T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ İNTEGRO DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Gamze KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2019
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Gamze KAYA tarafından hazırlanan "KISMİ TÜREVLİ İNTEGRO DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE" adlı tez çalışması 08.02.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Ali GELİŞKEN	
Üye Doç. Dr. Derya ALTINTAN	
Üye (Danışman) Doç. Dr. Ozan ÖZKAN	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Gamze KAYA

Tarih: 08.02.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ TÜREVLİ İNTEGRO DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Gamze KAYA

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
2019, 37+ix Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Ali GELİŞKEN
Doç. Dr. Ozan ÖZKAN (Danışman)
Doç. Dr. Derya ALTINTAN

Bu tez çalışmasında; birçok sosyal branşta ve fizik, mühendislik gibi farklı bilim dallarında ortaya çıkan kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümü, iki katlı Laplace dönüşümü olarak adlandırılan bir hesaplama yöntemi ile verilmektedir. Her şeyden önce, kısmi türevli integro-diferensiyel denklemini çözmek için bir algoritma sunuldu ve daha sonra birçok integro-kısmi diferansiyel denklemi çözmek için bu yeni algoritma kullanıldı.

Anahtar Kelimeler: İntegral Dönüşümü, Laplace Dönüşümü, İki Katlı Laplace Dönüşümü, Kısmi Türevli İntegro-Diferensiyel Denklem, Başlangıç Sınır Değer Problemi.

ABSTRACT

MS THESIS

ON SOLUTIONS OF
PARTIAL INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gamze KAYA

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATİCS

Advisor: Assoc. Dr. Ozan ÖZKAN

2019, 37+ix Pages

Jury

Assoc. Dr. Ali GELİŞKEN
Assoc. Dr. Ozan ÖZKAN (Advisor)
Assoc. Dr. Derya ALTINTAN

In this thesis; the solution of partial integro differential equations which arise in different fields of science such as physics, engineering and many social branches are given by a computational method which is named double Laplace transform method. First of all, we expressed an algorithm to solve partial-integro differential equations and applied this new algorithm to many integro-partial differential equations.

Keywords: İntegral Transform, Laplace Transform, Partial Integro-Differential Equation, Double Laplace Transform, Initial Boundary Value Problem.

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ozan ÖZKAN danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans Tezi içerik olarak beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde; Laplace dönüşümü tarihçesi ve literatür özetlerinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde; tezin diğer bölümlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel tanımlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde; tez çalışmasında ele alınacak olan problemin çözümünde kullanılacak olan yöntem literatürdeki mevcut hali ile sunulmuştur. Dördüncü bölümde; üçüncü bölümde sunulan yöntemin kısmi türevli integro diferensiyel denklemlere nasıl uygulanabileceğini gösteren çözüm prosedürleri sunulmuş, bu prosedürlerin çeşitli problemlere uygulanışına yer verilmiştir. Son olarak ta; sonuç ve öneriler bölümü yer almaktadır.

Tez çalışması seçimi ve yürütülmesi sürecinde yardımlarından ve yönlendirmelerinden dolayı değerli hocam sayın Doç. Dr. Ozan ÖZKAN'a ve her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Gamze KAYA
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$B(x,y)$	: Beta Fonksiyonu
ł	: Birim Operatör
$\Gamma(n)$	: Gamma Fonksiyonu
$\pounds\{f(t)\} \equiv \pounds_1\{f(t)\} = \bar{f}(p)$	: $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\pounds_1^{-1}\left\{\bar{f}(p)\right\}$	: $\bar{f}(p)$ nin ters Laplace dönüşümü
$\pounds^{-1}\{F(s)\} \equiv \pounds_1^{-1}\{F(s)\}$	: $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü
$\pounds_2\{f(x,y)\} = \bar{\bar{f}}(p,q)$	: $f(x,y)$ fonksiyonunun iki katlı Laplace dönüşümü
$\pounds_2^{-1}\left\{\bar{\bar{f}}(p,q)\right\}$	: $\bar{\bar{f}}(p,q)$ nin iki katlı ters Laplace dönüşümü

Kısaltmalar

KTDD	: Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem
KTIDD	: Kısmi Türevli İntegro-Diferensiyel Denklem

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi çevremizde olup biten birçok fen, mühendislik, tıp vb. alanlarındaki olayların matematiksel modellemesi için; diferensiyel denklemleri, kısmi türevli diferensiyel denklemleri, integral denklemleri ve integro-diferensiyel denklemleri kullanmak mümkündür. Bu yüzden uzunca süredir bu tür denklemlerin teorisi ve pratiği bilim insanlarının ilgisini çekmektedir. Çünkü bu alandaki en küçük bir ilerleme veya katkı insanoğlunun geleceğini şekillendirmektedir.

Laplace, Fourier, Mellin, Hankel, Hilbert dönüşümleri; integral dönüşümleri olarak adlandırılan en bilindik dönüşümlerdir. Bu integral dönüşümleri yukarıda bahsedilen denklemlerin teorisini geliştirmekte yardımcı olmakla kalmayıp, aynı zamanda bu denklemleri çözme yöntemlerini de sunmuştur (Sneddon, 1974) . İntegral dönüşümü denildiğinde akla ilk gelen ve bilim insanları tarafından en çok kabul gören dönüşüm Laplace (Laplace, 1814) dönüşümüdür. Matematik literatüründe bulunan en eski ve en yaygın kullanılan integral dönüşümlerinden biri olan Laplace dönüşümünün bazı temel sonuçları ilk olarak Laplace'ın ***The´orie Analytique des Probabilities*** *(Olasılık Analitik Teorisi)* (1820) adlı klasik incelemesinde bulmak mümkündür. Her ne kadar Laplace dönüşümü ilk olarak olasılık teorisi ve astronomi mekaniği için kurgulanmış olsa da; o günden bu güne kadar Laplace dönüşümü ve özelliklerinin uygulanmadığı bilim alanı neredeyse yoktur (Spiegel, 1965) . Bunu; (Spiegel, 1965)’ in *Laplace Dönüşümleri* adlı eserinde ayrıntılı bir şekilde görmek mümkündür.

Adi türevli diferensiyel denklemlerde bir katlı Laplace dönüşümü yardımıyla; direkt olarak diferensiyel denklemin verilen başlangıç koşullarını sağlayan çözümün bulunmasına giden mükemmel süreç; maalesef denklem kısmi türevli diferensiyel denklem olduğunda bu kadar başarılı olamamıştır (Spiegel, 1965) . Her ne kadar bir katlı Laplace dönüşümü ile bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin adi diferensiyel denklemlere dönüştürülerek çözümlerine ulaşılsa da (Spiegel, 1965); çözüm sürecinin uzunluğu ve prosedürün bilgisayar programlarında kolay kodlanamamasından dolayı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümü adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi yaygın kullanılmamıştır. İşte tam olarak bu nedenle Laplace dönüşümünü çok değişkenli fonksiyonlara genişletmek önemlidir. İki katlı Laplace dönüşümü ve dönüşümün özellikleri ilk olarak Van Der Pol ve Niessen (1931) tarafından bilim dünyasına tanıtılmıştır. Humbert (1934) ise hipergeometrik çalışmasında İki katlı Laplace dönüşümünü kullanmıştır.

Debnath (2016) ; *"İki katlı Laplace dönüşümü ve özellikleri ile fonksiyonel, integral ve kısmi diferensiyel denklemlere uygulamaları"* adlı çalışması ayrıntılı bir biçimde; iki katlı Laplace dönüşümünü ve örneklerini sunarken, dönüşüm için varlık, teklik teoremlerini hatta Konvolüsyon teoremini de sunmayı ihmal etmemiştir. Bu yeni teorinin kazanımlarını gösterebilmek adına da; metodu fonksiyonel denklemlere, kısmi türevli diferensiyel denklemlere ve integral denklemlere uygulamıştır. Debnath (2016) bu çalışmasını yapar iken; literatürde derli toplu bir şekilde iki katlı Laplace dönüşümü ile ilgili yeterince kaynak olmamasının kendisini motive ettiğini belirtmiştir. Basheer (2015) doktora tezinde; Ditkin ve Prudnikov (1962)' un çalışmasını baz alarak önce iki katlı Laplace dönüşümünü bilinen bazı elemanter fonksiyonlara uygulamış, Debnath (2016) tarafından verilmiş olsa da iki katlı Laplace dönüşümün bazı özellikleri bu çalışmada daha ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Aynı zamanda bu çalışmasında kısmi türevli diferensiyel denklemler ailesi içerisinde ayrı bir öneme sahip bazı önemli problemlerin iki katlı Laplace dönüşümü ile çözümüne de yer vermiştir.

Literatüre bakıldığında kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerle; fizik, mühendislik ve birçok sosyal bilimlerdeki olayların matematiksel modellemesinde karşılaşılmaktadır. Viskoelastisite teorisinde kullanılan kısmi türevli integro-diferensiyel denklemler (Dehghan, 2006) tarafından, bazı finans teorilerini açıklayan kısmi türevli integro diferensiyel denklemler de Sachs ve Strauss (2008) tarafından ele alınmıştır. Thorwe ve Bhalekar (2012) 2012 yılında bir katlı Laplace dönüşümünü konvolüsyon içeren lineer kısmi integro-diferensiyel denklemlerinin çözümünü elde etmek için kullandılar. Bu çalışmalarında izledikleri yöntem; bir katlı Laplace dönüşümü ile kısmi türevli integro diferensiyel denklemi adi diferensiyel denkleme dönüştürme, denklemi analitik yöntemler ile çözme ve sonrasında ters Laplace dönüşümü yardımıyla ilk başta verilen lineer kısmi integro-diferensiyel denklemin tam çözümünü elde etme şeklinde sıralanan bir algoritmayı içermektedir. Dhunde (2015) çalışmalarında; iki katlı Laplace dönüşümünü lineer kısmi integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır. Matematiksel fizikte önemli bir yere sahip olan; advection-difüzyon denkleminin, reaksiyon-difüzyon denkleminin, telgraf denkleminin, Klein-Gordon denkleminin, dağınık dalga denkleminin, Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin ve Euler-Bernoulli denkleminin iki katlı Laplace dönüşümü ile çözümleri yine Dhunde ve Waghmare (2017) tarafından elde edilmiştir. Eltayeb ve Kiliçman (2013) ise; telgraf denkleminin çözümünün yanı sıra iki katlı integral içeren konvolüsyon tipindeki kısmi türevli integro diferensiyel denkleminin çözümünü iki katlı Laplace dönüşümü yardımıyla elde etmişlerdir. Bu çalışmalarında; bir boyutlu konvolüsyon teoremini (Kilicman ve Eltayeb, 2008) iki boyutlu konvolüsyona dönüştürdükleri metodu (Eltayeb ve ark., 2012) kullanmışlardır.

Bu tez çalışmasında; yukarıda bahsi geçen çalışmalarda parça parça ele alınan iki katlı Laplace dönüşümü ile kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerin çözümü ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. İki katlı Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak; aynı adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi başlangıç ve sınır koşulları beraber verilen bir kısmi türevli integro-diferensiyel denklemin cebirsel denkleme dönüşmesi sağlanmakta, bulunan cebirsel denklemin çözümünün ardından, elde edilen çözüm fonksiyonunun iki katlı ters Laplace dönüşümü alınarak ilk başta verilen problemin tam çözümüne ulaşılmaktadır. Bilindiği gibi adi diferensiyel denklemlerin çözümünde tercih edilen Laplace dönüşümünün en önemli özelliklerinden biri; verilen başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözüme direkt olarak ulaşılabilmesidir. Bahsedilen yeni yöntem; adi diferensiyel denklemlerde çok sık kullanılan bu uygulamanın kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde de geçerli olduğunu göstermektedir. Yapılan tüm hesaplamalarda ve grafik çizimlerinde Maple 13 programı kullanılmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Giriş birinci bölümde, ikinci bölümde ise; literatürde mevcut olan ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde; iki katlı Laplace dönüşümünün tanımı, özellikleri, tersi ve bazı elemanter fonksiyonlara uygulamaları ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise; iki farklı şekilde modellenen kısmi türevli integro-diferensiyel denklemler ailesi için iki katlı Laplace dönüşümün metodunun nasıl uygulanabileceğini gösteren literatürdeki iki farklı algoritma sunulduktan sonra, sunulan çözüm prosedürü yardımıyla bilinen çeşitli kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümlerine yer verilmiştir. Sonuç ve öneriler diye adlandırılan son bölümde ise; çalışmanın önemi ve çalışmaya dair bazı öneriler verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde; tez çalışmasının diğer bölümlerinde yer alan kısımların daha iyi anlaşılabilmesi için literatürde mevcut olan ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \tag{2.1}$$

Genelleştirilmiş integrali ile tanımlanan $\Gamma(n)$ fonksiyonuna; **Gamma fonksiyonu** adı verilir. Bu genelleştirilmiş integralin her $n > 0$ için yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gamma fonksiyonu ve bu fonksiyonun özellikleri ayrıntılı biçimde literatürde mevcuttur (Ross, 1984) .

2.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu;

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0,$$

integrali ile tanımlıdır. Beta fonksiyonunun en belirgin özelliklerinden birisi Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişkiyi veren;

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.2}$$

eşitliğidir (Spiegel, 1965) .

2.3. Laplace Dönüşümü

$f(t)$, $[0,\infty)$ için tanımlanmış bir fonksiyonu olmak üzere $f(t)$nin **Laplace dönüşümü**,

$$£\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\ , \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanır. Bu integralin sonucu s'nin bir fonksiyonu olduğundan $£\{f(t)\}=F(s)$ yazılabilir. (2.3) ile verilen integral s'nin bir değerine yakınsıyorsa $f(t)$' nin Laplace dönüşümü vardır denir (Spiegel, 1965) .

2.4. Konvolüsyon Teoremi

$£\{f(t)\}=F(s)$, $£\{g(t)\}=G(s)$ olmak üzere;

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x-t)g(t)dt\ ,$$

biçiminde tanımlanmak üzere

$$£\{f(t)*g(t)\}=£\{f(t)\}£\{g(t)\}=F(s)G(s)\ ,$$

dir (Spiegel, 1965) .

2.5. Ters Laplace Dönüşümü

$F(s)$ verilen bir fonksiyon olmak üzere eğer $f(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli ve $£\{f(t)\}=F(s)$ sağlanıyor ise $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ in **ters Laplace dönüşümü** denir ve sembolik olarak $f(t)=£^{-1}\{F(s)\}$ olarak ifade edilir. $£^{-1}=£_1^{-1}$' e Ters Laplace Dönüşüm Operatörü denir (Spiegel, 1965).

Laplace dönüşümünün, özellikleri ve diferensiyel denklemlere uygulanışı ayrıntılı bir şekilde (Spiegel, 1965) de ve literatürdeki birçok kaynakta mevcuttur.

2.6. İntegral Denklemler

Matematikte integral denklemler kısaca, bilinmeyen bir fonksiyonun bir integral işareti altında göründüğü denklemler olarak ifade edilirler. Diferensiyel ve integral denklemler arasında yakın bir bağlantı vardır ve bazı problemler her iki şekilde de formüle edilebilir.

$f(t)$ ve $K(t,s)$ bilinen fonksiyonlar, a ve b verilen sabitler veya t' nin fonksiyonu, integral işareti altında görülen $u(t)$ aranan fonksiyon olmak üzere

$$u(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)u(s)ds, \tag{2.4}$$

biçiminde ifade edilen denklemlere, **integral denklemleri** adı verilir. Burada $K(t, s)$ fonksiyonu, çekirdek fonksiyonu olarak adlandırılır. a ve b katsayıları birer sabit katsayı ise denkleme **Fredholm integral denklemi**, a sabit iken $b = t$ ise denkleme **Volterra integral denklemi** adı verilir (Spiegel, 1965) .

2.7. İntegro Diferensiyel Denklem

İntegro-diferensiyel denklemler bilinmeyen $u(t)$ fonksiyonu ile birlikte fonksiyonun herhangi mertebeden türevlerini ve integralini içeren denklemlerdir. İntegral denklemlerde olduğu gibi, integro-diferensiyel denklemler de integral sınırlarının sabit veya değişken olmasına göre farklı isimler ile adlandırılırlar. Örneğin;

$$u''(t) = u(t) + \sin t + \int_0^t \cos(t-\tau)u(\tau)d\tau, \tag{2.5}$$

bir integro diferensiyel denklemdir (Spiegel, 1965) .

Gayet iyi bilinmektedir ki; adi türevli ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin tanımındaki farklılık aranan fonksiyonun değişken sayısıdır. Eğer integro-diferensiyel denklemde türev her zaman bir değişkene göre alınırsa, integro-diferensiyel denkleme adi integro diferensiyel denklem denir. Matematiksel fizikte de sıklıkla ortaya çıkan diğer integro diferensiyel denklemler, farklı değişkenlere göre türevleri içerirler ise, kısmi integro diferensiyel denklemler olarak adlandırılırlar (Lakshmikantham, 1995) .

3. İKİ KATLI LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde iki katlı Laplace dönüşümünün tanımı ve bazı özellikleri ele alınacaktır.

3.1. İki Katlı Laplace Dönüşümü

Tanım 3.1. f fonksiyonu x ve y değişkenlerine bağlı iki değişkenli bir fonksiyon olsun. $x>0, y>0$ olmak üzere, x ve y değişkenlerine bağlı iki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonunun ***iki katlı Laplace dönüşümü***; integraller mevcut olmak üzere

$$\begin{aligned}\overline{\overline{f}}(p,q) &= £_2\left[f(x,y)\right] = £\left[£\left\{f(x,y);\ x\to p\right\};\ y\to q\right] = £\left[\bar{f}(p,y);\ y\to q\right]\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(px+qy)} f(x,y)\,dx\,dy\end{aligned} \tag{3.1}$$

iki katlı integrali ile tanımlanır. Burada p ve q kompleks sayılardır (Sneddon, 1974) Burada Laplace dönüşümü;

$$\bar{f}(p) = £\left\{f(x)\right\} = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx, \qquad \operatorname{Re}(p)>0 \tag{3.2}$$

integrali ile tanımlamaktadır (Spiegel, 1965) . Bu tez çalışması boyunca $£ \equiv £_1$ sembolü klasik anlamda bir katlı Laplace dönüşüm anlamında kullanılacaktır. Benzer olarak $£^{-1} \equiv £_1^{-1}$ sembolleri de ters Laplace dönüşümünü göstermek üzere, $\bar{f}(p)$ nin ters Laplace dönüşümü

$$f(x) = £^{-1}\left\{\bar{f}(p)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}\,\bar{f}(p)\,dp \quad , \qquad c\geq 0 \tag{3.3}$$

biçimindedir (Spiegel, 1965).

Örnek 3.1. Yukarıdaki Tanım 3.1 kullanıldığında $f(x,y)=1$ fonksiyonunun iki katlı Laplace dönüşümü;

$$£_2\left\{f(x,y)\right\}(p,q) = \int_0^\infty e^{-qy}\int_0^\infty e^{-px} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$£_2\{1\}(p,q)=\int_0^\infty e^{-qy}\int_0^\infty e^{-px}dxdy=\int_0^\infty e^{-qy}\left\{\int_0^\infty e^{-px}dx\right\}dy$$

$$£_2\{1\}(p,q)=\int_0^\infty e^{-qy}\left\{\left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^\infty\right\}dy=\int_0^\infty \frac{1}{p}e^{-qy}dy=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-qy}dy=\frac{1}{p}\left[\frac{e^{-qy}}{-q}\right]_0^\infty$$

$$£_2\{1\}(p,q)=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{q}\right]=\frac{1}{pq} \qquad , \qquad p,q>0,$$

dir.

Tanım 3.2. Tüm $X\geq 0, Y\geq 0$ değerleri için

$$|f(x,y)|\leq Ke^{ax+by} \qquad , \ x\geq X, y\geq Y \tag{3.4}$$

olacak şekilde $K>0$ ve $a>0, b>0$ sabitleri varsa $f(x,y)$ fonksiyonuna $x\to\infty, y\to\infty$ iken ***üstel mertebedendir*** denir ve

$$(\ f(x,y)=O(e^{ax+by})\ ,\ (\ x\to\infty, y\to\infty\ ), \tag{3.5}$$

biçiminde gösterilir (Debnath, 2016) .

Teorem 3.1. (***İki Katlı Laplace Dönüşümü İçin Varlık Teoremi***)

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu her sonlu (0, X)x(0, Y) $X,Y\in\mathbb{R}$ aralıklarında sürekli bir fonksiyon ve e^{ax+by} dereceden üstel mertebeden ise, $\text{Re}(p)>a$ ve $\text{Re}(q)>b$ olmak üzere tüm p ve q için $f(x,y)$ nin iki katlı Laplace dönüşümü vardır.

İspat: Mutlak değer tanımından

$$\left|\overline{\overline{f}}(p,q)\right|=\left|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(px+qy)}f(x,y)dxdy\right|$$

$$\leq K\int_0^\infty e^{-x(p-a)}dx\int_0^\infty e^{-y(q-b)}dy \tag{3.6}$$

$$=\frac{K}{(p-a)(q-b)},\ \text{Re}(p)>a, \text{Re}(q)>b$$

olur. Yani $x\to\infty, y\to\infty$ için (3.6) integralinin varlığını, başka bir değişle integralin değerinin sınırlı kalması Teorem 3.1' i ispatlar (Debnath, 2016) .

Sonuç: Yukarıdaki (3.6) eşitliğinde eşitliğin her iki yanının $p\to\infty, q\to\infty$ için limiti alınır ise;

$$\lim_{p\to\infty,q\to\infty}\left|\overline{\overline{f}}(p,q)\right|=0 \text{ veya } \lim_{q\to\infty,p\to\infty}\overline{\overline{f}}(p,q)=0 \tag{3.7}$$

elde edilir. Buna iki katlı Laplace dönüşümünün ***Limit özelliği*** denir.

Teorem 3.2 ***(İki Katlı Laplace Dönüşümünün Tekliği)***

$x, y \geq 0$ olmak üzere $f(x,y)$ ve $g(x,y)$ sürekli fonksiyon olarak tanımlansın ve sırasıyla $£_2\{f(x,y)\} = \overline{\overline{f}}(p,q)$ ve $£_2\{g(x,y)\} = \overline{\overline{g}}(p,q)$ olsunlar.

Eğer

$$\overline{\overline{f}}(p,q) = \overline{\overline{g}}(p,q) \tag{3.8}$$

ise

$$f(x,y) = g(x,y) \tag{3.9}$$

dir.

İspat: Yeterince büyük α ve β değerleri için, iki katlı ters Laplace dönüşümü tanımı kullanılırsa

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{qx}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{py}\,\overline{\overline{f}}(p,q)\,dp\right]dq \tag{3.10}$$

dur. Bu eşitlikte (3.8) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{qx}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{py}\,\overline{\overline{f}}(p,q)\,dp\right]dq \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{qx}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{py}\,\overline{\overline{g}}(p,q)\,dp\right]dq \\ &= g(x,y) \end{aligned} \tag{3.11}$$

olduğu görülür (Eltayeb ve Kiliçman, 2013) .

3.2. İki Katlı Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Bu bölümde iki katlı Laplace dönüşümünün bazı özellikleri verilecektir. Klasik anlamdaki bir katlı Laplace uygulamalarından biliyoruz ki; fonksiyonların Laplace dönüşümü aranırken; Laplace tanımını kullanarak yani, integral alma işlemi ile sonuca ulaşma yöntemi pratikte tercih edilen bir durum değildir. Bunun yerine Laplace dönüşümünün özelikleri kullanılarak fonksiyonların Laplace dönüşümünü bulmak daha çok tercih edilen hem de çok daha pratik olan bir durumdur. Aynı bir katlı Laplace dönüşümünde olduğu gibi aşağıdaki özellikler kullanıldığında tanımdaki iki katlı integrali hesaplamadan $\left\{ f(x,y), \overline{\overline{f}}(p,q) \right\}$ dönüşüm çiftlerini bulmak her zaman mümkün olacaktır. Bu sayede iki katlı Laplace dönüşümünün uygulamalarında; aynı klasik Laplace dönüşümünün adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde sağlamış olduğu kolaylıkların iki katlı Laplace dönüşümü ile kısmi türevli diferensiyel denklemlerin (KTDD) çözümünde de mevcut olduğu görülür (Eltayeb ve Kiliçman, 2013) .

Özellik 1. *(Lineerlik Özeliği)*

Eğer $£_2\left\{ f_1(x,y) \right\} = \overline{\overline{f}}_1(p,q)$ ve $£_2\left\{ f_2(x,y) \right\} = \overline{\overline{f}}_2(p,q)$ ise

$$£_2\left\{ a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) \right\} = a_1 £_2\left\{ f_1(x,y) \right\} + a_2 £_2\left\{ f_2(x,y) \right\} \tag{3.12}$$

dir (Debnath, 2016) . Burada a_1, a_2 keyfi reel sabitlerdir.

İspat: İki katlı Laplace dönüşümü aşağıda görüldüğü gibi lineer bir dönüşümdür. Bunun ispatı için iki katlı integralin lineerlik özeliğini kullanmak yeterli olacaktır. Gerçekten;

$$\begin{aligned} £_2\left[a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) \right] &= \int_0^\infty\int_0^\infty \left[a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) \right] e^{-(px+qy)} dxdy \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty a_1 f_1(x,y) e^{-(px+qy)} dxdy + \int_0^\infty\int_0^\infty a_2 f_2(x,y) e^{-(px+qy)} dxdy \\ &= a_1 \int_0^\infty\int_0^\infty f_1(x,y) e^{-(px+qy)} dxdy + a_2 \int_0^\infty\int_0^\infty f_2(x,y) e^{-(px+qy)} dxdy \\ &= a_1 £_2\left[f_1(x,y) \right] + a_2 £_2\left[f_2(x,y) \right] \end{aligned}$$

dir.

Özellik 2. *(Öteleme Özeliği)*

Eğer $£_2\left\{ f(x,y) \right\} = \overline{\overline{f}}(p,q)$ ise a ve b sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$£_2\left\{ e^{ax+by} f(x,y) \right\} = \overline{\overline{f}}(p-a, q-b) \tag{3.13}$$

olur (Dhunde ve ark., 2013) .

İspat: (3.1) integrali ile verilen iki katlı Laplace dönüşümü tanımı kullanılır ise,

$$£_2\left\{e^{ax+by}f(x,y)\right\}=\int_0^\infty e^{-qy}\int_0^\infty e^{-px}e^{ax+by}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^\infty e^{-(q-b)y}\int_0^\infty e^{-(p-a)x}f(x,y)dxdy$$

$$=\bar{\bar{f}}(p-a,q-b)\quad ,$$

bulunur. Böylece $£_2\left\{e^{ax+bt}f(x,y)\right\}=\bar{\bar{f}}(p-a,q-b)$ eşitliği elde edilir.

Özellik 3. *(Görüntü fonksiyonunun integre edilmesi)*

Eğer $£_2\{f(x,y)\}=\bar{\bar{f}}(p,q)$ ise

$$£_2\left\{\frac{f(x,y)}{xy}\right\}=\int_p^\infty\int_q^\infty \bar{\bar{f}}(u,v)dvdu\,, \tag{3.14}$$

olur (Dhunde ve ark., 2013) .

İspat: $\int_p^\infty\int_q^\infty \bar{\bar{f}}(u,v)dvdu$ nin mevcut olduğunu varsayılıp

$$\bar{\bar{f}}(u,v)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ux-vy}f(x,y)dxdy\,, \tag{3.15}$$

eşitliğinin her iki yanını u değişkenine göre, p'den ∞'a , v değişkenine göre de ,q'den ∞'a kadar değişmek üzere (3.15)' i integre edilirse,

$$\int_p^\infty\int_q^\infty \bar{\bar{f}}(u,v)dvdu=\int_p^\infty\int_q^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ux}e^{-vy}f(x,y)dxdydvdu$$

$$\int_p^\infty\int_q^\infty \bar{\bar{f}}(u,v)dvdu=\int_q^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{e^{-ux}}{-x}\right]_{u=p}^{\infty}e^{-vy}f(x,y)dxdydv$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[0+\frac{e^{-px}}{x}\right]\left[\frac{e^{-vy}}{-y}\right]_{v=q}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px}e^{-qy}\frac{f(x,y)}{xy}dxdy$$

$$=£_2\left\{\frac{f(x,y)}{xy}\right\},$$

olur.

Böylece $£_2\left\{\dfrac{f(x,y)}{xy}\right\}=\int\limits_p^\infty\int\limits_q^\infty \overline{\overline{f}}(u,v)dvdu$ elde edilir.

Özellik 4. *(Ölçek Değişim Özeliği).*

Eğer $£_2\left\{f(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(p,q)$ ise

$$£_2\left\{f(ax,by)\right\}=\frac{1}{ab}\overline{\overline{f}}(\frac{p}{a},\frac{q}{b}) \tag{3.16}$$

olur (a *ve* b sıfırdan farklı reel sabitlerdir) (Dhunde ve ark., 2013) .

İspat: İki katlı Laplace dönüşümünün (3.1) tanımına göre,

$$£_2\left\{f(ax,by)\right\}=\int\limits_0^\infty e^{-qy}\int\limits_0^\infty e^{-px} f\left(ax,by\right)dxdy\,, \tag{3.17}$$

olup, (3.17) integralinde $ax=u$ ve $by=v$ dönüşümleri yapılırsa

$$\begin{aligned}£_2\left\{f(ax,by)\right\}&=\int\limits_0^\infty e^{-q\left(\frac{v}{b}\right)}\int\limits_0^\infty e^{-p\left(\frac{u}{a}\right)} f\left(u,v\right)\frac{du}{a}\frac{dv}{b}\\&=\frac{1}{ab}\int\limits_0^\infty e^{-q\left(\frac{v}{b}\right)}\int\limits_0^\infty e^{-p\left(\frac{u}{a}\right)} f(u,v)dudv\\&=\frac{1}{ab}\overline{\overline{f}}(\frac{p}{a},\frac{q}{b}) \quad ,\end{aligned}$$

olur. Yani;

$$£_2\left\{f(ax,by)\right\}=\frac{1}{ab}\overline{\overline{f}}(\frac{p}{a},\frac{q}{b})\ ,$$

dir.

Özellik 5. *(Görüntü Fonksiyonunun Türetilmesi)*

Eğer $£_2\left\{f(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(p,q)$ ise

$$£_2\left\{x^m y^n f(x,y)\right\}=(-1)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m\partial q^n}\overline{\overline{f}}(p,q)\,, \tag{3.18}$$

olur (Dhunde ve ark., 2013) .

İspat:

$$\overline{\overline{f}}(p,q)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-px-qy} f(x,y)dxdy$$

Eşitliğinin her iki yanı *y* değişkenine göre *m*, *x* değişkenine göre de *n* defa kısmi türevi alınır ise,

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m \partial q^n}\overline{\overline{f}}(p,q)=\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m \partial q^n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} f(x,y)dxdy$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m \partial q^n}\overline{\overline{f}}(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m \partial q^n}\left[e^{-px-qy} f(x,y)\right]dxdy$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m \partial q^n}\overline{\overline{f}}(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty (-x)^m(-y)^n e^{-px-qy} f(x,y)dxdy$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m \partial q^n}\overline{\overline{f}}(p,q)=(-1)^{m+n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}x^m y^n f\left(x,y\right)dxdy$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m \partial q^n}\overline{\overline{f}}(p,q)=(-1)^{m+n}\text{£}_2\left\{x^m y^n f(x,y)\right\}$$

eşitliği elde edilir.

Not: *Bu tezin diğer bölümlerinde kullanılmayacak olmakla beraber aşağıdaki özellikler de literatürde mevcuttur. Bu nedenle aşağıdaki özellikler ispatsız olarak verilmiştir* (Debnath, 2016) .

Özellik 6.

$$\text{£}_2\left[f(ax)g(by)\right]=\frac{1}{ab}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)\bar{g}\left(\frac{q}{b}\right), \qquad a>0,\ b>0. \tag{3.19}$$

Özellik 7.

$$\text{£}_2\left[f(x)\right]=\frac{1}{q}\bar{f}(p), \quad \text{£}_2\left[g(y)\right]=\frac{1}{p}\bar{g}(q). \tag{3.20}$$

Özellik 8.

$$\text{£}_2\left[f(x+y)\right]=\frac{1}{p-q}\left[\bar{f}(p)-\bar{f}(q)\right]. \tag{3.21}$$

Özellik 9.

$$\text{£}_2\left[f(x-y)\right]=\frac{1}{p+q}\left[\bar{f}(p)+\bar{f}(q)\right], \qquad f \text{ çift ise.} \tag{3.22}$$

$$£_2\left[f(x-y)\right]=\frac{1}{p+q}\left[\bar{f}(p)-\bar{f}(q)\right], \qquad f \text{ tek ise.} \tag{3.23}$$

Özellik 10.

$$£_2\left[f(x)H(x-y)\right]=\frac{1}{q}\left[\bar{f}(p)-\bar{f}(p+q)\right]. \tag{3.24}$$

Özellik 11.

$$£_2\left[f(x)H(y-x)\right]=\frac{1}{q}\left[\bar{f}(p+q)\right]. \tag{3.25}$$

Özellik 12.

$$£_2\left[f(x)H(x+y)\right]=\frac{1}{q}\left[\bar{f}(p)\right]. \tag{3.26}$$

Özellik 13.

$$£_2\left[H(x-y)\right]=\frac{1}{p(p+q)}.$$

3.3. Türevlerin İki Katlı Laplace Dönüşümü

İki katlı Laplace dönüşümünün diferensiyel denklemlere uygulamalarında; iki değişkenli bir fonksiyonun türevlerinin Laplace dönüşümü formülerine gerek duyacağız. Bu formüller sayesinde KTDD' ler ve KTIDD' ler cebirsel denklemlere dönüştürülebilecektir. Bu bölümde ileride ihtiyaç duyacağımız bu formüllerin nasıl elde edileceği gösterilecektir.

Özellik 1.*(1.mertebeden kısmi türevlerin iki katlı Laplace dönüşümü)*

$£_2\left\{f(x,y)\right\}=\bar{\bar{f}}(p,q)$ olmak üzere ,

$$£_2\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\}(p,q)=p£_2\left\{f(x,y)\right\}-£\left\{f(0,y)\right\} \tag{3.27}$$

$$£_2\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\}(p,q)=q£_2\left\{f(x,y)\right\}-£\left\{f(x,0)\right\} \tag{3.28}$$

dir $(x,y>0)$ (Basheer, 2015) .

İspat: (3.1)' deki iki katlı Laplace dönüşümünün tanımına göre

$$£_2\left\{f(x,y)\right\}=\int_0^\infty e^{-qy}\int_0^\infty e^{-px}f(x,y)dxdy$$

dır. Bu eşitlikteki $f(x,y)$ fonksiyonu yerine $f_x(x,y)$ fonksiyonu yazılır ise,

$$£_2\{f_x(x,y)\}=\int_0^\infty e^{-qy}\int_0^\infty e^{-px}f_x(x,y)dxdy$$

$$£_2\{f_x(x,y)\}=\int_0^\infty e^{-qy}\left\{\int_0^\infty e^{-px}f_x(x,y)dx\right\}dy$$

$$£_2\{f_x(x,y)\}=\int_0^\infty e^{-qy}\left\{\left[e^{-px}f(x,y)\right]_{x=0}^{\infty}-\int_0^\infty(-p)e^{-px}f(x,y)dx\right\}dy$$

$$£_2\{f_x(x,y)\}=\int_0^\infty e^{-qy}\left\{0-f(0,y)+p\int_0^\infty e^{-px}f(x,y)dx\right\}dy$$

$$£_2\{f_x(x,y)\}=-\int_0^\infty e^{-qy}f(0,y)dy+p\int_0^\infty e^{-qy}\int_0^\infty e^{-px}f(x,y)dxdy$$

$$£_2\{f_x(x,y)\}=-£\{f(0,y)\}+p£_2\{f(x,y)\}$$

$$£_2\{f_x(x,y)\}=p£_2\{f(x,y)\}-£\{f(0,y)\}$$

olur. Yukarıdaki işlemlere benzer işlemler bu kez iki katlı Laplace dönüşümü tanımındaki $f(x,y)$ fonksiyonu yerine $f_y(x,y)$ fonksiyonu yazılarak tekrarlanır ise (3.28) eşitliği kolaylıkla elde edilir.

Özellik 2.*(2. mertebeden kısmi türevlerin iki katlı Laplace dönüşümü)*

$$£_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x}\right\}=p^2£_2\{f(x,y)\}-p£\{f(0,y)\}-£\left\{\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}\right\} \tag{3.29}$$

$$£_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}\right\}=q^2£_2\{f(x,y)\}-q£\{f(x,0)\}-£\left\{\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}\right\} \tag{3.30}$$

$$£_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=pq\overline{\overline{f}}(p,q)-p\overline{\overline{f}}(p,0)-q\overline{\overline{f}}(0,q)+f(0,0) \tag{3.31}$$

eşitlikleri doğrudur (Basheer, 2015) .

İspat: Özellik 1' de olduğu gibi iki katlı Laplace dönüşümünün (3.1) tanımındaki $f(x,y)$ fonksiyonu yerine $f_{xx}(x,y)$ fonksiyonu yazılır ise,

$$£_2\{f_{xx}(x,y)\}=p£_2\{f_x(x,y)\}-£\{f_x(0,y)\} \tag{3.32}$$

eşitliği kolaylıkla elde edilir. (3.32) eşitliğinin sağ tarafındaki $£_2\{f_x(x,y)\}$' de yukarıda bulunan (3.27) eşitliği kullanılır ise

$$\pounds_2\left\{f_{xx}(x,y)\right\}=p\left\{p\pounds_2\left\{f(x,y)\right\}-\pounds\left\{f(0,y)\right\}\right\}-\pounds\left\{f_x(0,y)\right\}\ ,$$

$$\pounds_2\left\{f_{xx}(x,y)\right\}=p^2\pounds_2\left\{f(x,y)\right\}-p\pounds\left\{f(0,y)\right\}-\pounds\left\{f_x(0,y)\right\}\ ,$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Benzer düşünceyle Özelik 1' de olduğu gibi iki katlı Laplace dönüşümü tanımındaki $f(x,y)$ fonksiyonu yerine bu sefer $f_{yy}(x,y)$ fonksiyonu yazılır ise,

$$\pounds_2\left\{f_{yy}(x,y)\right\}(p,q)=q\pounds_2\left\{f_y(x,y)\right\}-\pounds\left\{f_y(x,0)\right\}\ , \tag{3.33}$$

olacaktır. Bir önceki adımda olduğu gibi (3.33) eşitliğinin sağ tarafındaki $\pounds_2\left\{f_y(x,y)\right\}$ yerine Özellik 1' de bulunan karşılığı yazılır ise

$$\pounds_2\left\{f_{yy}(x,y)\right\}(p,q)=q\left\{q\pounds_2\left\{f(x,y)\right\}-\pounds\left\{f(x,0)\right\}\right\}-\pounds\left\{f_y(x,0)\right\}\ ,$$

$$\pounds_2\left\{f(x,y)\right\}=q^2\pounds_2\left\{f(x,y)\right\}-q\pounds\left\{f(x,0)\right\}-\pounds\left\{f_y(x,0)\right\}\ ,$$

olduğu görülür. (3.31)'in ispatında da iki katlı Laplace dönüşümünün (3.1) tanımındaki integrali kullanacağız. (3.1) deki $f(x,y)$ fonksiyonu yerine bu sefer de $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ fonksiyonunu yazılır ise,

$$\pounds_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=\pounds_2\left\{f_{xy}(x,y)\right\}\ ,$$

$$\pounds_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=\int_0^\infty e^{-qy}\int_0^\infty e^{-px}f_{xy}(x,y)dxdy\ ,$$

$$\pounds_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=\int_0^\infty e^{-px}\left\{\int_0^\infty e^{-qy}f_{xy}(x,y)dy\right\}dx\ ,$$

$$\pounds_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=\int_{x=0}^\infty e^{-px}\left\{\left[e^{-qy}f_x(x,y)\right]_{y=0}^\infty-\int_{y=0}^\infty e^{-qy}(-q)f_x(x,y)dy\right\}dx\ ,$$

$$\pounds_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=\int_{x=0}^\infty e^{-px}\left\{0-f_x(x,0)+q\int_{y=0}^\infty e^{-qy}f_x(x,y)dy\right\}dx\ ,$$

$$\pounds_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=-\int_{x=0}^\infty e^{-px}f_x(x,0)dx+q\int_{x=0}^\infty e^{-px}\int_{y=0}^\infty e^{-qy}f_x(x,y)dydx\ ,$$

$$£_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=-\left\{\left[e^{-px}f(x,0)\right]_{x=0}^{\infty}-\int_{x=0}^{\infty}e^{-px}(-p)f(x,0)dx\right\}+q\int_{y=0}^{\infty}e^{-qy}\left\{e^{-px}f_x(x,y)dx\right\}dy$$

$$-\left\{\int_{x=0}^{\infty}e^{-px}(-p)f(x,y)dx\right\}dy\ ,$$

$$£_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=f(0,0)-p\overline{\overline{f}}(p,0)-q\int_{y=0}^{\infty}e^{-qy}f(0,y)dy+pq\int_{y=0}^{\infty}e^{-qy}\int_{x=0}^{\infty}e^{-px}f(x,y)dxdy\ ,$$

$$£_2\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=f(0,0)-p\overline{\overline{f}}(p,0)-q\overline{\overline{f}}(0,q)+pq\overline{\overline{f}}(p,q)\ ,$$

böylece

$$£_2\left\{f_{xy}(x,y)\right\}=pq\overline{\overline{f}}(p,q)-p\overline{\overline{f}}(p,0)-q\overline{\overline{f}}(0,q)+f(0,0)\ ,$$

bulunur.

Aşağıdaki *Özellik 3'* te ise, önceki özeliklerin bir genelleştirilmesine yer verilecektir.

Özellik 3.*(yüksek mertebeden kısmi türevlerin iki katlı Laplace dönüşümü)*

$f(x,y)$ fonksiyonu ve onun $\dfrac{\partial^{i+j}f}{\partial y^i\partial x^j}$, $i=0,1,...,m$, $j=0,1,...,n$ kısmi türevleri üstel mertebeden olmak üzere;

$$£_2\left\{\frac{\partial^n f(x,t)}{\partial x^n}\right\}=p^n£_2\left\{f(x,y)\right\}-\sum_{i=0}^{n-1}p^{n-1-i}£\left\{\frac{\partial^i f(0,y)}{\partial x^i}\right\}\quad ,\quad n\geq 1\ ,\tag{3.34}$$

$$£_2\left\{\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial y^m}\right\}=q^m£_2\left\{f(x,y)\right\}-\sum_{j=0}^{m-1}q^{m-j-1}£\left\{\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial y^j}\right\}\quad ,\quad m\geq 1\quad ,\tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}£_2\left\{\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial y^m\partial x^n}\right\}=p^nq^m\Bigg[&£_2\left\{f(x,\mathrm{y})\right\}-\sum_{j=0}^{m-1}q^{-j-1}£\left\{\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial y^j}\right\}\\&-\sum_{i=0}^{n-1}p^{-1-i}£\left\{\frac{\partial^i f(0,y)}{\partial x^i}\right\}+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}p^{-1-i}q^{-j-1}\frac{\partial^{i+j}f(0,0)}{\partial y^j\partial x^i}\Bigg],\end{aligned}\tag{3.36}$$

eşitlikleri mevcuttur (Basheer, 2015) .

İspat: (3.34)' ün ispatı için matematiksel tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

Özellik 1' den biliniyor ki $n=1$ için (3.34) önermesi doğrudur. Yine $p\leq n-1$ için (3.34)' ün doğru olduğunu kabul edelim. Buna göre;

$$£_2\left\{\frac{\partial^n f(x,t)}{\partial x^n}\right\}=£_2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right)\right\}, \tag{3.37}$$

olacaktır. (3.37) eşitliğinin sağ tarafında (3.34) kullanılır ise

$$£_2\left\{\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}\right\}=p£_2\left\{\frac{\partial^{n-1} f(x,y)}{\partial x^{n-1}}\right\}-£\left\{\frac{\partial^{n-1} f(0,y)}{\partial x^{n-1}}\right\},$$

$$£_2\left\{\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}\right\}=p\left[p^{n-1}£_2\{f(x,y)\}-\sum_{n=0}^{n-2}p^{n-2-k}£\left\{\frac{\partial^k f(0,y)}{\partial x^k}\right\}\right]-£\left\{\frac{\partial^{n-1} f(0,y)}{\partial x^{n-1}}\right\},$$

$$£_2\left\{\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}\right\}=p^n£_2\{f(x,y)\}-\sum_{n=0}^{n-1}p^{n-1-k}£\left\{\frac{\partial^k f(0,y)}{\partial x^k}\right\},$$

bulunur. Bu ise (3.34)'ün doğru olduğu anlamına gelir. (3.35)'in ispatında ise; yukarıdaki tümevarım yönteminde dönüşüm değişkeni y alınarak tekrarlandığında kolay bir şekilde elde edilir. (3.36) eşitliğinin ispatında ise;

$$£_2\left\{\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial y^m\partial x^n}\right\}=£_2\left\{\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}\right)\right\} \tag{3.38}$$

olduğunu dikkate alınır, (3.38) eşitliğinin sağ tarafında da yukarıdaki (3.35) eşitliği kullanılırsa

$$£_2\left\{\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial y^m\partial x^n}\right\}=q^m£_2\left\{\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}\right\}-\sum_{j=0}^{m-1}q^{m-j-1}£\left\{\frac{\partial^{j+n} f(x,0)}{\partial y^{j+n}}\right\}, \tag{3.39}$$

bulunur. (3.39) eşitliğinin sağ tarafında (3.34) kullanılarak

$$£_2\left\{\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial y^m\partial x^n}\right\}=q^m\left[p^n£_2\{f(x,y)\}-\sum_{i=0}^{n-1}p^{n-1-i}£_2\left\{\frac{\partial^i f(0,y)}{\partial x^i}\right\}\right]$$

$$-p^n\sum_{j=0}^{m-1}q^{m-j-1}£\left\{\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial y^j}\right\}+\sum_{j=0}^{m-1}q^{m-j-1}\sum_{i=0}^{n-1}p^{n-i-1}\left\{\frac{\partial^{j+i} f(0,0)}{\partial y^j\partial x^i}\right\},$$

eşitliğine ulaşılır.

3.4. İntegralin İki Katlı Laplace Dönüşümü

Eğer $£_2\{f(x,y)\}=\overline{\overline{f}}(p,q)$ ise

$$£_2\left\{\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,dudv\right\}=\frac{\overline{\overline{f}}(p,q)}{pq} \qquad \mathrm{Re}(p)>0\ ,\ \mathrm{Re}(q)>0 \tag{3.40}$$

olur (Dhunde ve ark., 2013) .

İspat: $g(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,dudv$ biçiminde tanımlansın, bu durumda $g_{xy}(x,y)=f(x,y)$ ve $g(0,0)=0$, $£_2\{g_{xy}(x,y)\}=£_2\{f(x,y)\}=\overline{\overline{f}}(p,q)$ eşitlikleri kolaylıkla elde edilebilir. Özellik 2' den,

$$£_2\left\{\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}=£_2\{g_{xy}(x,y)\}=pq\overline{\overline{g}}(p,q)-p\overline{\overline{g}}(p,0)-q\overline{\overline{g}}(0,q)+g(0,0)\ ,$$

yazılabilir. Bu eşitlik yukarıdaki verilere göre tekrar düzenlenirse

$$\overline{\overline{f}}(p,q)=pq\overline{\overline{g}}(p,q)-p\overline{\overline{g}}(p,0)-q\overline{\overline{g}}(0,q)\ ,$$

olur. Aynı zamanda $g(x,y)$ nin tanımından

$$£\{g(x,0)\}=0 \quad ve \quad £\{g(0,y)\}=0\ ,$$

olduğundan, buradan

$$\overline{\overline{g}}(p,q)=\frac{\overline{\overline{f}}(p,q)}{pq},$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$£_2\left\{\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,dudv\right\}=\frac{\overline{\overline{f}}(p,q)}{pq}\ ,$$

eşitliği ispatlanmış olunur.

3.5. İki Katlı Laplace Dönüşümü İçin Konvolüsyon

$f(x,y)$ ve $g(x,y)$ sürekli fonksiyonları için ***iki katlı konvolüsyon***

$$\int_0^x\int_0^y f(\upsilon,\tau)\,g(x-\upsilon,y-\tau)\,d\tau d\upsilon\ , \tag{3.41}$$

integrali ile tanımlanır ve $f(x,y)**g(x,y)$ sembolü ile gösterilir (Ditkin ve Prudnikov, 1962) .

Konvolüsyon için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

i- $(f**g)(x,y)=(g**f)(x,y)$, (3.42)

ii- $\left[f**(g**h)\right](x,y)=\left[(f**g)**h\right](x,y)$, (3.43)

iii- $\left[f**\left(ag+bh\right)\right](x,y)=a(f**g)(x,y)+b(f**h)(x,y)$, (3.44)

iv- $(f**\delta)(x,y)=f(x,y)=(\delta**f)(x,y)$, (3.45)

burada $\delta(x,y)$, Dirac delta fonksiyonudur.

Teorem 3.1. **(***Konvülsiyonun İki Katlı Laplace Dönüşümü***)**

$£_2\left\{f(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(p,q)$, $£_2\left\{g(x,y)\right\}=\overline{\overline{g}}(p,q)$ olmak üzere,

$$£_2\left\{f(x,y)**g(x,y)\right\}=£_2\left\{f(x,y)\right\}£_2\left\{g(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(p,q)\overline{\overline{g}}(p,q) \quad (3.46)$$

dir (Ditkin ve Prudnikov, 1962) .

Sonuç:

$$£_2^{-1}\left[\overline{\overline{f}}(p,q)\overline{\overline{g}}(p,q)\right]=(f**g)(x,y).$$

3.6. Bazı Elemanter Fonksiyonların İki Katlı Laplace Dönüşümü

Bu bölümde bazı elemanter fonksiyonların iki katlı Laplace dönüşümleri sunulacaktır (Debnath, 2016) .

(a) $f(x,y)=1$ $x>0$ *ve* $y>0$ olmak üzere;

$$£_2\left\{1\right\}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px}e^{-qy}dxdy=\int_0^\infty e^{-px}dx\int_0^\infty e^{-qy}dy \quad ,$$

$$£_2\{1\} = \frac{1}{pq}. \tag{3.47}$$

(b)

Tüm x *ve* y için $f(x,y) = e^{ax+by}$ ise,

$$£_2\left\{e^{ax+by}\right\} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(p-a)x}e^{-(q-b)y}dxdy = \int_0^\infty e^{-(p-a)x}dx\int_0^\infty e^{-(q-b)y}dy\,,$$

$$£_2\left\{e^{ax+by}\right\} = \frac{1}{(p-a)(q-b)}. \tag{3.48}$$

(c)

(b) şıkkı kullanılarak

$$£_2\left\{\exp\left[i(ax+by)\right]\right\} = \frac{1}{(p-ia)(q-ib)},$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik

$$£_2\left\{\exp\left[i(ax+by)\right]\right\} = \frac{(p+ia)(q+ib)}{\left(p^2+a^2\right)\left(q^2+b^2\right)} = \frac{\left(pq-ab\right)+i(aq+bp)}{\left(p^2+a^2\right)\left(q^2+b^2\right)}, \tag{3.49}$$

biçiminde düzenlenebilir. Bu ise sonuç olarak,

$$£_2\left\{\cos(ax+by)\right\} = \frac{pq-ab}{\left(p^2+a^2\right)\left(q^2+b^2\right)}, \tag{3.50}$$

$$£_2\left\{\sin(ax+by)\right\} = \frac{aq+bp}{\left(p^2+a^2\right)\left(q^2+b^2\right)}, \tag{3.51}$$

eşitliklerine ulaşmamızı sağlar.

(d)

$$£_2\left\{\cosh(ax+by)\right\} = \frac{1}{2}\left[£_2\left\{e^{ax+by}\right\} + £_2\left\{e^{-(ax+by)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-a)(q-b)} + \frac{1}{(p+a)(q+b)}\right] \quad , \tag{3.52}$$

benzer şekilde,

$$£_2\left\{\sinh(ax+by)\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-a)(q-b)}-\frac{1}{(p+a)(q+b)}\right], \tag{3.53}$$

olduğu hiperbolik fonksiyonun tanımı ve iki katlı Laplace dönüşümünün özelikleri kullanılarak kolaylıkla bulunur.

(e)

Öteleme özelliğinden,

$$£_2\left\{e^{-ax-by}f(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(p+a,q+b),$$

olur.

(f)

$$£_2\left\{(xy)^n\right\}=\int_0^\infty e^{-px}x^n dx\int_0^\infty y^n e^{-qy}dy=\frac{n!}{p^{n+1}}.\frac{n!}{q^{n+1}}=\frac{(n!)^2}{(pq)^{n+1}} \quad n \text{ pozitif tamsayı.} \tag{3.54}$$

(g)

$$£_2\left\{\left(x^m y^n\right)\right\}=\frac{m!n!}{p^{m+1}q^{n+1}} \qquad m \text{ ve } n \text{ pozitif tamsayı.} \tag{3.55}$$

(h)

$a>-1 \;\; ve \;\; b>-1$ reel sayılar olmak üzere

$$£_2\left\{x^a y^b\right\}=\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}.\frac{\Gamma(b+1)}{q^{b+1}},$$

dir. Gerçekten; Tanım 3.1’ den

$$£_2\left\{x^a y^b\right\}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}x^a y^b dxdy$$

$$=\int_0^\infty x^a e^{-px}dx\int_0^\infty y^b e^{-qy}dy, \tag{3.56}$$

yazılabilir. Bu (3.56) integralinde $px=s \;\; ve \;\; qy=t$ dönüşümleri yapılırsa;

$$£_2\left\{x^a y^b\right\}=\frac{1}{p^{a+1}}\int_0^\infty e^{-s}s^a ds.\frac{1}{q^{b+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^b dt$$

$$=\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}.\frac{\Gamma(b+1)}{q^{b+1}}, \tag{3.57}$$

olduğu görülür. Burada $\Gamma(a)$ Euler Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty s^{a-1}e^{-s}ds,\quad a>0, \tag{3.58}$$

olarak tanımlanan düzgün yakınsak integraldir.

(k)

$f(x,y)=g(x)h(y)$ biçiminde yazılabilir ise,

$$£_2\left[f(x,y)\right]=£_2\left[g(x).h(y)\right]=\int_0^\infty e^{-px}g(x)dx\int_0^\infty e^{-qy}h(y)dy=\bar{g}(p)\,\bar{h}(q) \tag{3.59}$$

dir.

3.7. İki Katlı Ters Laplace Dönüşümü

Eğer $\bar{\bar{f}}(p,q)=£_2\{f(x,y)\}$ ise $f(x,y)$ fonksiyonuna $\bar{\bar{f}}(p,q)$ görüntü fonksiyonunun iki katlı ters Laplace dönüşümü denir ve $f(x,y)=£_2^{-1}\left\{\bar{\bar{f}}(p,q)\right\}$ biçiminde gösterilir. İki katlı ters Laplace dönüşümü; seçilen uygun c ve d sabitleri için $\mathrm{Re}(p)>c$ ve $\mathrm{Re}(q)>d$ ile tanımlanan bölgedeki tüm p ve q kompleks sayıları için $\bar{\bar{f}}(p,q)$ analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$£_2^{-1}\left[\bar{\bar{f}}(p,q)\right]=f(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{px}dp\frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}e^{qy}\bar{\bar{f}}(p,q)dq, \tag{3.60}$$

biçiminde verilen kompleks iki katlı integral formülü ile tanımlanır (Debnath, 2016) Biçimsel olarak;

$££_2^{-1}=£_2^{-1}£_2=ł,$

yazılabilir. Burada ł birim operatörü göstermektedir.

3.8. İki Katlı Ters Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Bu bölümde iki katlı ters Laplace dönüşümünün bazı özellikleri verilecektir. İki katlı Laplace dönüşümü için verilen özelliklere ters dönüşüm operatörü uygulayarak aşağıdaki kuralları kolaylıkla elde edebilir (Debnath, 2016).

Özellik 1. *(Lineerlik Özeliği)*

$$£_2^{-1}\left[a\overline{\overline{f}}(p,q)+b\overline{\overline{g}}(p,q)\right]=a£_2^{-1}\left[\overline{\overline{f}}(p,q)\right]+b£_2^{-1}\left[\overline{\overline{g}}(p,q)\right] \tag{3.61}$$

dir. Burada a_1, a_2 keyfi reel sabitlerdir.

Özellik 2. *(Öteleme Özeliği)*

$$£_2^{-1}\left\{\overline{\overline{f}}(p-a,q-b)\right\}=e^{ax+by}f(x,y) \tag{3.62}$$

dir.

Özellik 3. *(Görüntü fonksiyonunun integre edilmesi)*

Eğer $£_2\left\{f(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(p,q)$ ise

$$£_2^{-1}\left\{\int_p^{\infty}\int_q^{\infty}\overline{\overline{f}}(u,v)dvdu\right\}=\frac{f(x,y)}{xy} \tag{3.63}$$

dir.

Özellik 4. *(Ölçek Değişim Özeliği).*

Eğer $£_2\left\{f(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(p,q)$ ise

$$£_2^{-1}\left\{\frac{1}{ab}\overline{\overline{f}}\left(\frac{p}{a},\frac{q}{b}\right)\right\}=f(ax,by) \tag{3.64}$$

dir (a *ve* b sıfırdan farklı reel sabitlerdir).

Özellik 5. *(Görüntü Fonksiyonunun Türetilmesi)*

Eğer $£_2\left\{f(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(p,q)$ ise

$$£_2^{-1}\left\{\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m \partial q^n}\overline{\overline{f}}(p,q)\right\}=(-1)^{m+n}x^m y^n f(x,y) \tag{3.65}$$

dir.

4. İKİ KATLI LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI

4.1. Kısmi Türevli İntegro-Diferensiyel Denklemlerin İki Katlı Laplace Dönüşümü İle Çözümü

$f(x,y)$ *ve* $k_i(y-t)$ bilinen fonksiyonlar, c ve $a_i, i=\overline{1,m}$, $b_i, i=\overline{1,n}$, $d_i, i=\overline{1,r}$ 'ler keyfi reel sabitler olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \frac{\partial^i u}{\partial x^i} + \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{\partial^i u}{\partial y^i} + cu + \sum_{i=0}^{r} d_i \int_0^y k_i(y-t) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} dt + f(x,y) = 0 \tag{4.1}$$

biçiminde verilen kısmi türevli integro-diferensiyel denklemini (KTIDD) ele alalım (Dhunde, 2015).

(4.1) eşitliği ile verilen kısmi türevli integro-diferensiyel denkleminde eşitliğin her iki yanının iki katlı Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{m} a_i £_2 \left\{ \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right\} + \sum_{i=0}^{n} b_i £_2 \left\{ \frac{\partial^i u}{\partial y^i} \right\} + c\overline{\overline{u}}(p,q) + \sum_{i=0}^{r} d_i £_2 \left\{ \int_0^y k_i(y-t) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} dt \right\} + \overline{\overline{f}}(p,q) = 0 \ ,(4.2)$$

eşitliği elde edilir. Bölüm 3' te verilen, konvolüsyon teoremi ve kısmi türevlerin iki katlı Laplace dönüşümü özellikleri yukarıdaki (4.2) eşitliğinde kullanıldığında;

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m} a_i \left[p^i \overline{\overline{u}}(p,q) - \sum_{j=0}^{i-1} p^{i-1-j} £ \left\{ \frac{\partial^j u(0,y)}{\partial x^j} \right\} \right] + \sum_{i=0}^{n} b_i \left[q^i \overline{\overline{u}}(p,q) - \sum_{k=0}^{i-1} q^{i-1-k} £ \left\{ \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial y^k} \right\} \right] \\ &+ c\overline{\overline{u}}(p,q) + \sum_{i=0}^{r} d_i \overline{k}_i(q) \left[p^i \overline{\overline{u}}(p,q) - \sum_{j=0}^{i-1} p^{i-1-j} £ \left\{ \frac{\partial^j u(0,y)}{\partial x^j} \right\} \right] + \overline{\overline{f}}(p,q) = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitliğine ulaşılır. Elde dilen (4.3) eşitliğindeki $\overline{\overline{u}}(p,q), \overline{\overline{f}}(p,q), \overline{k}(q)$ fonksiyonları sırasıyla

$\overline{\overline{u}}(p,q) = £_2\{u(x,y)\}$,

$\overline{\overline{f}}(p,q) = £_2\{f(x,y)\}$,

$\overline{k}(q) = £\{k_i(y)\}$,

biçiminde tanımlanan dönüşüm fonksiyonlarıdır. (4.3) denklemi cebirsel bir denklem olup, yazım kolaylığı olması bakımından yukarıda ifade edilmeyen ama problemin bir başlangıç değer problemi olması için (4.1) ile verilmiş olduğunu varsaydığımız başlangıç koşullarının da Laplace dönüşümleri alındıktan sonra bu cebirsel denklemde yazılıp, elde edilen eşitlikten $\overline{\overline{u}}(p,q)$'nin çözülmesi ve ardından bulunan $\overline{\overline{u}}(p,q)$' nin iki katlı ters Laplace dönüşümünün alınması ile ilk başta verilen (4.1) formundaki tüm kısmi türevli integro-diferensiyel denklem (KTIDD) lerinin verilen başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümünü veren formülü elde edilmiş olunur (Dhunde, 2015).

Aşağıdaki örnekler, yukarıda anlatılan çözüm prosedürü kullanıldığında kolaylıkla çözülebilirler. Notasyon kullanımında tezin tamamında; anlam bütünlüğü olabilmesi bakımından aynı notasyonlar tercih edilmiştir. Bu durum referans alınan makaleler ile anlam bakımından çelişmemektedir.

Örnek 4.1.

$$u_{yy} = u_x + 2\int_0^y (y-t)u(x,t)dt - 2e^x \tag{4.4}$$

kısmi türevli integro-diferensiyel denklemi (KTIDD) ve,

$$u(x,0) = e^x,\ u_y(x,0) = 0\ , u(0,y) = \cos y \tag{4.5}$$

başlangıç ve sınır koşulları ile verilen (4.4)-(4.5) problemini çözünüz (Dhunde, 2015) .

Çözüm:

Yukarıda Bölüm 4.1' de iki katlı Laplace dönüşümünün KTIDD' lere nasıl uygulanacağının ayrıntılı bir şekilde ifade edildiği gibi (4.4) eşitliğinin her iki yanının iki katlı Laplace dönüşümü alınır ise;

$$q^2\overline{\overline{u}}(p,q) - q\overline{u}(p,0) - \overline{u}_y(p,0) = p\overline{\overline{u}}(p,q) - \overline{u}(0,q) + 2\frac{1}{q^2}\overline{\overline{u}}(p,q) - \frac{2}{(p-1)q}, \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.5) başlangıç ve sınır koşullarının Laplace dönüşümleri ise;

$$\overline{u}(p,0) = \frac{1}{p-1}, \quad \overline{u}_y(p,0) = 0, \quad \overline{u}(0,q) = \frac{q}{q^2+1}, \tag{4.7}$$

dir. Başlangıç ve sınır koşullarının Laplace dönüşümünden elde edilen (4.7) eşitliğindeki ifadeler (4.6) eşitliğindeki yerlerine yazılır ise

$$q^2\overline{\overline{u}}(p,q) - \frac{q}{p-1} = p\overline{\overline{u}}(p,q) - \frac{q}{q^2+1} + 2\frac{1}{q^2}\overline{\overline{u}}(p,q) - \frac{2}{(p-1)q},$$

$$\left(p+\frac{2}{q^2}-q^2\right)\overline{\overline{u}}(p,q)=\frac{q}{q^2+1}+\frac{2}{(p-1)q}-\frac{q}{p-1},$$

olur. Elde edilen bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılır ve $\overline{\overline{u}}(p,q)$ çözülürse;

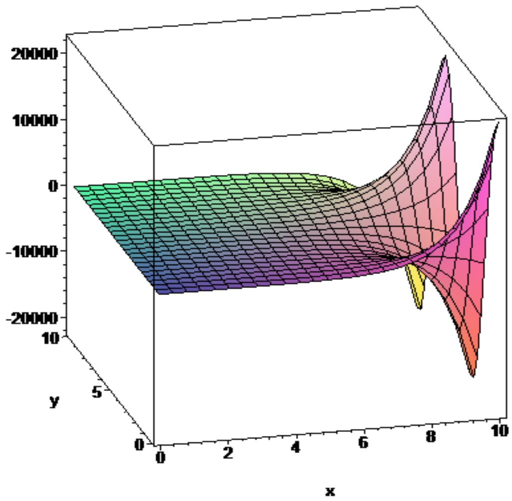
$$\left(\frac{pq^2+2-q^4}{q^2}\right)\overline{\overline{u}}(p,q)=\frac{q^2(p-1)+2(q^2+1)-q^2(q^2+1)}{q(p-1)(q^2+1)}=\frac{pq^2+2-q^4}{q(p-1)(q^2+1)},$$

$$\overline{\overline{u}}(p,q)=\frac{1}{(p-1)}\frac{q}{(q^2+1)} \tag{4.8}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.8) eşitliğinin her iki yanının iki katlı ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$u(x,y)=e^x\cos y, \tag{4.9}$$

olur. Elde edilen sonuç aynı zamanda (4.4)-(4.5) probleminin analitik çözümüdür. Aşağıdaki Şekil 4.1 ise elde edilen çözüm fonksiyonunun $(x,y)\in[0,10]\times[0,10]$ bölgesindeki grafiğini göstermektedir.



Şekil 4.1. Örnek 4.1' in *u(x,y)* çözüm yüzeyi

Örnek 4.2.

$$u_y-u_{xx}+u+\int_0^y e^{y-t}u(x,t)dt=(x^2+1)e^y-2, \tag{4.10}$$

$$u(x,0)=x^2 \quad , \quad u_y(x,0)=1, \tag{4.11}$$

$$u(0,y)=y \quad , \quad u_x(0,y)=0, \tag{4.12}$$

biçiminde verilen (4.10)-(4.12) başlangıç sınır değer problemini çözünüz (Dhunde, 2015).

Çözüm:

Örnek 4.1 de olduğu gibi (4.10) kısmi türevli integro-diferensiyel denkleme iki katlı Laplace dönüşümü ve denklem ile verilen (4.11),(4.12) başlangıç ve sınır değerlerine Laplace dönüşümü uygulanırsa sırasıyla;

$$q\bar{\bar{u}}(p,q)-\bar{u}(p,0)-\left\{p^2\bar{\bar{u}}(p,q)-p\bar{u}(0,q)-\bar{u}_x(0,q)\right\}+\bar{\bar{u}}(p,q)+\frac{1}{q-1}\bar{\bar{u}}(p,q)$$
$$=\left(\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{q-1}-\frac{2}{pq}, \tag{4.13}$$

$$\bar{u}(p,0)=\frac{2}{p^3}\ ,\ \bar{u}_y(p,0)=\frac{1}{p}, \tag{4.14}$$

$$\bar{u}(0,q)=\frac{1}{q^2}\ ,\ \bar{u}_x(0,q)=0, \tag{4.15}$$

eşitliklerini elde edilir. (4.14) ve(4.15) eşitliklerinde elde edilen değerler (4.13) eşitliğinde yazılır ve bu eşitlikten $\bar{\bar{u}}(p,q)$ çekilir ise;

$$q\bar{\bar{u}}(p,q)-\frac{2}{p^3}-p^2\bar{\bar{u}}(p,q)+\frac{p}{q^2}+\bar{\bar{u}}(p,q)+\frac{1}{q-1}\bar{\bar{u}}(p,q)=\frac{(2+p^2)}{p^3(q-1)}-\frac{2}{pq},$$

$$\left(q-p^2+1+\frac{1}{q-1}\right)\bar{\bar{u}}(p,q)=\frac{(2+p^2)}{p^3(q-1)}-\frac{2}{pq}+\frac{2}{p^3}-\frac{p}{q^2},$$

$$\bar{\bar{u}}(p,q)=\frac{\left(2q^3-2p^2q^2+2p^2q\right)+\left(p^2q^2-p^4q+p^4\right)}{p^3q^2(q^2-p^2q+p^2)},$$

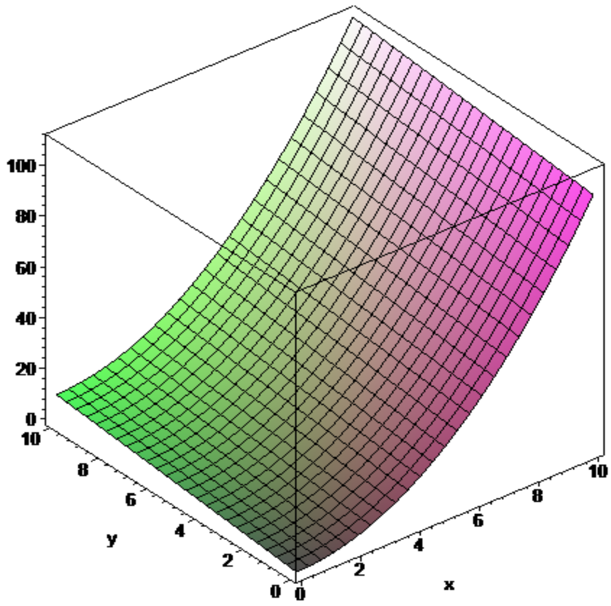
$$\bar{\bar{u}}(p,q)=\frac{\left(2q+p^2\right)}{p^3q^2}=\frac{2}{p^3q}+\frac{1}{pq^2}, \tag{4.16}$$

eşitliğine ulaşılır.

Elde edilen (4.16) eşitliğinin her iki yanının iki katlı ters Laplace dönüşümü alındığında ise,

$$u(x,y)=x^2+y, \tag{4.17}$$

fonksiyonu bulunur. Bulunan çözüm fonksiyonu aynı zamanda ele alınan (4.10)-(4.12) kısmi türevli integro-diferensiyel denklemi (KTIDD) nin analitik çözümü olup, grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.2. Örnek 4.2’ nin *u(x,y)* çözüm yüzeyi

Örnek 4.3.

$$u_y + u_{yyy} - \int_0^y \sinh(y-t) u_{xxx}(x,t)\,dt = 0 \ , \tag{4.18}$$

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_y(x,0) = x \quad , \quad u_{yy}(x,0) = 0 \, , \tag{4.19}$$

$$u(0,y) = 0 \quad , \quad u_x(0,y) = \sin y \quad , \quad u_{xx}(0,y) = 0 \, , \tag{4.20}$$

biçiminde verilen (4.18)-(4.20) başlangıç sınır değer problemini çözünüz (Dhunde, 2015).

Çözüm:

Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi (4.18) kısmi türevli integro-diferensiyel denkleme ve denklem ile verilen (4.19),(4.20) başlangıç ve sınır değerlerine Laplace dönüşümü uygulanırsa sırasıyla;

$$\begin{aligned} & q\bar{\bar{u}}(p,q) - \bar{u}(p,0) + \left\{ q^3 \bar{\bar{u}}(p,q) - q^2 \bar{u}(p,0) - q\bar{u}_y(p,0) - \bar{u}_{yy}(p,0) \right\} \\ & - \frac{1}{q^2-1} \left\{ p^3 \bar{\bar{u}}(p,q) - p^2 \bar{u}(0,q) - p\bar{u}_x(0,q) - \bar{u}_{xx}(0,q) \right\} = 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p,0) = 0 \, , \qquad \bar{u}_y(p,0) = \frac{1}{p^2}, \qquad \bar{u}_{yy}(p,0) = 0, \\ & \bar{u}(0,q) = 0 \, , \qquad \bar{u}_x(0,q) = \frac{1}{q^2+1}, \quad \bar{u}_{xx}(0,q) = 0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen (4.22) eşitliğindeki değerler (4.21) eşitliğinde yazılır ve buradan $\overline{\overline{u}}(p,q)$ çözülürse;

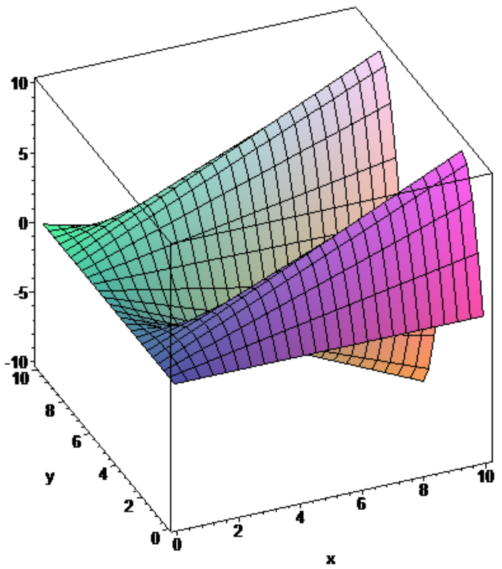
$$q\overline{\overline{u}}(p,q)+q^3\overline{\overline{u}}(p,q)-\frac{q}{p^2}-\frac{1}{q^2-1}p^3\overline{\overline{u}}(p,q)+\frac{p}{\left(q^2-1\right)\left(q^2+1\right)}=0$$

$$\overline{\overline{u}}(p,q)=\frac{1}{p^2\left(q^2+1\right)}, \tag{4.23}$$

bulunur. (4.23) eşitliğinin her iki yanının iki katlı ters Laplace dönüşümü alındığında ise; aynı zamanda ele alınan kısmi türevli integro-diferensiyel denklemi (KTIDD) nin analitik çözümü olan

$$u(x,y)=x\sin y, \tag{4.24}$$

çözüm fonksiyonu elde edilir. Şekil 4.3' te bulunan bu çözüm fonksiyonunun grafiği verilmektedir.



Şekil 4.3. Örnek 4.3' ün *u(x,y)* çözüm yüzeyi

Örnek 4.4.

$$xu_x=u_{yy}+x\sin y+\int_0^y \sin(y-t)u(x,t)dt, \tag{4.25}$$

değişken katsayılı kısmi türevli integro-diferensiyel denklemi,

$$u(x,0)=0\ \ ,u(0,y)=0,\ \ u_y(x,0)=x, \tag{4.26}$$

$$u(1,y)=y, \tag{4.27}$$

başlangıç ve sınır koşulları ile verilen (4.25)-(4.27) problemini çözünüz (Dhunde, 2015).

Çözüm:

(4.25) denkleminin iki katlı Laplace dönüşümü alınırsa;

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial p}\left\{p\overline{\overline{u}}(p,q)-\overline{u}(0,q)\right\}\\&=q^2\overline{\overline{u}}(p,q)-q\overline{u}(p,0)-\overline{u}_y(p,0)+\frac{1}{p^2(q^2+1)}+\frac{1}{(q^2+1)}\overline{\overline{u}}(p,q),\end{aligned} \tag{4.28}$$

olur. (4.26) koşullarının Laplace dönüşümü ise

$$\overline{\overline{u}}(p,0)=0\ ,\quad \overline{\overline{u}}(0,q)=0\ ,\qquad \overline{\overline{u}}_y(p,0)=\frac{1}{p^2}, \tag{4.29}$$

dir. (4.29)' daki değerler yukarıdaki (4.28) eşitliğindeki yerlerine yazılır ise

$$\frac{\partial}{\partial p}\overline{\overline{u}}(p,q)+\left[\frac{q^4+2q^2+2}{q^2+1}\right]\frac{1}{p}\overline{\overline{u}}(p,q)=\frac{1}{p^3}\frac{q^2}{(q^2+1)}, \tag{4.30}$$

biçiminde ifade edilen bir lineer diferensiyel denkleme ulaşılır. Bu lineer diferensiyel denklemin çözümü ise;

$$\overline{\overline{u}}(p,q)=p^{-\left[\frac{q^4+2q^2+2}{q^2+1}\right]}\left\{\int\frac{1}{p^3}\frac{q^2}{(q^2+1)}p^{\left[\frac{q^4+2q^2+2}{q^2+1}\right]}dp+C\right\},$$

$$\overline{\overline{u}}(p,q)=\frac{1}{p^2q^2}+Cp^{-\left[\frac{q^4+2q^2+2}{q^2+1}\right]}, \tag{4.31}$$

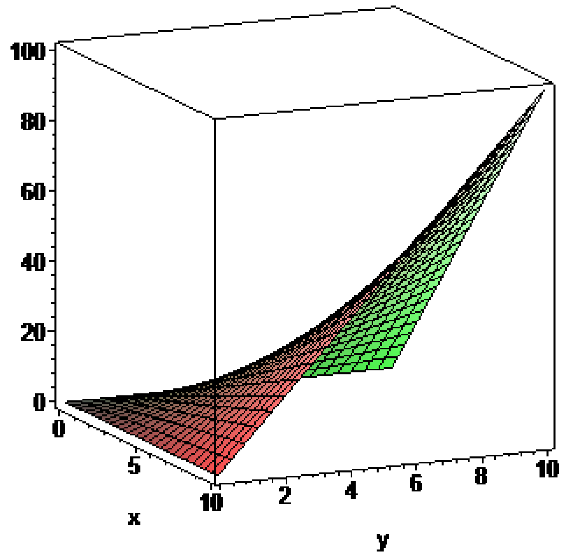
biçimindedir. (4.27) eşiliği ile verilen $\overline{\overline{u}}(1,\mathrm{q})=\frac{1}{q^2}$ sınır koşulu yukarıdaki C katsayısını bulmak için (4.31) de kullanılırsa $C=0$ olduğu görülür. Bu ise (4.30)' un çözümü olan fonksiyonun $\overline{\overline{u}}(1,\mathrm{q})=\frac{1}{q^2}$ koşulunu gerçekleyen çözümünün;

$$\overline{\overline{u}}(p,q)=\frac{1}{p^2q^2}, \tag{4.32}$$

olması demektir. Elde edilen son eşitliğin ters iki katlı Laplace dönüşümü alındığında ise, (4.35)-(4.37) başlangıç sınır değer probleminin aynı zamanda analitik çözümü olan,

$$u(x,y)=xy, \tag{4.33}$$

çözümüne ulaşılır. Bu çözüm fonksiyonunun grafiği ise aşağıdaki Şekil 4.4' deki gibidir.



Şekil 4.4. Örnek 4.4' nin *u(x,y)* çözüm yüzeyi

4.2. Kısmi Türevli İntegro-Diferensiyel Denklem İçin Bir Uygulama

Bu bölümde;

$$u_{yy} - u_{xx} + u + \int_0^x \int_0^y g(x-\alpha, y-\beta) u(\alpha,\beta) d\alpha d\beta = f(x,y) \tag{4.34}$$

genel formu ile verilen kısmi türevli integro-diferensiyel denklemi ele alınacaktır (Eltayeb ve Kiliçman, 2013).

Ele alınacak olan bu problem de; Bölüm 4.1' de ele alınan problem gibi bir kısmi türevli integro-diferensiyel denklem (KTIDD) olsa da içerdiği iki katlı integralden dolayı farklılık göstermektedir. Bu nedenle ayrı bir başlık altında sunulmuştur.

Denklemin sınır koşulları,

$$u(0,y) = f_1(y), \quad u_x(0,y) = f_2(y) \ , \tag{4.35}$$

eşitlikleri ile, başlangıç koşulları ise

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u_y(x,0) = g_2(x) \ , \tag{4.36}$$

biçiminde verilmiş olsun. (4.34) denkleminin iki katlı Laplace dönüşümü ve (4.35), (4.36) koşullarının da Laplace dönüşümü alınır, denklemin dönüşümünden elde edilen eşitlikte başlangıç koşullarının iki katlı Laplace dönüşümünden elde edilen değerler yazılıp, bulunan cebirsel denklemden $\overset{=}{u}(p,q)$ çözülürse,

$$\overset{=}{u}(p,q)=\frac{p/\overline{g}_1(p)+1/\overline{g}_2(p)}{\left(p^2-q^2+1+\overset{=}{g}(p,q)\right)}-\frac{p/\overline{f}_1(q)-1/\overline{f}_2(q)+\overset{=}{f}(p,q)}{\left(p^2-q^2+1+\overset{=}{g}(p,q)\right)}, \tag{4.37}$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanının ters iki katlı Laplace dönüşümü alınırsa

$$u(x,y)=£_2^{-1}\left\{\frac{p/\overline{g}_1(p)+1/\overline{g}_2(p)}{\left(p^2-q^2+1+\overset{=}{g}(p,q)\right)}-\frac{p/\overline{f}_1(q)-1/\overline{f}_2(q)+\overset{=}{f}(p,q)}{\left(p^2-q^2+1+\overset{=}{g}(p,q)\right)}\right\}, \tag{4.38}$$

formülü elde edilir. Bu formül yukarıdaki (4.34)-(4.36) problemi biçiminde verilen tüm kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin (*iki katlı integral ihtiva eden*) çözümünü veren genel formüldür. Aşağıdaki örnekte bu algoritmanın nasıl uygulanacağı gösterilmiştir.

Örnek 4.5.

$$u_{yy}-u_{xx}+u+\int_0^x\int_0^y e^{x-\alpha+y-\beta}u(\alpha,\beta)d\alpha d\beta=e^{x+y}+xye^{x+y} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} &u(x,0)=e^x, \qquad u_y(x,0)=e^x,\\ &u(0,y)=e^y, \qquad u_x(0,y)=e^y, \end{aligned} \tag{4.40}$$

(4.39) ile verilen kısmi türevli integro-diferensiyel denkleminin (4.40) koşullarını gerçekleyen çözümünü bulunuz (Eltayeb ve Kiliçman, 2013).

Çözüm:

Yukarıda Bölüm 4.2 ‘ de anlatıldığı gibi ve Bölüm 3’ de ayrıntılı bir şekilde verilen iki katlı integralin iki katlı Laplace dönüşümü için konvolüsyon teoremi dikkate alınarak (4.39) denklemine iki katlı Laplace dönüşümü, (4.40) başlangıç ve sınır değerlerine de Laplace dönüşümü uygulanır, elde edilen değerler yerlerine yazılır ise;

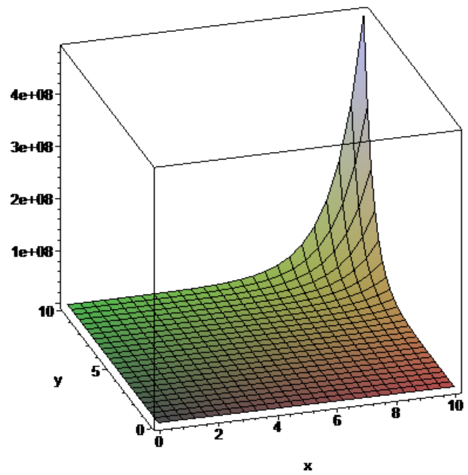
$$\begin{aligned} &\left(q^2-p^2+1+\frac{1}{(p-1)(q-1)}\right)\overset{=}{u}(p,q)\\ &=\frac{1}{(p-1)(q-1)}+\frac{q}{p-1}+\frac{1}{p-1}-\frac{p}{q-1}-\frac{1}{q-1}+\frac{1}{(p-1)^2(q-1)^2}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

olur. Bu eşitlikten $\overset{=}{u}(p,q)$ çözülürse,

$$\overset{=}{u}(p,q)=\frac{1}{(p-1)(q-1)}, \tag{4.42}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin iki katlı ters Laplace dönüşümü alındığında ise aranan çözüm fonksiyonunu aşağıdaki gibi bulunur, grafiği de aşağıdaki Şekil 4.5. teki gibidir.

$$u(x,y)=e^{x+y}. \tag{4.43}$$



Şekil 4.5. Örnek 4.5' in *u(x,y)* çözüm yüzeyi

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında; ilk olarak İki katlı Laplace dönüşümünün tanımı, özellikleri, bazı elemanter fonksiyonlara uygulanması ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Bir katlı Laplace dönüşümü; başlangıç koşulları ile beraber verilen adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin nasıl bulunabileceğini lisans seviyesinde matematik kültürüne sahip olan herkes tarafından gayet iyi bilmektedir. Bu çalışma ile; benzer prosedürün İki katlı Laplace dönüşümü ile kısmi türevli integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde de etkin ve kolay bir yöntem olduğu gösterilmeye çalışılmıştır. Gerçekten; iki katlı Laplace dönüşüm yardımıyla bir kısmi türevli integro-diferensiyel denklem cebirsel bir denkleme dönüştürülmekte, elde edilen cebirsel denklem çözülüp, tekrar iki katlı ters Laplace dönüşümü ile kısmi türevli integro-diferensiyel denklemin tam çözümüne ulaşılabilmektedir. Yöntem uygulanabilirlik ve işlem zorluğu açısından gayet basit ve kolaydır. Yöntemin daha önce uygulanmadığı problemler için geliştirilip, başka problemlere de uygulanabilirliğinin veya başka metotlarla beraber kullanılarak hibrid çözüm prosedürlerinin araştırılması bilim dünyası ve bilim insanları için önemli olacaktır.

KAYNAKLAR

Basheer, H., 2015, The double Laplace transform, Ph.D.

Laplace, P. S., 1814, Théorie analytique des probabilités, Mme. Ve. Courcier.

Debnath, L., 2016, The Double Laplace Transforms and Their Properties with Applications to Functional, Integral and Partial Differential Equations, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2 (2), 223-241.

Dehghan, M., 2006, Solution of a partial integro-differential equation arising from viscoelasticity, *International Journal of Computer Mathematics*, 83 (1), 123-129.

Dhunde, R., M. Bhondge, N. ve R. Dhongle, P., 2013, Some Remarks on the Properties of Double Laplace Transforms, 293-295.

Dhunde, R., 2015, Solving Partial Integro-Differential Equations using Double Laplace Transform Method, 101-104.

Dhunde, R. ve Waghmare, G., 2017, Double Laplace Transform in Mathematical Physics, 14-20.

Ditkin, V. A. e. ve Prudnikov, A. P., 1962, Operational calculus in two variables and its applications, Pergamon Press.

Eltayeb, H., Kılıçman, A. ve Agarwal, R. P., 2012, An analysis on classifications of hyperbolic and elliptic PDEs, *Mathematical Sciences*, 6 (1), 47.

Eltayeb, H. ve Kiliçman, A., 2013, A note on double Laplace transform and telegraphic equations, *Abstract and applied analysis*.

Humbert, P., 1934, Le calcul symbolique a deux variables, *Compt. Rend. Acad. Sci.(Paris)*, 199, 657-660.

Kilicman, A. ve Eltayeb, H., 2008, A note on the classifications of hyperbolic and elliptic equations with polynomial coefficients, *Applied Mathematics Letters*, 21 (11), 1124-1128.

Lakshmikantham, V. ,1995,Theory of Integro-Differential Equations, Taylor & Francis.

Ross, S. L., 1984, Differential Equations. New York: John Wiley&Sons, Inc.

Sachs, E. W. ve Strauss, A. K., 2008, Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance, *Applied Numerical Mathematics*, 58 (11), 1687-1703.

Sneddon, I. N., 1974, The Use of Integral Transforms, Tata McGraw-Hill.

Spiegel, M. R., 1965, Laplace transforms, McGraw-Hill New York.

Thorwe, J. ve Bhalekar, S., 2012, Solving Partial Integro-Differential Equations Using Laplace Transform Method, 101-104.

Van der Pol, B. ve Niessen, K. F., 1931, XXVII. On simultaneous operational calculus, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 11 (69), 368-376.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Gamze KAYA
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Adana 24/07/1989
Telefon	**:**	555 2886398
Faks	**:**	
e-mail	**:**	kayagamze01@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Adana Ticaret Odası Anadolu Lisesi**	**2007**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi**	**2011**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi**	**2018**
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014	İstanbul Maltepe Uğur Anadolu Lisesi	Öğretmen
2016	Adana Birey Okulları	Öğretmen
2018	Adana Altıneller Okulları	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

O. ÖZKAN, **G. KAYA**, *AN ANALYTICAL APPROACH FOR SOLVING PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS*, ICMSA2018 International Conference on Mathematical Studies and Applications, 4-6 October 2018, Karaman, TURKEY