**T.C.**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# YENİDEN DÜZENLENMİŞ-DEĞİŞMEZ UZAYLARDA KATI SİNGÜLER GÖMMELER

**Elif DENİZ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Kasım, 2019

**T.C.**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# YENİDEN DÜZENLENMİŞ-DEĞİŞMEZ UZAYLARDA KATI SİNGÜLER GÖMMELER

Elif DENİZ tarafından hazırlanan tez çalışması 06.11.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Doç. Dr. Yusuf ZEREN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________________

Doç. Dr. Özgür YILDIRIM, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________________

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi ____________________________

Danışmanım Doç. Dr. Yusuf ZEREN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Yeniden Düzenlenmiş-Değişmez Uzaylarda Katı Singüler Gömmeler başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim

Elif DENİZ

İmza

# TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında yeniden düzenlenmiş-değişmez uzayların teorisi verilmiş olup bu uzayların temel sınıfları icin kanonik gömmenin ayrık katı singülerliği ve katı singülerliği incelenerek bu kavramların birbirleriyle olan ilişkisi ifade edilmiştir.

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam süresince değerli fikirleriyle bana yol gösteren, bir araştırmacıda olması gereken özellikleri öğretip her daim araştıma imkanı veren ve desteğini her zaman hissettiren tez danışmanım sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN (Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) hocama teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca bana her zaman maddi manevi destek veren biricik ailem Mehmet Yıldırım-Sebahat DENİZ’ e şükranlarımı sunarım. Ayrıca, bu süreçte bana destek olan değerli arakadaşlarıma da teşekkür ederim.

Elif DENİZ

# İÇİNDEKİLER

# SİMGE LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi |
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $l_p$ | Dizi uzayı |
| $X_E$ | $E$ kümesinin karakteristik fonksiyonu |
| $\|f\|$ | $f$ nin normu |
| $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ | H.h.h sonlu $\mathcal{M}(R,\mu)$ kümesindeki fonksiyonların sınıfı |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $\mu$ | Lebesgue ölçüsü |
| $L^p(X)$ | Lebesgue uzayı |
| $L^{p,q}$ | Lorentz uzayı |
| $L_0^{p,\infty}$ | $L^{p,\infty}$ un sınırda sürekli olan kısmı |
| $M(\phi)$ | Marcinkiewicz uzayı |
| $\mathcal{M}^+(R,\mu)$ | $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ kümesindeki negatif olmayan fonksiyonların sınıfı |
| $\mathbb{R}^n$ | n-boyutlu Öklid uzayı |
| $L^\varphi$ | Orlicz uzayı |
| $(R,\mu)$ | Ölçü uzayı |
| $[a,b]$ | $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{P}$ | Reel veya kompleks sayılar cismi |
| $\mathcal{M}(R,\mu)$ | $R$ üzerindeki tüm $\mu$-ölçülebilir reel fonksiyonların kümesi |
| $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ | $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı |
| $L_0^{\exp x^2}$ | Sınırda sürekli olan üstel Orlicz uzayı |
| $c_0$ | Sıfıra yakınsak dizi uzayı |

# KISALTMA LİSTESİ

h.h.h  Hemen hemen her yerde

# ŞEKİL LİSTESİ

# ÖZET


**YENİDEN DÜZENLENMİŞ-DEĞİŞMEZ UZAYLARDA**

**KATI SİNGÜLER GÖMMELER**

Elif DENİZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Yusuf ZEREN



Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm literatür özeti, tezin amacı ve hipotez kısımlarından oluşur. İkinci bölümde bu çalışma ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, yeniden düzenlenmiş-değişmez uzayların teorisini vermek için dağılım fonksiyonları ve azalan yeniden düzenleme fonksiyonları ile giriş yapılarak, maksimal fonksiyon ve bu uzaylara girişte kuramsal açıdan oldukça önem taşıyan Hardy-Littlewood-Polya ilişkisi verilmiştir. Ayrıca, temel fonksiyon ve yeniden düzenlenmiş-değişmez uzayların en büyük ve en küçük sınıfları incelenmiş olup bazı özellikleri ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde, yeniden düzenlenmiş-değişmez uzayların temel sınıfları için kanonik gömmenin ayrık katı singülerliği, katı singülerliği ve bu kavramlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Beşinci bölümde, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.



**Anahtar Kelimeler :** Yeniden düzenlenmiş-değişmez uzaylar, ayrık katı singülerlik, katı singülerlik, zayıf kompaktlık



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ABSTRACT

**STRICTLY SINGULAR EMBEDDINGS OF REARRANGEMENT-INVARIANT SPACES**

Elif DENIZ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

The thesis consists five chapters. The first chapter provides an introduction to the thesis. The second chapter includes main definitions and theorems. In chapter 3, distribution functions and decreasing rearrangements are introduced to give a theory of rearrangement-invariant spaces, elementary maximal function and very important relation is Hardy-Littlewood-Polya for introduction of these spaces are given. Also, the fundamental function and the smallest and the largest of all rearrangement-invariant spaces are explained with their main properties. In chapter 4, is to examine canonical embeddings for the basic classes of rearrangement-invariant spaces are strict singularity, disjoint strict singularity and the relations between of these concepts. Finally, Chapter 5 summarises the results of this thesis and provides hints for future work.

**Keywords:** Rearrangement-invariant spaces**,** disjoint strict singularity, strict singularity, weak compactness

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

# 1
# GİRİŞ

## 1.1 Literatür Özeti

Fonksiyon uzayları S. L. Sobolev, A. Zygmund, S. M. Nikolskii vb. gibi matematikçiler tarafından incelenmiş, reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna başarıyla uygulanmıştır. Her geçen gün yeni problemlerin ortaya çıkması ve fonksiyon uzaylarındaki bazı boşlukların giderilebilmesi adına yeni tip fonksiyon uzayları tanımlanmıştır. Lebesgue uzaylarının matematiksel analizin birçok alanında çok önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Fakat, ölçülebilir fonksiyonların Banach uzaylarının Orlicz ve Lorentz uzayları gibi çok kullanışlı daha geniş sınıfları vardır. Banach fonksiyon uzayları ölçülebilir fonksiyonların Banach uzaylarıdır. Ölçülebilir fonksiyonların Lorentz, Orlicz, Marcinkiewicz gibi birçok somut uzayı Banach fonksiyon uzaylarının bakış açısından elde edilmiştir. Ayrıca, yeniden düzenlenmiş değişmez uzayları, Lorentz uzaylarını ve bu uzayların çok önemli bir sınıfını da içermektedir [1]. Yeniden düzenlenmiş değişmez fonksiyon uzaylarının teorisi klasik $L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ uzaylarına dayanır. Teori, özellikle genel Banach kafesleri bağlamında, son yüzyılda yoğun bir şekilde geliştirilmiştir. Bu teori, fonksiyon teorisi, fonksiyonel analiz gibi çeşitli alanlarda birçok ilginç ve derin sonuçlar sunar. Ayrıca, yeniden düzenlenmiş değişmez uzayların teorisinin lineer operatörlerin interpolasyonu, ergodik teori, harmonik analiz ve matematiksel fizik gibi çeşitli alanlarda oldukça önemli uygulamaları mevcuttur. Yeniden düzenlenmiş değişmez uzayların belirli özellikleri yalnızca normlarının ölçülebilir $E$ kümelerinin karakteristik fonksiyonlarına atadığı değerlere, yani $\varphi(t) = \|\chi_E\|$ temel fonksiyonuna dayanır. $L^1 \cap L^\infty$ ve $L^1 + L^\infty$ uzayları tüm yeniden düzenlenmiş değişmez uzayların sırasıyla en küçük ve en büyükleridir [2]. Orlicz, Lorentz ve Marckiewicz gibi yeniden düzenlenmiş değişmez uzaylarda ayrık katı singülerlik ve katı singülerlik, Kalton [3], Garcia del Amo [4], Novikov [5], Astashkin [6] ve [7] deki yazarlar tarafından çalışılmıştır.

Sınırlı olmayan bir durumda katı singülerliğin analizi [0,1] deki durumdan daha kapsamlıdır. Bu durum, [0,∞) üzerinde tanımlı yeniden düzenlenmiş değişmez uzayların alt latisinin (sublattice) zenginliğinden kaynaklanmaktadır. $L^p + L^q, (1 \leq p \leq q \leq \infty)$ uzaylarının büyük karmaşık alt latisi düşünülebilir). [0,∞) üzerinde tanımlı herhangi bir yeniden düzenlenmiş değişmez $E$ uzayı için $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesi iyi bilinmektedir. $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ gömmesinin singülerliği, ilgili karakteristik fonksiyon $\phi_E$ açısından katı singülerliğin uygun bir karakterizasyonu bulunarak [8] de çalışılmıştır. Bu yüzden, $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ için katı singülerlik, ayrık katı singülerlik ve zayıf kompaktlık çakışır ve

$$\lim_{t\to 0} \phi_E(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_E(t)}{t} = 0 \tag{1.1}$$

koşuluna eşdeğerdir. Katı singülerlik için benzer kriter, interpolasyon kullanarak Cobos et al. [9] tarafından sağlanmıştır. Her iki ispatta Kaminska ve Mastylo [10], Dunford-Pettis özelliğini kullanılmıştır. $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesinin ayrık katı singüler olması için gerekli koşullar sadece $\phi_E(t)$ davranışını içermez. Yani,

$$\lim_{t\to 0} \phi_E(t) = \lim_{t\to \infty} \frac{\phi_E(t)}{t} = \infty \tag{1.2}$$

ve , $1 < p < \infty$ için,

$$\sup_n \left\| t^{-\frac{1}{p}} \chi_{\left(\frac{1}{n}, n\right)} \right\|_E = \infty. \tag{1.3}$$

Bu durumun sınırda sürekli zayıf $L^p$- uzayı $L_0^{p,\infty}$ un $L^1 + L^\infty$ uzayına gömülmesinin ayrık katı singüler olmamasından kaynaklandığı [8] te gösterilmiştir. $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesinin tam bir karakterizasyonunu elde etmek için $W^P$ $(1 \leq p \leq \infty)$

$$W^P = \begin{cases} L_0^{P,\infty}, & 1 < p \leq \infty \\ L^1, & p = 1 \\ \overline{L^1 \cap L^\infty}^{L^\infty}, & p = \infty \end{cases} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanan $W^P$ uzayı dikkate değer bir rol oynar. Yukarıdaki koşulların yeterli olduğunun kanıtlanması ve böylece ayrık katı singülerliği kullanıp katı singülerliğin gösterilmesi F.L. Hernández, V.M. Sánchez, E.M. Semenov [11] ve V. Astashkin, E.M. Semenov un [12] makalelerinde açıkça ifade edilmiştir.

## 1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, çok çeşitli uygulama alanlarına sahip yeniden düzenlenmiş değişmez uzayların teorisini verip, $(0,\infty)$ aralığında keyfi bir $E$ yeniden düzenlenmiş değişmez uzayı için $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ kanonik gömmesinin hangi koşullar altında katı singülerliğinin sağlandığını gösterip bu kavramın ayrık katı singülerlikle olan ilişkisini incelemektir.

## 1.3 Hipotez

Yeniden düzenlenmiş değişmez uzaylara girişte dağılım fonksiyonları, azalan yeniden düzenleme fonksiyonları ve temel fonksiyon vb. gibi fonksiyonların bu uzaydaki davranışları incelenecektir. Daha sonra Orlicz, Lorentz ve Marckiewicz gibi yeniden düzenlenmiş değişmez uzayların temel sınıflarında sağlanan kanonik gömmenin ayrık katı singülerliği ve katı singülerliği için gerekli ve yeterli koşullar araştırılacaktır.

# 2
# TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1 Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 2.1 (Vektör Uzayı).** $E \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{P}$ cisim($\mathbb{P} \equiv \mathbb{R}$ veya $\mathbb{P} \equiv \mathbb{C}$ ) olsun.

$+ : E \times E \to E, \qquad (a,b) \to a + b\,,$

$\times :\ \mathbb{P} \times E \to E, \qquad (\gamma, a) \to \gamma a\,,$

toplama ve çarpma işlemleri yukardaki gibi tanımlansın. $\forall a, b, c \in E\ ve\ \gamma, \beta \in \mathbb{P}\ i$çin:

**(i)** $a + b = b + a$

**(ii)** $a + (b + c) = (a + b) + c$

**(iii)** $a + 0 = a$ eşitliğini sağlayan $0 \in E$ vardır.

**(iv)** $a + (-a) = 0$ eşitliğini sağlayan $-a \in E$ vardır.

**(v)** $1.a = a$

**(vi)** $\gamma.(a + b) = \gamma a + \gamma b$

**(vii)** $(\gamma + \beta)a = \gamma a + \beta a$

**(viii)** $(\gamma\beta)a = \gamma(\beta a)$

koşullarını sağlıyorsa $E$ ye $\mathbb{P}$ üzerinde bir **vektör uzayı** denir.

**Tanım 2.2**. $E$ bir vektör uzayı olmak üzere $f: E \to \mathbb{P}$ olarak tanımlanan $f$ fonksiyonuna **fonksiyonel** denir.

$$f(\gamma a + \beta b) = \gamma f(a) + \beta f(b)\,, \qquad a, b \in E\,, \quad \gamma, \beta \in \mathbb{P} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan $f$ fonksiyoneli lineerdir.

**Tanım 2.3.** $E$ vektör uzayındaki lineer sürekli fonksiyonellerin kümesine $E$ vektör uzayının **duali** denir ve $E'$ ile gösterilir.

$f_1, f_2 \in E'$ , $a \in E$ ve $\beta \in \mathbb{P}$ bir skaler olmak üzere noktasal toplam ve skaler çarpım;

$$(f_1 + f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a) \tag{2.2}$$

$$(\beta f)(a) = \beta f(a) \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $E'$ uzayının da duali tanımlanabilir. $(E')' = E''$ lineer vektör uzayına $E'$ uzayının **ikinci duali** denir.

**Tanım 2.4.** Dualinin duali kendisine eşit olan uzaya **refleksiv (yansımalı)** uzay denir.

**Tanım 2.5 (Normlu Uzay).** $E$ bir $\mathbb{P}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\| : E \to \mathbb{R}^+ , \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in E$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{P}$ için

**(i)** $\|x\| \geq 0$

**(ii)** $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

**(iii)** $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

**(iv)** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşullarını sağlıyorsa $\|.\|$ dönüşümüne $E$ üzerinde bir **norm** denir. $(E, \|.\|)$ ikilisi de **normlu uzay** olarak tanımlanır.

**Tanım 2.**6. $(E, \|.\|)$ normlu uzay, $a \in E$ sabit bir nokta ve $r > 0$ olsun.

$$B_r(a) = \{x \in E: \|x - a\| < r\} \tag{2.4}$$

kümesine $a$ merkezli ve $r$ yarıçaplı **açık yuvar,**

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in E: \|x - a\| \leq r\} \tag{2.5}$$

kümesine $a$ merkezli ve $r$ yarıçaplı **kapalı yuvar,**

$$S_r(a) = \{x \in E: \|x - a\| = r\} \tag{2.6}$$

kümesine $a$ merkezli ve $r$ yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir.

**Tanım 2.7 (Denk Norm).** $E$ normlu bir uzay, $\mathbb{P}$ cisim ($\mathbb{P} \equiv \mathbb{R}$ veya $\mathbb{P} \equiv \mathbb{C}$ ) ve $\|.\|_1, \|.\|_2 : E \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall x \in E$ için $m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$ olacak şekilde sabit $m, M > 0$ sayıları bulunabilirse $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ **denktir** denir ve bu durum $\| \quad \|_1 \sim \| \quad \|_2$ şeklinde gösterilir.

**Örnek.** $\| \quad \|_1 , \| \quad \|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $\|(x,y)\|_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ ve $\|(x,y)\|_2 = |x| + |y|$ şeklinde tanımlanırsa, $\| \quad \|_1 , \| \quad \|_2$ fonksiyonlarının her biri $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir norm olup $\| \quad \|_1 \sim \| \quad \|_2$ dir.

**Tanım 2.8 (Yakınsak Dizi).** $(E, \|.\|)$ normlu uzay, $\{x_n\}$ bu uzay içinde bir dizi ve $x \in E$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \tag{2.7}$$

olursa $x_n$ dizisi $x$ noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olarak gösterilir.

**Tanım 2.9 (Cauchy Dizisi)**. $(E, \|.\|)$ normlu uzay, $\{x_n\}$ bu uzay içinde bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall k, j \geq N$ için $\|x_k - x_j\| < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine $E$ normlu uzayında bir **Cauchy dizisidir** denir.

**Tanım 2.10 (Banach Uzayı).** $(E, \|.\|)$ normlu uzayında Cauchy dizisi olan her dizi yakınsak ise $(E, \|.\|)$ normlu uzayına tam uzay veya **Banach uzayı** denir.

**Tanım 2.11 ( Banach Latis).** $E$ gerçel vektör uzayı üzerinde " $\leq$ " bir sıralama bağıntısı olsun. $\forall x, y \in E$ ve

**(i)** Her bir $z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$

**(ii)** Her bir $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ iken $\alpha x \leq \alpha y$

şartları sağlanıyorsa, $E$ uzayına sıralı vektör uzayı denir. $E$ sıralı vektör uzayı her bir $x, y \in E$ için $x \vee y := \sup$ ve $x \wedge y := \inf$ koşullarını sağlıyor ise **vektör latis (vektör lattice**) veya **Riesz uzayı** denir.

$E$ Riesz uzayı olmak üzere, $|x| \leq |y|$ olacak şekilde $\forall x, y \in E$ için $\|x\| \leq \|y\|$ sağlanıyorsa, $E$ üzerinde tanımlanan $\|.\|$ normuna latis (lattice) normu denir ve $(E, \|.\|)$ ikilisine **normlu Riesz uzayı** denir. Eğer, $\boldsymbol{E}$ normlu Riesz uzayı bu latis normuna göre tam ise, **Banach latis (Banach Lattice)** denir. Klasik dizi ve fonksiyon uzayları (kendi bilindik normlarına göre) Banach latislerinin tipik örnekleridir.

**Tanım 2.12 (Alt Latis**). $A$, bir $E$ latisinin alt kümesi olsun. Eğer $x, y \in A$ ise $x \vee y, x \wedge y \in A$ latis işlemleri $E$ de sağlanıyorsa, $A$ bir **alt latis (sublattice)** denir. Örneğin, $c_0$ ve $c$ , $\ell_\infty$ un alt latisleridir.

**Tanım 2.13.** $(E, \|.\|)$ normlu bir uzay ve $K \subset E$ olsun. $K$ nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse $K$ kümesine $E$ üzerinde **kompakttır** denir.

**Tanım 2.14.** $E \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun.

$$X_E = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

olarak tanımlanan $X_E$ fonksiyonuna $E$ kümesinin **karakteristik fonksiyonu** denir.

**Tanım 2.15.** Görüntü kümesinin eleman sayısı sonlu olan herhangi bir $f$ fonksiyonuna **basit fonksiyon** olarak adlandırılır.

**Tanım 2.16.** $E$ ve $F$ aynı $\mathbb{P}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T: D_T \subset E \to F$ bir fonksiyon olsun. Bu $T$ fonksiyonuna **operatör** denir. Burada, $D_T$ , $T$ nin tanım kümesi ve $\mathrm{K} \equiv \mathrm{T}(D_T) \subset F$ de $T$ nin görüntü kümesidir.

**Tanım 2.17**. $E$ ve $F$ aynı $\mathbb{P}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T: D_T \subset E \to F$ ; $\forall x_1, x_2 \in D_T$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ için $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$ koşulunu sağlıyorsa $T$ ye **lineer operatör** denir.

**Tanım 2.18.** $T: E \to E$ operatörü verilsin. $\forall x \in E$ için $T(x) = x$ ise $T$ operatörüne **birim operatör** denir.

**Tanım 2.19.** $T: E \to F$ bir lineer operatör olsun. Eğer, $E$ de sınırlı her $\{x_n\}$ dizisi için $(T\{x_n\})$ dönüşüm dizisi $F$ de yakınsak bir alt diziye sahipse $T$ ye **kompakt operatör** denir.

**Örnek.** $T: C[0,1] \to C[0,1]$ olsun.

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s) ds \tag{2.8}$$

$k(t,s) \in C([0,1])^2$ dir. Dolayısıyla, $T$ kompakttır.

**Tanım 2.20.** $T: D_T \subset E \to F$ bir lineer operatör olsun. $\forall x \in D_T$ için $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ olacak şekilde sabit bir $M > 0$ sayısı varsa bu $T$ lineer operatörüne **sınırlı bir lineer operatör** denir.

**Tanım 2.21.** $T: D_T \subset E \rightarrow F$ sınırlı lineer operatör olsun.

$$\|T\| = inf\{M: M > 0 \; ve \; \forall x \in D_T \text{ için } \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E\} \tag{2.9}$$

ifadesine $T$ operatörünün **normu** denir.

**Tanım 2.22.** $T: D_T \subset E \rightarrow F$ operatörü verilsin. $\forall x, y \in D_T$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x - y\| < \delta$ iken $\|T_x - T_y\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $T$ operatörüne **süreklidir** denir [13].

**Teorem 2.23.** $T: E \rightarrow F$ lineer operatör olsun. Eğer $T$ tek bir noktada sürekli ise her noktada süreklidir.

**Teorem 2.24.** $T: E \rightarrow F$ operatörü $D(T)$ üzerinde sınırlı ise $T: E \rightarrow F$ lineer operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir [14].

**Tanım 2.25 (Gömme).** $E, F$ normlu uzaylar ve $E \subset F$ olsun. $D_T(I) = \mathrm{K}(I) = E$, yani $\forall x \in E$ için $I(x) = x$ olacak şekilde $F$ de en az bir eleman var ise $I: E \rightarrow F$ operatörüne birim operatör denir. Bu operatör sürekliyse, yani $\forall x \in E$ için $\|x\|_F \leq C.\|x\|_E$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa $E$ uzayı $F$ uzayına sürekli gömülür denir. $I$ operatörüne $E$ uzayından $F$ uzayına bir **gömme operatörü** denir [1].

$$I_{E \hookrightarrow F} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_F}{\|f\|_E} \tag{2.10}$$

ifadesine $I$ nın operatör normu denir. $E$ uzayından $F$ uzayına sürekli bir gömme mevcutsa

$$E \hookrightarrow F$$

olarak gösterilir. Eğer,

$$E \hookrightarrow F \text{ ve } F \hookrightarrow E$$

aynı anda oluyorsa,

$$E \rightleftarrows F$$

olarak gösterilir. Eğer bu gömme kompakt ise,

$$E \hookrightarrow\hookrightarrow F$$

şeklinde ifade edilir.

**Tanım 2.26.** $E$ kümesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı ve $E \subset X$ olmak üzere eğer $\forall x, y \in E$ için $\{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\} \subset E$ gerçekleniyor ise $E$ kümesine bir **konveks küme** denir.

**Tanım 2.27.** $E$ bir lineer vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in E$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{2.11}$$

oluyorsa $f$ ye **konveks fonksiyon** denir.

**Tanım 2.28 (Katı Singüler Operatör).** $X, Y$ Banach uzayları ve $T: X \to Y$ olsun. Eğer $T$ operatörü, $X$ in herhangi sonsuz-boyutlu (kapalı) bir alt uzayında tersinir değil ise $T$ operatörüne **katı singülerdir** denir. Yani, her sonsuz boyutlu alt uzay $M \subset X$ ve her $\alpha > 0$ için $x \in M$ vardır öyle ki

$$\|Tx\| \leq \alpha \|x\|. \tag{2.12}$$

Örneğin, $L^{\infty}[0,1] \hookrightarrow L^{p}[0,1]$ gömmesi katı singülerdir [15].

**Tanım 2.29 (Ayrık Katı Singüler Operatör).** $E$ bir Banach latis (lattice) , $Y$ bir Banach uzayı ve $T: E \to Y$ olsun. Eğer $T$ operatörü ayrık bir dizi tarafından üretilen $E$ nin herhangi bir alt uzayında tersinir değilse $T$ operatörüne **ayrık katı singülerdir** denir. Açık olarak, her katı singüler operatör aynı zamanda ayrık katı singülerdir [15].

Örneğin, $L^{q}[0,1] \hookrightarrow L^{p}[0,1]$ gömmesi ayrık katı singülerdir.

**Tanım 2.30 (Ölçü Uzayı).** $\Omega \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $\sum$ , $\Omega$ in alt kümelerinin bir ailesi olsun.

**(i)** $\emptyset, \Omega \in \sum$

**(ii)** $A \in \sum \Longrightarrow A^{C} = \Omega \backslash A \in \sum$

**(iii)** $\sum$ içinde alınan her $\{A_n\} \subset \sum$ dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sum$

koşulları sağlanıyorsa $\sum$ ya $\Omega$ kümesi üzerinde bir ***σ*-cebir** , $(\Omega, \sum)$ ikilisine **ölçü uzayı** ve $A$ ya **ölçülebilir küme** denir.

**Tanım 2.31.** $(\Omega, \sum)$ bir ölçülebilir uzay ve $\mu : \sum \to \overline{\mathbb{R}}_+$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

**(i)** $\mu(\emptyset) = 0$

**(ii)** $\forall E \in \sum$ için $\mu(E) \geq 0$

**(iii)** Her ayrık ölçülebilir $\{E_n\} \subset \sum$ dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

koşulları sağlanıyorsa $\mu$ fonksiyonuna bir ölçüm ve $(\Omega, \sum, \mu)$ üçlüsüne de bir ölçü uzayı denir. $+\infty$ değerini almayan ölçümlere **sonlu ölçüm** denir. Eğer, $\Omega = \bigcup E_n$ , $\{E_n\} \subset \sum$ ve $\forall n \geq 1$ için $\mu(E_n) < +\infty$ koşullarını sağlayan bir $\{E_n\} \subset \sum$ dizisi bulunabiliyorsa, $\mu$ ölçümüne **$\boldsymbol{\sigma}$-sonludur** denir.

**Tanım 2.32 (Atom).** $(\Omega, \sum)$ ölçü uzayı ve $\mu$ bu uzay üzerinde bir sonlu ölçü fonksiyonu olsun. Eğer, $A$ nın ölçülebilir herhangi bir $B$ alt kümesi için $\mu(A) > \mu(B)$ olacak şekilde bir $\mu(B) = 0$ var ise $\sum$ dan alınan bu $A$ kümesine **atom** denir. Eğer, $\mu(A) > 0$ olarak verilen herhangi bir ölçülebilir küme için $\mu(A) > \mu(B) > 0$ olacak şekilde $B \subset A$ ölçülebilir kümesi var ise bu ölçü uzayına **atomu olmayan uzay** denir [1].

**Tanım 2.33 (Dış Ölçü).** $\Omega \neq \emptyset$ herhangi bir küme, $\mu^* : \wp(x) \to \overline{\mathbb{R}_+} \cup \{\infty\}$ şeklinde tanımlanan genişletilmiş reel değerli $\mu^*$ fonksiyonu için

**(i)** $\mu^*(\emptyset) = 0$

**(ii)** $\forall K \in \wp(x), \mu^*(K) \geq 0$

**(iii)** $A \subset B \subset \Omega$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

**(iv)** $\forall n \in \mathbb{N}$ , $K_n \in \wp(x)$ için $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(K_n)$

koşulları sağlanırsa $\mu^*$ fonksiyonuna $\Omega$ üzerinde bir **dış ölçü** denir.

**Tanım 2.34.** $A \subset \mathbb{R}$, $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ , $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve $\ell(I_j)$ , $I_j$ aralığının uzunluğu olsun. O halde,

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : I_j \in A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\} \tag{2.13}$$

olarak ifade edilen $m^*$ bir dış ölçüdür. Bu ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir.

**Tanım 2.35.** Bir $(\Omega, \sum, \mu)$ ölçüm uzayında bir önermenin $\sum$ ölçülebilir ve μ-ölçümü sıfır olan bir kümenin dışında her yerde doğru ise bu önerme $(\Omega, \sum, \mu)$ ölçüm uzayında **hemen her yerde (h.h.h) doğrudur** denir. $(\Omega, \sum, \mu)$ ölçüm uzayı için h.h.h ile ilgili bazı örnekler verilmiştir [16].

**Tanım 2.36 (Caratheodary).** $A \subset \mathbb{R}^n$ için

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C) \tag{2.14}$$

ise $E$ kümesine **Lebesgue ölçülebilirdir** denir.

**Tanım 2.37.** $(\Omega, \sum)$ bir ölçülebilir uzay ve $f: \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall y \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\big((y, +\infty)\big) := \{x \in \Omega : f(x) > y\} \in \sum \tag{2.15}$$

ise $f$ ye $\Omega$ üzerinde **ölçülebilir fonksiyon** denir [17].

**Lemma 2.38.** $(\Omega, \sum)$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

**(i)** $\forall y \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \Omega : f(x) > y\}$

**(ii)** $\forall y \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \Omega : f(x) < y\}$

**(iii)** $\forall y \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \Omega : f(x) \leq y\}$

**(iv)** $\forall y \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \Omega : f(x) \geq y\}$

**Önerme 2.39.** c bir sabit, $f$ ve $g$ aynı bölge üzerinde tanımlı reel-değerli iki ölçülebilir fonksiyon olsun. O halde, $f + c, cf, f + g, g - f$ ve $fg$ fonksiyonları da ölçülebilirdir [17].

**Tanım 2.40.** $f$ , $\mu(E) < \infty$ olmak üzere ölçülebilir $\boldsymbol{E}$ kümesinde tanımlı sınırlı ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Tüm $\psi \geq f$ basit fonksiyonları için $E$ kümesi üzerinde $f$ nin Lebesgue integrali

$$\int_E f d\mu = inf\left(\int_E \psi d\mu\right) \tag{2.16}$$

ve ayrıca tüm $\varphi \leq f$ basit fonksiyonları için $E$ kümesi üzerinde $f$ nin Lebesgue integrali

$$\int_E f d\mu = sup\left(\int_E \varphi d\mu\right) \quad (2.17)$$

olarak tanımlanır ve bu iki tanım birbirine denktir [18].

**Teorem 2.41 (Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi).** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , sonlu ölçüye sahip $E$ kümesi üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bir $M > 0$ sayısı vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ ve tüm $x \in E$ için $|f_n(x)| \leq M$ dir. Eğer her $x \in E$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ise o halde,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = sup\left(\int_E f d\mu\right). \quad (2.18)$$

**Lemma 2.42 (Fatou Lemma).** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve $E$ kümesi üzerinde $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ h.h.y. olsun. O zaman,

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu. \quad (2.19)$$

**Teorem 2.43 (Monoton Yakınsaklık Teoremi).** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ olacak şekilde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. O halde,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu. \quad (2.20)$$

**Teorem 2.44 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi).** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve $x \in E$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olsun. Eğer $x \in E$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$ olacak şekilde integrallenebilir $g$ fonksiyonu varsa, o zaman

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu\,. \quad (2.21)$$

**Tanım 2.45 (Lebesgue Uzayı).** $(\Omega, \sum, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $X \subset \Omega = \mathbb{R}^n$ de tanımlı bir bölge olsun.

$$\int_X |f(x)|^p dx < \infty \tag{2.22}$$

olan tüm ölçülebilir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $p$. mertebeden Lebesgue uzayı denir ve $L^p(X)$ olarak ifade edilir.

$f$ fonksiyonunun $L^p$ normu

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \tag{2.23}$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 2.46 (Hölder Eşitsizliği).** $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , $(1 < p, q < \infty)$ , $f \in L^p$ ve $g \in L^q$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \tag{2.24}$$

ifadesi sağlanır.

**Teorem 2.47 (Minkowski Eşitsizliği).** $f, g \in L^p$ iken $f + g \in L^p$ olur ve

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \tag{2.25}$$

ifadesi sağlanır.

**Tanım 2.48 (Limit Supremum).** $\{x_n\}$ reel bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin genişletilmiş reel sayılardaki limit supremumu,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left( \sup_{k\geq n} x_k \right) \tag{2.26}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.49 (Limit İnfimum).** $\{x_n\}$ reel bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin genişletilmiş reel sayılardaki limit infimumu,

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right) \tag{2.27}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.50 (Esas Supremum).** $X$ bölgesinde hemen her $x$ için $|f(x)| \leq C$ olacak şekilde bir $C$ sabiti varsa $f$ fonksiyonuna hemen her yerde sınırlıdır denir. Böyle $C$ sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin $X$ bölgesindeki esas supremumu denir

ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| \coloneqq inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ hemen her } x \in X\} \tag{2.28}$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.51.** $f$ ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer $f$ fonksiyonu her $U$ kompakt kümesi üzerinde

$$\int_U |f| d\mu < \infty \tag{2.29}$$

oluyorsa $f$ fonksiyonuna **lokal( yerel) integrallenebilir** denir ve

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left( \int_U |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty, U \subset \mathbb{R}^n, U \text{ kompakt} \right\} \tag{2.30}$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.52 (Banach Fonksiyon Normu).** Eğer $f, g \in \mathcal{M}^+$ , $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+$, $a \geq 0$ ve $R$ nin bütün $\mu -$ ölçülebilir $E$ alt kümeleri için,

**i)** $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \; h.h.h - \mu$ ; $\qquad \rho(af) = a\rho(f)$;

$\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

**ii)** $0 \leq g \leq f \; h.h.h - \mu \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$

**iii)** $0 \leq f_n \uparrow f \; h.h.h - \mu \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$

**iv)** $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$

**v)** $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$

özellikleri, $0 < C_E < \infty$ olan bir $C_E$ sabiti ve tüm $f$ fonksiyonları için sağlanıyorsa $\rho: \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ fonksiyoneline bir **Banach fonksiyon normu** denir [2].

**Tanım 2.53 (Banach Fonksiyon Uzayı)**. $\rho$ bir Banach fonksiyon normu olsun. $\rho(|f|) < \infty$ özelliğine sahip tüm $f \in \mathcal{M}$ fonksiyonlarının $X = X(\rho)$ kümesine **Banach fonksiyon uzayı** denir ve her $f \in X$ için

$$\|f\|_X = \rho(|f|) \tag{2.31}$$

olarak tanımlanır [2].

**Teorem 2.54.** $\rho$ bir fonksiyon normu ve $X = \{f \in \mathcal{M}: \rho(|f|) < \infty\}$ olsun. Her $f \in X$ için $\|f\|_X = \rho(|f|)$ olsun. Öyleyse, $(X, \|.\|_X)$ bir Banach fonksiyon uzayıdır ve $f, g\ ve\ f_n \in \mathcal{M}$ ve $R$ nin tüm ölçülebilir E alt kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

**i)** Eğer, $|g| \leq |f|\ h.h.h - \mu$ ve $f \in X$ ise, o halde $g \in X$ ve $\|g\|_X \leq \|f\|_X$ tir; özellikle $f \in X$ ölçülebilir fonksiyondur $\Leftrightarrow$ $|f| \in X$ ise. Bu durumda, $f$ ve $|f|$ ,$X$ te aynı norma sahiptir. (Latis özelliği)

**ii)** Kabul edelim ki $f_n \in X$, $f_n \geq 0$ ve $f_n \uparrow f\ h.h.h - \mu$ olsun. $f \in X$ ise $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$ ve $f \notin X$ ise $\|f_n\| \uparrow \infty$ dur. (Fatou özelliği)

**iii)** $f_n \in X$, $f_n \to f\ h.h.h$ ve $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$ olsun. O halde, $f \in X$ ve $\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$ dir. (Fatou lemma)

**iv)** Her basit fonksiyon $X$ uzayına aittir.

**v)** Sonlu ölçüye sahip $E$ kümesine karşılık gelen $0 < C_E < \infty$ olan bir $C_E$ sabiti vardır öyle ki her $f \in X$ için

$$\int_E |f| d\mu \leq C_E \|f\|_X. \tag{2.32}$$

**vi)** $X$ uzayında $f_n \to f$ ise, sonlu ölçüye sahip kümeler üzerinde $f_n \to f$ dir. Özellikle, $h.h.h\ f$ fonksiyonuna yakınsak olan bir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

**Tanım 2.55 (İlişik Norm).** $\rho$ bir Banach fonksiyon normu olsun. $\mathcal{M}^+$ üzerinde,

$$\rho'(|g|) = sup\left\{\int_R fgd\mu : f \in \mathcal{M}^+, \rho(|f|) \leq 1\right\}, \quad (g \in \mathcal{M}^+) \qquad (2.33)$$

ile tanımlanan $\rho'$ fonksiyoneline $\rho$ nun **ilişik normu** denir.

**Tanım 2.56 (İlişik Uzay).** $\rho$ bir Banach fonksiyon normu, $X = X(\rho)$ , $\rho$ tarafından üretilen Banach fonksiyon normu ve $\rho'$ de $\rho$ nun ilişik normu olsun. $\rho'$ tarafından üretilen $X(\rho')$ Banach fonksiyon uzayına $X$ in **ilişik uzayı** denir ve $X'$ ile gösterilir [2].

**Tanım 2.57 (Hölder eşitsizliği).** $X$, ilişik uzayı $X'$ olan bir Banach fonksiyon uzayı olsun.Eğer $f \in X$ ve $g \in X'$ ise, o halde $fg$ integrallenebilirdir ve

$$\int_R |fg|d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'} . \qquad (2.34)$$

**Teorem 2.58 (Lorentz-Luxemburg).** Her Banach fonksiyon uzayı $X$, ikinci ilişik uzayı $X''$ ile çakışır. Diğer bir ifadeyle, $f \in X \Leftrightarrow f \in X''$ dür, ve bu durumda,

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''} . \qquad (2.35)$$

**Tanım 2.59 (Lorentz Uzayı).** $1 < p < \infty$ ve $1 \leq q \leq \infty$ olsun. Klasik Lorentz uzayı $L^{p,q}(X), f \in [0, \infty)$ olan tüm ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur öyle ki

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \qquad (2.36)$$

eğer $q < \infty$ ise,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right\} < \infty \qquad (2.37)$$

olarak tanımlanır [11].

**Tanım 2.60 (Marcinkiewicz Uzayı).** Marcinkiewicz Uzayı $M(\phi)$, $f \in [0, \infty)$ olan tüm ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur öyle ki

$$\|f\|_{M(\phi)} = \sup_{t>0} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\phi(t)} < \infty \qquad (2.38)$$

olarak tanımlanır [11].

**Tanım 2.61 (Orlicz Uzayı).** Orlicz Uzayı $L^{\varphi}$, $f \in [0,\infty)$ olan tüm ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur öyle ki

$$\|f\|_{L^{\varphi}} = \inf\left\{s > 0 : \int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{|f(t)|}{s}\right) dt \leq 1\right\} < \infty \tag{2.39}$$

olarak tanımlanır [11].

**Tanım 2.62 ($W^P$ Uzayı).** $W^P$ uzayı $(1 \leq p \leq \infty)$ aşağıdaki gibi tanımlanır [11]:

$$W^P = \begin{cases} L_0^{P,\infty}, & 1 < p \leq \infty \\ L^1, & p = 1 \\ \overline{L^1 \cap L^{\infty}}^{L^{\infty}}, & p = \infty \end{cases} \tag{2.40}$$

**Tanım 2.63 (İkili Genişlemeler).** $S: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ ve

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2^k}, \qquad \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \tag{2.41}$$

olsun. Örneğin, $\sigma_1 = 0$ ve $\sigma_2 = 1, \sigma_3 = 1, \ldots$, için

$$S(\sigma) = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}; \tag{2.42}$$

$\sigma_1 = 1$ ve $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0, \ldots$, için

$$S(\sigma) = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{8} + \cdots = \frac{1}{2}. \tag{2.43}$$

$\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki tüm $k \geq n+1$ için $\sigma_n = 0$ ve $\sigma_k = 1$, o halde

$$\tau_k = \begin{cases} \sigma_k, & k \leq n-1 \\ 1, & k = n \\ 0, & k \geq n \end{cases} \tag{2.44}$$

tanımlanır ve

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} = S(\tau) \tag{2.45}$$

elde ederiz. Bir dizinin sadece sıfır olan terimleri dışında veya bir dizinin sadece 1 olan terimleri için $S^{-1}(S(\sigma))$, $\sigma$ nihayetinde 0 veya nihayetinde 1 olduğunda, iki eleman içerir, aksi taktirde $S^{-1}(S(\sigma))$ bir eleman içerir. Eğer, $S^{-1}(t)$ tamamiyle bir eleman içeriyorsa, $S^{-1}(t)$ nin tek elemanı olmak için $\epsilon : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ olarak tanımlanır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\epsilon_k : [0,1] \to \{0,1\}$ ve

$$\epsilon_k(t) = \epsilon(t)_k\,, \qquad t \in [0,1]. \tag{2.46}$$

O halde, tüm $t \in [0,1]$ için

$$t = S\big(\epsilon(t)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k(t)}{2^k} \tag{2.47}$$

ifadesine $t$ nin **ikili genişlemesi** denir.

**Tanım 2.64 (Rademacher Fonksiyonu).** $k \in \mathbb{N}$ için $k$. dereceden Rademacher fonksiyonu $r_k : [0,1] \to \{-1,+1\}$ olan

$$r_k(t) = 1 - 2\epsilon_k(t), \quad t \in [0,1] \tag{2.48}$$

olarak tanımlanır. $t \in [0,1]$ in ikili genişlemesini,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(t)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - 2.\frac{\epsilon_k(t)}{2^k}\right) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k(t)}{2^k} = 1 - 2t \tag{2.49}$$

şeklinde yazabiliriz.

# 3
# YENİDEN DÜZENLENMİŞ-DEĞİŞMEZ BANACH FONKSİYON UZAYLARI

## 3.1 Dağılım Fonksiyonları ve Azalan Yeniden Düzenlemeler

**Tanım 3.1.** $(R,\mu)$ $\sigma$-sonlu ölçü uzayı olsun. $f \in \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(R,\mu)$ için dağılım fonksiyonu $\mu_f$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_f(\lambda) = \mu\{x \in R: |f(x)| > \lambda\}, \qquad (\lambda \geq 0). \tag{3.1}$$

**Tanım 3.2.** $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ ve $g \in \mathcal{M}_0(S,u)$ olsun. Eğer bu fonksiyonlar aynı dağılım fonksiyonuna sahip ise yani, tüm $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda) = u_g(\lambda)$ ise , bu fonksiyonlara denk ölçülebilir fonksiyonlardır denir ve $f \sim g$ şeklinde gösterilir. Bu kavram, farklı ölçü uzayları üzerinde tanımlanan fonksiyonların denk ölçülebilir olmasını sağlar.

**Örnek.** $f(x) = x$ , $g(x) = x^2, h(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonlarının dağılım fonksiyonları her $x \in [0,\infty)$ için $\mu_f(\lambda) = \mu_g(\lambda) = \mu_h(\lambda) = +\infty$ olduğundan denk ölçülebilirdir [19].

**Önerme 3.3.** Kabul edelim ki $f, g, \{f\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ ve $\alpha$ sıfırdan farklı herhangi bir skaler olsun. Dağılım fonksiyonu $\mu_f$, $[0,\infty)$ aralığında negatif olmayan, azalan ve sağdan süreklidir. Ayrıca,

$$|g| \leq |f| \text{ h.h.y } \mu\text{-ölçülebilir} \Longrightarrow \mu_g \leq \mu_f \tag{3.2}$$

$$\mu_{\alpha f}(\lambda) = \mu_f(\lambda/|\alpha|), \quad (\lambda \geq 0) \tag{3.3}$$

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_f(\lambda_2)\,, \quad (\lambda_1, \lambda_2 \geq 0) \tag{3.4}$$

$$|f| \leq \lim_{n\to\infty} inf|f_n| \text{ h.h.h } \mu\text{-ölçülebilir} \Longrightarrow \mu_f \leq \lim_{n\to\infty} inf\mu_{f_n}\,; \tag{3.5}$$

ve özellikle,

$$|f_n| \uparrow f \text{ h.h.h } \mu\text{-ölçülebilir} \Longrightarrow \mu_{f_n} \uparrow \mu_f \text{ dir.}$$

**İspat.** $\mu_f$, negatif olmayan ve azalan olduğundan $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \Longrightarrow \mu_f(\lambda_1) \geq \mu_f(\lambda_2)$ olduğu açıktır. Sağdan sürekliliği sağlamak için, $E(\lambda) = \{x: |f(x)| > \lambda\}, (\lambda \geq 0)$ ve $\lambda_0 \geq 0$ olsun. $\lambda$ azaldıkça $E(\lambda)$ kümeleri artar ve,

$$E(\lambda_0) = \bigcup_{\lambda>\lambda_0} E(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right).$$

Bu yüzden, monoton yakınsaklık teoreminden,

$$\mu_f\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu\left(E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)\right) \uparrow \mu\big(E(\lambda_0)\big) = \mu_f(\lambda_0),$$

ve bu sağdan sürekliliği sağlar.

(3.2) ve (3.3), tanım (3.1)' in sonuçlarıdır. Özellik (3.4) için, eğer $|f(x) + g(x)| > \lambda_1 + \lambda_2$ ise, $|f(x)| > \lambda_1$ veya $|g(x)| > \lambda_2$ olduğu açıkça görülür. (3.5)' i göstermek için, $\lambda \geq 0$ ve

$$E = \{x : |f(x)| > \lambda\}, \qquad E_n = \{x : |f_n(x)| > \lambda\}, \qquad n = (1,2,\dots)$$

olsun. Açık olarak,

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} E_n.$$

Bu yüzden, $m = 1,2,\dots$ için

$$\mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_{m} \inf_{n>m} \mu(E_{\boldsymbol{n}}) = \lim_{n\to\infty} \inf \mu(E_{\boldsymbol{n}})$$

Fakat, $\bigcap_{n>m} E_n$, $m$ ile artar. Bu yüzden, monoton yakınsaklık teoremine başvurulur ve,

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} E_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \mu(E_n).$$

Bu, (3.5) deki iddiaların ilkidir. İkincisi, birincisinin hemen bir sonucudur.

**Örnek.** Negatif olmayan basit $f$ fonksiyonunun $\mu_f$ dağılım fonksiyonunu hesaplayalım.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{E_j}(x), \tag{3.6}$$

$E_j$ kümeleri, sonlu $\mu$-ölçülebilir olan $R$'nin ikili ayrık alt kümeleridir ve $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ dır. Eğer $\lambda \geq a_1$ ise, $|f(x)| \leq \lambda$ olacağından $\mu_f(\lambda) = 0$ olduğu açıktır.

Aksi takdirde, eğer $a_2 \leq \lambda < a_1$ ise, yani $f(x)$ tam olarak $E_1$ kümesinde $\lambda$ değerlerini aşıyorsa, $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1)$ olur.

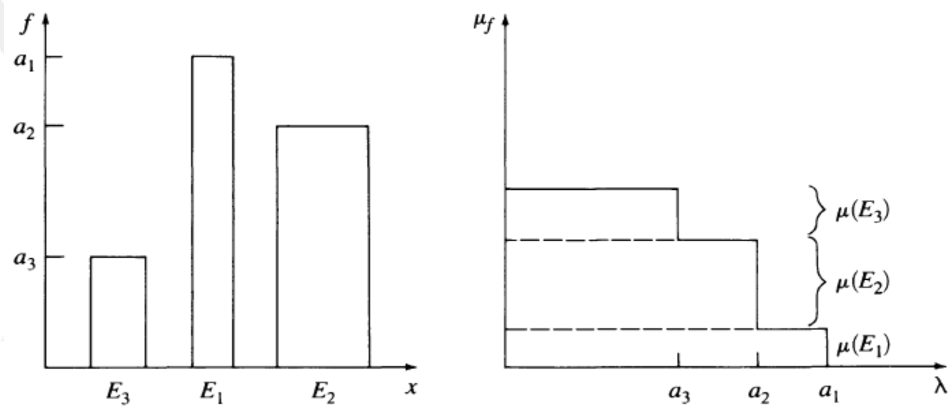
Benzer şekilde, eğer $a_3 \leq \lambda < a_2$ ise, o zaman $f(x)$ ,$E_1 \cup E_2$ kümesi üzerinde $\lambda$ değerlerini aşar ve $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ olur. Genel olarak,

$$m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i) \,, \qquad j = (1,2, \dots, n) \tag{3.7}$$

olduğu yerde

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_j \, \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda), \qquad (\lambda \geq 0) \,, \tag{3.8}$$

elde ederiz ve $a_{n+1} = 0$ olarak tanımlanır.




**Şekil 3.1** $f(x)$ ve $\mu_f(\lambda)$ nın grafikleri [2]

**Tanım 3.4.** $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ olsun. $[0, \infty)$ aralağında tanımlı $f^*$ fonksiyonuna, $f$ fonksiyonunun azalan yeniden düzenlemesi denir ve

$$f^*(t) = inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\}, \qquad (t \geq 0) \tag{3.9}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada, $inf\emptyset = \infty$ olarak alıyoruz. Bu yüzden, her $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda) > t$ ise, o zaman $f^*(t) = \infty$ dur. Aynı zamanda, $(R, \mu)$ sonlu ölçü uzayı olduğundan dağılım fonksiyonu $\mu_f$, $\mu(R)$ tarafından sınırlandırılır ve bu yüzden her $t \geq \mu(R)$ için $f^*(t) = 0$ olur.

Bu durumda, $f^*$ fonksiyonunu $[0, \mu(R))$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olarak görebiliriz. Ayrıca, $\mu_f$ sürekli ve kesin azalan olursa, o zaman $f^*$, uygun aralıkta $\mu_f$ in tersidir.

Aslında, genel $f$ fonksiyonu için, ilk önce $\mu_f$ dağılım fonksiyonunu oluşturursak, sonra $\mu_f$ in $m_{\mu_f}$ dağılım fonksiyonunu oluştururuz ($m$, [0, ∞) aralığında Lebesgue ölçüsü ile temsil edilir). Ve böylece, tam olarak $f^*$ azalan yeniden düzenleme fonksiyonunu elde ederiz. Bu,

$$f^*(t) = sup\{\lambda: \mu_f(\lambda) > t\} = m_{\mu_f}(t), \qquad (t \geq 0), \tag{3.10}$$

Bu ifade, (3.9) dan ve $\mu_f$ dağılım fonksiyonunun azalan olmasından gelen bir sonuçtur. $f \to f^*$ eşlemesi genel bir ölçü uzayında meydana gelen durumların, Lebesgue ölçümüne sahip belirli $(0, \infty)$ aralığındaki ölçü uzayında karşılığı olarak görülebilir.

**Örnek.**

**(a)** İlk örnekte verilen basit $f$ fonksiyonunun azalan yeniden düzenlenmesini hesaplayacağız. (3.9) dan ve şekil-3.1 den $t \geq m_3$ ise $f^*(t) = 0$ olduğunu görebiliriz. Aynı zamanda, $m_3 > t \geq m_2$ ise, o zaman $f^*(t) = a_3$, ve $m_2 > t \geq m_1$ ise, $f^*(t) = a_2$ olur ve bu şekilde devam eder. Bu yüzden, $m_0 = 0$ aldığımızda,

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \qquad (t \geq 0), \tag{3.11}$$

olur.

Geometrik olarak, $f^*$ azalan yeniden düzenleme fonksiyonunu elde etmek için, dikey blokları $f$ grafiği halinde yeniden düzenliyoruz (Şekil-3.2); sıçramalardaki $f^*$ değerleri sağdan süreklilik ile belirlenir.

**(b)** Bazen fonksiyonları dikey bloklar halinde bölmekten ziyade yatay olarak bölmek daha yararlı olabilir. Bu yüzden, (3.6) da verilen $f$ basit fonksiyonun aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \, \chi_{F_k}(x), \tag{3.12}$$

$b_k$ katsayıları pozitif ve $F_k$ kümelerinin her biri sonlu ölçüye sahip ve $F_1 \subset F_2 \subset \cdots F_n$ artan dizi formundadır.

$$b_k = a_k - a_{k+1}\,, \qquad F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j\,, \qquad (k = 1,2,\dots,n).$$

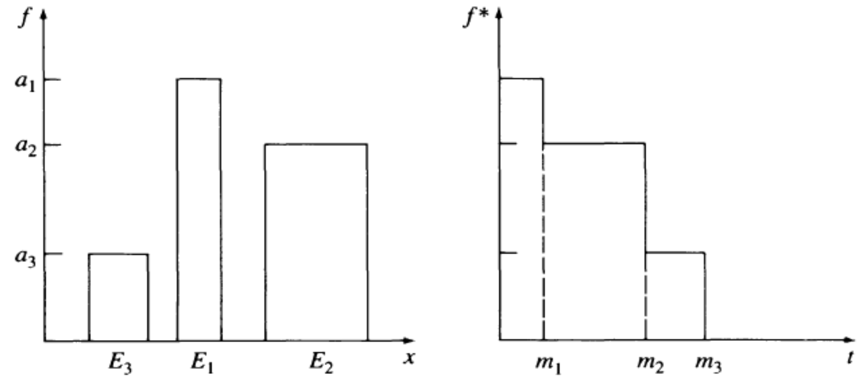
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k\,\chi_{F_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})\,\chi_{\left[\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right]}(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) \left( \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j}(x) \right)$$

$$= \chi_{E_1}(x) \textstyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) + \cdots + \chi_{E_k}(x) \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$$

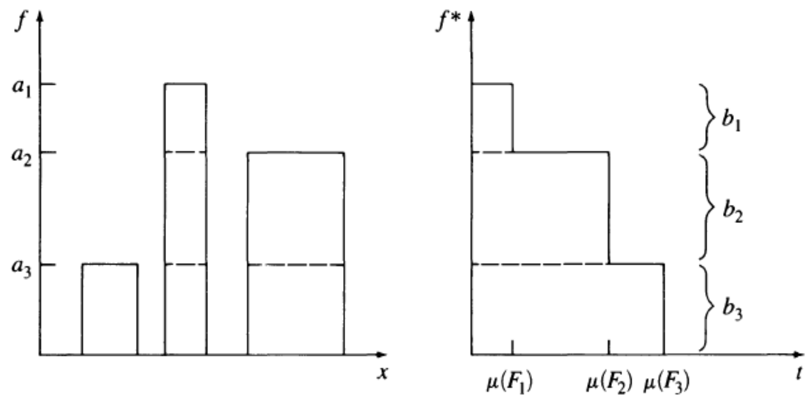
$$= \chi_{E_1}(x) a_1 + \cdots + \chi_{E_n}(x) a_n = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x).$$

olduğu görülür.

(3.6) ile karşılaştırırsak,




**Şekil 3.2** $f$ ve $f^*$ ın grafikleri [2]



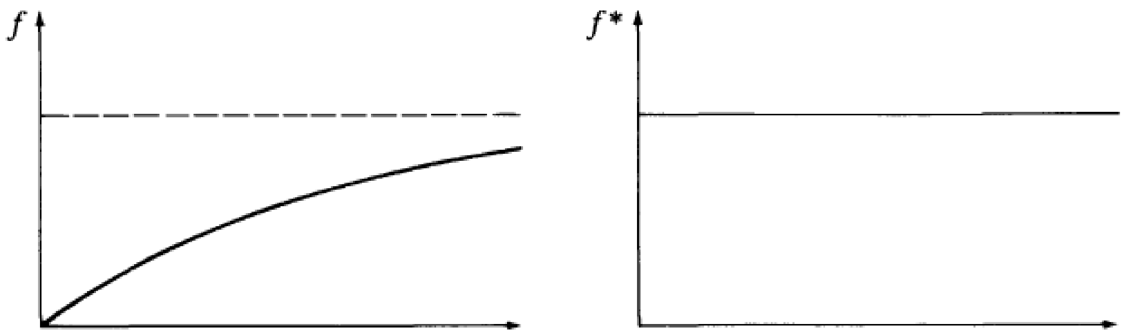

**Şekil 3.3** $f$ ve $f^*$ ın grafikleri [2]

Bu durumda, azalan yeniden düzenleme, sol tarafı dikey eksene karşı konumlandırılmış daha büyük bir blok oluşturmak üzere, blokların her yatay katmanda kaydırılmasıyla oluşmuştur (Şekil-3.3). Bu yüzden,

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} b_k \, \chi_{[0,\mu(F_k))}(x) \tag{3.13}$$

olur**.**

**(c)** $f(x) = 1 - e^{-x}, (0 < x < \infty)$. Dağılım fonksiyonu $m_f$, $0 \leq \lambda < 1$ için sonlu ve tüm $\lambda \geq 1$ için 0'a eşittir. Bu yüzden, tüm $t \geq 0$ için $f^*(t) = 1$ dir.




**Şekil 3.4** $f(x) = 1 - e^{-x}$ ve $f^*(t)$ nin grafikleri [2]

**Örnek.** $X = [0, \infty)$, $\quad f: [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \quad , & x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun dağılım ve azalan yeniden düzenleme fonksiyonlarını bulup integralini hesaplayalım [20]**.**

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \lambda\}) &= \mu\{x \in [0,2] : 1 - (x-1)^2 > \lambda\} \\ &= \mu\{x \in [0,2] : 1 - \sqrt{1-\lambda} < x < 1 + \sqrt{1-\lambda}\} \\ &= 2\sqrt{1-\lambda}, \qquad \lambda \in [0,1] \end{aligned}$$

O halde,

$$\mu_f(\lambda) = \begin{cases} 2\sqrt{1-\lambda}\,, & 0 \le \lambda \le 1 \\ 0 \quad , & \lambda > 1 \end{cases}$$

$$f^*(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^2}{4}\,, & 0 \le t \le 2 \\ 0 \quad , & t > 2 \end{cases}$$

Son olarak,

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^2 1-(x-1)^2dx = \int_0^1 2\sqrt{1-\lambda}d\lambda = \int_0^2 \left(1-\frac{t^2}{4}\right)dt = \frac{4}{3}.$$

**Önerme 3.5.** Kabul edelim ki $f, g\ ve\ f_n\ \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ ve $\alpha$, her hangi bir skaler olsun. $f^*$ azalan yeniden düzenleme fonksiyonu, $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan, azalan ve sağdan sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca,

$$|g| \le |f|\ h.h.h\ \mu - \text{ölçülebilir} \Rightarrow g^* \le f^*; \tag{3.14}$$

$$(\alpha f)^* = |\alpha| f^*; \tag{3.15}$$

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \le f^*(t_1) + g^*(t_2), \quad (t_1, t_2 \ge 0) \tag{3.16}$$

$$|f| \le \lim_{n\to\infty} inf|f_n|\ h.h.h\ \text{ölçülebilir} \Rightarrow f^* \le \lim_{n\to\infty} f_n^*; \tag{3.17}$$

özellikle,

$$|f_n| \uparrow f\ h.h.h\ \mu - \text{ölçülebilir} \Rightarrow f_n^* \uparrow f^*\ ;$$

$$f^*\left(\mu_f(\lambda)\right) \le \lambda, \quad \left(\mu_f(\lambda) < \infty\right);\ \ \mu_f\left(f^*(t)\right) \le t\ ,\ \left(f^*(t) < \infty\right); \tag{3.18}$$

$$f\ ve\ f^*\ \text{denk ölçülebilirdir}; \tag{3.19}$$

$$(|f|^p)^* = (f^*)^p,\ \ (0 < p < \infty). \tag{3.20}$$

**İspat.** Önerme (3.3) ve $f^*$ ın kendisinin bir dağılım fonksiyonu olduğu gerçeğinden $f^*$ fonksiyonu negatif olmayan, azalan ve sağdan süreklidir. (3.14), (3.15) ve (3.17) özelliklerinin önerme (3.3) ve azalan yeniden düzenleme tanımının sonuçları olduğu açıktır. Özellik (3.18) için, $\lambda \ge 0$ ve kabul edelim ki $t = \mu_f(\lambda)$ sonludur.

Öyleyse, (3.9) dan

$$f^*\left(\mu_f(\lambda)\right) = f^*(t) = inf\{\lambda' : \mu_f(\lambda') \leq t = \mu_f(\lambda)\} \leq \lambda,$$

verir. (3.18). özelliğin ilk kısmının ispatı böylelikle görülmüş olur. İkinci kısım için, $t \geq 0$ ve kabul edelim ki $\lambda = f^*(t)$ sonlu olsun. Tanım (3.9) dan $\mu_f(\lambda_n) \leq t$ olan $\lambda_n \downarrow \lambda$ dizisi vardır, bu yüzden (3.3) ten,

$$\mu_f\left(f^*(t)\right) = \mu_f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(\lambda_n) \leq t.$$

Böylelikle, (3.18) gösterilmiş olur.

(3.16) özelliğine dönersek, $\lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2)$ nın sonlu olduğunu kabul edebiliriz. Aksi taktirde, kanıtlayacak bir şey yoktur. $t = \mu_{f+g}(\lambda)$ olsun. O halde, üçgen eşitsizliği ve (3.18) özelliğinin ikinci kısmından,

$$\begin{aligned} t &= \mu\{x : |f(x) + g(x)| > f^*(t_1) + g^*(t_2)\} \\ &\leq \mu\{x : |f(x)| > f^*(t_1)\} + \mu\{x : |g(x)| > g^*(t_2)\} \\ &= \mu_f\left(f^*(t_1)\right) + \mu_g\left(g^*(t_2)\right) \\ &\leq t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Burdan $t$ nin sonlu olduğu görülür. Bu yüzden, (3.18) deki eşitsizliklerin ilki ve $(f+g)^*$ ın azalanlığını kullanarak,

$$\begin{aligned} (f+g)^*(t_1+t_2) &\leq (f+g)^*(t) = (f+g)^*\mu_{f+g}(\lambda) \\ &\leq \lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2) \end{aligned}$$

elde ederiz ve böylece (3.16) gösterilmiş olur.

$f \in \mathcal{M}_0$ fonksiyonu için, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan basit fonksiyonlar dizisi bulabiliriz öyle ki $f_n \uparrow f$ dir. Her n için $f_n$ ve $f_n^*$ fonksiyonlarının denk ölçülebilir olduğu açıktır, yani,

$$\mu_{f_n}(\lambda) = m_{f_n^*}(\lambda), \qquad (\lambda \geq 0) \tag{3.21}$$

dır.

Özellik (3.5) ten $f_n \uparrow |f|$ ve $f_n^* \uparrow f^*$ dır bu yüzden, (3.21) deki dağılım fonksiyonlarının her birine uygulanır ve

$$\mu_f(\lambda) = m_{f^*}(\lambda), \qquad (\lambda \geq 0) \tag{3.22}$$

olduğu görülür.

Bu yüzden, (3.19) özelliğinden iddia edildiği gibi $f$ ve $f^*$ denk ölçülebilirdir.

Son olarak, (3.22) den

$$\mu_{|f|^p}(\lambda) = \mu_f\left(\lambda^{1/p}\right) = m_{f^*}\left(\lambda^{1/p}\right) = m_{(f^*)^p}(\lambda), \qquad (\lambda \geq 0).$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki önerme, *Lp*-normunun dağılım ve azalan yeniden düzenleme fonksiyonu açısından alternatif bir tanımını verir**.**

**Önerme 3.6.** $f \in \mathcal{M}_0$ olsun. Eğer $0 < p < \infty$ ise, o halde

$$\int_R |f|^p d\mu = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p dt.$$

Ayrıca, $p = \infty$ olması halinde,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R}|f(x)| = inf\{\lambda: \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0)$$

olur.

**Teorem 3.7 (Hardy-Littlewood).** $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ olsun. Öyleyse,

$$\int_R |fg|d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.$$

**Teorem 3.8.** $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ olsun. Öyleyse,

$$\int_R |fg|d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds.$$

**Tanım 3.9.** Eğer $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ ise, $(R, \mu)$ $\sigma$ −sonlu ölçü uzayına rezonanttır denir ve,

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = sup\int_R |f\tilde{g}|d\mu$$

sağlanır [2].

Benzer şekilde, her $f, g \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ ve $\tilde{g} \in R$ denk ölçülebilir fonksiyonu varsa $(R,\mu)$ uzayına güçlü rezonanttır denir ve

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \int_R |f\tilde{g}|d\mu$$

sağlanır [2].

## 3.2 Maksimal Fonksiyon

$E$ , $\mu(E) = t \in (0,\infty)$ koşulunu sağlayan $R$ nin $\mu$ –ölçülebilir bir fonksiyonu olsun. O halde, $g = \chi_E$ karakteristik fonksiyon olarak alınmasıyla ve Hardy-Littlewood eşitsizliği içine ilave edilmesiyle

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f|d\mu \leq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \qquad (f \in \mathcal{M}_0). \tag{3.23}$$

Buna göre, herhangi bir $t$ ölçüsü üzerindeki $|f|$ ortalaması, $(0,t)$ aralığı boyunca karşılık gelen $f^*$ ın ortalamasına göre belirlenir.

**Tanım 3.10.** $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ olsun. Öyleyse, $f^{**}$ fonksiyonu, $f^*$ azalan yeniden düzenleme fonksiyonunun maksimal fonksiyonu olarak tanımlanır ve

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \qquad (t > 0). \tag{3.24}$$

şeklinde ifade edilir [2].

**Önerme 3.11.** $f$, $g$, $f_n \in \mathcal{M}_0$ ve $a$ herhangi bir skaler olsun. Öyleyse, $f^{**}$ maksimal fonksiyonu, $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan, azalan ve sürekli bir fonksiyondur ve aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$f^{**} \equiv 0 \Leftrightarrow f = 0 \; h.h.h \; \mu - \text{ö}.bilir; \tag{3.25}$$

$$f^* \leq f^{**}; \tag{3.26}$$

$$|g| \leq |f| \; h.h.h \; \mu - \text{ö}.bilir; \Rightarrow g^{**} \leq f^{**}; \tag{3.27}$$

$$(af) = |a|f^{**}; \tag{3.28}$$

$$|f_n| \uparrow |f| \; h.h.h \; \mu - \text{ö}.bilir; \Rightarrow f_n^{**} \uparrow f^{**}. \tag{3.29}$$

**İspat.** $f^*$ azalan olduğundan, (3.24) ten, tüm $t > 0$ lar için $f^{**}(t)$, $t$ nin herhangi bir değeri için sonludur. Başka bir ifadeyle, $f^{**}$ fonksiyonu her yerde sonludur veya her yerde sonsuzdur. Her iki durumda da negatif değildir (eğer $+\infty$ değerini eklersek) ve süreklidir.

(3.25), (3.27) , (3.28) ve (3.29) özelliklerinin ispatları açıktır. Özellik (3.26) $f^*$ fonksiyonun azalan olduğunu gösterir. Bu yüzden,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geq f^*(t) = \frac{1}{t}\int_0^t ds = f^*(t).$$

Son olarak, $f^*$ azalandır, ve eğer $0 < t \leq s$ ise $f^*(v) \leq f^*(\frac{tv}{s})$ dir. Bu yüzden,

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s}\int_0^s f^*(v)dv \leq \;= \frac{1}{s}\int_0^s f^*(\frac{tv}{s})dv = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du = f^{**}(t),$$

olur ve dolayısıyla $f^{**}$ azalandır.

**Önerme 3.12.** $(R,\mu)$ $\sigma$-sonlu ölçü uzayı, $t$ $\mu$ ‘ nün aralığında herhangi bir pozitif sayı ve $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ olsun. Öyleyse,

**(a)** $(R,\mu)$ rezonant ise,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} sup\left\{\int_E |f|d\mu : \mu(E) = t\right\} \tag{3.30}$$

**(b)** $(R,\mu)$ güçlü rezonant ise,$\mu(E) = t$ ile verilen $R$’ nin bir $E$ alt kümesi vardır öyle ki

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_E |f|d\mu \tag{3.31}$$

olur [2].

**Teorem 3.13.** $(R,\mu)$ $\sigma$-sonlu ölçü uzayı, $f, g \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ olsun. Öyleyse,

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t), \qquad (0 < t < \infty). \tag{3.32}$$

olur.

**Tanım 3.14 (Hardy-Littlewood-Polya).** $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ olsun. Eğer $f_1^{**} \le f_2^{**}$ ise, $f_1 \prec f_2$ yazabiliriz, yani her $t > 0$ için

$$\int_0^t f_1^{*}(s)ds \le \int_0^t f_2^{*}(s)ds \tag{3.33}$$

dir. " $\prec$ " bağıntısı Hardy-Littlewood-Polya olarak adlandırılır [2].

**Önerme 3.15 (Hardy Lemma).** $\varphi_1$ $ve$ $\varphi_2$, $(0,\infty)$ aralığında negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar ve kabul edelim ki tüm $t > 0$ lar için

$$\int_0^t \varphi_1(s)ds \le \int_0^\infty \varphi_2(s)ds \tag{3.34}$$

$\varsigma$, $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan azalan bir fonksiyon olsun. Öyleyse,

$$\int_0^\infty \varphi_1(s)\varsigma(s)ds \le \int_0^\infty \varphi_2(s)\varsigma(s)ds. \tag{3.35}$$

olur.

**Önerme 3.16.** $(R,\mu)$ rezonant ölçü uzayı , $(E_j)_{j\in J}$ her biri sonlu pozitif ölçüye sahip $R$ nin ikili ayrık alt kümelerinin sayılabilir bir kümesi ve $E = R\setminus \bigcup_j E_j$ olsun. Kabul edelim ki $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ ve $f$ , $E_j$ üzerinde integrallenebilir ve

$$Af = f\chi_E + \sum_{j\in J}\left(\frac{1}{\mu(E_j)}\int_{E_j} f d\mu\right)\chi_{E_j} \tag{3.36}$$

olsun. Öyleyse, $Af \prec f$ olur.

**İspat.** Kabul edelim ki $J$ sadece bir elemena sahip olsun. Öyleyse, $0 < \mu(E_1) < \infty$ ve $E = R\setminus E_1$ olduğu yerde $Af$ aşağıdaki formdadır:

$$Af = f\chi_E + \left(\frac{1}{\mu(E_1)}\int_{E_1} f d\mu\right)\chi_{E_1},$$

$Af \prec f$ olacak şekilde tüm $t > 0$ lar için,

$$\int_0^t (Af)^*(s)ds \leq \int_0^t f^*(s)ds, \tag{3.37}$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

Kabul edelim ki, $0 < t < \infty$ olsun. $F, \mu(F) = t$ olan $R$ 'nin herhangi bir alt kümesi ve $t_0 = \mu(F \cap E_1)$ olsun.

Öyleyse,

$$\int_F |Af|\, d\mu = \int_{F\cap E} |f|\, d\mu + t_0 \left| \frac{1}{\mu(E_1)} \int_{E_1} f d\mu \right|. \tag{3.38}$$

Son ifadeyi tahmin etmek için, $E_1$ üzerinde $f = f\chi_{E_1}$ yazabiliriz. Ayrıca, (3.23) ü kullanırsak $\left(f\chi_{E_1}\right)^{**}$ azalan olduğundan

$$t_0 \left| \frac{1}{\mu(E_1)} \int_{E_1} f d\mu \right| \leq t_0 \left(f\chi_{E_1}\right)^{**}\left(\mu(E_1)\right) \leq \int_0^{t_0} \left(f\chi_{E_1}\right)^* (s)ds \tag{3.39}$$

elde ederiz.

Ancak, $(R, \mu)$ rezonant ve bu yüzden $\mu(E_1) < \infty$ olduğundan $(E_1, \mu|E_1)$ ölçü uzayı güçlü rezonanttır. $\mu(F \cap E_1) = t_0$ olduğundan $t_0$, $\mu|E_1$ aralığındadır. Bu yüzden, $E_1\ in\ \mu(G) = t_0$ olan bir $G$ alt kümesi vardır öyle ki,

$$\int_0^{t_0} \left(f\chi_{E_1}\right)^*(s)ds = \int_G \left|f\chi_{E_1}\right| d\mu = \int_G |f|\, d\mu.$$

Bunu, (3.22) den,

$$\int_F |Af| d\mu \leq \int_{F\cap E} |f|\, d\mu + \int_G |f|\, d\mu \tag{3.40}$$

elde ederiz.

Fakat $F \cap E\ ve\ G$ ayrık olduklarından ve,

$$\mu\big((F \cap E) \cup G\big) = \mu(F \cap E) + \mu(G) = (t - t_0) + t = t,$$

olur.

Bu yüzden, (3.33) ün sağ tarafını (3.40) a uygularsak,

$$\int_F |Af|\, d\mu \leq \int_0^t f^*(s)ds$$

elde ederiz.

$t$ ölçüsününün tüm $F$ kümeleri üzerindeki supremumunu alarak ve önerme (3.25) i uygulayarak en azından $\mu$ aralığındaki tüm $t$ ler için (3.37) yi elde ederiz.

Bu, $J$ indeks kümesinin sadece tek bir eleman içermesi durumunda önermeyi belirler. Sonlu J kümesi için karşılık gelen sonuç, başarılı iterasyonlar tarafından türetilir. $J = \{1,2,\dots,N\}$ için,

$$R_n = R \backslash \bigcup_{m=1}^{n} E_m$$

olduğunu söyleyebiliriz ve,

$$A_n f = f\chi_{R_n} + \sum_{\boldsymbol{m=1}}^{\boldsymbol{n}} \left( \frac{1}{\mu(E_1)} \int_{E_m} f d\mu \right) \chi_{R_n},$$

ve,

$$A_n f \prec A_{n-1} f \prec \cdots \prec A_1 f \prec f$$

elde ederiz.

Son olarak, kabul edelim ki $J$ sayılabilir sonsuz küme olsun. Bu yüzden, $|Af| \leq A(|f|)$ olduğundan**,** negatif olmayan $f$ ler için $Af \prec f$ oluşturmak yeterlidir. Bu durumda,

$$f_n = f\chi_E + \sum_{m=1}^{\boldsymbol{n}} f\chi_{E_m}, \qquad (n = 1,2,\dots)$$

fonksiyonları $0 \leq f_n \uparrow f\ h.h.y\ \mu -$ ölçülebilir ve $Af_n \uparrow Af\ h.h.y\ \mu -$ ölçülebilir şartlarını sağlar**.** Öyleyse,

$$Af_n = A_n f_n \prec f_n \prec f, \qquad n = (1,2,\dots),$$

Denkleminin sol tarafına (3.29) u uygularsak $Af \prec f$ elde ederiz.

## 3.3 Yeniden Düzenlenmiş-Değimez Banach Fonksiyon Uzayları

$\ell_p$-normu, girdilerin ölçüm uzayı üzerinde nasıl dağıldığına bakılmaksızın bir vektörün büyüklüğünün ölçüsünü sağlar. Banach fonksiyon uzaylarını, normları bu tür bir özelliğe sahip olan daha genel ölçü uzayları üzerinde ayırmak isteyeceğiz. Yeniden düzenlenmiş-değişmez uzaylar olarak adlandırılan bu düzenlemeler, genel olarak Banach fonksiyon uzaylarından çok daha zengin bir yapıya sahiptir.

**Tanım 3.17.** $\sigma -$sonlu $(R, \mu)$ ölçü uzayı üzerinde $\rho$ bir fonksiyon normu olsun. $\mathcal{M}_0^+(R, \mu)$ deki $f$ ve $g$ denk ölçülebilir fonksiyon çifti için $\rho(f) = \rho(g)$ oluyorsa $\rho$ normuna yeniden düzenleme altında değişmez kalan denir. Bu durumda, $X = X(\rho)$ uzayına yeniden düzenlenmiş-değişmez Banach fonksiyon uzayı denir [2].

**Örnek.** Lebesgue uzayı $L^p(R, \mu)$, yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayıdır.

**İspat.** $f, g \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu)$ denk ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu yüzden, $f^* = g^*$ olur ve

$$\int_R |f(x)|^p \, d\mu(x) = \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt = \int_0^\infty g^*(t)^p \, dt = \int_R |g(x)|^p \, d\mu(x)$$

Bu yüzden, $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$ dir.

**Önerme 3.18.** $\rho$, $(R, \mu)$ rezonant ölçü uzayında yeniden düzenlenmiş değişmez Banach fonksiyon normu olsun. Bu durumda, $\rho'$ ilişik normu da yeniden düzenlemiş- değişmez normdur.

Ayrıca,

$$\rho'(g) = sup\left\{\int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds : \rho(f) \leq 1\right\}, \quad (g \in \mathcal{M}_0^+) \quad (3.41)$$

ve

$$\rho(f) = sup\left\{\int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds : \rho'(g) \leq 1\right\}, \quad (f \in \mathcal{M}_0^+) \quad (3.42)$$

elde edilir.

**Sonuç 3.19 (Hölder Eşitsizliği).** $\rho$, $(R,\mu)$ rezonant ölçü uzayında yeniden düzenlenme altında değişmez kalan Banach fonksiyon normu olsun. Eğer, $f,g \in \mathcal{M}_0^+(R,\mu)$ ise, o zaman

$$\int_R fg d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \leq \rho(f)\rho'(g). \qquad (3.43)$$

olur**.**

**Sonuç 3.20.** $X$, rezonant ölçü uzayı üzerinde bir Banach fonksiyon normu olsun. Öyleyse, $X$ yeniden düzenlenmiş-değişmez uzaydır $\Leftrightarrow$ $X'$ ilişik uzayı da yeniden düzenlenmiş-değişmez uzaydır.

Bu durumda, normları aşağıdaki gibidir:

$$\|g\|_{X'} = sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds : \|f\|_X \leq 1\right\}, \qquad (g \in X') \quad (3.44)$$

ve

$$\|f\|_X = sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds : \|g\|_{X'} \leq 1\right\}, \qquad (f \in X). \quad (3.45)$$

Aşağıdaki teorem, Hardy-Littlewood-Polya tanımının yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzaylarda olan önemini vurgulamaktadır.

**Teorem 3.21.** $(R,\mu)$ rezonant ölçü uzayı ve $f,g \in \mathcal{M}_0^+(R,\mu)$ ve $\rho$ , $(R,\mu)$ uzayında yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon normu olsun. Öyleyse, $f_1 \prec f_2$ ise $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$ dir.

**Sonuç 3.22.** $X$ yeniden düzenleme altında değişmez kalan bir rezonant ölçü uzayı ve $f_1 \in \mathcal{M}_0$ ve $f_2 \in X$ olsun. Eğer $f_1 \prec f_2$ ise, $f_1 \in X$ ve $\|f_1\|_X \leq \|f_2\|_X$ olur.

Teorem (3.21) in önemli bir uygulaması, her yeniden düzenleme altında değişmez kalan $X$ uzayında önerme (3.16) tarafından tanımlanan türden $A$ integral operatörlerinin olmasıdır.

**Teorem 3.23.** $(R,\mu)$ rezonant ölçü uzayı ve $\left(E_j\right)_{j\in J}$ , $R$' nin ikili ayrık alt kümelerinin sayılabilir bir toplamı olsun.

$f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ için $E = R \setminus \cup_j E_j$ ve

$$Af = f\chi_E + \sum_{j \in J} \left( \frac{1}{\mu(E_j)} \int_{E_j} f d\mu \right) \chi_{E_j}$$

olsun**.**

O halde, $A$, $(R,\mu)$ üzerinde yeniden düzenleme altında değişmez kalan $X$ uzayında bir daralmadır ve

$$\|Af\|_X \leq \|f\|_X, \quad (f \in X).$$

**Teorem 3.24.** $(R,\mu)$ $\sigma$ −sonlu ölçü uzayı ve $\lambda$ , $(\mathbf{R}^+, m)$ üzerinde yeniden düzenleme altında değişmez kalan bir fonksiyon normu olsun. O halde, $\underline{\lambda}$ fonksiyoneli de $(R,\mu)$ üzerinde yeniden düzenleme altında değişmez kalan bir fonksiyon normudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\underline{\lambda}(f) = \lambda(f^*), \qquad \left(f \in \mathcal{M}_0^+(R,\mu)\right) \tag{3.46}$$

dür.

**Teorem 3.25 (Luxemburg Temsil Teoremi).** $\rho$, $(R,\mu)$ rezonant ölçü uzayında yeniden düzenlenme altında değişmez kalan Banach fonksiyon normu olsun. O halde, $(R^+, m)$ üzerinde yeniden düzenlenme altında değişmez kalan $\bar{\rho}$ vardır öyle ki:

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*), \qquad \left(f \in \mathcal{M}_0^+(R,\mu)\right) \tag{3.47}$$

olur. Ayrıca,

$\sigma$, $(R^+, m)$ üzerinde $\rho$ normunu temsil eden yeniden düzenlenme altında değişmez kalan herhangi bir norm ise, yani

$$\rho(f) = \sigma(f^*), \qquad \left(f \in \mathcal{M}_0^+(R,\mu)\right) \tag{3.48}$$

ise, o halde $\rho$ nun $\bar{\rho}$ ilişik normu $\sigma$ nın $\sigma'$ ilişik normu tarafından aynı şekilde temsil edilir ve

$$\rho'(g) = \sigma'(g^*), \qquad \left(f \in \mathcal{M}_0^+(R,\mu)\right) \tag{3.49}$$

şeklinde gösterilir [2].

## 3.4. Temel Fonksiyon

**Tanım 3.26.** $X$, $(R,\mu)$ rezonant ölçü uzayında yeniden düzenlenme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı olsun. $t \in R(\mu)$ ve $\mu(E) = t$ olsun. Öyleyse,

$$\varphi_X(t) = \|X_E\|_X \tag{3.50}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_X$ fonksiyonuna temel fonksiyon denir [2].

**Teorem 3.27.** $X$, $(R,\mu)$ rezonant ölçü uzayında yeniden düzenlenme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı ve $X'$ de $X$ in ilişik uzayı olsun. O halde. Her bir $t \in R(\mu)$ için

$$\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t) = t. \tag{3.51}$$

**Sonuç 3.28.** $X$, $(R,\mu)$ rezonant ölçü uzayında yeniden düzenlenme altında değişmez kalan uzay olsun. O halde, $X$ in temel fonksiyonu $\varphi_X$ aşağıdaki özellikleri sağlar [2]:

$$\varphi_X \text{ artandır ; eğer } t = 0 \text{ ise } \varphi_X(t) = 0; \tag{3.52}$$

$$\frac{\varphi_X(t)}{t} \text{ azalandır;} \tag{3.53}$$

$$\varphi_X \text{, orjin dışında süreklidir.} \tag{3.54}$$

**Teorem 3.29.** $(R,\mu)$, sayılabilen birçok eşit ölçü atomundan oluşan atomik bir ölçü uzayı olsun. Eğer $X$, $(R,\mu)$ uzayında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı ise,

**(i)** $X_a = X_b$ **;**

**(ii)** $(X_b)^* = X'$ **;**

**(iii)** $X_b$ ayrılabilirdir.

**Tanım 3.30.** $\varphi$, $\mathbf{R}^+ = [0,\infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\varphi(t),\ (0,\infty) \text{ aralığında artandır; } \varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0; \tag{3.55}$$

$$\varphi(t)/t\text{ , } (0,\infty) \text{ aralığında azalandır} \tag{3.56}$$

ise, $\varphi$ ye kuasi-konkav fonksiyon denir [2].

**Tanım 3.31.** $\varphi$, $\mathbf{R}^+$ üzerinde kuasi-konkav bir fonksiyon olsun. Lorentz uzayı $M_\varphi = M_\varphi(\mathbf{R}^+, m)$, $f \in \mathcal{M}_0(\mathbf{R}^+, m)$ içeren tüm fonksiyonlardan oluşur ve

$$\|f\|_{M_\varphi} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\varphi(t)\} \tag{3.58}$$

sonludur.

**Önerme 3.32.** Eğer . $\varphi$ kuasi-konkav ise, $M_\varphi$ temel fonksiyon $\varphi$ ile çakışan yeniden düzenlenme altında değişmez kalan bir Banach fonksiyon uzayıdır.

**Tanım 3.33.** $X$, $(\mathbf{R}^+, m)$ üzerinde yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzay olsun ve $X$' in temel fonksiyonu $\varphi_X$ in konkav olması için önerme (3.55) e göre yeniden normlandığını varsayalım. Lorentz uzayları $\Lambda(X)$ ve $M(X)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|f\|_{M(X)} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\varphi_X(t)\}. \tag{3.59}$$

$$\|f\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty f^*(s) d\varphi_X(s) \tag{3.60}$$

Sonludur [2].

**Teorem 3.34.** $X$, $(\mathbf{R}^+, m)$ üzerinde yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzay olsun ve $X$' in konkav temel fonksiyon $\varphi_X$ e sahip olmak için yeniden normlandığını varsayalım. O halde, $\Lambda(X)$ ve $M(X)$ Lorentz uzayları yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzay Banach fonksiyon uzaylarıdır ve ikisinin de temel fonksiyonu $\varphi_X$ tir. Ayrıca,

$$\Lambda(X) \hookrightarrow X \hookrightarrow M(X) \tag{3.61}$$

dir ve her bir gömmenin normu 1'dir.

**İspat.** $M(X) = M_{\varphi_X}$ olduğundan, $M(X)$ i içeren iddialar önerme (3.52) ve (3.53) ten görülebilir.

$\Lambda(X)$ uzayında üçgen eşitsizliğini göstermek için, $(f+g)^* \prec f^* + g^*$ hatırlayalım ve $\varphi_X$ konkav olduğundan, türevi negatif olmayan ve azalandır. Bu yüzden, Hardy lemmasından,

$$\int_0^\infty (f+g)^* \varphi_X ds \leq \int_0^\infty f^* \varphi_X ds + \int_0^\infty g^* \varphi_X ds,$$

Ve böylelikle, $\Lambda(X)$ uzayındaki norm için üçgen eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

$E$, $m(E) = t > 0$ ölçüsüne sahip herhangi bir küme olsun. O halde,

$$\|\chi_E\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty \chi_{(0,t)}(s) d\varphi_X s = \varphi_X(t). \tag{3.62}$$

Ayrıca,

$$\|f\|_X \le \|f\|_{\Lambda(X)}, \qquad \big(f \in \Lambda(X)\big). \tag{3.63}$$

Her iki norm da yeniden düzenleme altında değişmez kalan olduğundan ve Fatou önermesini sağladığından, $f = f^*$ azalan adım fonksiyonları için (3.63) ü göstermek yeterli olacaktır. Bu durumda, $c_k > 0$ ve $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ olduğu yerde aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{(0,t_k)},$$

O halde,

$$\|f\|_X \le \sum_{k=1}^{n} c_k \left\|\chi_{(0,t_k)}\right\|_X = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \varphi_x(t_k)$$

$$= \int_0^\infty f^*(s) d\varphi_X(s) = \|f\|_{\Lambda(X),}$$

olduğu görülür.

## 3.5 $L^1 + L^\infty$ ve $L^1 \cap L^\infty$ UZAYLARI

Yeniden düzenlenmiş-değişmez uzayların başka örnekleri sadece toplamları ve arakesitleri alarak Lebesgue uzaylarından oluşturulabilir [19]. Bu bölümde, $L^1 + L^\infty$ ve $L^1 \cap L^\infty$ uzaylarının inşası gösterilmiştir. Bu uzaylar, teoride, sırasıyla yeniden düzenlenmiş-değişmez uzayların en büyüğü ve en küçüğü olmaları bakımından özel bir rol oynamaktadır.

**Tanım 3.35.** $(R, \mu)$ $\sigma$- sonlu ölçü uzayı olsun.

**(a)** $L^1 + L^\infty = (L^1 + L^\infty)(R, \mu)$ uzayı , $g \in L^1$ ve , $h \in L^\infty$ fonksiyonlarının $f = g + h$ toplamı olarak temsil edilen $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ fonksiyonlarından oluşur.

Her bir, $f \in L^1 + L^\infty$ için,

$$\|f\|_{(L^1+L^\infty)} = inf\{\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^\infty}\}, \tag{3.64}$$

**(b)** $f \in L^1 \cap L^\infty$ için,

$$\|f\|_{(L^1\cap L^\infty)} = max\{\|f\|_{L^1}, \|f\|_{L^\infty}\}. \tag{3.65}$$

(3.65) tanımının sağ tarafı $\sup_{1\leq t<\infty} \int_0^t f^*(s)ds$ ve $\sup_{0<t<1} \int_0^t f^{**}(t)$ niceliklerinin maksimumudur. Öyleyse, $L^1 \cap L^\infty$ uzayındaki norm, $f^{**}$ maksimal fonksiyonu açısından aşağıdaki gibi tanımlanır [2]:

$$\|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \sup_{0<t<\infty} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\min(1,\mathrm{t})} = \sup_{0<t<\infty} (f^{**}(t).\max(1,t)). \tag{3.66}$$

**Teorem 3.36.** $(R,\mu)$ , $\sigma$- sonlu ölçü uzayı ve $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ olsun. O halde, her $t > 0$ için,

$$\inf_{f=g+h}\{\|g\|_{L^1} + \mathrm{t}\|h\|_{L^\infty}\} = \int_0^t f^*(s)ds = tf^{**}(t). \tag{3.67}$$

**İspat.** (3.67) denklemindeki ifadelerin ikincisi $f^{**}$ ın tanımının sonucudur. Bu yüzden, ilk ifadeyi göstermemiz yeterlidir. $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$, $t > 0$ ve $\alpha_1$, (3.67) denkleminin sağ tarafının infimumu olsun.

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \alpha_1, \tag{3.68}$$

olduğunu gösterelim.

$f \in L^1 + L^\infty$ olduğunu varsayabiliriz. Aksi taktirde, $\alpha_1$ in infimumu sonludur ve ispatlayacak birşey yoktur. Bu durumda, $f$ fonksiyonu, $g \in L^1$ ve $f \in L^\infty$ için $f = g + h$ toplamı olarak ifade edilebilir. $f^{**}$ ın alt toplamından,

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \int_0^t g^*(s)ds + \int_0^t h^*(s)ds$$

elde edilir.

Bu yüzden,

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \|g\|_{L^1} + \mathrm{t}\|h\|_{L^\infty}$$

dur. $f = g + h$ ın tüm olası temsilleri üzerinde infimum alırsak, (3.68) i elde ederiz.

$$\alpha_1 \leq \int_0^t f^*(s)ds$$

ters eşitsizliği, $f = g + h$ ve

$$\|g\|_{L^1} + \mathrm{t}\|h\|_{L^\infty} \leq \int_0^t f^*(s)ds \tag{3.69}$$

gibi $g \in L^1$ ve $h \in L^\infty$ fonksiyonlarının inşası için yeterli olacaktır.

Açık olarak, eşitsizliğin sağ tarafı sonlu olarak kabul edilebilir.. Hardy-Littlewood eşitsizliğinden, ölçüsü en fazla t olan $R$ nin her alt kümesi üzerinde $f$ fonksiyonunun integrallenebilirliği garanti edilebilir. Bu yüzden, $E = \{x: |f(x)| > f^*(t)\}$ ve $t_0 = \mu(E)$ alırsak, $t_0 \leq t$ olur. Bu yüzden, $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde integrallenebilirdir. Özellikle,

$$g(x) = max\{|f(x)| - f^*(t), 0\}. sgnf(x)$$

fonksiyonu $L^1(R, \mu)$ de ise,

$$h(x) = min\{|f(x)|, f^*(t)\}. sgnf(x)$$

fonksiyonu en fazla $f^*(t)$ $L^\infty$-normu ile $L^\infty(R, \mu)$ uzayındadır. Bu yüzden,

$$\|g\|_{L^1} = \int_E |f| d\mu - \mu(E) f^*(t) \leq \int_0^{t_0} f^*(s)ds - t_0 f^*(t),$$

olur. Öyleyse,

$$\|g\|_{L^1} + \mathrm{t}\|h\|_{L^\infty} = \int_0^{t_0} f^*(s)ds + (t - t_0) f^*(t)$$

olur. Fakat, $f^*$ sabittir ve $t_0 \leq s \leq t$ olduğu zaman $f^*(t)$ ye eşittir. Dolayısıyla, son tahmin (3.69) ile çakışır. Bundan dolayı, $f = g + h$ olur ve ispat tamamlanır [2].

**Lemma 3.37.** ξ ve η, (0,∞) üzerinde negatif olmayan azalan fonksiyonlar olsunlar. O halde,

$$\int_{0}^{\infty} \xi\eta ds \leq \left(\int_{0}^{1} \eta ds\right).max\left\{\int_{0}^{\infty} \xi ds\,,\ \sup_{0<t<\infty} \xi(s)\right\}. \qquad (3.70)$$

**İspat.** $\xi$ negative olmayan ve azalan bir foksiyon olduğundan, maksimum değeri ifade etmek için ki bu değere A diyelim (3.66) daki ifadeyi kullanabiliriz.

$$A = \sup_{0<t<\infty} \frac{\int_0^t \xi(s)ds}{min(1,t)}.$$

O halde, her $t > 0$ için,

$$\int_{0}^{t} \xi(s)ds \leq A.min(1,t) \leq \int_{0}^{t} A_{\chi_{(0,1)}}(s)ds.$$

η de negatif olmayan ve azalan bir fonksiyon olduğundan, Hardy lemmasını uygulayarak,

$$\int_{0}^{\infty} \xi(s)\eta(s)ds \leq \left(\int_{0}^{\infty} A_{\chi_{(0,1)}}(s)\eta(s)ds\right) = A.\int_{0}^{1} \eta(s)ds$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

**Teorem 3.38.** $L^1 + L^\infty$ ve $L^1 \cap L^\infty$ uzayları rezonant ölçü uzayında yeniden düzenleme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı olsun ve normları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} = \int_{0}^{1} f^*(s)ds \qquad (3.71)$$

ve

$$\|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \sup_{t} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{min(1,t)}. \qquad (3.72)$$

Ayrıca, $L^1 + L^\infty$ ve $L^1 \cap L^\infty$ uzayları karşılıklı olarak ilişik uzaylardır, yani,

$$(L^1 + L^\infty)' = L^1 \cap L^\infty\ ; \quad (L^1 \cap L^\infty)' = L^1 + L^\infty\,. \qquad (3.73)$$

**İspat.** Sırasıyla, (3.71) ve (3.72) ifadelerinden gelen (3.67) ve (3.66) ifadeleri $\varphi(t) = min(1, t)$ olduğu yerde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\rho(f) = \|f\|_{L^1+L^\infty} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\varphi(t)\},$$

ve, $\psi(t) = max(1, t)$ olduğu zaman,

$$\vartheta(f) = \|f\|_{L^1+L^\infty} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\psi(t)\}, \tag{3.74}$$

şekilde yazılır. Bu yüzden, $L^1 + L^\infty$ ve $L^1 \cap L^\infty$ uzaylarının $L_\varphi$ ve $L_\psi$ Lorentz uzayı ve özellikle yeniden düzenlenme altında değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı oldukları açıktır.

(3.73) ü göstermek için $\rho' = v$, olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Hölder eşitsizliğinden;

$$\int fgd\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \leq \rho(f)v(g),$$

elde edilir. Böylelikle, ilişik normların tanımlanmasından $\rho' \leq v$ olur. Daha sonra, Hölder eşitsizliği $\rho$ ve $\rho'$ ne uygulanırsa,

$$\int_0^t g^*(s)ds \leq \rho\left(\chi_{(0,t)}\right) \rho'(g) = \min(1, t)\rho'(g)$$

elde edilir. Bu ifade ve (3.74) ten $v \leq \rho'$ olur ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 3.39.** $L^1 + L^\infty$ ve $L^1 \cap L^\infty$ temel fonksiyonları aşağıdaki gibidir [2]:

$$\varphi_{L^1+L^\infty}(t) = \min(1, t)\,; \qquad \varphi_{L^1\cap L^\infty}(t) = \max(1, t). \tag{3.75}$$

**Teorem 3.40.** $X$ rezonant bir ölçü uzayı üzerinde keyfi bir yeniden düzenlenme altında değişmez kalan bir Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde,

$$L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1 + L^\infty. \tag{3.76}$$

Ayrıca, X normu, (3.76) daki gömülmelerden her birinin normu 1 olacak şekilde kendisinin sabit bir katı ile değiştirilebilir.

**İspat.** Luxemburg temsil teoremi ve $L^1 + L^\infty$ ve $L^1 \cap L^\infty$normlarının (3.71) ve (3.72) teki ilgili temsillerinden, teoremi yalnızca $(\mathbf{R}^+, m)$ ölçü uzayı için ispatlamak yeterli olacaktır. Bu durumda, Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\int_0^1 f^*(s)ds \leq \left\|\chi_{(0,1)}\right\|_{X'} \|f\|_X = \varphi_{X'}(0,1)\|f\|_X \qquad (3.77)$$

elde ederiz. (3.71) den, bu $X \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesini oluşturur ve bu gömme haritasının en fazla $\varphi_{X'}(1)$ deki norm olduğunu gösterir. Aslında, $\chi_{(0,1)}$ olmak üzere (3.77) deki $f$ fonksiyonunu alarak ve teorem (3.24) den, gömme normunun $\varphi_{X'}(1)$ e eşit olduğunu görebiliriz. Benzer şekilde, $X$ ve $X'$ uzaylarının rollerini değiştirerek, $X \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömme normunun $\varphi_X(1)$ olduğunu bulabiliriz. Bu yüzden, teorem (3.37) ve $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow X$ den,

$$\|f\|_X \leq \varphi_X(1) \leq \|f\|_{L^1 \cap L^\infty}, \qquad (f \in L^1 \cap L^\infty). \qquad (3.78)$$

(3.77) ve (3.78) eşitsizlikleri (3.75) deki ifadeyi doğrular. Ayrıca, teorem (3.26) dan $\varphi_X(1)$ ve $\varphi_{X'}(1)$ karşılıklı olarak ilişiktir. Yani, eğer $\|.\|_X$, $\varphi_{X'}(1)\|.\|_X$ tarafından değiştirilirse, (3.76) daki her bir gömmenin normu 1 olacaktır.

Eğer $(R, \mu)$ sonluysa, o zaman $\|f\|_{L^1} \leq \mu(R)\|f\|_{L^\infty}$ olur. (3.72) den $L^1 \cap L^\infty$ ve $L^\infty$ uzayları çakışır, ve normları eşit olur. ( eğer $\mu(R) = 1$ $ise$). Dolayısıyla, $L^1 + L^\infty$ ve $L^1$ uzayları da çakışır ve normları eşit olur.

**Sonuç 3.41.** $X$, sonlu ölçü uzayı $(R, \mu)$ üzerinde değişmez kalan Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde,

$$L^\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1. \qquad (3.79)$$

Ayrıca, eğer $\mu(R) = 1$ ve $\|1\|_X = 1$ ise, o zaman (3.79) daki iki gömmenin normu da 1 olur.

**Sonuç 3.42.** Varsayalım ki $(R, \mu)$ , her biri pozitif $\alpha$ ölçüsüne sahip sayılabilir bir çok atomdan oluşan atomik bir uzay olsun. O halde,

$$l^1 \hookrightarrow X \hookrightarrow l^\infty \;. \qquad (3.80)$$

Ayrıca, $\alpha = 1$ ve bir atomun karakteristik fonksiyonunun $X$ uzayındaki normu 1' e eşit ise, (3.80) deki iki gömmenin normu da 1' e eşit olur [2].

# 4
# $L^1 + L^\infty$ UZAYLARINA KATI SİNGÜLER GÖMMELER

## 4.1 $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ Gömmesinin Ayrık Katı Singülerliği

Bu bölümde, yeniden düzenlenmiş-değişmez keyfi $E$ uzayı için $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesinin ayrık katı singülerliğini inceliyoruz.

Temel ifadeleri kanıtlamak için ilk önce bazı yardımcı lemma ve önermeleri vereceğiz.

**Önerme 4.1.** $E$ yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. O halde, $\lim_{t\to\infty} \frac{\phi_E(t)}{t} < \infty \Leftrightarrow L_1 \hookrightarrow E$ [11].

**İspat.** Kabul edelim ki $C = \lim_{t\to\infty} \frac{\phi_E(t)}{t} < \infty$ olsun. $\frac{\phi_E(t)}{t}$ , $(0,\infty)$ aralığında azalandır. Bu yüzden, her $t \in [0,\infty)$ için $\phi_E(t) \le Ct$ olur. $x$ adım fonksiyonu olsun. $n \in \mathbb{N}$ ve $x_k, t_k > 0$ için

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \chi_{(0,t_k)}(t).$$

Dolayısıyla,

$$\|x\|_E = \|x^*\|_E \le \sum_{k=1}^{n} x_k\, \phi_E(t_k) \le C \sum_{k=1}^{n} x_k t_k = C.\|x^*\|_{L^1} = C\|x\|_{L^1}.$$

Adım fonksiyonlarından her bir $x \in L^1$ için eşitsizlik elde ederiz. $L_1 \hookrightarrow E$ gömmesinin $\lim_{t\to 0} \frac{\phi_E(t)}{t} < \infty$ sağladığını kontrol etmek standarttır. Şimdi, $W^\infty$ yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzayını düşünelim. Bu uzayın $L^\infty$ daki kapanışı $L^1 \cap L^\infty$ dur ayrıca, $W^\infty = \overline{L^1 \cap L^\infty}^{L^\infty}$ dir. Bu uzay, en küçüktür ve ayrılabilir değildir. $W^\infty$ un $x \in L^\infty$ daki tüm fonksiyonlarla çakıştığı kolayca görülür öyle ki her $s > 0$ için $\lambda_x(s) < \infty$ dur.

**Önerme 4.2**. $E$ yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. O zaman, $E = L^{\infty}$veya $W^{\infty}$ denk normlara sahiptir $\Leftrightarrow$ $a, b > 0$ sabitleri vardır öyle ki herhangi bir $t > 0$ için $a \leq \phi_E(t) < b$ [11].

**İspat.** $\boldsymbol{x} \in E$ ise $E \hookrightarrow L^{\infty}$ dur, o halde

$$\|x\|_E \leq \lim_{s\to 0}\left\|x^*\chi_{(0,s)}\right\|_E \geq \lim_{s\to 0}x^*(s)\phi_E(s) \geq ax^*(0) = a\|x\|_{L^{\infty}}.$$

$x \in L^{\infty}$ verilsin, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x\chi_{[0,n]}$ olduğunu düşünelim. O zaman,

$$\|x_n\|_E = \left\|x^*(0)\chi_{[0,n]}\right\|_E = \|x\|_{L^{\infty}}\phi_E(n) \leq b\|x\|_{L^{\infty}}.$$

Bu yüzden, $\|x\|_{E''} = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E \leq b\|x\|_{L^{\infty}}$ ve $L^{\infty} \hookrightarrow E''$. Şimdi, eğer $E$ en büyükse, $E = L^{\infty}$ elde ederiz. Eğer $E$ en küçükse $W^{\infty} \hookrightarrow E$. Dolayısıyla, $x \in L^{\infty}$ ise bazı $s > 0$ için $\lambda_x(s_0) = \infty$ dır, o halde $x \notin E$ olur, bu yüzden $x\chi_{\{t\in[0,\infty):|x(t)|>s_0\}} \notin E$ dir. Bu yüzden, $E = W^{\infty}$.

$[0, \infty)$ aralığında Lorentz ve Orlicz uzaylarının sınıflarında gömmelerin katı ayrık singülerliği içim uygun kriterler [4,8] de verilmiştir.

**Lemma 4.3.** $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı $L^{\varphi} \hookrightarrow L^{\psi}$ ayrılabilir Orlicz uzayları olsunlar. O halde, $L^{\varphi} \hookrightarrow L^{\psi}$ gömmesi ayrık katı singülerdir $\Leftrightarrow$ her $C > 0$ için $1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ ve $i = 1, \dots,$ n için $a_i > 0$ vardır öyle ki her $t \geq 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,\psi(tx_i) \leq Ca_i\varphi(tx_i).$$

En uç uzaylardan biri $L^p$- uzayı olduğunda aşağıdaki kriterler sağlanır [11]:

**(i)** $L^p \hookrightarrow L^{\varphi}$ gömmesi ayrık katı singülerdir $\Leftrightarrow$

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{s>0}\frac{1}{loga}\int_1^a\frac{\varphi(st)}{s^p t^{p+1}}dt = 0.$$

**(ii)** $L^{\varphi} \hookrightarrow L^p$ gömmesi ayrık katı singülerdir $\Leftrightarrow$

$$\lim_{a\to\infty}\inf_{s>0}\frac{1}{loga}\int_0^1\frac{\varphi(st)}{s^p t^{p+1}}dt = \infty.$$

**Lemma 4.4.** $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ , $L^1 + L^{\infty}$ uzayında ayrık bir dizi olsun öyle ki bazı Orlicz uzayı için $L^{\Phi}[0,1](\neq L^1[0,1])$

$$\sup_k \left\| x_k^* \chi_{[0,1]} \right\|_{L^{\Phi}[0,1]} < \infty \tag{4.1}$$

olur ve $y(t) = \lim_{k\to\infty} x_k^*(t)\ h.h.h.$ vardır. Eğer, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ dizisi y' yi içeren denk ölçülebilir ayrık fonksiyonların bir dizisi ise, o zaman her $n \in \mathbb{N}$ ve keyfi skaler $(a_k)_{k=1}^{n}$ için,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k y_k \right\|_{L^1+L^{\infty}} = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{k+m} \right\|_{L^1+L^{\infty}}$$

olur [11].

**İspat.** De la Vallée-Poussin [21, teorem VI.3.7] teoremini kullanarak, $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ dizisi kesinlikle sürekli integrallere sahiptir. Öyleyse, Vitali teoreminden [21, teorem VI.3.2],

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 x_k^*(t)dt = \int_0^1 y(t)dt$$

elde ederiz. Bu yüzden,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\|_{L^1+L^{\infty}} = \|y\|_{L^1+L^{\infty}} . \tag{4.2}$$

Verilen pozitif sayılar $a_i$ ve $m \in \mathbb{N}$ için,

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(t-i+1)\chi_{(i-1,i]}(t)$$

ve

$$z_j(t) = a_{j-m} x_j^*(t-j+m+1)\chi_{(j-m-1,j-m]}(t) \qquad (j \in \mathbb{N}, j > m)$$

fonksiyonlarını düşünelim. Her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{k+m} \right\|_{L^1+L^{\infty}} = \left\| \sum_{j=m+1}^{m+n} z_j \right\|_{L^1+L^{\infty}}$$

ve

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k y_k \right\|_{L^1+L^{\infty}} = \|z\|_{L^1+L^{\infty}} .$$

(4.2) yi $\left(\sum_{j=m+1}^{m+n} z_j\right)_{m=1}^{\infty}$ dizisine uygulayabiliriz. Böylece,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=m+1}^{m+n} z_j\,(t) = z(t)\; h.h.y.,$$

Öyleyse,

$$\lim_{m\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{k+m}\right\|_{L^1+L^\infty} = \lim_{m\to\infty} \left\|\sum_{j=m+1}^{m+n} z_j\right\|_{L^1+L^\infty} = \|z\|_{L^1+L^\infty} = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right\|_{L^1+L^\infty}.$$

**Önerme 4.5.** $E$, $L^1$ uzayını içermeyen yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. Eğer, $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesi ayrık katı singüler değilse, o halde $y \in E''$ fonksiyonu vardır öyle ki $E''$ uzayının normları ve $L^1 + L^\infty$, $y \in E''$ deki ayrık fonksiyonların herhangi bir dizisinin germesine eşittir [11].

**İspat.** $\lim_{t\to 0} \frac{\Phi_E(t)}{t} = \infty$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $L^\Phi[0,1]$ Orlicz uzayı vardır öyle ki;

$$E[0,1] \hookrightarrow L^\Phi[0,1]. \tag{4.3}$$

Aslında, ilişik Marcinkiewicz uzayı aynı temel fonksiyona sahiptir [22, teorem II.5.7] ve $\left(\frac{t}{\Phi_E(t)}\right)'$ fonksiyonu [0,1] aralığında integrallenebilirdir, bu yüzden $L^\Phi[0,1]$ Orlicz uzayı vardır öyle ki $\left(\frac{t}{\Phi_E(t)}\right)' \in L^\Phi[0,1]$ dir. Böylece, $E[0,1] \hookrightarrow M\left(\frac{t}{\Phi_E(t)}\right) \hookrightarrow L^\Phi[0,1]$ olur.

$C > 0$ ve $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in E$ olsun öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ ve $a_k \in \mathbb{R}$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|_E \le C \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|_{L^1+L^\infty}, \quad (1 \le k \le n) \tag{4.4}$$

Dolayısıyla, $E \hookrightarrow E'' \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ ve $E \hookrightarrow E''$ gömmesi izometriktir, yukarıdaki eşitsizlik $E''$ için doğrudur. Şimdi, $t > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n^*(t) \le \frac{1}{\Phi_E(t)}$, diagonal işlemi ve Helly teoremini kullanarak $(i_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ dizisini seçebiliriz öyle ki $\lim_{k\to\infty} x_{i_k}^*(t)$ vardır [23, teorem 3.2].

$y(t)$ tarafından bu limit fonksiyonunu belirleyelim. $E''$ Fatou özelliğine sahiptir. $y \in E''$ ve $\|y\|_{E''} \le 1$ dir.

(4.4) ten

$$\int_0^1 x_k^*(t)dt = \|x_k\|_{L^1+L^\infty} \geq \frac{1}{C}.$$

Bu yüzden, (4.3) ü kullanarak ve De la Vallée-Poussin teoreminden;

$$\int_0^1 y^*(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 x_{i_k}^*(t)dt \geq \frac{1}{C} > 0.$$

Sonuç olarak, $y \neq 0$ dır. Lemma (4.1.1) den,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right\|_{L^1+L^\infty} = \lim_{m\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k+m}\right\|_{L^1+L^\infty}.$$

$E''$ nin Fatou özelliğinden,

$$\liminf_{m\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k+m}\right\|_{E''} \geq \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right\|_{E''}.$$

Şimdi, eşitsizlikte limite geçerek

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k+m}\right\|_{E''} \leq C \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k+m}\right\|_{L^1+L^\infty},$$

her $n \in \mathbb{N}$ ve keyfi skaler $a_k$ için,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right\|_{E''} \leq C \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right\|_{L^1+L^\infty}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

olur.

$\varphi$, 0 da sürekli olan ve $\varphi(0) = 0$ konkav bir fonksiyon olsun. $m \in \mathbb{N}$ için $C_\varphi^m$ tarafından belirlenen kapalı konveks kümeyi

$$\left\{\frac{\varphi(st)}{\varphi(s)} : 0 < s \leq 1\right\},$$

$C[0, m]$ sürekli fonksiyonların alındığı yerlerde ifade edebiliriz.

Şimdi, $C_\varphi$ kümelerini [24] kullanarak $1 < p < \infty$ için $t^{-\frac{1}{p}}$ fonksiyonlarının $E$ deki yerelliğini gösteren önemli bir önermeyi ve ispatını vereceğiz.

**Önerme 4.6.** $\varphi$ , $\varphi(0) = 0$ olan ve,

$$\lim_{t\to 0}\inf \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} > 1 \tag{4.5}$$

koşulunu sağlayan konkav bir artan fonksiyon olsun. O halde, $0 < \alpha \leq 1$ dir öyle ki her $m \in \mathbb{N}$ için $t^\alpha \in C_\varphi^m$ dir [11].

**İspat.** Lindenstrauss ve Tzafriri [25 teorem 4.a.9, 3] tarafından verilen konveks Orlicz fonksiyonları için verilenlere benzerdir. $s \in (0,1]$ için $\varphi_s(t) = \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)}$ çok değişkenli fonksiyonunu tanımlayalım. $\varphi_s$ konkav ve $\varphi_s(1) = 1$ olduğundan, her $t \in [0, m]$ için $0 \leq \varphi_s(t) \leq m$ dir. (4.5) varsayımı [22, syf.53, sonuç 1] tarafından sağlanır, yani, her $t \in [0,1]$, $0 < \lambda \leq 1$ ve $C_1 > 0$ için,

$$\sup_{0<s\leq 1} \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)} \leq C_1 t^\lambda. \tag{4.6}$$

Eğer, $0 \leq t_1 < t_2 < m$ ve $t_2 \leq t_1 + \delta$ ise, o halde,

$$0 \leq \varphi_s(t_2) - \varphi_s(t_1) = \frac{\varphi(st_2) - \varphi(st_1)}{\varphi_s} \leq \frac{\varphi(s\delta)}{\varphi(s)} \leq C_1 t^\lambda.$$

Bu yüzden, $\{\varphi_s(t): 0 < s \leq 1\}$ düzgün sınırlı ve eş süreklidir. Dolayısıyla, $C_\varphi^m$, $C[0, m]$ de kompakttır. Şimdi, $0 < s \leq 1$ için,

$$T_s\gamma(t) = \frac{\gamma(st)}{\gamma(s)}$$

tarafından tanımlanan $C_\varphi^m$ dönüşümlerinin bir ailesini düşünelim. Açık olarak, her $s \in (0,1]$ için $T_s$ sürekli bir dönüşümdür ve Schauder sabit nokta teoreminden [26, teorem V.10.5], $T_s$ bir sabit noktaya sahiptir ve bu $\gamma_s$ tarafından belirlenir.

Öyleyse, her $0 \leq t \leq m$ ve $0 < s < 1$ için $\gamma_s \in C_\varphi^m$ dir. $q_s = \frac{log\,\gamma_s(s)}{\log s} \leq 1$ tanımlayalım. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < s < 1$ için $\gamma_s(s^n) = s^{nq_s}$ olur. Bu yüzden,

$\gamma_s(1) = 1$ dir ve $s^{-n} \leq m$ için $\gamma_s(s^{-n}) = s^{-nq_s}$ olur. Dolayısıyla, her $s \in (0,1)$ ve $n \geq \frac{\log m}{\log s}$ için,

$$\gamma_s(s^n) = s^{nq_s}. \tag{4.7}$$

doğrudur. Eğer, $0 < t \le \frac{m}{2}$ ve $\frac{1}{2} < s < 1$ ise, $n \in \mathbb{N}$ alabiliriz öyle ki $s^n < t < s^{n-1}$ dir. (4.7) yi kullanarak,

$$|\gamma_s(t) - t^{q_s}| \le |\gamma_s(t) - \gamma_s(s^n)| + |s^{nq_s} - t^{q_s}| \le \gamma_s(1-s) + (1-s)^{q_s}$$

elde ederiz. Şimdi, (4.6) dan her $t \in [0,1]$ için $\gamma_s(t) \le C_1 t^\lambda$ dır. $\beta = \inf_{0<s<1} q_s > 0$ alırsak her $t \in \left[0, \frac{m}{2}\right]$ ve $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ için,

$$|\gamma_s(t) - t^{q_s}| \le C_1(1-s)^\lambda + (1-s)^\beta$$

elde ederiz. $C_\varphi^m$ nin kompaktlığını kullanırsak, $\left[0, \frac{m}{2}\right]$ üzerinde çakışan $\alpha \in (0,1]$ için $t^\alpha$ fonksiyonu mevcuttur. $C_\varphi^m$ nün herhangi bir fonksiyonunun $\left[0, \frac{m}{2}\right]$ ye kısıtlanmasından dolayı, aynı zamanda $t^\alpha \in C_\varphi^{\frac{m}{2}}$ dir. Sonuç olarak, her $m > 1$ için ve $\alpha \in (0,1]$ için $t^\alpha \in C_\varphi^m$ dür. $A_m = \{\alpha \in (0,1]: t^\alpha \in C_\varphi^m\}$ alalım. Açık olarak, her $m \in \mathbb{N}$ ve $A_m \supset A_{m+1}$ için $A_m$, $(0,1]$ in boştan farklı kapalı bir alt kümesidir. O halde, sonlu kesişim özelliğinden, $\bigcap_{m=1}^\infty A_m$ boştan farklıdır. Bu yüzden, $0 < \alpha \le 1$ vardır öyle ki $\alpha \in \bigcap_{m=1}^\infty A_m$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $t^\alpha \in C_\varphi^m$ dür.

Şimdi, ana teoremlerden birini ispatlayabiliriz. Bunun için, $W^p, 1 \le p \le \infty$ uzayını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$W^P = \begin{cases} L_0^{P,\infty}, & 1 < p \le \infty \\ L^1, & p = 1 \\ \overline{L^1 \cap L^\infty}^{L^\infty}, & p = \infty \end{cases}$$

**Teorem 4.7.** $E$, yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ ayrık katı singüler değildir ancak ve ancak $1 \le p \le \infty$ vardır öyle ki $E$, $W^p$ uzayını içerir [11].

**İspat.** İlk önce yeterlilik kısmını gösterelim. Eğer, $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = k(k+1)\chi_{\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)}$ ve $y_k = \chi_{(k,k+1)}$ ise, o halde

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty a_k x_k\right\|_{L^1} = \left\|\sum_{k=1}^\infty a_k x_k\right\|_{L^1+L^\infty} = \sum_{k=1}^\infty |a_k|$$

ve

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right\|_{L^\infty} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right\|_{L^1+L^\infty} = \sup_k |a_k|$$

Bu, $L^1 \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ ve $W^\infty \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmelerinin ayrık katı singüler olmadığını gösterir. $1 < p < \infty$ için $L_0^{P,\infty}$ gömmesinin ayrık katı singüler olmadığını gösterelim [8]. $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in L_0^{P,\infty}$ ayrık dizisini düşünelim öyle ki,

$$x_n^*(t) = \begin{cases} n & , \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n^p} \\ t^{-\frac{1}{p}} & , \quad 0 < t < 1 \\ 0 & , \quad t \geq 1 \end{cases} .$$

Bu yüzden, $\frac{1}{n^p} \leq \mathrm{s} \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\|_{p,\infty} \leq 1$ ve $\int_0^s x_n^*(t)dt \geq s^{1-\frac{1}{p}}$ dir. O halde,

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_{L^1+L^\infty} = \sup_{\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = 1} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_0^{\infty} x_n^*(t)dt$$

elde ederiz. Eğer $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{2}$ ise, öyleyse

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_{L^1+L^\infty} \geq \sup_{\sum_{n=n_0}^{\infty} \tau_n = 1} \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| {\tau_n}^{1-\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ve, daha yüksek bir p-tahmini sağlayan $L_0^{P,\infty}$ kullanarak [27], bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|_{l_p} \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_{L^1+L^\infty} \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_{L_0^{P,\infty}} \leq C.\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|_{l_p}$$

elde ederiz.

Şimdi, gereklilik kısmını kanıtlayalım. Varsayalım ki $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ ayrık kesin singüler olmasın. Öyleyse, $y \in E''$ ve bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki, $y_k$ ve $y$ nin denk ölçülebilir ve $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ nin ayrık olarak desteklenebildiği yerde her $n \in \mathbb{N}$ ve keyfi $(a_k)_{k=1}^{n}$ skalerleri için,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right\|_{E''} \leq C.\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right\|_{L^1+L^\infty} \tag{4.7}$$

Konkav artan $\varphi$ fonksiyonu tarafından,

$$\varphi(t) = \int_0^\infty y^*(s)ds\,.$$

(4.7) den,

$$\|\sigma_n y\|_{E''} \le C.\|\sigma_n y\|_{L^1+L^\infty} = C.\int_0^1 y^*\left(\frac{t}{n}\right)dt = Cn\int_0^{\frac{1}{n}} y^*(t)\,dt = Cn\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

Eğer, $z_n = \left(n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}\sigma_n y$ alırsak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|z_n\|_{E''} \le C \tag{4.8}$$

elde ederiz. Şimdi, konkav artan fonksiyonların bir dizisini düşünelim;

$$\gamma_n(t) = \int_0^1 {z_n}^*(s)\,ds.$$

O halde,

$$\gamma_n(t) = \frac{\varphi(t/n)}{\varphi(1/n)}.$$

Verilen $0 < \lambda \le 1$ için, $n \in \mathbb{N}$ dir öyle ki $\frac{1}{n+1} < \lambda \le \frac{1}{n}$ dir. Öyleyse,

$$\frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(\lambda)} \le \frac{\varphi\left(\frac{t}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)} \le 2.\frac{\varphi\left(\frac{t}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{4.9}$$

Şimdi iki farklı durum düşünelim:

**(i)** İlk olarak, $\liminf\limits_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} > 1$ varsayalım. $0 < \alpha \le 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $t^\alpha \in C_\varphi^m$ dir.

Şimdi, (4.9) u kullanarak her $m \in \mathbb{N}$ için $\{\varphi(t/n)/\varphi(1/n): n \in \mathbb{N}\}$ konveks kabuğunda $\omega_m$ fonksiyonu vardır öyle ki her $t \in (\frac{1}{m}, m]$ için

$$t^\alpha \le 3\omega_m(t).$$

Dolayısıyla, her $t \in (\frac{1}{m}, m]$ için

$$\int_0^t s^{\alpha-1} ds \leq \frac{3}{\alpha} \int_0^t \omega'_m(s) ds$$

ve her $t \geq 0$ için

$$\int_0^t s^{\alpha-1} \chi_{\left(\frac{1}{m}, m\right)}(s) ds \leq \frac{3}{\alpha} \int_0^t \omega'_m(s) ds \ . \tag{4.10}$$

Bu yüzden, (4.8) den her $m \in \mathbb{N}$ için $\|\omega'_m\|_{E''} \leq \sup_n \|z_n\|_{E''} \leq C$ elde ederiz. (4.10) dan ve Hardy-Littlewood-Polya ilişkisinden [25, önerme 2.a.8] her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| s^{\alpha-1} \chi_{\left(\frac{1}{m}, m\right)} \right\|_{E''} \leq \frac{3}{\alpha} \|\omega'_m\|_{E''} \leq \frac{3C}{\alpha}$$

elde ederiz. $E''$ Fatou özelliğini sağladığından, $\|s^{\alpha-1}\|_{E''} \leq \frac{3C}{\alpha}$ olan $s^{\alpha-1} \in E''$ elde ederiz. $0 < \alpha < 1$ olduğunu düşünelim. Eğer her $t > 0$ için $x \in L^{\frac{1}{1-\alpha}, \infty}$ ise,

$$\int_0^t x^*(s) ds \leq t^\alpha \|x\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}, \infty}} = \alpha \|x\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}, \infty}} \int_0^t s^{\alpha-1} ds$$

olur ve tekrar Hardy-Littlewood-Polya ilişkisini kullanarak,

$$\|x\|_{E''} \leq \alpha \|s^{\alpha-1}\|_{E''} \|x\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}, \infty}}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $E'' \supset L^{\frac{1}{1-\alpha}, \infty}$ ve $E \supset L^{\frac{1}{1-\alpha}, \infty} = W^{\frac{1}{1-\alpha}}$ dır. Eğer, $\alpha = 1$ ise, o zaman $\sup_m \left\| \chi_{(1/m, m)} \right\|_{E''} \leq \frac{3C}{\alpha}$ olur. $E''$ nün Fatou özelliğini kullanarak, $\chi_{(0,\infty)} \in E''$ ve $L^\infty \subset E''$ sağlanır. O halde, $W^\infty \subset E''$ olur.

**(ii)** $\liminf_{t \to 0} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} = 1$ olduğunu düşünelim. [22, Lemma II.1.3]) ü kullanarak, her $s \geq 1$ için $\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} = 1$ elde ederiz.

Bu da her $t > 0$ için

$$\sup_{n} \int_{0}^{t} z_n(s)ds = 1$$

sağlar. (4.8) i dikkate alarak, her $t > 0$ için

$$1 = \sup_{n} \int_{0}^{t} z_n(s)ds \leq \|z_n\|_{E''} \left\|\chi_{(0,t)}\right\|_{E''} \leq C\phi_{E'}(t)$$

elde ederiz. Bu yüzden genel olarak $\phi_{E'}(t) = \frac{t}{\phi_E(t)}$ dir, her $t \geq 0$ için $\phi_E(t) \leq Ct$

ve son olarak $E \supset L^1$ dir.

Teorem 4.7. aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

**Teorem 4.8.** $E$, yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ ayrık katı singülerdir ancak ve ancak

**(i)** $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\phi_E(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \phi_E(t) = \infty$

**(ii)** Her $1 < p < \infty$ için $\sup\limits_{n} \left\|t^{-\frac{1}{p}}\chi_{\left(\frac{1}{n},n\right)}\right\|_E = \infty$ [11].

**İspat.** Kabul edelim ki $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesi ayrık katı singüler değildir. Öyleyse, teorem 4.7 den $1 \leq p \leq \infty$ için $W^p \subset E$ elde ederiz. Eğer p=1 ise, o halde $\lim\limits_{t\to 0} \phi_E(t) < \infty$ olur. Eğer, $p = \infty$ ise, o zaman $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_E(t) < \infty$ olur. Son olarak, $1 < p < \infty$ ise, her $x \in L_0^{p,\infty}$ için $C > 0$ sabiti vardır öyle ki $\|x\|_E \leq C. \|x\|_{p,\infty}$ dur. Bu yüzden, her $n \in \mathbb{N}$ için $t^{-\frac{1}{p}}\chi_{\left(\frac{1}{n},n\right)} \in L_0^{p,\infty}$ ve $\left\|t^{-\frac{1}{p}}\chi_{\left(\frac{1}{n},n\right)}\right\|_E \leq 1$ olur ve burdan $\sup\limits_{n} \left\|t^{-\frac{1}{p}}\chi_{\left(\frac{1}{n},n\right)}\right\|_E \leq C$ çelişkisi elde edilir.

**Uyarı.** Çok değişkenli temel fonksiyonlara sahip $E$ yeniden düzenlenmiş-değişmez uzayının özel bir sınıfı için teorem (4.7) nin güçlü bir formülasyonu verilebilir : Eğer $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesi ayrık katı singüler değilse, o zaman $1 \leq p \leq \infty$ için $E = W^p$ veya $1 < p < \infty$ için $E = L^{p,\infty}$ dur [8, teorem 4.5]

**Sonuç 4.9.** $E, L^{\infty}$ veya $W^{\infty}$dan farklı yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. O halde, $E \hookrightarrow L^1 + L^{\infty}$ ayrık katı singülerdir $\Leftrightarrow E_0 \hookrightarrow L^1 + L^{\infty}$ gömmesi ayrık katı singülerdir [11].

**Sonuç 4.10.** $E \hookrightarrow L^1 + L^{\infty}$ ayrık katı singüler değilse o zaman $c_0$ ve bazı $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p$ nin doğal bazının $E$ ve $L^1 + L^{\infty}$ da eşdeğer olduğu $E$ de ayrık bir $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır.

Şimdi, $p > 1$ ve $E$ nin en büyük (maksimal) olması için güçlendirilecektir. Bu durumda, bazı $t^{-\frac{1}{p}}\chi_{(0,\epsilon)}$ fonksiyonuna sahip denk ölçülebilir ayrık bir $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır ve

Herhangi bir $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right\|_E \sim \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right\|_{L^1+L^{\infty}} \sim \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right\|_{\ell_p}.$$

Bu ifade, teorem (4.7) nin ispatından gelir [11].

Yukarıdaki ifadede bazı $\epsilon > 0$ için her $y_k$ ve $t^{-\frac{1}{p}}\chi_{(0,\epsilon)}$ denk ölçülebilir olduğu $t^{-\frac{1}{p}}$ fonksiyonunun karakteristik özelliğidir.

## 4.2 $E \hookrightarrow L^1 + L^{\infty}$ Gömmesinin Katı Singülerliği

Sınırlı olmayan bir durumda katı singülerliğin analizi [0,1] deki durumdan (veya ayrık durum) daha kapsamlıdır. Bu durum, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzayların alt latislerinin (sublattice) zenginliğinden kaynaklanmaktadır. ($L^p + L^q$ , $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ) uzaylarının büyük karmaşık alt latisi düşünülebilir.

Bu bölümde, $[0, \infty)$ üzerinde yeniden düzenlenmiş-değişmez $E$ uzayı için $E \hookrightarrow L^1 + L^{\infty}$ gömmesinin katı singülerliğini karakterize ediyoruz.

İlk olarak, ayrılabilir Orlicz uzayları için Nielsen [28] tarafından verilen tanımı kullanacağız.

**Tanım 4.11.** $E$, $[0, \infty)$ üzerinde bir Köthe fonksiyon uzayı olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $f \in X$ varsa $E$ nin kapalı bir alt kümesi olan $X$ aşağıdaki koşulu sağlar öyle ki

$$\left\|f\chi_{[0,m]}\right\| \leq \epsilon\|f\|.$$

Bu tanım ve sınır sürekliliği $[0,\infty)$ üzerinde Kadec-Pelczynski ayrıştırma metodu olarak da bilinen önerme (4.12) yi vermemize olanak sağlar.

**Önerme 4.12.** $E$, $[0,\infty)$ üzerinde bir Köthe fonksiyon uzayı olsun. Eğer $E$ nin kapalı bir alt kümesi olan $X$ sınırda sürekli normuyla birlikte tanım (4.10.) u sağlarsa o zaman, $X$ te normalize edilmiş $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $E$ nin ayrık yarı-normalize $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisiyle eşdeğerdir [11].

Şimdi, $e^{x^2}-1$ üstel fonksiyonu tarafından üretilen Orlicz uzayının sınırda sürekli olan alt uzayı $L_0^{exp\,x^2}[0,1]$ ile belirteceğiz [28, önerme 1.3] ve [29] da verilen sonucu kullanacağız:

**Önerme 4.13.** $E[0,1]$ yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay. $E \hookrightarrow L^1+L^\infty$ gömmesi katı singüler değildir ancak ve ancak $L_0^{exp\,x^2}[0,1] \subset E[0,1]$ ise.

Aşağıda vereceğimiz ana teorem ayrık katı singülerlik açısından katı singülerliği karakterize eder [11].

**Teorem 4.14.** $E$ yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. $E \hookrightarrow L^1+L^\infty$ katı singülerdir $\Leftrightarrow E \hookrightarrow L^1+L^\infty$ gömmesi ayrık katı singülerdir ve $E[0,1]$ , $L_0^{exp\,x^2}[0,1]$ içermez [11].

**İspat.** $E \hookrightarrow L^1+L^\infty$ gömmesi katı singülerse o zaman aynı zamanda ayrık katı singülerdir. $E[0,1] \hookrightarrow L^1[0,1]$ , $E \hookrightarrow L^1+L^\infty$ boyunca faktorize edilmiştir, dolayısıyla $E[0,1] \hookrightarrow L^1[0,1]$ gömmesinin aynı zamanda katı singüler olduğunu elde ederiz. Bu yüzden, önerme 4.6 dan $E[0,1]$ , $L_0^{exp\,x^2}[0,1]$ içermez [30,5].

Şimdi, $E \hookrightarrow L^1+L^\infty$ gömmesinin ayrık katı singüler olduğunu varsayalım. O zaman, teorem 4.8 ve [8, sonuç 3.6] dan refleksiv yeniden düzenlenmiş-değişmez $F$ uzayı vardır öyle ki $E \hookrightarrow F \hookrightarrow L^1+L^\infty$ dur. Bu yüzden, $F$ sınırda sürekli ve $E \hookrightarrow (L^1+L^\infty)_0$ gömmesi aynı zamanda katı ayrık singülerdir. Kabul edelim ki $E \hookrightarrow (L^1+L^\infty)_0$ gömmesi katı singüler değildir, ve $\|.\|_E$ ve $\|.\|_{L^1+L^\infty}$ normlarının denk olduğu yerde $E$ nin bir alt uzayı $Y$ vardır. Eğer $Y$ tanımı sağlarsa o zaman $\|.\|_E$, $Y$ de sınırda süreklidir ve önerme 4.12. den $E$ nin ayrık yarı-normalize $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisiyle eşdeğer olan $Y$ de normalize edilmiş $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ayrık dizisi için $h_n = g_n \chi A_n$ vardır öyle ki $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - h_n\|_E = 0$ dır.

Bu yüzden, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri aynı zamanda $(L^1+L^{\infty})_0$ eş değerdir ve $\|.\|_E$ ve $\|.\|_{L^1+L^{\infty}}$ normları $Y$ de $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tarafından üretilen alt uzayda eş değerdir, öyleyse $E \hookrightarrow L^1+L^{\infty}$ ayrık katı singüler olmadığı bir çelişkidir.

Varsayalım ki $Y$ alt uzayı tanım 4.11. i sağlamasın. O zaman $\epsilon > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\frac{1}{\epsilon}\|f\|_E \geq \|f\|_{L^1+L^{\infty}} \geq \delta^2\|f\|_E \ ,$$

Bu yüzden $\|.\|_E$ ve $\|.\|_{L^1+L^{\infty}}$ normları $Y[0,m]$ de eşdeğerdir ve $E[0,m] \hookrightarrow L^1[0,m]$ doğal gömmesi katı singüler değildir. Önerme 4.12. den $L_0^{exp\, x^2}[0,1] \subset E[0,1]$ dir ve bu bir çelişkidir.

Son olarak, [25, önerme 1.c.8] ve $Y$ de $\|.\|_E$ normunun sürekli olduğu gerçeği kullanılarak, eğer $Y[0,m]$, bazı $A_\delta$-kümelerine dahil değilse, $Y[0,m]$ de normalize edilmiş $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $E[0,m]$ de ayrık yarı-normalize $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri inşa edebiliriz öyle ki $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-h_n\|_E=0$ olur. Bu yüzden, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(L^1+L^{\infty})_0[0,m]$ de eş değerdir ve aynı zamanda $\|.\|_E$ ve $\|.\|_{L^1+L^{\infty}}$ da $Y[0,m]$ de eşdeğerdir. Dolayısıyla, $E[0,m] \hookrightarrow L^1[0,m]$ gömmesi ayrık singüler değildir, ve bu bir çelişkidir.

**Önerme 4.15.** $E$ yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. $E \hookrightarrow L^1+L^{\infty}$ katı singülerdir ancak ve ancak

**(i)** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\phi_E(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty}\phi_E(t) = \infty$

**(ii)** $1 < p < \infty$ için $\sup\limits_n \left\| t^{-\frac{1}{p}}\chi_{\left(\frac{1}{n},n\right)}\right\|_E = \infty$

**(iii)** $E[0,1]$ , $L_0^{exp\, x^2}[0,1]$ içermez [11].

**Önerme 4.16.** $E$ yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. $E \hookrightarrow L^1+L^{\infty}$ gömmesi zayıf kompakttır ancak ve ancak

$$\lim_{t\to\infty}\phi_E(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\phi_E(t)}{t} = \infty \, .$$

**İspat.** Eğer $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_E(t) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\phi_E(t)}{t} = \infty$ ise, o zaman yeniden düzenlenmiş-değişmez refleksiv $F$ uzayı mevcuttur [8] öyle ki $F \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1+L^{\infty}$dir. Bu yüzden, $E \hookrightarrow L^1+L^{\infty}$ zayıf kompakttır. Tersine, eğer $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\phi_E(t)}{t} < \infty$ ise, o zaman $L^1 \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1+L^{\infty}$ olur.

Bu yüzden, $L^1 \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ zayıf kompakt değildir ve bunu $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ elde ederiz. Dolayısıyla, $W^\infty \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesinin zayıf kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Aslında, $\left(\chi_{(k,k+1)}\right)_{n=1}^{\infty} \in W^\infty$ dizisini düşünelim [31] ve $L^1 + L^\infty$ [32] a izometrik olsun. $W^\infty$ birim topundaki $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{(k,k+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $L^1 + L^\infty$ da zayıf yakınsak bir alt dizisi yoktur, ve bu yüzden, $(\sum_{k=1}^{n} e_k)_{n=1}^{\infty}$dizisi $c_0$ da zayıf yakınsak alt diziye sahip değildir [33,34].

Son olarak, aşağıda verdiğimiz sonucun $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesinin katı yarı singülerliğe olduğu kadar yaklaşım uzaylarına da bazı uygulamaları vardır.

**Sonuç 4.17.** $E,\ [0,\infty]$ üzerinde yeniden düzenlenmiş-değişmez uzay olsun. Eğer $\lim_{t\to\infty} \phi_E(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_E(t)}{t} = \infty$ ise, o zaman $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ gömmesi katı yarı-singülerdir [11].

# 5
# SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, yeniden düzenlenmiş-değişmez uzayların teorisi verilmiş olup, doğal gömmenin katı singülerliği için gerekli ve yeterli koşullar Orlicz , Lorentz ve Marckiewicz uzayları için ifade edilmiştir. Ayrıca, bu kavramın ayrık katı singülerlikle olan ilişkisi incelenmiştir. Bu uzaylarda elde edilmiş sonuçların ve pozitif operatörlerin bir sınıfı olan ayrık katı singüler ve katı singüler operatörlerin, matematiksel biyolojideki model analizi veya taşınım denklemi gibi birçok alanda çeşitli uygulamaları vardır. Bu kavramların yaklaşım teorisinde ve matematiksel disiplinler içinde kısmi diferansiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi farklı alanlardaki uygulamaları araştırılıp yeni ve orijinal çalışmalar yapılabilir.

# KAYNAKÇA


[1] L. Pick, A. Kufner, J. Oldrich, and S. Fuck, "Function Spaces", *Walter de Gruyter publishing*, Germany, 2012.

[2] C. Bennett, ve R. Sharpley, "Interpolation of operators", *Academic*, New York, 1988.

[3] N.J. Kalton, "Orlicz sequence spaces without local convexity", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*. no. 81, ss. 253–277, 1977.

[4] G. del Amo, A. Hernández, ve F.L. C. Ruiz, "Disjointly strictly singular operators and interpolation", *Proc. R. Soc. Edinburgh*, no: 126, ss. 1011–1026, 1996.

[5] S.Ya. Novikov, "Singularities of the embedding operator for symmetric function spaces on [0, 1] ", *Math. Notes*, no. 62, ss. 549–563, 1997.

[6] S.V. Astashkin, "Disjoint strict singularity of embeddings of symmetric spaces", *Math. Notes*, no. 65, ss. 3–12, 1999.

[7] F.L. Hernández, V.M. Sánchez, ve E.M. Semenov, "Strictly singular and strictly co-singular inclusions between symmetric sequence spaces", J. *Math. Anal. Appl*., no.291, ss. 459–476, 2004.

[8] F.L. Hernández, V.M. Sánchez, ve E.M. Semenov, "Disjoint strict singularity of inclusions between rearrangement invariant spaces", *Studia Math*, no. 144, ss. 209–226, 2001.

[9] F. Cobos, A. Manzano, A. Martinez, ve P. Matos, "On interpolation of strictly singular operators, strictly cosingular operators and related operator ideals", *Proc. R. Soc. Edinburgh*, no. 130, ss. 971–989, 2000.

[10] A. Kaminska, ve M. Mastyło, "The Dunford-Pettis property for symmetric spaces", *Can. J. Math*, no. 52, ss. 789–803, 2000.

[11] F.L. Hernández, V.M. Sánchez, ve E.M. Semenov, "Strictly singular inclusions into $L^1 + L^\infty$", *Mathematische Zeitschrift*, no. 258, ss. 87-106, 2008.

[12] S.V. Astashkin, ve E.M. Semenov, "Strict Embeddings of Rearrangement Invariant Spaces" , *Doklady Mathematics*, cilt 98, no. 2, ss. 327-329, 2018.

[13] E. Kreyszing, "Introductory Functional Analysis with Applications", *Wiley*, New York, 1978.

[14] M. Alp, ve B. Musayev, "Fonksiyonel Analiz", *Balcı Yayınları*, Kütahya, 2000.

[15] P. T. Pérez, "Factorization and domination properties of operators on Banach lattices", *PhD Thesis*, Complutense University, Madrid, 2010.

[16] S.K. Berberian, “Fundamentals of Real Analysis”, *Springer*, Newyork, 1998.

[17] H. L. Royden, “Real Analysis”, *MacMillan*, New York, 1968.

[18] W. Rudin, “Real and Complex Analysis”, *McGraw-Hill*, Newyork, 1986.

[19] B.Z.A. Rubshtein, G. Ya. Grabarnik, M. A. Muratov, ve Y. S. Pashkova, “Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces” , *Springer*, Switzerland, 2016.

[20] R. E. Castillo, ve H. Rafeiro, “An Introductory Course in Lebesgue Spaces”, *Springer*, Canada, 2016.

[21] I.P. Natanson, “Theory of functions of a real variable ”, *Ungar Pub*., Ohio, 1961.

[22] S.G. Krein, Ju.I. Petunin, ve E.M. Semenov, “Interpolation of linear operators”, *A.M.S*., 1982.

[23] E.M. Semenov, ve F.A. Sukochev, “Banach-Saks index”, *Sbornik Math*., no. 195, ss. 263–285, 2004.

[24] J. Lindenstrauss, ve L. Tzafriri, “Classical Banach spaces I. Sequence spaces”, *Springer*, Heidelberg, 1977.

[25] J. Lindenstrauss, ve L. Tzafriri, “Classical Banach spaces II. Function spaces”, *Springer*, Heidelberg, 1979.

[26] N. Dunford, ve J. Schwartz, “Linear operators I”, *Interscience*, 1958.

[27] N.L. Carothers, ve S.J. Dilworth, “Geometry of Lorentz spaces via interpolation”, *Longhorn Notes*, The University of Texas at Austin, Functional Analysis Seminar, ss. 107–133, 1985–86.

[28] N.J. Nielsen, “On the Orlicz function spaces $L^M(0,\infty)$ ”, *I.J. Math*., no. 20, ss. 237–259, 1975.

[29] F.L. Hernández, S. Novikov, ve E.M. Semenov, “Strictly singular embeddings between rearrangement invariant spaces”, *Positivity*, no. 7, ss. 119–124, 2003.

[30] S.J. Montgomery-Smith, ve E.M. Semenov, “Embeddings of rearrangement invariant spaces that are not strictly singular”, *Positivity*, no. 4, ss. 397–402, 2000.

[31] V.M. Sánchez, E.M. Semenov, ve F.L. Hernández, “Strictly singular embeddings into $L^1 + L^\infty$”, *Doklady Math*., no. 71, ss. 388–390, 2005.

[32] J. Bergh, ve J. Löfström, “Interpolation spaces”, *Springer*, Heidelberg , 1976.

[33] W.B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtmann, ve L. Tzafriri, “Symmetric structures in Banach spaces”, *A.M.S*, 1979.

[34] N.J. Kalton, “Lattice structures in Banach spaces”, *A.M.S*., 1993.

# TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

**İletişim Bilgisi:** elifdeniz9592@gmail.com

**Konferans Bildirileri**

**1**. E. Deniz, ve Y. Zeren, "Some Questions of Approximation Theory in Rearrangement-Invariant Banach Function Spaces" Second International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA), Mayıs 2019, Istanbul, Turkey, ss. 32.