YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF OPERATÖRLERİN AİLELERİNİN DEĞİŞMEZ ALTUZAYLARI

Matematikçi Şebnem YILDIZ PESTİL

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof.Dr.Ömer GÖK

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF OPERATÖRLERİN AİLELERİNİN DEĞİŞMEZ ALTUZAYLARI

Matematikçi Şebnem YILDIZ PESTİL

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof.Dr.Ömer GÖK

İÇİNDEKİLER Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük veya eşittir
∞	Sonsuz
$\lvert x \rvert$	x'in mutlak değeri
$\sum$	Toplam sembolü
$\sqrt{\ }$	Karekök
$\subset$	Özaltküme
$\subseteq$	Altküme
$\neq$	Eşit değildir
$=$	Eşittir
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$\lVert x \rVert$	x'in normu
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
sup	En küçük üst sınır
inf	En büyük alt sınır
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\forall$	Her

$\mathcal{L}$(E)	Sürekli lineer operatörlerin kümesi
$\mathcal{L}(E)_+$	L(E)'nin pozitif konisi
$x \vee y$	x ve y'nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y'nin infimumu
$C(\Omega)$	Sürekli fonksiyonların kümesi
A^d	A'nın ayrık tümleyeni
C'	C'nin kommutantı
$x \perp y$	x diktir y'ye
$[x, y]$	Sıralı aralık
[A,C]	AC-CA
x^+	x'in pozitif kısmı
x^-	x'in negatif kısmı
$[\mathcal{D}_c x]$	$\mathcal{D}_c x$ ile üretilen ideal

ÖNSÖZ

Değerli hocam Sayın Prof.Dr.Ömer GÖK'e saygılarımı sunar,yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve biricik kızıma teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

C boyutu en az iki olan bir X Banach uzayında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin koleksiyonu olsun. C'nin herhangi sonlu alt kümesi $\mathcal{F}$ için $\mathcal{F}$'nin x_0'da 0 olduğunda bir $x_0 \in X$ vektöründe sonlu yarınilpotent olduğunu biliyoruz. Eğer öyle C koleksiyonu bir sıfır olmayan kompakt operatör içeriyorsa C ve onun kommutantı C' bir ortak âşikar olmayan değişmez alt uzayı vardır. Eğer buna ek olarak C bir Banach latisi üzerinde pozitif operatörlerin koleksiyonuysa C bir ortak âşikar olmayan kapalı ideale sahiptir. Bu sonuç ve Turovskii'nin son dikkate değer teoremi de Pagter'in ünlü sonucunu aşağıdaki genişlemesini gösterir. S boyutu en az iki olan bir Banach latisi üzerinde yarınilpotent kompakt pozitif operatörlerin çarpımsal yarıgrubu olsun o zaman S bir ortak âşikar olmayan değişmez kapalı ideale sahiptir.

ANAHTAR KELİMELER: Pozitif operatör, yarınilpotent, Banach latis, kompakt operatör,değişmez alt uzay

ABSTRACT

Let C be a collection of bounded linear operators on a Banach space X of dimension at least two. İt is known that C is finitely quasinilpotent at a vektor $x_0 \in X$ whenever for any finite subset $\mathcal{F}$ at x_0 is equal to 0. İf such collection C contains a non-zero compact operator, then C and its commutant C' have a common non-trivial invariant subspace. İf, in addition, C is a collection of positive operators on a Banach lattice, then C has a common non-trivial closed ideal. This result and a recent remarkable theorem of Turovskii imply the following extension of the famous result of de Pagter to semigroups. Let S be a multiplicative semigroup of quasinilpotent compact positive operators on a Banach lattice of dimension at least two. Then S has a common non-trivial invariant closed ideal.

KEYWORDS: Positive operator, quasinilpotent, Banach lattice, compact operator, invariant subspace

1. GİRİŞ

Çalışmamızda, Banach latisler üzerindeki pozitif operatörlerin koleksiyonlarının çeşitli değişmez alt uzay sonuçlarını genişletilmesi incelenmiştir. Ayrıca yarınilpotent kompakt pozitif operatörlerin her çarpım yarıgrubunun bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayının olduğu gösterildi.

İlk bölümde çalışmamıza operatör yarıgruplarının tanımlarıyla başladık. Âşikarlıktan kaçınmak için bu konudaki operatör ailelerini boştan farklı kabul ettik. Yerel yarınilpotent kavramını operatörlerin koleksiyonuna genişletilmesi hakkında bilgi verelim. Pozitif operatörlerin alt gruplara uygulanmasında Drnovsek'in çalışması kullanılmıştır. Drnovsek pozitif operatörlerin bir $\mathcal{C}$ koleksiyonunu, bir pozitif sıfırdan farklı vektörde sonlu yarınilpotent ve $\mathcal{C}$'de bir operatör sıfırdan farklı AM-kompakt operatörü domine ettiğinde $\mathcal{C}$ ve $\lfloor \mathcal{C} \rangle$'nin bir ortak âşikar olmayan sıfırdan farklı kapalı değişmez ideali olduğunu ispatlamıştır (Drnovsek ,2001). Aynı zamanda operatörlerin sonlu yarınilpotent cebirleri Turovskii tarafından düşünülmüştür. Turovskii, bir Banach uzayında kompakt yarınilpotent operatörlerin her çarpımsal yarıgrubu sonlu yarınilpotent olduğunu göstermiştir (Turovskii,1999).

Dördüncü bölümünde değişmez alt uzay probleminin çözümünde kompakt pozitif operatörlerden yararlanıldı. Bir kompakt arkadaşca operatör kavramı verildi. Sonlu boyutlu Banach latisler üzerinde her operatör kompakttır. Bu nedenle bir kompakt arkadaşca operatörü sadece sonsuz boyutlu Banach latisler üzerinde inceledik. Ayrıca Abramovich-Aliprantis-Burkinshaw, bir Banach latisde sıfırdan farklı kompakt-arkadaşca operatör $B : E \to E$ bir $x_0 > 0$'da yarınilpotent ise, B'nin bir âşikar olmayan kapalı değişmez idealinin olduğunu göstermişlerdir.(Abramovich,Alprantis,Burkinshaw,1997)

2. ÖN BİLGİLER

İlk olarak çalışmamızda çok sık kullanacağımız kavramların tanımlarını vereceğiz ve tezde kullandığımız teoremleri sunacağız.

Tanım 2.1

Bir küme üzerinde yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa kümeye sıralama bağıntısını sağlıyor denir. Yani, bir E kümesi üzerindeki $\geq$ sıralama bağıntısı şu özellikleri sağlar,

1) Her $x \in E$ için $x \geq x$, **yansıma**

2) Her $x, y \in E$ için $x \geq y$ ve $y \geq x$ ise $x=y$, **ters simetri**

3) Her $x, y, z \in E$ için $x \geq y$ ve $y \geq z$ ise $x \geq z$, **geçişme**

Herhangi bir küme bir sıralama bağıntısı ile donatılmış ise bu kümeye **kısmi sıralı küme** denir. Üzerinde sıralama tanımlanmış reel vektör uzayına da **kısmi sıralı reel vektör uzayı** denir.

Tanım 2.2

E, bir reel vektör uzayı ve $\geq$, E üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y, z \in E$ ve $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için,

1) $x \geq y \Rightarrow x+z \geq y+z$

2) $x \geq y \Rightarrow \alpha x \geq \alpha y$

aksiyomları sağlanıyorsa E'ye **sıralı vektör uzayı** denir.

Tanım 2.3

Bir X sıralı vektör uzayının bir A alt kümesi için her $a \in A$ için $x \leq a \leq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ varsa A altkümesine **sıralı sınırlıdır** denir.

Tanım 2.4

$T: X \to Y$ iki sıralı vektör uzayı arasında tanımlı bir operatör olsun. $x \geq 0$ için $Tx \geq 0$ sağlanıyorsa T'ye **pozitif operatör** denir ve sembol olarak $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5

E, bir sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ çifti için {x,y} kümesinin supremumu ve infimumu yine E'nin elemanı ise E'ye bir **Riesz uzayı** (veya bir vektör örgüsü) denir. Klasik olarak $x \vee y = \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y = inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Bir Riesz uzayının bir elemanı x olsun. x 'in pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri :

$$x^+ = x \vee 0 \quad , \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad , \quad |x| = x \vee (-x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6

E, bir Riesz uzayı olsun.

G, E'nin bir vektör alt uzayı olsun. Eğer G, E'deki latis işlemleri altında kapalı (yani her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$ ve $x \wedge y \in G$) ise G'ye E'nin bir **Riesz alt uzayı** denir.

Tanım 2.7

E, bir Riesz uzayı olsun.

$x, y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise, x,y'ye diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8

E, bir Riesz uzayı olsun.

E'nin boştan farklı bir alt kümesi A olsun. A'nın ayrık tümleyeni A^d ile gösterilir.

$A^d = \{x \in E : her\ y \in A \text{ için } x \perp y\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.9

E, bir Riesz uzayı olsun.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa E Riesz uzayına **Archimedean'dır** denir.

Tanım 2.10

E, bir Riesz uzayı olsun.

$x \in E$ ve $\{x_\alpha\}$ E'de bir net olsun. Eğer $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ eşitsizliğini sağlayan $\sup\{x_\alpha\}$ E'nin elemanı ise E'ye **Dedekind Tam** denir. Denk olarak, $x_\alpha \downarrow \geq x \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan $\inf\{x_\alpha\}$ E'nin elemanı ise E'ye Dedekind Tam denir.

Tanım 2.11

E, bir Riesz uzayı olsun.

A, E'nin bir alt kümesi olsun. $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyorsa A'ya **solid** (katı) denir.

E'nin bir solid vektör alt uzayına E'de bir **ideal** denir.

Tanım 2.12

Bir Riesz uzayı üzerinde bir $\|.\|$ normuna $|x| \leq |y|$ için $\|x\| \leq \|y\|$ sağlanıyorsa bir **latis norm** denir. Bir latis norm ile tanımlı bir Riesz uzayına **normlu Riesz uzayı** denir. Eğer normlu bir Riesz uzayı aynı zamanda tam ise, **Banach latis** adını alır.

Tanım 2.13

$T : X \to X$ iki Banach uzayında tanımlı bir operatör olsun. X'in her $\{x_n\}$ sınırlı dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y'de yakınsak bir alt dizisi varsa T'ye bir **kompakt operatör** denir.

Tanım 2.14

$T: X \to X$ bir Banach uzayı üzerinde sınırlı operatör olsun. X'in bir V vektör altuzayı $T(V) \subseteq V$ ise, **T altında değişmezdir** (T-değişmezdir).

Tanım 2.15

X bir Banach latis ve T bir pozitif operatör ise, V T'ile değişmeli olan X üzerinde her pozitif operatör altında değişmez olduğunda, X'in bir V vektör alt uzayına T için **latis hiperdeğişmez** (l-hiperdeğişmez) denir.

Tanım 2.16

$\tau : \Omega \to \Omega$, bir kompakt Hausdorff uzayında sürekli bir dönüşüm olmak üzere $C_\tau(x) = x \circ \tau$ formülüyle tanımlı $C_\tau : C(\Omega) \to C(\Omega)$ operatörüne **bileşke operatör** denir.

Tanım 2.17

Bir Riesz uzayında $e > 0$ elementi, e ile üretilen ideal e ile üretilen vektör alt uzayına denkse e'ye **ayrık element** denir. Ayrık elementi olan Banach latise **Ayrık Banach latis** denir.

Teorem 2.18 (Abramovich-Aliprantis-Burkinshaw,1997)

B:E$\to$E bir Banach latis üzerinde bir pozitif operatör olsun ve S:E$\to$E bir pozitif operatör olduğunu kabul edelim,

(1) $S \in \langle B]$, yani $SB \leq BS$ dir.

(2) S bir $x_0 > 0$'da yarınilpotenttir, örneğin $\lim_{n\to\infty} \|S^n x_0\|^{\frac{1}{n}} = 0$ dır.

(3) S bir sıfırdan farklı kompakt operatörü domine eder.

bu şartlar altında, B operatörünün bir âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

Teorem 2.19

B,S :E$\to$E bir Banach latis üzerinde iki değişmeli sıfır olmayan pozitif operatörler olsun,

(a) Bunlardan biri bir sıfır olmayan pozitif vektörde yarınilpotenttir ve

(b) Diğeri bir sıfır olmayan AM-Kompakt operatörü domine ederse, B ve S'nin bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

Teorem 2.20

B:E$\to$E bir ayrık Banach latis üzerinde bir pozitif operatör olsun ve bir sıfırdan farklı pozitif vektörde S yerel yarınilpotent olacak şekilde $S \in \langle B]$ bir sıfır olmayan operatörü vardır. Böylece B'nin bir âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

Yardımcı Teorem 2.21

Bir E (reel veya kompleks) Banach latis için, $u > 0$ bir yarı-iç nokta olduğunda,

(1) Her sıfırdan farklı $y \in E_u$ vektörü için, $M(y) > 0$ ı sağlayan birim operatörle domine edilen (ve böylece M bir merkez operatör) bir M operatörü vardır.

(2) Her v elementi için, $0 \le v \le u$ yu sağlayan T:E$\to$E birim operatörle domine edilen bir operatör vardır ve Tu=v dir.

Teorem 2.22 (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi)

(f_n) ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) h.y$ olsun, g integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere her x için $|f_n(x)| \le g(x)$ (n=1,2,...) ise f integrallenebilir, $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$ 'dir.

Teorem 2.23 (C.D.Aliprantis,O.Burkinshaw,1980)

$E \xrightarrow{S_1} F \xrightarrow{S_2} G \xrightarrow{S_3} H$ Banach latislerde sürekli operatörlerin şemasında her S_i operatörü bir kompakt pozitif operatörle domine edilirse $S_3 S_2 S_1$ bir kompakt operatördür.

Teorem 2.24 (Schaefer,1970)

Ω bir Hausdorff uzayında $B: C_0(\Omega) \to C_0(\Omega)$ bir pozitif operatör olsun.B bir sıfırdan farklı pozitif vektörde yerel yarınilpotent ise B'nin bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

3. Pozitif Operatör Ailesinin Değişmez Alt Uzayları

Fonksiyonel analizde önemli problemlerden biri de, Banach latisler üzerindeki pozitif operatörlerin koleksiyonlarının çeşitli değişmez alt uzay sonuçlarının incelenmesidir. Bu bölümde bilinen teoremler Banach latisdeki operatörlerin yarıgruplarına genişletilecektir. Ayrıca, yarınilpotent kompakt pozitif operatörlerin her çarpım yarıgrubunun bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayının olduğu gösterilecektir. Pozitif operatörleri alt gruplara uygulamak için bazı ek teknikler geliştirilmelidir. Bu [Drnovsek,2001]'in ilginç çalışması tarafından başarılmıştır. Bunun yanında bir çok yöntem [V.S.Shulman,1984] ve [Y.V.Turovskii,1999]'nin çalışmalarına dayanır. Bu tezde X gerçek ve kompleks Banach uzayını ve E gerçel Banach latisi gösterecektir.

Çalışmamıza operatör yarıgruplarının tanımlarıyla başlayalım.

Tanım 3.1

Bir Banach uzayı üzerindeki sınırlı operatörlerin koleksiyonu S olsun. Eğer her S,T$\in$ S çifti için, ST S'ye aitse S'ye **Çarpım yarıgrup**, (S+T) S'ye aitse S'ye **Toplam yarıgrup** denir.

Âşikarlıktan kaçınmak için, bu konudaki operatör ailelerini veya tüm koleksiyonlarını boştan farklı kabul edeceğiz.

X'den X'e tanımlı sürekli lineer operatörlerin kümesi $\mathcal{L}$(X) olsun.

$\mathcal{L}$(X) içerisindeki operatörlerin bir C koleksiyonunu ilgilendiren bir gösterimi sunarak devam edelim. Bir Banach uzayının bir D alt kümesi için, $\|D\| = \sup_{x\in D}\|x\|$ olsun. Buna göre,

$\|\mathsf{C}\| = \sup_{c\in C}\|C\|$ dir. Genel olarak, her $x\in X$ için Cx={Cx:C$\in$ C} ve bu nedenle $\|\mathsf{C}\| = \sup\{\|Cx\| : C\in \mathsf{C}\}$dir.

Her bir $A\in \mathcal{L}(X)$ için,

$A\mathsf{C} = \{AC : C\in \mathsf{C}\}$ ve $\mathsf{C}A = \{CA : C\in \mathsf{C}\}$

kümelerini tanımlarız.

Aynı zamanda, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mathsf{C}^n = \{C_1 C_2 ... C_n : C_1, ..., C_n \in \mathsf{C}\}$$

gösterimini kullanabiliriz.

Bu notasyon kullanıldığında standart kartezyen çarpım notasyonuyla karıştırılmamalıdır.

C' ile C'nin kommutantını gösteriyoruz ve

$$\mathsf{C}' = \{A \in \mathcal{L}(X) : \text{tüm } C \in \mathsf{C} \text{ için } AC=CA\}$$

şeklinde tanımlı operatörlerin birimsel cebiridir.

Tanım 3.2

X'in bir V alt uzayı $\forall C \in \mathsf{C}$ için C-değişmez ise C-değişmezdir. Operatörlerin bir C koleksiyonunun bir âşikar olmayan kapalı C-değişmez alt uzayı varsa C'ye **geçişmesiz** denir.

Aksi durumda C ailesine **geçişmeli** denir.

Şimdi aşağıda vereceğimiz tanım yerel yarınilpotent kavramının operatörlerin koleksiyonuna genişletilmesidir.

Tanım 3.3

$\mathcal{L}(X)$'de operatörlerin bir C ailesi,

(i) Bir $x \in X$ noktasında, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\mathsf{C}^n x\|} = 0$ ise (**yerel**) **yarınilpotent** denir.

(ii) Bir $x \in X$ noktasında C'nin her sonlu alt koleksiyonu x'de yerel yarınilpotent ise, **sonlu yarınilpotent** denir.

Operatörlerin sonlu yarınilpotent cebirleri [V.S.Shulman,1984] tarafından düşünülmüştür. Eğer bir Banach uzayında T:X$\rightarrow$X'e bir sınırlı operatör ise, T'nin yerel yarınilpotent olduğu bütün vektörlerden oluşan X'in alt kümesini Q_T ile gösterelim.

Yani,

$Q_T = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$ dır.

Q_T, X'in bir T-hiperdeğişmez alt uzayıdır. Bunu operatörlerin bir koleksiyonu C'ye genellemek için,

$Q_{\mathsf{C}}^f = \{x \in X : \mathsf{C}$, X'de sonlu yarınilpotent$\}$ alırız.

Yardımcı Teorem 3.4

Q_{C}^f kümesi, X'in bir vektör alt uzayıdır ve bu alt uzay hem C-değişmez hem de C'-değişmezdir.

Bu bölümdeki tartışmanın kalanı için ,

C'nin bir E Banach latis üzerinde pozitif operatörlerin bir boş olmayan koleksiyonunu gösterdiğini kabul edelim. E üzerindeki sıra yapısının sunumu, doğal olarak Q_{C}^f kümesinin bir sıralama yapısına ulaşır. Yani,

$\hat{Q}_{\mathsf{C}}^f = \{x \in E : |x| \in Q_{\mathsf{C}}^f\}$ olsun. Yardımcı Teorem 3.4'de $\hat{Q}_{\mathsf{C}}^f$'nin E'de bir ideal olmasını gerektirir.

Bir Banach latisde C:E$\rightarrow$E bir pozitif operatör için, $[A, C] \geq 0$ olacak şekilde A:E$\rightarrow$E tüm pozitif operatörlerin koleksiyonunu $[C\rangle$ ile gösterelim. Yani,

$[C\rangle = \{A \in \mathcal{L}(E)_+ : AC - CA \geq 0\}$ dır. Bu notasyona göre aynı zamanda

$\left[\mathsf{C}\right\rangle = \{A \in \mathcal{L}(E)_+ :$ her bir $C \in \mathsf{C}$ için, $AC - CA \geq 0\}$dır. Yani,

$\left[\mathsf{C}\right\rangle = \bigcap_{C \in \mathsf{C}} \left[C\right\rangle$ dır. Benzer şekilde,

$\left\langle \mathsf{C}\right] = \bigcap_{C \in \mathsf{C}} \left\langle C\right] = \{A \in \mathcal{L}(E)_+ :$ her bir $C \in \mathsf{C}$ için, $AC - CA \leq 0\}$ dır.

Yardımcı Teorem 3.5

$\mathcal{L}(E)$'de pozitif operatörlerin herhangi bir C ailesi için, $\left[\mathsf{C}\right\rangle$ kümesi sıfır ve birim operatörlerini içeren $\mathcal{L}(E)$'de bir norm kapalı toplamsal ve çarpımsal yarıgruptur.

İspat: $\left[\mathsf{C}\right\rangle$'nin norm kapalı olduğu açıktır. Aynı zamanda 0 ve I operatörleri $\left[\mathsf{C}\right\rangle$'ye aittir. Şimdi $\left[\mathsf{C}\right\rangle$'de iki tane keyfi S ve T operatörleri alalım, sonra her $C \in \mathsf{C}$ operatörü için, $SC \geq CS$ ve $TC \geq CT$ olur. İki eşitsizliği toplarsak, $(S+T)C \geq C(S+T)$ elde edilir. Yani, $S+T \in \left[\mathsf{C}\right\rangle$ dir. Sonuç olarak,

$STC = S(TC) \geq SCT = (SC)T \geq CST$ dır.

Buradan, $ST \in \left[\mathsf{C}\right\rangle$ olur. İspat tamamlanmıştır.

Yardımcı Teorem 3.6

$\hat{Q}_c^f$ ideali hem C-değişmez hem de $\left[\mathsf{C}\right\rangle$-değişmezdir.

İspat: Bir $x \in \hat{Q}_c^f$ alalım. Bu C'nin her bir sonlu altkümesi $\mathcal{G}$ için, $\left\|\mathcal{G}^n |x|\right\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ olması demektir.

Her $T \in \left[\mathsf{C}\right\rangle$ ve $C \in \mathsf{C}$ için, Tx ve Cx'in $\hat{Q}_c^f$'ye ait olduğunu ispatlamalıyız. Sonra $C \in \mathsf{C}$, $T \in \left[\mathsf{C}\right\rangle$ alalım ve $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ C'nin sonlu bir alt kümesi olsun.

Her n$\in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{G}=\{C_1,C_2,...,C_k,C\}$ ise,

$\mathcal{F}^n C=\{C_1,C_2,...,C_k\}^n C \subseteq \mathcal{G}^{n+1}$ dır. Bu nedenle,

$$\left\|\mathcal{F}^n |Cx|\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\|\mathcal{F}^n C|x|\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\|\mathcal{G}^{n+1}|x|\right\|^{\frac{1}{n}} = \left[\left\|\mathcal{G}^{n+1}|x|\right\|^{\frac{1}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}} \rightarrow 0 \text{ dan,}$$

$\left\|\mathcal{F}^n |Cx|\right\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ elde ederiz. Bu, $Cx \in \hat{Q}_c^f$ olduğunu gösterir ve böylece $\hat{Q}_c^f$ ideali C-değişmezdir.

Şimdi, $1 \leq i \leq k$ için $C_i T \leq TC_i$ olduğuna dikkat edelim.

Bu, her A$\in \mathcal{F}^n$ operatörü için AT$\leq T$A dır. Bu nedenle,

$$\left\|\mathcal{F}^n |Tx|\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\|\mathcal{F}^n T|x|\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\|T\mathcal{F}^n |x|\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\|T\right\|^{\frac{1}{n}}.\left\|\mathcal{F}^n |x|\right\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \text{ dır.}$$

Sonuç olarak, $\left\|\mathcal{F}^n |Tx|\right\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ dır ve böylece Tx$\in \hat{Q}_c^f$ dir. Bu aynı zamanda $\hat{Q}_c^f$ idealinin de $[\mathsf{C}\rangle$-değişmez olduğunu ispatlar. İspat tamamlanmıştır.

E'de pozitif operatörlerin keyfi bir C koleksiyonuyla bağdaşan iki toplamsal koleksiyonları sunmaya ihtiyacımız vardır. Bu koleksiyonlardan ilki $\mathcal{L}(E)$'de C ile üretilen çarpımsal yarıgruptur. O C'yi içeren operatörlerin (kapsamaya göre) en küçük yarıgrubudur ve S_c ile göstereceğiz. S_c'nin C'deki operatörlerin tüm sonlu çarpımlarından oluştuğu açıktır. Diğer bir deyişle,

$\mathsf{S}_c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{C}^n$ dır.

D_c ile gösterilen ikinci koleksiyon aynı zamanda pozitif operatörlerin aşağıdaki gibi tanımlanan bir geniş koleksiyonudur.

$\mathsf{D}_c = \{ D \in L(E)_+ : D \leq \sum_{i=1}^{k} T_i S_i$ olacak şekilde $\exists \{T_1,...,T_k\} \subseteq [\mathsf{C}\rangle$ ve $\{S_1,...,S_k\} \subseteq \mathsf{S}_c \}$

D_c ve S_c'nin bazı basit özellikleri bir sonraki yardımcı teoremlerde gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 3.7

C pozitif operatörlerin bir ailesi ise, D_c koleksiyonu $\mathcal{L}(E)$'de bir toplamsal ve çarpımsal yarıgruptur.

İspat: D_c'de D_1 ve D_2 gibi iki operatör alalım. Bir $T_{j,i} \in [\mathsf{C}\rangle$ ve $S_{j,i} \in \mathsf{S}_c$ için,

$D_j \leq \sum_{i=1}^{n_j} T_{j,i} S_{j,i}$ dir. D_c'nin tanımından D_1+D_2, D_c'ye aittir. Gerçekten,

$$D_1 D_2 \leq \left[\sum_{k=1}^{n_1} T_{1,k} S_{1,k} \right] \left[\sum_{i=1}^{n_2} T_{2,i} S_{2,i} \right] = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=1}^{n_2} T_{1,k} S_{1,k} T_{2,i} S_{2,i} \text{ dir.}$$

$T_{j,i} \in [\mathsf{C}\rangle$ olduğundan, $T_{j,i} \in [\mathsf{S}_c\rangle$ dir.

Böylece $S_{1,k} T_{2,i} \leq T_{2,i} S_{1,k}$ dır. Bu nedenle,

$$D_1 D_2 \leq \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} T_{1,k} T_{2,i} S_{1,k} S_{2,i} \text{ dir.}$$

$[\mathsf{C}\rangle$ ve S_c yarıgrup olduğundan, $T_{1,k} T_{2,i} \in [\mathsf{C}\rangle, S_{1,k} S_{2,i} \in \mathsf{S}_c$ yi elde ederiz ve bu $D_1 D_2$ operatörünün D_c'ye ait olduğunu ispatlar. İspat tamamlanır.

x$\in$ E için, $\mathsf{D}_c x$ sembolü , x'in D_c'nin etkisi altında yörüngesini ifade eder. Yani,

$\mathsf{D}_c x = \{ Dx : D \in \mathsf{D}_c \}$ dir. Tartışmamızı sürdürmek için aşağıdaki notasyonu sunalım.

Her bir x$\in$ E için $\mathsf{D}_c x$ ile üretilen ideali $[\mathsf{D}_c x]$ ile göstereceğiz.

Göreceğimiz gibi $[\mathsf{D}_c x]$ idealleri değişmez alt uzayların bir kaynağını sağlayacaktır.

Yardımcı Teorem 3.8

Her bir $[\mathcal{D}_c x]$ ideali hem $\mathcal{C}$-değişmez hem de $[\mathcal{C}\rangle$-değişmezdir.

İspat: Bir $y \in [\mathcal{D}_c x]$ alalım. $\mathcal{D}_c$ bir toplamsal yarıgrup olduğundan bir λ skaleri ve bir $D \in \mathcal{D}_c$ için, $|y| \le \lambda Dx$ dır. $\mathcal{D}_c$'nin tanımıyla, $D \le \sum_{i=1}^{n} T_i S_i$ olacak şekilde $T_i \in [\mathcal{C}\rangle$ ve $S_i \in \mathcal{S}_c$ (i=1,2,…,n) operatörleri vardır. Böylece $|y| \le \lambda \sum_{i=1}^{n} T_i S_i x$ dir.

Sonra, $[\mathcal{D}_c x]$'in $\mathcal{C}$-değişmez olduğunu göstereceğiz. Bunun sonuna $C \in \mathcal{C}$ ve Cy vektörünü düşünelim. Her bir i için $CT_i \le T_i C$'den

$$|Cy| \le C|y| \le \lambda \sum_{i=1}^{n} CT_i S_i x \le \lambda \sum_{i=1}^{n} T_i C S_i x \text{ dir.}$$

Her bir i için, $CS_i \in \mathcal{S}_c$ olduğundan $A = \sum_{i=1}^{n} T_i (CS_i) \in \mathcal{D}_c$ olduğu görülür. Böylece $|Cy| \le \lambda \sum_{i=1}^{n} T_i (CS_i) x = \lambda A x$ dir ve buradan $Cy \in [\mathcal{D}_c x]$ dır.

$[\mathcal{D}_c x]$'in $[\mathcal{C}\rangle$-değişmez olduğunu göstermek için, $T \in [\mathcal{C}\rangle$ alalım. $[\mathcal{C}\rangle$ bir çarpımsal yarıgrup olduğundan her i için $TT_i \in [\mathcal{C}\rangle$ dir. Böylece $B = \sum_{i=1}^{n} (TT_i) S_i$ operatörü $\mathcal{D}_c$'ye aittir. Şimdi dikkat edersek $|Ty| \le T|y| \le \lambda \sum_{i=1}^{n} TT_i S_i x = \lambda B x$ dir. Sonuç olarak $Ty \in [\mathcal{D}_c x]$ dir ve ispat tamamlanmıştır.

Yardımcı Teorem 3.9

$\mathcal{C}$ bir $x_0 \in E^+$'da sonlu yarınilpotent ise hem $\mathcal{S}_c$ hem de $\mathcal{D}_c$ x_0'da sonlu yarınilpotenttir.

İspat: $\mathcal{S}_c$ yarıgrubunun x_0'da sonlu yarınilpotent olduğunu göstererek başlayalım. Bunun sonuna $0 < \varepsilon < 1$ ve $\mathcal{F}$ $\mathcal{S}_c$'nin sonlu bir alt kümesini alalım. $\mathcal{S}_c$'nin tanımından

$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{G}^k$ olacak şekilde bir $m \in N$ ve $\mathcal{G} \subseteq C$ sonlu bir alt kümesi vardır. C x_0'da sonlu yarınilpotent ve $\mathcal{G}$ sonlu bir küme olduğundan her bir $n \geq n_0$ için, $\left\|\mathcal{G}^n x_0\right\| \leq \varepsilon^n$ dir.

Şimdi her $n \geq n_0$ için,

$$\left\|\mathcal{F}^n x_0\right\| \leq \left\|\left[\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{G}^k\right]^n x_0\right\| = \left\|\left[\bigcup_{k=n}^{mn} \mathcal{G}^k\right] x_0\right\| = \max_{n \leq k \leq mn} \left\|\mathcal{G}^k x_0\right\| \leq \max_{n \leq k \leq mn} \varepsilon^k = \varepsilon^n \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, her $n \geq n_0$ için, $\left\|\mathcal{F}^n x_0\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon$ dur. Bu da S_c'nin x_0'da yarınilpotent olduğunu gösterir.

Sonra, her $D \in D_c$ operatörünün x_0'da yarınilpotent olduğunu gerçekleyelim. D_c'nin tanımından her i=1,2,...,m için, $T_i \in [C\rangle$ ve $S_i \in S_c$ iken, $0 \leq D \leq \sum_{i=1}^{m} T_i S_i$ olduğunu biliyoruz. $c = \max_{1 \leq i \leq m} \left\|Ti\right\|$ ve $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$ koyalım ve o zaman bir doğrudan sağlama

$$\left\|D^n x_0\right\| \leq \left\|\left[\sum_{i=1}^{m} TiSi\right]^n x_0\right\| \leq c^n m^n \left\|\mathcal{F}^n x_0\right\| \text{ olduğunu gösterir.}$$

S_c x_0'da sonlu yarınilpotent olduğundan bu $\left\|D^n x_0\right\|^{\frac{1}{n}} \leq cm \left\|\mathcal{F}^n x_0\right\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ olmasını gerektirir. Böylece $\left\|D^n x_0\right\|^{\frac{1}{n}} \to 0$'dır ve D x_0'da yarınilpotenttir. D_c'nin x_0'da yarınilpotent olduğu gerçeği benzer yolla gösterilebilir ve ispat biter.

Teorem 3.10 (Drnovsek, 2001)

Pozitif operatörlerin bir C koleksiyonu,

(i) Bir pozitif sıfırdan farklı vektörde sonlu yarınilpotent ve

(ii) C'de bir operatör sıfırdan farklı AM-kompakt operatörü domine etsin.

Bu şartlar altında, $\mathcal{C}$ ve $[\mathcal{C}\rangle$'nin bir ortak âşikar olmayan sıfırdan farklı kapalı değişmez ideali vardır.

İspat: $C_0 \in \mathcal{C}$ operatörü bir K sıfır olmayan AM-kompakt operatörü domine etsin. Hipotezle $\hat{Q}_c^f$ ideali sıfırdan farklıdır. Yardımcı Teorem 3.6 dan biliyoruz ki, $\hat{Q}_c^f$ $\mathcal{C}$ ve $[\mathcal{C}\rangle$ altında değişmezdir. $\hat{Q}_c^f$ yoğun değilse $\hat{Q}_c^f$'nin norm kapanışı bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez idealdir. Böylece, $\hat{Q}_c^f$'nin bir norm yoğun ideal olduğunu kabul edebiliriz.

$K \neq 0$'dan $Kx_0 \neq 0$ olacak şekilde bir $0 < x_0 \in \hat{Q}_c^f$ vardır. Genellemeyi bozmadan,

$\|K\| = 1$, $\|x_0\| > 1$ ve $\|Kx_0\| > 1$ kabul edebiliriz.

U_0, x_0 merkezli kapalı birim yuvar olsun ve $F = U_0 \cap [0, x_0]$ olsun. F kümesi sıralı sınırlıdır. Böylece K operatörü AM-kompakt olduğundan $\overline{K(F)}$ kompakttır. Buradan $0 \notin \overline{K(F)}$ olduğu açık olmalıdır.

Her $x \geq 0$ için, $\mathcal{D}_c$ yarıgrubunun $\mathcal{D}_c x = \{Ax : A \in \mathcal{D}_c\}$ yörüngesiyle üretilen idealini $[\mathcal{D}_c x]$ ile göstermiştik. Birim operatör $\mathcal{D}_c$'ye ait olduğundan $x \in [\mathcal{D}_c x]$ 'dir. Böylece $x > 0$ olmak üzere $[\mathcal{D}_c x]$ sıfırdan farklıdır. Yardımcı Teorem 3.8'deki gibi $[\mathcal{D}_c x]$ idealinin hem $\mathcal{C}$ hem de $[\mathcal{C}\rangle$ altında değişmez olduğu gösterilir. Eğer E'de norm yoğun olmayan bir $[\mathcal{D}_c x]$ varsa ispat tamamlanır. Böylece, genellemeyi bozmadan, her $x > 0$ için, $[\mathcal{D}_c x]$'in E'de yoğun olduğunu kabul edebiliriz. Bu $\forall y \neq 0$ için, $\|x_0 - x_0 \wedge A(y)\| < 1$ olan bir $A \in \mathcal{D}_c$ operatörünün varlığını gerektirir. $0 \notin \overline{K(F)}$ olduğundan,

$$\overline{K(F)} \subseteq \bigcup_{A \in D_c} \{y \in : \|x_0 - x_0 \wedge A(|y|)\| < 1\} \text{ dir.}$$

Bu birleşimdeki tüm kümeler açıktır ve böylece sonlu bir altörtü bulabiliriz.

$$\overline{K(F)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{y \in E: \left\| x_0 - x_0 \wedge A_i(|y|) \right\| < 1\}$$

olacak şekilde, $A_1, A_2, ..., A_m \in \mathsf{D}_c$ operatörleri vardır. $A = A_1 + A_2 + ... + A_m + C_0$ olsun. $I \in [\mathsf{C}\rangle$, $C_0 \in \mathsf{C}$, $C_0 = IC_0$ olduğundan $A \in \mathsf{D}_c$ olduğu görülür. Gerçekten, $\overline{K(F)}$ bir tek kümeyle örtülür. Yani,

$$\overline{K(F)} \subseteq \{y \in E: \left\| x_0 - x_0 \wedge A(|y|) \right\| < 1\} \text{ dir.}$$

$y = Kx_0$ göz önüne alalım. Bu durumda $y \in K(F)$, öyle ki $\left\| x_0 - x_0 \wedge A(|Kx_0|) \right\| < 1$ ve aynı zamanda $0 \leq x_0 \wedge A(|Kx_0|) \leq x_0$ dır. Böylece $x_1 = x_0 \wedge A(|Kx_0|)$ vektörü F'ye aittir. Bu nedenle $Kx_1 \in K(F)$ dır. Bu yargımızı $y = Kx_1$ ile tekrarlarsak, $x_2 = x_0 \wedge A(|Kx_1|) \in F$ elde ederiz. Tümevarım yöntemiyle (n+1). adımda $x_{n+1} = x_0 \wedge A(|Kx_n|)$ olarak tanımlarız ve $x_{n+1} \in F \cap U_0$ dır. Dahası, $x_{n+1} \leq A(|Kx_n|) \leq AC_0x_n \leq A^2x_n \leq ... \leq A^{2n}x_0$ dır.

$x_0 \in \hat{Q}_c^f$ olduğundan, $A \in \mathsf{D}_c$ operatörünün x_0'da yarınilpotent olduğu Yardımcı Teorem 3.9'dan garanti edilir ve böylece $\left\| x_{n+!} \right\|^{\frac{1}{n+1}} \leq \left\| A^{2n}x_0 \right\|^{\frac{1}{n+1}} \to 0$ dır. Özellikle $\left\| x_n \right\| \to 0$ dır. Bununla beraber son sonuç $\{x_n\} \subseteq U_0$ ve $0 \notin \overline{U_0} = U_0$ olmasıyla çelişir. Teoremin ispatı bitmiştir.

$B: E \to E$ Teorem 2.18'in şartlarını sağlayan bir pozitif operatör olsun. Yani, $S \in \langle B]$ bir pozitif operatörü, pozitif sıfır olmayan vektörde yarınilpotent olduğunu ve bir sıfır olmayan kompakt operatörü domine ettiğini kabul edelim. Bir tek S operatörüyle oluşan $\mathsf{C} = \{S\}$ koleksiyonunu göz önüne alalım. O zaman C Teorem 3.10'un hipotezini sağlar. Böylece C ve $[\mathsf{C}\rangle$ altında âşikar olmayan değişmez ideali vardır. $S \in \langle B]$ hipotezi $B \in [\mathsf{C}\rangle$ olmasını gerektirir ve böylece bu ideal şüphesiz B-değişmezdir. Diğer bir deyişle, Teorem 3.10 ,Teorem 2.18'i gerektirir. Bununla birlikte operatörlerin koleksiyonunu gerekli ayrıntılardan ayırmak için her iki ispatı tutmaya karar vermiş bulunuyoruz.

Tanım 3.11

Bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideale sahip pozitif operatörlerin yarı grupları **ideal-indirgenebilir yarıgruplar** olarak adlandırılır.

Tanım 3.12

Bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideale sahip olmayan pozitif operatörlerin yarıgrupları **ideal-indirgenemez yarıgruplar** olarak adlandırılır.

Teorem 3.10'i kullanarak pozitif operatörlerin çeşitli yarıgruplarının ideal-indirgenebilir olduğunu kolayca ispatlayabiliriz. Toplamsal yarıgruplarla devam edelim.

Sonuç 3.13

Pozitif operatörlerin bir toplamsal yarıgrubu S için,

(i) S'de her operatör bir $x_0 > 0$ vektöründe yarınilpotenttir ve

(ii) S'de bir operatör sıfır olmayan AM-kompakt operatörü domine eder,

Bu şartlar altında S ve $\lfloor \mathsf{S} \rangle$'nin bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

İspat: Pozitif operatörlerin bir S koleksiyonunu Teorem 3.10'a uygulayacağız. S'nin $x_0 > 0$'da sonlu yarınilpotent olduğunu sağlamaya ihtiyacımız vardır.

Bunu sonuna, $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_k\}$ kümesi S'nin sonlu bir alt kümesi olsun ve $\mathsf{S} = S_1 + ... + S_k$ operatörü göz önüne alınsın. S bir toplamsal yarıgrup olduğundan $S \in \mathsf{S}$'dir ve böylece S x_0'da yarınilpotenttir. Yani $\left\| S^n x_0 \right\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ dır.

Her $A \in \mathcal{F}^n$ operatörü $\mathcal{F}$'den n operatörün çarpımı olduğundan $A \leq S^n$ dır ve buradan $\left\| A x_0 \right\| \leq \left\| S^n x_0 \right\|$ dır. Bu nedenle,

$$\left\|\mathcal{F}^n x_0\right\|^{\frac{1}{n}} = \sup_{A\in\mathcal{F}^n} \left\|Ax_0\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\|S^n x_0\right\|^{\frac{1}{n}} \to 0$$

ve böylece $\left\|\mathcal{F}^n x_0\right\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ dır. Bu, S toplamsal yarıgrubunun x_0'da sonlu yarınilpotent olduğunu gerektirir. Teorem 3.10'dan S ve $\left[\mathrm{S}\right\rangle$ yarıgruplarının bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır. İspat tamamlanmıştır.

Çarpımsal yarıgruplar için, Sonuç 3.13'ün bir benzerini elde etmek için, (Y.V.Turovskii,1999)'ye ait aşağıdaki neticeye ihtiyacımız vardır.

Teorem 3.14 (Turovskii,1999)

Bir Banach uzayında kompakt yarınilpotent operatörlerin her çarpımsal yarıgrubu sonlu yarınilpotenttir.

Sonuç 3.15

Eğer S bir Banach latisde yarınilpotent kompakt pozitif operatörlerin bir sıfır olmayan çarpımsal yarıgrubu ise, S ve $\left[\mathrm{S}\right\rangle$'nin bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

İspat: Teorem 3.14'e göre S çarpımsal yarıgrubu sonlu yarınilpotenttir. Şimdi Teorem 3.10 uygulanarak ispat biter.

Sonuç 3.16

B:E$\to$E bir ayrık Banach latisde bir sıfır olmayan pozitif operatör olsun. B bir sıfırdan farklı pozitif vektörde yerel yarınilpotent ise, B'nin bir âşikar olmayan kapalı ℓ-hiperdeğişmez ideali vardır.

İspat: Teorem 2.20'den B operatörünün sıfır olmayan kompakt operatörü domine ettiği biliniyor. Bu nedenle tek bir C={B} koleksiyonu Teorem 3.10'un hipotezini sağlar. Sonuç olarak C ve $\left[\mathrm{C}\right\rangle$ altında değişmez kalan bir J âşikar olmayan kapalı ideali vardır. Fakat, B ile değişmeli olan her pozitif operatör $[\mathsf{C}\rangle$'ye aittir. Bu nedenle J B için ℓ-hiperdeğişmezdir. İspat tamamlanmıştır.

Sonuç 3.13, 3.15, 3.16'nın bazı özel durumları M.Jahandideh(1997) tarafından elde edilmiştir. Sonra ki amacımız pozitif operatörler koleksiyonlarına Teorem 2.19'u genişletmektir. Bunun için bir ön çalışmaya ihtiyacımız vardır.

Tanım 3.17

Her bir $T \in \mathsf{S}_0$ ve $S \in \mathsf{S}$ için TS ve ST operatörleri S_0'a aitse, S çarpımsal yarıgrubunun bir S_0 alt kümesine S'de **yarıgrup ideali(iki-taraflı cebirsel)** denir.

Bir cebirsel yarıgrup ideali bir çarpımsal yarıgruptur. Cebirsel yarıgrup ideallerinin bir ailesinin kesişimi de bir yarıgrup idealdir.

Tanım 3.18

C operatörlerinin herhangi bir koleksiyonu için, bu alt kümeyi içeren en küçük bir cebirsel yarıgrup ideali vardır. Bu yarıgruba **C ile üretilen yarıgrup ideali** denir.

[H.Radjavi,1990, Yardımcı Teorem 1] ve [R.Drnovsek,2001, Yardımcı Teorem 4.6]'dan aşağıdaki netice operatörlerin yarıgrupları için değişmez alt uzayların varlığını ispatlamanın iyi bilinen bir metodunu sağlar.

Yardımcı Teorem 3.19

S bir Banach uzayında sürekli operatörlerin bir çarpımsal grubu olsun ve S_0 S'de bir sıfır olmayan yarıgrup ideal olsun. Eğer S_0'ın bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı varsa, S'nin de âşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı vardır.

Bundan başka, S bir Banach latisde pozitif operatörlerle oluşur ve S_0 sıfır olmayan yarıgrup idealinin bir âşikar olmayan kapalı değişmez ideali varsa S'nin de bir âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

İspat: S yarıgrubunun bir sıfır olmayan S_0 yarıgrup ideali altında, bir değişmez âşikar olmayan kapalı alt uzayı V olsun. $G=\{Tx : x\in V$ ve $T\in \mathsf{S}_0\}$ kümesiyle gerilen V'nin kapalı W vektör alt uzayını düşünelim.

İlk olarak, W'nin S altında değişmez kaldığını iddia ediyoruz. Bunu oluşturmak için $S\in \mathsf{S}$, $T\in \mathsf{S}_0$ ve $x\in V$ seçelim. $S(Tx)$ vektörünün W içinde kaldığını göstermeliyiz.

Fakat S_0 S'de bir yarıgrup ideal olduğundan ST operatörü S_0'a aittir ve bu nedenle $S(Tx)=STx\in G\subseteq W$ dir. Bu da gösterir ki $W\neq\{0\}$ ise, W bir âşikar olmayan kapalı S-değişmez alt uzaydır.

Böylece W={0} olduğunu kabul edelim. Bu V üzerinde S_0'daki her operatörün sıfır olması demektir. $N=\bigcap_{T\in S_0} KerT$ kümesini düşünelim. N bir kapalı alt uzaydır. $V\subseteq N$ ve aynı zamanda S_0 sıfırdan farklı olduğundan N tüm uzaya eşit olmaz. Yani, N bir âşikar olmayan kapalı alt uzaydır. Geriye bu alt uzayın S altında değişmez olduğuna dikkat etmek kalır. Gerçekten, bir $x\in N$ ve bir $S\in \mathsf{S}$ alalım. $Sx\in N$ olduğunu göstermek istiyoruz. Yani her $T\in \mathsf{S}_0$ için, TSx=0 dır. Fakat TS operatörü S_0 yarıgrup idealine ait olduğundan TSx=0 dır. İkinci adım aynı tarzda ispatlanabilir.

Teorem 3.20 (Drnovsek,2001)

Bir Banach latis üzerinde pozitif operatörlerin bir sıfır olmayan C koleksiyonu,

(i) Sıfır olmayan pozitif vektörde sonlu yarınilpotenttir ve

(ii) C' kommutantının sıfırdan farklı bir kompakt operatörü domine eden bir operatörü

kapsar.

Bu şartlar altında, C ve $[\mathsf{C}\rangle$'nin bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

İspat: $\hat{Q}_c^f$ ideali sıfırdan farklıdır. Yardımcı Teorem 3.6'dan biliyoruz ki, $\hat{Q}_c^f$ C ve $[\mathsf{C}\rangle$ altında değişmezdir. Bu nedenle E'de $\hat{Q}_c^f$'nin norm yoğun olduğunu kabul edebiliriz (Aksi takdirde kapanışı C ve $[\mathsf{C}\rangle$ altında bir değişmez âşikar olmayan kapalı idealdir).

Şimdi, C'deki operatörlerle üretilen bütün sıfır ideallerinin kesişimi N_c'yi düşünelim, yani, $N_c = \bigcap_{C\in\mathsf{C}} N_c$ dir. Açıktır ki, bu kapalı idealdir ve bir doğrudan hesaplamayla onun hem C hem de $[\mathsf{C}\rangle$ altında değişmez olduğu görülür. $x \in N_c$ ve $C_0 \in \mathsf{C}$, $T_0 \in [\mathsf{C}\rangle$ iki keyfi operatörlerini alalım. $C_0x \in N_c$ ve $T_0x \in N_c$ olduğunu göstermeliyiz. Yani her $C \in \mathsf{C}$ için, $C|C_0x| = 0$ ve $C|T_0x| = 0$ dır. Birinci eşitlikten $C|C_0x| \le CC_0|x| = C_0 = 0$ dır. İkincisinden dikkat edilirse $CT_0 \le T_0C$: $C|T_0x| \le CT_0|x| \le T_0C|x| = T_00 = 0$ ı gerektirir ve böylece $C|T_0x| = 0$ dır. Bu nedenle N_c sıfırdan farklı ise,o C ve $[\mathsf{C}\rangle$ altında bir ortak değişmez âşikar olmayan kapalı idealdir. Sonuçta aynı zamanda $N_c = \{0\}$ kabul edebiliriz.

K, bir $T_0 \in \mathsf{C}'$ pozitif operatörle domine edilmiş bir sıfır olmayan kompakt operatör olsun. $\hat{Q}_c^f$ E'de norm yoğun olduğundan $Kx_0 \ne 0$ olacak şekilde bir $0 < x_0 < \hat{Q}_c^f$ vektörünü bulabiliriz.

Sonra C koleksiyonuyla bağdaşan S_c, D_c yarıgruplarını düşünelim. S_c C ile üretilen çarpımsal yarıgruptur ve D_c aşağıdaki gibi tanımlanan çarpımsal ve toplamsal yarıgruptur.

$$\mathsf{D}_c = \{D \in L(E)_+ : \exists\{T_1,...,T_k\} \subseteq [\mathsf{C}\rangle ve\{S_1,...,S_k\} \subseteq \mathsf{S}_c \text{ öyle ki } D \le \textstyle\sum_{i=1}^k T_iS_i\} \text{ dir.}$$

$\mathsf{C} \cup [\mathsf{C}\rangle$ koleksiyonuyla üretilen $\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$ çarpımsal yarıgrubuna da ihtiyacımız vardır. $\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle} \subseteq \mathsf{D}_c$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten $A \in \mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$ bir keyfi operatör alalım. $\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$ yarıgrubunun elemanları $\mathsf{C} \cup [\mathsf{C}\rangle$'de ki operatörlerin sonlu çarpımlarıdır. $[\mathsf{C}\rangle$'nin tanımından biliyoruz ki, $C \in \mathsf{C}$ ve $T \in [\mathsf{C}\rangle$ operatörleri için $CT \le TC$ dir. Bu, A operatörünün bir $T_1,...,T_m \in [\mathsf{C}\rangle$ ve $C_1,...,C_k \in \mathsf{C}$ için, $T_1....T_mC_1....C_k$ biçiminde bir operatör ile baskınlaştırılmasını gerektirir. Fakat $[\mathsf{C}\rangle$ bir yarıgrup olduğundan $T=T_1....T_m$ operatörü $[\mathsf{C}\rangle$'ye aittir ve benzer olarak $S=C_1....C_k$ operatörü S_c yarıgrubuna aittir. Diğer yandan $\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$'de her A operatörü $T\in[\mathsf{C}\rangle$ ve $S\in\mathsf{S}_c$ ile TS biçimindeki bir operatörle baskınlaştırıldığını göstermiş bulunuyoruz ve sonuç olarak, A D_c'ye aittir.

Bir sonrakine dikkat edilirse, her $C\in\mathsf{C}$ için T_0C operatörü $\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$'ye aittir ve bu nedenle $\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$'de T_0C ile üretilen S_0 (iki-taraflı) yarıgrup idealini düşünebiliriz. Yani, S_0 $\{T_0C : C\in\mathsf{C}\}$ kümesiyle üretilen, yarıgrup idealidir.

$\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}\subseteq\mathsf{D}_c$ den $\mathsf{S}_0\subseteq\mathsf{D}_c$ elde ederiz. C x_0'da sonlu yarınilpotent olduğundan ve aynı zamanda Yardımcı Teorem 3.9'dan biliyoruz ki, D_c x_0'da sonlu yarınilpotenttir ve bu nedenle aynı şekilde, S_0 x_0'da sonlu yarınilpotenttir.

S_0'ın kapsadığı sıfırdan farklı bir kompakt operatörü domine eden bir operatörü gerçekleyelim. $x\in E$ ve $K_1x_0>0$ için, $|K_1x|\le|Kx|$ olacak şekilde bir K_1 kompakt operatörü vardır. $N_c=\{0\}$ olduğundan, $CK_1x_0>0$ ı sağlayan bir C$\in\mathsf{C}$ bulabiliriz. Böylece E'de CK_1 bir sıfır olmayan kompakt operatördür.Daha fazla olarak, her $x\in E$ için $CT_0\in\mathsf{S}_0$ olduğundan bizim iddiamızı kurarak $|CK_1x|\le C|K_1x|\le C|Kx|\le CT_0|x|$ olur.

Pozitif operatörlerin S_0 koleksiyonu, sıfırdan farklı bir kompakt operatörü domine eden bir operatör kapsadığını ve $x_0>0$'da sonlu yarınilpotent olduğunu gösterdik. Yani, S_0 Teorem 3.10'un tüm hipotezini sağlar. Bu nedenle bu teoreme göre S_0'ın âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır. Fakat S_0 $\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$'de bir yarıgrup idealdir ve aynı zamanda Yardımcı Teorem 3.19'dan görürüz ki $\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$'nin âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır. $\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle\subseteq\mathsf{S}_{\mathsf{C}\cup[\mathsf{C}\rangle}$ dır. Bu bize C ve $[\mathsf{C}\rangle$'nin bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali olduğunu belirtir. İspat tamamlanmıştır.

Ω bir yerel kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $B: C_0(\Omega) \to C_0(\Omega)$ bir pozitif operatörü bir $x_0 > 0$ vektöründe yerelyarınilpotent ise B'nin bir âşikar olmayan kapalı değişmez idealinin olduğunu Teorem 2.24'den biliyoruz. Bir sonraki teorem bu sonucun bir yarıgrup versiyonudur.

Teorem 3.21

Ω yerel kompakt Hausdorff uzayı olsun ve S, bir $x_0 > 0$'da yarınilpotent, $C_0(\Omega)$ üzerinde pozitif operatörlerin sıfır olmayan çarpımsal yarıgrubu olsun. Aynı zamanda S bir toplamsal yarıgrupsa S'nin bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

İspat: Her $S \in \mathsf{S}$ için, $Sx_0 = 0$ ise, sıfır ideallerinin kesişimi $J = \bigcap_{S \in \mathsf{S}} \{x \in C_0(\Omega) : S|x| = 0\}$ kümesi bir âşikar olmayan kapalı S-değişmez idealdir.

Böylece bir $\mathsf{S}_0 \in \mathsf{S}$ için $\mathsf{S}_0 x_0 > 0$ kabul edelim. Genellemeyi bozmadan x_0 fonksiyonunun destek kümesi $F = \overline{\{t \in \Omega : x_0(t) > 0\}}$'nin kompakt olduğunu kabul edebiliriz. Her $S \in \mathsf{S}$ için, $[Sx_0](t_0) = 0$ ı sağlayan bir $t_0 \in \Omega$ noktasının varlığı kolayca gösterilir. Son olarak,

$$J = \{x \in C_0(\Omega) : S_i \in \mathsf{S} \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{olduğunda}, |x| \le \left[\sum_{i=1}^{m} S_i x_0\right]\} \text{ idealini düşünelim.}$$

$0 \neq \mathsf{S}_0 x_0 \in J$ olarak $J \neq \{0\}$ olduğu açıktır. Aynı zamanda J idealinin S-değişmez olduğu açıktır. Sonra her $S \in \mathsf{S}$ operatörü için, $[Sx_0](t_0) = 0$ olduğundan J, $C_0(\Omega)$'da yoğun olamaz. O halde J'nin norm topolojiye göre kapanışı $\overline{J}$, bir âşikar olmayan S-değişmez idealdir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.21'de toplamın kabulü hipotezinin gerekli olduğu bir sürpriz olarak gelir. Dahası bu hipotezi kabul etmesek bile, yarıgruptaki her operatörün yarınilpotentliği bile bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez idealinin varlığını garanti etmek için yeterli değildir. Bir örnek sunmak için, biraz bilgi vermeye ihtiyacımız vardır. Γ birim çemberi göstersin ve $z = e^{i\phi} \in \Gamma$ bir sabit karmaşık sayısının argümenti ϕ, 2π'nin irrasyonel katı olsun. $\forall t \in \Gamma$ için, $\{tz^n : n \in N\}$ yörüngesi Γ'da yoğundur.

Bir $\theta \in \mathbb{R}$ açısı ve $G = \{e^{in\theta} : n \in \mathbb{N}\}$ olsun.

(a) θ, 2π'nin bir rasyonel katı ise, G Γ birim çemberinin bir sonlu altgrubudur. (ve böylece G birimin köklerinden oluşur)

(b) θ, 2π'nin bir rasyonel katı değilse, G Γ'da yoğundur.

G çarpım altında kapalıdır.

θ açısının 2π'nin rasyonel katı olduğunu kabul edelim.

Yani, bir $k \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $\theta = 2\pi \dfrac{k}{m}$'dir. Sonuç olarak $e^{m\theta_1} = e^{2k\pi_1} = 1$'dir. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ ise, $0 \le r < k$ olmak üzere n=θk+r yazabiliriz ve böylece $e^{n\theta_1} = \left(e^{k\theta_1}\right)^{\theta} e^{r\theta_1}$'dir. Bu G'nin Γ'nun sonlu bir altkümesi olduğunu gösterir. G çarpım altında kapalı olduğundan G birim köklerini içeren Γ'nun alt grubudur.

(b) θ açısının 2π'nin rasyonel katı olmadığını kabul edelim. Bu durumda $n, m \in \mathbb{N}$ için $e^{n\theta_2} \neq e^{m\theta_2}$'dir. Gerçekten diğer yandan $e^{n\theta_2} = e^{m\theta_2}$, $e^{(n-m)\theta_2} = 1$ demektir ve böylece her $q \in \mathbb{Z}$ için $(n,m)\theta = 2\pi q$'dur veya eşitlikten sonra $k \in \mathbb{N}$ alalım ve her $1 \le j \le k$ için

$$\Gamma_j = \{e^{x_2} : \frac{2\pi}{k}(j-1) \le x < \frac{2\pi}{k} j\} \text{ dır.}$$

$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j$ dır ve böylece G sonsuz olduğundan bir $1 \le j \le k$ ve $e^{n\theta_2}.e^{m\theta_2} \in \Gamma_j$ olacak şekilde $n > m$ ve bir $n, m \in \mathbb{N}$ vardır. $e^{n\theta_2} = e^{x_{12}}$ ve $e^{m\theta_2} = e^{x_{21}}$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in \left[\dfrac{2\pi}{k}(j-1), \dfrac{2\pi}{k} j\right]$ alalım. Sonuç olarak, $x = x_1 - x_2$ olsun ve $|x| < \dfrac{2\pi}{k}$ ve $e^{x_2} = e^{(n-m)\theta_2} \in G$ olduğuna dikkat edelim. Sonuç olarak, her $\ell \in \mathbb{N}$ için, $e^{\ell x_2} \in G$'dır. Bu her $1 \le j \le k$ için $e^{\ell x_2} \in \Gamma_j$ olacak şekilde $\ell \in \mathbb{N}$ vardır. $k \in \mathbb{N}$ keyfi olduğudan, G Γ'da yoğundur.

Her $\omega \in C(\Gamma)$ fonksiyonuyla ağırlık bileşke operatörü $T_\omega : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$'yi bağdaştırıyoruz ve bu operatör her bir $x \in C(\Gamma)$ için,

$[T_\omega x](t) = \omega(t)x(tz), t \in \Gamma$ ile tanımlanır. (3.21.1)

A.K.Kitover ve bağımsız olarak A.B.Antonevich ve A.V.Lebedev tarafından T_ω operatörünün spektral yarıçapını hesaplamak için buldukları formülü kullanabiliriz.

Teorem 3.22 (Antonevich-Lebedev-Kitover,1983,1979)

T_ω (3.21.1) ile tanımlanan operatör ise, onun spektral yarıçapı

$$r(T_\omega) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\omega\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta} \text{ dır.}$$

İspat: Basitlilik için, $T = T_\omega$ olsun. İlk önce, her $t \in \Gamma$ için, $|\omega(t)| \ge \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $t \to \ln|\omega(t)|$ fonksiyonu süreklidir. $n \in N, x \in C(\Gamma)$ ve $t \in \Gamma$ için, $T^n x(t) = \omega(t)\omega(tz)...\omega(tz^{n-1})x(tz^n)$ dır. Bu da,

$t_n \in \Gamma$ için,

$$\|T^n\| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|T^n x\|_\infty = \max_{t \in \Gamma} |\omega(t)\omega(tz)...\omega(tz^{n-1})|$$

$$= |\omega(t_n)\omega(t_n z)...\omega(t_n z^{n-1})|$$

olmasını gerektirir.

$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{t_n z^i}$ ile tanımlı Γ'da μ_n olasılık ölçümünü düşünürsek,

$$\left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} = e^{\int_\Gamma \ln|\omega| d\mu_n} \tag{3.22.1}$$

olduğunu görürüz.

Şimdi $\{\mu_n\}$ dizisi, ω^*-kompakt olan $C(\Gamma)^*$'ın kapalı birim yuvarında kaldığına dikkat edelim. Böylece bir μ ölçümü için, $\mu_{n_\partial} \xrightarrow{\omega^*} \mu$ olacak şekilde $\{\mu_n\}$'nin bir $\{\mu_{n_\partial}\}$ altnet'i vardır. Bu ve (3.22.1)

$r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{\alpha} \left\|T^{n_\alpha}\right\|^{\frac{1}{n_\alpha}} = e^{\int_\Gamma \ln|\omega| d\mu}$ olmasını bir kere daha gerektirir.

Sonra Γ üzerinde μ normalleştirilmiş Lebesgue ölçümünü kuracağız. Bunun sonuna $Sx(t) = x(tz)$ ile tanımlı $S : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ operatörünü düşünelim.

$\langle x, S^*\mu_n - \mu_n\rangle = \langle Sx - x, \mu_n\rangle = \frac{1}{n}\left[x\left(t_n z^n\right) - x(t_n)\right]$ 'den $\left\|S^*\mu_n - \mu_n\right\| = \frac{2}{n}$ dır.

Bu $\left\|S^*\mu_n - \mu_n\right\| \to 0$'ı gerektirir ve özellikle $S^*\mu_n - \mu_n \xrightarrow{\omega^*} 0$ alırız. $\mu_{n_\alpha} \xrightarrow{\omega^*} \mu$'dan $S^*\mu_{n_\alpha} \xrightarrow{\omega^*} S^*\mu$ ve aynı zamanda $S^*\mu = \mu$ 'dür. Bir sonraki her $x \in C(t)$ için,

$\int_\Gamma Sx d\mu = \int_\Gamma x d\mu$ demektir. (3.22.2)

(3.22.2.)'yi kullanarak μ öiçümünün dönel değişmez olduğu kolayca görülebilir. Bunun sonuna $s \in \Gamma$ keyfi alalım. $z = e^{i\phi}$'nin ϕ açısı, 2π'nin irrasyonel katı olduğundan $z^{k_n} \to s$ olacak şekilde doğal sayıların bir artan $\{k_n\}$ dizisi vardır. Buradan $S^{k_n}x(t) = x(tz^{k_n}) \to x(st)$ elde edilir ve böylece (3.22.2)'den ve Lebesgue Yakınsaklık Teoreminden her $x \in C(\Gamma)$ için,

$\int_\Gamma x(st) d\mu(t) = \int_\Gamma x(t) d\mu(t)$ (3.22.3) dır.

Aynı zamanda (3.22.3) her $x \in L_1(\Gamma, \mu)$ için doğru olur. Özellikle Γ'nun her bir A Borel alt kümesi için,

$\mu(sA) = \mu(A)$ dır.

O zaman Haar ölçümünün tekliğinden Γ üzerinde μ normalleştirilmiş Lebesgue ölçümü olmalıdır. Bu nedenle $|\omega|$ sıfırdan ayrılırken ki özel durumda,

$$r(T\omega) = e^{\int_\Gamma \ln|\omega(t)| d\mu(t)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\omega(e^{i\theta})| d\theta} \text{ dır.}$$

Genel durum için, $\omega_k = |\omega| + \frac{1}{k}$ ile verilen $\{\omega_k\}$ sürekli fonksiyonların dizisini düşünelim ve $T_k = T_{\omega k}$ olsun. Her n için $\|T^n\| \leq \|T_k^n\|$'den her k için $r(t) \leq r(T_k) = e^{\int_\Gamma \ln|\omega_k| d\mu}$ alırız.

$k \to \infty$ $r(T) \leq e^{\int_\Gamma \ln|\omega| d\mu}$ eşitsizliğini üretir. (3.22.4)

Özellikle, $t \to \ln|\omega(t)|$ ölçülebilir fonksiyonu Lebesgue integrallenemezse, yani, $\int_\Gamma \ln|\omega| d\mu = -\infty$ ise, $r(T) = e^{\int_\Gamma \ln|\omega| d\mu} = 0$ dır. $t \to \ln|\omega(t)|$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğu durumu düşünmek kalır. Bu durumda (3.22.3)'ü kullanarak,

$$\ln\left[\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\right] = \frac{1}{n}\ln\left[\max_{t\in\Gamma}\left|\omega(t)\,\omega(tz)\ldots\omega(tz^{n-1})\right|\right]$$

$$\geq \frac{1}{n}\int_\Gamma \ln\left[\left|\omega(t)\,\omega(tz)\ldots\omega(tz^{n-1})\right|\right] d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_\Gamma \ln\left|\omega(tz^i)\right| d\mu(t)$$

$= \int_\Gamma \ln|\omega(t)| d\mu(t)$ dır.Sonuçta her n için, $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = e^{\ln\left[\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\right]} \geq e^{\int_\Gamma \ln|\omega(t)| d\mu(t)}$ ve böylece

$$r(T) \geq e^{\int\limits_{\Gamma} \ln|\omega(t)| d\mu(t)}$$ dır.

Bu (3.22.3)'le birleştirilirse $r(T) = e^{\int_{\Gamma} \ln|\omega| d\mu}$ formülünün bu durumda da doğru olduğu görülür.İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.22 aşağıdaki neticenin bir özel durumudur. İspat tamamlanmıştır.

- $\phi : \Omega \to \Omega$ bir kompakt Hausdorf uzayın bir homeomorfizması olsun ve $\omega \in C(\Omega)$ olsun. $T_\omega : C(\Omega) \to C(\Omega)$ operatörü $T_\omega x(w) = \omega(w) x(\phi(w))$ şeklinde tanımlansın. O zaman T_ω operatörünün spektral yarıçapı,

$$r(T_\omega) = \sup_{\mu} e^{\int_{\Omega} \ln|\omega| d\mu}$$

şeklinde verilir, burada supremum Ω üzerinde her ϕ-değişmez μ Borel olasılık ölçümleri üzerinden alınır. Teorem 3.22'den T_ω'nin yarınilpotent olması için gerek ve yeter şart Γ üzerinde $t \to \ln|\omega(t)|$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonunun integrallenemez olmasıdır. Son sonucumuz için aşağıdaki özelliklere sahip bir $\omega_0 \in C(\Gamma)$ fonksiyonunu sabit tutalım.

(a) Her $t \in \Gamma$ için $0 \leq \omega_0(t) \leq 1$ dır.

(b) ω_0'ın sıfır olduğu yerde t=1 sadece noktadır.

(c) t=1'in bir küçük komşuluğunun dışında tüm t'ler için $\omega_0(t) = 1$ dir.

(d) ω_0 fonksiyonu t=1'de yeterince hızlı düşer, öyle ki $t \to \ln \omega_0(t)$ fonksiyonu integrallenemez.

Bu şartlar T_{ω_0} operatörünün pozitif ve yarınilpotent olmasını gerektirir

Örnek 3.23

$C(\Gamma)$ üzerinde yarınilpotent pozitif operatörlerin bir ideal indirgenemez çarpımsal yarıgrubu S vardır.

Teoremin önceki cümlesinin (a) ve (d) özelliklerini sağlayan ω_0 fonksiyonu kullanarak ağırlıkların aşağıdaki koleksiyonunu sunuyoruz.

$W = \{\ \omega \in C(\Gamma)$:her bir $t \in \Gamma$ ve bir $s \in \Gamma$ için $0 \le \omega(t) \le \omega_0(ts)\ \}$ dir.

Sonra, her bir $\omega \in W$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $[T_{\omega,n} f](t) = \omega(t) f(tz^n)$ $f \in C(\Gamma)$, $t \in \Gamma$ ile $T_{\omega,n} : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ operatörünü tanımlayalım, burada $z = e^{i\phi} \in \Gamma$ sabit karmaşık sayısının ϕ açısı 2π 'nin irrasyonel katıdır. Bütün bu operatörlerin koleksiyonu S ile gösterilsin.

Yani $\mathsf{S} = \{T_{\omega,n} : \omega \in W$ ve $n \in \mathbb{N}\ \}$ dır.

(3.21.1)'de bir bakış gösterir ki, her $T_{\omega,n} \in \mathsf{S}$ operatörü yarınilpotenttir. S'nin çarpımsal yarıgrup olduğunu sağlamak için $T_{\omega_1,n_1}, T_{\omega_2,n_2} \in \mathsf{S}$ olsun ve her $f \in C(\Gamma)$ ve her $t \in \Gamma$ için i=1,2 iken

$[T_{\omega_i,n_i} f](t) = \omega_i(t) f(tz^{n_i})$ dir.

Bir doğrudan hesaplama gösterir ki $\omega(t) = \omega_2(t)\omega_1(tz^{n_2})$ olmak üzere,

$$[T_{\omega_2,n_2} T_{\omega_1,n_1} f](t) = \omega_2(t)\omega_1(tz^{n_2}) f(tz^{n_1+n_2}) = \omega(t) f(tz^{n_1+n_2}) \text{ dır.}$$

$0 \le \omega \le \omega_2$ olduğundan $\omega \in W$ olduğu açıktır ve bu nedenle $T_{\omega_2,n_2} T_{\omega_1,n_1} \in \mathsf{S}$ dir.

Bu S yarıgrubunun ideal indirgenemez olduğunu iddia ediyoruz. Eğer değilse her $T \in \mathsf{S}$ için T-değişmez olan $C(\Gamma)$'da bir âşikar olmayan kapalı J ideali vardır. Sonuçta bu F kümesi üzerinde sıfır olan tüm fonksiyonlardan oluşan J olacak şekilde $F \subseteq \Gamma$ kapalı bir kümesi vardır. F Γ'da yoğun değildir. Aksi durumda J , $\{0\}$ olacaktı. Aynı zamanda F boş değildir, aksi durumda J=E'dir. Böylece t_0'ın bir komşuluğu F'yi kesmeyecek şekilde bir $t_0 \in \Gamma'$ bir noktası vardır. f F'de sıfır olacak şekilde (ve dolayısıyla f J'ye aittir.) bir negatif olmayan $f \in C(\Gamma)$ fonksiyonunu alalım ve f t_0'ı içeren bir Δ açık kümesi üzerinde sıfırdan büyüktür.

Şimdi bir $t_1 \in F$ alalım. $\{t_1 z^n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi Γ'da yoğun olduğundan $t_2 = t_1 z^k$ sayısı Δ'ya ait olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Sonra $\omega_0(t_1 s) = 1$ olacak şekilde $s \in \Gamma$ seçelim ve $t \in \Gamma$ için $\omega(t) = \omega_0(ts)$ olsun. O zaman $\omega \in C(\Gamma), 0 \le \omega(t) \le \omega_0(ts)$ ve $\omega(t_1) = 1$ dır. Sonuç olarak $T_{\omega,k} \in \mathcal{S}$ operatörünü göz önüne alalım. J T-değişmez olduğundan $T_{\omega,k} f \in J$ dir. Bu nedenle $[T_{\omega,k} f](t_1) = 0$ dır. Diğer yandan,

$$[T_{\omega,k} f](t_1) = \omega(t_1) f(t_1 z^k) = f(t_2) > 0$$

bir çelişkidir. Bu $\mathcal{S}$ çarpımsal yarıgrubunun ideal indirgenemez olduğunu oluşturur.

$L_2[0,1]$ üzerinde nilpotent pozitif operatörlerin bir indirgenemez çarpımsal yarıgrup örneği [Y.Zhong,1995] tarafından oluşturulmuştur. İlave olarak [R.Drnovsek,2001] 'de gösterildiği gibi $1 \le p < \infty$ olan bir $L_p[0,1]$'deki böyle bir yarıgrubu oluşturmak için ve yarıgrubtaki her operatörün karesinin sıfır olmasını elde etmek mümkündür. Sonuç 3.15'deki kompaktlık hipotezinin gerekli olduğunu gösterir.

4.Kompakt-Arkadaşca Operatörler

Görüldüğü gibi kompakt pozitif operatörler değişmez alt uzay problemini ilgilendiren çoğu özel problemin çözümüdür.Bu bölümde bu özellikleri hala korurken kompaktlık hipotezi düşünülerek rahatlatılabileceğini göstereceğiz. Operatörlerin karşılık gelen sınıfı kompakt-arkadaşca operatörlerin ismi altında [Y.A.Abramovich,1994]'de sunuldu. Kompakt-arkadaşca operatörler ve kompakt operatörlerin arasındaki bağlantılar sıra yapısına göredir.

Tanım 4.1

Bir kompakt pozitif operatörle domine edilen sıfır olmayan operatörü domine eden B'nın kommutantında bir pozitif operatör varsa, bir E Banach latisinde tanımlı $B : E \to E$ pozitif operatörüne **Kompakt-Arkadaşca** denir.

Yani, bir B pozitif operatörünün kompakt arkadaşca olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı üç tane $R, K, C : E \to E$ operatörleri vardır ki R, K pozitif K kompakt ve RB=BR'dir ve her $x \in E$ için,

$|Cx| \leq R|x|$ ve $|Cx| \leq K|x|$ dır.

Sonlu boyutlu Banach latis üzerinde her operatör kompakttır ve bu nedenle bir kompakt arkadaşca operatör durumu sadece sonsuz boyutlu Banach latisler üzerinde olanlardır. Bir kompakt arkadaşca operatörün her kuvveti (negatif olmayan katsayılı her çok terimli bile) aynı zamanda bir kompakt arkadaşcadır. Burada kompakt-arkadaşca operatörlerin bazı diğer örneklerini verelim.

- Kompakt pozitif operatörler
- Bir sıfır olmayan kompakt pozitif operatörlerin kommutantında pozitif operatörler
- Sıfır olmayan kompakt pozitif operatörleri domine eden pozitif operatörler
- Pozitif integral operatörler

Yukarıdaki örnekler bir kompakt-arkadaşca operatörün kompakt olamayacağını gösterir. Birim operatör (kompakt-arkadaşca olduğu açıktır) bunu göstermek için belki en iyi örnektir. Değişmez alt uzay problemine kompakt-arkadaşca operatörlerin ilgisi [Y.V.Abramovich,1994]'deki bir neticenin gelişimi olan aşağıdaki temel teoremle gösterilir.

Teorem 4.2(Abramovich-Aliprantis-Burkinshaw,1994)

Bir Banach latisde sıfırdan farklı kompakt-arkadaşca operatör $B: E \to E$ bir $x_0 > 0$ da yarınilpotent ise, B'nin bir âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

Daha $[B\rangle$ de her $\{T_n\}$ dizisi için her T_n ve B altında değişmez kalan âşikar olmayan kapalı ideali vardır.

İspat.

Genellemeyi bozmadan $\|B\| < 1$ kabul edelim. Yeterince küçük $\alpha_n > 0$ keyfi sabitlerini alalım öyle ki $T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_n$ pozitif operatörü var ve $\|B+T\| < 1$ dir. $[B\rangle$ norm kapalı toplamsal yarıgrup olduğundan, $T \in [B\rangle$'dır. Aynı tartışma gösterir ki her $n \in \mathbb{N}$ için $(B+T)^n$ operatörü de $[B\rangle$'ye aittir. Sonuç olarak $A = \sum_{n=0}^{\infty} (B+T)^n$ pozitif operatörü $[B\rangle$'ye aittir.

Her $x > 0$ için Ax ile üretilen temel ideali J_x ile gösterelim, yani,

$J_x = \{\, y \in E :$ bir $\lambda > 0$ için $|y| \le \lambda A x\}$ dır.

$x \le Ax$ eşitsizliği açıkça $x \in J_x$'i gerektirir. Bu nedenle bu ideal sıfır değildir. Sonra J_x ideali (B+T)-değişmezdir. Gerçekten, $y \in J_x$ ise bir $\lambda > 0$ için $|y| \le \lambda A x$'dır ve böylece iddia edildiği gibi

$$|(B+T)y| \le (B+T)|y| \le \lambda (B+T) \sum_{n=0}^{\infty} (B+T)^n x \le \lambda A x \text{ dir.}$$

$0 \leq B,T \leq B+T$ olduğundan J_x B ve T altında değişmezdir. Aynı zamanda bu ideal her n için T_n-değişmezdir. Önceki tartışma gerektirir ki bir $x > 0$ vektörü için norm kapanışı $\overline{J}_x \neq E$ ise $\overline{J}_x$ B ve her T_n altında değişmez kalan bir âşikar olmayan kapalı idealdir.

Sonuçta bizim teoremimizin ispatını sürdürmek için her $x > 0$ iken

$\overline{J}_x = E$ kabul edebiliriz, (4.2.1)

yani, her $x > 0$ için Ax E'de bir yarı-iç noktadır.

K, R pozitif K kompakt iken sıfırdan farklı üç tane $R, K, C : E \to E$ operatörlerini alalım. Bu operatörler her $x \in E$ için $RB = BR$, $|Cx| \leq R(|x|)$ ve $|Cx| \leq K(|x|)$ 'i sağlasın.

$C \neq 0$ olduğundan $Cx_1 \neq 0$ olacak şekilde bir $x_1 > 0$ vardır. O zaman $A|Cx_1| \geq |Cx_1|$ sağlayan $A|Cx_1|$ yarı-iç noktasıdır. Teorem 2.21.(1)'den $x_2 = M_1 Cx_1 > 0$ olacak şekilde birim operatörle domine edilen $M_1 : E \to E$ operatörü vardır. $\prod_1 = M_1 C$ alalım ve $\prod_1$ operatörü R operatörüyle K kompakt pozitif operatörü tarafından domine edilen operatördür. Teorem (2.21.(1))'den $\overline{J_{x_2}}$ =E dir. Sonuç olarak $C \neq 0$ olduğundan $Cy \neq 0$ olacak şekilde $Cy \leq Ax_2$ vardır. Böylece $A|Cy|$ elemanı yarı-iç noktadır.

$|Cy| \leq A|Cy|$ olduğundan (teorem 2.21.(1))'den $x_3 = M_2 Cy > 0$ olacak şekilde birim operatörle domine edilen $M_2 : E \to E$ operatörü vardır. $|y| \leq Ax_2$ ve Ax_2 bir yarı-iç nokta olduğundan Yardımcı Teorem 2.21.(2)'den $MAx_2 = y$ olacak şekilde birim operatörle sınırlandırılan $M : E \to E$ 'ye operatörü vardır. Böylece $x_3 = M_2 Cy = M_2 CMAx_2$ dir.

$\prod_2 = M_2 CMA$ olsun ve $\prod_2$ RA operatörü ve KA kompakt pozitif operatörüyle domine edilmiştir.

x_2 vektörüyle x_3 vektörünü yerdeğiştirdikten sonra önceki tartışmaları tekrar edersek $\prod_3 x_3 > 0$ ı sağlayan bir tane daha $\prod_3 : E \to E$ operatörünü elde ederiz. RA ve KA kompakt pozitif operatörüyle domine edilen $\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1$ operatörünü göz önüne alalım, $\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 x_1 = \Pi_3 x_3 > 0$'dan $\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1$'ın sıfırdan farklı bir operatör olduğu görülür. Daha fazla olarak yukarıda gösterildiği gibi, her Π_i (i.:1,2,3) operatörü kompakt operatörle domine edilir. Bu nedenle teorem 2.23 $\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1$ operatörünün kompakt olmasının gerektiğini garanti eder. O zaman doğrudan hesaplama ile her $x \in E$ için,

$|\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 x| \leq RARAR|x|$ olduğu görülür.

S=RARAR olsun. $S \in [B\rangle$ olduğunu gerçekleyelim. Bunu görmek için $A \in [B\rangle$ olduğunu hatırlayalım, aynı zamanda R operatörü B ile değişmeli olduğundan $[B\rangle$'ye aittir. $[B\rangle$ çarpımsal yarıgrup olduğundan S=RARAR operatörünün $[B\rangle$'ye ait olması gerekir. $\mathsf{C} = \{B\}$ koleksiyonunun Teorem 3.20'nin şartlarını sağladığına tek bir B operatöründen oluştuğuna dikkat etmek geriye kalır. Gerçekten C $x_0 > 0$'da yarınilpotenttir ve $[\mathsf{C}\rangle = [B\rangle$ bir sıfırdan farklı kompakt operatörü domine eden S operatörünü kapsar. Bu teoremden $[B\rangle$ altında değişmez kalan bir âşikar olmayan kapalı ideal vardır. İspat tamamlanmıştır.

Eğer bir kimse ℓ-hiperdeğişmez idealinin varlığını kurmak isterse, bir kompakt arkadaşca operatör üzerinde ilave hipotezden söz etmesi gereklidir. Gerçekten birim operatör kompakt arkadaşcadır ama âşikar olmayan kapalı ℓ-hiperdeğişmez ideali yoktur.

Sonuç 4.3

$S : E \to E$ bir Banach latis üzerinde bir operatör olsun ve $\langle S]$'nin bir pozitif vektörde yarınilpotent olan bir sıfır olmayan kompakt arkadaşca operatörü kapsasın. O zaman S'nin bir âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

İspat: $B \in \langle S]$ bir pozitif vektörde yarınilpotent olan sıfır olmayan kompakt arkadaşca operatör olsun. Bildiğimiz gibi, $B \in \langle S]$ şartı $S \in [B\rangle$ şartına denktir ve sonuç olarak Teorem 4.2'den istenilen sonuç elde edilir.

Dedekind tam Banach latis için, her zaman bir âşikar olmayan kapalı $\left[B\right\rangle$-değişmez ideali olduğu ispatlanarak Teorem 4.2 geliştirilebilir. İspat Teorem 4.2 dekinin geliştirilmişidir.

Teorem 4.4

Bir Dedekind tam Banach latis üzerinde $B: E \to E$ bir sıfır olmayan kompakt arkadaşca operatör bir $x_0 > 0$'da yarınilpotent ise, $\left[B\right\rangle$ altında değişmez olan bir âşikar olmayan kapalı ideali vardır.

İspat: Her $x > 0$ için $\left[B\right\rangle x$ yörüngesiyle üretilen ideali J_x ile gösterelim, yani,

$J_x = \{\, y \in E :$ bir $A \in \left[B\right\rangle$ için $|y| \le Ax \,\}$ dir.

J_x'in bir sıfır olmayan ideal olduğu açıktır. Sonra dikkat edilise J_x ideali $\left[B\right\rangle$-değişmezdir. Gerçekten, bir $y \in J_x$ için $A \in \left[B\right\rangle$ ise $|y| \le Ax$'dir ve böylece bir $A_1 \in \left[B\right\rangle$ için $|A_1 y| \le A_1 |y| \le A_1 A x$ elde edilir.

$\left[B\right\rangle$ bir çarpımsal yarıgrup olduğundan $A_1 A$ operatörü $\left[B\right\rangle$'ye aittir. İddia ettiğimiz gibi $A_1 y \in J_x$ olduğu görülür. Bu nedenle bir $x > 0$ vektörü için J_x ideali E'de norm yoğun değilse norm kapanışı $\overline{J_x}$ bir âşikar olmayan kapalı $\left[B\right\rangle$-değişmez idealidir.

Sonuç olarak teoremimizin ispatını ilerletmek için her $x > 0$ için,

$\overline{J}_x$=E kabul edelim (4.4.1)

Diğer adımımız (4.4.1) hipotezinin $\left[B\right\rangle$'nin bir sıfır olmayan kompakt operatör domine eden bir operatör içerdiğinin gerektirdiğini göstermektir. Her bir $x \in E$ için,

$RB = BR$, $|Cx| \le R(|x|)$ ve $|Cx| \le K(|x|)$ i sağlayan

K, R pozitif , K kompakt olan $R, K, C: E \to E$ sıfırdan farklı üç operatör alalım.

$C \neq 0$ olduğundan $Cx_1 \neq 0$ olacak şekilde bir $x_1 > 0$ vardır. Bu, $(Cx_1)_+$ veya $(Cx_1)_-$ vektörlerinden en azından birinin sıfırdan farklı olması demektir ve bu nedenle E Dedekind tam olduğundan $x_2 = M_1 C x_1 > 0$'ı sağlayan birim operatörle domine edilen bir M_1 operatörü vardır. $\Pi_1 = M_1 C$ alalım ve Π_1 operatörünün R operatörüyle ve K kompakt pozitif operatörüyle domine edildiğine dikkat edelim.

Jx_2 E'de norm yoğun ve C sıfırdan farklı olduğundan $0 \leq y \leq A_1 x_2$ ve $Cy \neq 0$ olacak şekilde bir $A_1 \in [B\rangle$ operatörü ve bir $y \in Jx_2$ vardır. E Dedekind tam hipotezini kullanarak birim operatörle domine edilen M ve M_2 operatörlerini bulabiliriz öyle ki $y = MA_1 x_2$ ve $x_3 = M_2 Cy = M_2 CMA_1 x_2 > 0$ 'dır. $\Pi_2 = M_2 CMA_1$ alalım ve Π_2 operatörünün RA_1 ve KA_1 kompakt operatörleriyle domine edildiğine dikkat edelim.

Tartışmamızı x_2 vektörüyle x_3 vektörünü yerdeğiştirerek tekrarlarsak RA_2 operatörüyle ve KA_2 kompakt operatörüyle domine edilen $\Pi_3 x_3 > 0$'ı sağlayan bir $\Pi_3 : E \to E$ operatörü ve bir $A_2 \in [B\rangle$ operatörü elde edilir.

$\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1$ operatörünü düşünelim. $\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 x_1 = \Pi_3 x_3 > 0$ olarak sıfırdan farklıdır. Daha fazla olarak yukarıda gösterildiği gibi her Π_i (i:1,2,3) operatörü bir kompakt operatörle domine edilir ve bu nedenle $\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1$ operatörünün kompaktlığı Teorem 2.23'den garanti edilir.

Aynı zamanda bir doğrudan hesaplama gösterir ki her $x \in E$ için $|\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 x| \leq RA_2 RA_1 R$'dir. Son olarak S=$RA_2 RA_1 R$ operatörünü düşünelim. $S \in [B\rangle$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için, $A_1, A_2 \in [B\rangle$ ve aynı zamanda $R \in [B\rangle$'dir. R B ile değişmeli olduğundan ve $[B\rangle$ çarpımsal yarıgrup olduğundan $S = RA_2 RA_1 R$ operatörünün $[B\rangle$'ye ait olması gerekir.

Bir tek B operatöründen oluşan C={B} koleksiyonu Teorem 3.20'nin şartlarını sağladığına dikkat etmek geriye kalır. Gerçekten, C $x_0 > 0$'da bir yarınilpotenttir ve

$\left[C\right\rangle = \left[B\right\rangle$ bir sıfır olmayan kompakt operatörü domine eden S operatörünü kapsar. Bu Teoremle $\left[B\right\rangle$ altında değişmez kalan bir âşikar olmayan kapalı ideal vardır. Bu ispatı tamamlar.

SONUÇLAR

En ince ayrıntısına kadar Banach latisler üzerinde pozitif operatörlerin koleksiyonlarının çeşitli değişmez alt uzay sonuçlarını operatörlerin koleksiyonlarına genişletmeye çalıştık Bizim ana sonuçlarımız şunlar olmuştur:

Yarınilpotent kompakt pozitif operatörlerin her çarpım yarıgrubunun bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır.

C koleksiyonu bir sıfırdan farklı kompakt operatör içeriyorsa C nin ve onun kommutantı C' nün bir ortak âşikar olmayan değişmez ideali vardır.

C bir banach latisde pozitif operatörlerin koleksiyonuysa C bir ortak âşikar olmayan değişmez alt uzayı vardır.

S en az iki boyutlu Banach latis üzerinde yarınilpotent kompakt pozitif operatörlerin çarpımsal yarıgrubu ise S nin bir ortak âşikar olmayan kapalı değişmez kapalı ideali vardır.

KAYNAKLAR

Y.A.Abramovich ve C.D.Aliprants (2002), An Invitation to Operator Theory , American Msthematical Society Graduate Studies

Y.A.Abromovich , C.D.Aliprantis, and O.Burkinshaw (1994), İnvariant subspaces for positive operators , J.Funct 124,95-111

A.B.Antonevich ve A.V.Lebedev (1983), Spectral properties of operators with shift,Izv.Akad.Nauk USSR Ser.Mat.47,915-941.

R.Drnovsek (2001), Common invariant subspaces for collections of operators, Integral Equations Operator Theory 39, 253-266

M.T.Jahandideh (1997), Decomposability and Triangularizability of positive Operators on Banach Lattices, Ph.D.Dissertation, Dalahousie University, Halifax, Canada.

A.K.Kitover (1979), On the spectrum of weighted automorphisms and on a Kamowittz-Shineberg Teorem, Funct.Anal.Appl.13 ,70-71.

H.Radjavi (1990), On reducibility of semigroups of compact operators ,İndiana Univ.39,499-515

H.H.Schaefer (1970), Topologische Nilpotenz irreduzibler Operatoren 117,135-140

H.H.Schaefer (1974), Banach lattices and Positive Operators ,Springer-Verlag ,Berlin and New York

V.S.Shulman (1984), On invariant subspaces of Volterra operators, Funktsional Anal.i Prilozhen 18, 84-85.

Y.V.Turovskii (1999), Volterra semigroups have invariant subspaces. J.Funct.Anal.162, 313-322.

Y.Zhong (1995), Irreducible semigroups of functionally positive nilpotent operators, Trans.Amer.Math.Soc.347,3093-3100.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi: 26.04.1982

Doğum yeri : Samsun

Lise : 1993-2000 Samsun Anadolu Lisesi

Lisans: 2000-2005 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü