $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ Polinomlarının Bir Sınıfı İçin Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar.....	70
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	78
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	82

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simge	Açıklama
$B(x, y)$	Beta Fonksiyonu
$g_n^{(a_1, \dots, a_r)}(x_1, \dots, x_r)$	Chan-Chyan-Srivastava Polinomu
$h_n^{(a_1, \dots, a_r)}(x_1, \dots, x_r)$	Çok Değişkenli Lagrange-Hermite Polinomu
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
${}_2F_1(a, b; c; x)$	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_n^{(\alpha, \beta)}(x; a, b, c)$	Genişletilmiş Jacobi Polinomu
$H_n(x)$	Hermite Polinomu
$S(n, k)$	İkinci çeşit Stirling sayıları
$P_n^{(a, b)}(x)$	Jacobi Polinomu
$g_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)$	Lagrange Polinomu
$F_A^{(n)}, F_B^{(n)}, F_C^{(n)}, F_D^{(n)}$	Lauricella Fonksiyonları
$P_n(x)$	Legendre Polinomu
$(a)_n$	Pochhammer Sembolü

1. GİRİŞ

Son yıllarda Uygulamalı Matematikte ortogonal polinomlar teorisi ve bunların uygulamaları konuları üzerinde oldukça çalışılmaktadır. Bu polinomların matematiksel istatistik, quantum mekaniği ve matematiksel fiziğin uygulamalarında önemli yerleri vardır. Tek ya da çok değişkenli polinomların birçok özellikleri halen araştırılmaktadır.

Tek değişkenli ortogonal polinomlarla ilgili yapılan çalışmaların ışığı altında, çok değişkenli polinomlar teorisi üzerinde de çalışmalar yapılmaktadır. 1926 da iki değişkenli Appell polinomlarının özellikleri P. Appell ve J. Kampè de Fèriet tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. 1938 de Jackson, bir bölgede keyfi bir ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan iki değişkenli ortogonal polinomların en basit özelliklerini ele almıştır. 1967 de H.L. Krall ve I. Sheffer, Jackson' ın sonuçlarını genelleştirmiş ve özfonksiyonları bir bölgede ortogonal polinomlar olan ikinci basamaktan bazı lineer kısmi diferensiyel operatörleri incelemiştir. 1974 de G.K. Engelis de benzer sonuçlar elde etmiş ve iki değişkenli bazı ortogonal polinom sınıfları için Rodrigues formülünü türetmiştir. Ayrıca 1998 de Khan ve Shukla Lagrange polinomlarının üç değişkenli hali üzerinde çalışmışlar, 2001 yılında bu polinomların çok değişkenlisi Chan, Chyan ve Srivastava tarafından tanımlanmış ve literatüre Chan-Chyan-Srivastava polinomları adıyla, çok değişkenli polinomların önemli bir sınıfı olarak geçmiştir.

Yine son yıllarda da Altın ve Erkuş tarafından çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları tanımlanmış ve özellikleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır. 2006 yılında ise bu polinom sınıflarının ikisini de kapsayan bir çok değişkenli polinomlar ailesini Erkuş ve Srivastava inşa etmiş ve bir takım özelliklerini incelemişlerdir.

Bu tezde, yukarıda bahsedildiği gibi Uygulamalı Matematikte önemli yer tutan polinomların, özellikle çok değişkenli olanları üzerinde durulmuştur. Altıncı bölüm orijinal sonuçlara ayrılmıştır. Çok değişkenli polinomların yeni bir sınıfı elde edilmiş ve bu polinomlar için multilineer, multilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları, rekürans bağıntıları bulunup, benzer özellikler incelenmiştir.

Ayrıca elde edilen çok değişkenli polinomların bazı fonksiyonlar ile arasında bilateral doğurucu fonksiyonların bir ailesi elde edilmiş ve bu elde edilen doğurucu fonksiyonlardan özel durumlar ele alınarak başka bilateral doğurucu fonksiyonlar bulunmuş ve sonuçları incelenmiştir.



2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir.

2.2. Pochhammer Sembolü ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

a, b, c ler reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}z^2 + \dots \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye *hipergeometrik seri* adı verilir. c sıfır yada negatif bir tamsayı olmamalıdır.

α reel yada kompleks bir sayı, n sıfır veya pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(\alpha)_n = \alpha (\alpha + 1) (\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan $(\alpha)_n$ ifadesine *Pochhammer sembolü* denir ve $(\alpha)_0 = 1$ olarak tanımlanır.

Bu sembol yardımıyla Eş. 2.1 deki hipergeometrik seri

$${}_2F_1(a, b; c; z) = F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \quad (2.3)$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca Pochhammer sembolü,

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.4)$$

$$(\alpha)_{n+1} = \alpha (\alpha + 1)_n \quad (2.5)$$

$$(\alpha)_n = (-1)^n \binom{-\alpha}{n} n! \quad (2.6)$$

$$(\alpha + k)_{n+1} = (\alpha + k) (\alpha + k + 1)_n \quad (2.7)$$

özelliklerine sahiptir.

Eş. 2.3 ün daha geneli,

$$\begin{aligned} {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) &= {}_pF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; \end{matrix} \middle| z \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \dots (\beta_q)_n n!} z^n \end{aligned}$$

şeklinde olup, *genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar* olarak tanımlanırlar. Burada F nin altındaki p ve q indisleri, F nin yapısında biri α diğeri β olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder.

2.2.1. Lemma

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \quad (|x| < 1)$$

dir.

2.2.2. Lemma

$D := \frac{d}{dx}$ olmak üzere,

$$D^s x^m = \frac{m! x^{m-s}}{(m-s)!}$$

dir.

2.3. Doğurucu Fonksiyon

İki değişkenli bir $F(x, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden,

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesinin *doğurucu fonksiyonu* denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız, n nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilirler.

2.4. Lagrange Polinomları

İki değişkenli polinomlar ailesinden olan $g_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ Lagrange polinomları,

$$(1-xt)^{-\alpha} (1-yt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) t^n \quad ; \quad |t| < \min\{|x|^{-1}, |y|^{-1}\} \quad (2.8)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanmaktadır [11]. Buradan $g_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ Lagrange polinomları aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$(1-xt)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} (-1)^k x^k t^k$$

$$(1-yt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} (-1)^n y^n t^n$$

Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılır ve ikinci tarafa kuvvet serisinin Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (1-xt)^{-\alpha} (1-yt)^{-\beta} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} (-1)^k x^k t^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} (-1)^n y^n t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \binom{-\beta}{n-k} (-1)^n x^k y^{n-k} \right] t^n \end{aligned} \quad (2.9)$$

olur. Eş. 2.8 ve Eş. 2.9 karşılaştırılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)] t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \binom{-\beta}{n-k} (-1)^n x^k y^{n-k} \right] t^n$$

olup, t^n nin katsayıları eşitlendiğinde,

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{k=0}^n \binom{-\alpha}{k} \binom{-\beta}{n-k} (-1)^n x^k y^{n-k}$$

elde edilir. Eş. 2.6 kullanılarak $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları,

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha)_k (\beta)_{n-k}}{k! (n-k)!} x^k y^{n-k}$$

şeklinde de yazılabilir.

2.5. Lagrange Polinomlarından Jacobi Polinomlarına Geçiş

$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Jacobi polinomları,

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-k} \quad (2.10)$$

$$= \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1\left(-n, \alpha + \beta + n + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

şeklinde tanımlanır [33]. Jacobi polinomlarının bu tanımından yararlanılarak Jacobi polinomları ile Lagrange polinomları arasında aşağıdaki şekilde bir bağıntı bulunabilir [4]:

$$g_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = (y-x)^n P_n^{(-\alpha-n, -\beta-n)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \quad (2.11)$$

Eş. 2.11 yardımıyla, Lagrange polinomları ile Jacobi polinomları arasında, birinin bilinen bir özelliği kullanılarak diğeri için yeni özellikler ortaya çıkarılabilir.

2.6. Chan-Chyan-Srivastava Polinomları

$g_n^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$ çok değişkenli Lagrange polinomları,

$$\prod_{i=1}^r \left\{ (1-x_i t)^{-\alpha_i} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n \quad (2.12)$$

$$\left(|t| < \min \left\{ |x_1|^{-1}, \dots, |x_r|^{-1} \right\} \right)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanırlar [4].

Aynı zamanda bu polinomlara Chan-Chyan-Srivastava polinomları da denir. 1998 yılında bu polinomların $r=3$ halini Khan ve Shukla çalışmışlardır [16].

Kısım 2.4 de iki değişkenli Lagrange polinomlarının elde edililişinde kullanılan yolla ve Eş. 2.12 den hareketle bu polinomların açık ifadesi,

$$g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=n} \binom{\alpha_1+k_1-1}{k_1} \dots \binom{\alpha_r+k_r-1}{k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

olarak bulunur. İkinci yandaki binom katsayıları yerine Pochhammer sembolü cinsinden ifadeleri kullanılırsa,

$$g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=n} (\alpha_1)_{k_1} \dots (\alpha_r)_{k_r} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_r^{k_r}}{k_r!} \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir.

2.7. Multilineer ve Multilateral Doğurucu Fonksiyonlar

2.7.1. Tanım

Bir $H(x_1, \dots, x_r, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetlerine göre,

$$H(x_1, \dots, x_r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n f_n(x_1) \dots f_n(x_r) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa, $H(x_1, \dots, x_r, t)$ fonksiyonuna, $f_n(x_1), \dots, f_n(x_r)$ fonksiyonları için *Multilineer Doğurucu Fonksiyon* denir.

Burada h_n ler, x ve t den bağımsız n nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilirler.

$r = 2$ için $H(x_1, x_2, t)$ fonksiyonuna *bilineer doğurucu fonksiyon* denir.

2.7.2. Tanım

Bir $G(x_1, \dots, x_r, t)$ fonksiyonu t nin kuvvetlerine göre,

$$G(x_1, \dots, x_r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f_{1,n}(x_1) \dots f_{r,n}(x_r) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $G(x_1, \dots, x_r, t)$ fonksiyonuna, $f_{1,n}(x_1), \dots, f_{r,n}(x_r)$ fonksiyonları için *Multilateral Doğurucu Fonksiyon* denir.

Burada g_n ler, x ve t den bağımsız n nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilirler.

$r = 2$ için $G(x_1, x_2, t)$ fonksiyonuna *bilateral doğurucu fonksiyon* denir.

Katlıterim katsayıları,

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}, \quad (0 \leq k_j \leq n; j = 1, 2, \dots, r)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Bu katsayılar ve mutlak yakınsak seriler için geçerli olan

$$\sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} f(m_1 + \dots + m_r) \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_r^{m_r}}{m_r!} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{(x_1 + \dots + x_r)^n}{n!} \quad (2.14)$$

özdeşliği yardımıyla [31], Chan-Chyan-Srivastava polinomları için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilebilir [4]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} g_{m+n}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n = \prod_{j=1}^r \left\{ (1 - x_j t)^{-\alpha_j} \right\} g_m^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} \left(\frac{x_1}{1 - x_1 t}, \dots, \frac{x_r}{1 - x_r t} \right). \quad (2.15)$$

$$\left(|t| < \min \{ |x_1|^{-1}, \dots, |x_r|^{-1} \} ; m \in \mathbb{N}_0 \right)$$

2.8. İkinci Çeşit Stirling Sayıları ile İlişkili Bir Doğurucu Fonksiyon

Bu kısımda Eş. 2.15 doğurucu fonksiyon bağıntısının bir uygulaması verilecektir.

Eş. 2.15 de $m \rightarrow k$, $n \rightarrow l$, $t \rightarrow -z$ alınarak elde edilen bağıntıdan

$$g_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} \left(\frac{x_1}{1+x_1 z}, \dots, \frac{x_r}{1+x_r z} \right)$$

çekilir ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n g_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} \left(\frac{x_1}{1+x_1 z}, \dots, \frac{x_r}{1+x_r z} \right) z^k$$

serisinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n g_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} \left(\frac{x_1}{1+x_1 z}, \dots, \frac{x_r}{1+x_r z} \right) z^k = \prod_{j=1}^r \left\{ (1+x_j z)^{\alpha_j} \right\} \sum_{k=0}^n k! S(n, k) g_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) z^k \quad (2.16)$$

$$\left(|z| < \min \{ |x_1|^{-1}, \dots, |x_r|^{-1} \} ; n \in \mathbb{N}_0 \right)$$

elde edilir.

Eş. 2.16 da x_j yerine $\frac{x_j}{1-x_j z}$ ($j=1, \dots, r$) alınarak, Chan-Chyan-Srivastava

polinomları için bir doğurucu fonksiyon,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n g_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) z^k = \prod_{j=1}^r \left\{ (1-x_j z)^{-\alpha_j} \right\} \sum_{k=0}^n k! S(n, k) g_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} \left(\frac{x_1}{1-x_1 z}, \dots, \frac{x_r}{1-x_r z} \right) z^k \quad (2.17)$$

$$\left(|z| < \min \{ |x_1|^{-1}, \dots, |x_r|^{-1} \} ; n \in \mathbb{N}_0 \right)$$

olarak elde edilir [4]. Burada $S(n, k)$ ikinci çeşit Stirling sayıları olup,

$$\sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^n = \begin{cases} 0 & ; \quad (k > n) \\ k! S(n, k) & ; \quad (0 \leq k \leq n) \end{cases} \quad (2.18)$$

ve

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n ; \quad (0 \leq k \leq n) \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [28].

Aynı zamanda

$$S(n, 0) = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} S(n, k) = (-x)^n \quad (2.20)$$

dir. Buradaki $\delta_{n,m}$ Kroneker sembolüdür.

Ayrıca, $n=0$ alınırsa Eş. 2.17 deki doğurucu fonksiyon, Eş. 2.12 doğurucu fonksiyonuna indirgenir.

Eş. 2.12 de $\alpha_j \rightarrow \alpha_j + \beta_j$ yazılıp daha sonra iki kuvvet serisi için Cauchy çarpımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_r+\beta_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n &= \prod_{j=1}^r \left\{ (1-x_j t)^{-\alpha_j-\beta_j} \right\} \\ &= \prod_{j=1}^r \left\{ (1-x_j t)^{-\alpha_j} \right\} \prod_{i=1}^r \left\{ (1-x_i t)^{-\beta_i} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\beta_1, \dots, \beta_r)}(x_1, \dots, x_r) t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n g_{n-k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) g_k^{(\beta_1, \dots, \beta_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n \end{aligned}$$

bulunur. Burada t^n nin katsayıları eşitlendiğinde çok değişkenli Lagrange polinomları için aşağıdaki toplam formülü elde edilir [4]:

$$g_n^{(\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_r+\beta_r)}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{k=0}^n g_{n-k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) g_k^{(\beta_1, \dots, \beta_r)}(x_1, \dots, x_r) \quad (2.21)$$

Benzer şekilde yine Eş. 2.12 de $x_j = x$ ($j = 1, 2, \dots, r$) alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x, \dots, x) t^n &= (1 - xt)^{-\alpha_1 - \dots - \alpha_r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r + n - 1}{n} x^n t^n \quad (|t| < |x|^{-1}) \end{aligned}$$

bulunur. Burada t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle,

$$g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x, \dots, x) = \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r + n - 1}{n} x^n = \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)_n}{n!} x^n; \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.22)$$

elde edilir. Eş. 2.22 de $x = 1$ alınırsa,

$$g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(1, \dots, 1) = \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r + n - 1}{n} = \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)_n}{n!}$$

olur [4].

2.9. Bilineer ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar İçin İki Temel Teorem

Bu kısımda, çok değişkenli Lagrange polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonların bulunmasına kolaylık sağlayan iki temel teoremi vereceğiz.

2.9.1. Teorem

μ -yüncü basamaktan ve s değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sifıra denk olmayan $\Omega_\mu(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \tau^k$$

$$(a_k \neq 0; \psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1, \dots, x_r; \xi_1, \dots, \xi_s; \zeta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \zeta^k \quad (2.23)$$

$$(n, p \in \mathbb{N})$$

olsun. Burada $\lfloor n/p \rfloor$, n/p ye eşit ya da n/p den küçük olan en büyük tamsayıyı göstermektedir.

Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi} \left(x_1, \dots, x_r; \xi_1, \dots, \xi_s; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = \prod_{i=1}^r \{ (1 - x_i t)^{-\alpha_i} \} \Lambda_{\mu,\psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta) \quad (2.24)$$

bağıntısı gerçeklenir [4].

İspat

Eş. 2.24 deki doğurucu fonksiyon S olsun. $\Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x_1, \dots, x_r; \xi_1, \dots, \xi_s; \zeta)$ polinomlarının değeri Eş. 2.23 den alınıp Eş. 2.24 de yerine konulursa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n$$

olup burada,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + pk) \quad (2.25)$$

bağıntısı kullanılırsa [27],

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \eta^k t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) \eta^k \\
&= \prod_{i=1}^r \left\{ (1 - x_i t)^{-\alpha_i} \right\} \Lambda_{\mu, \psi}(\xi_1, \dots, \xi_s; \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

2.9.2. Teorem

μ -yüncü basamaktan ve s değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(\xi_1, \dots, \xi_s)$ fonksiyonu verilsin ve $p \in \mathbb{N}$, $\psi \in \mathbb{C}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ için,

$$\Lambda_{\mu, \psi, \alpha, \beta}^{n, p}(x_1, \dots, x_r; \xi_1, \dots, \xi_s; z) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} a_k g_{n-pk}^{(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_r + \beta_r)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+\psi k}(\xi_1, \dots, \xi_s) z^k$$

$$(a_k \neq 0; n \in \mathbb{N})$$

olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\lfloor k/p \rfloor} a_l g_{n-k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) g_{k-pl}^{(\beta_1, \dots, \beta_r)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1, \dots, \xi_s) z^l \\
= \Lambda_{\mu, \psi, \alpha, \beta}^{n, p}(x_1, \dots, x_r; \xi_1, \dots, \xi_s; z)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

bulunur [4].

İspat

Eş. 2.26'nın sol yanını T olsun. Şimdi,

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} A(k, l) = \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} A(k+pl, l) \quad (2.27)$$

bağıntısı kullanılırsa [27],

$$\begin{aligned} T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l g_{n-pl-k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) g_k^{(\beta_1, \dots, \beta_r)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1, \dots, \xi_s) z^l \\ &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1, \dots, \xi_s) z^l \sum_{k=0}^{n-pl} g_{n-pl-k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) g_k^{(\beta_1, \dots, \beta_r)}(x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır ve Eş. 2.21 den,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l g_{n-pl}^{(\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_r+\beta_r)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+\psi l}(\xi_1, \dots, \xi_s) z^l \\ &= \Lambda_{\mu, \psi, \alpha, \beta}^{n, p}(x_1, \dots, x_r; \xi_1, \dots, \xi_s; z) \end{aligned}$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanır. ■

3. CHAN-CHYAN-SRIVASTAVA POLİNOMLARI İÇİN FARKLI DOĞURUCU FONKSİYONLAR VE TOPLAM FORMÜLLERİ

Bu kısımda Chan ve arkadaşları tarafından tanımlanan Chan-Chyan-Srivastava polinomlarının farklı doğurucu fonksiyonları ve toplam formülleri incelenecektir.

3.1. Lemma

$n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı sağlanır:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [k+n]_m g_k^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^k = m! \prod_{j=1}^r \left\{ (1-x_j z)^{-\alpha_j} \right\} g_m^{(\alpha, -n)} \left(\frac{x_1 z}{1-x_1 z}, \dots, \frac{x_r z}{1-x_r z}, -1 \right) \quad (3.1)$$

Burada, $[k]_m := k(k-1) \dots (k-m+1)$ ($m \in \mathbb{N}$), $[k]_0 = 1$ ve $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ dir [6].

Lemma 3.1 de sırasıyla $n = m$ ve $n = 0$ alınırsa aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntıları elde edilir [6]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [k+m]_m g_k^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)_m g_k^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^k \\ &= m! \prod_{j=1}^r \left\{ (1-x_j z)^{-\alpha_j} \right\} g_m^{(\alpha, -m)} \left(\frac{x_1 z}{1-x_1 z}, \dots, \frac{x_r z}{1-x_r z}, -1 \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [k]_m g_k^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^k &= \sum_{k=-m}^{\infty} [k+m]_m g_{k+m}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^{k+m} \\ &= \sum_{k=-m}^{-1} [k+m]_m g_{k+m}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} [k+m]_m g_{k+m}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^{k+m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^m \left[\sum_{k=-m}^{-1} [k+m]_m g_{k+m}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} [k+m]_m g_{k+m}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^k \right] \\
&= z^m \left[\sum_{k=m}^1 (-k+1)_m g_{-k+m}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^{-k} \right] + z^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)_m g_{k+m}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^k \right] \\
&= z^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)_m g_{k+m}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) z^k \right] \\
&= m! \prod_{j=1}^r \left\{ (1-x_j z)^{-\alpha_j} \right\} g_m^{(\alpha)} \left(\frac{x_1}{1-x_1 z}, \dots, \frac{x_r}{1-x_r z} \right).
\end{aligned}$$

3.2. Lemma

Chan-Chyan-Srivastava polinomları aşağıdaki toplam formülüne sahiptir [6]:

$$\sum_{k=0}^p [k+n]_m g_k^{(\alpha)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) = \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} \prod_{j=1}^r \left\{ (-x_j)^{n_j} \right\} (-1)^m (\alpha_1 + \dots + \alpha_r - n)_m + \psi_1(\alpha).$$

$$(m, p, n, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0; n_j \geq m-1 \quad (j=1, \dots, r); p \geq n_1 + n_2 + \dots + n_r) \quad (3.2)$$

Burada,

$$\psi_k(\alpha) = \sum_{s=k}^r \left[\delta_{n_s, m-1}(\alpha_s)_m x_s^p \prod_{\substack{k \leq j \leq r \\ (j \neq s)}} \left\{ \left(1 - \frac{x_j}{x_s} \right)^{n_j} \right\} \right] \quad (k=1, 2)$$

şeklindedir.

Eş. 3.2 de $\alpha \rightarrow -\alpha - n$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p [k+n]_m g_k^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \\ &= \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} \prod_{j=1}^r \left\{ (-x_j)^{n_j} \right\} (-1)^m (-\alpha_1 - \dots - \alpha_r - p - n)_m + \psi_1(-\alpha - \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(m, p, n, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0; n_j \geq m-1 \quad (j=1, \dots, r); p \geq n_1 + n_2 + \dots + n_r)$$

Eş. 3.3 de $m=0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p g_k^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} \prod_{j=1}^r \left\{ (-x_j)^{n_j} \right\}$$

$$(p, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0; p \geq n_1 + \dots + n_r)$$

elde edilir.

3.1. Teorem

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) g_k^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \\ &= \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} \prod_{j=1}^r \left\{ (-x_j)^{n_j} \right\} \mathcal{P}_m(\alpha_1 + \dots + \alpha_r + p) + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \psi_1(\alpha). \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$(m, p, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0; n_j \geq m-1 \quad (j=1, \dots, r); p \geq n_1 + n_2 + \dots + n_r)$$

dir [6].

İspat

Pochhammer sembolünün tanımından,

$$(-\chi)_k = (-1)^k [\chi]_k \quad (k \in \mathbb{N}_0; \chi \in \mathbb{C})$$

olup, Eş. 2.18, Eş. 2.19 ve Eş. 2.20 ifadeleri kullanılarak

$$k^n = \sum_{j=1}^n S(n, j)[k]_j \quad (3.5)$$

elde edilir [14].

m . dereceden $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu $\mathcal{P}_m(k) = \sum_{l=0}^m c_l k^l$ şeklinde olsun. Bu ifade Eş. 3.2 de

yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) g_k^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{k=0}^p \left[c_0 + \sum_{l=1}^m c_l \left(\sum_{j=1}^l S(l, j)[k]_j \right) \right] g_k^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{k=0}^p c_0 g_k^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^l c_l S(l, j) \sum_{k=0}^p [k]_j g_k^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \\ &= c_0 \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} \prod_{q=1}^r \left\{ (-x_q)^{n_q} \right\} + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^l c_l S(l, j) \sum_{k=0}^p [k]_j g_k^{(-\alpha-n)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \\ &= c_0 \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} \prod_{j=1}^r \left\{ (-x_j)^{n_j} \right\} + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^l c_l S(l, j) \\ & \quad \times \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} \prod_{j=1}^r \left\{ (-x_j)^{n_j} \right\} (-1)^j (-\alpha_1 - \dots - \alpha_r - p)_j + \psi_1(-\alpha - \mathbf{n}) \\ &= \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} \prod_{j=1}^r \left\{ (-x_j)^{n_j} \right\} \mathcal{P}_m(\alpha_1 + \dots + \alpha_r + p) + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \psi_1(\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

3.1. Uyarı

Eğer Teorem 3.1 de $n_j = m-1$ ($j=1,2,\dots,r$) alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) g_k^{(-\alpha_1-m+1, \dots, -\alpha_r-m+1)}(\mathbf{x}) g_{p-k}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \delta_{p,r(m-1)} \prod_{j=1}^r \left\{ (-x_j)^{m-1} \right\} \mathcal{P}_m(\alpha_1 + \dots + \alpha_r + p)$$

$$+ \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \sum_{s=1}^r \left[(\alpha_s)_m x_s^p \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ (j \neq s)}} \left\{ \left(1 - \frac{x_j}{x_s} \right)^{m-1} \right\} \right]$$

$$(m \in \mathbb{N}; p \in \mathbb{N}_0; p \geq r(m-1))$$

dir [6].

3.2. Uyarı

Teorem 3.1 de $r=2$ alınır ve Eş. 2.11 kullanılırsa Eş. 2.10 ile tanımlanan Jacobi polinomları için aşağıdaki şekilde bir toplam formülü elde edilir:

Eş. 2.11 ifadesini düzenlersek,

$$P_k^{(-\alpha-k, -\beta-k)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = (y-x)^{-k} g_k^{(\alpha, \beta)}(x, y)$$

olup, bu ifadede $x \rightarrow -\frac{x+1}{2}$ ve $y \rightarrow -\frac{x-1}{2}$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$P_n^{(\alpha-n, \beta-n)}(x) = g_n^{(-\alpha, -\beta)}\left(-\frac{x+1}{2}, -\frac{x-1}{2}\right) \quad (3.6)$$

yazılır [31]. Bu ifade Eş. 3.4 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) P_k^{(\alpha+n_1-k, \beta+n_2-k)}(x) P_{p-k}^{(-\alpha-p+k, -\beta-p+k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) g_k^{(-\alpha-n_1, -\beta-n_2)} \left(-\frac{x+1}{2}, -\frac{x-1}{2} \right) g_{p-k}^{(\alpha, \beta)} \left(-\frac{x+1}{2}, -\frac{x-1}{2} \right) \\
&= \delta_{p, n_1+n_2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n_1} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n_2} \mathcal{P}_m(\alpha + \beta + p) + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \\
&\quad \times \left[\delta_{n_1, m-1}(\alpha)_m (-1)^p \left(\frac{x+1}{2} \right)^{p-n_2} + \delta_{n_2, m-1}(\beta)_m \left(\frac{1-x}{2} \right)^{p-n_1} \right] \quad (3.7) \\
&\quad (m, p, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0; \quad n_1, n_2 \geq m-1; \quad p \geq n_1 + n_2)
\end{aligned}$$

bulunur.

3.3. Uyarı

Eş. 2.11 ve Eş. 3.6 ifadeleri eşdeğerdir. Ayrıca bilinmektedir ki,

$$g_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = y^n P_n^{(\alpha+\beta-1, -\beta-n)} \left(\frac{2x-y}{y} \right)$$

dir [31]. Burada, $y = 2x / (x+1)$ alınırsa,

$$P_n^{(\alpha+\beta-1, -\beta-n)}(x) = \left(\frac{x+1}{2x} \right)^n g_n^{(\alpha, \beta)} \left(x, \frac{2x}{x+1} \right)$$

olup, bu son bağıntı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) P_k^{(-\alpha-\beta-n_1-n_2-1, \beta+n_2-k)}(x) P_{p-k}^{(\alpha+\beta-1, -\beta-p+k)}(x) \\ = \left(\frac{x+1}{2x}\right)^p \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) g_k^{(-\alpha-n_1, -\beta-n_2)}\left(x, \frac{2x}{x+1}\right) g_{p-k}^{(\alpha, \beta)}\left(x, \frac{2x}{x+1}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 3.1 göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) P_k^{(-\alpha-\beta-n_1-n_2-1, \beta+n_2-k)}(x) P_{p-k}^{(\alpha+\beta-1, -\beta-p+k)}(x) = \delta_{p, n_1+n_2} (-1)^p \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n_1} \mathcal{P}_m(\alpha + \beta + p) \\ + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \left[\delta_{n_1, m-1} (\alpha)_m \left(\frac{x+1}{2}\right)^p \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{n_2} + \delta_{n_2, m-1} (\beta)_m \left(\frac{1-x}{2}\right)^{n_1} \right] \\ (m, p, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0; n_1, n_2 \geq m-1; p \geq n_1 + n_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde başka bir toplam formülü elde edilir [6].

3.4. Uyarı

Eş. 3.8 de $\alpha \rightarrow -\alpha - \beta - r$, $\beta \rightarrow \beta - n + r + 1$, $n_1 \rightarrow r - 1$ ve $n_2 \rightarrow n - r - 1$ ve özel olarak $p \geq n_1 + n_2 + 1$ alınırsa, Jacobi polinomları için bir başka toplam formülü,

$$\begin{aligned} \sum_{k=j}^l \mathcal{P}_m(k) P_{k-j}^{(\alpha, \beta-k+j)}(x) P_{l-k}^{(-\alpha-n, -\beta+n-r+k-l-1)}(x) \\ = \frac{\mathcal{P}_m^{(m)}(0)}{m!} \left[\delta_{n, m+r} (-\beta)_m \left(\frac{1-x}{2}\right)^{r-1} + \delta_{r, m} (\alpha + \beta + 1)_m \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-r-1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{l-j+m-n+1} \right] \\ (j, l, m, n, r \in \mathbb{N}_0; l - j + 1 \geq n \geq m + r; r \geq m) \end{aligned}$$

olarak elde edilir [8].

3.5. Uyarı

$m \in \mathbb{N}_0$, $r \geq m$ ve $n \geq m+r$ olsun. Eş. 3.8 de $\alpha \rightarrow -\alpha - \beta - r$, $\beta \rightarrow \beta - n + r + 1$, $n_1 = r - 1$ ve $n_2 = n - r - 1$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) P_k^{(\alpha, \beta-k)}(x) P_{p-k}^{(-\alpha-n, -\beta+n-r+k-p-1)}(x) = \left\{ \delta_{p, n-2} (-1)^n \left(\frac{x+1}{2} \right)^{r-1} \mathcal{P}_m(-\alpha-1) \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{P}_m^{(m)}(0)}{m!} \left[\delta_{n-r, m} (-\beta)_m \left(\frac{1-x}{2} \right)^{r-1} + \delta_{r, m} (\alpha + \beta + 1)_m \left(\frac{x+1}{2} \right)^p \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{n-r-1} \right] \right\} \quad (3.9)$$

$(m, p, n, r \in \mathbb{N}_0; r \geq m; p+2 \geq n \geq m+r)$

elde edilir [21].

3.6. Uyarı

Eş. 3.7 ifadesinde özel olarak $n_1 = n_2 = m$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) P_k^{(\alpha+m-k, \beta+m-k)}(x) P_{p-k}^{(-\alpha-p+k, -\beta-p+k)}(x) = \delta_{p, 2m} \left(\frac{x^2-1}{4} \right)^m \mathcal{P}_m(\alpha + \beta + p) \quad (3.10)$$

$$(m \in \mathbb{N}_0; p \geq 2m)$$

elde edilir.

Eğer Eş. 3.10 ifadesinde $m = 0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) P_k^{(\alpha-k, \beta-k)}(x) P_{p-k}^{(-\alpha-p+k, -\beta-p+k)}(x) = 0 \quad (p \in \mathbb{N})$$

olur [6].

3.7. Uyarı

Eş. 3.4 de $x_1 = \dots = x_r = x$ alınır ve Eş. 2.22 ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \frac{(-\alpha_1 - \dots - \alpha_r - n_1 - \dots - n_r)_k (\alpha_1 + \dots + \alpha_r)_{p-k}}{k!(p-k)!} x^p \\ = \delta_{p, n_1 + \dots + n_r} (-x)^{n_1 + \dots + n_r} \mathcal{P}_m(\alpha_1 + \dots + \alpha_r + p) \end{aligned}$$

$$(m, p, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0; n_j \geq m-1 \quad (j=1, \dots, r), \quad p \geq n_1 + n_2 + \dots + n_r)$$

olup, x^p nin katsayıları eşitlenerek,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \frac{(-\alpha - n)_k (\alpha)_{p-k}}{k!(p-k)!} = 0 \quad (m, p, n \in \mathbb{N}_0; \quad p > n \geq m) \quad (3.11)$$

ve

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \frac{(-\alpha - p)_k (\alpha)_{p-k}}{k!(p-k)!} = (-1)^p \mathcal{P}_m(\alpha + p) \quad (m, p \in \mathbb{N}_0; \quad p \geq m) \quad (3.12)$$

elde edilir.

Eğer, Eş. 3.11 ve Eş. 3.12 ifadelerinde $\alpha = 1$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n+1}{k} \mathcal{P}_m(k) = 0 \quad (m, p, n \in \mathbb{N}_0; \quad p > n \geq m)$$

ve

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p+1}{k} \mathcal{P}_m(k) = (-1)^p \mathcal{P}_m(p+1) \quad (m, p \in \mathbb{N}_0; \quad p \geq m)$$

bulunur.

3.3. Lemma

İki değişkenli $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları için

$$g_n^{(\alpha,\beta-n)}(x,y) = g_n^{(\alpha,-\alpha-\beta+1)}(x-y,-y) \quad (3.13)$$

dir [6].

Ayrıca,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x) \quad (3.14)$$

ve

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) = g_n^{(\beta,\alpha)}(y,x) \quad (3.15)$$

dir.

Teorem 3.1 in farklı sonuçlarını incelemek için Eş. 3.13 ifadesi kullanılarak aşığıdaki iki değişkenli durum elde edilir.

3.1. Sonuç

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) g_k^{(-\alpha-n_1, \alpha+\beta+n_1+n_2+1-k)}(x,y) g_{p-k}^{(\alpha, -\alpha-\beta+1-p+k)}(x,y) &= \delta_{p, n_1+n_2} (y-x)^{n_1} y^{n_2} \mathcal{P}_m(\alpha+\beta+p) \\ &+ \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \left[\delta_{n_1, m-1} (\alpha)_m x^{n_2} (x-y)^{p-n_2} + (-1)^p \delta_{n_2, m-1} (\beta)_m x^{n_1} y^{p-n_1} \right] \\ &(m, p, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0; \quad n_1, n_2 \geq m-1; \quad p \geq n_1+n_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

dir [6].

3.8. Uyarı

Eş. 3.16 ifadesinde $n_1 = n_2 = m$ alınırsa m . dereceden her $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için toplam formülü,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) g_k^{(-\alpha-m, \alpha+\beta+2m+1-k)}(x, y) g_{p-k}^{(\alpha, -\alpha-\beta+1-p+k)}(x, y) = \delta_{p,2m} (y^2 - xy)^m \mathcal{P}_m(\alpha + \beta + p)$$

$$(m, p \in \mathbb{N}_0; \quad p \geq 2m)$$

olarak elde edilir.

Eş. 2.11, Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_n^{(\alpha, \beta-n)}(x, y) &= g_n^{(\alpha, -\alpha-\beta+1)}(x-y, -y) \\ &= (-x)^n P_n^{(-\alpha-n, \alpha+\beta-n-1)}\left(\frac{x-2y}{x}\right) \\ &= x^n P_n^{(\alpha+\beta-n-1, -\alpha-n)}\left(\frac{2y-x}{x}\right) \end{aligned}$$

olup, özel olarak $y = x(x+1)/2$ alınırsa,

$$P_n^{(\alpha+\beta-n-1, -\alpha-n)}(x) = x^{-n} g_n^{(\alpha, \beta-n)}\left(x, \frac{x(x+1)}{2}\right) \quad (3.17)$$

yazılabilir [6].

3.9. Uyarı

Eş. 3.17 ifadesi kullanılarak, Eş. 3.16 ifadesi m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için aşağıdaki şekilde yazılabilir [6]:

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) P_k^{(\beta+n_2-k, \alpha+n_1-k)}(x) P_{p-k}^{(-\beta-p+k, -\alpha-p+k)}(x) = \delta_{p, n_1+n_2} 2^{-p} (x-1)^{n_1} (x+1)^{n_2} \mathcal{P}_m(\alpha + \beta + p)$$

$$+ \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \left[\delta_{n_1, m-1} (\alpha)_m \left(\frac{1-x}{2} \right)^{p-n_2} + (-1)^p \delta_{n_2, m-1} (\beta)_m \left(\frac{1+x}{2} \right)^{p-n_1} \right].$$

$$(m, p \in \mathbb{N}_0; \quad n_1, n_2 \geq m-1; \quad p \geq n_1 + n_2)$$

Burada $n_1 = n_2 = m$ alınırsa Eş. 3.10 ifadesi elde edilir.

Eğer Eş. 2.12 ve Eş. 2.13 de,

$$\varphi_k^{(\alpha_2, \dots, \alpha_r)}(\mathbf{x}) := \lim_{|\alpha_1| \rightarrow \infty} \left\{ g_k^{(\alpha)} \left(\frac{x_1}{\alpha_1}, x_2, \dots, x_r \right) \right\} \quad (3.18)$$

alınırsa,

$$\varphi_k^{(\alpha_2, \dots, \alpha_r)}(\mathbf{x}) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=k} (\alpha_2)_{k_2} \dots (\alpha_r)_{k_r} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_r^{k_r}}{k_r!}$$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{(\alpha_2, \dots, \alpha_r)}(\mathbf{x}) z^k = e^{x_1 z} \prod_{j=2}^r \left\{ (1 - x_j z)^{-\alpha_j} \right\}$$

$$\left(|z| < \min \left\{ |x_2|^{-1}, \dots, |x_r|^{-1} \right\} \right)$$

olup,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n \varphi_k^{(\alpha_2, \dots, \alpha_r)}(\mathbf{x}) z^k$$

$$= e^{x_1 z} \prod_{j=2}^r \left\{ (1 - x_j z)^{-\alpha_j} \right\} \sum_{k=0}^n k! S(n, k) \varphi_k^{(\alpha_2, \dots, \alpha_r)} \left(x_1, \frac{x_2}{1-x_2 z}, \dots, \frac{x_r}{1-x_r z} \right) z^k$$

$$\left(|z| < \min \left\{ |x_2|^{-1}, \dots, |x_r|^{-1} \right\}; \quad n \in \mathbb{N}_0 \right)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ dir [6].

Teorem 3.1 ifadesinde Eş. 3.18 ifadesi kullanılırsa aşağıdaki teorem kolaylıkla yazılabilir.

3.2. Teorem

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \phi_k^{(-\alpha_2 - n_2, \dots, -\alpha_r - n_r)}(-x_1, x_2, \dots, x_r) \phi_{p-k}^{(\alpha_2, \dots, \alpha_r)}(\mathbf{x}) \\ &= \delta_{p, n_2 + \dots + n_r + m} \frac{(-1)^p}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) x_1^m \prod_{j=2}^r \{x_j^{n_j}\} + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) + \psi_2(\boldsymbol{\alpha}) \\ & (m, p, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0; \quad n_j \geq m-1 \quad (j=2, \dots, r); \quad p \geq n_2 + \dots + n_r + m) \end{aligned}$$

dir [6].

4. BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ VE BELİRLİ SINIFLARI İÇİN TOPLAM FORMÜLLERİ

Bu kısımda Hipergeometrik polinomlar, Jacobi polinomları, genişletilmiş Jacobi polinomları, Laguerre polinomları, Hermite polinomları, çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları ve Erkuş–Srivastava polinomlarının bazı sınıfları için elde edilen toplam formülleri incelenecektir.

4.1. Hipergeometrik Polinomların Bir Ailesi İçin Toplam Formülü

$S_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ hipergeometrik polinomları

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \binom{\alpha+n-1}{n} {}_2F_1(-n, \beta; \alpha; x) \quad (x, \alpha, \beta \in \mathbb{C}) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır ve bu polinomların bir doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\alpha,\beta)}(x) z^n = (1-z)^{-\alpha} \left(1 + \frac{xz}{1-z}\right)^{-\beta} = (1-z)^{\beta-\alpha} [1-(1-x)z]^{-\beta} \quad (4.2)$$

$$\left(|z| < \min\{1, |1-x|^{-1}\}\right)$$

bağıntısı ile verilir [8, 31].

Eş. 2.8 de $\alpha \rightarrow \alpha - \beta$, $\beta \rightarrow \beta$, $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 1-x$, $t \rightarrow z$ alınır ve Eş. 4.2 ile karşılaştırılarak z^n nin katsayıları eşitlenirse,

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(x) = g_n^{(\alpha-\beta,\beta)}(1, 1-x) \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu ise hipergeometrik polinomlar ile Lagrange polinomları arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 3.1 de, $r = 2$ için Eş. 4.3 ifadesi yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

4.1.1. Sonuç

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) S_k^{(-\alpha_1-\alpha_2-n_1-n_2, -\alpha_2-n_2)}(x) S_{p-k}^{(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2)}(x) &= \delta_{p, n_1+n_2} (-1)^{n_1} (x-1)^{n_2} \mathcal{P}_m(\alpha_1 + \alpha_2 + p) \\ &+ \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \left[\delta_{n_1, m-1} (\alpha_1)_m x^{n_2} + \delta_{n_2, m-1} (\alpha_2)_m (1-x)^{p-n_1} (-x)^{n_1} \right] \\ &(m, p, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0; n_1, n_2 \geq m-1; p \geq n_1 + n_2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklindedir [21].

4.1.1. Uyarı

Negatif olmayan tamsayılar için $r \geq m$ ve $n \geq m+r$ ve $\alpha_1 \rightarrow -\alpha + \beta - n + r + 1$, $\alpha_2 \rightarrow -\beta - r + 1$, $n_1 \rightarrow n - r - 1$ ve $n_2 \rightarrow r - 1$ alınırsa, Eş. 4.4 ifadesi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) S_k^{(\alpha, \beta)}(x) S_{p-k}^{(-\alpha-n+2, -\beta-r+1)}(x) &= \delta_{p, n-2} (-1)^n (1-x)^{r-1} \mathcal{P}_m(-\alpha - n + p + 2) \\ &+ \frac{\mathcal{P}_m^{(m)}(0)}{m!} \left[\delta_{n-r, m} (\alpha - \beta)_m x^{r-1} + \delta_{r, m} (\beta)_m (1-x)^{p-n+r+1} (-x)^{n-r-1} \right] \\ &(m, n, r, p \in \mathbb{N}_0; r \geq m; n \geq m+r; p \geq n-2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklini alır [21].

Bu durumun daha da özel bir durumunu göz önüne alarak, $p \geq n-1$ için Eş. 4.5 ifadesi, $S_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ hipergeometrik polinomları için bir başka toplam formülünü verir [21]:

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) S_k^{(\alpha, \beta)}(x) S_{p-k}^{(-\alpha-n+2, -\beta-r+1)}(x) = \frac{\mathcal{P}_m^{(m)}(0)}{m!} \left[\delta_{n-r, m} (\alpha - \beta)_m x^{r-1} + \delta_{r, m} (\beta)_m (1-x)^{p-n+r+1} (-x)^{n-r-1} \right]$$

$$(m, n, r, p \in \mathbb{N}_0; r \geq m; n \geq m+r; p \geq n-1).$$

4.2. Genişletilmiş Jacobi Polinomları İçin Toplam Formülü

$a, b > -1$, $n \in \mathbb{N}$ ve $-1 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinden biri, Eş. 2.10 ile verilen $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Jacobi polinomlarıdır.

Jacobi polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \left[1-t + \sqrt{1-2xt+t^2} \right]^{-\alpha} \left[1+t + \sqrt{1-2xt+t^2} \right]^{-\beta}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına, $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} D^n \left[(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right] \quad (4.6)$$

Rodrigues formülüne sahiptir.

Aşağıdaki Rodrigues formülüyle tanımlanan $F_n^{(\alpha, \beta)}(x; a, b, c)$ genişletilmiş Jacobi polinomlarının bazı özelliklerini 1966 yılında Fujiwara vermiştir [15]:

$$F_n^{(\alpha, \beta)}(x; a, b, c) = \frac{(-c)^n}{n!} (x-a)^{-\alpha} (b-x)^{-\beta} D_x^n \left\{ (x-a)^{n+\alpha} (b-x)^{n+\beta} \right\} \quad (c > 0) \quad (4.7)$$

Szegő tarafından tanımlanan $F_n^{(\alpha,\beta)}(x; a, b, c)$ genişletilmiş Jacobi polinomları aslında, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının sadece sabit bir katıdır [33].

Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 Rodrigues formülleri karşılaştırılırsa,

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x; a, b, c) = \{c(a-b)\}^n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2(x-a)}{a-b} + 1\right) \quad (a \neq b) \quad (4.8)$$

bağıntısı elde edilir.

Eş. 2.11 ve Eş. 4.8 kullanılırsa,

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \left(\frac{y-x}{c(a-b)}\right)^n F_n^{(-\alpha-n, -\beta-n)}\left(\frac{ax-by}{x-y}; a, b, c\right) \quad (4.9)$$

olarak $g_n^{(\alpha,\beta)}(x, y)$ Lagrange polinomları ile $F_n^{(\alpha,\beta)}(x; a, b, c)$ genişletilmiş Jacobi polinomları arasındaki ilişki elde edilir [21].

$F_n^{(\alpha,\beta)}(x; a, b, c)$ genişletilmiş Jacobi polinomları için toplam formülünü aşağıdaki teorem verir:

4.2.1. Teorem

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) F_k^{(\alpha+n_1-k, \beta+n_2-k)}(x; a, b, c) F_{p-k}^{(-\alpha-p+k, -\beta-p+k)}(x; a, b, c) \\ &= \delta_{p, n_1+n_2} c^p (x-a)^{n_2} (x-b)^{n_1} \mathcal{P}_m(\alpha + \beta + p) + \frac{(-1)^{p+m}}{m!} c^p \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \\ & \times \left[\delta_{n_1, m-1} (\alpha)_m (a-b)^{n_2} (x-b)^{p-n_2} + \delta_{n_2, m-1} (\beta)_m (b-a)^{n_1} (x-a)^{p-n_1} \right] \\ & (m, p, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0; n_1, n_2 \geq m-1; p \geq n_1 + n_2) \end{aligned}$$

dir [21].

İspat

Eş. 4.9 ifadesi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) F_k^{(\alpha+n_1-k, \beta+n_2-k)} \left(\frac{ax-by}{x-y}; a, b, c \right) F_{p-k}^{(-\alpha-p+k, -\beta-p+k)} \left(\frac{ax-by}{x-y}; a, b, c \right) \\
&= \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \left(\frac{c(a-b)}{y-x} \right)^p g_k^{(-\alpha-n_1, -\beta-n_2)}(x, y) g_{p-k}^{(\alpha, \beta)}(x, y) \\
&= \left(\frac{c(a-b)}{y-x} \right)^p \left\{ \delta_{p, n_1+n_2} (-x)^{n_1} (-y)^{n_2} \mathcal{P}_m(\alpha + \beta + p) + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \right. \\
&\quad \left. \times \left[\delta_{n_1, m-1}(\alpha)_m x^p \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{n_2} + \delta_{n_2, m-1}(\beta)_m y^p \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{n_1} \right] \right\} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.10 da $y \rightarrow \frac{x(x-a)}{x-b}$ yazılırsa Teorem 4.2.1 in ispatı tamamlanır. ■

Eş. 4.8 ifadesinde $a=1$, $b=-1$, $c=\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$F_n^{(\alpha, \beta)} \left(x, 1, -1, \frac{1}{2} \right) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$$

elde edilir.

Bu ifadeler Teorem 4.2.1 de yerine yazılırsa Eş. 3.7 elde edilir.

4.3. Laguerre Polinomları İçin Toplam Formülü

$0 \leq x < \infty$, $\alpha > -1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$$

denkleminin çözümlerinden biri

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha + 1)_n}{(n-k)! k! (\alpha + 1)_k} x^k ; \quad n = 0, 1, \dots$$

olarak tanımlanan $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarıdır [31]. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!} = \binom{\alpha+n}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x)$$

şeklinde yazılır.

Laguerre polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) z^n = (1-z)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right)$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir.

$L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları ve $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Jacobi polinomları arasında bir limit bağıntısı,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ P_n^{(\alpha, \beta)}\left(1 - \frac{2x}{\beta}\right) \right\}$$

şeklindedir [31].

Eş. 3.7 de $x \rightarrow 1 - \frac{2x}{\beta}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) P_k^{(\alpha+n_1-k, \beta+n_2-k)} \left(1 - \frac{2x}{\beta}\right) P_{p-k}^{(-\alpha-p+k, -\beta-p+k)} \left(1 - \frac{2x}{\beta}\right) \\
&= \left\{ \delta_{p, n_1+n_2} \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{n_1} \left(-\frac{x}{\beta}\right)^{n_2} \mathcal{P}_m(\alpha + \beta + p) + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \right. \\
&\quad \left. \times \left[\delta_{n_1, m-1} (\alpha)_m (-1)^p \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{p-n_2} + \delta_{n_2, m-1} (\beta)_m \left(\frac{x}{\beta}\right)^{p-n_1} \right] \right\} \\
&\quad (m, p, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0; n_1, n_2 \geq m-1; p \geq n_1 + n_2)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir.

Burada $|\beta| \rightarrow \infty$ için limit alınır ve $n_2 = m$ yazılırsa, Laguerre polinomları için aşağıdaki toplam formülü elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) L_k^{(\alpha+n_1-k)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-p+k)}(-x) = \delta_{p, n_1+m} \frac{\mathcal{P}_m^{(m)}(0)}{m!} (-x)^m + \delta_{n_1, m-1} (\alpha)_m \frac{(-1)^{m+p}}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0). \\
&\quad (m, p, n_1 \in \mathbb{N}_0; n_1 \geq m-1; p \geq n_1 + m)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Eş. 4.12 de $n_1 = m$ alınırsa Laguerre polinomları için

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) L_k^{(\alpha+m-k)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-p+k)}(-x) = \delta_{p, 2m} \frac{\mathcal{P}_m^{(m)}(0)}{m!} (-x)^m \\
&\quad (m, p \in \mathbb{N}_0; p \geq 2m)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklinde bir toplam formülü bulunur.

Diğer taraftan Eş. 4.11 de $n_2 = m + 1$ yazılır ve $|\beta| \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) L_k^{(\alpha+n_1-k)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-p+k)}(-x) = \delta_{n_1, m-1}(\alpha)_m \frac{(-1)^{m+p}}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \quad (4.14)$$

$$(m, p, n_1 \in \mathbb{N}_0; n_1 \geq m-1; p \geq n_1 + m + 1)$$

elde edilir [21].

Eş. 4.14 ifadesinde $m = 0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p L_k^{(\alpha+n_1-k)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-p+k)}(-x) = 0 \quad (p, n \in \mathbb{N}_0; p \geq n+1)$$

olup, burada $n_1 = 0$ veya Eş. 4.13 de $m = 0$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^p L_k^{(\alpha-k)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-p+k)}(-x) = 0 \quad (p \in \mathbb{N})$$

bağıntısı elde edilir.

Eş. 4.14 de $n_1 = m-1$ ve $\mathcal{P}_m(k) = k^m$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p k^m L_k^{(\alpha+m-k-1)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-p+k)}(-x) = (-1)^{m+p} (\alpha)_m$$

$$(p, m \in \mathbb{N}_0; p \geq 2m)$$

bulunur.

Ayrıca, Eş. 4.13 ifadesinde $P_m(k) = k^m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) özel durumu alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p k^m L_k^{(\alpha+m-k)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-p+k)}(-x) = \delta_{p, 2m}(-x)^m$$

$$(m, p \in \mathbb{N}_0; p \geq 2m)$$

şeklinde bir başka toplam formülü elde edilir.

4.3.1. Uyarı

Eş. 3.8 de, $\alpha \rightarrow -\alpha - \beta - p - j$, $n_1 \rightarrow m$, $n_2 \rightarrow p - m - 1$, $x \rightarrow 1 - \frac{2x}{\beta}$, $\mathcal{P}_m(k) = k^m$

($m \in \mathbb{N}_0$) yazılır ve sonra $|\beta| \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p k^m L_k^{(\alpha+j)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-p-j-1)}(-x) = \delta_{p,2m} (-x)^m$$

$$(m, p, j \in \mathbb{N}_0 ; p \geq 2m)$$

veya

$$\sum_{k=j}^l k^m L_{k-j}^{(\alpha+j)}(x) L_{l-k}^{(-\alpha-l-1)}(-x) = \delta_{l,2m+j} (-x)^m$$

$$(l, m, j \in \mathbb{N}_0 ; l \geq 2m + j)$$

sonuçları elde edilir [3].

Eş. 3.9 da $n \rightarrow n + 2$, $r = m + 1$, $x \rightarrow 1 - \frac{2x}{\beta}$ ve $|\beta| \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) L_k^{(\alpha)}(x) L_{p-k}^{(-\alpha-n-2)}(-x) = \delta_{p,n} (-1)^n \mathcal{P}_m(-\alpha-1) + \delta_{n,2m-1} \frac{\mathcal{P}_m^{(m)}(0)}{m!} (-x)^m \quad (4.15)$$

$$(m, p, n \in \mathbb{N}_0 ; p \geq n \geq 2m-1)$$

yazılabilir.

Eş. 4.15 den,

$$\sum_{k=j}^l \mathcal{P}_m(k) L_{k-j}^{(\alpha)}(x) L_{l-k}^{(-\alpha-n-2)}(-x) = \delta_{l,n+j} (-1)^n \mathcal{P}_m(j-\alpha-1) + \delta_{n,2m-1} \frac{\mathcal{P}_m^{(m)}(0)}{m!} (-x)^m$$

$$(j, l, m, n \in \mathbb{N}_0 ; l-j \geq n \geq 2m-1)$$

bulunur [5].

4.4. Hermite Polinomları İçin Toplam Formülü

$-\infty < x < \infty$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

denkleminin çözümlerinden biri

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}; \quad n = 0, 1, \dots$$

ile gösterilen n . dereceden $H_n(x)$ Hermite polinomlarıdır. Buradaki $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gösterimi,

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ çift ise} \\ \frac{n-1}{2} & ; n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Hermite polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - t^2)$$

biçiminde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

1939 da Palama, Laguerre ve Hermite polinomları arasındaki

$$H_n(x) = (-1)^n 2^{n/2} n! \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \alpha^{-n/2} L_n^{(\alpha)}(\alpha + x\sqrt{2\alpha}) \right\} \quad (4.16)$$

limit bağıntısını vermiştir [25].

Laguerre polinomları ile Hermite polinomları arasında bir başka bağıntı da,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \alpha^{-n/2} L_n^{(-\alpha)}(-\alpha - x\sqrt{2\alpha}) \right\} = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^n \frac{H_n(ix)}{n!} \quad (4.17)$$

şeklindedir [21].

Eş. 4.13 ifadesinde $x \rightarrow \alpha + x\sqrt{2\alpha}$ alınır ve Eş. 4.16, Eş. 4.17 ifadeleri kullanılırsa, Hermite polinomları için aşağıdaki toplam formülü elde edilir:

4.4.1. Teorem

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \binom{p}{k} (-i)^k H_k(x) H_{p-k}(ix) = \delta_{p,2m} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) 8^m \left(\frac{1}{2} \right)_m$$

$(m, p \in \mathbb{N}_0; p \geq 2m)$

dir [21].

Teorem 4.4.1 de $m = 0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-i)^k H_k(x) H_{p-k}(ix) = 0 \quad (p \in \mathbb{N})$$

toplam formülü elde edilir.

4.5. Çok Değişkenli Polinomların Bir Sınıfı İçin Toplam Formülü

Altın ve Erkuş tarafından,

$$\prod_{j=1}^r \left\{ (1 - x_j z^j)^{-\alpha_j} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) z^n \quad (4.18)$$

$$\left(\alpha_j \in \mathbb{C}, \quad (j = 1, \dots, r); \quad |z| < \min \left\{ |x_1|^{-1}, \dots, |x_r|^{-1/r} \right\} \right)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanan $h_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları olarak bilinir [1].

Erkuş ve Srivastava,

$$\prod_{j=1}^r \left\{ (1 - x_j z^{l_j})^{-\alpha_j} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n;l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) z^n \quad (4.19)$$

$$\left(\alpha_j \in \mathbb{C}, \quad l_j \in \mathbb{N}, \quad (j = 1, \dots, r); \quad |z| < \min \left\{ |x_1|^{-1/l_1}, \dots, |x_r|^{-1/l_r} \right\} \right)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla $\mathcal{U}_{n;l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomlarını tanımlamışlardır [13].

$\mathcal{U}_{n;l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomlarında, özel olarak $l_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, r$) alınırsa Eş. 2.12 ile tanımlanan $g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$ Chan-Chyan-Srivastava polinomları, $l_j = j$ ($j = 1, 2, \dots, r$) alınırsa Eş. 4.18 ile tanımlanan $h_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$ çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları elde edilir.

Eş. 4.19 dan $\mathcal{U}_{n;l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları çekilirse,

$$\mathcal{U}_{n;l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{l_1 k_1 + \dots + l_r k_r = n} (\alpha_1)_{k_1} \dots (\alpha_r)_{k_r} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_r^{k_r}}{k_r!} \quad (4.20)$$

şeklinde bulunur.

Eş. 2.12 ve Eş. 4.19 daki doğurucu fonksiyon bağıntıları kullanılarak $\mathcal{U}_{n;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)$ polinomları ve Chan-Chyan-Srivastava polinomları arasında aşağıdaki şekilde elde edilir [21]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r) z^n &= \prod_{j=1}^r \left\{ (1-x_j z^{l_j})^{-\alpha_j} \right\} = \prod_{j=1}^r \prod_{q=1}^{l_j} \left\{ (1-\omega_{jq} z)^{-\alpha_j} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\dots,\alpha_1,\dots,\alpha_r,\dots,\alpha_r)}(\omega_{11},\dots,\omega_{1l_1},\dots,\omega_{r1},\dots,\omega_{rl_r}) z^n. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Burada,

$$\left\{ \omega_{jq} : 1 \leq j \leq r \text{ ve } 1 \leq q \leq l_j \quad (l_j \in \mathbb{N}, j=1,2,\dots,r) \right\}$$

olup, x_j^{1/l_j} faktörünün değerleri l_j ye bağlıdır.

$$1 - \left(x_j^{1/l_j} z \right)^{l_j} \quad (j=1,2,\dots,r)$$

ifadesinden,

$$\left(1 - x_j z^{l_j} \right)^{-\alpha_j} = \prod_{q=1}^{l_j} \left\{ (1 - \omega_{jq} z)^{-\alpha_j} \right\} \quad (j=1,2,\dots,r)$$

yazılabilir.

Bu nedenle Eş. 4.21 de z^n nin katsayıları eşitlenirse,

$$\mathcal{U}_{n;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r) = g_n^{(\alpha_1,\dots,\alpha_1,\dots,\alpha_r,\dots,\alpha_r)}(\omega_{11},\dots,\omega_{1l_1},\dots,\omega_{r1},\dots,\omega_{rl_r}) \quad (4.22)$$

elde edilir [22].

Eş. 4.22 ifadeleri kullanılarak $\mathcal{U}_{n;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)$ polinomları için bir toplam formülü

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \mathcal{U}_{n;l_1,\dots,l_r}^{(-\alpha_1-n_1,\dots,-\alpha_r-n_r)}(x_1,\dots,x_r) \mathcal{U}_{p-k;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r) \\ &= \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) g_k^{(-\alpha_1-n_1,\dots,-\alpha_1-n_1,\dots,-\alpha_r-n_r,\dots,-\alpha_r-n_r)}(\omega_{11},\dots,\omega_{1l_1},\dots,\omega_{r1},\dots,\omega_{rl_r}) \\ & \quad \times g_{p-k}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_1,\dots,\alpha_r,\dots,\alpha_r)}(\omega_{11},\dots,\omega_{1l_1},\dots,\omega_{r1},\dots,\omega_{rl_r}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

şeklinde yazılabilir.

Eş. 4.23 ifadesi kullanılarak da $\mathcal{U}_{n;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r)$ polinomları için farklı bir toplam formülü aşağıdaki şekilde elde edilir:

4.5.1. Teorem

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \mathcal{U}_{k;l_1,\dots,l_r}^{(-\alpha_1-n_1,\dots,-\alpha_r-n_r)}(x_1,\dots,x_r) \mathcal{U}_{p-k;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r) = \delta_{p,l_1n_1+\dots+l_rn_r} \left(\prod_{j=1}^r \prod_{q=1}^{l_j} \{(-\omega_{jq})^{n_j}\} \right) \\ & \times \mathcal{P}_m(l_1\alpha_1 + \dots + l_r\alpha_r + p) + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \sum_{s=1}^r \left[\delta_{n_s,m-1}(\alpha_s)_m \sum_{j=1}^{l_s} \left(\omega_{sj}^p \prod_{\varepsilon=1}^r \prod_{\substack{q=1 \\ (\varepsilon,q) \neq (s,j)}}^{l_\varepsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{\varepsilon q}}{\omega_{sj}} \right)^{n_\varepsilon} \right\} \right) \right] \end{aligned}$$

$$(m, p, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0; n_j \geq m-1 \quad l_j \in \mathbb{N}, (j=1, \dots, r); \quad p \geq l_1n_1 + \dots + l_rn_r)$$

dir [21].

Teorem 4.5.1 de, $l_j = j$ ($j=1,2,\dots,r$) alınırsa çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları için aşağıdaki toplam formülü elde edilir:

4.5.1. Sonuç

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) h_k^{(-\alpha_1 - n_1, \dots, -\alpha_r - n_r)}(x_1, \dots, x_r) h_{p-k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) \\ = \delta_{p, n_1 + 2n_2 + \dots + rn_r} \left(\prod_{1 \leq q \leq j \leq r} \{(-\omega_{jq})^{n_j}\} \right) \mathcal{P}_m(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + r\alpha_r + p) \quad (4.24)$$

$$+ \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \sum_{1 \leq j \leq s \leq r} \left\{ \delta_{n_s, m-1}(\alpha_s)_m \omega_{sj}^p \left(\prod_{\substack{1 \leq q \leq \varepsilon \leq r \\ (\varepsilon, q) \neq (s, j)}} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{\varepsilon q}}{\omega_{sj}} \right)^{n_\varepsilon} \right\} \right) \right\}$$

$(m, p, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0; n_j \geq m-1, (j=1, \dots, r); p \geq n_1 + 2n_2 + \dots + rn_r)$

dir [21].

Eş. 4.24 de $r=2$ için $x_1 = x, x_2 = y, \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta, \omega_{11} = x, \omega_{21} = \sqrt{y}$ ve $\omega_{22} = -\sqrt{y}$ alınrsa, Lagrange-Hermite polinomları için,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) h_k^{(-\alpha - n_1, -\beta - n_2)}(x, y) h_{p-k}^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \delta_{p, n_1 + 2n_2} (-x)^{n_1} (-y)^{n_2} \mathcal{P}_m(\alpha + 2\beta + p) \\ + \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) \left\{ \delta_{n_1, m-1}(\alpha)_m x^p \left(1 - \frac{y}{x^2}\right)^{n_2} + \delta_{n_2, m-1}(\beta)_m 2^{m-1} (\sqrt{y})^p \right. \\ \left. \times \left[\left(1 - \frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n_1} + (-1)^p \left(1 + \frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n_1} \right] \right\} \quad (4.25)$$

$(m, p, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0; n_1, n_2 \geq m-1, p \geq n_1 + 2n_2)$

toplam formülü elde edilir [21].

Burada iki özel durum yazılabilir:

I. Eş. 4.25 ifadesinde $n_1 = n_2 = m$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) h_k^{(-\alpha-m, -\beta-m)}(x, y) h_{p-k}^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \delta_{p, 3m} (xy)^m \mathcal{P}_m(\alpha + 2\beta + p) \quad (4.26)$$

$$(m, p \in \mathbb{N}_0; \quad p \geq 3m)$$

elde edilir [21].

II. Eş. 4.26 ifadesinde $m = 0$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^p h_k^{(-\alpha, -\beta)}(x, y) h_{p-k}^{(\alpha, \beta)}(x, y) = 0 \quad (p \in \mathbb{N})$$

elde edilir [21].

5. ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLARIN BİR SINIFI İÇİN BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR VE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAURICELLA FONKSİYONLARI

Bu kısımda çok değişkenli polinomların bir sınıfı olan Erkuş-Srivastava polinomlarının, genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonlarıyla bilateral doğurucu fonksiyonları verilecektir.

İki değişkenli Appell fonksiyonları,

$$F_1[a, b, b'; c; x, y] = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m y^n}{m! n!}$$

$$F_2[a, b, b'; c, c'; x, y] = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n}{(c)_m (c')_n} \frac{x^m y^n}{m! n!}$$

$$F_3[a, a', b, b'; c; x, y] = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (a')_n (b)_m (b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m y^n}{m! n!}$$

$$F_4[a, b; c, c'; x, y] = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n}}{(c)_m (c')_n} \frac{x^m y^n}{m! n!}$$

şeklindedir [31].

Lauricella tarafından n değişkenli fonksiyonlar,

$$F_A^{(n)}[a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n] = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

$$|x_1| + \dots + |x_n| < 1;$$

$$F_B^{(n)}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n] = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \dots (a_n)_{m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} < 1;$$

$$F_C^{(n)} [a, b; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n] = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b)_{m_1+\dots+m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!}$$

$$\sqrt{|x_1|} + \dots + \sqrt{|x_n|} < 1;$$

$$F_D^{(n)} [a, b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n] = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n} m_1! \dots m_n!}$$

$$\max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} < 1;$$

şeklinde tanımlanmıştır [17]. Buradan, Appell ve Lauricella fonksiyonları arasında,

$$F_A^{(2)} = F_2, F_B^{(2)} = F_3, F_C^{(2)} = F_4, F_D^{(2)} = F_1 \quad (5.1)$$

ilişkileri vardır.

İki değişkenli Kampé de Fériet hipergeometrik fonksiyonları Srivastava ve Daoust tarafından aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir. Bunlara *genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonları* da denir [14, 30, 32, 34]:

$$F_{C:D^{(1)}, \dots, D^{(n)}}^{A:B^{(1)}, \dots, B^{(n)}} \left(\begin{array}{l} [(a):\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}]: [(b^{(1)}):\phi^{(1)}]; [(b^{(2)}):\phi^{(2)}]; \dots; [(b^{(n)}):\phi^{(n)}]; \\ [(c):\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)}]: [(d^{(1)}):\delta^{(1)}]; [(d^{(2)}):\delta^{(2)}]; \dots; [(d^{(s)}):\delta^{(s)}]; \end{array} \right)_{z_1, \dots, z_n} \quad (5.2)$$

$$= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \Omega(m_1, \dots, m_n) \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{z_n^{m_n}}{m_n!}.$$

Burada,

$$\Omega(m_1, m_2, \dots, m_n) := \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m_1\theta_j^{(1)}+\dots+m_n\theta_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^C (c_j)_{m_1\psi_j^{(1)}+\dots+m_n\psi_j^{(n)}}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{B^{(1)}} (b_j^{(1)})_{m_1\phi_j^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(1)}} (d_j^{(1)})_{m_1\delta_j^{(1)}}} \dots \frac{\prod_{j=1}^{B^{(n)}} (b_j^{(n)})_{m_n\phi_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(n)}} (d_j^{(n)})_{m_n\delta_j^{(n)}}} \quad (5.3)$$

şeklindedir.

Ayrıca,

$$\theta_j^{(k)} \quad (j=1, \dots, A; k=1, 2, \dots, n), \quad \phi_j^{(k)} \quad (j=1, \dots, B^{(k)}; k=1, 2, \dots, n)$$

$$\psi_j^{(k)} \quad (j=1, \dots, C; k=1, 2, \dots, n), \quad \delta_j^{(k)} \quad (j=1, \dots, D^{(k)}; k=1, 2, \dots, n)$$

reel sabitler olup; $(b_{B^{(k)}}^{(k)})$, $B^{(k)}$ dizilerinin $b_j^{(k)} \quad j=1, \dots, B^{(k)}; k=1, 2, \dots, n$ şeklinde kısaltılmışıdır.

Uygun bir reel ya da kompleks parametrelili, sıfıra özdeş olmayan katlı $\{\Omega(m_1; m_2, \dots, m_s)\}_{m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}_0}$ dizisi için, s (s reel veya kompleks) değişkenli bir $\Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s) := & \sum_{m_1=0}^n \sum_{m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{(-n)_{m_1} ((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \\ & \times \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) \frac{u_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \end{aligned} \quad (5.4)$$

şeklinde tanımlanır [22]. Burada,

$$((b))_{m_1 \phi} = \prod_{j=1}^B (b_j)_{m_1 \phi_j} \quad \text{ve} \quad ((d))_{m_1 \delta} = \prod_{j=1}^D (d_j)_{m_1 \delta_j} \quad (5.5)$$

şeklinindedir.

5.1. Teorem

Eş. 4.19 ile tanımlanan $\mathcal{U}_{n; l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$ çok değişkenli polinomları ile Eş. 5.4 de tanımı verilen $\Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s)$ fonksiyonları arasında,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r) \Upsilon_n(u_1;u_2,\dots,u_s) z^n &= \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \left\{ (1-w_{ij}z)^{-\alpha_i} \right\} \right)_{(n_1),\dots,(n_r),m_2,\dots,m_s=0} \sum \frac{((b))_{\mathfrak{R}\phi}}{((d))_{\mathfrak{R}\delta}} \\
&\times \Omega(f(\mathfrak{R},m_2,\dots,m_s);m_2,\dots,m_s) \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \left\{ \frac{(\alpha_i)_{n_{ij}}}{n_{ij}!} \left(\frac{w_{ij}u_1z}{w_{ij}z-1} \right)^{n_{ij}} \right\} \right) \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \cdots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

şeklinde bilateral bir doğurucu fonksiyon bağıntısı vardır [22].

Burada,

$$(n_i) := n_{i1}, \dots, n_{il_i} \quad (i=1, \dots, r) \quad \text{ve} \quad \mathfrak{R} := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{l_i} n_{ij} \quad \text{dir.}$$

İspat

Eş. 4.22 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n;l_1,\dots,l_r}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}(x_1,\dots,x_r) \Upsilon_n(u_1;u_2,\dots,u_s) z^n \\
&= \sum_{m_1,\dots,m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1\phi}}{((d))_{m_1\delta}} \Omega(f(\mathfrak{R},m_2,\dots,m_s);m_2,\dots,m_s) (-u_1z)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \cdots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m_1}{n} \mathcal{G}_{n+m_1}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_1,\dots,\alpha_r,\dots,\alpha_r)}(\omega_{11},\dots,\omega_{1l_1},\dots,\omega_{r1},\dots,\omega_{rl_r}) z^n
\end{aligned} \tag{5.7}$$

olduğu kolayca görülür. Eş. 2.15 ifadesi Eş. 5.7 nin sağ tarafında kullanılırsa, ispat tamamlanmış olur. ■

5.1. Sonuç

Teorem 5.1 de $l_1 = l_2 = \dots = l_r = 1$ alınırsa Chan-Chyan-Srivastava polinomları ve $\Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s)$ fonksiyonu için bilateral doğurucu fonksiyonların bir ailesi aşağıdaki şekilde elde edilir [20]:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) \Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s) z^n \\ &= \prod_{i=1}^r \left\{ (1 - x_i z)^{-\alpha_i} \right\} \sum_{(n_1, \dots, n_r), m_2, \dots, m_s=0} \frac{((b))_{(n_1 + \dots + n_r)\phi} (\alpha_1)_{n_1} \dots (\alpha_r)_{n_r}}{((d))_{(n_1 + \dots + n_r)\delta}} \\ & \quad \times \Omega\left(f(n_1 + \dots + n_r, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s\right) \frac{\left(\frac{x_1 u_1 z}{x_1 z - 1}\right)^{n_1}}{n_1!} \dots \frac{\left(\frac{x_r u_r z}{x_r z - 1}\right)^{n_r}}{n_r!} \cdot \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!}. \end{aligned}$$

Burada, $\Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s)$ fonksiyonu, Eş. 5.4 deki gibidir.

Teorem 5.1 de $\left\{ \Omega(m_1; m_2, \dots, m_s) \right\}_{m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}_0}$ dizisinin uygun seçimleriyle birçok ilginç sonuçlar elde edilebilir.

5.2. Sonuç

Teorem 5.1 de,

$$\Omega\left(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s\right) = \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m_1 \theta_j^{(1)} + \dots + m_s \theta_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^E (c_j)_{m_1 \psi_j^{(1)} + \dots + m_s \psi_j^{(s)}}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{B^{(2)}} (b_j^{(2)})_{m_2 \theta_j^{(2)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(2)}} (d_j^{(2)})_{m_2 \delta_j^{(2)}}} \dots \frac{\prod_{j=1}^{B^{(s)}} (b_j^{(s)})_{m_s \theta_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(s)}} (d_j^{(s)})_{m_s \delta_j^{(s)}}}$$

alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir [22]:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n:l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) F_{E:D^{(2)}, \dots, D^{(s)}}^{A:B+1; B^{(2)}, \dots, B^{(s)}} \\
& \left(\begin{array}{l} [(a) : \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s)}] : [-n : 1], [(b) : \phi]; [(b^{(2)}) : \phi^{(2)}]; \dots; [(b^{(s)}) : \phi^{(s)}]; \\ [(c) : \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(s)}] : [(d) : \delta]; [(d^{(2)}) : \delta^{(2)}]; \dots; [(d^{(s)}) : \delta^{(s)}]; \end{array} \right)_{u_1, \dots, u_s} z^n \\
& = \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \left\{ (1 - w_{ij} z)^{-\alpha_i} \right\} \right) F_{E+D:0;0, \dots, 0; D^{(2)}, \dots, D^{(s)}}^{A+B;1;1, \dots, 1; B^{(2)}, \dots, B^{(s)}} \\
& \left(\begin{array}{l} [(e) : \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(l_1+\dots+l_r+s-1)}] : [\alpha_1 : 1]; \dots; [\alpha_1 : 1]; \dots; [\alpha_r : 1]; \dots; [\alpha_r : 1]; [(b^{(2)}) : \phi^{(2)}]; \dots; [(b^{(s)}) : \phi^{(s)}]; \\ [(f) : \Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(l_1+\dots+l_r+s-1)}] : - ; \dots ; - ; \dots ; - ; \dots ; - ; [(d^{(2)}) : \delta^{(2)}]; \dots; [(d^{(s)}) : \delta^{(s)}]; \\ \frac{w_{11} u_1 z}{w_{11} z - 1}, \dots, \frac{w_{1l_1} u_1 z}{w_{1l_1} z - 1}, \dots, \frac{w_{r1} u_1 z}{w_{r1} z - 1}, \dots, \frac{w_{rl_r} u_1 z}{w_{rl_r} z - 1}, u_2, \dots, u_s \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Burada, $e_j, f_j, \phi_j^{(k)}$ ve $\Theta_j^{(k)}$ katsayıları,

$$e_j = \begin{cases} a_j, & (1 \leq j \leq A) \\ b_{j-A}, & (A < j \leq A+B) \end{cases}$$

$$f_j = \begin{cases} c_j, & (1 \leq j \leq E) \\ d_{j-E}, & (E < j \leq E+D) \end{cases}$$

$$\phi_j^{(k)} = \begin{cases} \theta_j^{(1)}, & (1 \leq j \leq A; 1 \leq k \leq l_1 + \dots + l_r) \\ \theta_j^{(k-l_1-\dots-l_r+1)}, & (1 \leq j \leq A; l_1 + \dots + l_r < k \leq l_1 + \dots + l_r + s - 1) \\ \phi_{j-A}, & (A < j \leq A+B; 1 \leq k \leq l_1 + \dots + l_r) \\ 0, & (A < j \leq A+B; l_1 + \dots + l_r < k \leq l_1 + \dots + l_r + s - 1) \end{cases}$$

$$\Theta_j^{(k)} = \begin{cases} \psi_j^{(1)}, & (1 \leq j \leq E; 1 \leq k \leq l_1 + \dots + l_r) \\ \psi_j^{(k-l_1-\dots-l_r+1)}, & (1 \leq j \leq E; l_1 + \dots + l_r < k \leq l_1 + \dots + l_r + s - 1) \\ \delta_{j-E}, & (E < j \leq E+D; 1 \leq k \leq l_1 + \dots + l_r) \\ 0, & (E < j \leq E+D; l_1 + \dots + l_r < k \leq l_1 + \dots + l_r + s - 1) \end{cases}$$

şeklindedir.

5.3. Sonuç

Teorem 5.1 de,

$$\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = \frac{(a)_{m_1+\dots+m_s} (b_2)_{m_2} \dots (b_s)_{m_s}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_s)_{m_s}}$$

$$\text{ve } \phi = \delta = 0 \quad (\phi_1 = \dots = \phi_B = \delta_1 = \dots = \delta_D = 0)$$

alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir [22]:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n;l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) F_A^{(s)}[a, -n, b_2, \dots, b_s; c_1, \dots, c_s; u_1, \dots, u_s] z^n \\ &= \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \left\{ (1 - w_{ij} z)^{-\alpha_i} \right\} \right) F_{1:0; \dots; 0; 1; \dots; 1}^{1:1; \dots; 1; 1; \dots; 1} \\ & \left(\begin{array}{l} [a : 1, \dots, 1] : \quad [\alpha_1 : 1]; \dots; [\alpha_1 : 1]; \dots; [\alpha_r : 1]; \dots; [\alpha_r : 1]; [b_2 : 1]; \dots; [b_s : 1]; \\ [c_1 : \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(l_1+\dots+l_r+s-1)}] : \quad - ; \dots ; \quad - ; \dots ; \quad - ; \dots ; \quad - ; \dots ; \quad - ; [c_2 : 1]; \dots; [c_s : 1]; \\ \frac{w_{11} u_1 z}{w_{11} z - 1}, \dots, \frac{w_{1l_1} u_1 z}{w_{1l_1} z - 1}, \dots, \frac{w_{r1} u_1 z}{w_{r1} z - 1}, \dots, \frac{w_{rl_r} u_1 z}{w_{rl_r} z - 1}, u_2, \dots, u_s \end{array} \right). \end{aligned}$$

Burada $\psi^{(k)}$ katsayısı,

$$\psi^{(k)} = \begin{cases} 1, & (1 \leq k \leq l_1 + \dots + l_r) \\ 0, & (l_1 + \dots + l_r < k \leq l_1 + \dots + l_r + s - 1) \end{cases}$$

şeklindedir.

5.4. Sonuç

Teorem 5.1 de, $B=1$, $b_1=b$, $\phi_1=1$ ve $\delta=0$ için

$$\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = \frac{(a_1^{(1)})_{m_2} \dots (a_1^{(s-1)})_{m_s} (a_2^{(1)})_{m_2} \dots (a_2^{(s-1)})_{m_s}}{(c)_{m_1 + \dots + m_s}}$$

alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir [22]:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n;l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) F_B^{(s)} \left[-n, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(s-1)}, b; a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(s-1)}; c; u_1, \dots, u_s \right] z^n \\ &= \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \left\{ (1 - w_{ij} z)^{-\alpha_i} \right\} \right) F_{1:0, \dots, 0; 0; \dots; 0}^{1:1; \dots; 1; 2; \dots; 2} \\ & \left(\begin{array}{l} [b : \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(l_1 + \dots + l_r + s - 1)}] : [\alpha_1 : 1]; \dots; [\alpha_1 : 1]; \dots; [\alpha_r : 1]; \dots; [\alpha_r : 1]; [(a^{(1)}) : 1]; \dots; [(a^{s-1}) : 1]; \\ [c : 1, \dots, 1] : \quad - \quad ; \quad \dots \quad ; \quad - \quad ; \quad \dots \quad ; \quad - \quad ; \quad \dots \quad ; \quad - \quad ; \quad - \quad ; \quad \dots \quad ; \quad - \quad ; \\ \frac{w_{l_1} u_1 z}{w_{11} z - 1}, \dots, \frac{w_{1l_1} u_1 z}{w_{1l_1} z - 1}, \dots, \frac{w_{r1} u_1 z}{w_{r1} z - 1}, \dots, \frac{w_{rl_r} u_1 z}{w_{rl_r} z - 1}, u_2, \dots, u_s \end{array} \right). \end{aligned}$$

Burada $\theta^{(k)}$ katsayısı,

$$\theta^{(k)} = \begin{cases} 1, & (1 \leq k \leq l_1 + \dots + l_r) \\ 0, & (l_1 + \dots + l_r < k \leq l_1 + \dots + l_r + s - 1) \end{cases}$$

şeklindedir.

5.5. Sonuç

Teorem 5.1 de,

$$\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = \frac{(a)_{m_1 + \dots + m_s} (b_2)_{m_2} \dots (b_s)_{m_s}}{(c)_{m_1 + \dots + m_s}}$$

ve

$\phi = \delta = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir [22]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n; l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) F_D^{(s)}[a, -n, b_2, \dots, b_s; c; u_1, \dots, u_s] z^n = \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \left\{ (1 - w_{ij} z)^{-\alpha_i} \right\} \right) \times F_D^{(l_1 + \dots + l_r + s - 1)} \left[a, \alpha_1, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_r, b_2, \dots, b_s; c; \frac{w_{11} u_1 z}{w_{11} z - 1}, \dots, \frac{w_{l_1} u_1 z}{w_{l_1} z - 1}, \dots, \frac{w_{r1} u_1 z}{w_{r1} z - 1}, \dots, \frac{w_{r l_r} u_1 z}{w_{r l_r} z - 1}, u_2, \dots, u_s \right].$$

Diğer taraftan, başka bir sonuç elde edebilmek için,

$$\psi(u_1; u_2, \dots, u_s, n) := ((a))_n \left(\prod_{i=1}^r \left\{ (1 - \alpha_i)_n \right\}^{-l_i} \right) \times \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s, n) \frac{u_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlansın [19]. Burada,

$$((a))_n = \prod_{j=1}^A (a_j)_n, \quad ((b))_{m_1 \phi} = \prod_{j=1}^B (b_j)_{m_1 \phi_j} \quad \text{ve} \quad ((d))_{m_1 \delta} = \prod_{j=1}^D (d_j)_{m_1 \delta_j} \quad \text{şeklinde dir.}$$

Ayrıca,

$$\sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{n_r} \dots \sum_{n_1=0}^{n_2} A(n_1, n_2, \dots, n_r) = \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{n_{r-1}=0}^{\infty} \dots \sum_{n_1=0}^{\infty} A(n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_r) \quad (5.9)$$

bağıntısı aşağıda kullanılmıştır [19].

5.2. Teorem

Eş. 4.20 ile Eş. 5.8 de verilen polinomlar arasında,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n:l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) \psi(u_1; u_2, \dots, u_s, n) z^n &= \sum_{(n_1), \dots, (n_r)=0}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} \frac{((a))_{\mathfrak{R}} ((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \\ &\times \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s, \mathfrak{R}) \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \{(1 - \alpha_i)_{\mathfrak{R} - n_{ij}}\} \right)^{-1} \\ &\times \frac{(-w_{11}z)^{n_{11}}}{n_{11}!} \dots \frac{(-w_{1l_1}z)^{n_{1l_1}}}{n_{1l_1}!} \dots \frac{(-w_{r1}z)^{n_{r1}}}{n_{r1}!} \dots \frac{(-w_{rl_r}z)^{n_{rl_r}}}{n_{rl_r}!} \frac{u_1^{m_1}}{m_1!} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \end{aligned}$$

şeklinde bilateral bir doğurucu fonksiyon bağıntısı vardır. Burada,

$$(n_i) := n_{i1}, \dots, n_{il_i} \quad (i = 1, \dots, r) \quad \text{ve} \quad \mathfrak{R} := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{l_i} n_{ij}$$

dir [22].

İspat

Eş. 2.12, Eş. 5.8 ve Eş. 5.9 ifadeleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n;l_1, \dots, l_r}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) \psi(u_1; u_2, \dots, u_s, n) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(\alpha_1-n, \dots, \alpha_1-n, \dots, \alpha_r-n, \dots, \alpha_r-n)}(w_{11}, \dots, w_{1l_1}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{rl_r}) \psi(u_1; u_2, \dots, u_s, n) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_{r(l_r-1)}=0}^n \dots \sum_{n_{r1}}^{n_{r2}} \sum_{n_{(r-1)l_{r-1}}}^{n_{r1}} \dots \sum_{n_{l(l_r-1)}=0}^{n_{l1}} \dots \sum_{n_{l2}}^{n_{l3}} \sum_{n_{l1}}^{n_{l2}} \frac{((a))_n w_{11}^{n_{l1}} w_{12}^{n_{l2}-n_{l1}} \dots w_{1l_1}^{n_{l1}-n_{(l_r-1)}} \dots w_{r1}^{n_{r1}-n_{(r-1)l_{r-1}}} \dots w_{rl_r}^{n-n_{r(l_r-1)}}}{n_{l1}!(n_{l2}-n_{l1})! \dots (n_{l1}-n_{l(l_r-1)})! \dots (n_{r1}-n_{(r-1)l_{r-1}})! \dots (n-n_{r(l_r-1)})!} \\
&\times \left(\prod_{i=1}^r \{(1-\alpha_i)\}_n^{-l_i} \right) (\alpha_1-n)_{n_{l1}} (\alpha_1-n)_{n_{l2}-n_{l1}} \dots (\alpha_1-n)_{n_{l1}-n_{l(l_r-1)}} \dots (\alpha_1-n)_{n_{r1}-n_{(r-1)l_{r-1}}} (\alpha_1-n)_{n_{r2}-n_{r1}} \dots (\alpha_1-n)_{n-n_{r(l_r-1)}} \\
&\times \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s, n) \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_s^{m_s}}{m_1! m_2! \dots m_s!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_{r(l_r-1)}=0}^n \dots \sum_{n_{r1}}^{n_{r2}} \sum_{n_{(r-1)l_{r-1}}}^{n_{r1}} \dots \sum_{n_{l(l_r-1)}=0}^{n_{l1}} \dots \sum_{n_{l2}}^{n_{l3}} \sum_{n_{l1}}^{n_{l2}} \frac{((a))_n w_{11}^{n_{l1}} w_{12}^{n_{l2}-n_{l1}} \dots w_{1l_1}^{n_{l1}-n_{(l_r-1)}} \dots w_{r1}^{n_{r1}-n_{(r-1)l_{r-1}}} \dots w_{rl_r}^{n-n_{r(l_r-1)}}}{n_{l1}!(n_{l2}-n_{l1})! \dots (n_{l1}-n_{l(l_r-1)})! \dots (n_{r1}-n_{(r-1)l_{r-1}})! \dots (n-n_{r(l_r-1)})!} \\
&\times \frac{(-1)^n}{(1-\alpha_1)_{n-n_{l1}} (1-\alpha_1)_{n-n_{l2}+n_{l1}} \dots (1-\alpha_1)_{n-n_{l1}+n_{l(l_r-1)}} \dots (1-\alpha_r)_{n-n_{r1}+n_{(r-1)l_{r-1}}} (1-\alpha_r)_{n-n_{r2}+n_{r1}} \dots (1-\alpha_r)_{n-n_{r(l_r-1)}}} \frac{1}{(1-\alpha_r)_{n-n_{r1}+n_{(r-1)l_{r-1}}} (1-\alpha_r)_{n-n_{r2}+n_{r1}} \dots (1-\alpha_r)_{n-n_{r(l_r-1)}}} \\
&\times \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s, n) \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_s^{m_s}}{m_1! m_2! \dots m_s!} z^n \\
&= \sum_{(n_1), \dots, (n_r)=0}^{\infty} \frac{((a))_{\mathfrak{R}} w_{11}^{n_{11}} w_{12}^{n_{12}} \dots w_{1l_1}^{n_{11}} \dots w_{r1}^{n_{r1}} w_{r2}^{n_{r2}} \dots w_{rl_r}^{n_{rl_r}}}{n_{11}!(n_{12})! \dots (n_{1l_1})! \dots (n_{r1})! \dots (n_{rl_r})!} \\
&\times \frac{(-1)^{\mathfrak{R}}}{(1-\alpha_1)_{\mathfrak{R}-n_{11}} (1-\alpha_1)_{\mathfrak{R}-n_{12}} \dots (1-\alpha_1)_{\mathfrak{R}-n_{1l_1}}} \dots \frac{1}{(1-\alpha_r)_{\mathfrak{R}-n_{r1}} (1-\alpha_r)_{\mathfrak{R}-n_{r2}} \dots (1-\alpha_r)_{\mathfrak{R}-n_{rl_r}}} \\
&\times \sum_{m_1, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s, \mathfrak{R}) \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_s^{m_s}}{m_1! m_2! \dots m_s!} z^{\mathfrak{R}}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{(n_1), \dots, (n_r)=0}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} \frac{((a))_{\mathfrak{R}} ((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s, \mathfrak{R})$$

$$\left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \left\{ (1 - \alpha_i)_{\mathfrak{R} - n_{ij}} \right\} \right)^{-1} \frac{(-w_{11}z)^{n_{11}}}{n_{11}!} \dots \frac{(-w_{1l_1}z)^{n_{1l_1}}}{n_{1l_1}!} \frac{(-w_{r1}z)^{n_{r1}}}{n_{r1}!} \dots \frac{(-w_{rl_r}z)^{n_{rl_r}}}{n_{rl_r}!} \frac{u_1^{m_1}}{m_1!} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!}$$

elde edilir. ■

5.6. Sonuç

Teorem 5.2 de $\phi = \delta = 0$, $l_1 = l_2 = \dots = l_r = 1$,

$$\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = \frac{((a+n))_{m_1 + \dots + m_s}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_s)_{m_s}},$$

$$((a+n))_k = \prod_{j=1}^A (a_j + n)_k \quad \text{ve} \quad A = 2$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n}{(1 - \alpha_1)_n \dots (1 - \alpha_r)_n} \mathfrak{g}_n^{(\alpha_1 - n, \dots, \alpha_r - n)}(x_1, \dots, x_r) F_c^{(s)}[a_1 + n, a_2 + n; c_1, \dots, c_s; u_1, \dots, u_s] z^n$$

$$= F_{r; 0, \dots, 0; 1, \dots, 1}^{2; 0, \dots, 0; 0, \dots, 0} \left(\begin{array}{c} [(a) : 1, \dots, 1] \\ [(\beta) : \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}, 0, \dots, 0] \end{array} ; \begin{array}{c} :- ; \dots ; - ; - ; \dots ; - ; \\ :- ; \dots ; - ; [c_1 : 1] ; \dots ; [c_s : 1] ; \end{array} ; \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} -x_1 z, \dots, -x_r z, u_1, \dots, u_s \end{array} \right)$$

şeklinde Chan-Chyan-Srivastava polinomları ve genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonları arasında bilateral bir doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Burada

$\beta_j = 1 - \alpha_j$ ve $\psi_j^{(k)} = 1 - \delta_{j,k}$ ($j, k = 1, 2, \dots, r$) dir [19,22].

Bu kısımda verilen teoremlerin ve sonuçların tümü çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları ve Chan-Chyan-Srivastava polinomları için de yazılabilir. Diğer taraftan, genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonunun özel hali olan F_1, F_2, F_3, F_4 Appell fonksiyonları alınarak, Appell fonksiyonları ile Erkuş-Srivastava polinomları, Chan-Chyan-Srivastava polinomları ya da çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları arasında bilateral doğurucu fonksiyonlar verilebilir.

5.7. Sonuç

Eğer Teorem 5.1 de $\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = s = \phi = \delta = 1$, $B = p$, $D = q$, $u_1 = t$, $b = a$, $d = b$ ve $r = 2$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n;l_1, l_2}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x_1, x_2) {}_{p+1}F_q \left[\begin{matrix} -n, a_1, \dots, a_p; \\ b_1, \dots, b_q; \end{matrix} t \right] z^n = \left(\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{l_i} \left\{ (1 - w_{ij} z)^{-\alpha_i} \right\} \right) F_{q; 0, \dots, 0; 0, \dots, 0}^{p; 1; \dots, 1; 1, \dots, 1} \left(\begin{matrix} [(a_p) : 1, \dots, 1] : [\alpha_1 : 1]; \dots; [\alpha_1 : 1]; [\alpha_2 : 1]; \dots; [\alpha_2 : 1]; \\ [(b_q) : 1, \dots, 1] : - ; \dots ; - ; - ; \dots ; - ; \\ \frac{w_{11} z t}{w_{11} z - 1}, \dots, \frac{w_{l_1} z t}{w_{l_1} z - 1}, \frac{w_{21} z t}{w_{21} z - 1}, \dots, \frac{w_{2l_2} z t}{w_{2l_2} z - 1} \end{matrix} \right) \quad (5.10)$$

elde edilir [22].

Ayrıca Eş. 5.10 ifadesinde $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $x_1 = x$ ve $x_2 = y$ alınırsa Lagrange-Hermite polinomları ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların bir sınıfı için bilateral bir doğurucu fonksiyon,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) {}_{p+1}F_q \left[\begin{matrix} -n, a_1, \dots, a_p; \\ b_1, \dots, b_q; \end{matrix} t \right] z^n = (1 - xz)^{-\alpha} (1 - yz)^{-\beta} \times F_{q; 0; 0; 0}^{p; 1; 1; 1} \left(\begin{matrix} [(a_p) : 1, \dots, 1] : [\alpha : 1]; [\beta : 1]; [\beta : 1]; \\ [(b_q) : 1, \dots, 1] : - ; - ; - ; \\ \frac{xzt}{xz - 1}, \frac{\sqrt{yzt}}{\sqrt{yz - 1}}, \frac{\sqrt{yzt}}{\sqrt{yz - 1}} \end{matrix} \right)$$

olarak elde edilir.

Öte yandan Eş. 5.10 ifadesinde $l_1 = l_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $x_1 = x$ ve $x_2 = y$ alınırsa Lagrange polinomları ve hipergeometrik fonksiyonların bir sınıfı için bilateral bir doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) {}_{p+1}F_q \left[\begin{matrix} -n, a_1, \dots, a_p; t \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right] z^n$$

$$= (1-xz)^{-\alpha} (1-yz)^{-\beta} F_{q:0;0}^{p:1;1} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \alpha; \beta; \frac{xzt}{xz-1}, \frac{yzt}{yz-1} \\ b_1, \dots, b_q; -; -; \end{matrix} \right)$$

şeklinde elde edilir [31].

6. ÇOK DEĞİŞKENLİ $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ POLİNOMLARI

6.1. Çok Değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ Polinomları

Çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) z^n = (1 - x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} \quad (|z| < |x_1|^{-1}) \quad (6.1)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanmaktadır [6]. Eş. 6.1 den çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları,

$$\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} (\alpha)_{n_1} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \dots \frac{x_r^{n_r}}{n_r!} \quad (6.2)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca bu polinomlar ile Chan-Chyan-Srivastava polinomları arasında,

$$\Phi_n^{(\alpha_1)}(x_1, \dots, x_r) = \lim_{\min\{|\alpha_2|, \dots, |\alpha_r|\} \rightarrow \infty} \left\{ g_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} \left(x_1, \frac{x_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{x_r}{\alpha_r} \right) \right\} \quad (6.3)$$

şeklinde bir limit bağıntısı yazılabilir.

6.2. Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomlarının bir ailesi için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonların çeşitli aileleri elde edilecektir.

6.2.1. Lemma

Çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomu aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} \Phi_{n+m}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) z^n = (1-x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)z} \Phi_m^{(\alpha)}\left(\frac{x_1}{1-x_1 z}, x_2, \dots, x_r\right).$$

$$\left(|z| < |x_1|^{-1}\right)$$

İspat

Eş. 6.1 ifadesinde z yerine $z+u$ yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) (z+u)^n = (1-x_1(z+u))^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)(z+u)}$$

$$= (1-x_1 z)^{-\alpha} \left(1 - \frac{x_1}{1-x_1 z} u\right)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)z} e^{(x_2+\dots+x_r)u}$$

olur.

Eğer, yukarıdaki eşitliğin sol tarafına Eş. 2.14 ifadesi uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} \Phi_{n+m}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) z^n u^m = (1-x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)z} \left(1 - \frac{x_1}{1-x_1 z} u\right)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)u}$$

$$= (1-x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)z} \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(\alpha)}\left(\frac{x_1}{1-x_1 z}, x_2, \dots, x_r\right) u^m$$

elde edilir. Son eşitlikte u^m nin katsayıları eşitlenirse istenilen sonuca ulaşılır. ■

6.2.1. Teorem

μ -yüncü basamaktan ve s değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,q}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s; z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_{m+qk}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_s) z^k \quad (a_k \neq 0, m \in \mathbb{N})$$

ve

$$R_{n,m,q}^{p,\mu}(y_1, \dots, y_s; z) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/q \rfloor} \binom{m+n}{n-qk} a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_s) z^k$$

($a_k \neq 0, n, m, p \in \mathbb{N}$)

(6.4)

olsun.

Bu durumda her $m > 0$ tamsayısı için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{m+n}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) R_{n,m,q}^{p,\mu}(y_1, \dots, y_s; z) t^n$$

$$= (1 - x_1 t)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)t} \Lambda_{\mu,q} \left(\frac{x_1}{1 - x_1 t}, x_2, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s; z t^q \right)$$
(6.5)

bağıntısı sağlanır.

İspat

Eş. 6.5 deki ifadenin sol tarafı T olsun. $R_{n,m,q}^{p,\mu}(y_1, \dots, y_s; z)$ polinomunun değeri Eş. 6.4 den alınıp Eş. 6.5 de yerine konulursa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/q \rfloor} \binom{m+n}{n-qk} a_k \Phi_{m+n}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_s) z^k t^n$$

olup burada Eş. 2.25 ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+qk}{n} \Phi_{m+n+qk}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) t^n a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_s) z^k t^{qk} \\
&= (1-x_1 t)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)t} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_{m+qk}^{(\alpha)}\left(\frac{x_1}{1-x_1 t}, x_2, \dots, x_r\right) \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_s) z^k t^{qk} \\
&= (1-x_1 t)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)t} \Lambda_{\mu, q}\left(\frac{x_1}{1-x_1 t}, x_2, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s; z t^q\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

6.2.2. Teorem

μ -yüncü basamaktan ve s değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu verilsin.

$$\Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) z^k$$

$$(a_k \neq 0; \psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\Theta_{n, p}^{\mu, \psi}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s; \zeta) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \Phi_{n-pk}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \zeta^k$$

$$(a_k \neq 0, n, p \in \mathbb{N})$$

olsun.

Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n, p}^{\mu, \psi}\left(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n = (1-x_1 t)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)t} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta) \quad (6.6)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat

Bu teoremin ispatı da Teorem 6.2.1 in ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 6.2.2 de $s=r$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) = \Phi_n^{(\alpha)}(y_1, \dots, y_r)$ alınırsa, Eş. 6.1 ile tanımlanan çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları için aşağıdaki sonuç elde edilir:

6.2.1. Sonuç

$$\Lambda_{\mu, \psi} [y_1, \dots, y_r; z] := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(y_1, \dots, y_r) z^k$$

$$(a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu, \psi} (x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \Phi_{n-pk}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \Phi_{\mu+\psi k}^{(\alpha)}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k$$

$$(n \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N})$$

olsun.

Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu, \psi} \left(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = (1-x_1 t)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)t} \Lambda_{\mu, \psi} (y_1, \dots, y_r; \eta) \quad (6.6)$$

ifadesi elde edilir.

6.2.1. Uyarı

Çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları için Eş. 6.1 ifadesi kullanılarak, Eş. 6.6 da $a_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), $\mu = 0$ ve $\psi = 1$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \Phi_{n-pk}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \Phi_k^{(\alpha)}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk} = \frac{e^{(x_2 + \dots + x_r)t + (y_2 + \dots + y_r)\eta}}{[(1-x_1 t)(1-y_1 t)]^\alpha}$$

$$\left(|t| < |x_1|^{-1} \text{ ve } |\eta| < |y_1|^{-1} \right)$$

şeklinde, $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları için bilineer bir doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Eğer, Teorem 6.2.2 de $s = r$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) = h_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r)$ alınırsa, Eş. 6.1 ile tanımlanan $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları ve çok değişkenli Lagrange- Hermite polinomları arasında bilateral bir doğurucu fonksiyon bağıntısı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

6.2.2. Sonuç

$$\Lambda_{\mu, \psi}[y_1, \dots, y_r; z] := \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) z^k$$

$$(a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu, \psi}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \Phi_{n-pk}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) h_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k$$

$$(n \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N})$$

olsun.

Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi} \left(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = (1-x_1 t)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)t} \Lambda_{\mu,\psi} (y_1, \dots, y_r; \eta) \quad (6.7)$$

elde edilir.

6.2.2. Uyarı

Çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomlarının bir doğurucu fonksiyonunu veren Eş. 4.18 ifadesi kullanılarak, Eş. 6.7 de $a_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), $\mu = 0$ ve $\psi = 1$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \Phi_{n-pk}^{(\alpha)} (x_1, \dots, x_r) h_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} (y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk} = (1-x_1 t)^{-\alpha} e^{(x_2+\dots+x_r)t} \prod_{j=1}^r \left\{ (1-y_j \eta^j)^{-\alpha_j} \right\}$$

$$\left(|t| < |x_1|^{-1} \text{ ve } |\eta| < \min_{j \in \{1,2,\dots,r\}} \left\{ |y_j|^{-1/j} \right\} \right)$$

elde edilir.

Teorem 6.2.1 ve Teorem 6.2.2 de $\Omega_{\mu+\psi k} (y_1, \dots, y_r)$ çok değişkenli fonksiyonu, basit fonksiyonların uygun çarpımı olarak ifade edilirse, a_k ($k \in \mathbb{N}_0$) katsayılarının her bir uygun seçimi için Eş. 6.1 ile tanımlanan $\Phi_n^{(\alpha)} (x_1, \dots, x_r)$ polinomu için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon aileleri elde edilebilir.

6.3. $\Phi_n^{(\alpha)} (x_1, \dots, x_r)$ Polinomlarının Bazı Özellikleri

Bu kısımda Eş. 6.1 ile tanımlanan çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)} (x_1, \dots, x_r)$ polinomları için bazı özellikler verilecektir.

6.3.1. Teorem

Çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)} (x_1, \dots, x_r)$ polinomları aşağıdaki integral gösterimine sahiptir:

$$\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{n! \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{\alpha-1} (x_1 \zeta + x_2 + \dots + x_r)^n d\zeta.$$

İspat

Gamma fonksiyonunun tanımından,

$$a^{-v} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^\infty e^{-at} t^{v-1} dt, \quad \text{Re}(v) > 0$$

olup bu bağıntı, Eş. 6.1 in sağ tarafına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) z^n &= (1 - x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(1-x_1 z)\zeta} \zeta^{\alpha-1} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{\alpha-1} e^{(x_1 \zeta + x_2 + \dots + x_r)z} d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x_1 \zeta + x_2 + \dots + x_r)^n z^n}{n!} d\zeta \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte z^n nin katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç bulunur. ■

Şimdi, $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları için bazı rekürans bağıntıları verilecektir. Eş. 6.1 de verilen doğurucu fonksiyon bağıntısının her iki tarafının x_1 e göre türevi alınıp,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n-k) \quad (6.8)$$

bağıntısı kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları için türev içeren rekürans bağıntısı

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1} \Phi_k^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r), \quad n \geq 1$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan, Eş. 6.1 de verilen doğurucu fonksiyon bağıntısının x_j ($j \neq 1$) e göre türevi alınıp düzenlemeler yapılırsa, başka bir türev içeren rekürans bağıntısı

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = \Phi_{n-1}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r), \quad n \geq 1 \quad (6.9)$$

olarak elde edilir.

Eş. 6.1 ifadesinin her iki tarafının z ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) z^{n-1} &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} x_1^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) z^{n+k} \\ &+ \left[(x_2 + \dots + x_r) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) z^n \right] \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıda Eş. 6.8 ifadesi kullanılarak, gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra z^n katsayıları eşitlenirse,

$$(n+1) \Phi_{n+1}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = \alpha \sum_{k=0}^n x_1^{k+1} \Phi_{n-k}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) + \left[(x_2 + \dots + x_r) \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \right] \quad (6.10)$$

şeklinde türev içermeyen bir rekürans bağıntısı elde edilir.

Eş. 6.10 da $n=0$ alınırsa, $\Phi_0^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = 1$ olduğuda dikkate alınarak,

$$\Phi_1^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = \alpha x_1 + x_2 + \dots + x_r$$

bulunur.

Diğer taraftan Eş. 6.2 kullanılarak,

$$\sum_{j=1}^r x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = n \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \quad (6.11)$$

yazılabilir. Eş. 6.9 ve Eş. 6.11 ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\sum_{j=1}^r x_j \Phi_{n-1}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) = n \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \quad (6.12)$$

elde edilir.

Aşağıda, $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomlarının herhangi ikisinin çarpımının sağladığı bir kısmî türevli denklem elde edeceğiz. Lee tarafından, tek değişkenli iki polinomun çarpımının sağladığı bir kısmî türevli denklem 2005 yılındaki çalışmasında verilmişti [18]. Erkuş-Duman ve arkadaşları bu yöntemi çok değişkenli polinomlar için şöyle genişletmişlerdir [12]:

L ve N lineer türev operatörleri olmak üzere,

$$L = \sum_{i=1}^r a_i(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ve} \quad N = \sum_{j=1}^s b_j(y_j) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

şeklinde tanımlansın.

6.3.2. Teorem

$\{P_n(x_1, \dots, x_r)\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\theta_n(y_1, \dots, y_s)\}_{n=0}^{\infty}$ polinomları için

$$L[P_n] = \lambda_n P_n = n P_n$$

ve

$$N[\theta_n] = \eta_n \theta_n = n\theta_n$$

olsun. Bu durumda S_n çarpım polinomu,

$$\{S_n\}_{n=0}^{\infty} = \{P_{n-k}(x_1, \dots, x_r) \theta_k(y_1, \dots, y_r)\}_{k=0, n=0}^{n, \infty}$$

olmak üzere,

$$L[\omega] + N[\omega] = n\omega$$

şeklindeki bir kısmi türevli denklemi sağlar.

Şimdi, $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları için Teorem 6.3.2 nin bir uygulamasını verelim.

6.3.1. Sonuç

$\{P_n(x_1, \dots, x_r)\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\theta_n(y_1, \dots, y_s)\}_{n=0}^{\infty}$ polinomlarının yerine $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomu alınırsa bu durumda S_n polinomu,

$$\{S_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\Phi_{n-k}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \Phi_k(y_1, \dots, y_r)\}_{k=0, n=0}^{n, \infty}$$

olur. Eş. 6.12 ifadesinden,

$$L = \sum_{i=1}^r x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ ve } N = \sum_{j=1}^s y_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

yazılabilir. Böylece, Teorem 6.3.2 den, $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomlarının herhangi ikisinin çarpımı olan S_n polinomu,

$$\sum_{i=1}^r x_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^s y_j \frac{\partial \omega}{\partial y_j} = n\omega$$

kısmi türevli denklemini sağlar.

$\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomlarının son bir özelliği olarak, 3. Bölümde verilen Teorem 3.1 de Eş. 6.3 ifadesi kullanılarak aşağıdaki sonuç kolaylıkla yazılabilir:

6.3.2. Sonuç

m . dereceden herhangi bir $\mathcal{P}_m(x)$ polinomu için,

$$\sum_{k=0}^p \mathcal{P}_m(k) \Phi_k^{(-\alpha-n)}(x_1, -x_2, \dots, -x_r) \Phi_{p-k}^{(\alpha)}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

$$= \begin{cases} \delta_{p, m+n} \frac{(-1)^p}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) x_1^n x_2^m + \delta_{n, m-1} \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) (\alpha)_m x_1^p & (r = 2) \\ \delta_{n, m-1} \frac{(-1)^m}{m!} \mathcal{P}_m^{(m)}(0) (\alpha)_m x_1^p & (r \geq 3) \end{cases}$$

$$(m, p, n \in \mathbb{N}_0; \quad n \geq m-1; \quad p \geq m+n; \quad r \in \mathbb{N} / \{1\})$$

dir.

6.4. $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ Polinomlarının Bir Sınıfı İçin Bilateral Doğurucu

Fonksiyonlar

Bu kısımda, çok değişkenli $\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları ve genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir ailesi elde edilecektir.

6.4.1. Teorem

$\Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r)$ polinomları ile Eş. 5.4 de tanımlanan $\Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s)$ fonksiyonları arasında

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s) z^n = (1 - x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} \\
& \times \sum_{(n_1), \dots, (n_r), m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{(n_1 + \dots + n_r)\phi} (\alpha)_{n_1}}{((d))_{(n_1 + \dots + n_r)\delta}} \Omega(f(n_1 + \dots + n_r, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) \\
& \times \frac{(-u_1 x_1 z / (1 - x_1 z))^{n_1}}{n_1!} \frac{(-u_1 x_2 z)^{n_2}}{n_2!} \dots \frac{(-u_1 x_r z)^{n_r}}{n_r!} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!}
\end{aligned}$$

şeklinde bilateral bir doğurucu fonksiyon bağıntısı vardır.

İspat

Eş. 5.4 ifadesi ve Lemma 6.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \Upsilon_n(u_1; u_2, \dots, u_s) z^n \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{(-n)_{m_1} ((b))_{m_1\phi}}{((d))_{m_1\delta}} \\
& \quad \times \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) \frac{u_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} z^n \\
& = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1\phi}}{((d))_{m_1\delta}} \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) (-u_1 z)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \\
& \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n + m_1}{n} \Phi_{n+m_1}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) z^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) \\
&\quad \times (-u_1 z)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} (1-x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} \Phi_{m_1}^{(\alpha)} \left(\frac{x_1}{1-x_1 z}, x_2, \dots, x_r \right) \\
&= (1-x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) \\
&\quad \times (-u_1 z)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=m_1} (\alpha)_{n_1} \frac{(x_1/1-x_1 z)^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!} \dots \frac{x_r^{n_r}}{n_r!} \\
&= (1-x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} \sum_{(n_1), (n_2), \dots, (n_r), m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{(n_1+n_2+\dots+n_r)\phi}}{((d))_{(n_1+n_2+\dots+n_r)\delta}} \\
&\quad \times \Omega(f(n_1+n_2+\dots+n_r, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) \\
&\quad \times (-u_1 z)^{(n_1+n_2+\dots+n_r)} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} (\alpha)_{n_1} \frac{(x_1/1-x_1 z)^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!} \dots \frac{x_r^{n_r}}{n_r!} \\
&= (1-x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} \sum_{(n_1), (n_2), \dots, (n_r), m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{(n_1+n_2+\dots+n_r)\phi}}{((d))_{(n_1+n_2+\dots+n_r)\delta}} (\alpha)_{n_1} \\
&\quad \times \Omega(f(n_1+n_2+\dots+n_r, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) \\
&\quad \times \frac{(-u_1 x_1 z / 1-x_1 z)^{n_1}}{n_1!} \frac{(-u_1 x_2 z)^{n_2}}{n_2!} \dots \frac{(-u_1 x_r z)^{n_r}}{n_r!} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!}
\end{aligned}$$

şeklinde istenilen sonuç bulunur. ■

Teorem 6.4.1 de $\{\Omega(m_1; m_2, \dots, m_s)\}_{m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}_0}$ dizisinin uygun seçimleriyle birçok ilginç sonuçlar elde edilebilir. Aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağlantıları bunlara birer örnektir.

6.4.1. Sonuç

Teorem 6.4.1 de,

$$\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m_1 \theta_j^{(1)} + \dots + m_s \theta_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^E (c_j)_{m_1 \psi_j^{(1)} + \dots + m_s \psi_j^{(s)}}} \frac{\prod_{j=1}^{B^{(2)}} (b_j^{(2)})_{m_2 \theta_j^{(2)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(2)}} (d_j^{(2)})_{m_2 \delta_j^{(2)}}} \dots \frac{\prod_{j=1}^{B^{(s)}} (b_j^{(s)})_{m_s \theta_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(s)}} (d_j^{(s)})_{m_s \delta_j^{(s)}}}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) \\ & \times F_{E; D; D^{(2)}; \dots; D^{(s)}}^{A; B+1; B^{(2)}; \dots; B^{(s)}} \left(\begin{array}{l} [(a) : \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s)}] : [-n : 1] [(b) : \phi]; [(b^{(2)}) : \phi^{(2)}]; \dots; [(b^{(s)}) : \phi^{(s)}]; \\ [(c) : \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(s)}] : [(d) : \delta]; [(d^{(2)}) : \delta^{(2)}]; \dots; [(d^{(s)}) : \delta^{(s)}]; \end{array} \right)_{u_1, \dots, u_s} z^n \\ & = (1 - x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z} \\ & \times F_{E+D; 0; 0; \dots; 0; D^{(2)}; \dots; D^{(s)}}^{A+B; 1; 0; \dots; 0; B^{(2)}; \dots; B^{(s)}} \left(\begin{array}{l} [(e) : \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(r+s-1)}] : [\alpha : 1]; -; \dots; -; [(b^{(2)}) : \phi^{(2)}]; \dots; [(b^{(s)}) : \phi^{(s)}]; \\ [(f) : \Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(r+s-1)}] : -; -; \dots; -; [(d^{(2)}) : \delta^{(2)}]; \dots; [(d^{(s)}) : \delta^{(s)}]; \end{array} \right)_{\frac{x_1 u_1 z}{x_1 z - 1}, -x_2 u_1 z, \dots, -x_r u_1 z, u_2, \dots, u_s} \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada, $e_j, f_j, \phi_j^{(k)}$ ve $\Theta_j^{(k)}$ katsayıları,

$$e_j = \begin{cases} a_j, & (1 \leq j \leq A) \\ b_{j-A}, & (A < j \leq A+B) \end{cases}$$

$$f_j = \begin{cases} c_j, & (1 \leq j \leq E) \\ d_{j-E}, & (E < j \leq E+D) \end{cases}$$

$$\phi_j^{(k)} = \begin{cases} \theta_j^{(1)}, & (1 \leq j \leq A; 1 \leq k \leq r) \\ \theta_j^{(k-r+1)}, & (1 \leq j \leq A; r < k \leq r+s-1) \\ \phi_{j-A}, & (A < j \leq A+B; 1 \leq k \leq r) \\ 0, & (A < j \leq A+B; r < k \leq r+s-1) \end{cases}$$

$$\Theta_j^{(k)} = \begin{cases} \psi_j^{(1)}, & (1 \leq j \leq E; 1 \leq k \leq r) \\ \psi_j^{(k-r+1)}, & (1 \leq j \leq E; r < k \leq r+s-1) \\ \delta_{j-E}, & (E < j \leq E+D; 1 \leq k \leq r) \\ 0, & (E < j \leq E+D; r < k \leq r+s-1) \end{cases}$$

şeklindedir.

6.4.2. Sonuç

Teorem 6.4.1 de,

$$\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = \frac{(a)_{m_1+\dots+m_s} (b_2)_{m_2} \dots (b_s)_{m_s}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_s)_{m_s}}$$

ve $\phi = \delta = 0$ ($\phi_1 = \dots = \phi_B = \delta_1 = \dots = \delta_D = 0$)

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) F_A^{(s)}[a, -n, b_2, \dots, b_s; c_1, \dots, c_s; u_1, \dots, u_s] z^n = (1 - x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z}$$

$$\times F_{1;0;0;\dots;0;1;\dots;1}^{-1;1;0;\dots;0;1;\dots;1} \left(\begin{array}{l} [a:1, \dots, 1]: [\alpha:1]; -; \dots; -; [b_2:1]; \dots; [b_s:1]; \\ [c_1:\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r+s-1)}]: -; -; \dots; -; [c_2:1]; \dots; [c_s:1]; \\ \frac{x_1 u_1 z}{x_1 z - 1}, -x_2 u_1 z, \dots, -x_r u_1 z, u_2, \dots, u_s \end{array} \right)$$

elde edilir.

Burada $\psi^{(k)}$ katsayısı,

$$\psi^{(k)} = \begin{cases} 1, & (1 \leq k \leq r) \\ 0, & (r < k \leq r + s - 1) \end{cases}$$

şeklindedir.

6.4.3. Sonuç

Teorem 6.4.1 de $B=1$, $b_1=b$, $\phi_1=1$, $\delta=0$ ve

$$\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = \frac{\binom{a_1^{(1)}}{m_2} \dots \binom{a_1^{(s-1)}}{m_s} \binom{a_2^{(1)}}{m_2} \dots \binom{a_2^{(s-1)}}{m_s}}{\binom{c}{m_1 + \dots + m_s}}$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) F_B^{(s)} \left[-n, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(s-1)}, b, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(s-1)}; c; u_1, \dots, u_s \right] z^n = (1 - x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z}$$

$$\times F_{1:0;0;\dots;0;2;\dots;2}^{1:1;0;\dots;0;2;\dots;2} \left(\begin{array}{l} [b : \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(r+s-1)}] : [\alpha : 1]; -; \dots; -; [(a^{(1)}) : 1]; \dots; [(a^{(s-1)}) : 1]; \\ [c : 1, \dots, 1] : -; -; \dots; -; -; \dots; -; \\ \frac{x_1 u_1 z}{x_1 z - 1}, -x_2 u_1 z, \dots, -x_r u_1 z, u_2, \dots, u_s \end{array} \right)$$

elde edilir.

Burada, $\theta^{(k)}$ katsayısı,

$$\theta^{(k)} = \begin{cases} 1, & (1 \leq k \leq r) \\ 0, & (r < k \leq r + s - 1) \end{cases}$$

şeklindedir.

6.4.4. Sonuç

Teorem 6.4.1 de,

$$\Omega(f(m_1, m_2, \dots, m_s); m_2, \dots, m_s) = \frac{(a)_{m_1 + \dots + m_s} (b_2)_{m_2} \dots (b_s)_{m_s}}{(c)_{m_1 + \dots + m_s}}$$

ve

$$\phi = \delta = 0$$

alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_r) F_D^{(s)}[a, -n, b_2, \dots, b_s; c; u_1, \dots, u_s] z^n = (1 - x_1 z)^{-\alpha} e^{(x_2 + \dots + x_r)z}$$

$$\times F_{1:0; \dots; 0; 1; \dots; 1}^{1:1; 0; \dots; 0; 0; \dots; 0} \left(\begin{array}{l} [a : \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(r+s-1)}] : [\alpha : 1]; -; \dots; -; [b_2 : 1]; \dots; [b_s : 1]; \\ [c : \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r+s-1)}] : -; -; \dots; -; -; \dots; -; \\ \frac{x_1 u_1 z}{x_1 z - 1}, -x_2 u_1 z, \dots, -x_r u_1 z, u_2, \dots, u_s \end{array} \right)$$

elde edilir [22]. Burada, $\theta^{(1)} = \dots = \theta^{(r+s-1)} = \psi^{(1)} = \dots = \psi^{(r+s-1)} = 1$ dir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, öncelikle bilinen bazı çok değişkenli polinomların toplam formülleri, bilateral doğurucu fonksiyonları gibi özellikleri verilmiştir. Çok değişkenli yeni bir polinom tanımlanmış ve bu polinomlar için bir integral gösterimi, türev içeren ve türev içermeyen rekürans bağıntıları elde edilmiştir. Bu polinomların herhangi ikisinin çarpımının sağladığı bir kısmi diferensiyel denklem verilmiştir. Ayrıca bu polinomlar için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları veren teoremler ispatlanmış olup, bu teoremlere uygun örnekler verilmiştir.

Son olarak da farklı bir yöntemle, tanımladığımız bu polinomlar ve genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonlarını kapsayan yeni bir polinom ailesi arasında bilateral doğurucu fonksiyonlar veren bir teorem ispatlanmış ve bu teoremlerin sonuçları verilmiştir.

Bu tezde yapılan çalışmalar ve verilen yöntemler kullanılarak, ileride farklı polinomlar için de buradakilere benzer yeni özellikler veren sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Altın, A. and Erkuş, E., “On a multivariable extension of the Lagrange–Hermite polynomials”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 17: 239–244 (2006).
2. Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R., “Special Functions”, *Cambridge University Press* (1999).
3. Bavinck, H., “A new result for Laguerre polynomials”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29: L277–L279 (1996).
4. Chan, W.-C.C., Chyan, C.-J. and Srivastava, H.M., “The Lagrange polynomials in several variables”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 12: 139–148 (2001).
5. Chen, K.-Y., “A new summation identity for the Srivastava–Singhal polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.*, 298: 411–417 (2004).
6. Chen, K.-Y., Liu, S.-J. and Srivastava, H.M., “Some new results for the Lagrange polynomials in several variables”, *ANZIAM J.*, 49: 243–258 (2007).
7. Chen, K.-Y. and Srivastava, H.M., “A limit relation ship between Laguerre and Hermite polynomials”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 16: 75–80 (2005).
8. Chen, K.-Y. and Srivastava, H.M., “A new result for hypergeometric polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133: 3295–3302 (2005).
9. Dattoil, G., Ricci, P.E. and Cesarano, C., “The Lagrange polynomials, the associated generalizations and the umbral calculus”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 14: 181–186 (2003).
10. Dunkl, C.F. and Xu, Y., “Orthogonal Polynomials of Several Variables” *Cambridge Univ. Press*, New York (2001).
11. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G., “Higher Transcendental Functions”, Vol. III, *McGraw-Hill*, New York (1955).
12. Erkuş-Duman, E., Altın, A. and Aktaş, R., “Miscellaneous properties of some multivariable polynomials”, *Math. Comput. Modelling*, 54: 1875-1885 (2001).
13. Erkuş, E. and Srivastava, H.M., “A unified presentation of some families of multivariable polynomials”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 17: 267–273 (2006).
14. Exton, H., “Multiple Hypergeometric Functions and Applications”, *Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester)*, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto (1976).

15. Fujiwara, I., “A unified presentation of classical orthogonal polynomials”, *Math. Japon.*, 11: 133–148 (1966).
16. Khan, M.A. and Shukla, A.K., “On Lagrange’s polynomials of three variables”, *Proyecciones*, 17: 227–235 (1998).
17. Lauricella, G., “Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 7: 111–158 (1893).
18. Lee, D.W., “Partial differential equations for products of two classical orthogonal polynomials”, *Bull. Korean Math. Soc.*, 42: 179–188 (2005).
19. Liu, S.-J., “Bilateral generating functions for the Lagrange polynomials and the Lauricella functions”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 20: 519–527 (2009).
20. Liu, S.-J., Chan, C.-J., Lu, H.-C. and Srivastava, H.M., “Bilateral generating functions for the Chan-Chyan-Srivastava polynomials and the generalized Lauricella functions”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 23: 539–549 (2012).
21. Liu, S.J., Lin, S.D., Chen, K.Y. and Srivastava, H.M., “Summation identities involving certain classes of polynomials”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 1–14 (2012).
22. Liu, S.-J., Lin, S.-D., Srivastava, H.M. and Wong, M.-M., “Bilateral generating functions for the Erkuş-Srivastava polynomials and the generalized Lauricella function”, *Appl. Math. Comput.*, 218: 7685–7693 (2012).
23. Nekrassov, P.A. , “Generalized differentiation”, *Mat. Sb.*, 14: 45–168 (1888).
24. Özmen, N. and Erkuş-Duman, E., “Some results for a family of multivariable polynomials”, *AIP Conf. Proc.*, 1558: 1124–1127 (2013).
25. Palamà, G., “Sulla soluzione polinomiale della $(a_0 + a_1x)y'' + (b_0 + b_1x)y' - nb_1y = 0$ ”, *Boll. Un. Mat. Ital. 1*, 27–35 (1939).
26. Pittaluga, G., Sacripante, L. and Srivastava, H.M., “Some families of generating functions for the Jacobi and related orthogonal polynomials”, *J.Math. Anal. Appl.* 385–417 (1999).
27. Rainville, E.D., “Special Functions”, *The Macmillan Company*, New York, (1960).
28. Riordan, J., “Combinatorial Identities”, *John Wiley and Sons*, New York, London and Sydney, (1968).

29. Srivastava, H.M., “Some families of generating functions associated with the Stirling numbers of the second kind”, *J. Math. Anal. Appl.*, 251: 752-769 (2000).
30. Srivastava, H.M. and Daoust, M.C., “Certain generalized Neumann expansions associated with the Kampé de Fériet function”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 31: 449–457 (1969).
31. Srivastava, H.M. and Karlsson, P.W., “Multiple Gaussian Hypergeometric Series”, *Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons*, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, (1985).
32. Srivastava, H.M. and Manocha, H.L., “A Treatise on Generating Functions”, *Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons*, New York (1984).
33. Szegő, G., “Orthogonal Polynomials”, 4th ed., *American Mathematical Society Colloquium Publications*, Vol. 23 (1975).
34. Qureshi, M.I., Khan, M.S. and Pathan, M.A., “Some multiple Gaussian hypergeometric generalizations of Buschman–Srivastava theorem”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 2005: 143–153 (2005).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖZMEN Nejla
 Uyuşu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 02.02.1982/Ankara
 Medeni hali : Bekâr
 Telefon : 0 (544) 249 39 41
 e-mail : nejlaozmen@duzce.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Zonguldak Karaelmas Üniv. /Mat. Böl.	2007
Lisans	Zonguldak Karaelmas Üniv. /Mat. Böl.	2004
Lise	Ankara Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-...	Düzce Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

- Özmen N. and Erkuş-Duman E., “Some results for a family of multivariable polynomials”, AIP Conf. Proc., 1558: 1124-1127 (2013).
- Özmen N. and Erkuş-Duman E., “New generating function relations for a family of multivariable polynomials”, inceleme aşamasında (2014).

Hobiler

Tenis, Voleybol, Seyahat etmek.