

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAPILARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ KONTROLÜ



**DOKTORA TEZİ
Rasim HATİPOĞLU**

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

NİSAN 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAPILARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ KONTROLÜ

DOKTORA TEZİ
Rasim HATİPOĞLU
(501032104)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09 Şubat 2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Nisan 2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Necla KADIOĞLU (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Faruk YÜKSELER (YTÜ)
Doç. Dr. Abdullah GEDİKLİ (İTÜ)
Doç. Dr. Şenol ATAĞLU (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Deniz GÜNEY (YTÜ)

NİSAN 2011



Aileme,



ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana her türlü yardımı yapan ve destekleyen, bana yol gösteren, bilgi ve deneyimlerine sürekli başvurduğum, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Necla KADIOĞLU 'na şükranlarımı sunarım. Çalışmamın altı aylık dönemlerinin sonunda toplanarak bana yol gösteren ve yapılanları değerlendirdiğimiz tez izleme jürisindeki hocalarımız Sayın Prof. Dr. Faruk YÜKSELER ve Sayın Doç. Dr. Abdullah GEDİKLİ 'ye göstermiş oldukları ilgi, verdikleri destek ve yaptıkları katkılardan dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, bana her türlü maddi ve manevi desteği sağlayan, hatalarımı bağışlayan anne ve babama, bana her zaman destek olan kardeşlerime en derin duygularla hürmetlerimi sunarım.

Nisan 2010

Rasim HATİPOĞLU
İnşaat Yüksek Mühendisi



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ŞEKİL LİSTESİ	xi
SEMBOL LİSTESİ	xiii
ÖZET	1
SUMMARY	3
1. GİRİŞ	5
2. TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN TİTREŞİMİ	9
2.1 Tek Serbestlik Dereceli Bir Sistemin Zorlanmış Titreşimi	10
2.2 Genel Halde Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Sönümlü Titreşimi	14
2.2.1 Sönümlü titreşimde kritik sönüm durumu	16
2.2.2 Sönümlü titreşimde kuvvetli sönüm durumu	18
2.2.3 Sönümlü titreşimde zayıf sönüm durumu	20
3. ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN TİTREŞİMİ	23
3.1 Öz Değer Probleminin Çözümü	24
3.2 Çok Serbestlik Dereceli Sistemde Sönüm Elemanı Olması Durumu	26
3.3 Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerde Modların Ayırıklaştırılabildiği Durumlar	30
3.3.1 Kütle ve sönümlerin aynı olması durumu	31
3.3.2 Kütlelerin farklı, sönümlerin aynı olması durumu	38
3.3.3 Kütlelerin aynı sönümlerin farklı olması durumu	41
3.3.4 Kütlelerin aynı sönümlerin farklı olması probleminin yaklaşık çözümü	45
3.4 Ortogonal Q Matrisi Bulunması	47
3.5 Çok Serbestlik Dereceli Sisteme Örnekler	47
3.5.1 Kat kütlelerinin, sönümlerin ve rijitliklerin eşit olması durumu	49
3.5.2 Kat kütlelerinin farklı ancak kat sönümlerinin bunlarla orantılı olması durumu	53
3.5.3 Kütlelerin farklı olması ve orantısız sönüm olması durumu	57
3.5.4 Problemin kesin çözümü	64
3.6 Orantısız Sönüm Durumuna Örnek Problemler	67
3.6.1 Orantısız sönüm durumu gösteren örnek problem 1	67
3.6.2 Orantısız sönüm durumu örnek problem 2	68
3.6.3 Orantısız sönüm durumu örnek problem 3	69
3.7 Üç Serbestlik Dereceli Sistemin Kesin Çözümü	70
4. YAPIDA RİJİTLİK MATRİSİNİN DEĞİŞMESİ DURUMU	75
5. KONTROL ÇEVİRİMİ OLUŞTURULMASI	95
5.1 Açık Çevrim	95
5.2 Kapalı Çevrim	100
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	111

KAYNAKLAR	113
ÖZGEÇMİŞ	115



ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1: Şekil 4.1 sisteminin başlangıç yüklemesinde kat rijitlikleri.	76
Çizelge 4.2: Şekil 4.1 sisteminde 1. mafsall oluşturduğu sıradaki kat rijitlikleri.....	76
Çizelge 4.3: Şekil 4.1 sisteminde 2. mafsall oluşturduğu sıradaki kat rijitlikleri.....	76
Çizelge 4.4: Şekil 4.1 sisteminde 3. mafsall oluşturduğu sıradaki kat rijitlikleri.....	77
Çizelge 4.5: Şekil 4.1 sisteminde 4. mafsall oluşturduğu sıradaki kat rijitlikleri.....	77
Çizelge 4.6: Şekil 4.1 sisteminde 5. mafsall oluşturduğu sıradaki kat rijitlikleri.....	77
Çizelge 4.7: Şekil 4.1 sisteminde rijitlik değişimleri.	78

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: Tek serbestlik dereceli sistem.	9
Şekil 2.2: Tek serbestlik dereceli sönümlü sistem.	14
Şekil 3.1: İki serbestlik dereceli basit sistem (Cropper ve Gupta, 2006).....	30
Şekil 3.2: Ortogonal Q matrisi bulan fonksiyona ait program akış diyagramı.	48
Şekil 3.3: Üç serbestliği olan basit sistem.	49
Şekil 3.4: Eşit kütle sönüm olan üç serbestlikli sistem.	50
Şekil 3.5: Farklı kütle ve sönümü olan üç serbestlikli sistem.	53
Şekil 3.6: Farklı kütle ve orantısız sönümü olan üç serbestlikli sistem.	57
Şekil 3.7: Şekil 3.6 'daki sisteme etkiyen dış yükün zamanla değişim grafiği.	63
Şekil 3.8: Şekil 3.6 sisteminin her üç serbestliğine ait yer değiştirme - zaman grafiği.	63
Şekil 3.9: Şekil 3.6'daki sistemin birinci serbestliğine ait geçiş oranı - frekans grafiklerinin kesin ve yaklaşık çözümler için karşılaştırması	66
Şekil 3.10: Şekil 3.6'daki sistemin ikinci serbestliğine ait geçiş oranı - frekans grafiklerinin kesin ve yaklaşık çözümler için karşılaştırması	67
Şekil 3.11: Şekil 3.6'deki sistemin üçüncü serbestliğine ait geçiş oranı - frekans grafiklerinin kesin ve yaklaşık çözümler için karşılaştırması	67
Şekil 3.12: Farklı kütle ve orantısız sönümü olan üç serbestlikli sistem.	68
Şekil 3.13: Orantısız sönüm durumu örnek problem 1 'in birinci serbestlik için kesin ve yaklaşık çözümlerinin geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması	68
Şekil 3.14: Problem 1- İkinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması	69
Şekil 3.15: Problem 1- Üçüncü serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması	69
Şekil 3.16: Farklı kütle ve orantısız sönümü olan üç serbestlikli sistem.	70
Şekil 3.17: Problem 2- Birinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması	70
Şekil 3.18: Problem 2- İkinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması	71
Şekil 3.19: Problem 2- Üçüncü serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.....	71
Şekil 3.20: Problem 3- Birinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması	72
Şekil 3.21: Problem 3- İkinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması	72
Şekil 3.22: Problem 3- Üçüncü serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.....	73

Şekil 3.23: Problem 1- Birinci serbestlik için kesin ve yaklaşık çözümlerde yerdeğiştirmelerin karşılaştırması.....	74
Şekil 3.24: Problem 1- İkinci serbestlik için kesin ve yaklaşık çözümlerde yerdeğiştirmelerin karşılaştırması.....	74
Şekil 3.25: Problem 1- Üçüncü serbestlik için kesin ve yaklaşık çözümlerde yerdeğiştirmelerin karşılaştırması.....	74
Şekil 4.1: 5 katlı düzlem çerçeve ve etkiyen zamana bağlı kat yükleri.	75
Şekil 4.2: Şekil 4.1 'deki sistemde yük artımıyla sırasıyla oluşan plastik mafsallar.	78
Şekil 4.3: 5 katlı düzlem çerçeve için idealleştirilmiş sistem.	79
Şekil 4.4: a_0 ve a_1 katsayılarının zamana göre değişimi.	85
Şekil 4.5: w açısız frekanslarının zamana göre değişimi.	85
Şekil 4.6: ξ sönüm oranlarının zamana göre değişimi.	86
Şekil 4.7: Program akış diyagramı.	91
Şekil 4.8: $\xi = 0.02$ alındığında kat yer değiştirmelerinin zamana göre değişimi. .	92
Şekil 4.9: $\xi = 0.05$ alındığında kat yer değiştirmelerinin zamana göre değişimi. .	92
Şekil 4.10: $\xi = 0.2$ alındığında kat yer değiştirmelerinin zamana göre değişimi....	93
Şekil 4.11: $\xi = 0.02$ alındığında ve a_0 ve a_1 katsayıları sabit tutulduğunda kat yer değiştirmelerinin zamana göre değişimi.....	93
Şekil 5.1: Açık çevrim blok diyagramı	98
Şekil 5.2: Açık çevrim blok diyagramı	98
Şekil 5.3: Açık çevrimde kat yer değiştirmelerinin zamanla değişimi (0-100sn aralığında).....	100
Şekil 5.4: Açık çevrimde kat yer değiştirmelerinin zamanla değişimi (0-20sn aralığında).....	100
Şekil 5.5: Kapalı çevrim blok diyagramı.	101
Şekil 5.6: $k_2 = k$ ve $c_2 = c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-40 sn).	106
Şekil 5.7: $k_2 = k$ ve $c_2 = c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).	106
Şekil 5.8: $k_2 = k$ ve $c_2 = 3c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-20 sn).	107
Şekil 5.9: $k_2 = k$ ve $c_2 = 3c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).	107
Şekil 5.10: $k_2 = k$ ve $c_2 = 8c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-20 sn).	108
Şekil 5.11: $k_2 = k$ ve $c_2 = 8c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).	108
Şekil 5.12: $k_2 = k$, $c_2 = c$ ve $\mathbf{X0} = \frac{1}{2}\mathbf{X0}$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-20 sn).	109
Şekil 5.13: $k_2 = k$, $c_2 = c$ ve $\mathbf{X0} = \frac{1}{2}\mathbf{X0}$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).	109
Şekil 5.14: $k_2 = k$, $c_2 = c$ ve $\mathbf{X0} = \frac{1}{8}\mathbf{X0}$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-20 sn).	110
Şekil 5.15: $k_2 = k$, $c_2 = c$ ve $\mathbf{X0} = \frac{1}{8}\mathbf{X0}$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).	110

SEMBOL LİSTESİ

\mathbf{M}	: $n \times n$ boyutunda kütle matrisi
\mathbf{K}	: $n \times n$ boyutunda rijitlik matrisi
\mathbf{C}	: $n \times n$ boyutunda sönüm matrisi
$\mathbf{F}(t)$: Yük vektörü
$\mathbf{x}(t)$: Yer değiştirme vektörü
$\dot{\mathbf{x}}(t)$: Yer değiştirme vektörünün zamana göre birinci türevi, hız vektörü
$\ddot{\mathbf{x}}(t)$: Yer değiştirme vektörünün zamana göre ikinci türevi, ivme vektörü
$f(t)$: Yük fonksiyonu
$x(t), v(t)$: Tek serbestlik dereceli sistemde yer değiştirme
$\dot{x}(t), \dot{v}(t)$: Tek serbestlik dereceli sistemde hız
$\ddot{x}(t), \ddot{v}(t)$: Tek serbestlik dereceli sistemde ivme
w	: Doğal titreşim frekansı
W	: Wronskian matrisi
I	: Atalet momenti
E	: Elastisite modülü
k	: Yay sabiti
c	: Sönüm sabiti
ξ	: Sönüm oranı
λ_n	: Öz değerler
\mathbf{Q}	: \mathbf{K} matrisini diyagonalize eden orthogonal matris
\mathbf{K}_n	: Yardımcı rijitlik matrisleri
\mathbf{C}_n	: Yardımcı sönüm matrisleri
a, a_0	: Rijitlik oranı sönüm sabiti
b, a_1	: Kütle oranı sönüm sabiti
T_i	: Geçiş oranı (transmissibility ratio)
$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$: Yatay kat deplasmanları
k_1, k_2, \dots, k_n	: n serbestliğine ait yay sabiti
c_1, c_2, \dots, c_n	: n serbestliğine ait sönüm sabiti
$\bar{\mathbf{X}}(s)$: $\mathbf{X}(t)$ Yer değiştirme vektörünün Laplace dönüşümü
$\bar{\mathbf{F}}(s)$: $\mathbf{F}(t)$ Yük vektörünün Laplace dönüşümü
$\bar{\mathbf{Y}}(s)$: Yardımcı yer değiştirme matrisi
$\bar{\mathbf{G}}(s)$: Açık çevrimde çarpım matrisi
L	: Laplace operatörü



YAPILARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ KONTROLÜ

ÖZET

Bu çalışmanın başlangıcında amaç dışarıdan gelen dinamik yük etkisindeki yapıların davranışlarını yapıya konan bir sönüm ya da yay elemanı yardımıyla kontrol altında tutulmasıydı. Bunun için de ilk olarak yapının dinamik yükler altındaki davranışı incelenmiştir. Yapının dinamik yükler altındaki davranışı incelenirken karşılaşılan ilk problem yapının sönüm matrisinin belirlenmesidir. Bir sistemde kütle ve rijitlik matrisleri statik ve kesin yöntemlerle bulunabilirken, sönüm matrisi ise ancak dinamik testler yardımıyla bulunabilir.

Sönüm matrisinin bulunmasında çeşitli dinamik testler yerine bu çalışmada sönüm matrisinin bazı modlar için sönüm oranının belli olduğu varsayımına dayanarak, sistemin rijitlik ve kütle matrislerinin bilindiğinden yola çıkılıp bazı kabuller yapılarak sönüm matrisi bulunmuştur. Çok serbestlik dereceli bir sistemin dinamik etkiler altındaki davranışının incelenmesinde karşılaşılan diğer bir problem ise sistemin modlarının ayrıklaştırılmasıdır. Sistemde sönüm elemanı bulunmadığı durumlarda rijitlik matrisinin öz değerleri bulunarak ayrıklaştırma yapılabilir ancak sistemde bir sönüm elemanı olduğu durumda ise ancak belirli varsayımlar altında ayrıklaştırma yapılabilir. Çok serbestlikli bir yapı sisteminin ayrıklaştırılabilmesi için sönüm matrisinin sistemin rijitlik matrisi ve kütle matrislerinin bir polinomu olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Genel durumda rijitlik matrisini diyagonalize etmek için kullanılan ortogonal bir matris sönüm matrisini de diyagonalize etmez. Bu çalışmada sistemi ayrıklaştırma amacıyla sönüm matrisi için yapılmış bu varsayımların sonuçlar üzerindeki etkisinin ne derecede olabileceği de araştırılmıştır. Çok serbestlik dereceli bir sistemde kesin ve yaklaşık çözümler yapılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır. Düşük sönüm katsayıları için kesin ve yaklaşık çözümler arasında belirgin bir fark görülmemiştir.

Bir yapı dinamik dış yükler altındayken aynı zamanda kalıcı deformasyonlar da yapabilir. Bir yapıda kalıcı deformasyonlar meydana geldiğinde yapının rijitlik matrisi değişecektir, buna bağlı olarak sönüm matrisinde de değişim olacaktır ve yapının dinamik davranışı değişecektir. Bu durumu incelemek için ilk olarak yapıya etkiyen yük aşamalı olarak artırılmış ve hangi statik yük seviyelerinde yapıda plastik mafsallara oluştuğuna bakılmıştır. Bu durumlarda indirgenmiş sistemin rijitlik matrisleri bulunmuştur. Daha sonra sistemin dinamik davranışını incelemek için iki plastik mafsallı oluşumu arasında sistemin rijitlik matrisinin sabit olacağı düşünülmüş ve artan bir dinamik yük etkisi altındayken yatay kuvvetin plastik mafsallara oluştuğu seviyeyi geçtiğinde sistemin rijitlik matrisinin değiştiği dikkate alınmış ve yatay kuvvetler aralığında her defasında başlangıç koşulları bir önceki aralığın son değerleri alınarak sistem ayrıca çözülmüştür. Rijitlik matrisinin yeni durumuna göre sönüm matrisinin yeniden hesabı gerekmektedir. Ancak bu hesap sırasında her defasında rijitlik matrisini diyagonalleştirilen bir ortogonal matris bulunması sistemin serbestlik

derecesi büyüdükçe hesap zamanını arttıran bir iştir. Ayrıca rijitlik matrisi değiştikten sonra sönüm matrisinin yeni durumunu bulmak için bir takım yaklaşımlarda bulunulabilir. Dinamik hesap sırasında rijitlik matrisinin değiştiği ancak sönüm matrisinin sabit kaldığı kabul yapılabilir ya da sönüm matrisinin kütle ve rijitlik matrisleriyle olan oranının sabit kaldığı kabul edilebilir. Bu nedenle rijitlik matrisinin değiştiği durumlarda sönüm matrisinin hesabı için uygulanabilecek bu farklı yöntemlerin karşılaştırması yapılmıştır.

Son olarak çok serbestlik dereceli bir sistemde orjinal sistemde meydana gelecek deplasmanların engellenmesi amacıyla sisteme bir kontrol sönümü, bir başlangıç kontrol yer değiştirmesi ve ilave bir yay sistemi eklenmiştir. Sistemin tümü için geri beslemeli bir kapalı çevrim oluşturulmuş ve sistemin cevap matrisinin Laplace dönüşümü elde edilmiştir. Bu ifadenin ters Laplace dönüşümü alınarak her serbestliğin zamanla değişim eğrileri bulunmuştur. Kontrol sönüm katsayısı arttığı oranda başlangıç yer değiştirmesinin de arttığı, kuvvetli sönüm halinde maksimum genlikte büyüme olduğu gözlemlenmiştir ancak hareket hızla sönmektedir. Zayıf sönümlerde maksimum yer değiştirmenin küçüldüğu görülmüştür ancak sönüm hızı yavaşlar.

CONTROL OF DYNAMIC BEHAVIOR OF STRUCTURES

SUMMARY

The purpose of this study is to control the dynamic behavior of a structure under the effects of external dynamic loads using an auxiliary damping or a spring element. For this purpose at first, an ordinary structure's dynamic behavior has been studied. The first problem had been encountered was to identify the damping matrix of the structure. In a structure the stiffness and the mass matrices can be found using static methods accurately whereas the damping matrix has to be found from the modal properties of a structure.

In this study instead of finding modal properties using dynamic tests to identify damping matrix, it is assumed that some of the modal damping ratios are known and the damping matrix has been calculated from the mass and the stiffness matrix. Another problem encountered in the study of a multiple degree of freedom system is modal uncoupling. Uncoupling can be done using eigenvalues of stiffness matrix, however some assumptions has to be made when damping considered. The uncoupling of a multiple degree of freedom system is possible if damping matrix is expressed as a polynomial of stiffness matrix. In general, an orthogonal matrix that diagonalizes stiffness matrix does not diagonalize damping matrix. In this study the effects of the assumptions been made to uncouple the systems has been investigated. A multiple degree of freedom system has been solved using approximate and direct methods, and the results has been compared. For the low modal damping ratios no significant difference found between the approximate and the direct solutions.

A structure can make plastic deformations under increasing dynamic external loads. The stiffness matrix of a structure changes in parallel with the damping matrix when a plastic deformation occurs, consequently dynamic behavior of the structure changes. To study this behaviour, the static lateral load on the structure has been increased incrementally, and the static load levels in each interval in which the plastic hinges occur has been noted. The reduced system's stiffness matrix has been found in each interval. To investigate the system's dynamic behavior it is assumed that the stiffness matrix of the system doesn't change between states where plastic hinges occur, and under an incremental dynamic load, it is considered that system stiffness matrix changes when lateral load passes a static load level in which a plastic hinge occurs. When the stiffness matrix changes, the system solved again by taking the initial conditions as the latest value of the previous interval. It is necessary to recalculate the damping matrix according to the new state of the stiffness matrix. However calculating an orthogonal matrix that diagonalizes the stiffness matrix each time is a time consuming job in a large system since the stiffness matrix changes after each new plastic hinge. Some assumptions can be made to find the new damping matrix when stiffness matrix changes. In the dynamic analysis it may be assumed that the damping matrix doesn't change or the proportion between the damping matrix and the

stiffness and mass matrix does not change. The different methods for the calculation of damping matrix have been investigated.

As a last step, to control displacements in a multiple degree of freedom system, a control damping matrix and a control spring matrix has been added to the system along with an initial control displacement. A closed cycle system with a feedback has been formed for the whole system and the Laplace transform of the system's response matrix formulated. By calculating the inverse transform of that, the displacement versus time curves found for each degree of freedom. It is observed that when the control damping ratio is increased, the initial displacement of the system also increases and it is also observed an increase in the peak values in the over damped system where the motion damped rapidly. The under damped system's peak displacement values decrease but the motion damped slowly.



1. GİRİŞ

Tüm yapılar serbest titreşimleri sırasında yapı elemanları, bağlantıları veya yapısal olmayan elemanlar arasındaki sürtünmeden dolayı enerjiyi bir miktar yutarlar. Serbest titreşim sırasında yutulan bu enerji yapının sönümü olarak isimlendirilir. Bir yapının dinamik davranışını incelerken karşılaşılan en önemli sorunlardan birisi yapının sönümünün doğru olarak modellenebilmesidir. Yapının rijitlik ve kütle özellikleri yapının geometrik yapısı ve malzeme özelliklerinden bulunabilirken sönümünü belirlemek için kesin bir yöntem yoktur. Pek çok yapının sönümünü belirlemek oldukça zordur. Burada amaç bir yapının dışarıdan gelen etkiler altında oluşan zorlanmış titreşimlerinin bulunması ve istenen büyüklüğü aşarsa bu titreşimlerin genliklerinin kontrol altına alınmasıdır. Ancak bir yapıda birden fazla serbestlik derecesi vardır ve hareket denkleminde her serbestliğe ait terim görünür.

Yapıların titreşimlerinin incelenmesinde literatürde görünen ilk adım hareket denkleminin oluşturduğu denklem sisteminin her bir denklemde sadece bir serbestliğin görüneceği şekilde ayrıştırılmasıdır. Bu işlemin yapıldığı farz edilir ise ayrıştırılan denklemlerin her biri tek serbestlikli sönümlü bir zorlanmış titreşim denklemdir. Dolayısıyla bu çalışmada önce bu problem kısaca incelenmiştir. Ayrıştırma işlemi ağırlıklı olarak sistemin rijitlik matrisinin diyagonalize edilmesine dayanır. Bu işlem için de önce rijitlik matrisinin öz değerleri bulunur her özdeğere karşı gelen normalize edilmiş öz vektörler bir orthogonal bir Q matrisi oluşturur. Bu Q matrisi rijitlik matrisini diyagonalize eder. Ancak yapı dinamiğinde bir yapı her katta bir serbestlik olacak şekilde idealize edilir. Kat kütlelerinin bir noktada toplandığı kabul edilmektedir. İki katı temsil eden kütleler arasında bir yay olduğu ve yine her kat kütlelerinin belli bir sönüm katsayısı ile hareket ettiği kabulü de yapılır. Sistemde sadece yatay deplasmanlar göz önüne alınmaktadır. İdealize edilmiş sisteme ait yay katsayıları gerçek sistemde statik yükler altında yatay kat deplasmanları hesaplanarak bulunabilir. Burada başlangıçta idealize edilmiş sistem üzerinde çalışılmıştır.

Bu sistemde rijitlik matrisi Q ortogonal matrisi ile diyagonalleştirilirken eğer aynı durum C sönüm matrisi için de geçerli ise bu duruma klasik sönüm adı verilir. Eğer bu durum geçerli değilse klasik olmayan sönüm söz konusudur. Ancak ayırıklaştırma işinin sorunsuz yapılabilmesi için başka bir özellik de kullanılabilir. Caughey, sönüm matrisinin rijitlik matrisinin bir polinomu olarak ifade edilebileceğini belirtmiştir. Pratikte bu polinomun iki terimi alınır ve buna Rayleigh sönümü adı verilir. Pratikte yapılan çalışmaların çoğunda klasik sönüm veya Rayleigh sönümünün geçerli olduğu kabul edilmektedir. Ancak ilginç bir durum C sönüm matrisinin aynı Q matrisi ile diyagonalize edilememesi durumunda bile edildiği kabulunun yapılmasıdır. (Gupta, 2006) Bu çalışmaya başlarken diyagonalize edilemeyen bir C matrisinin diyagonalize edilmiş kabul edilmesinin ortaya çıkarabileceği hatalar belirlenmeye çalışılmıştır. Bu problem Cropper (2006) tarafından da incelenmiştir. Seçilen örneklerde C matrisinin diyagonalize edilebildiği kabul edilerek yapılan çözümle sistemin genel çözümü karşılaştırılmıştır ve düşük sönüm oranları için arada bariz bir fark bulunamamıştır. Çalışmanın ikinci bölümü bu mukayeseyi açıklamaktadır.

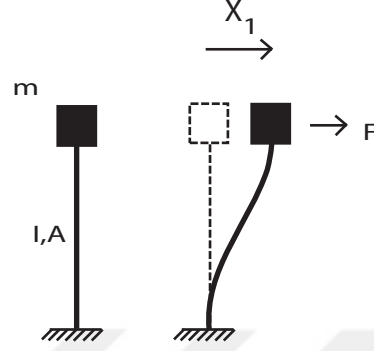
Yapı sistemlerinde ortaya çıkan diğer bir sorun ise artan yükler altında sistemde plastik mafsalların meydana gelmesi ve rijitlik matrisinin değişmesidir. Bu durumda problem nonlinear hale gelir. Bunu inceleyebilmek için dinamik problemi çözmeden önce incelenecek bir yapıya etkiyen statik yükler arttırılarak plastik mafsalların meydana geldiği yük değerleri hesaplanmıştır ve her bir plastik mafsalın oluşumundan sonra kat deplasmanları bulunarak idealize edilmiş sisteme ait yay katsayıları bulunmuştur. Sonuçta yükün şiddetine bağlı olarak yay katsayılarının değişimini belirleyen bir tablo elde edilmiştir. Bundan sonra dinamik yüklemeye yükün zamanla arttığı düşünülmüş ve iki plastik mafsal oluşumu arasında yük artarken rijitlik matrisinin sabit kaldığı kabulü yapılmış ve sistem ardışık iki plastik mafsalın oluşumu arasındaki zamanda çözülmüştür. Bu çözüm bir zaman intervali için geçerlidir. Bir intervalden diğerine geçişte sistem yer değiştirmelerinin ve hızlarının aynı olduğu kabulü yapılarak integral sabitleri de her interval için belirlenmiştir. Sonuçta her aralıkta ayrı bir Q matrisi bulunmuş, ayırıklaştırılan sistem çözülmüş ve yine Q matrisi ile geri dönülerek kat deplasmanları zamanın fonksiyonu olarak bulunmuştur. Sonuçta elde edilen eğriler birleştirilerek her kat için deplasman zaman eğrileri çizilmiştir. Seçilen zamanla doğrusal artan bir yüküdür. Benzer bir çalışma Charney (2008) tarafından yapılmış ancak rijitlik matrisinin belirli oranlarda

azaldığı kabulü yapılmıştır. Plastik mafsal oluşumları incelenirken yazılan program SAP2000 paket programı ile de kontrol edilmiştir.

Yapı sistemlerinin kontrolüyle ilgili yapılmış ve bundan sonra yapılması önerilen çalışmalar Housner ve diğ. (1997) tarafından yapılan ortak çalışmada özetlenmiştir. Daha önce de söylendiği gibi buradaki çalışmada ana hedef kat deplasmanlarının belirli bir sınır altında kalması için sisteme bazı ilave elemanlar eklenmesiydi. Bu amaçla seçilen örnek bir yapıda önce sistemin kat deplasmanlarının dışarıdan verilen belli bir yükü zamanla değişimi hesaplanmıştır. Ancak bu işlem yapılırken Laplace dönüşümü kullanılarak sistemin dış yükü cevabı bir açık kontrol çevrimi haline getirilmiştir. Burada sistemin girdisi dış yükün, sistemin cevabı ise kat deplasmanlarının Laplace transformudur. Doğal olarak bu büyüklüklerin çok serbestlik dereceli bir sistemde matris formunda ortaya çıktığını da ayrıca belirtmek gerekmektedir. Girdi-cevap ilişkisi bir G matrisi ile tanımlanmaktadır. Bundan sonra ters Laplace dönüşümü alınarak açık çevrimde kat deplasmanları zamanın fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Bundan sonra da sisteme ilave bir rijitlik matrisi, ilave bir sönüm matrisi ve bir kontrol yer değiştirmesi konularak sistemin sönümünün çabuklaştırılmasına ve genliklerin küçültülmesine çalışılacaktır.



2. TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN TİTREŞİMİ



Şekil 2.1: Tek serbestlik dereceli sistem.

Bir m kütleinin hareket denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.1)$$

Burada x kütleinin yatay hareket mesafesi, \ddot{x} kütleinin yatay ivmesi, m kütle, c sönüm ve k da kütleinin birim hareket etmesini sağlayan çubuk tarafından kütleye aktarılan kuvvettir. Tek kütleli sistemin serbest ve sönümsüz titreşim yaptığı düşünülüğünde bu denklem

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.2)$$

olarak yazılabilir. Bu ikinci derece homojen diferansiyel denklemin çözümü

$$x = De^{i\omega t} \quad (2.3)$$

kabul edilir ve hareket denkleminde yerine konulursa

$$Dm(i^2)\omega^2 e^{i\omega t} = -kDe^{i\omega t} \quad (2.4)$$

$$-m\omega^2 + k = 0 \quad (2.5)$$

bulunur. Buradan

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.6)$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.7)$$

bulunur ve w 'ın bu değeri sistemin doğal frekansı olarak adlandırılır.

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad (2.8)$$

T değerine ise sistemin doğal titreşim periyodu adı verilir.

2.1 Tek Serbestlik Dereceli Bir Sistemin Zorlanmış Titreşimi

Zorlanmış titreşim halinde bir m kütesine ait hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \quad (2.9)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t) = g(t) \quad (2.10)$$

Çözüm için

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad \dot{\mathbf{Y}} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + g(t) \quad (2.12)$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}Y_1 + g(t) \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ -\frac{k}{m}Y_1 + g(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ g(t) \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

yazılır ve burada yardımcı matris C ismini verilirse sistem aşağıdaki eşdeğer birinci mertebe lineer denklem sistemine indirgenir.

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{C}\mathbf{Y} + \varepsilon_n g(t) \quad (2.15)$$

Bu denklemde

$$\varepsilon_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

olarak yazılır. C matrisinin öz değerleri

$$\det [C - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -w^2 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

olarak hesaplanır. Buradan C matrisinin değerleri hesaplanırsa

$$\lambda^2 + w^2 = 0 \quad (2.19)$$

$$\lambda_{1,2} = \mp iw \quad (2.20)$$

olarak bulunur. $\lambda = iw$ için

$$\begin{bmatrix} -iw & 1 \\ -w^2 & -iw \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

olur ve çözümlerse

$$-x_1 iw + x_2 = 0 \quad (2.22)$$

bulunur. $x_1 = 1$ seçilirse

$$x_1 = 1 \quad x = iw \quad (2.23)$$

buradan birinci öz vektör

$$X_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ iw \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

bulunur. Aynı işlem $\lambda = -iw$ için tekrarlanırsa ikinci öz vektör

$$X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -iw \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

olarak bulunur. Denklem takımının homojen çözüm için

$$\dot{Y} = CY \quad (2.26)$$

yazılabilir,

$$P = \{X_1, X_2\} \quad (2.27)$$

olmak üzere

$$\mathbf{Y} = \mathbf{PZ} \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{Z}} \quad (2.28)$$

tanımı yapılırsa

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{CPZ} \quad (2.29)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{CPZ}$$

yazılabilir,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{CP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

olacağı açıktır. \mathbf{Z} ise

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} iw & 0 \\ 0 & -iw \end{bmatrix} \mathbf{Z} \quad (2.31)$$

denklemini sağlar ve

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} c_1 e^{iwt} \\ c_2 e^{-iwt} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

bu denklemin çözümüdür.

$$\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iw & -iw \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Bu çözüm

$$z_1 = c_1 \cos wt \quad (2.34)$$

$$z_2 = c_2 \sin wt \quad (2.35)$$

olarak da yazılabilir. Dolayısıyla homojen denklemin bağımsız çözümleri

$$x_{h1} = \cos wt \quad (2.36)$$

$$x_{h2} = \sin wt \quad (2.37)$$

olarak yazılabilir. (2.15) denklemin özel çözümü ise

$$\dot{Y}_p = \mathbf{C}Y_p + \varepsilon_n g(t) \quad (2.38)$$

yazılır. Özel çözüm

$$Y_p = \mathbf{W}U(t) \quad (2.39)$$

olarak tanımlanabilir. Burada \mathbf{W} Wronskian matrisini gösterir ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -w \sin wt & w \cos wt \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

şeklinde hesaplanır (Cullen, 1979).

$$\mathbf{W}' = \mathbf{C}\mathbf{W} \quad (2.41)$$

olduğu anımsanırsa (2.39) tanımını (2.15) denklemine yerleştirilirse

$$\mathbf{W}U' = \varepsilon_n g(t) \quad (2.42)$$

bulunur. Bu ifadenin açık hali

$$\begin{bmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -w \sin wt & w \cos wt \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g(t) \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

olacaktır. Bu denklem takımı çözümlerse

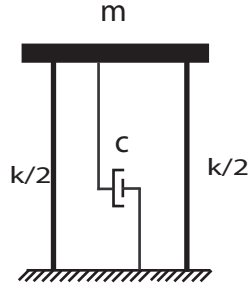
$$U_1 = - \int_0^t \frac{g(\tau)}{w} \sin w\tau d\tau + C_1 \quad (2.44)$$

$$U_2 = \int_0^t \frac{g(\tau)}{w} \cos w\tau d\tau + C_2 \quad (2.45)$$

çözümü elde edilir. Sonuçta

$$x = Y_1 = (U_1 + C_1) \cos wt + (U_2 + C_2) \sin wt \quad (2.46)$$

çözümü elde edilir.



Şekil 2.2: Tek serbestlik dereceli sönümlü sistem.

2.2 Genel Halde Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Sönümlü Titreşimi

Şekil 2.2 'deki gibi bir tek kütleli bir sistem söz konusu ise, burada c katsayısı sönüm olmak üzere, sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.47)$$

Hareket denklemi sadeleştirilirse

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t) = g(t) \quad (2.48)$$

halini alır. Denklemin çözümü özel ve homojen çözümün toplamıdır ve bu durumda

$$x = x_h + x_p \quad (2.49)$$

yazılabilir. Homojen kısmın çözümü için

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.50)$$

denklemi yazılır ve

$$x_h = e^{\alpha t} \quad (2.51)$$

çözümüne gidilirse

$$\alpha^2 + \frac{c}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0 \quad (2.52)$$

yazılır ve α çözülürse

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.53)$$

bulunur. Buradan çözüme gidilmek istenirse 3 ayrı durumla karşılaşılacaktır. Kuvvetli sönüm durumunda

$$\frac{c^2}{2m} > \frac{k}{m} \quad (2.54)$$

olacaktır ve α_1 ve α_2 negatif reel sayılar olacaktır. Bu durumda homojen denklemin çözümü

$$x_h = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} \quad (2.55)$$

olur. Homojen denklemin bağımsız çözümleri

$$x_{h1} = e^{\alpha_1 t} \quad x_{h2} = e^{\alpha_2 t} \quad (2.56)$$

olacaktır. Kritik sönüm durumunda

$$\frac{c^2}{2m} = \frac{k}{m} \quad (2.57)$$

ve

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{c}{2m} \quad (2.58)$$

olur. Bu durumda homojen denklemin çözümü

$$x_h = e^{\alpha_1 t} (c_1 + c_2 t) \quad (2.59)$$

ve homojen denklemin lineer bağımsız çözümleri

$$x_{h1} = e^{\alpha_1 t} \quad x_{h2} = e^{\alpha_1 t} t \quad (2.60)$$

olacaktır. Zayıf sönüm olduğu durumda

$$\frac{c^2}{2m} < \frac{k}{m} \quad (2.61)$$

ve

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (2.62)$$

yazılabilir. Kökler sanaldır ve homojen denklemin çözümü

$$a = \frac{c}{2m} \quad b = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (2.63)$$

olmak üzere

$$x_h = e^{-at} (c_1 \sin bt + c_2 \cos bt) \quad (2.64)$$

olacaktır. Homojen denklemin bağımsız çözümleri ise

$$x_{h1} = e^{-at} \sin bt \quad x_{h2} = e^{-at} \cos bt \quad (2.65)$$

olacaktır.

2.2.1 Sönümlü titreşimde kritik sönüm durumu

Kritik sönüm durumu için (2.60) çözümü dikkate alınır ve Wronskian matrisi oluşturulursa

$$W = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ \alpha e^{\alpha t} & e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

olacaktır.

$$WU' = \epsilon_n g(t) \quad (2.67)$$

çözümü yapılırsa

$$W = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ \alpha e^{\alpha t} & e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g(t) \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

yazılabilir. Çözülürse

$$U'_1 = -g(t)te^{-\alpha t} \quad U'_2 = g(t)e^{-\alpha t} \quad (2.69)$$

$$U_1 = - \int_0^t g(\tau)\tau e^{-\alpha\tau} d\tau \quad U_2 = \int_0^t g(\tau)e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.70)$$

olur. Bu durumda **(2.48)** denkleminin özel çözümü

$$x_p = e^{\alpha t}(U_1 + tU_2) \quad (2.71)$$

genel çözümü de

$$x_p = e^{\alpha t}((U_1 + C_1) + t(U_2 + C_2)) \quad (2.72)$$

olacaktır. İlk olarak **(2.70)** denklemindeki U_1 'in çözümü için

$$I_1 = \int_0^t g(\tau)\tau e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.73)$$

denklemini bulunmalıdır. Bu denklemin herhangi bir $g(t)$ fonksiyonu için çözümünün hesaplanması için bu integral belirli aralıklara bölünür,

$$I_1 = \sum_{j=0}^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\tau)\tau e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.74)$$

$g(t)$ fonksiyonunu herhangi bir aralıktaki değeri

$$g(t) = g(n) \left(1 - \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}\right) + g(n+1) \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (2.75)$$

$$g(t) = g(n) + (g(n+1) - g(n)) \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (2.76)$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki denklem **(2.74)** denklemine konulursa

$$A_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tau e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.77)$$

$$A_1 = \frac{e^{-\alpha t_n} (\alpha t_n + 1) - e^{-\alpha t_{n+1}} (\alpha t_{n+1} + 1)}{\alpha^2} \quad (2.78)$$

$$A_2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\tau - t_n}{t_{n+1} - t_n} \tau e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.79)$$

$$A_2 = \frac{e^{-\alpha t_{n+1}} (-\alpha t_n (\alpha t_{n+1} + 1) + \alpha t_{n+1} (\alpha t_{n+1} + 2) + 2) - e^{-\alpha t_n} (\alpha t_n + 2)}{\alpha^3 (t_n - t_{n+1})} \quad (2.80)$$

olmak üzere integral

$$I_1 = \sum_{j=0}^n g(j)A_1(j) + (g(j+1) - g(j))A_2(j) \quad (2.81)$$

olacaktır. Benzer şekilde U_2 integralinin hesabı için

$$I_2 = \sum_{j=0}^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\tau)e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.82)$$

yazıldığında

$$B_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.83)$$

$$B_1 = \frac{e^{-\alpha t_n} - e^{-\alpha t_{n+1}}}{\alpha} \quad (2.84)$$

$$B_2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\tau - t_n}{t_{n+1} - t_n} e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.85)$$

$$B_2 = \frac{(e^{-\alpha t_{n+1}}(-\alpha t_n + \alpha t_{n+1} + 1) - e^{-\alpha t_n})}{\alpha^2(t_n - t_{n+1})} \quad (2.86)$$

olmak üzere integral

$$I_2 = \sum_{j=0}^n g(j)B_1(j) + (g(j+1) - g(j))B_2(j) \quad (2.87)$$

halini alır. Sonuçta

$$U_1 = -I_1 \quad U_2 = I_2 \quad (2.88)$$

yazılabilir.

2.2.2 Sönümlü titreşimde kuvvetli sönüm durumu

Kritik sönüm durumu için (2.56) çözümü dikkate alınır ve Wronskian matrisini oluşturulursa

$$W = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

olacaktır.

$$WU' = \epsilon_n g(t) \quad (2.90)$$

çözümü yapılırsa

$$W = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g(t) \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

yazılabilir. Çözülürse

$$U_1' = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} g(t) e^{-\alpha_1 t} \quad U_2' = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} g(t) e^{-\alpha_2 t} \quad (2.92)$$

$$U_1 = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_0^t g(\tau) e^{-\alpha_1 \tau} d\tau \quad U_2 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_0^t g(\tau) e^{-\alpha_2 \tau} d\tau \quad (2.93)$$

bulunacaktır. Bu durumda (2.48) denkleminin özel çözümü

$$x_p = e^{\alpha_1 t} U_1 + e^{\alpha_2 t} U_2 \quad (2.94)$$

genel çözüm de

$$x_p = e^{\alpha_1 t} (U_1 + C_1) + e^{\alpha_2 t} (U_2 + C_2) \quad (2.95)$$

olacaktır. İlk olarak (2.93) denklemindeki U_1 'i çözmek için

$$I_3 = \sum_{j=0}^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\tau) e^{-\alpha_1 \tau} d\tau \quad (2.96)$$

denklemini hesaplanmalıdır. Bu denklemin çözümü

$$C_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\alpha_1 \tau} d\tau \quad (2.97)$$

$$C_1 = \frac{e^{-\alpha_1 t_n} - e^{-\alpha_1 t_{n+1}}}{\alpha_1} \quad (2.98)$$

$$C_2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\tau - t_n}{t_{n+1} - t_n} e^{-\alpha_1 \tau} d\tau \quad (2.99)$$

$$C_2 = \frac{e^{-\alpha_1 t_{n+1}} (-\alpha_1 t_n + \alpha_1 t_{n+1} + 1) - e^{-\alpha_1 t_n}}{\alpha_1^2 (t_n - t_{n+1})} \quad (2.100)$$

olmak üzere integral

$$I_3 = \sum_{j=0}^n g(j) C_1(j) + (g(j+1) - g(j)) C_2(j) \quad (2.101)$$

olacaktır. (2.93) denklemindeki U_2 'nin çözümü için ise

$$I_4 = \sum_{j=0}^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\tau) e^{-\alpha_2 \tau} d\tau \quad (2.102)$$

denklemini hesaplamalıdır. Bu denklemin çözümü

$$D_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\alpha_2 \tau} d\tau \quad (2.103)$$

$$D_1 = \frac{e^{-\alpha_2 t_n} - e^{-\alpha_2 t_{n+1}}}{\alpha_2} \quad (2.104)$$

$$D_2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\tau - t_n}{t_{n+1} - t_n} e^{-\alpha_2 \tau} d\tau \quad (2.105)$$

$$D_2 = \frac{e^{-\alpha_2 t_{n+1}} (-\alpha_2 t_n + \alpha_2 t_{n+1} + 1) - e^{-\alpha_2 t_n}}{\alpha_2^2 (t_n - t_{n+1})} \quad (2.106)$$

olmak üzere integral

$$I_4 = \sum_{j=0}^n g(j) D_1(j) + (g(j+1) - g(j)) D_2(j) \quad (2.107)$$

olacaktır. Son olarak

$$U_1 = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} I_3 \quad U_2 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} I_4 \quad (2.108)$$

yazılabilir.

2.2.3 Sönümlü titreşimde zayıf sönüm durumu

Zayıf sönüm durumu için (2.65) çözümü dikkate alınır ve Wronskian matrisi oluşturulursa

$$W = \begin{bmatrix} e^{-at} \sin bt & e^{-at} \cos bt \\ be^{-at} \cos bt - ae^{-at} \sin bt & -ae^{-at} \cos bt - be^{-at} \sin bt \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

olacaktır. Burada

$$WU' = \epsilon_n g(t) \quad (2.110)$$

çözümü yapılırsa

$$U_1' = \frac{1}{b} g(t) e^{at} \cos bt \quad U_2' = -\frac{1}{b} g(t) e^{at} \sin bt \quad (2.111)$$

$$U_1 = \frac{1}{b} \int_0^t g(\tau) e^{a\tau} \cos b\tau \, d\tau \quad U_2 = -\frac{1}{b} \int_0^t g(\tau) e^{a\tau} \sin b\tau \, d\tau \quad (2.112)$$

olacaktır. Bu durumda (2.48) denkleminin özel çözümü

$$x_p = e^{-at} U_1 \sin bt + e^{-at} U_2 \cos bt \quad (2.113)$$

olur, genel çözümü de

$$x = e^{-at} ((U_1 + C_1) \sin bt + (U_2 + C_2) \cos bt) \quad (2.114)$$

olacaktır. İlk olarak (2.112) denklemindeki U_1 'i çözmek için

$$I_5 = \sum_{j=0}^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\tau) e^{a\tau} \cos b\tau \, d\tau \quad (2.115)$$

denklemini hesaplamalıdır. Bu denklemin çözümü

$$E_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{a\tau} \cos b\tau \, d\tau \quad (2.116)$$

$$E_1 = \frac{e^{at_{n+1}} (a \cos(bt_{n+1}) + b \sin(bt_{n+1})) - e^{at_n} (a \cos(bt_n) + b \sin(bt_n))}{a^2 + b^2} \quad (2.117)$$

$$E_2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\tau - t_n}{t_{n+1} - t_n} e^{a\tau} \cos b\tau \, d\tau \quad (2.118)$$

$$E_2 = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2 (t_n - t_{n+1})} [-(a^2 - b^2) e^{at_n} \cos(bt_n)] \quad (2.119)$$

olmak üzere integral

$$I_5 = \sum_{j=0}^n g(j) D_1(j) + (g(j+1) - g(j)) D_2(j) \quad (2.120)$$

bulunur. (2.112) denklemindeki U_2 'nin çözümü ise

$$I_6 = \sum_{j=0}^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\tau) e^{a\tau} \sin b\tau \, d\tau \quad (2.121)$$

denklemini hesaplamalıdır. Bu denklemin çözümü

$$F_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\tau) e^{a\tau} \sin b\tau \, d\tau \quad (2.122)$$

$$F_1 = \frac{e^{at_n} (b \cos (bt_n) - a \sin (bt_n)) + e^{at_{n+1}} (a \sin (bt_{n+1}) - b \cos (bt_{n+1}))}{a^2 + b^2} \quad (2.123)$$

$$F_2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\tau - t_n}{t_{n+1} - t_n} e^{a\tau} \sin b\tau d\tau \quad (2.124)$$

$$F_2 = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2 (t_n - t_{n+1})} [e^{at_{n+1}} \sin (bt_{n+1}) t_n a^3 - e^{at_n} \sin (bt_n) t_{n+1} a^3] \quad (2.125)$$

olmak üzere integral

$$I_6 = \sum_{j=0}^n g(j)F_1(j) + (g(j+1) - g(j)) F_2(j) \quad (2.126)$$

olarak bulunur. Son olarak

$$U_1 = \frac{1}{b} I_5 \quad U_2 = -\frac{1}{b} I_6 \quad (2.127)$$

yazılabilir.

3. ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN TİTREŞİMİ

Bir sistemin çeşitli parçalarının birbirinden bağımsız olarak yapabileceği hareket sayısına serbestlik derecesi adı verilir. Çok serbestlik dereceli bir sistemin sadece yer hareketi altında bulunduğu kabul edilirse hareket denklemi

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = -m\boldsymbol{\epsilon}_n\ddot{v}_G \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada sadece bir doğrultuda yatay hareket ettiği kabul edilmiştir.

m_{ij} = Kütle Matrisi

c_{ij} = Sönüm Matrisi

v_i = Yer Değiştirme Vektörü

$$\boldsymbol{\epsilon}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

k_{ij} = Rijitlik Matrisi

olmak üzere sistemdeki her bir serbestliğin hareket denklemi

$$m_{ij}\ddot{v}_i + c_{ij}\dot{v}_i + k_{ij}v_i = -m_{ij}\boldsymbol{\epsilon}_{n,j}\ddot{v}_G \quad (3.2)$$

olarak yazılabilir. (Clough ve Penzien, 1975, Wilson, 1995) Kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri $n \times n$ boyutlarında ve kütle matrisi diyagonaldir. Serbest titreşim yapan sistemin hareket denklemi sönüm matrisinin çıkartılmasıyla elde edilir ve sönümsüz sistemin serbest titreşim frekansları

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

denkleminin çözümünden bulunabilir. $\mathbf{v} = e^{i\omega t} \mathbf{u}$ çözümüne gidilirse

$$-\mathbf{m}\omega^2 \mathbf{u} + \mathbf{k}\mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

$$[\mathbf{k} - \mathbf{m}\omega^2] \mathbf{u} = 0 \quad (3.5)$$

bulunur. Bu denklem aynı zamanda bir özdeğer problemidir. Burada ω^2 'ler öz değerlerdir ve

$$\det [\mathbf{k} - \mathbf{m}\omega^2] = 0 \quad (3.6)$$

detarminantının sıfıra eşitlenmesiyle çözülür. Bu determinant açılır ve çıkan n'inci derecen denklemde ω_n kökleri bulunur. Bulunan $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ değerleri sistemde olması mümkün serbest titreşim modlarının frekanslarıdır. Bunlara karşı gelen T_1, T_2, \dots, T_n periyotları

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad (3.7)$$

denkleminde hesaplanır. Sistemin serbest titreşim modları ise

$$[\mathbf{k} - \omega_i^2 \mathbf{m}] \varphi_i = 0 \quad (3.8)$$

denkleminin çözümünden elde edilir. Ancak bu yolla sönümsüz sistemlerde hesap yapılabilir.

3.1 Öz Değer Probleminin Çözümü

Sistemin (3.8) ifadesinde görülen denklemi öz değerler $\lambda = \omega^2$ olmak üzere

$$[\mathbf{k} - \lambda \mathbf{m}] \varphi_i = 0 \quad (3.9)$$

$$\left[\frac{1}{\mathbf{m}} \mathbf{k} - \lambda \right] \varphi_i = 0 \quad (3.10)$$

olarak tekrardan yazabilir. Yukarıda görülen özdeğer probleminin bilgisayarda çözümü için kuvvet metodu uygulanmıştır ve ileride karşılaşılabilecek problemlerin çözümü için bir bilgisayar programı yazılmıştır. Metodun aşamalarını aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

İlk olarak bir B_{ij} matrisi elde edilir. Burada $m_i = m_{ii}$ diyagonal olmak üzere

$$B_{ij} = \frac{1}{m_i} k_{ij} \quad (3.11)$$

yazılır. X_i 'ler öz vektörler olmak üzere

$$[B_{ij} - \lambda I_{ij}] X_i = 0 \quad (3.12)$$

yazılabilir. Bulunan bu \mathbf{B} matrisi eşalon forma indirgenir ve ardından matrisin ilk özdeğeri bulunur. Öz değerin bulunması için

$$a_n = \mathbf{X}_n^T \cdot \mathbf{X}_n \quad (3.13)$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}_n \quad (3.14)$$

$$b_n = \mathbf{Y}_n^T \cdot \mathbf{X}_n \quad (3.15)$$

$$\lambda_n = \frac{b_n}{a_n} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{Y}_n \quad (3.17)$$

ifadeleri kullanılır ve başlangıçta X_n öz vektörünün bütün değerleri 1 alınır ve yukarıdaki ifadelerden iterasyon yoluyla λ_1 öz değeri bulunur. Daha sonra bulunan λ_1 öz değerine karşı gelen \mathbf{X}_1 öz vektörü bulunur ve normalize edilir. Bir sonraki özdeğerin bulunması için ilk olarak bir P_1 matrisi oluşturulur. Bunun için

$$\mathbf{X}_1 = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ \mathbf{Y}_1 \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} x_1 & \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{I} - \frac{1}{1-x_1} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \end{array} \right] \quad (3.19)$$

ifadeleri kullanılır,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{P}_1^T \mathbf{B} \mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{array} \right] \quad (3.20)$$

olacağından yeniden bir B matrisi oluşturulur. Aynı işlemler \mathbf{A}_1 matrisi için $n - 1$ kere tekrarlanır ve sonraki öz değer bulunur.

$$\mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_2 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{array} \right] \quad (3.21)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_1^T \mathbf{B} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ & \lambda_2 & \cdot \\ & & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Bu işleme $n - 1$ kere devam edilerek bütün öz değerler bulunur. Aranılan matris

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_{n-1} \quad (3.24)$$

olarak bulunur ve

$$\mathbf{PBP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

özelliğini sağlayan \mathbf{P} 'nin kolonları \mathbf{B} 'nin normalize edilmiş lineer bağımsız öz vektörleridir. Bu işlem \mathbf{B} matrisinin reel simetrik olması durumunda her zaman sonuç verir. Reel simetrik bir matrisin her öz değeri reel bir sayıdır. Eğer \mathbf{B} reel simetrik değil ancak öz değerleri reel sayılarsa, \mathbf{PBP} matrisi genel olarak üst üçgen bir matristir.

3.2 Çok Serbestlik Dereceli Sistemde Sönüm Elemanı Olması Durumu

Yapı üzerinde bir sönüm elemanı olduğu durumlar olabilir. Yapı üzerinde böyle bir eleman varken sistemi doğru şekilde modelleyebilmek için bu elemanlarla ilgili sönüm matrislerinin iyi anlaşılması gereklidir. Sönüm matrisi, sistemin sönüm matrisine sönüm elemanlarının etkisi eklenerek bulunur. Bir yapıdaki sönüm matrisi genel olarak yapının her bir modu için bir sönüm oranı kabul edilerek yapılır. Sönüm matrisinin bulunması kesin olmaktan uzak ve modellenmesi çok karmaşık bir konudur. Sistemdeki sönümün etkisinin açık ve gözlemlenebilir olabilmesine rağmen sönüm matrisinin belirlenmesi genel halde mühendislikte hala çözüm bekleyen bir sorundur. Sistemde kütle ve rijitlik matrisleri statik yöntemlerle bulunabilir, bu nedenden dolayı rijitlik ve kütle matrislerinin bulunması sönüm matrisinin bulunması göre çok daha kolay bir işittir. Sönüm ise dinamik testler yapılarak bulunmalıdır. Bu da modellemeyi zorlaştıran bir durumdur. Burada sistemin rijitlik ve kütle matrislerinin

bilindiğinden yola çıkılarak öz değer ve öz vektör bilgileri kullanılıp sönüm matrisi bulunmaya çalışılacaktır. Burada ilk olarak farklı durumlarda sönüm matrisleri aranacaktır.

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = -\mathbf{m} [1] \mathbf{v}_G \quad (3.26)$$

denkleminde, $Y_i(t)$ skaler bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathbf{v} = \varphi_i Y_i(t) \quad (3.27)$$

yazılırsa

$$\dot{\mathbf{v}} = \varphi_i \dot{Y}_i(t) \quad \ddot{\mathbf{v}} = \varphi_i \ddot{Y}_i(t) \quad (3.28)$$

olacaktır. Bu (3.26) denkleminde yerleştirilirse

$$\mathbf{m}\varphi_i \ddot{Y}_i(t) + \mathbf{c}\varphi_i \dot{Y}_i(t) + \mathbf{k}\varphi_i Y_i(t) = -\mathbf{m} [1] \ddot{\mathbf{v}}_G \quad (3.29)$$

olur. φ_i 'nin sağladığı (3.8) denkleminde

$$\mathbf{k}\varphi_i = w_i^2 \mathbf{m}\varphi_i \quad (3.30)$$

olarak yazılır ve (3.29) denkleminde yerleştirilirse

$$\mathbf{m}\varphi_i \ddot{Y}_i(t) + \mathbf{c}\varphi_i \dot{Y}_i(t) + w_i^2 \mathbf{m}\varphi_i Y_i(t) = -\mathbf{m} [1] \ddot{\mathbf{v}}_G \quad (3.31)$$

olur. φ_j^T ile soldan çarpılırsa

$$\varphi_j^T \mathbf{m}\varphi_i \ddot{Y}_i(t) + \varphi_j^T \mathbf{c}\varphi_i \dot{Y}_i(t) + \varphi_j^T w_i^2 \mathbf{m}\varphi_i Y_i(t) = -\varphi_j^T \mathbf{m} [1] \ddot{\mathbf{v}}_G \quad (3.32)$$

olacaktır. Burada $\varphi_j^T \mathbf{m}\varphi_i$ çarpımı skaler bir sayıdır ve ancak $i = j$ için sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla

$$\varphi_j^T \mathbf{m}\varphi_j = M_j \quad (3.33)$$

olarak isimlendirilebilir. $Y_j(t)$ 'ye genelleştirilmiş koordinat adı verilir,

$$M_j = \varphi_j^T \mathbf{m}\varphi_j \quad (3.34)$$

genelleştirilmiş kütle adını alır,

$$C_j = \varphi_j^T \mathbf{c} \varphi_j = 2\xi_j w_j M_j \quad (3.35)$$

genelleştirilmiş sönüm adını alır,

$$P_j = -\varphi_j^T \mathbf{m} [1] \ddot{\mathbf{v}}_G \quad (3.36)$$

genelleştirilmiş dış etki adını alır. (3.32) denklemini tekrar yazılırsa

$$M_j \ddot{\mathbf{Y}}_j + 2\xi_j w_j M_j \dot{\mathbf{Y}}_j + w_j^2 M_j \mathbf{Y}_j = P_j(t) \quad (3.37)$$

olur basitleştirilirse

$$\ddot{\mathbf{Y}}_j + 2\xi_j w_j \dot{\mathbf{Y}}_j + w_j^2 \mathbf{Y}_j = \frac{1}{M_j} P_j(t) \quad (3.38)$$

ifadesi bulunur. Sistemin başlangıçta sabit iken yer hareketi ile zorlandığı düşünülürse ve

$$\ddot{v} + 2\xi w_n \dot{v} + w_n^2 v = -\ddot{v}_G \quad (3.39)$$

denkleminin çözümüne benzetilirse

$$Y_i(t) = \frac{1}{M_i w_{iD}} \int_0^t e^{-\xi_i w_i (t-\tau)} P_i(\tau) \sin w_{Di} (t - \tau) d\tau \quad (3.40)$$

$$w_{iD} = w_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (3.41)$$

olarak bulunur. $P_i(\tau)$ yerine konulursa

$$P_i(t) = -\varphi_i^T \mathbf{m} [1] \ddot{v}_G(t) \quad (3.42)$$

$$Y_i(t) = -\frac{1}{M_i w_{iD}} \varphi_i^T \mathbf{m} [1] \int_0^t e^{-\xi_i w_i (t-\tau)} \ddot{v}_G(\tau) \sin w_{Di} (t - \tau) d\tau \quad (3.43)$$

ve L_i skaler bir değer olmak üzere

$$L_i = \varphi_i^T \mathbf{m} [1] \quad (3.44)$$

ve

$$Y_i(t) = -\frac{L_i}{M_i w_{iD}} \int_0^t e^{-\xi_i w_i(t-\tau)} \ddot{v}_G(\tau) \sin w_{Di}(t-\tau) d\tau \quad (3.45)$$

bu da

$$Y_i = \Gamma_i D_i(t) \quad (3.46)$$

şeklinde yazılırsa

$$D_i(t) = -\frac{1}{w_{iD}} \int_0^t e^{-\xi_i w_i(t-\tau)} \ddot{v}_G(\tau) \sin w_{Di}(t-\tau) d\tau \quad (3.47)$$

$$\Gamma_i = \frac{L_i}{M_i} = \frac{\varphi_i^T \mathbf{m} [1]}{M_i} \quad (3.48)$$

olur. (3.47) ifadesinde w_i ler ve ξ_i ler biliniyorsa bütün D_i ler bulunabilir.

$$\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i Y_i(t) \quad (3.49)$$

ifadesi hatırlanırsa φ_i öz vektörleri daha önce bulunduğuna göre (3.29) denklemindeki Y_i leri kullanarak

$$\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i \Gamma_i D_i(t) \quad (3.50)$$

v_i yer değiştirmeleri bulunur. Burada Γ_i ve $D_i(t)$ büyüklükleri skalerdir.

Çok serbestlik dereceli sistemlerde deprem kuvveti iki terimden oluşmaktadır; $\mathbf{m} [1]$ ve $\ddot{v}_G(t)$. Burada birinci terim etkinin geometrik dağılımını, ikinci terim ise zamana bağlılığını gösterir. Bu çözüm her problemde uygulanamaz. Uygulanabilmesi için özel durumlardan birinin mutlaka sağlanması gereklidir. Bunlar a ve b skaler olmak üzere

$$\mathbf{C} = a\mathbf{K} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (3.52)$$

eşitliklerinin sağlandığı durumlardır. (Hall, 2006)

3.3 Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerde Modların Ayrıklaştırılabildiği Durumlar

Sistemin serbestlik dereceleri

$$\mathbf{U}^{n \times 1} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

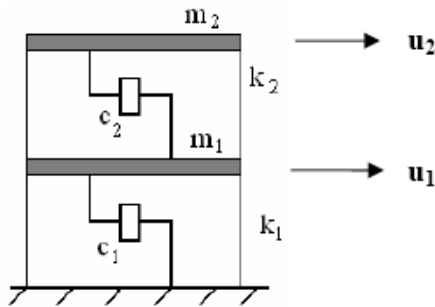
kütle matrisi

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \mathbf{0} \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & m_n \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

olarak seçilirse, sistemin hareket denklemi de

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (3.55)$$

olarak tanımlanabilir. Burada \mathbf{C} sönüm matrisini \mathbf{K} ise sistemin rijitlik matrisini göstermektedir. Burada iki durum söz konusudur. \mathbf{C} ve \mathbf{M} matrislerinin öz değerlerinin farklı olmasına rağmen öz vektörleri aynı olabilir. Bu durumda $\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q}$ ve $\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}$ dönüşümleri hem \mathbf{K} hem de \mathbf{C} matrisini diyagonalize eder.



Şekil 3.1: İki serbestlik dereceli basit sistem (Cropper ve Gupta, 2006).

İlk olarak Şekil 3.1 deki sistemin analitik olarak çözümü aranacaktır. Burada m_1 , m_2 kütleleri ve k_1 , k_2 yay katsayıları eşit alınacaktır. m_1 kütlelerinin hareket denklemi

şekildeki sistem için

$$m_1\ddot{u}_1 = -k_2(u_1 - u_2) - c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - c_1\dot{u}_1 - k_1(u_1) \quad (3.56)$$

$$m_1\ddot{u}_1 + \dot{u}_1(c_2 - c_1) - \dot{u}_2c_2 + u_1(k_1 + k_2) - k_2u_2 = 0 \quad (3.57)$$

olur. m_2 kütesinin hareket denklemi ise

$$m_2\ddot{u}_2 = -k_2(u_2 - u_1) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \quad (3.58)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + \dot{u}_1(-c_2) + \dot{u}_2(c_2) - k_2u_1 + k_2u_2 = 0 \quad (3.59)$$

olacaktır. (3.57) ve (3.59) denklemlerinden

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

kütle, rijitlik ve sönüm matrisleri yukarıdaki gibi yazılabilir.

3.3.1 Kütle ve sönümlerin aynı olması durumu

Eğer $k_1 = k_2 = k$ ve $c_1 = c_2 = c$ alınırsa

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

olur. Çözüm için $M^{-1/2}$ matrisini bulur ve

$$M^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$U = M^{-1/2}X \quad (3.68)$$

tanımları yapıp (3.55) denkleminde yerine konulursa

$$MM^{-1/2}\ddot{X} + CM^{-1/2}\dot{X} + KM^{-1/2}X = F(t) \quad (3.69)$$

ve bu denklem $M^{-1/2}$ ile soldan çarpılırsa

$$I\ddot{X} + C_1\dot{X} + K_1X = M^{-1/2}F(t) \quad (3.70)$$

formunu alır. m_i kütlelerinin eşit olmaması halinde bile C_1 ve K_1 matrisleri reel simetrik matris olurlar ve öz değerleri reel sayılardır. Bu matrisler

$$C_1 = M^{-1/2}CM^{-1/2} \quad (3.71)$$

$$K_1 = M^{-1/2}KM^{-1/2} \quad (3.72)$$

Şimdi verilen örnek üzerinde K_1 matrisini diyagonalize eden ortogonal bir Q matrisi bulunmak istenirse

$$C_1 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$K_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

matrislerinden K_1 matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m} \quad (3.75)$$

$$\lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m} \quad (3.76)$$

olarak bulunur ve C_1 matrisinin öz değerleri de

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} \quad (3.77)$$

$$\lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} \quad (3.78)$$

olacaktır. Buradan \mathbf{K}_1 matrisinin λ_1 'e karşı gelen öz vektörü

$$(\mathbf{K}_1 - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{X} = 0 \quad (3.79)$$

denkleminde

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \\ \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

bulunur. \mathbf{Q}_1 ortogonal matrisini

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -\sqrt{50+10\sqrt{5}} & \sqrt{50-10\sqrt{5}} \\ \sqrt{50-10\sqrt{5}} & \sqrt{50+10\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

olarak tanımlanırsa ve bu matris kullanılarak

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Y} \quad (3.82)$$

şeklinde bir dönüşüm yapılırsa

$$\mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_1^{-1} = \mathbf{Q} \quad (3.83)$$

olduğu düşünülürse (3.70) denklemi

$$\mathbf{Q}_1 \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t) \quad (3.84)$$

halini alacaktır ve bu denklem de soldan \mathbf{Q}_1 ile çarpılırsa

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t) \quad (3.85)$$

ve

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1 \quad (3.86)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 \quad (3.87)$$

seçilirse

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_2\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}_2\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_1\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}(t) \quad (3.88)$$

olacaktır. Verilen örnek için

$$\mathbf{C}_2 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

formunu alır. Bu durumda

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{m} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \dot{y}_1 + \frac{k}{m} \frac{3+\sqrt{5}}{2} y_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}_1(t) = f_1(t) \quad (3.91)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{c}{m} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \dot{y}_2 + \frac{k}{m} \frac{3-\sqrt{5}}{2} y_2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}_2(t) = f_2(t) \quad (3.92)$$

olarak yazılır ve y_1 ve y_2 ayrıklaştırılmış olur. Şimdi bunlardan biri tek serbestlik sistem olarak çözülmek istenirse ve

$$\frac{c}{m} \lambda_1 = 2w_1\xi_1 \quad (3.93)$$

$$\frac{c}{m} \lambda_2 = 2w_2\xi_2 \quad (3.94)$$

$$\frac{k}{m} \lambda_1 = w_1^2 \quad (3.95)$$

$$\frac{k}{m} \lambda_2 = w_2^2 \quad (3.96)$$

kısaltmaları yapılırsa

$$\ddot{y}_1 + 2w_1\xi_1\dot{y}_1 + w_1^2y_1 = f_1(t) \quad (3.97)$$

$$\ddot{y}_2 + 2w_2\xi_2\dot{y}_2 + w_2^2y_2 = f_2(t) \quad (3.98)$$

bu denklemlerden ilkinin çözümü için

$$\ddot{y} + 2w\xi\dot{y} + w^2y = 0 \quad (3.99)$$

$$y = e^{\alpha t} \quad (3.100)$$

çözümü aranırsa

$$\alpha_{1,2} = -w\xi \pm w\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (3.101)$$

burada $\xi > 1$ ise kuvvetli sönüm durumu varsa ve her iki kökte negatiftir. Bu durumda wronskien matrisi

$$\left[\mathbf{W} \quad \vdots \quad \epsilon_n f(t) \right] = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} & 0 \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} & f_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

olur ve buradan

$$U_1' = -e^{-\alpha_1 t} \frac{f_1(t)}{\alpha_2 - \alpha_1} = -e^{-\alpha_1 t} \frac{f_1(t)}{2w\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (3.103)$$

$$U_2' = e^{-\alpha_2 t} \frac{f_1(t)}{\alpha_2 - \alpha_1} = e^{-\alpha_2 t} \frac{f_1(t)}{2w\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (3.104)$$

bulunur ve integralleri alınırsa

$$U_1 = c_1 + \int_0^t -e^{-\alpha_1 \tau} \frac{f_1(\tau)}{2w\sqrt{\xi^2 - 1}} d\tau \quad (3.105)$$

$$U_2 = c_1 + \int_0^t e^{-\alpha_2 \tau} \frac{f_1(\tau)}{2w\sqrt{\xi^2 - 1}} d\tau \quad (3.106)$$

ve buradan kuvvetli sönümde durumunda denklemin çözümü bulunur.

$$y = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + \int_0^t -e^{-\alpha_1(t-\tau)} \frac{f_1(\tau)}{2w\sqrt{\xi^2 - 1}} d\tau + \int_0^t -e^{-\alpha_2(t-\tau)} \frac{f_1(\tau)}{2w\sqrt{\xi^2 - 1}} d\tau \quad (3.107)$$

Kritik sönüm ($\xi = 1$) olması durumunda

$$\alpha = w \quad (3.108)$$

$$y_h = c_1 e^{-wt} + c_2 e^{-wt} t \quad (3.109)$$

wronskian matrisi

$$\left[\mathbf{W} \quad \vdots \quad \epsilon_n f(t) \right] = \begin{bmatrix} e^{-wt} & te^{-wt} & 0 \\ -e^{-wt} w & e^{-wt} - wte^{-wt} & f(t) \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

buradan

$$U_1' = -e^{-wt} f(t) \quad (3.111)$$

$$U_2' = e^{wt} f(t) \quad (3.112)$$

bulunur birinci dereceden diferansiyel denklemler çözümlerse

$$U_1 = - \int_0^t e^{w\tau} \tau f(\tau) d\tau + c_1 \quad (3.113)$$

$$U_2 = \int_0^t e^{w\tau} f(\tau) d\tau + c_2 \quad (3.114)$$

ve buradan da kritik sönüm için denklemin çözümü yazılırsa

$$y = c_1 e^{-wt} + c_2 e^{-wt} t - \int_0^t e^{w(t-\tau)} \tau f(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-w(t-\tau)} t f(\tau) d\tau \quad (3.115)$$

halini alacaktır.

Zayıf sönüm $\xi < 1$ olması durumunda

$$\alpha_1 = -w + iw\sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.116)$$

$$\alpha_2 = -w - iw\sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.117)$$

yazılabilir. Homojen denklemin çözümü

$$y_h = c_1 e^{-wt} \cos bt + c_2 e^{-wt} \sin bt \quad (3.118)$$

$$b = w\sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.119)$$

olarak alınabilir. Wronskien matrisi ise

$$\left[\mathbf{W} : \epsilon_n f(t) \right] = \begin{bmatrix} e^{-wt} \cos bt & e^{-wt} \sin bt & 0 \\ e^{-wt} (-w \cos bt - b \sin bt) & e^{-wt} (-w \sin bt + b \cos bt) & f(t) \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

çözüldüğünde

$$U_1' = -\frac{e^{wt}}{b} \sin bt f(t) \quad (3.121)$$

$$U_2' = \frac{e^{wt}}{b} \cos bt f(t) \quad (3.122)$$

$$U_1 = c_1 - \int_0^t \frac{e^{w\tau}}{b} \sin b\tau f(t) d\tau \quad (3.123)$$

$$U_2 = c_2 + \int_0^t \frac{e^{w\tau}}{b} \cos b\tau f(t) d\tau \quad (3.124)$$

ve denklemin çözümü de

$$y = c_1 e^{-wt} \cos bt + c_2 e^{-wt} \sin bt - \int_0^t f(\tau) \frac{e^{-w(t-\tau)}}{b} \sin b\tau \cos bt f(t) d\tau \quad (3.125)$$

$$+ \int_0^t f(\tau) \frac{e^{-w(t-\tau)}}{b} \cos b\tau \sin bt f(t) d\tau$$

olur ve

$$y = c_1 e^{-wt} \cos bt + c_2 e^{-wt} \sin bt - \int_0^t f(\tau) \frac{e^{-w(t-\tau)}}{b} \sin b(t-\tau) d\tau \quad (3.126)$$

olarak da yazılabilir. Yukarıdaki özel probleme bir dış kaynakla karşılaştırma amacıyla

$$c = 2.16lb.s/inc \quad (3.127)$$

$$m_1 = m_2 = m = 0.80lb.sn^2/inc \quad (3.128)$$

$$k = 500lb/inc \quad (3.129)$$

$$\xi = 0.05 \quad (3.130)$$

sayısal değerleri verilerek çözülecek olsun,

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (3.131)$$

$$\frac{k}{m} = w^2 = \frac{500}{0.8} \rightarrow w = 25 \quad (3.132)$$

$$2\xi w = \frac{2}{0.8} \rightarrow \xi = 0.05 \quad (3.133)$$

toplam yapıda ϕ matrisi

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} -0.85 & 0.525 \\ 0.525 & 0.85 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

olur, bu matrisi $M^{-1/2}$ ile çarpılırsa

$$\phi = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.85 & 0.525 \\ 0.525 & 0.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.601 & 0.3712 \\ 0.3712 & 0.601 \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

$$\phi^T \mathbf{M} \phi = \mathbf{I} \quad (3.136)$$

çarpımı sağlandığı ve sistemin ayrıklaştığı görülür ancak kütle matrisinin simetrik olmaması halinde bu hesap tarzı tekrarlanamaz. Ayrıca bulunan modların sistemin gerçek modları ile ilişkilendirilmesi de hatalıdır.

3.3.2 Kütlelerin farklı, sönümlerin aynı olması durumu

Bu tarz hesabı başka bir sistem için tekrarlanmak istenirse ve bir önceki problemde sadece kütle matrisi

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & \\ & 2m \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

farklı olarak tanımlanırsa, seçilen sayısal değerler ise aynı olursa

$$\ddot{x} + 2w\xi\dot{x} + w^2x = 0 \quad (3.138)$$

$$w_1^2 = \frac{k}{m_1} = \frac{500}{0.8} = 625 \rightarrow w_1 = 25 \quad (3.139)$$

$$w_2^2 = \frac{k}{m_2} = \frac{500}{2 \times 0.8} \rightarrow w_2 = 17.68 \quad (3.140)$$

$\xi = 0.05$ ise

$$2.25\xi = \frac{c}{m} \quad 500 \times 0.5 = \frac{c}{0.8} \quad (3.141)$$

$$c_1 = 50 \times 0.05 \times 0.8 = 2 \quad (3.142)$$

$$c_2 = 2 \times 17.68 \times 0.05 \times 0.8 = 1.4144 \text{ lb.sn/inc} \quad (3.143)$$

sistemin hareket denklemi

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F(t) \quad (3.144)$$

dir.

$$\mathbf{M}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (3.145)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} \quad (3.146)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{M}^{-1/2} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (3.147)$$

$$\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1/2} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t) \quad (3.148)$$

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_1 \mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t) \quad (3.149)$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (3.150)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (3.151)$$

matrisleri hesaplanırsa

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (3.152)$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

bulunur. C_1 'in öz değerleri

$$\lambda_1 = \frac{c}{m} \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad \lambda_2 = \frac{c}{m} \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \quad (3.154)$$

olarak bulunabilir. C_1 'in $\lambda = \lambda_1$ için öz vektörü

$$\mathbf{X}_1 = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{8\sqrt{2} + \sqrt{34}}{4} \\ 1 \end{array} \right\} \quad (3.155)$$

normalize edilip \mathbf{Q}_1 matrisi oluşturulursa

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{578+102\sqrt{17}}}{34} & \frac{\sqrt{578-102\sqrt{17}}}{34} \\ \frac{\sqrt{578-102\sqrt{17}}}{34} & -\frac{\sqrt{578-102\sqrt{17}}}{34} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

bulunur ve

$$\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I} \quad (3.157)$$

koşulu sağlanır. Benzer şekilde \mathbf{K}_1 matrisi bulunur.

$$\mathbf{K}_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_1 \mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t) \quad (3.159)$$

denkleminde

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Y} \quad (3.160)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\mathbf{Q}_1 \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t) \quad (3.161)$$

olur ve bu denklem soldan \mathbf{Q}_1 ile çarpılırsa

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t) \quad (3.162)$$

olur ve bu denklemde

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{C}_2 \quad (3.163)$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_2 \quad (3.164)$$

olarak tanımlanır. \mathbf{C}_1 ve \mathbf{C}_2 matrisleri

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{17}}{4} \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$\mathbf{C}_2 = 2\xi \mathbf{w} \quad (3.167)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{w}^2 \quad (3.168)$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{5 + \sqrt{17}}{4}} = 37.76 \quad (3.169)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{5 - \sqrt{17}}{4}} = 11.71 \quad (3.170)$$

bulunur. Buradan

$$2\xi_1 w_1 = \frac{c}{m} \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \rightarrow \xi_1 = 0.03 \quad (3.171)$$

$$2\xi_2 w_2 = \frac{c}{m} \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \rightarrow \xi_1 = 0.094 \quad (3.172)$$

zayıf sönüm olduğu görülür. Burada sistem

$$\ddot{Y}_1 + 2\xi_1 w_1 \dot{Y}_1 + w_1^2 Y_1 = - (\mathbf{Q}_1 \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t))_1 = -f_1(t) \quad (3.173)$$

$$\ddot{Y}_2 + 2\xi_2 w_2 \dot{Y}_2 + w_2^2 Y_2 = - (\mathbf{Q}_1 \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t))_2 = -f_2(t) \quad (3.174)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} -m A \sin \Omega t \\ -2m A \sin \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.175)$$

olarak sistem ayrıklaştırılmıştır.

3.3.3 Kütlelerin aynı sönümlerin farklı olması durumu

Kütlelerin aynı ve sönümlerin farklı olduğu bir sistemi tarif etmek için kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = c \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

şeklinde oluşturulabilir. Bu durumda klasik yöntemle ayrıklaştırma yapılamadığı için ilk olarak direk çözüm uygunacaktır. Sayısal hesaplar için

$$m = 0.8 \quad c = 1 \quad k = 500 \quad (3.177)$$

değerleri ön görülmüştür. Hareket denklemi tekrar yazılırsa,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad \mathbf{F}(t) = -[\mathbf{M}] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} a_G \sin \Omega t \quad (3.178)$$

bu denklemi çözmek için ilk olarak homojen denklem çözülür. Bunun için

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}e^{\alpha t} \quad (3.179)$$

dönüşümü yapılır.

$$M\alpha^2\mathbf{X} + C\alpha\mathbf{X} + K\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.180)$$

$$(M\alpha^2 + C\alpha + K)\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.181)$$

$$\left[\begin{bmatrix} \alpha^2 m & \\ & \alpha^2 m \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 9\alpha & -4\alpha \\ -4\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.182)$$

Bu ifadede parantez içindeki değerlerin determinantı alınıp sifıra eşitlenirse ve α öz değerleri çözülürse

$$\alpha_1 = -1.54926 - 21.8332i \quad (3.183)$$

$$\alpha_2 = -1.54926 + 21.8332i \quad (3.184)$$

$$\alpha_3 = -6.57574 - 56.7289i \quad (3.185)$$

$$\alpha_4 = -6.57574 + 56.7289i \quad (3.186)$$

olarak bulunurlar. Öz vektörleri de

$$X_1 = \begin{Bmatrix} 0.23681 - 0.02358i \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.187)$$

$$X_2 = \begin{Bmatrix} 0.23681 + 0.02358i \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.188)$$

olarak bulunabilir. Buradan

$$U_1 = X_1 e^{\alpha_1 t} + X_2 e^{\alpha_2 t} = e^{-at} \{X_1 e^{-ibt} + X_2 e^{ibt}\} \quad (3.189)$$

$$X_1 e^{\alpha_1 t} + X_2 e^{\alpha_2 t} = e^{-at} \{X_1 (\cos bt - i \sin bt) + X_2 (\cos bt + i \sin bt)\} \quad (3.190)$$

$$X_1 e^{\alpha_1 t} + X_2 e^{\alpha_2 t} = e^{-at} \{(\cos bt(X_1 + X_2) - i \sin bt(X_1 - X_2))\} \quad (3.191)$$

olduğu görülebilir. Dolayısıyla buradan da bir çözümü

$$U_1 = e^{-at} \begin{Bmatrix} 0.47362 \\ 2 \end{Bmatrix} \cos bt - e^{-at} \begin{Bmatrix} 0.47162 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin bt \quad (3.192)$$

olarak bulabiliriz. Burada $a = re(\alpha_1)$ ve $b = im(\alpha_1)$ 'dir. Diğer öz vektörler

$$X_3 = \begin{Bmatrix} -3.88073 - 0.98699i \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.193)$$

$$X_4 = \begin{Bmatrix} -3.88073 + 0.98699i \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.194)$$

de olarak bulunur. Benzer şekilde

$$U_2 = e^{-et} \begin{Bmatrix} -7.61460 \\ 2 \end{Bmatrix} \cos dt + e^{-et} \begin{Bmatrix} -1.97400 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin dt \quad (3.195)$$

bulunur, burada $e = re(\alpha_3)$ ve $d = im(\alpha_3)$ dür. Özel çözümü bulmak için

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_p \sin \Omega t + \mathbf{B}_p \cos \Omega t \quad (3.196)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}_p \Omega \cos \Omega t - \mathbf{B}_p \Omega \sin \Omega t \quad (3.197)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}} = -\mathbf{A}_p \Omega^2 \sin \Omega t - \mathbf{B}_p \Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.198)$$

yazılarak (3.178) denkleminde yerleştirilirse

$$-\mathbf{A}_p \Omega^2 \sin \Omega t - \mathbf{B}_p \Omega^2 \cos \Omega t + \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_p \Omega \cos \Omega t \quad (3.199)$$

$$-\mathbf{C}_1 \mathbf{B}_p \Omega \sin \Omega t + \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_p \sin \Omega t + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_p \cos \Omega t = -[1] \sin \Omega t a_g$$

denklemin şeklinde bulunması için

$$\sin \Omega t [-\mathbf{A}_p \Omega^2 - \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_p \Omega + \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_p + a_G] = 0 \quad (3.200)$$

$$\cos \Omega t [-\mathbf{B}_p \Omega^2 - \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_p \Omega + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_p] = 0 \quad (3.201)$$

$$[-\mathbf{I} \Omega^2 + \mathbf{K}_1] \mathbf{A}_p - \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_p \Omega = -a_G [1] \quad (3.202)$$

$$[-\mathbf{I} \Omega^2 + \mathbf{K}_1] \mathbf{B}_p + \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_p \Omega = \mathbf{0} \quad (3.203)$$

koşulları sağlanmalıdır. Burada

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1 - \mathbf{I} \Omega^2 \quad (3.204)$$

kısaltması yapılırsa

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{A}_p - \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_p \Omega = -a_G [1] \quad (3.205)$$

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{B}_p + \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_p \Omega = 0 \quad (3.206)$$

bulunur çözüldüğünde

$$\mathbf{A}_p = - [\mathbf{K}_2 + \mathbf{C}_1 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_1]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} a_G \quad (3.207)$$

$$\mathbf{B}_p = \Omega \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{C}_1 [\mathbf{K}_2 + \mathbf{C}_1 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{C}_1]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} a_G \quad (3.208)$$

bulunur ve denklemin çözümü

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & A_h \mathbf{X}_1 e^{-at} \cos bt + B_h \mathbf{X}_2 e^{-at} \sin bt + C_h \mathbf{X}_3 e^{-at} \cos bt \\ & + D_h \mathbf{X}_4 e^{-at} \sin bt + \mathbf{A}_p \sin \Omega t + \mathbf{B}_p \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.209)$$

dir. Başlangıçta $t = 0$ iken başlangıç hareketini $\mathbf{U} = 0$ ve başlangıç ivmesini $\dot{\mathbf{U}} = 0$ olduğu kabul edilmektedir. Bu koşullar yazılırsa

$$A_h \mathbf{X}_1 + C_h \mathbf{X}_3 + \mathbf{B}_p = 0 \quad (3.210)$$

$$A\Omega - aA_h X_1 + bB_h X_2 - aC_h X_3 + bD_h X_4 = 0 \quad (3.211)$$

$$A_h \mathbf{X}_1 + C_h \mathbf{X}_3 + \mathbf{B}_p = 0 \quad (3.212)$$

$$\mathbf{A}_p \Omega + \mathbf{B}_p + bB_h \mathbf{X}_2 + bD_h \mathbf{X}_4 = 0 \quad (3.213)$$

bulunur. Verilen örnek üzerinde çözüm aranırsa

$$K_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.214)$$

$$K_2 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.215)$$

k ve m değerleri yerine konursa

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3125 - \Omega^2 & -625 \\ -625 & 625 - \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.216)$$

bulunur. Verilen örnek için

$$C_1 = \frac{c}{m} \begin{Bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 4 \end{Bmatrix} \quad (3.217)$$

olmak üzere A_p değeri

$$A_p = - [K_2 + C_1 K^{-1} C_1]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} a_G \quad (3.218)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.0016 + \frac{1}{3125.26 - \Omega^2} \\ -0.0016 + \frac{1}{625.13 - \Omega^2} \end{bmatrix} a_G \quad (3.219)$$

olarak ve B_p değeri de

$$B_p = \begin{bmatrix} \frac{-90627.9\Omega + 51.2437\Omega^3 - 0.00999699\Omega^5}{6.10527 \times 10^9 - 1.36737 \times 10^7 \Omega^2 + 6875.39\Omega^4 - 1.1\Omega^6} \\ \frac{40625.3\Omega - 76.242\Omega^3 + 0.0599852\Omega^5 - 0.0000159952\Omega^7}{1.22105 \times 10^9 - 4.29768 \times 10^6 \Omega^2 + 4375.39\Omega^4 - 1.1\Omega^6} \end{bmatrix} \quad (3.220)$$

olarak hesaplanabilir. Bu değerler (3.209) denkleminde kullanılarak ayrıklaştırılmış sistemin yer değiştirmeleri bulunabilir.

3.3.4 Kütlelerin aynı sönümlerin farklı olması probleminin yaklaşık çözümü

Karşılaştırma amacıyla

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0 \quad (3.221)$$

sisteminde klasik yolla modlar aranırsa

$$K_1 = M^{-1/2} K M^{-1/2} \quad (3.222)$$

$$K_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.223)$$

K_1 'in öz değerlerini hesaplırsak

$$w_1^2 = \lambda_1 = 0.763932 \frac{k}{m} = 477.458 \quad (3.224)$$

$$w_2^2 = \lambda_2 = 5.23607 \frac{k}{m} = 3272.54 \quad (3.225)$$

bulunur. Bu değerleri kullanarak sistemin α değerlerini bulmak için $Q^T K Q$ çarpımını diyagonalize eden bir Q matrisi aranır. Bunun için K matrisinin $\lambda = \lambda_2$ öz değerine

karşı gelen öz vektör bulur ve normalize edilirse

$$\mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} -0.973249 \\ 0.229752 \end{Bmatrix} \quad (3.226)$$

elde edilir. Bu durumda \mathbf{Q} matrisi

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.973249 & 0.22975292 \\ 0.22975292 & 0.973249 \end{bmatrix} \quad (3.227)$$

olarak bulunur $\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q}$ matrisi hesaplanırsa

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3272.54 & 0 \\ 0 & 477.458 \end{bmatrix} \quad (3.228)$$

$\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}$ matrisi hesaplanırsa

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 13.1562 & 3.07459 \\ 3.07459 & 3.09385 \end{bmatrix} \quad (3.229)$$

bulunur. Sistemin hareket denkleminin

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.230)$$

şeklinde olduğu anımsanıp

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y} \quad (3.231)$$

dönüşümü yapılır ve bu dönüşüm hareket denklemine yerleştirilirse

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.232)$$

ifadesi bulunur. Burada bulunan \mathbf{Q} matrisinin hem ortogonal hem tersinin transpozese eşit olduğunu bir kere daha vurgulamak gerekir. Sayısal olarak yukarıda denklem aşağıdaki iki denkleme indirgenir.

$$\ddot{y}_1 + 13.1562\dot{y}_1 + 3272.54y_1 = 0 \quad (3.233)$$

$$\ddot{y}_2 + 3.075\dot{y}_2 + 0.7539y_2 = 0 \quad (3.234)$$

bu denklemlerden α değerleri

$$\alpha_{1,2} = -6.578 \mp 56.826i \quad (3.235)$$

$$\alpha_{3,4} = -1.5375 \mp 21.796i \quad (3.236)$$

olarak elde edilirler. Önceden bulunan değerler aşağıdaki gibidir.

$$\alpha_{1,2} = -6.57574 \mp 56.7289i \quad (3.237)$$

$$\alpha_{3,4} = -1.54926 \mp 21.8332i \quad (3.238)$$

Buradan da görüldüğü gibi sönüm matrisinin köşegen dışındaki elemanları atıldığında α değerlerinde çok sapma olmamıştır. Ancak bu sönümün çok az ve k yay katsayısının sönüme nazaran çok büyük olması ve kütle matrisindeki her terimin eşit olması halinde hesaplanmıştır. Bu değerler bu yanlışı vurgulayan bir makale ile karşılaştırmak üzere seçilmiştir. (Cropper ve Gupta, 2006)

3.4 Ortogonal Q Matrisi Bulunması

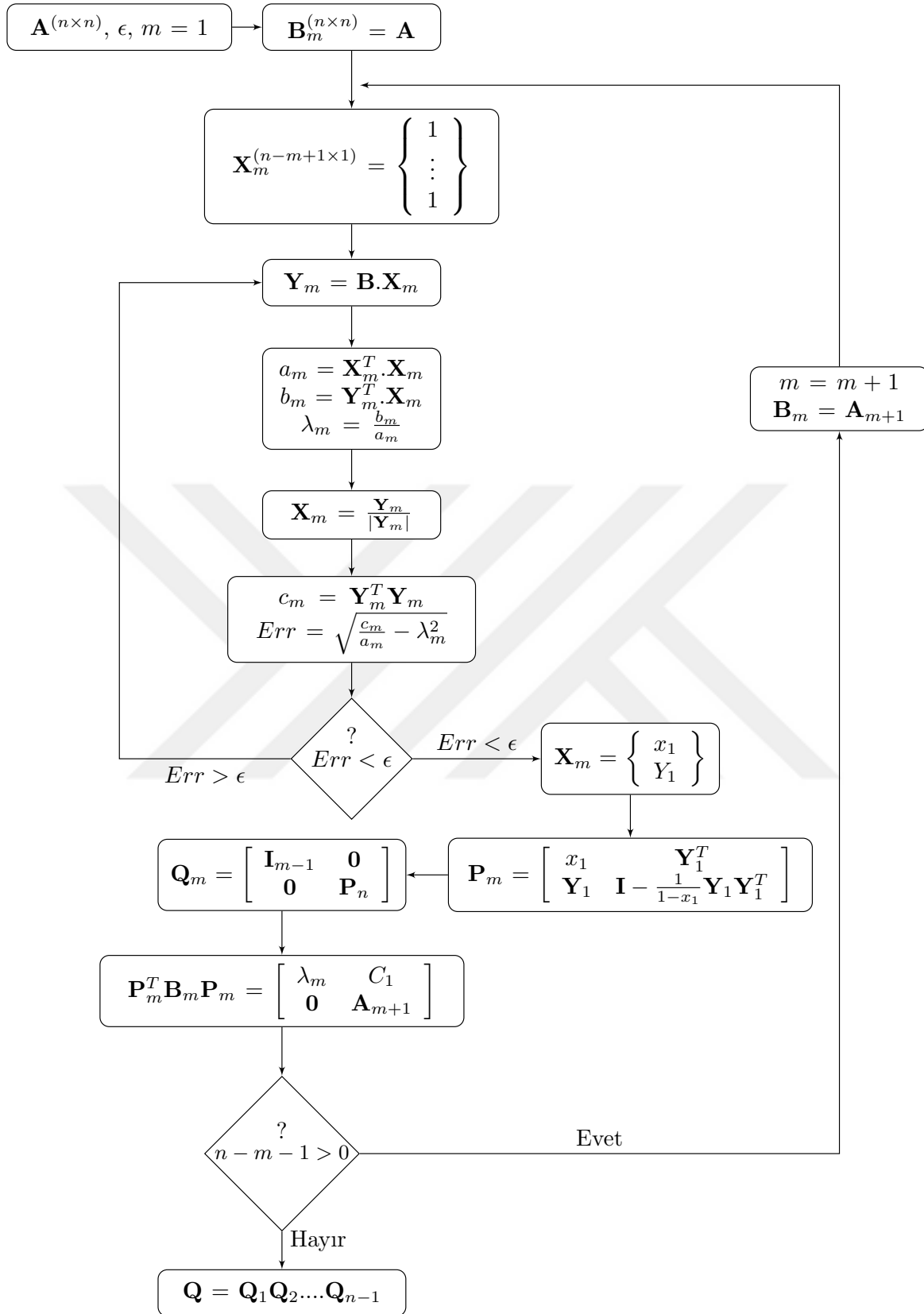
Problem içinde $Q^T K Q$ çarpımını diyagonal matris yapan ortogonal Q matrisini bulan fonksiyona ait programın akış diyagramı Şekil 3.2 'de verilmiştir.

3.5 Çok Serbestlik Dereceli Sisteme Örnekle

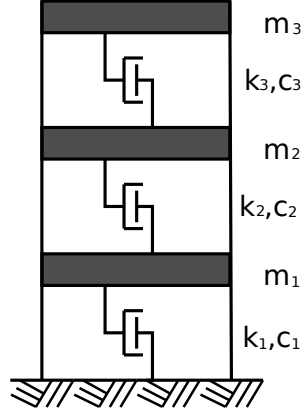
Klasik yöntemde çok serbestlik dereceli sistemlerin çözümlerinin yapılabilmesi için sistemi oluşturan hareket denklemlerinin ayrıklaştırılması gerekir. Farklı sistemlerde bunun nasıl yapılabileceğini göstermek amacıyla ilk olarak üç serbestliği olan bir sistemi ele alınmıştır. Sistemdeki kat yerdeğiştirmeleri bir U vektörü ise, sistemin kütle matrisinin M , sönüm matrisinin C , rijitlik matrisinin K olduğu ve sisteme etkiyen yüklerin de zamana bağlı bir $F(t)$ vektörü olduğu düşünürürse sistemin hareket denklemleri

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F(t) \quad F(t) = -[M] \left\{ 1 \right\} \ddot{u}_{G0} \sin \Omega t \quad (3.239)$$

olacaktır. Bu denklemde 1 olarak gösterilen değer sistemin serbestliği boyutunda, tüm değerleri 1 olan bir vektördür. Kat kütlelerinin m_i , kat rijitliklerinin k_i ve her kata ait sönüm katsayılarının c_i olduğu Şekil 3.3 deki gibi bir yapının kütle, rijitlik ve sönüm



Şekil 3.2: Ortogonal Q matrisi bulan fonksiyona ait program akış diyagramı.



Şekil 3.3: Üç serbestliği olan basit sistem.

matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \quad (3.240)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.241)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.242)$$

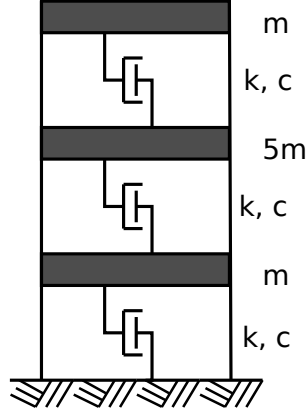
3.5.1 Kat kütlelerinin, sönümlerin ve rijitliklerin eşit olması durumu

Kat kütlelerinin, rijitliklerinin ve kat sönümlerinin eşit olması durumu şekildeki gibi bir sistem üzerinde gösterilmiştir. Bir dış kaynakla karşılaştırmak amacıyla kat rijitlikleri, sönüm ve kat kütlelerinin değerleri şekildeki gibi seçilmiştir.

$$mg = 190kN$$

$$k = 27190kN/m \quad (3.243)$$

$$\xi = 0.02$$



Şekil 3.4: Eşit kütle sönüm olan üç serbestlikli sistem.

Bu durumda sisteme ait kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri aşağıdaki gibi olacaktır

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m \end{bmatrix} \quad (3.244)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c & \\ -c & 2c & -c \\ & -c & c \end{bmatrix} \quad (3.245)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & \\ -k & 2k & -k \\ & -k & k \end{bmatrix} \quad (3.246)$$

ve $\mathbf{M}^{-1/2}$ matrisi hesaplanırsa

$$\mathbf{M}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m} & & \\ & 1/\sqrt{m} & \\ & & 1/\sqrt{m} \end{bmatrix} \quad (3.247)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} \quad (3.248)$$

çözümüne gidilir ve

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (3.249)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (3.250)$$

yazılarak C_1 ve K_1 reel simetrik matrisleri hesaplanırsa

$$\mathbf{C}_1 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.251)$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.252)$$

bulunur. C_1 matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = 3.246980 \frac{c}{m} \quad (3.253)$$

$$\lambda_2 = 1.554958 \frac{c}{m} \quad (3.254)$$

$$\lambda_3 = 0.198062 \frac{c}{m} \quad (3.255)$$

olarak bulunmuştur. Buradan daha önceden yazılan program kullanılarak, K_1 matrisinden ortogonal bir Q_1 matrisi bulunur.

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0.591009 & -0.736976 & 0.327985 \\ -0.736976 & -0.327985 & 0.591009 \\ 0.327985 & 0.591009 & 0.736976 \end{bmatrix} \quad (3.256)$$

C_2 matrisi $C_2 = Q_1 C_1 Q_1$ ve K_2 matrisi de $K_2 = Q_1 K_1 Q_1$ formüllerinden bulunur.

$$\mathbf{C}_2 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 3.24698 & 0. & 0. \\ 0. & 1.55496 & 0. \\ 0. & 0. & 0.198062 \end{bmatrix} \quad (3.257)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 3.24698 & 0. & 0. \\ 0. & 1.55496 & 0. \\ 0. & 0. & 0.198062 \end{bmatrix} \quad (3.258)$$

Hatırlanırsa hareket denklemi

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{M}^{-1/2} F(t) \quad F(t) = \mathbf{M} \{ \mathbf{1} \} \ddot{u}_{G0} \sin \Omega t \quad (3.259)$$

halini almıştı. K_2 ve C_2 matrisleri diyagonal matrisler olduğu için her bir serbestliğe ait hareket denklemi

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{m}3.24698\dot{y}_1 + \frac{k}{m}3.24698y_1 = f_1(t) \quad (3.260)$$

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{m}1.55496\dot{y}_1 + \frac{k}{m}1.55496y_1 = f_2(t) \quad (3.261)$$

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{m}0.198062\dot{y}_1 + \frac{k}{m}0.198062y_1 = f_3(t) \quad (3.262)$$

olarak ayrıklaştırılır.

$$\frac{c}{m}\lambda_n = 2w_n\xi_n \quad (3.263)$$

$$\frac{k}{m}\lambda_n = w_n^2 \quad (3.264)$$

kısaltmaları yapılırsa k ve m değerleri yerine sayısal karşılıkları konulursa açısal hız ve periyotlar

$$w_1 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2}3.24698} = 47.74Hz \quad T_1 = 2\pi/w_1 = 0.131sn \quad (3.265)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2}1.55496} = 33.0375Hz \quad T_2 = 2\pi/w_2 = 0.190sn \quad (3.266)$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2}0.198062} = 11.7909Hz \quad T_3 = 2\pi/w_3 = 0.533sn \quad (3.267)$$

olarak bulunur. Hatırlanırsa problemin başında (3.243) denklemlerinde sönüm oranı $\xi = 0.02$ olarak seçilmişti. Yapının hakim moduna karşılık gelen sönüm oranı yüzde 2 olarak kabul edilir ve aşağıdaki eşitlikte yerine konulursa c sönüm sabitinin değeri bulunabilir.

$$\frac{c}{m}\lambda_3 = 2w_3\xi_n \quad (3.268)$$

$$\frac{c}{190kN/9.81m/sn^2}0.198062 = 2 \times 11.7909 \text{ 1/sn} \times 0.02 \quad (3.269)$$

$$c = 46.1201kN \text{ sn}/m \quad (3.270)$$

Bulunan bu sönüm değeri kullanılarak yapının diğer modlarındaki sönüm oranları da bulunabilir.

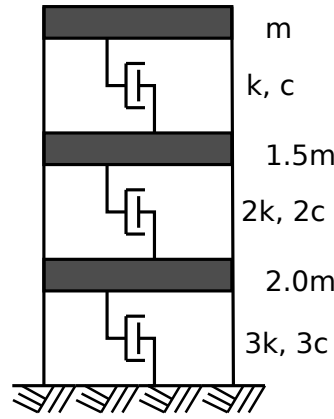
3.5.2 Kat kütlelerinin farklı ancak kat sönümlerinin bunlarla orantılı olması durumu

Çok serbestlik dereceli bir sistem çözülürken hareket denklemlerinin ayrıştırılabilmesi için kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri arasında a ve b skaler sayılar olmak üzere

$$C = aK \quad (3.271)$$

$$C = aK + bM \quad (3.272)$$

şeklinde tanımlandığı gibi bir orantı olması gerekir. Yapı sisteminde C , K ve M matrislerinin birbiriyle orantılı olduğu duruma orantılı sönüm adı verilir. Bu durumda denklemlerin ayrıklaştırılabildiğini göstermek amacıyla kat kütlelerinin birbirinden farklı ve kat rijitlikleriyle sönümlerinin birbiriyle orantılı olduğu bir şekildeki gibi sistem seçilmiştir.



Şekil 3.5: Farklı kütle ve sönümü olan üç serbestlikli sistem.

$$mg = 190kN$$

$$k = 13595kN/m \quad (3.273)$$

$$\xi = 0.02$$

Bu durumda sistem rijitlik, sönüm ve kütle matrisleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & & \\ & 1.5m & \\ & & m \end{bmatrix} \quad (3.274)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5c & -2c & \\ -2c & 3c & -c \\ & -c & c \end{bmatrix} \quad (3.275)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5k & -2k & \\ -2k & 3k & -k \\ & -k & k \end{bmatrix} \quad (3.276)$$

$\mathbf{M}^{-1/2}$ matrisi alınırsa

$$\mathbf{M}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2m} & & \\ & 1/\sqrt{1.5m} & \\ & & 1/\sqrt{m} \end{bmatrix} \quad (3.277)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{X} \quad (3.278)$$

çözümüne gidilir ve

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1/2} \quad (3.279)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2} \quad (3.280)$$

yazılarak \mathbf{C}_1 ve \mathbf{K}_1 reel simetrik matrisleri hesaplanırsa

$$\mathbf{C}_1 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 2.5 & -1.1547 & 0 \\ -1.1547 & 1 & -0.816497 \\ 0 & -0.816497 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.281)$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2.5 & -1.1547 & 0 \\ -1.1547 & 1 & -0.816497 \\ 0 & -0.816497 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.282)$$

\mathbf{C}_1 matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = 3.541936 \frac{c}{m} \quad (3.283)$$

$$\lambda_2 = 1.606600 \frac{c}{m} \quad (3.284)$$

$$\lambda_3 = 0.351465 \frac{c}{m} \quad (3.285)$$

olacaktır. Buradan hazırlanan bir bilgisayar programı yardımıyla, \mathbf{K}_1 matrisi kullanılarak $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1$ çarpımını diyagonal matris haline getiren ortogonal bir \mathbf{Q}_1 matrisi bulunur.

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0.725814 & -0.610483 & -0.317024 \\ -0.654933 & -0.472336 & -0.589882 \\ 0.210372 & 0.635775 & -0.742654 \end{bmatrix} \quad (3.286)$$

\mathbf{C}_2 matrisi $\mathbf{C}_2 = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1$ ve \mathbf{K}_2 matrisi de $\mathbf{K}_2 = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1$ formüllerinden bulunur.

$$\mathbf{C}_2 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 3.541936 & 0. & 0. \\ 0. & 1.606600 & 0. \\ 0. & 0. & 0.351465 \end{bmatrix} \quad (3.287)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 3.541936 & 0. & 0. \\ 0. & 1.606600 & 0. \\ 0. & 0. & 0.351465 \end{bmatrix} \quad (3.288)$$

Hatırlanırsa sistemin hareket denklemi

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{M}^{-1/2} F(t) \quad F(t) = \mathbf{M} \{ \mathbf{1} \} \ddot{u}_{G0} \sin \Omega t \quad (3.289)$$

şekindedir. \mathbf{K}_2 ve \mathbf{C}_2 matrisleri diyagonal matrisler olduğu için her bir serbestliğe ait hareket denklemleri

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{m} 3.541936 \dot{y}_1 + \frac{k}{m} 3.541936 y_1 = f_1(t) \quad (3.290)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{c}{m} 1.606600 \dot{y}_2 + \frac{k}{m} 1.606600 y_2 = f_2(t) \quad (3.291)$$

$$\ddot{y}_3 + \frac{c}{m} 0.351465 \dot{y}_3 + \frac{k}{m} 0.351465 y_3 = f_3(t) \quad (3.292)$$

olarak ayrıklaştırılır. Bu denklemler

$$\ddot{y}_i + \frac{c}{m} \lambda_i \dot{y}_i + \frac{k}{m} \lambda_i y_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.293)$$

şeklinde tek bir denklemle ifade edilebilir. Bu denklemde

$$\frac{c}{m} \lambda_n = 2w_n \xi_n \quad (n = 1, 2, 3) \quad (3.294)$$

$$\frac{k}{m}\lambda_n = w_n^2 \quad (n = 1, 2, 3) \quad (3.295)$$

kısaltmaları yapılır ve k, m değerleri yerine sayısal karşılıkları konulursa

$$w_1 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2}} 3.541936 = 49.8618Hz \quad T_1 = 2\pi/w_1 = 0.126sn \quad (3.296)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2}} 1.606600 = 33.5816Hz \quad T_2 = 2\pi/w_2 = 0.187sn \quad (3.297)$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2}} 0.351465 = 15.7068Hz \quad T_3 = 2\pi/w_3 = 0.400sn \quad (3.298)$$

olarak sistemin açısal hızları ve periyodları bulunabilir. Örnekte verildiği üzere yapının hakim modunda sönüm oranını $\xi = 0.02$ olduğu kabulü yapılırsa, buradan c sönüm katsayısı ve diğer modlara gelen sönüm oranları bulunabilir.

$$\frac{c}{m}\lambda_3 = 2w_3\xi_n \quad (3.299)$$

$$\frac{c}{190kN/9.81m/sn^2} 0.351465 = 2 \times 15.7068 \text{ 1/sn} \times 0.02 \quad (3.300)$$

$$c = 34.618kN \text{ sn/m} \quad (3.301)$$

Diğer modlardaki sönüm oranları

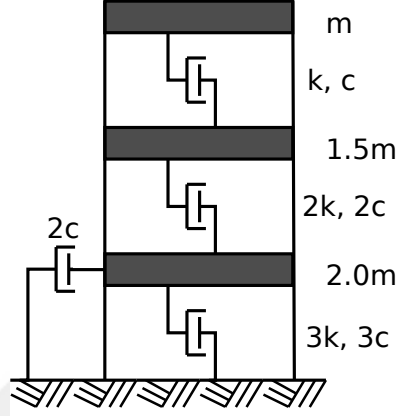
$$\frac{34.618}{190kN/9.81m/sn^2} 3.541936 = 2 \times 49.8618 \text{ 1/sn} \times \xi_1 \quad \xi_1 = 0.094 \quad (3.302)$$

$$\frac{34.618}{190kN/9.81m/sn^2} 1.606600 = 2 \times 33.5816 \text{ 1/sn} \times \xi_2 \quad \xi_2 = 0.043 \quad (3.303)$$

olarak bulunabilir.

3.5.3 Kütlelerin farklı olması ve orantısız sönüm olması durumu

Orantısız sönüm durumunu incelemek için orantılı sönüm durumunun incelendiği sistem tekrar alındı fakat bu kez aynı sistemin en alt katına Şekil 3.6 'de görüldüğü gibi yeni bir sönüm kutusu eklendi.



Şekil 3.6: Farklı kütle ve orantısız sönümü olan üç serbestlikli sistem.

$$mg = 190kN$$

$$k = 13595kN/m \quad (3.304)$$

$$\xi = 0.02$$

Bu durumda sistem matrisleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & & \\ & 1.5m & \\ & & m \end{bmatrix} \quad (3.305)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7c & -2c & \\ -2c & 3c & -c \\ & -c & c \end{bmatrix} \quad (3.306)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5k & -2k & \\ -2k & 3k & -k \\ & -k & k \end{bmatrix} \quad (3.307)$$

$M^{-1/2}$ matrisi alınırsa

$$\mathbf{M}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{1.5m} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{m} \end{bmatrix} \quad (3.308)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} \quad (3.309)$$

çözümüne gidilir ve

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (3.310)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (3.311)$$

yazılıp C_1 ve K_1 reel simetrik matrisleri hesaplanırsa

$$\mathbf{C}_1 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 3.5 & -1.1547 & 0 \\ -1.1547 & 1 & -0.816497 \\ 0 & -0.816497 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.312)$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2.5 & -1.1547 & 0 \\ -1.1547 & 1 & -0.816497 \\ 0 & -0.816497 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.313)$$

bulunur. \mathbf{K}_1 matrisi değişmediğinden öz değerler ve \mathbf{Q}_1 ortogonal matrisi bir önceki problemdekiyle aynı bulunacaktır. Bu durumda

$$\lambda_1 = 3.541936 \frac{c}{m} \quad (3.314)$$

$$\lambda_2 = 1.606600 \frac{c}{m} \quad (3.315)$$

$$\lambda_3 = 0.351465 \frac{c}{m} \quad (3.316)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0.725814 & -0.610483 & -0.317024 \\ -0.654933 & -0.472336 & -0.589882 \\ 0.210372 & 0.635775 & -0.742654 \end{bmatrix} \quad (3.317)$$

olur. \mathbf{C}_2 matrisi $\mathbf{C}_2 = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_1$ ve \mathbf{K}_2 matrisi $\mathbf{K}_2 = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1$ formüllerinden bulunur.

$$\mathbf{C}_2 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 4.06874 & -0.443097 & -0.2301 \\ -0.443097 & 1.97929 & 0.193538 \\ -0.2301 & 0.193538 & 0.451969 \end{bmatrix} \quad (3.318)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 3.541936 & 0. & 0. \\ 0. & 1.606600 & 0. \\ 0. & 0. & 0.351465 \end{bmatrix} \quad (3.319)$$

Görüldüğü üzere \mathbf{K}_2 matrisi diyagonal haline gelmiş ancak \mathbf{C}_2 matrisi getirilememiştir ve dolayısıyla sistem ayrıklaşmamıştır. Sistemi ayrıklaştırmak için bu noktada \mathbf{C}_2 matrisinde diyagonal haricindeki terimler atılır. Bu durumda

$$\mathbf{C}_2 = \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 4.06874 & 0 & 0 \\ 0 & 1.97929 & 0 \\ 0 & 0 & 0.451969 \end{bmatrix} \quad (3.320)$$

halini alacaktır. Sistemin hareket denklemi

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t) \quad \mathbf{F}(t) = \mathbf{M} \{1\} \ddot{u}_{G0} \sin \Omega t \quad (3.321)$$

halini almıştır. \mathbf{K}_2 ve \mathbf{C}_2 matrisleri diyagonal matrisler olduğu için her bir kütle için hareket denklemi

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{m} 4.06874 y_1 + \frac{k}{m} 3.541936 y_1 = f_1(t) \quad (3.322)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{c}{m} 1.97929 y_2 + \frac{k}{m} 1.606600 y_2 = f_2(t) \quad (3.323)$$

$$\ddot{y}_3 + \frac{c}{m} 0.451969 y_3 + \frac{k}{m} 0.351465 y_3 = f_3(t) \quad (3.324)$$

olacaktır. Sistemdeki serbestliklerin açısal hızları ve periyodları ise

$$w_1 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2} 3.541936} = 49.8618Hz \quad T_1 = 2\pi/w_1 = 0.126sn \quad (3.325)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2} 1.606600} = 33.5816Hz \quad T_2 = 2\pi/w_2 = 0.187sn \quad (3.326)$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{13595kN/m}{190kN/9.81m/sn^2} 0.351465} = 15.7068Hz \quad T_3 = 2\pi/w_3 = 0.400sn \quad (3.327)$$

olarak bulunmuştur. Bu problemde c sönüm sabitinin değeri karşılaştırma amacıyla bir önceki problemde bulunan değerle aynı alınırsa, sönüm oranları

$$\frac{34.618}{190kN/9.81m/sn^2} 4.06874 = 2 \times 49.8618 \, 1/sn \times \xi_1 \quad \xi_1 = 0.073 \quad (3.328)$$

$$\frac{34.618}{190kN/9.81m/sn^2} 1.97929 = 2 \times 33.5816 \, 1/sn \times \xi_2 \quad \xi_2 = 0.053 \quad (3.329)$$

$$\frac{34.618}{190kN/9.81m/sn^2} 0.451969 = 2 \times 15.7068 \, 1/sn \times \xi_3 \quad \xi_3 = 0.026 \quad (3.330)$$

şeklinde hesaplanır. Ayırıklaştırılan hareket denklemlerinden her bir serbestliğe ait yer değiştirmeler bulunabilir. Bu problem için sisteme gelen yükü

$$F(t) = \mathbf{M} \{ \mathbf{1} \} \ddot{u}_{G0} \sin(\Omega t) \quad (3.331)$$

$$F(t) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 1 \end{Bmatrix} m \ddot{u}_{G0} \sin(\Omega t) \quad (3.332)$$

olarak gösterirsek hareket denklemi

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{M}^{-1/2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 1 \end{Bmatrix} m \ddot{u}_{G0} \sin(\Omega t) \quad (3.333)$$

olacaktır. Bu problem için denklemin sağ tarafındaki $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{M}^{-1/2}$ yerine konulursa denklem

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}_2 \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} 0.434701 \\ -0.806069 \\ -1.913449 \end{Bmatrix} \sqrt{m} \ddot{u}_{G0} \sin(\Omega t) \quad (3.334)$$

halini alacaktır. Bu denklem üzerinden her bir serbestliğin hareket denklemini

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{m} 4.06874 y_1 + \frac{k}{m} 3.541936 y_1 = 0.434701 \sqrt{m} \ddot{u}_{G0} \sin(\Omega t) \quad (3.335)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{c}{m} 1.97929 y_2 + \frac{k}{m} 1.606600 y_2 = -0.806069 \sqrt{m} \ddot{u}_{G0} \sin(\Omega t) \quad (3.336)$$

$$\ddot{y}_3 + \frac{c}{m} 0.451969 y_3 + \frac{k}{m} 0.351465 y_3 = -1.913449 \sqrt{m} \ddot{u}_{G0} \sin(\Omega t) \quad (3.337)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemleri çözmek için aşağıdaki örnek denklemin çözümü yeterlidir.

$$\ddot{y}_i + \frac{c}{m}\alpha_i\dot{y}_i + \frac{k}{m}\beta_i y_i = A_i \sin \Omega t \quad (3.338)$$

Bu denklemde sadece özel çözüm dikkate alınacaktır,

$$w_i = \sqrt{\frac{k}{m}\beta_i} \quad \xi_i = \frac{c}{2mw_i}\alpha_i \quad i = (1, 2, 3) \quad (3.339)$$

olmak üzere çözüm

$$y = \frac{A_i}{4w_i^2\xi_i^2\Omega^2 + (w_i^2 - \Omega^2)^2} \left((w_i^2 - \Omega^2) \sin \Omega t - 2 w_i\xi_i\Omega \cos \Omega t \right) \quad (3.340)$$

olacaktır. Bu denklem basitleştirilirse

$$X1_i = \frac{A_i (w_i^2 - \Omega^2)}{4w_i^2\xi_i^2\Omega^2 + (w_i^2 - \Omega^2)^2} \quad (3.341)$$

$$X2_i = -\frac{A_i 2 w_i\xi_i\Omega}{4w_i^2\xi_i^2\Omega^2 + (w_i^2 - \Omega^2)^2} \quad (3.342)$$

olmak üzere

$$y_i = X1_i \sin \Omega t + X2_i \cos \Omega t \quad (3.343)$$

yazılabilir. Zamana göre iki kez türevi alınarak ivme değerlerine ulaşılabilir.

$$\ddot{y}_i = -\Omega^2 (X1_i \sin \Omega t + X2_i \cos \Omega t) \quad (3.344)$$

Sistem ayrıklaştırılırken

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} \quad (3.345)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q} \mathbf{Y} \quad (3.346)$$

dönüşümleri yapılmıştı. Dolayısıyla (3.343) da görülen ayrıklaştırılmış hareket denklemlerinin çözümünden bulunan yer değiştirmelerden sistemin gerçek yer değiştirmelerine dönülürse

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{Y} \quad (3.347)$$

dönüşümü yapılmalıdır. Dolayısıyla gerçek ivmeler için de

$$\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \ddot{\mathbf{Y}} \quad (3.348)$$

dönüşümü yazılabilir. (3.344) denklemi matris formunda yazılırsa ve $\ddot{\mathbf{Y}}$ vektörü (3.348) denklemde yerine konulursa

$$\ddot{\mathbf{Y}} = -\Omega^2 (\mathbf{X1} \sin \Omega t + \mathbf{X2} \cos \Omega t) \quad (3.349)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} (-\Omega^2 (\mathbf{X1} \sin \Omega t + \mathbf{X2} \cos \Omega t)) \quad (3.350)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = -\Omega^2 (\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{X1} \sin \Omega t + \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{X2} \cos \Omega t) \quad (3.351)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde de

$$\mathbf{A1} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{X1} \quad (3.352)$$

$$\mathbf{A2} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{X2} \quad (3.353)$$

kısaltmaları yapılırsa denklem

$$\ddot{\mathbf{U}} = -\Omega^2 (\mathbf{A1} \sin \Omega t + \mathbf{A2} \cos \Omega t) \quad (3.354)$$

halini alacaktır. $\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Q}$ çarpımı (3.352) ve (3.353) denklemlerinde yerine konulursa

$$\begin{Bmatrix} A1_1 \\ A1_2 \\ A1_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.513228 & -0.431677 & -0.22417 \\ -0.534751 & -0.38566 & -0.481637 \\ 0.210371 & 0.635775 & -0.742654 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X1_1 \\ X1_2 \\ X1_3 \end{Bmatrix} \quad (3.355)$$

$$\begin{Bmatrix} A2_1 \\ A2_2 \\ A2_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.513228 & -0.431677 & -0.22417 \\ -0.534751 & -0.38566 & -0.481637 \\ 0.210371 & 0.635775 & -0.742654 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X2_1 \\ X2_2 \\ X2_3 \end{Bmatrix} \quad (3.356)$$

bulunur. Yapıdan zemine gelen kuvvet ve yapıya etkiyen kuvvet arasındaki orana geçiş oranı (*transmissibility ratio*) denir. Bu durumda sistemin herhangi bir i katına ait geçiş oranları

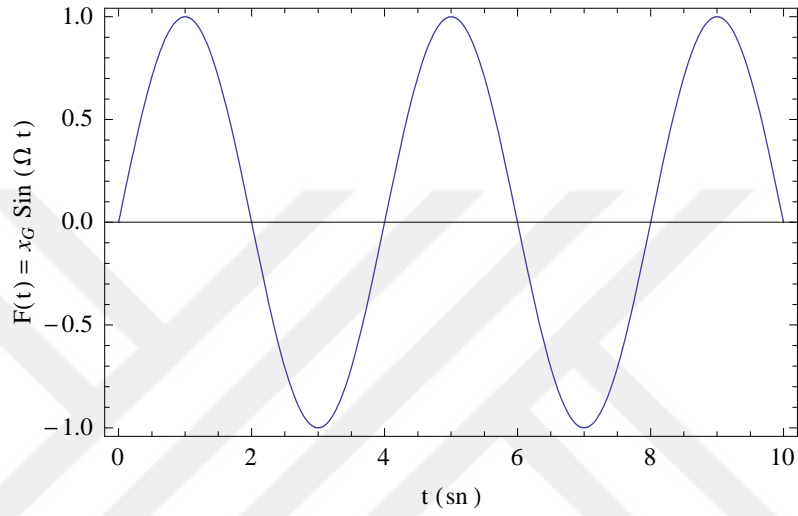
$$T_i = \frac{\Omega^2 \sqrt{\mathbf{A1}_i^2 + \mathbf{A2}_i^2}}{\ddot{u}_{G0}} \quad (3.357)$$

olarak bulunabilir. Bu denklemler yardımıyla her bir serbestlik için etkiyen yükün frekansı - geçiş oranı (*transmissibility*) grafikleri çizilebilir. (Cropper, 2006)

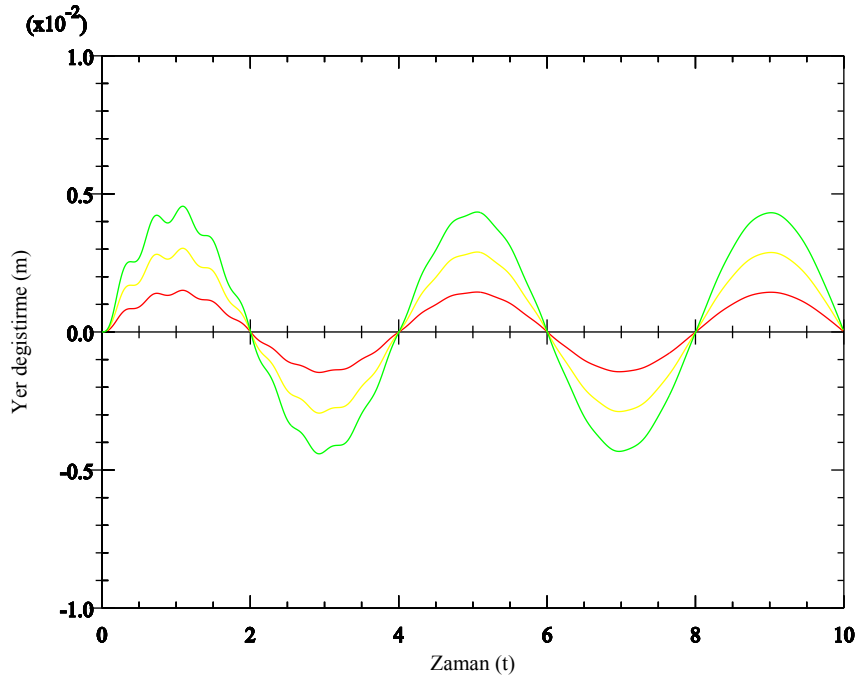
Benzer şekilde gerçek yer değiştirmeleri bulmak için

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.513228 & -0.431677 & -0.22417 \\ -0.534751 & -0.38566 & -0.481637 \\ 0.210371 & 0.635775 & -0.742654 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (3.358)$$

dönüşümü yapılır. Etkiyen yükün Şekil 3.7 'deki gibi olduğu kabul edilirse, sistemdeki her bir serbestliğin yer değiştirmesi bir grafik üzerinde gösterilebilir.



Şekil 3.7: Şekil 3.6 'daki sisteme etkiyen dış yükün zamanla değişim grafiği.



Şekil 3.8: Şekil 3.6 sisteminin her üç serbestliğine ait yer değiştirme - zaman grafiği.

3.5.4 Problemin kesin çözümü

Bu problemde özel olarak sistem farklı bir şekilde çözülebilir. Sistemin hareket denklemi (3.239) ifadesinde gösterilmiştir.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = M \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_{G0} \sin \Omega t \quad (3.359)$$

Bu denklem takımının özel çözümü $X1$ ve $X2$ sabit vektörler olmak üzere

$$U = \ddot{x}_{G0} (X1 \sin \Omega t + X2 \cos \Omega t) \quad (3.360)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\dot{U} = \Omega \ddot{x}_{G0} (X1 \cos \Omega t - X2 \sin \Omega t) \quad (3.361)$$

$$\ddot{U} = -\Omega^2 \ddot{x}_{G0} (X1 \sin \Omega t + X2 \cos \Omega t) \quad (3.362)$$

olduğu görülür. (3.359) denklemini soldan M^{-1} ile çarpılırsa denklem şeklinde hesaplanır.

$$\ddot{U} + M^{-1}C\dot{U} + M^{-1}KU = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_{G0} \sin \Omega t \quad (3.363)$$

halini alır. Bu denklemde

$$C_1 = M^{-1}C \quad K_1 = M^{-1}K \quad (3.364)$$

kısaltmaları yapılırsa (3.359) hareket denklemi

$$\ddot{U} + C_1\dot{U} + K_1U = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_{G0} \sin \Omega t \quad (3.365)$$

halini alır. Bu denklemde (3.360), (3.361) ve (3.362) eşitliklerini yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& -\Omega^2 \ddot{x}_{G0} (\mathbf{X1} \sin \Omega t + \mathbf{X2} \cos \Omega t) \\
& + \mathbf{C}_1 \Omega \ddot{\mathbf{x}}_{G0} (\mathbf{X1} \cos \Omega t - \mathbf{X2} \sin \Omega t) \\
& + \mathbf{K}_1 \ddot{x}_{G0} (\mathbf{X1} \sin \Omega t + \mathbf{X2} \cos \Omega t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{x}_{G0} \sin \Omega t \quad (3.366)
\end{aligned}$$

$$(-\Omega^2 \mathbf{X1} - \Omega \mathbf{C}_1 \mathbf{X2} + \mathbf{K}_1 \mathbf{X1}) \sin \Omega t \quad (3.367)$$

$$+ (-\Omega^2 \mathbf{X2} + \Omega \mathbf{C}_1 \mathbf{X1} + \mathbf{K}_1 \mathbf{X2}) \cos \Omega t = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin \Omega t \quad (3.368)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte $\sin \Omega t$ ve $\cos \Omega t$ 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$-\Omega^2 \mathbf{X1} - \Omega \mathbf{C}_1 \mathbf{X2} + \mathbf{K}_1 \mathbf{X1} = \{1\} \quad (3.369)$$

$$-\Omega^2 \mathbf{X2} + \Omega \mathbf{C}_1 \mathbf{X1} + \mathbf{K}_1 \mathbf{X2} = 0 \quad (3.370)$$

şeklinde iki ayrı denklem takımı bulunur. Bu denklem takımlarından $\mathbf{X1}$ ve $\mathbf{X2}$ sabit vektörleri bulunabilir. (3.369) ve (3.370) denklemleri sadeleştirilirse

$$\mathbf{X1} = \mathbf{C}_1^{-1} \frac{1}{\Omega} [\mathbf{I}\Omega^2 - \mathbf{K}_1] \mathbf{X2} \quad (3.371)$$

$$\left([\mathbf{K}_1 - \mathbf{I}\Omega^2] \mathbf{C}_1^{-1} \frac{1}{\Omega} [\mathbf{I}\Omega^2 - \mathbf{K}_1] - \Omega \mathbf{C}_1 \right) \mathbf{X2} = \{1\} \quad (3.372)$$

olarak bulunur. (3.372) denkleminde $\mathbf{X2}$ vektörü bulunur, $\mathbf{X1}$ vektörü de $\mathbf{X2}$ vektörü (3.371) denkleminde kullanılarak

$$\mathbf{X2} = \left(\frac{1}{\Omega} [\mathbf{K}_1 - \mathbf{I}\Omega^2] \mathbf{C}_1^{-1} [\mathbf{I}\Omega^2 - \mathbf{K}_1] - \Omega \mathbf{C}_1 \right)^{-1} \{1\} \quad (3.373)$$

$$\mathbf{X1} = \mathbf{C}_1^{-1} \frac{1}{\Omega} [\mathbf{I}\Omega^2 - \mathbf{K}_1] \left(\frac{1}{\Omega} [\mathbf{K}_1 - \mathbf{I}\Omega^2] \mathbf{C}_1^{-1} [\mathbf{I}\Omega^2 - \mathbf{K}_1] - \Omega \mathbf{C}_1 \right)^{-1} \{1\} \quad (3.374)$$

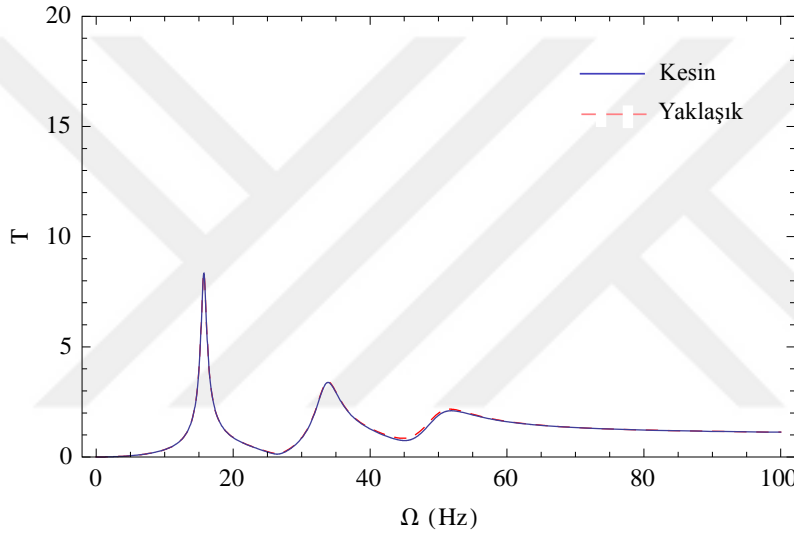
şeklinde bulunur. (3.362) denklemini hatırlanırsa

$$\ddot{\mathbf{U}} = -\Omega^2 \ddot{x}_{G0} (\mathbf{X1} \sin \Omega t + \mathbf{X2} \cos \Omega t) \quad (3.375)$$

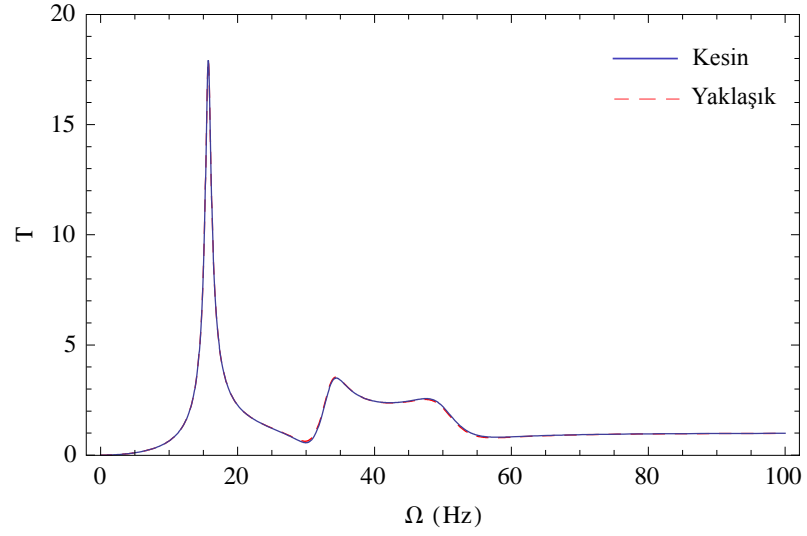
herhangi bir kat için geçiş oranı

$$T_i = \Omega 2 \sqrt{X1_i^2 + X2_i^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.376)$$

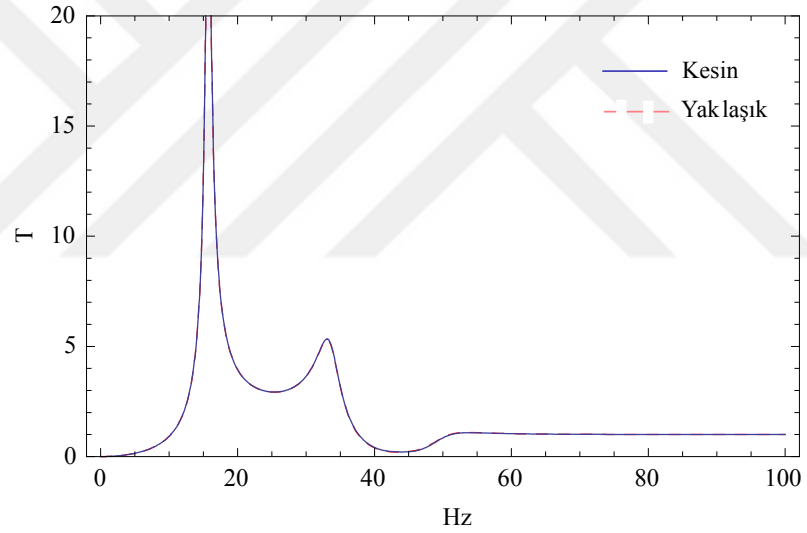
bulunur. Kesin hesaba göre her kat için yukarıdaki denklem bir *Mathematica* programıyla hesaplanıp geçiş oranı-frekans eğrileri çizilmiştir. Sistemi ayrıklaştırmak için C_2 matrisindeki diyagonal dışı terimlerin dikkate alınmadığı, (3.357) denklemdeki yaklaşık çözüme göre bulunan geçiş oranları karşılaştırılırsa, bu örnek için iki çözüm arasında sonuçlarda hiç bir fark olmadığı görülmüştür. şekil 7, 8 ve 9 'da eğrilerin st üste çakıştığı görülmektedir.



şekil 3.9: şekil 3.6'daki sistemin birinci serbestliğinine ait geçiş oranı - frekans grafiklerinin kesin ve yaklaşık çözümler için karşılaştırması.



Şekil 3.10: Şekil 3.6'daki sistemin ikinci serbestliğine ait geçiş oranı - frekans grafiklerinin kesin ve yaklaşık çözümler için karşılaştırması.



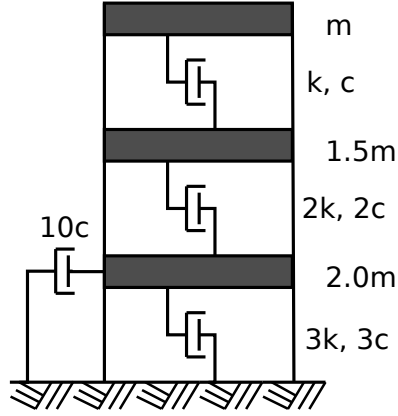
Şekil 3.11: Şekil 3.6'deki sistemin üçüncü serbestliğine ait geçiş oranı - frekans grafiklerinin kesin ve yaklaşık çözümler için karşılaştırması.

3.6 Orantısız Sönüm Durumuna Örnek Problemler

3.6.1 Orantısız sönüm durumu gösteren örnek problem 1

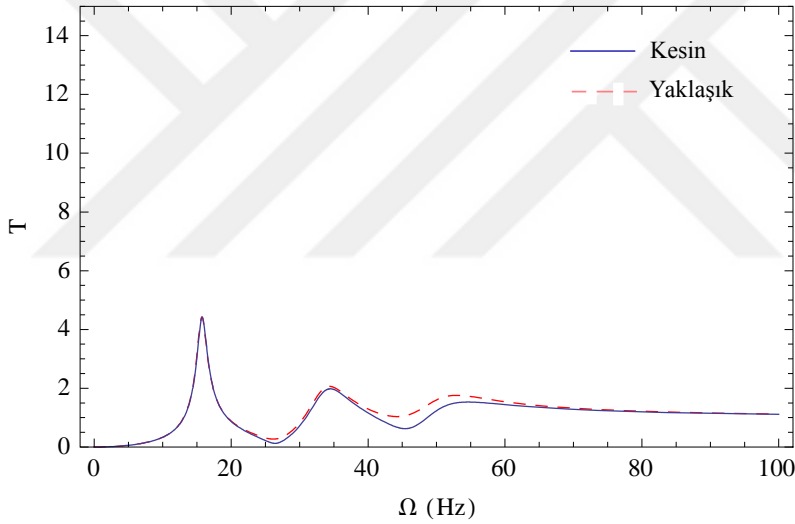
Yaklaşık çözüm ile kesin çözümler arasındaki farkı incelemek için Şekil 3.12 daki örnek seçilmiştir. Problemden tüm katlar için rijitlikle orantılı sönüm elemanları seçilirken, sadece birinci serbestlikte kütle ile orantılı sönüm elemanı seçilmiştir.

Şekil 3.12 deki sistem için geçiş oranı - frekans eğrileri Şekil 3.13 - 3.15 arasında çizilmiştir. Grafikler incelenirse bu durumda eğrilerde çok küçük bir sapma olduğu



Şekil 3.12: Farklı kütle ve orantısız sönümü olan üç serbestlikli sistem.

görülür. Grafiklerde sönüm matrisinde diyagonal dışı terimlerin atıldığı yaklaşık çözüm kesikli çizgiyle, kesin çözüm ise düz çizgiyle gösterilmiştir.

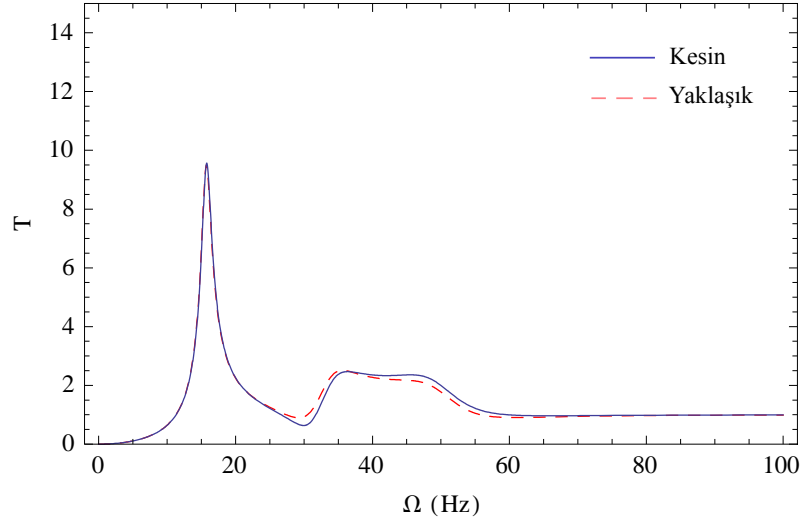


Şekil 3.13: Orantısız sönüm durumu örnek problem 1 'in birinci serbestlik için kesin ve yaklaşık çözümlerinin geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.

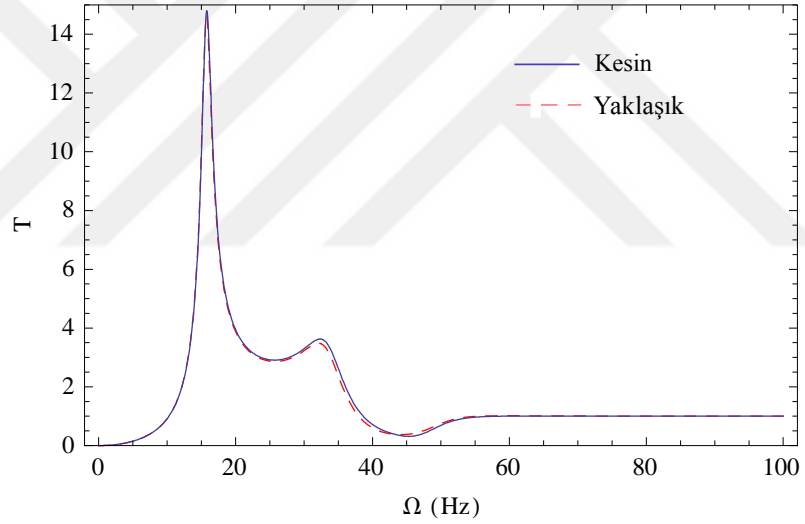
3.6.2 Orantısız sönüm durumu örnek problem 2

Yaklaşık çözüm ile kesin çözümler arasındaki farklı incelemek için bu kez tüm katlara gelen sönümler artırılmıştır. Problemden tüm katlar için hem rijitlikle hem de kat kütleleriyle orantılı sönüm elemanları alınmıştır.

Şekil 3.16 deki sistem için geçiş oranı - frekans eğrileri Şekil 3.17 - 3.19 arasında çizilmiştir. Grafikler incelenirse bu durumda eğrilerde daha büyük bir sapma olduğu görülür. Grafiklerde sönüm matrisinde diyagonal dışı terimlerin atıldığı yaklaşık çözüm kesikli çizgiyle, kesin çözüm ise düz çizgiyle gösterilmiştir.



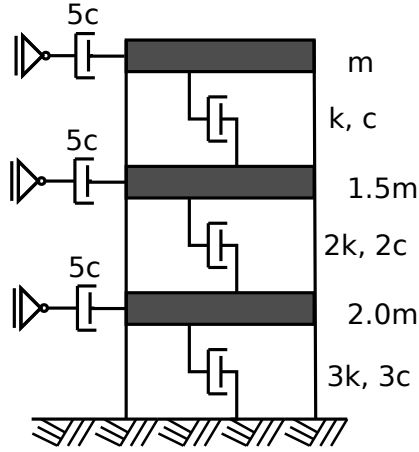
Şekil 3.14: Problem 1- İkinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması



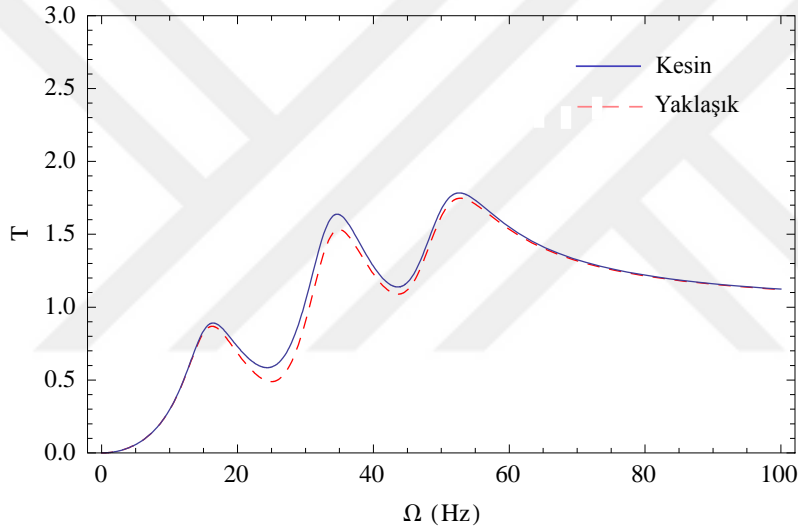
Şekil 3.15: Problem 1- Üçüncü serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması

3.6.3 Orantısız sönüm durumu örnek problem 3

Bu örnekte Problem 2’de seçilen değerler seçilmiş fakat bu kez c sönüm katsayısı 10 misli arttırılmıştır. Bu durumda sistemdeki serbestliklerin geçiş oranı - frekans eğrileri Şekil 3.20 -3.22 arasında çizilmiştir.



Şekil 3.16: Farklı kütle ve orantısız sönümü olan üç serbestlikli sistem.



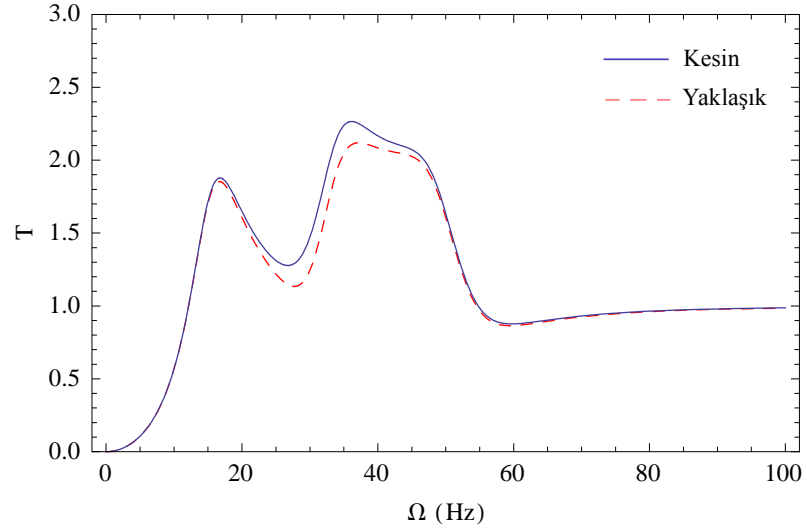
Şekil 3.17: Problem 2- Birinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.

3.7 Üç Serbestlik Dereceli Sistemin Kesin Çözümü

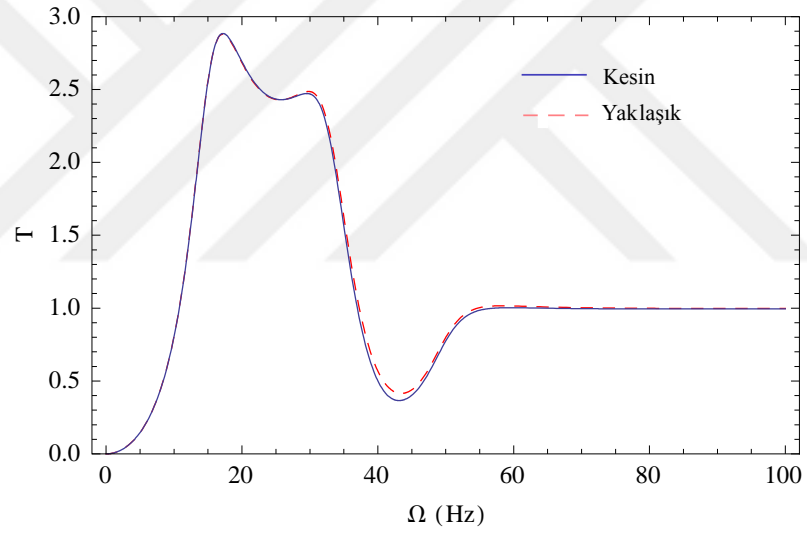
Sönüm matrisinde çözüm için diyagonal dışı elemanların atılmasının neden olacağı farklılıkları incelemek için sistemin kesin çözümünden bulunan çözümler karşılaştırılır. Kesin çözümü bulabilmek için ilk olarak sistemin hareket denklemi, A bir vektör olmak üzere

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = A.f(t) \quad (3.377)$$

$$C1 = M^{-1}C \quad K1 = M^{-1}K \quad A1 = M^{-1}A \quad (3.378)$$



Şekil 3.18: Problem 2- İkinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.



Şekil 3.19: Problem 2- Üçüncü serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.

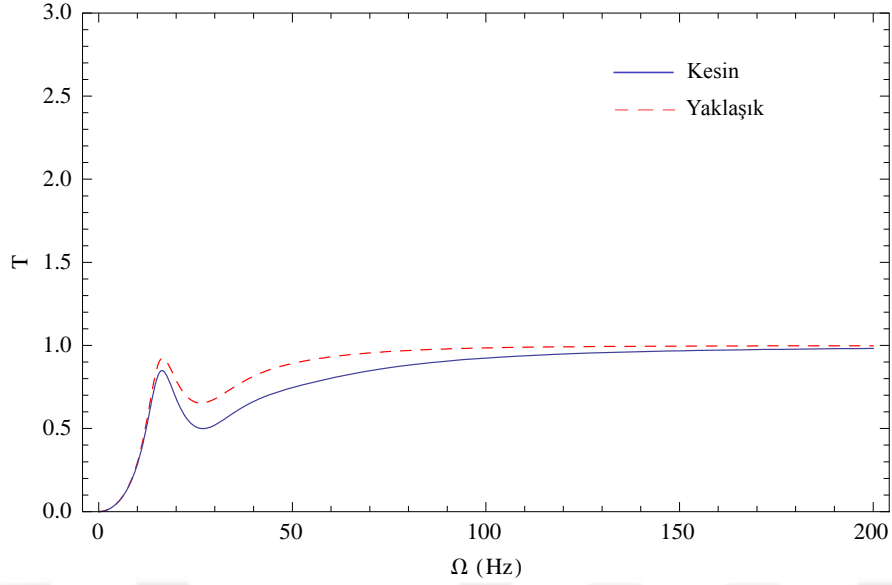
yazılırsa

$$\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C1}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K1}\mathbf{U} = \mathbf{A1}f(t) \quad (3.379)$$

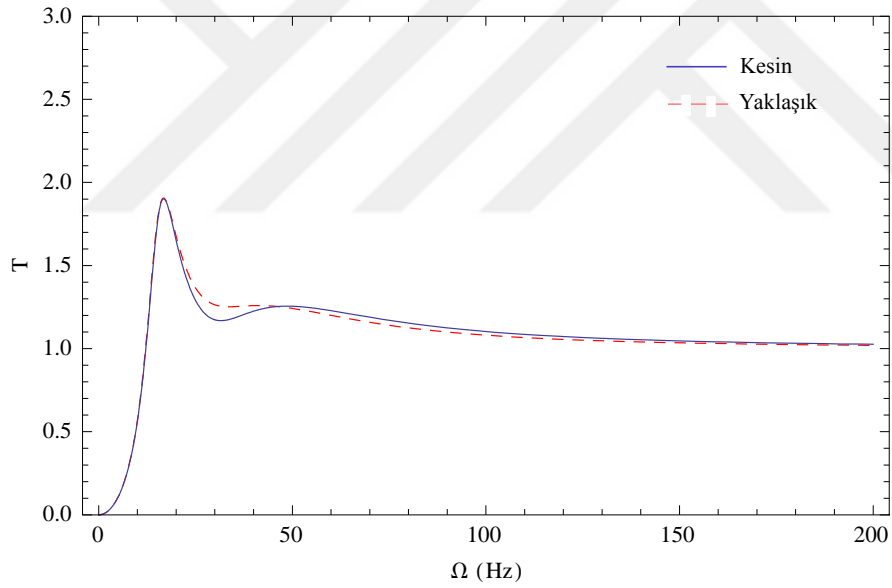
olacaktır. Bu denklemin Laplace dönüşümü (Sneddon, 1972, Bateman, 1954) alınırsa

$$s^2\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{C1}s\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{K1}\mathbf{U} = \mathbf{A1}\bar{f}(s) \quad (3.380)$$

$$[s^2\mathbf{I} + \mathbf{C1}s + \mathbf{K1}] \bar{\mathbf{U}}(s) = \mathbf{A1}\bar{f}(s) \quad (3.381)$$



Şekil 3.20: Problem 3- Birinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.



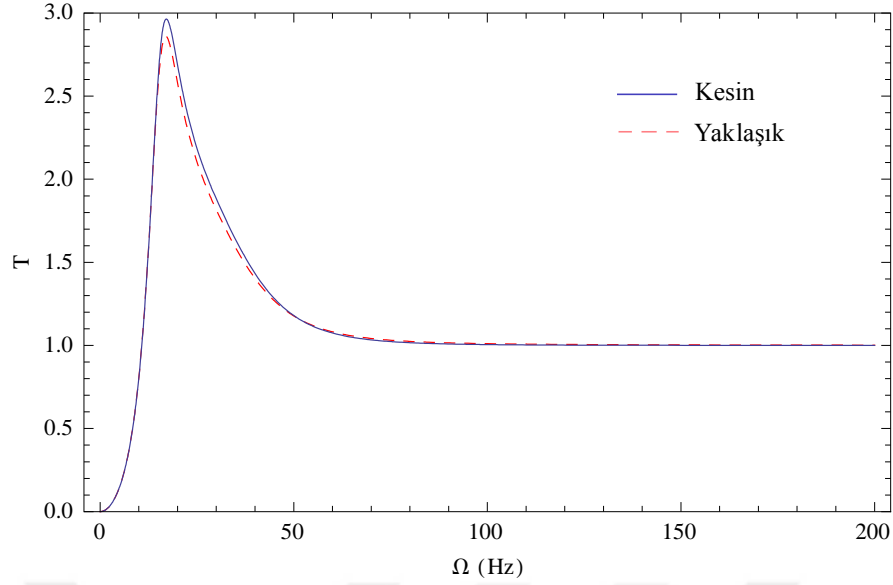
Şekil 3.21: Problem 3- İkinci serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.

bulunur. Burada

$$\mathbf{S}(s) = s^2\mathbf{I} + \mathbf{C}1s + \mathbf{K}1 \quad (3.382)$$

olmak üzere

$$\mathbf{S}^{-1}(s) = \frac{1}{\det \mathbf{S}} \text{Adj } \mathbf{S} \quad (3.383)$$



Şekil 3.22: Problem 3- Üçüncü serbestlik için geçiş oranı - frekans grafiği karşılaştırması.

$$\mathbf{S}(s)\bar{\mathbf{U}}(s) = \mathbf{A}\mathbf{1}\bar{f}(s) \quad (3.384)$$

$$\bar{\mathbf{U}}(s) = \mathbf{S}^{-1}(s) \mathbf{A}\mathbf{1}\bar{f}(s) \quad (3.385)$$

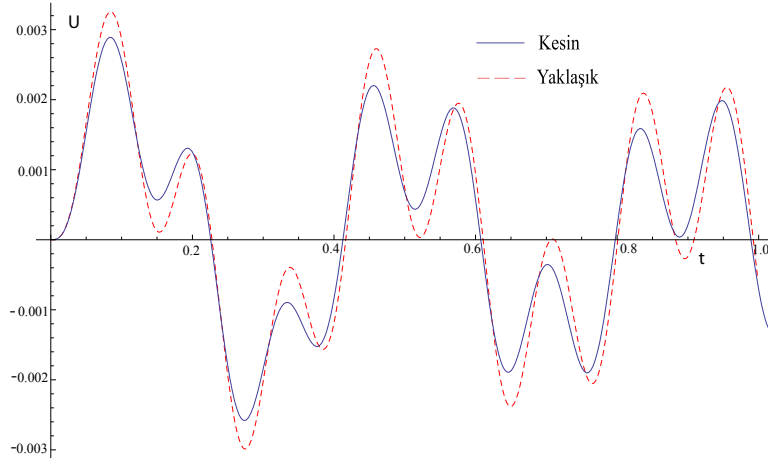
bulunacaktır. Bu denklemde $\bar{\mathbf{U}}(s)$ bir vektördür. Örneğin üç serbestlik dereceli bir sistem için vektörün bileşenleri açık olarak

$$\bar{U}_1(s) = S_{11}^{-1}A_{11} + S_{12}^{-1}A_{12} + S_{13}^{-1}A_{13} \quad (3.386)$$

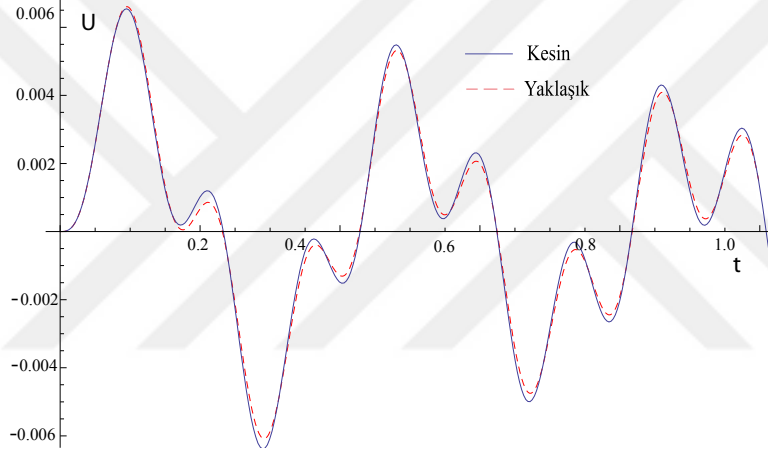
$$\bar{U}_2(s) = S_{21}^{-1}A_{11} + S_{22}^{-1}A_{12} + S_{23}^{-1}A_{13} \quad (3.387)$$

$$\bar{U}_3(s) = S_{31}^{-1}A_{11} + S_{32}^{-1}A_{12} + S_{33}^{-1}A_{13} \quad (3.388)$$

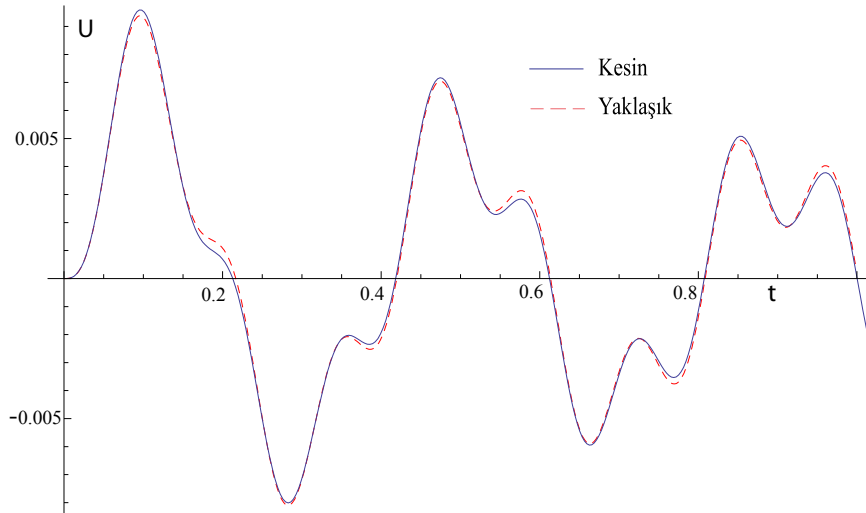
gibi yazılabilir. Bu denklemlerin ters dönüşümleri Mathematica programında ayrı ayrı alınırsa sistemin yer değiştirmeleri bulunabilir. Örnek problem 1 için kesin çözümden bulunan yer değiştirmelerle yaklaşık çözümden bulunan yer değiştirmeler karşılaştırması Şekil 3.23, 3.24 ve 3.25 üzerinde görülebilir. Bu problem için bulunan geçiş oranı - frekans eğrisi değerlendirilerek en büyük farkın etkiyen yükün frekansının $50Hz$ civarında olacağı görülmüş ve $\Omega = 50Hz$ seçilmiştir.



Şekil 3.23: Problem 1- Birinci serbestlik için kesin ve yaklaşık çözümlerde yerdeğiştirmelerin karşılaştırması.



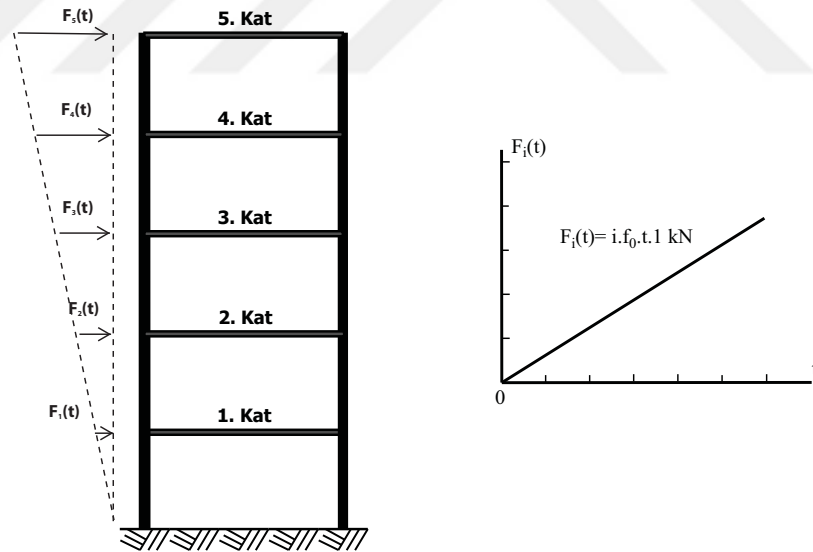
Şekil 3.24: Problem 1- İkinci serbestlik için kesin ve yaklaşık çözümlerde yerdeğiştirmelerin karşılaştırması.



Şekil 3.25: Problem 1- Üçüncü serbestlik için kesin ve yaklaşık çözümlerde yerdeğiştirmelerin karşılaştırması.

4. YAPIDA RİJİTLİK MATRİSİNİN DEĞİŞMESİ DURUMU

Yapı sistemlerinde ortaya çıkan bir başka sorun artan yükler altında sistemde plastik mafsalların meydana gelmesi ve rijitlik matrisinin değişmesidir (Zareian ve Medina, 2010). Bu durumda problem nonlinear hale gelir. Yükler zamana bağlı olarak artarken rijitlik matrisi de zamana bağlı olarak azalır. Bundan önceki kısımda sönüm matrisinin alabileceği farklı durumlar irdelenmiş ve yapılan varsayımların hangi durumlarda sonuçları etkileyebileceği görülmüştür. Bu kısımda ise bir yapıdaki sönüm matrisinin değişimi incelenecektir. Bu değişim kaba bir şekilde Charney (2008) tarafından da incelenmiştir. Bunun için Şekil 4.1 'deki gibi 5 katlı bir düzlem çerçeve seçilmiştir, i nolu kata etkiyen yatay yükün zamanla değişimi de aynı şekilde gösterilmektedir.



Şekil 4.1: 5 katlı düzlem çerçeve ve etkiyen zamana bağlı kat yükleri.

Düzlem çerçevede kiriş olarak IPE300, kolon olarak HEB300 çelik kesitleri seçilmiş, kat ağırlığı olarak 50kN/m düşey yük etkilmiştir. İlk olarak düzlem çerçeveye kat yükseklikleri ile orantılı başlangıç yatay yükleri verilmiş ve daha sonra bu yükler aşamalı olarak arttırılmıştır. Yükler arttırıldıkça sistemde plastik mafsallar

oluşmaktadır. Başlangıçta ve mafsalların olduğu noktalarda sistemdeki, yanal yük seviyeleri, yatay deplasmanlar not edilmiştir. Daha sonra Şekil 4.1 deki düzlem çerçeve Şekil 4.3 deki sistem şeklinde basitleştirilmiş ve katların rijitlikleri hesaplanmıştır. Çizelge 4.1 - 4.6 arasındaki tablolarda mafsal olduğu zamanlardaki bu rijitlik değerleri yazılmıştır. Basitleştirilmiş sisteme ait rijitlik matrisi gerçek sistemin rijitlik matrisinden, kondansasyon yöntemiyle de bulunabilir. (Tezcan 1970).

Çizelge 4.1: Şekil 4.1 sisteminin başlangıç yüklemesinde kat rijitlikleri.

Başlangıç Yüklemesi	Yatay deplasman $\delta_n(m)$	$\delta_n - \delta_{n-1}$	D. Noktasına etkiyen yük kN	Toplam kesme yükü kN	Yay katsayısı $k = F/x(kN/m)$
1. Serbestlik	0,0051	0,0051	1	15	2941.1765
2. Serbestlik	0,0088	0,0037	2	14	3783.7838
3. Serbestlik	0,0117	0,0029	3	12	4137.9310
4. Serbestlik	0,0137	0,0020	4	9	4500.0000
5. Serbestlik	0,0153	0,0016	5	5	3125.0000

Çizelge 4.2: Şekil 4.1 sisteminde 1. mafsal olduğu sıradaki kat rijitlikleri.

1. Mafsal Oluşumu	Yatay deplasman $\delta_n(m)$	$\delta_n - \delta_{n-1}$	D. Noktasına etkiyen yük kN	Toplam kesme yükü kN	Yay katsayısı $k = F/x(kN/m)$
1. Serbestlik	0,0412	0,0412	8	120	2912.6214
2. Serbestlik	0,0707	0,0295	16	112	3796.6102
3. Serbestlik	0,0903	0,0196	24	96	4897.9592
4. Serbestlik	0,1100	0,0197	32	72	3654.8223
5. Serbestlik	0,1214	0,0114	40	40	3508.7719

Çizelge 4.3: Şekil 4.1 sisteminde 2. mafsal olduğu sıradaki kat rijitlikleri.

2. Mafsal Oluşumu	Yatay deplasman $\delta_n(m)$	$\delta_n - \delta_{n-1}$	D. Noktasına etkiyen yük kN	Toplam kesme yükü kN	Yay katsayısı $k = F/x(kN/m)$
1. Serbestlik	0,0610	0,0610	10,0000	150	2459.0164
2. Serbestlik	0,1046	0,0436	20	140	3211.0092
3. Serbestlik	0,1358	0,0312	30	120	3846.1538
4. Serbestlik	0,1577	0,0219	40	90	4109.5890
5. Serbestlik	0,1722	0,0145	50	50	3448.2759

Çizelge 4.4: Şekil 4.1 sisteminde 3. mafsal oluştuğu sıradaki kat rijitlikleri.

3. Mafsal Oluşumu	Yatay deplasman $\delta_n(m)$	$\delta_n - \delta_{n-1}$	D. Noktasına etkiyen yük kN	Toplam kesme yükü kN	Yay katsayısı $k = F/x(kN/m)$
1. Serbestlik	0.0841	0.0841	12	180	2140.3092
2. Serbestlik	0.1463	0.0622	24	168	2700.9646
3. Serbestlik	0.1897	0.0434	36	144	3317.9724
4. Serbestlik	0.2183	0.0286	48	108	3776.2238
5. Serbestlik	0.2366	0.0183	60	60	3278.6885

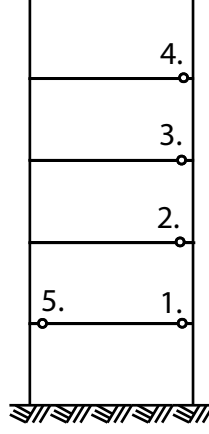
Çizelge 4.5: Şekil 4.1 sisteminde 4. mafsal oluştuğu sıradaki kat rijitlikleri.

4. Mafsal Oluşumu	Yatay deplasman $\delta_n(m)$	$\delta_n - \delta_{n-1}$	D. Noktasına etkiyen yük kN	Toplam kesme yükü kN	Yay katsayısı $k = F/x(kN/m)$
1. Serbestlik	0.1247	0.1247	15.2	228.0	1828.3881
2. Serbestlik	0.2204	0.0957	30.4	212.8	2223.6155
3. Serbestlik	0.2960	0.0756	45.6	182.4	2412.6984
4. Serbestlik	0.3340	0.0380	60.8	136.8	3600.0000
5. Serbestlik	0.3599	0.0259	76	76.0	2934.3629

Çizelge 4.6: Şekil 4.1 sisteminde 5. mafsal oluştuğu sıradaki kat rijitlikleri.

5. Mafsal Oluşumu	Yatay deplasman $\delta_n(m)$	$\delta_n - \delta_{n-1}$	D. Noktasına etkiyen yük kN	Toplam kesme yükü kN	Yay katsayısı $k = F/x(kN/m)$
1. Serbestlik	0.1260	0.1260	15.3	229.5	1821.4286
2. Serbestlik	0.2229	0.0969	30.6	214.2	2210.5263
3. Serbestlik	0.2930	0.0701	45.9	183.6	2619.1155
4. Serbestlik	0.3381	0.0451	61.2	137.7	3053.2151
5. Serbestlik	0.3645	0.0264	76.5	76.5	2897.7273

Çizelge 4.1 - 4.6 arasındaki bulunan kat rijitlikleri değerleri Çizelge 4.7 altında bir arada gösterilmiştir. Oluşan plastik mafsalların yerleri sırasıyla Şekil 4.2 'de görülmektedir.



Şekil 4.2: Şekil 4.1 'deki sistemde yük artımıyla sırasıyla oluşan plastik mafsallar.

Çizelge 4.7: Şekil 4.1 sisteminde rijitlik değişimleri.

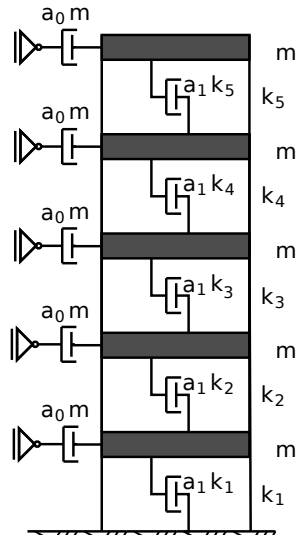
Oluşan plastik mafsalsal sayısı	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0	2941.17	3783.78	4137.93	4500	3125
1	2912.62	3796.61	4897.96	3654.82	3508.77
2	2459.01	3211.01	3846.15	4109.59	3448.28
3	2140.31	2700.96	3317.97	3776.22	3278.69
4	1828.39	2223.62	2412.7	3600	2934.36
5	1821.43	2210.53	2619.12	3053.22	2897.73

Şekil 4.3 deki düzlem 5 serbestlikli sistem her mafsalsal oluşumu sırasında sönüm matrislerinin ne derecede değiştiğine bakılacaktır. Şekil 4.3 sistemi için genel rijitlik matrisi

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \\ & & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 \\ & & & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

olarak yazılabilir. İlk olarak başlangıç yüklemesinde bulunan kat rijitlikleri kullanılarak rijitlik matrisi oluşturulabilir, bunun için Çizelge 4.2 'deki kat rijitliklerini kullanılırsa

$$K_0 = \begin{bmatrix} 6724.96 & -3783.78 & 0 & 0 & 0 \\ -3783.78 & 7921.71 & -4137.93 & 0 & 0 \\ 0 & -4137.93 & 8637.93 & -4500. & 0 \\ 0 & 0 & -4500. & 7625. & -3125. \\ 0 & 0 & 0 & -3125. & 3125. \end{bmatrix} \quad (4.2)$$



Şekil 4.3: 5 katlı düzlem çerçeve için idealleştirilmiş sistem.

yazılabilir. Kat kütlelerinin eşit olduğu kabul edilmektedir ve her kat kütlesi $30kNm/s^2$ olarak alınmıştır. Benzer şekilde diğer rijitlik matrisleri de yazılırsa birinci mafsalsın oluştuğu zamandaki kat rijitlik matrisi

$$K_1 = \begin{bmatrix} 6709.23 & -3796.61 & 0 & 0 & 0 \\ -3796.61 & 8694.57 & -4897.96 & 0 & 0 \\ 0 & -4897.96 & 8552.78 & -3654.82 & 0 \\ 0 & 0 & -3654.82 & 7163.59 & -3508.77 \\ 0 & 0 & 0 & -3508.77 & 3508.77 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

2. mafsalsın oluştuğu zamandaki rijitlik matrisi

$$K_2 = \begin{bmatrix} 5670.03 & -3211.01 & 0 & 0 & 0 \\ -3211.01 & 7057.16 & -3846.15 & 0 & 0 \\ 0 & -3846.15 & 7955.74 & -4109.59 & 0 \\ 0 & 0 & -4109.59 & 7557.86 & -3448.28 \\ 0 & 0 & 0 & -3448.28 & 3448.28 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

3. mafsal oluştuğu zamandaki rijitlik matrisi

$$K_3 = \begin{bmatrix} 4841.27 & -2700.96 & 0 & 0 & 0 \\ -2700.96 & 6018.94 & -3317.97 & 0 & 0 \\ 0 & -3317.97 & 7094.2 & -3776.22 & 0 \\ 0 & 0 & -3776.22 & 7054.91 & -3278.69 \\ 0 & 0 & 0 & -3278.69 & 3278.69 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

4. mafsalın oluştuğu zamandaki rijitlik matrisi

$$K_4 = \begin{bmatrix} 4052. & -2223.62 & 0 & 0 & 0 \\ -2223.62 & 4636.31 & -2412.7 & 0 & 0 \\ 0 & -2412.7 & 6012.7 & -3600. & 0 \\ 0 & 0 & -3600. & 6534.36 & -2934.36 \\ 0 & 0 & 0 & -2934.36 & 2934.36 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

5. mafsalın oluştuğu zamandaki rijitlik matrisi

$$K_5 = \begin{bmatrix} 4031.95 & -2210.53 & 0 & 0 & 0 \\ -2210.53 & 4829.64 & -2619.12 & 0 & 0 \\ 0 & -2619.12 & 5672.33 & -3053.22 & 0 \\ 0 & 0 & -3053.22 & 5950.94 & -2897.73 \\ 0 & 0 & 0 & -2897.73 & 2897.73 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

olarak verilirler. Sistemin davranışının Şekil 4.1 deki gibi olduğu dışınılduğunde sistemin hareket denklemi.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F(t) \quad (4.8)$$

olarak yazılır. Caughey (1960) bir yapı sisteminde sönüm matrisinin

$$C = M \sum_b a_b [M^{-1}K]^b \quad (4.9)$$

formundaki bir seri gibi alındığında sistemi ifade eden diferansiyel denklem takımının ayrıklaşabildiğini iddia etmiştir. a_b katsayıları bulunduğunda sönüm oranlarını belirlemek için Caughey 'in

$$\xi_n = \frac{1}{2w_n} \sum_b a_b w_n^{2b} \quad (4.10)$$

formülü önerilmektedir. Burada w_n değerleri K 'nın öz değerlerini gösterir. Ancak

yapı sistemini çözerken a_b katsayılarını bilinmediğinden yukarıdaki denkleme tersten yaklaşılır. İlk olarak sönüm oranları seçilir ve ardından yukarıdaki denklemden a_b katsayıları bulunur (Wilson ve Penzien, 1972). Yukarıdaki Caughey serisini $b = 0, 1$ değerleriyle sınırlarsak formül

$$\xi_i = \frac{a_0}{2w_i} + \frac{a_1 w_i}{2} \quad (4.11)$$

halini alacaktır. a_0 ve a_1 katsayıları sistemin sadece ayrı iki modundaki titreşim frekansı bulunarak ve bu modlardaki sönüm oranları seçilerek bulunur. Denklemden a_0 ve a_1 katsayıları bulunduktan sonra sistemdeki diğer modlara ait sönüm oranları da yine bu formülden hesaplanabilir. Katsayılar hesaplandıktan sonra C matrisi ise

$$C = a_0 M + a_1 K \quad (4.12)$$

şeklinde bulunacaktır. İlk olarak K_0 matrisi için açılal frekanslar hesaplanırsa

$$\begin{aligned} w_1 &= 2.387114 \\ w_2 &= 7.032782 \\ w_3 &= 10.86131 \\ w_4 &= 14.42889 \\ w_5 &= 17.30239 \end{aligned} \quad (4.13)$$

değerleri bulunur. Şekil 4.1 de görülen sistem için a_0 ve a_1 katsayıları 1. ve 3. modlardaki sönüm oranlarının $\xi_{1,3} = 0.02$ olduğunu kabul ederek bulunacaktır. Bu durumda

$$\left. \begin{aligned} 0.02 &= \frac{a_0}{2 \times 2.387114} + \frac{a_1 \times 2.387114}{2} \\ 0.02 &= \frac{a_0}{2 \times 10.861312} + \frac{a_1 \times 10.861312}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= 0.078280 \\ a_1 &= 0.003019 \end{aligned} \quad (4.14)$$

olacaktır. Buradan sonra ise sistem başlangıç durumdayken sistemin sönüm matrisi (4.12) eşitliğinden hesaplanırsa, sönüm matrisi ve diğer sönüm oranları

$$C_0 = \begin{bmatrix} 24.2182 & -11.4241 & 0. & 0. & 0. \\ -11.4241 & 27.8314 & -12.4933 & 0. & 0. \\ 0. & -12.4933 & 29.9939 & -13.5865 & 0. \\ 0. & 0. & -13.5865 & 26.9356 & -9.43508 \\ 0. & 0. & 0. & -9.43508 & 13.3491 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 0.020000 \\
\xi_2 &= 0.016182 \\
\xi_3 &= 0.020000 \\
\xi_4 &= 0.024495 \\
\xi_5 &= 0.028382
\end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklinde elde edilirler. Benzer şekilde bulunan 1. mafsalı oluşumundan sonraki açısal frekanslar, a_0 ve a_1 katsayıları ve sönüm matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2.396865 \\
w_2 &= 6.947249 \\
w_3 &= 11.32096 \\
w_4 &= 14.29571 \\
w_5 &= 17.49395
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$a_0 = 0.079123 \quad a_1 = 0.002916 \tag{4.18}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 23.5197 & -11.0706 & 0. & 0. & 0. \\ -11.0706 & 29.3088 & -14.282 & 0. & 0. \\ 0. & -14.282 & 28.8953 & -10.6571 & 0. \\ 0. & 0. & -10.6571 & 24.8446 & -10.2313 \\ 0. & 0. & 0. & -10.2313 & 14.1874 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 0.020000 \\
\xi_2 &= 0.015823 \\
\xi_3 &= 0.020000 \\
\xi_4 &= 0.023610 \\
\xi_5 &= 0.027767
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ayrıca 2. mafsal oluştuktan sonraki değerler

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2.222041 \\
w_2 &= 6.803960 \\
w_3 &= 10.63646 \\
w_4 &= 13.85235 \\
w_5 &= 16.65918
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$a_0 = 0.073522 \quad a_1 = 0.003111 \tag{4.22}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 21.3143 & -9.98876 & 0. & 0. & 0. \\ -9.98876 & 25.6294 & -11.9645 & 0. & 0. \\ 0. & -11.9645 & 28.4247 & -12.784 & 0. \\ 0. & 0. & -12.784 & 27.187 & -10.7269 \\ 0. & 0. & 0. & -10.7269 & 14.403 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0.020000 \\ \xi_2 &= 0.015986 \\ \xi_3 &= 0.020000 \\ \xi_4 &= 0.024200 \\ \xi_5 &= 0.028118 \end{aligned} \quad (4.24)$$

3. mafsal oluştuktan sonraki değerler

$$\begin{aligned} w_1 &= 2.067331 \\ w_2 &= 6.456830 \\ w_3 &= 10.04155 \\ w_4 &= 13.02613 \\ w_5 &= 15.78870 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$a_0 = 0.068575 \quad a_1 = 0.003303 \quad (4.26)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 19.4212 & -8.92225 & 0. & 0. & 0. \\ -8.92225 & 23.3115 & -10.9605 & 0. & 0. \\ 0. & -10.9605 & 26.8635 & -12.4742 & 0. \\ 0. & 0. & -12.4742 & 26.7337 & -10.8307 \\ 0. & 0. & 0. & -10.8307 & 14.2595 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0.020000 \\ \xi_2 &= 0.015975 \\ \xi_3 &= 0.020000 \\ \xi_4 &= 0.024147 \\ \xi_5 &= 0.028250 \end{aligned} \quad (4.28)$$

4. mafsal oluştuktan sonraki değerler

$$\begin{aligned} w_1 &= 1.882012 \\ w_2 &= 5.986249 \\ w_3 &= 9.242025 \\ w_4 &= 11.82160 \\ w_5 &= 14.79366 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$a_0 = 0.062544 \quad a_1 = 0.003596 \quad (4.30)$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 17.6975 & -7.99573 & 0. & 0. & 0. \\ -7.99573 & 19.7985 & -8.67563 & 0. & 0. \\ 0. & -8.67563 & 24.7478 & -12.9449 & 0. \\ 0. & 0. & -12.9449 & 26.6236 & -10.5514 \\ 0. & 0. & 0. & -10.5514 & 13.6786 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0.020000 \\ \xi_2 &= 0.015987 \\ \xi_3 &= 0.020000 \\ \xi_4 &= 0.023899 \\ \xi_5 &= 0.028712 \end{aligned} \quad (4.32)$$

5. mafsal oluştuktan sonraki değerler

$$\begin{aligned} w_1 &= 1.881940 \\ w_2 &= 5.886671 \\ w_3 &= 9.200922 \\ w_4 &= 11.87313 \\ w_5 &= 14.27687 \end{aligned} \quad (4.33)$$

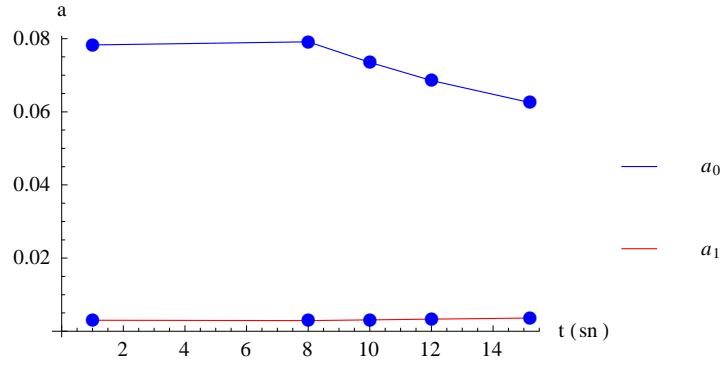
$$a_0 = 0.062495 \quad a_1 = 0.003609 \quad (4.34)$$

$$\mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 17.6768 & -7.97819 & 0. & 0. & 0. \\ -7.97819 & 20.5558 & -9.45286 & 0. & 0. \\ 0. & -9.45286 & 23.5972 & -11.0196 & 0. \\ 0. & 0. & -11.0196 & 24.6027 & -10.4584 \\ 0. & 0. & 0. & -10.4584 & 13.5832 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

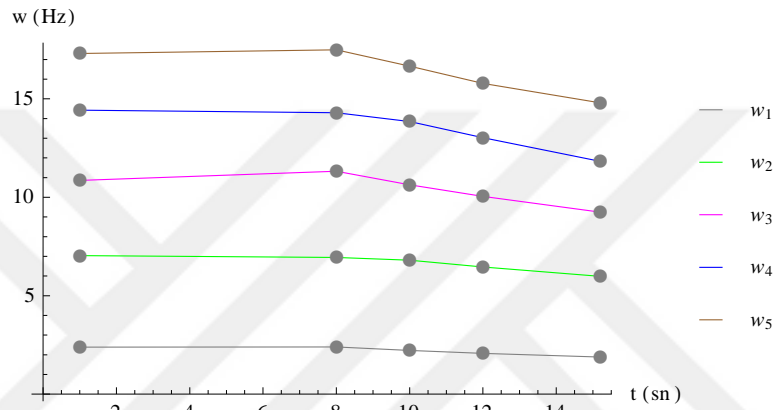
$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0.020000 \\ \xi_2 &= 0.015931 \\ \xi_3 &= 0.020000 \\ \xi_4 &= 0.024058 \\ \xi_5 &= 0.027953 \end{aligned} \quad (4.36)$$

olarak hesaplanmışlardır. a_0 ve a_1 katsayılarının değişimi Şekil4.4 grafiğinde gosterilebilir. Şekilde 4.4 gorolduğuzere sistemde kat kirişleriuzerinde mafsallar oluştuka sonum matrisinde kutleyle ilişkili olan a_0 değeri azalırken rijitlikle ilişkili olan a_1 katsayısının değeri artmıştır.

Benzer Şekilde diğer w ve ξ değişimleri de Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 ’dan gorulebilir.



Şekil 4.4: a_0 ve a_1 katsayılarının zamana göre değişimi.



Şekil 4.5: w açısıl frekanslarının zamana göre değişimi.

Sistemin hareket denklemini hatırlanacak olursa

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t) \quad (4.37)$$

ve bu denklem M^{-1} matrisi ile soldan çarpılacak olursa denklem

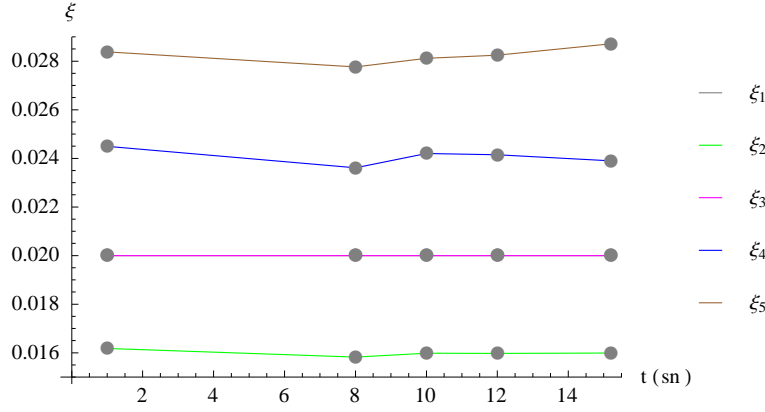
$$\ddot{X} + M^{-1}C\dot{X} + M^{-1}KX = M^{-1}F(t) \quad (4.38)$$

şeklini alacaktır ve ortogonal Q sabit bir matris olmak üzere

$$X(t) = QY(t) \quad (4.39)$$

dönüşümü yapıldığında

$$Q\ddot{Y} + M^{-1}CQ\dot{Y} + M^{-1}KQY = M^{-1}F(t) \quad (4.40)$$



Şekil 4.6: ξ sönüm oranlarının zamana göre değişimi.

bulunur. Denklem sağı tarafı

$$\mathbf{B}(t) = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t)) = \frac{1}{m_i} F_i t \quad (4.41)$$

olarak yazılabilir. Bu tarafta kuvvetlerin zamanın ve kat yüksekliklerinin lineer bir fonksiyonu olarak arttığı kabul edilmiştir.

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1^2 & & & & \\ & w_2^2 & & & \\ & & w_3^2 & & \\ & & & w_4^2 & \\ & & & & w_5^2 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

çarpımını sağlayacak ortogonal bir Q matrisi bulunursa ve yukarıdaki denklem \mathbf{Q}^T ile soldan çarpılırsa denklem

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q} \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{Y} = \mathbf{Q}^T \mathbf{B}(t) \quad (4.43)$$

halini alacaktır. Sönüm matrisinin orantılı sönüm formunda

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (4.44)$$

olduğunu düşünürsek sönüm

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad (4.45)$$

olarak da yazılabilir ve hareket denklemi

$$\ddot{\mathbf{Y}} + (a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{W})\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{WY} = \mathbf{Q}^T\mathbf{B}(t) \quad (4.46)$$

halini alacaktır. Denklemin sağ tarafı

$$(\mathbf{Q}^T\mathbf{B})_i = \varphi_{in}^T B_n t = (\varphi_{n1}B_1 + \varphi_{n2}B_2 + \dots) t = b_i t \quad (4.47)$$

şeklinde yazılır ve sistemin hareket denklemi ayrıklaştırılarak yazılacak olursa

$$\ddot{y}_i + (a_0 + a_1 w_i^2)\dot{y}_i + w_i^2 y_i = b_i t \quad (4.48)$$

halini alır.

$$a_0 + a_1 w_i^2 = 2\xi_i w_i \quad (4.49)$$

dönüşümü yapılır ve ξ_i 'lerden 2 tanesi seçilirse a_0 ve a_1 hesaplanır ve daha sonra yukarıdaki denklemden diğer sönüm oranları bulunabilir. Hareket denklemi

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i w_i \dot{y}_i + w_i^2 y_i = b_i t \quad (4.50)$$

olarak yazılır ve denklemin homojen çözümü

$$y_{ih} = C_{1i} e^{-\xi_i w_i t} \cos \sqrt{1 - \xi_i^2} w_i t + C_{2i} e^{-\xi_i w_i t} \sin \sqrt{1 - \xi_i^2} w_i t \quad (4.51)$$

olur. Özel çözüm ise

$$y_{ip} = A_i t + B_i \quad (4.52)$$

olarak yazılır, denklemden yerine konur ve çözülürse

$$A_i = \frac{b_i}{w_i^2} \quad (4.53)$$

$$B_i = -2\xi_i \frac{1}{w_i^3} b_i \quad (4.54)$$

olmak üzere denklemin çözümü

$$y_i = y_{ih} + y_{ip} \quad (4.55)$$

$$y_i = C_{1i}e^{-\xi_i w_i t} \cos \sqrt{1 - \xi_i^2} w_i t + C_{2i}e^{-\xi_i w_i t} \sin \sqrt{1 - \xi_i^2} w_i t + A_i t + B_i \quad (4.56)$$

olarak bulunur. Türevi alınırsa

$$\begin{aligned} y'_i &= A_i - C_{1i} \cos \left[t w_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \right] w_i \xi_i e^{-\xi_i w_i t} \\ &\quad - C_{2i} e^{-t w_i \xi_i} \sin \left[t w_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \right] w_i \xi_i \\ &\quad + C_{2i} e^{-t w_i \xi_i} \cos \left[t w_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \right] w_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \\ &\quad - C_{1i} e^{-t w_i \xi_i} \sin \left[t w_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \right] w_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

bulunur. C_{1i} ve C_{2i} bilinmeyenlerinin hesabı başlangıç değerlerini yerine koyarak yapılabilir.

$$\mathbf{X}|_{t=0} = \mathbf{0} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{X}'|_{t=0} = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{QY}(t) \quad (4.60)$$

Dolayısıyla ilk mafsalin oluşmasına kadar geçen $0 - t_1$ aralığında $t = 0$ anında $\mathbf{Y}(t)$ ve $\mathbf{Y}'(t)$ değerleri de 0 olacaktır, bu yazılırsa

$$C_{1i} + B_i = 0 \quad (4.61)$$

$$A_i - w_i \left(C_{1i} \xi_i - C_{20} \sqrt{1 - \xi_i^2} \right) = 0 \quad (4.62)$$

olur ve C_{10} ve C_{20} katsayıları yukarıdaki eşitliklerin çözümünden

$$C_{1i} = -B_i \quad (4.63)$$

$$C_{2i} = -\frac{1}{w_i \sqrt{1 - \xi_i^2}} A_i + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_i^2}} B_i \xi_i \quad (4.64)$$

olarak bulunur. $F_i(t)$ yük fonksiyonunun zamana bağlı lineer artan bir fonksiyon olduğu düşünülmüştü. $t = 0$ anında \mathbf{X} ve \mathbf{X}' değerleri 0 olmasına rağmen ilk mafsalin olduğu andan sonraki zaman aralıkları için başlangıç koşulları değişeceğinden bunlar artık 0 olmayacaktır. Başlangıç zamanının 0 olmadığı durumda

katsayıların hesabındaki zorluğu azaltmak amacıyla zaman değişkeni

$$t = t' + t_1 \quad (4.65)$$

olarak tanımlanacaktır. Bu durumda 1 ve 2 mafsallarının oluştuğu $t_2 > t > t_1$ zaman aralığı için yük fonksiyonu

$$F(t) = F_i(t' + t_1) \quad (4.66)$$

olacaktır. Buradan (4.50) deki hareket denklemini tekrar yazılırsa

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i w_i \dot{y}_i + w_i^2 y_i = b_i(t' + t_1) \quad (4.67)$$

bulunur. Denklemin çözümü benzer şekilde yapılır ise

$$A_i = \frac{b_i}{w_i^2} \quad (4.68)$$

$$B_i = -2\xi_i \frac{b_i}{w_i^3} + \frac{b_i}{w_i^2} t_1 \quad (4.69)$$

olmak üzere

$$y_i = C_{1i} e^{-\xi_i w_i t'} \cos \sqrt{1 - \xi_i^2} w_i t' + C_{2i} e^{-\xi_i w_i t'} \sin \sqrt{1 - \xi_i^2} w_i t' + A_i t' + B_i \quad (4.70)$$

olacaktır. $t_2 > t > t_1$ zaman aralığında $t = t_1$ zamanında $t' = 0$ olacaktır. C_{1i} ve C_{2i} katsayılarını hesaplamak için başlangıç koşulları yazılırsa

$$\mathbf{X}(2)|_{t'=0} = \mathbf{X}(1)|_{t=t_1} \quad (4.71)$$

$$\mathbf{X}'(2)|_{t'=0} = \mathbf{X}'(1)|_{t=t_1} \quad (4.72)$$

olur dolayısıyla

$$\mathbf{Q}(2) \mathbf{Y}(2)|_{t'=0} = \mathbf{Q}(1) \mathbf{Y}(1)|_{t=t_1} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{Q}(2) \mathbf{Y}'(2)|_{t'=0} = \mathbf{Q}(1) \mathbf{Y}'(1)|_{t=t_1} \quad (4.74)$$

olur buradan da

$$\mathbf{Y}(2)|_{t'=0} = \mathbf{Q}^T(2) \mathbf{Q}(1) \mathbf{Y}(1)|_{t=t_1} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{Y}'(2)|_{t'=0} = \mathbf{Q}^T(2)\mathbf{Q}(1) \mathbf{Y}'(1)|_{t=t_1} \quad (4.76)$$

yazılabilir. Yukarıdakine benzer şekilde her $t_n > t > t_{n-1}$ zaman aralığı için de

$$\mathbf{Y}(n)|_{t'=0} = \mathbf{Q}^T(n)\mathbf{Q}(n-1) \mathbf{Y}(n-1)|_{t=t_{n-1}} \quad (4.77)$$

$$\mathbf{Y}'(n)|_{t'=0} = \mathbf{Q}^T(n)\mathbf{Q}(n-1) \mathbf{Y}'(n-1)|_{t=t_{n-1}} \quad (4.78)$$

olarak yazılabilir. Buradan da C_{1i} ve C_{2i} katsayıları

$$\mathbf{Y0}(n) = \mathbf{Q}^T(n)\mathbf{Q}(n-1) \mathbf{Y}(n-1)|_{t=t_{n-1}} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{Y1}(n) = \mathbf{Q}^T(n)\mathbf{Q}(n-1) \mathbf{Y}'(n-1)|_{t=t_{n-1}} \quad (4.80)$$

olmak üzere

$$C_{1i} = \left(\mathbf{Q}^T(n)\mathbf{Q}(n-1) \mathbf{Y}(n-1)|_{t=t_{n-1}} \right)_i - B_i \quad (4.81)$$

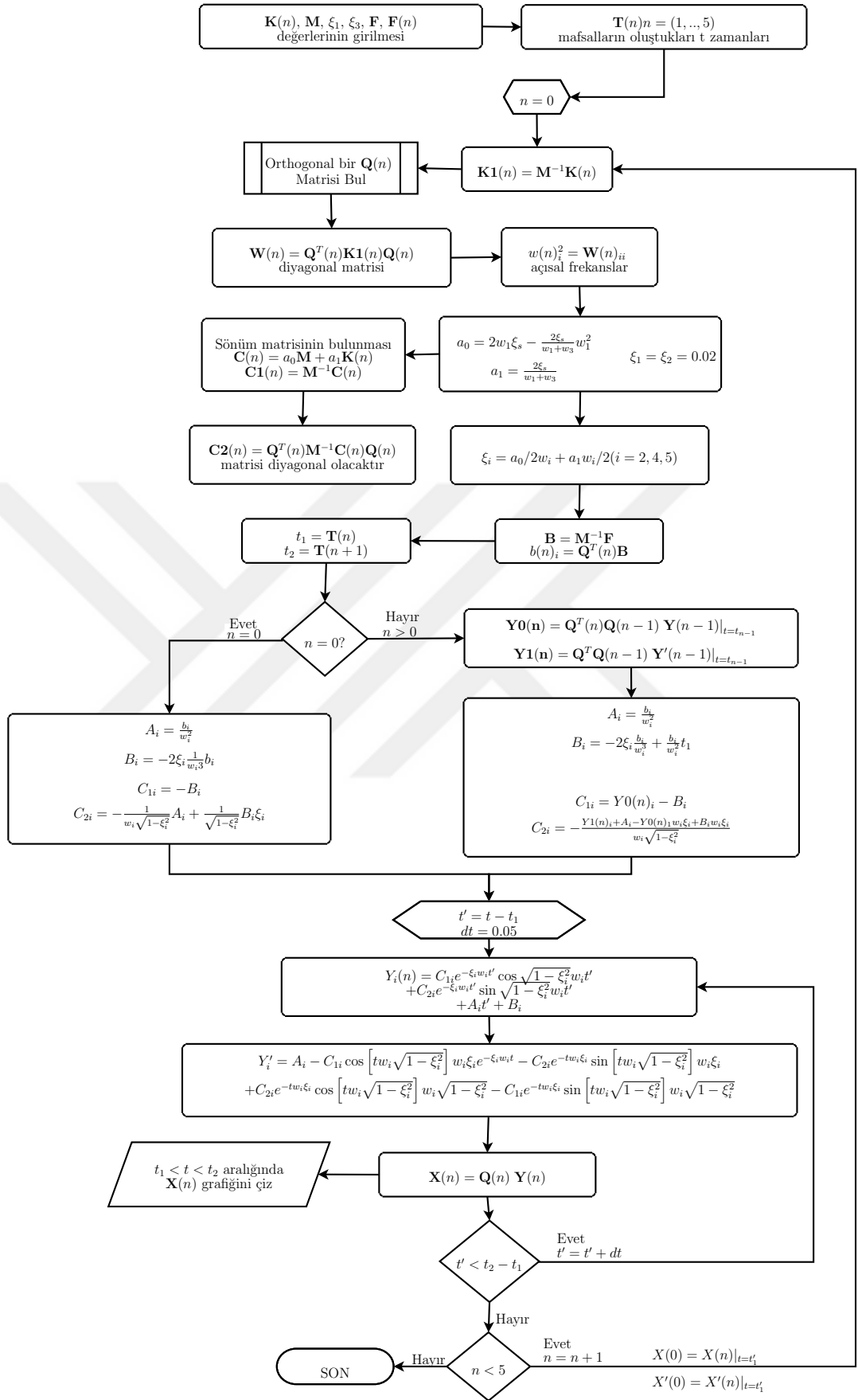
$$C_{2i} = - \frac{\left(\mathbf{Q}^T(n)\mathbf{Q}(n-1) \mathbf{Y}'(n-1)|_{t=t_{n-1}} \right)_i + A_i}{w_i \sqrt{1 - \xi_i^2}} \quad (4.82)$$

$$+ \frac{\left(\mathbf{Q}^T(n)\mathbf{Q}(n-1) \mathbf{Y}(n-1)|_{t=t_{n-1}} \right)_i w_i \xi_i + B_i w_i \xi_i}{w_i \sqrt{1 - \xi_i^2}}$$

olarak bulunabilir. (4.68), (4.69), (4.81), (4.82), (4.70) ifadeleri kullanılarak bütün zaman aralıklarında $\mathbf{Y}(n)$ ve $\mathbf{Q}(n)$ ler kullanılarak

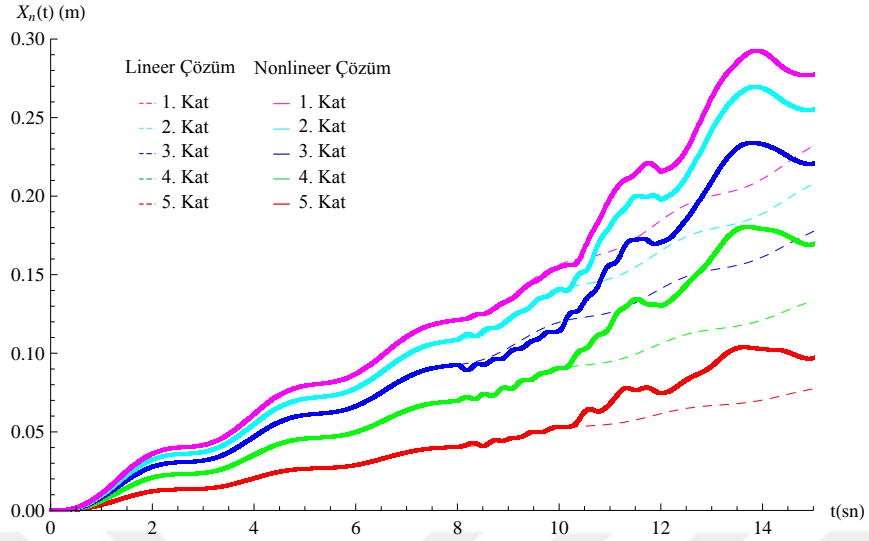
$$\mathbf{X}(n) = \mathbf{Q}(n)\mathbf{Y}(n) \quad (4.83)$$

ifadeleriyle $\mathbf{X}(n)$ değerleri bulunur. Burada $\mathbf{X}(n)$, $t(n)$ ve $t(n+1)$ zamanları arasında gerçek kat deplasmanlarını göstermektedir. Bu işlemler bir program yardımıyla yapılmış ve programın akış diyagramı Şekil 4.7'de verilmiştir.

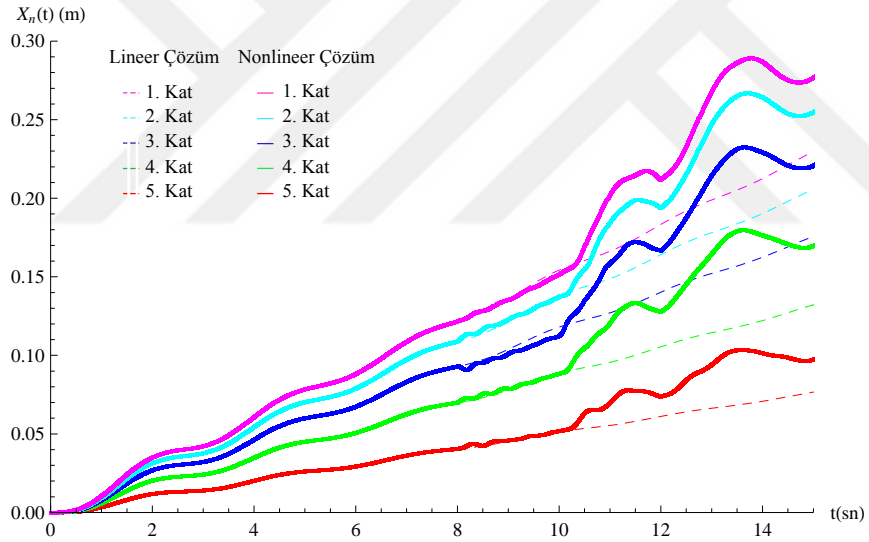


Şekil 4.7: Program akış diyagramı.

Yer değiştirmelerin zamana gre değişimleri Şekil 4.8 ve 4.9 üzerinde grlebilir.

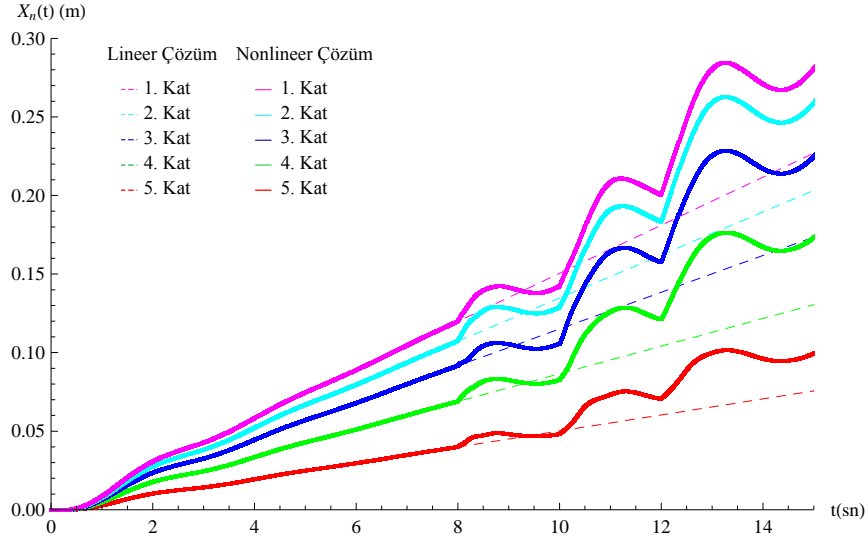


Şekil 4.8: $\xi = 0.02$ alındığında kat yer değiştirmelerinin zamana gre değişimi.



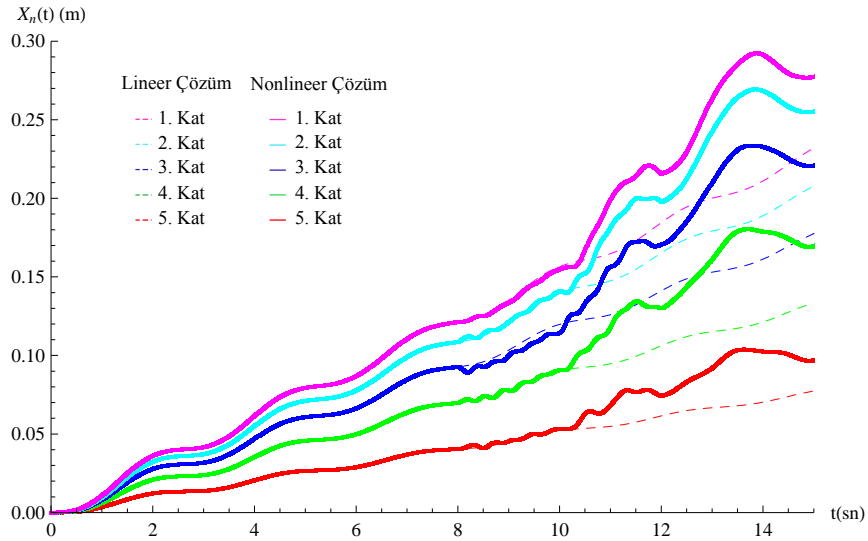
Şekil 4.9: $\xi = 0.05$ alındığında kat yer değiştirmelerinin zamana gre değişimi.

Buraya kadar snm oranı bina tipleri için normal sayılan %5 alınmıştı, snm oranının çok daha büyük olması halinde ise yer değiştirmelerin zamanla değişimi Şekil 4.10 'de grlebilir.



Şekil 4.10: $\xi = 0.2$ alındığında kat yer değiştirmelerinin zamana göre değişimi.

Hesap sırasında a_0 ve a_1 katsayılarının tekrar tekrar hesabı \mathbf{K} matrisi değiştiğinde her defasında öz değer ve öz vektörlerinin bulunmasını gerektirdiğinden zaman alıcı bir işlemdir. a_0 ve a_1 katsayılarının \mathbf{K} rijitlik matrisinin ilk hali için hesaplanıp, rijitlik matrisi değişse de bir daha bu katsayıların değişmediği ve sabit kaldığı kabul edilebilir. Bu durum Şekil 4.11 'de verilmiştir. Şekil 4.8 ile karşılaştırılırsa bunun seçilen düşük sönüm için sonuca etki etmediği görülmüştür.



Şekil 4.11: $\xi = 0.02$ alındığında ve a_0 ve a_1 katsayıları sabit tutulduğunda kat yer değiştirmelerinin zamana göre değişimi.



5. KONTROL ÇEVİRİMİ OLUŞTURULMASI

5.1 Açık Çevrim

$$M\ddot{\mathbf{X}} + C\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -k_n & k_n & \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

denklemini bir yapının zorlanmış titreşimini gösterir. Denklemdaki M sistemin $n \times n$ boyutunda kütle matrisini, C sönüm matrisini ve \mathbf{K} 'da rijitlik matrisini göstermektedir. M kütle matrisi diyagonaldir. \mathbf{X} yer değiştirmeleri \mathbf{F} de sisteme dışarıdan etkiyen yükü gösteren vektörlerdir ve $n \times 1$ boyutundadırlar. Bu sisteme ait açık çevrim blok diyagramını çizebilmek için (5.1) denkleminin

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümü alınacaktır. Laplace dönüşümü \mathbf{X} için

$$\bar{\mathbf{X}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{X}(t) dt \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda (5.1) denklemini

$$Ms^2\bar{\mathbf{X}}(s) + Cs\bar{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}(s) = \bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.6)$$

formunu alacaktır. Burada incelenen hallerde kütle ve sönüm matrislerinin

$$M = m\mathbf{I} \quad (5.7)$$

$$C = a_0M + a_1\mathbf{K} \quad (5.8)$$

şeklinde olduğu varsayılacaktır. (5.7) ve (5.8) eşitlikleri (5.6) denkleminde yerleştirilirse

$$m\mathbf{I}s^2\bar{\mathbf{X}}(s) + (a_0m\mathbf{I} + a_1\mathbf{K})s\bar{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}(s) = \bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.9)$$

ve bu ifade de m 'e bölünürse

$$\left(\mathbf{I}s^2 + \left(a_0\mathbf{I} + a_1\frac{1}{m}\mathbf{K} \right) s + \frac{1}{m}\mathbf{K} \right) \bar{\mathbf{X}}(s) = \frac{1}{m}\bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.10)$$

bulunur, burada

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{m}\mathbf{K} \quad (5.11)$$

matrisinin öz değerlerinin oluşturduğu matris \mathbf{W}^2 olursa, aşağıdaki özellikleri sağlayan ortogonal bir \mathbf{Q} matrisi bulunabilir,

$$\mathbf{W}^2 = \mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} w_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n^2 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\bar{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Y}}(s) \quad (5.13)$$

tanımı yapıp (5.10) denkleminde yerleştirilirse

$$\left(\mathbf{I}s^2 + (a_0\mathbf{I} + a_1\bar{\mathbf{K}})s + \bar{\mathbf{K}} \right) \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Y}}(s) = \frac{1}{m}\bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.14)$$

bulunur. Bu ifade \mathbf{Q}^T ile soldan çarpılırsa

$$\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{I}\mathbf{Q}s^2 + (a_0\mathbf{Q}^T\mathbf{I}\mathbf{Q} + a_1\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q})s + \mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{Q} \right) \bar{\mathbf{Y}}(s) = \frac{1}{m}\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.15)$$

$$\left(\mathbf{I}s^2 + (a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{W}^2)s + \mathbf{W}^2 \right) \bar{\mathbf{Y}}(s) = \frac{1}{m}\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.16)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\bar{\mathbf{B}}(s) = \mathbf{I}s^2 + (a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{W}^2)s + \mathbf{W}^2 \quad (5.17)$$

şeklinde tanımlanan $\bar{\mathbf{B}}(s)$ matrisi diyagonaldir. Ayrıca

$$a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{W}^2 = 2\xi\mathbf{W} \quad (5.18)$$

şeklinde bir ξ sönüm oranı matrisi de tanımlanır. Bu

$$\xi = \frac{1}{2}a_0 \mathbf{W}^{-1} + \frac{1}{2}a_1 \mathbf{W} \quad (5.19)$$

şeklinde tanımlanan diyagonal bir matristir. Sonuçta (5.17) de tanımlanan \mathbf{B} matrisi

$$\bar{\mathbf{B}}(s) = \mathbf{I}s^2 + 2\xi \mathbf{W}s + \mathbf{W}^2 \quad (5.20)$$

şeklini alır. ξ ve \mathbf{W} matrisleri diyagonaldır. Dolayısıyla \mathbf{B} de diyagonal olduğundan tersinin elemanları

$$\bar{\mathbf{B}}_i^{-1}(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi_i w_i + w_i^2} \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

olacaktır. Sonuçta (5.16) denklemini

$$\bar{\mathbf{B}}(s)\bar{\mathbf{Y}}(s) = \frac{1}{m}\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.22)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}(s) = \frac{1}{m}\bar{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.23)$$

olarak yazılabilir. $\bar{\mathbf{X}}(s)$ ise

$$\bar{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Y}}(s) \quad (5.24)$$

$$\bar{\mathbf{X}}(s) = \frac{1}{m}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{B}}^{-1}(s)\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.25)$$

şeklinde bulunur. En basit açık çevrim

$$\bar{\mathbf{G}}(s) = \frac{1}{m}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{B}}^{-1}(s)\mathbf{Q}^T \quad (5.26)$$

transfer fonksiyonu olmak üzere

$$\bar{\mathbf{X}}(s) = \bar{\mathbf{G}}(s)\bar{\mathbf{F}}(s) \quad (5.27)$$

şeklinde tanımlanır. Açık çevrim ve transfer fonksiyonu tamınıları Kuo (1991), Özdaş ve diğ. (1995), Pasin (1983) ve Ülgür (1981) 'de bulunabilirler. Açık çevrim blok diyagramı Şekil 5.1 ya da daha açık olarak Şekil 5.2'da görülebilir.

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \bar{\mathbf{F}}(s) \longrightarrow \boxed{\bar{\mathbf{G}}(s)} \longrightarrow \bar{\mathbf{X}}(s) \\ &\longrightarrow \bar{\mathbf{F}}(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{m}\bar{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{F}}(s)} \longrightarrow \bar{\mathbf{Y}}(s) \longrightarrow \boxed{\mathbf{Q}} \longrightarrow \bar{\mathbf{X}}(s) \end{aligned}$$

Şekil 5.1: Açık çevrim blok diyagramı

$$\longrightarrow \bar{\mathbf{F}}(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{m}\mathbf{Q}^T} \longrightarrow \frac{1}{m}\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{F}}(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{m}\bar{\mathbf{B}}^{-1}(s)} \longrightarrow \bar{\mathbf{Y}}(s) \longrightarrow \boxed{\mathbf{Q}} \longrightarrow \bar{\mathbf{X}}(s)$$

Şekil 5.2: Açık çevrim blok diyagramı

Kontrol problemi için 5 katlı bir çerçeve örneği çözülecektir. Çerçeveye dışarıdan etkileyen yük bir sinüs eğrisiyle ifade edilirse ve her kata aynı yükün etkidiği düşünülürse,

$$\mathbf{F0} = f_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(t) = \sin \alpha t \quad (5.28)$$

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F0}f(t) = f_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \alpha t \quad (5.29)$$

olarak ifade edilebilir. Bu durumda (5.25) eşitliği

$$\bar{\mathbf{X}}(s) = \frac{1}{m}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{B}}^{-1}(s)\bar{f}(s)\mathbf{Q}^T\mathbf{F0} \quad (5.30)$$

olarak da yazılabilir. $\mathbf{B}^{-1}(s)f(s)$ çarpımının ters dönüşümü çarpımdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerinin konvolüsyonu alınarak bulunur

$$\mathbf{B}^{-1}(t) = L^{-1} \{ \bar{\mathbf{B}}^{-1}(s) \} \quad (5.31)$$

$$f(t) = L^{-1} \{ \bar{f}(s) \} \quad (5.32)$$

olmak üzere bu konvolüsyon

$$L^{-1} \{ \bar{\mathbf{B}}^{-1}(s) \bar{f}(s) \}_i = \int_0^t (\mathbf{B}^{-1}(\tau) f(t - \tau)) d\tau \quad (5.33)$$

olarak yazılır. Bu durumda her serbestlik için ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1} \{ \bar{\mathbf{B}}^{-1}(s) \bar{f}(s) \}_i = \int_0^t \left(\frac{e^{-\tau w_i \xi_i} \sin(\tau w_i \sqrt{1 - \xi_i^2})}{\sqrt{w_i^2 (1 - \xi_i^2)}} \right) \sin(\alpha(t - \tau)) d\tau \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.34)$$

integrali hesaplanarak bulunur. Sonuçta yer değiştirme vektörü

$$\mathbf{X}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{Q} L^{-1} \{ \bar{\mathbf{B}}^{-1}(s) \bar{f}(s) \} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_0 \quad (5.35)$$

şeklinde hesaplanacaktır. Bu örnekte Şekil 4.3 'de görünen kat kütlelerinin eşit olduğu 5 katlı bir bina göz önüne alınmıştır ve

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 5000 \text{ kN/m} \quad (5.36)$$

$$m = 300 \text{ kN} \quad (5.37)$$

$$f_0 = 10 \text{ kN} \quad (5.38)$$

$$\alpha = 3 \quad (5.39)$$

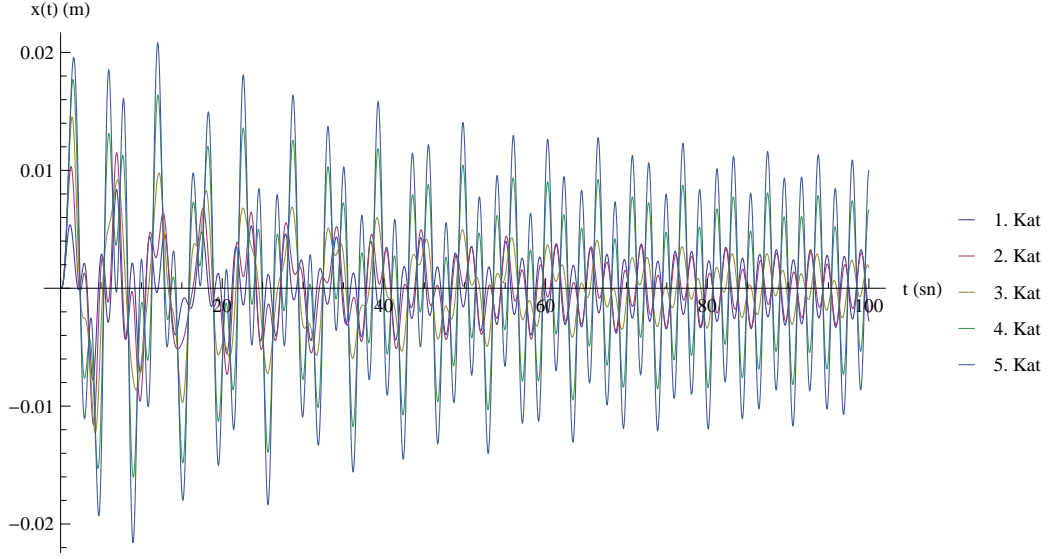
$$\xi_1 = 0.02 \quad (5.40)$$

$$\xi_2 = 0.02 \quad (5.41)$$

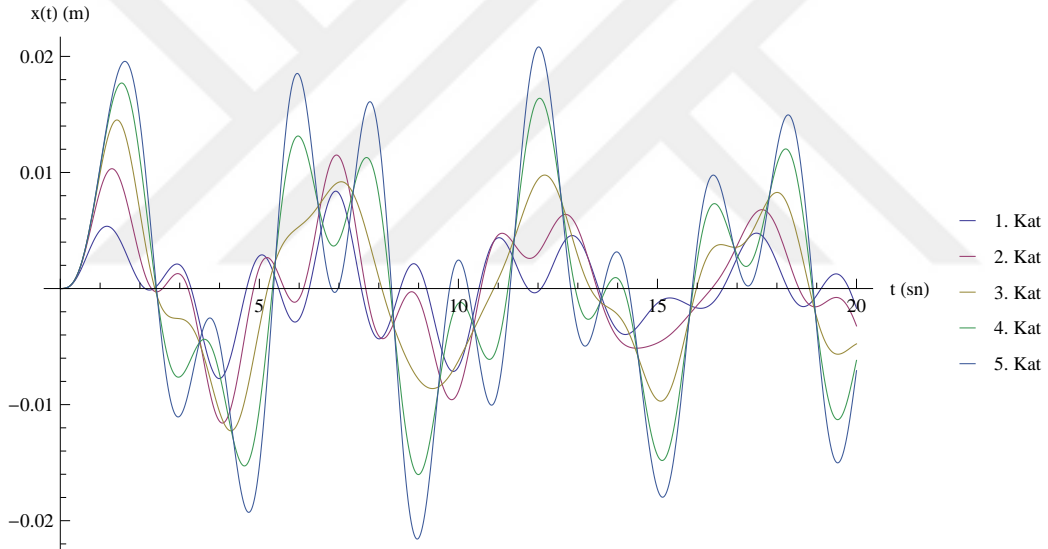
olarak seçilmişlerdir. Bu durumda \mathbf{K} matrisinden bulunan 1. ve 2. modlara ait açışal frekansları ve seçilen ξ_1 ve ξ_2 sönüm oranları kullanılarak

$$\xi_i = \frac{a_0}{2w_i} + \frac{a_1 w_i}{2} \quad (5.42)$$

denklemleri yardımıyla a_0 ve a_1 katsayıları bulunur. a_0 ve a_1 yine aynı denklemde kullanılarak diğer modlara ait sönüm oranları da bulunur. Sistemdeki tüm serbestliklerin yer değiştirmeleri yukarıda seçilen sayısal değerler için farklı zaman aralıklarında Şekil 5.3 ve 5.4 'de görülmektedir. Şekilde çok yavaş bir sönüm olduğu görülebilmektedir.



Şekil 5.3: Açık çevrimde kat yer değiştirmelerinin zamanla değişimi (0-100sn aralığında).

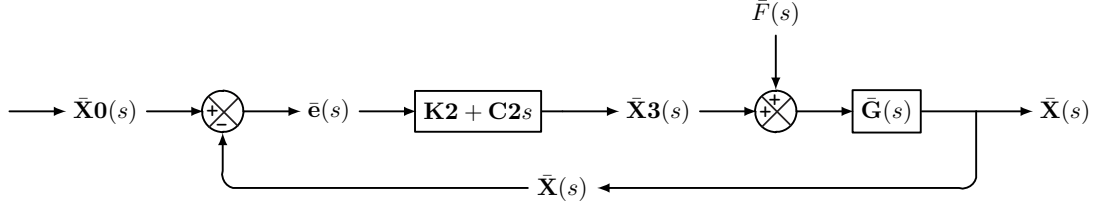


Şekil 5.4: Açık çevrimde kat yer değiştirmelerinin zamanla değişimi (0-20sn aralığında).

5.2 Kapalı Çevrim

Daha önce belirtilen yapıdaki açık çevrimde titreşimleri kontrol altına almak için sisteme bir $X_0(t)$ kontrol yer değiştirmesi ve PD tipi (oranlı + diferansiyel) bir kontrol elemanı eklenmiştir. Bu eleman K_2 ve C_0 matrisleriyle belirlenmektedir. Fiziksel olarak K_2 sisteme ilave edilen yeni bir rijitlik, C_2 ise ilave sönüm matrisini göstermektedirler. Bu ilaveler altında sistemin kapalı çevrim blok diyagramı Şekil 5.5 de gösterilmiştir. Buna benzer bir blok diyagramı tek boyutlu halde Gümüş tarafından

verilmiştir. (Gümüş, 2008) Konuyla ilgili bir başka çalışma Rofooei ve Tadjbakhsh (1993) tarafından yapılmıştır. Bu blok diyagramının üzerinden aşağıdaki denklemler yazılabilir.



Şekil 5.5: Kapalı çevrim blok diyagramı.

$$\bar{X}0(s) - \bar{X}(s) = \bar{e}(s) \quad (5.43)$$

$$\bar{X}3(s) = [\mathbf{K}2 + s \mathbf{C}2] \bar{e}(s) \quad (5.44)$$

$$\bar{G}(s) [\bar{F}(s) + (\mathbf{K}2 + s \mathbf{C}2) (\bar{X}0(s) - \bar{X}(s))] = \bar{X}(s) \quad (5.45)$$

$$\bar{G}(s)\bar{F}(s) + \bar{G}(s) (\mathbf{K}2 + s \mathbf{C}2) \bar{X}0(s) - \bar{G}(s) (\mathbf{K}2 + s \mathbf{C}2) \bar{X}(s) = \bar{X}(s) \quad (5.46)$$

$$\bar{G}(s)\bar{F}(s) + \bar{G}(s) (\mathbf{K}2 + s \mathbf{C}2) \bar{X}0(s) = (\mathbf{I} + \bar{G}(s) (\mathbf{K}2 + s \mathbf{C}2)) \bar{X}(s) \quad (5.47)$$

Bu sonuçlar göz önüne alınarak

$$\bar{G}2(s) = \mathbf{I} + \bar{G}(s) (\mathbf{K}2 + s \mathbf{C}2) \quad (5.48)$$

tanımı yapılırsa (5.47) denklemini

$$\bar{G}2^{-1}(s) (\bar{G}(s)\bar{F}(s)) + \bar{G}2^{-1}(s)\bar{G}(s) (\mathbf{K}2 + s \mathbf{C}2) \bar{X}0(s) = \bar{X}(s) \quad (5.49)$$

haline gelir. $\mathbf{K}2$ ve $\mathbf{C}2$ matrisleri

$$\mathbf{K}2 = k_2 \mathbf{I} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{C}2 = c_2 \mathbf{I} \quad (5.51)$$

şeklinde seçilirse, bu durumda $\mathbf{G}2$ matrisi

$$\bar{G}2(s) = \mathbf{I} + \bar{G}(s) (k_2 + c_2 s) \quad (5.52)$$

şeklini alacaktır. $\bar{\mathbf{G}}(s)$ matrisi için (5.26) eşitliği kullanılırsa

$$\bar{\mathbf{G}}\mathbf{2}(s) = \mathbf{I} + \frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{Q}^T (k_2 + c_2 s) \quad (5.53)$$

şeklinde bulunur. (5.53) ifadesi soldan \mathbf{Q}^T ve sağdan \mathbf{Q} ile çarpılırsa

$$\mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{G}}\mathbf{2}(s) \mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{1}{m} \bar{\mathbf{B}}^{-1} (k_2 + c_2 s) \quad (5.54)$$

olacaktır. Burada

$$\bar{\mathbf{B}}\mathbf{2} = \mathbf{I} + \frac{1}{m} \bar{\mathbf{B}}^{-1} (k_2 + c_2 s) \quad (5.55)$$

şeklinde yeni bir matrisi tanımlanır. Bu matris diyagonaldır ve matrisin herhangi bir diyagonal elemanı

$$\bar{\mathbf{B}}\mathbf{2}_{ii} = 1 + \frac{k_2 + c_2}{m} \frac{1}{s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2} \quad (5.56)$$

$$\bar{\mathbf{B}}\mathbf{2}_{ii} = \frac{m(s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2) + k_2 + c_2 s}{m(s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2)} \quad (5.57)$$

şeklinindedir. Bu matrisin tersini de diyagonaldır ve diyagonal üzerindeki herhangi bir elemanı ise

$$(\bar{\mathbf{B}}\mathbf{2}^{-1})_{ii} = \frac{m(s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2)}{m(s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2) + k_2 + c_2 s} \quad (5.58)$$

şeklinde hesaplanır. (5.54) denklemini (5.55) denkleminde kullanılırsa

$$\bar{\mathbf{B}}\mathbf{2} = \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{G}}\mathbf{2}(s) \mathbf{Q} \quad (5.59)$$

yazılır. Bu ifadenin tersi alınırsa

$$\bar{\mathbf{B}}\mathbf{2}^{-1} = \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{G}}\mathbf{2}^{-1}(s) \mathbf{Q} \quad (5.60)$$

$$\bar{\mathbf{G}}\mathbf{2}^{-1} = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}\mathbf{2}^{-1} \mathbf{Q}^T \quad (5.61)$$

olarak $\mathbf{G}\mathbf{2}$ matrisinin tersi bulunur. (5.49) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(s) = & \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}\mathbf{2}^{-1} \mathbf{Q}^T \left[\frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{F}}(s) \right] \\ & + \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}\mathbf{2}^{-1} \mathbf{Q}^T \frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{Q}^T (k_2 + c_2 s) \bar{\mathbf{X}}\mathbf{0}(s) \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}}(s) &= \frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{F}}(s) \\ &+ \frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{Q}^T (k_2 + c_2 s) \bar{\mathbf{X}}_0(s)\end{aligned}\quad (5.63)$$

Burada \mathbf{B}_3 isimli yeni bir diyagonal matris tanumlanacaktır.

$$\bar{\mathbf{B}}_3 = \bar{\mathbf{B}}_2^{-1} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \quad (5.64)$$

Ters Laplace dönüşümü yapılp ifadelerin oluşturulması için

$$\bar{\mathbf{B}}_4(s) = \bar{\mathbf{B}}_3(s) (k_2 + c_2 s) \quad (5.65)$$

şeklinde yeni bir diyagonal matris tanımlanır. Bunlar dikkate alınarak (5.63) denklemi tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}}(s) &= \frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_3(s) \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_0 \bar{f}(s) \\ &+ \frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_4(s) \mathbf{Q}^T \mathbf{X}_0\end{aligned}\quad (5.66)$$

halini alacaktır. Bu durumda \mathbf{X}_0 başlangıç yer değıştirmesi olmak üzere, yer değıştirmeler

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}}(s) &= \frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_3(s) \bar{f}(s) \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_0 \\ &+ \frac{1}{m} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_4(s) \mathbf{Q}^T \mathbf{X}_0\end{aligned}\quad (5.67)$$

ifadesinden bulunacaktır. $\bar{\mathbf{B}}_4(s) \bar{f}(s)$ çarpımının ters Laplace dönüşümü, çarpımdaki fonksiyonların konvolüsyonları alınarak

$$L^{-1} \{ \bar{\mathbf{B}}_3(s) \bar{f}(s) \} = \int_0^t (\mathbf{B}_3(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (5.68)$$

ifadesinden bulunur. Öncelikle \mathbf{B}_3 matrisinin ters dönüşümü hesaplanırsa

$$\bar{\mathbf{B}}_3_{ii}(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2 + \frac{k_2 + c_2 s}{m}} \quad (5.69)$$

bulunur. Paydanın kökleri

$$s_{1,2} = -\xi_i w_i + \frac{c_2}{m} \mp \sqrt{\left(\xi_i w_i + \frac{c_2}{m} \right)^2 - w_i^2 - \frac{k_2}{m}} \quad (5.70)$$

ise s_1 ve s_2 köklerinin reel olduğu kuvvetli sönüm durumunda

$$\mathbf{B3}_{ii}(t) = e^{s_1 t} \frac{1}{(s_1 - s_2)} + e^{s_2 t} \frac{1}{(s_2 - s_1)} \quad (5.71)$$

olacaktır, köklerin eşit olduğu kritik sönüm durumunda

$$\mathbf{B3}_{ii}(t) = e^{s_1 t} t \quad (5.72)$$

olacaktır, köklerin karmaşık olduğu zayıf sönüm durumunda ise

$$\begin{aligned} s_1 &= a + ib \\ s_2 &= a - ib \\ s_1 - s_2 &= 2ib \end{aligned} \quad (5.73)$$

dir ve

$$a = -\xi_i w_i - \frac{c_2}{2m} \quad (5.74)$$

$$b_i = \sqrt{w_i^2 + \frac{k_2}{m} - \left(\xi_i w_i + \frac{c_2}{2m}\right)^2} \quad (5.75)$$

olmak üzere

$$\mathbf{B3}_{ii}(t) = e^{a_i t} \left(\frac{\cos b_i t + i \sin b_i t}{2ib_i} - \frac{\cos b_i t - i \sin b_i t}{2ib_i} \right) \quad (5.76)$$

$$\mathbf{B3}_{ii}(t) = e^{a_i t} \frac{1}{b_i} \sin b_i t \quad (5.77)$$

bulunur. (5.65) denkleminde yazılan $\mathbf{B4}$ matrisi açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{B4}_{ii}(s) &= \frac{k_2 + c_2 s}{(s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2) + \frac{k_2}{m} + \frac{c_2}{m} s} \\ &= \frac{k_2 + c_2 s}{(s - s_1)(s - s_2)} \end{aligned} \quad (5.78)$$

olmak üzere ters Laplace dönüşümü alındığında köklerin reel olduğu kuvvetli sönüm durumunda

$$\mathbf{B4}_{ii}(t) = \frac{k_2 + c_2 s_1}{(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \frac{k_2 + c_2 s_2}{(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \quad (5.79)$$

kökler eşitse

$$\mathbf{B4}_{ii}(t) = e^{s_1 t} (k_2 + k_2 t + c_2 s_1 t) \quad (5.80)$$

kökler kompleks olduğu zayıf sönüm durumunda ise

$$\mathbf{B4}_{ii}(t) = e^{a_i t} \frac{1}{b_i} [(k_2 + c_2 a_i) \sin b_i t + c_2 b_i \cos b_i t] \quad (5.81)$$

olarak bulunacaktır.

Açık çevrimde kullanılan beş katlı çerçeve örneği kapalı çevrim örneği için de kullanılacaktır. Benzer şekilde yük fonksiyonu

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F0} \sin w_o t \quad (5.82)$$

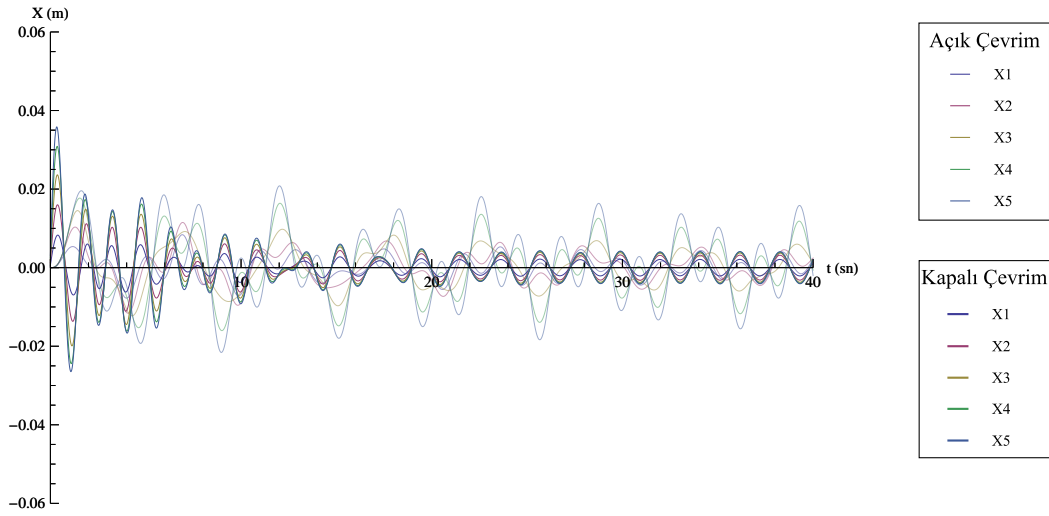
olarak alınmıştır. Başlangıç yer değiştirmesi $\mathbf{X0}$

$$\mathbf{X0} = \frac{\mathbf{F0} \times 5}{k} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

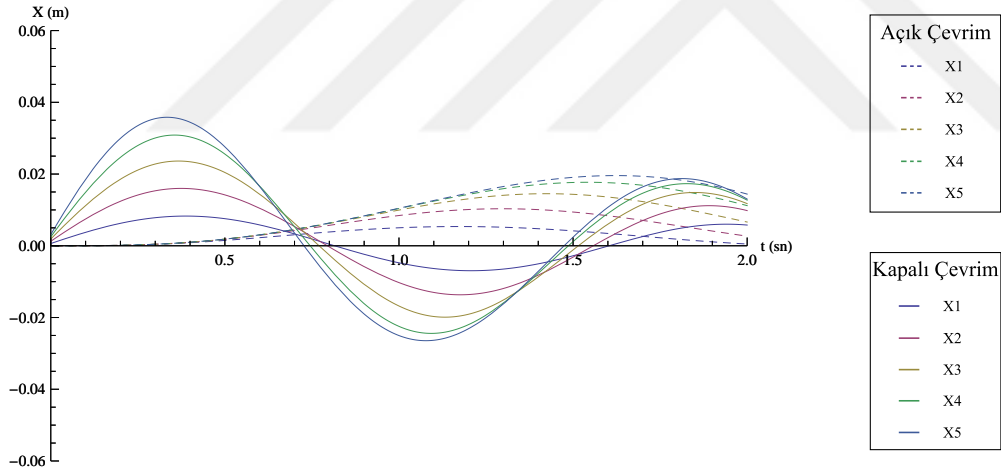
şeklinde seçilmiştir. Sonuçlar $\mathbf{X0}$ başlangıç ger değiştirmesi, c_2 sönüm katsayısı ve k_2 rijitliğine bağlı olarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\mathbf{X}_i(t) = \frac{1}{m} \mathbf{Q}_{ij} \int_0^t \mathbf{B3}_{jk}(\tau) f(t - \tau) d\tau \mathbf{Q}_{lk} \mathbf{F0}_l + \frac{1}{m} \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{B4}_{jk}(t) \mathbf{Q}_{lk} \mathbf{X0}_l \quad (5.84)$$

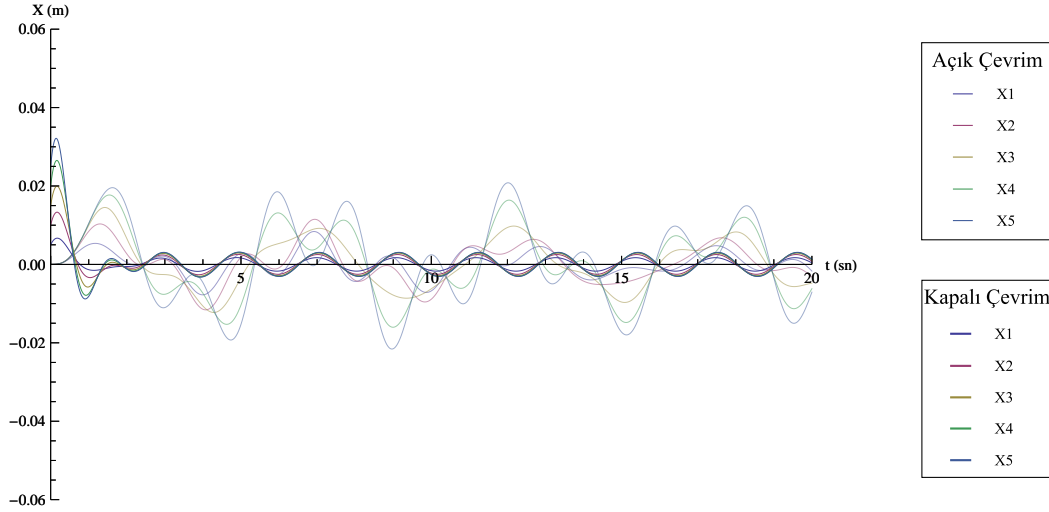
Bu parametreler değiştirilerek de sönüm ve deplasmanlar kontrol altına alınabilir. Çeşitli k_2 ve c_2 değerleri için kat titreşimleri açık ve kapalı çevrimler için şekil 5.6 ve şekil 5.15 arasında gösterilmiştir.



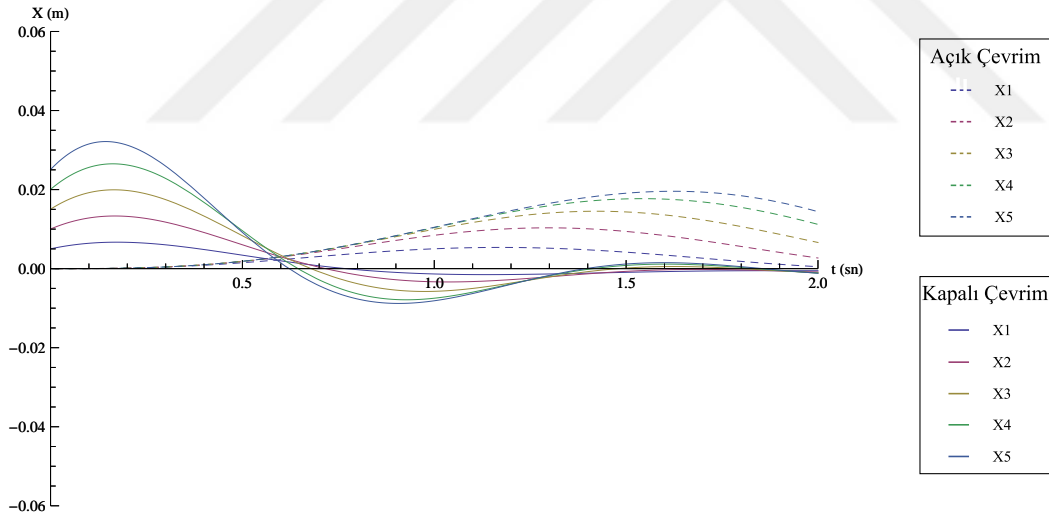
Şekil 5.6: $k_2 = k$ ve $c_2 = c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-40 sn).



Şekil 5.7: $k_2 = k$ ve $c_2 = c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).

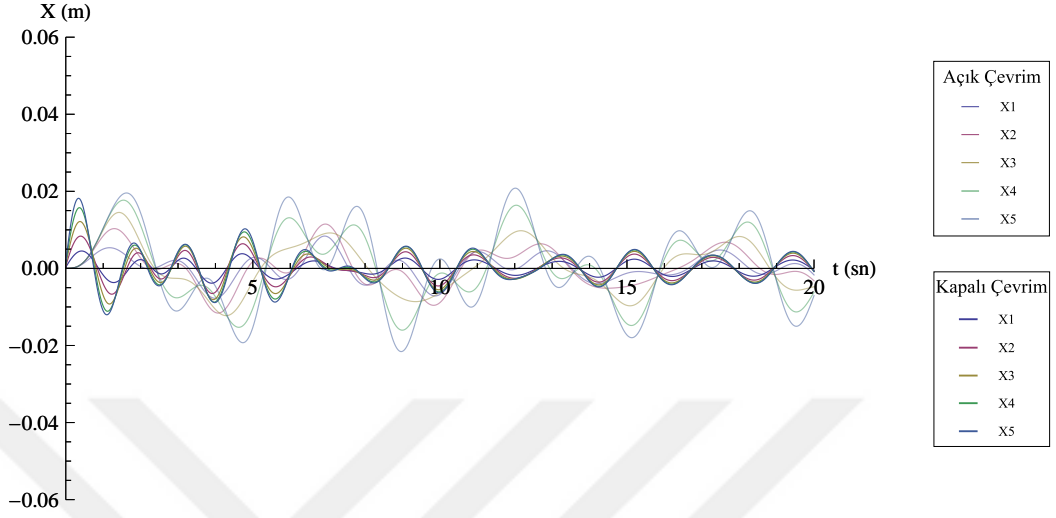


Şekil 5.10: $k_2 = k$ ve $c_2 = 8c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-20 sn).

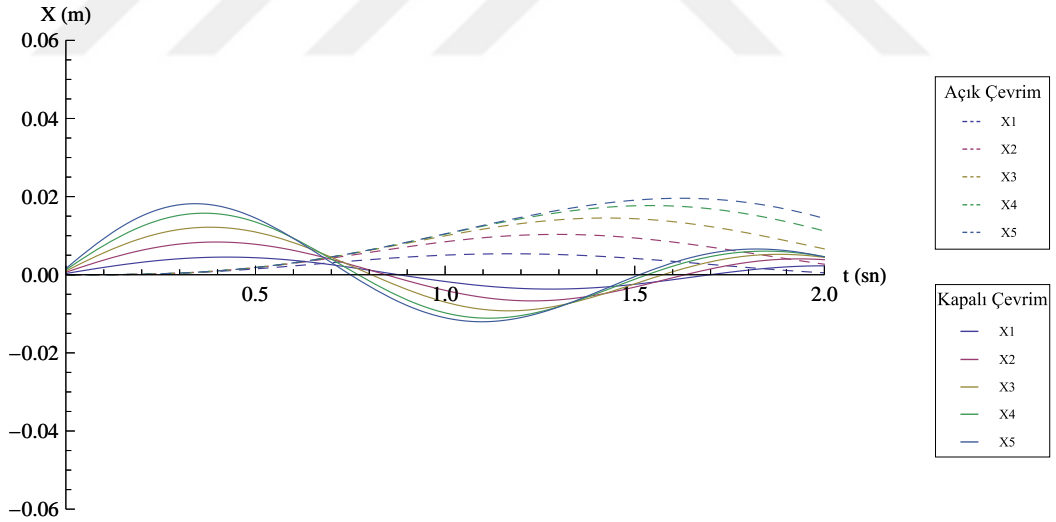


Şekil 5.11: $k_2 = k$ ve $c_2 = 8c$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).

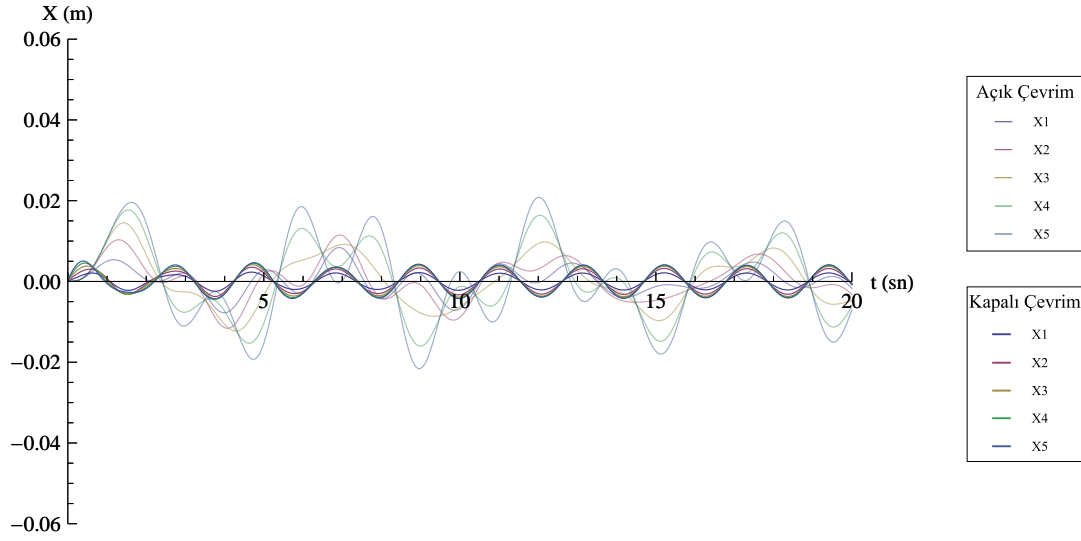
Şekil 5.12 ve Şekil 5.15 arasındaki şekillerde ise yine k_2 değeri sabit tutulmuş ancak bu kez X_0 'a farklı değerler verilerek karşılaştırma yapılmıştır. X_0 değeri başlangıç değerinden küçültülerek deplasmanlardaki değişime bakılmıştır.



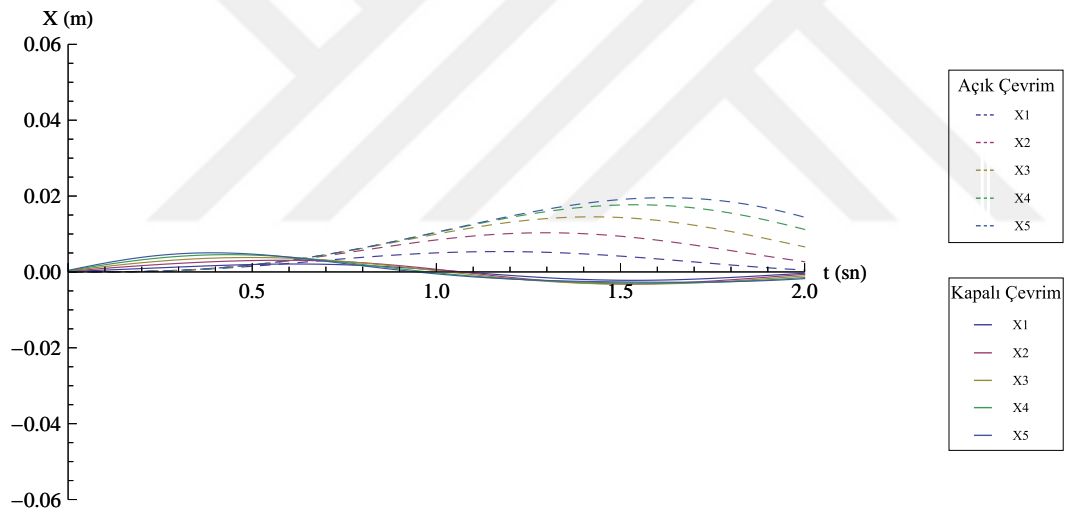
Şekil 5.12: $k_2 = k$, $c_2 = c$ ve $X_0 = \frac{1}{2}X_0$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-20 sn).



Şekil 5.13: $k_2 = k$, $c_2 = c$ ve $X_0 = \frac{1}{2}X_0$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).



Şekil 5.14: $k_2 = k$, $c_2 = c$ ve $X_0 = \frac{1}{8}X_0$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-20 sn).



Şekil 5.15: $k_2 = k$, $c_2 = c$ ve $X_0 = \frac{1}{8}X_0$ alındığı durumda açık ve kapalı çevrimde zamana göre yer değiştirme grafiği (0-2 sn).

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ağırlık olarak yapı sistemlerinin dinamik yükler altında zorlanmış sönümlü titreşimleri incelenmiş ve bu amaçla önce çok serbestlik dereceli bir sistemde modların ayrıklaştırılması amacıyla sistem rijitlik matrisinin öz değerleri ve öz vektörleri bulunmaya çalışılmıştır. Teoride bu çok basit ve ilkel bir problem olarak görülmesine rağmen pratikte bu çalışmada en zor hesaplanan büyüklük bir matrisin öz vektörlerinden oluşan ortogonal bir Q matrisinin hesaplanması olmuştur. Gerçi verilen bir matris için Mathematica programı bu matrisi vermektedir. Ancak yazılan bir programla bu matrisi bulmak genel halde aşırı zor bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Bu sorun çözüldükten sonra artan yükler altında rijitlik matrisinin sabit kalmayabileceği ve plastik mafsallar oluşacağı düşünülerek bu durum incelenmiştir. Bir plastik mafsal oluştuktan sonra sistemin rijitlik matrisi genel anlamda değişmekte ve sistemde ilave bir serbestlik meydana gelmektedir. Ayrıca bu mafsalin olduğu kesit, o kesitin taşıyabileceği limit moment değerini aşmamaktadır. Yükler artmaya devam ederse diğer bazı kesitlerde de yarı plastik durumlar ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla yükler altında rijitlik matrisinin değişimi de bilinmeyen bir nonlinear fonksiyondur. Bu durumda hesap yapabilmek için şöyle bir yol izlenmiştir. İki plastik mafsalin oluşumunu sağlayan yük değerleri arasında doğru olmamasına rağmen sistemin rijitlik matrisi birinci mafsalin olduğu andaki rijitlik matrisi olarak alınmıştır. Bu sistemi gerçekte olduğundan güçlü kabul etmek demektir. Plastik mafsal oluşumu statik yatay yükler etkisi altında gerçek sistem üzerinden hesap yapılarak incelenmiş ve SAP2000 programıyla da kontrol edilmiştir. Gerçek sistemde bir plastik mafsal oluştuktan sonra bulunan kat deplasmanları kullanılarak idealleştirilmiş sistemdeki yay katsayıları bulunmuştur. Dolayısıyla belli yük aralıkları için idealleştirilmiş sistemin rijitlik matrisi elde edilmiş olmaktadır. Bu sonuçlar dinamik yükler altında idealleştirilmiş sistemin titreşimlerini belli bir yük aralığında çözmeyi mümkün kılmaktadır. Her yük aralığında sistemin deplasmanlarının ve hızlarının bulunmasından sonra bir yük aralığının sonundaki değerlerin bir sonraki yük aralığının başlangıcındaki değerlere eşit olduğu yazılarak bu son aralıktaki integral sabitleri bulunmuştur. Sistem zamanla artan yükler altında

çözölmüş ve her kat için deplasman eğrileri zaman bağlı olarak çizilmiştir. Ancak burada eksik kalan yüklerin azalması durumunda yapının davranışının modellenmemiş olmasıdır. Daha ileri bir çalışmada bunun da yapılması düşünülmektedir. Literatürde azalan yükler altında rijitlik matrisinin eski rijitlik matrisinin belli bir yüzdesine gerilediği kabul edilmektedir ve bu yüzde keyfi seçilmiştir.

Çalışmada son aşama olarak yine idealleştirilmiş beş katlı bir yapıda, ki kat sayısı rahatlıkla arttırılabilir, dışarıdan gelen dinamik yükler altında sistemin kendi sönümü ile titreşimi incelenmiştir. Bu hal Laplace dönüşümü kullanılarak blok elemanlı bir açık çevrim şeklinde ifade edilmiştir. Bu işlem sırasında açık çevrimin transfer fonksiyonu bulunmuştur. Çok serbestlik dereceli bir sistem incelendiği için transfer fonksiyonu bir matris olarak ortaya çıkmaktadır. Bundan sonra sisteme ilave bir rijitlik, ilave bir sönüm ve bir kontrol yer değiştirilmesi eklenerek aynı sistem için geri beslemeli bir kapalı çevrim blok diyagramı çizilmiştir. Seçilen parametrelere göre bazı matematik manipölasyonlar yapılarak sistemin cevabı elde edilmiştir. Elde edilen cevap kat deplasmanlarının Laplace dönüşümüdür. Ters Laplace dönüşümü alınarak kat deplasmanları zamana bağlı olarak elde edilmiştir. Ancak bu deplasmanlar bilinen sistem özelliklerinin dışında ilave sönümün, ilave rijitliğin ve kontrol yer değiştirmesinin fonksiyonu olarak ortaya çıkmaktadır. Her üç parametrenin de cevap üzerinde etkileri incelenmiş ve şu sonuçlara varılmıştır. İlave sönüm arttıkça kapalı çevrimden elde edilen titreşimin sönümlenme hızı artmaktadır. Buna mukabil hareketin başlangıç genliğinin ilave sönüm katsayısıyla doğrusal olarak arttığı da gözlemlenmiştir. Yani ilave sönümün artması hareketin sönümünü çabuklaştırırken başlangıç genliğinin artmasına da neden olmaktadır. Kontrol yer değiştirmesi sistemin sönümünde etkili değildir ancak düşük tutulması başlangıç genliklerinin azalmasını sağlamaktadır. En karmaşık etki ilave rijitliği belirleyen k_2 yay katsayısına aittir. Bu sönümün hızını arttırmaz, başlangıç genliğini ise karmaşık bir fonksiyon ile etkiler ama genel olarak k_2 'nin artmasıyla genliğin arttığı söylenebilir. Dolayısıyla ilave rijitliğin düşük tutulmasında fayda görülebilir.

KAYNAKLAR

- Bateman, H.**, 1954. *Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Caughey, T. K.**, 1960. Classical normal modes in damped linear systems, *J. Appl. Mech.*, **27**, 269–271.
- Charney, F. A.**, 2008. Unintended Consequences of Modeling Damping in Structures, *Journal of Structural Engineering*, **134**, 581-592.
- Clough, R. W., Penzien, J.**, 1975. *Dynamics of Structures*, Mcgraw-Hill College.
- Cropper, M. E. and Gupta, A.**, 2006. Analytical and Experimental Investigation of the Damping Matrix in Shear Building Models, *ASCE*, 201, 83-83.
- Cullen, C. G.**, 1979. *Linear Algebra and Differential Equations: An Integrated Approach*, Prindle Weber Schmidt, Boston.
- Wilson, E.L.**, 1995. *Static and Dynamic Analysis Of Structures*, Computers and Structures, Inc.
- Gupta, A.**, 2006. Significance of Nonclassical Damping in Coupled System Analysis, *Proceedings of 15th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol. VIII, Seoul, South Korea, August 15-20.
- Gümüş, H.**, 2008. Bir Yapının Titreşimlerinin Kontrolü için Geri Beslemeli Bir Kapalı Çevrim, *Yüksek Lisans Tezi*, Yapı Mühendisliği, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- Hall, J.F.**, 2006. Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, No. 5, pp. 525- 545.
- Housner, G. W. and Bergman, L. A. and Caughey, T. K. and Chassiakos, A. G. and Claus, R. O. and Masri, S. F. and Skelton, R. E. and Soong, T. T. and Spencer, B. F. and Yao, J. T. P.**, 1997. Structural Control: Past, Present, and Future, *Journal of Engineering Mechanics*, 123, 897-971.
- Kuo, B.C.**, 1991. *Automatic Control Systems* (6th edition), Prentice Hall, N.J.
- Occhiuzzi, A.**, 2009. Additional viscous dampers for civil structures: Analysis of design methods based on effective evaluation of modal damping ratios, *Engineering Structures*, **31**, 1093 - 1101.
- Özdaş, M. N., Dinibütin, A. T. ve Kuzucu, A.**, 1995. *Otomatik Kontrol Temelleri*, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Pasin, F.**, 1983. *Otomatik Kontrole Giriş*, İTÜ Yayını, İstanbul.
- Rofooei, F. R. & Tadjbakhsh, I. G.**, 1993. Optimal Control of Structures with Acceleration, Velocity, and Displacement Feedback, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 119, 1993-2010.

- Sneddon, I. H.**, 1972. *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, St Louis, Sanfrancisco.
- Tezcan, S.**, 1970. *Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makineleri ile Çözümü*, Arı Kitapevi Matbaası, İstanbul.
- Ülgür, M. M.**, 1981. *Otomatik Kontrol Sistemleri*, İTÜ Elektrik Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- Wilson, E. L. and Penzien, J.** 1972. Evaluation of Orthogonal Damping Matrices, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **Vol. 4**, 5-10.
- Zareian, F. & Medina, R. A.**, 2010. A practical method for proper modeling of structural damping in inelastic plane structural systems, *Computers and Structures*, **88**, 45–53.



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Rasim HATIPOĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 19.04.1977
Lisans Üniversite: 1994-1998, Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü
Y. Lisans Üniversite: 1999-2003, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Mühendisliği Programı

