

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DİJİTAL ÇARPIMLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GÖKHAN SARICAN**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2019**

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**DİJİTAL ÇARPIMLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GÖKHAN SARICAN**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2019**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

GÖKHAN SARICAN tarafından hazırlanan “Dijital Çarpımların Bazı Özellikleri” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 13.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Dr.Öğr.Ü. Gülseli BURAK  
Pamukkale Üniversitesi



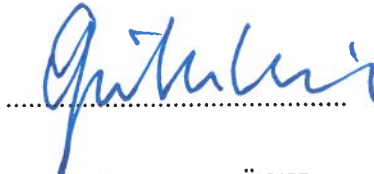
Üye  
Prof. Dr. Erdal EKİCİ  
Çanakkale 18 Mart Üniversitesi



Üye  
Dr.Öğr.Ü Ali AYTEKİN  
Pamukkale Üniversitesi



Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
31/07/2019 tarih ve 31/19 sayılı kararıyla onaylanmıştır..



Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü ✓

**Bu tez alışması PAUBA tarafından 2018 FBE 033 nolu proje ile desteklenmiştir.**

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**

**GÖKHAN SARICAN**



## ÖZET

**DİJİTAL ÇARPIMLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ**  
**YÜKSAK LİSANS TEZİ**  
**GÖKHAN SARICAN**  
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**(TEZ DANIŞMANI: DR.ÖĞR. ÜYESİ GÜLSELİ BURAK)**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2019**

Dijital Topoloji, bilgisayar grafiklerinde üretilen görüntülerin yanı sıra, sınır bilim, tıbbi görüntüleme, endüstriyel kontrol, jeoloji ve sıvı dinamikleri gibi birçok alanda önemli bir rol oynamaktadır. Dijital görüntü analizi, devre planlarının bileşenleri, pop smear hücre, x-ışınlarındaki tümörler, hava fotoğraflarındaki yapılar, resimlerde nesnelerin veya bölümlerin tanımı ile büyük ölçüde ilişkilidir. Dijital homoloji grupları görüntü analizi için ana araçlardan biridir. Çünkü iki farklı nesnenin izomorfik homoloji grubuna sahip olup olmadığını belirtmek, görüntü analizi için çok etkili araçlardandır. Dijital görüntülerin kartezyen çarpımlarında normal çarpım yakınlığı, dijital topoloji literatüründe kullanılan  $\kappa_1$  -yakınlığın kullanımı ile korunmayan bir çok özelliği korur. Bu çalışmada, dijital topolojide ele alınan dijital süreklilik, dijital bağlantılılık, dijital homotopi gibi kavramlar incelenerek dijital simpleksler homoloji grupları ele alındı. Dijital görüntülerin sonlu kartezyen çarpımı için normal çarpım yakınlığının özellikleri ile ilgili çalışmalar incelendi. Normal çarpım yakınlığını baz alarak dijital görüntülerin kartezyen çarpımlarının simpleksler homoloji grupları ile ilgili çalışmalar yapıldı.

**ANAHTAR KELİMELEER: Dijital Topoloji, Dijital Simpleksler, Homoloji Grupları, Normal Çarpım Yakınlığı**

# ABSTRACT

## SOME FEATURES OF DIGITAL PRODUCTS

MSC THESIS  
GÖKHAN SARICAN

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:ASSOCIATE PROF. DR. GÜLSELİ BURAK)

DENİZLİ, NOVEMBER 2015

Digital Topology plays on significant role in analyzing digital images generating in computer graphics as well as many areas of science inclusive neuroscience, medical imaging, industrial controllings, geoscience and fluid dynamics. Digital image or picture processing is related to a grand extent with subtraction and definition of objects or sections in pictures, such as particular characters in text, constituents in circuit plans, cells in pop smears, tumors in x-rays, structures in aerial photographs, etc. The digital simplicial homology groups are main tools for image analysis because a general algorithm to specify whether two different objects have isomorphic homology groups could be very efficient tools for Image analysis. Expansions of the normal product adjacencies protect many properties for finite cartesian products of digital images that in some cases, are not protected by the use of the  $\kappa_1$  -adjacencies most prevalentiy used in the literature of digital topology. In this study, digital continuity in digital topology, digital connection, examining concepts such as digital homotopy, digital simplex homology groups were discussed. We research simplicial homology groups for cartesian product of digital images based on the homology groups of digital images and we give some examples about the normal product adjacency for finite cartesian product of digital images.

**KEYWORDS:**Digital Topology, Digital Simpleks, Homology Groups, Normal Product Adjacency

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
TABLO LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
1.GİRİŞ.....	1
2. Temel Tanımlar .....	2
2.1 Dijital Homeomorfizma.....	5
2.2 Dijital Retrakt Olan Uzaylar.....	6
2.3 Dijital Homotopi.....	6
2.4 Dijital Büzülebilir Uzaylar.....	8
2.5 Dijital Yol ve Dijital Kapalı Yol.....	9
2.6 Dijital Basit Kapalı Eğri.....	9
2.7 Dijital Kapalı Yüzey.....	10
2.8 Basit Kapalı Yüzeylerin Bağlantılı Toplamı.....	11
3. Dijital Görüntülerin Homoloji Grupları.....	13
3.1 Dijital Simpleksler.....	13
3.2 Dijital Simpleksler Kompleksi.....	13
3.3 Sınır Homomorfizması.....	14
3.4 Simpleksler Homoloji Grupları.....	16
3.1 Euler Karakteristik.....	23
4. Normal Çarpım Yakınlığı.....	25
5. Çarpımlar Üzerinde $NP_v$ ve Dönüşümler.....	28
6. $NP_v$ ve Bağlantılık.....	31
7. $NP_v$ ve Retraksiyon .....	32
8. $NP_v$ ve Dijital Borsuk-Ulam Teoremi.....	34
9. $NP_v$ ve Temel Gruplar.....	36
10. $NP_v$ ve Homotopik İlişki.....	38
10.1 Homotopik Dönüşüm Ve Homotopi Tipi.....	38
10.2 Homotopik Benzerlik.....	39
11. $NP_v$ Yakınlığı ve Homoloji.....	41
12. Sonuç Ve Öneriler.....	44
13. KAYNAKLAR.....	45
14. ÖZGEÇMİŞ.....	47



## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1: 2-yakın. ....	2
Şekil 2: 4-yakın ve 8-yakın. ....	3
Şekil 3: 6-yakın, 18-yakın ve 26 yakın ....	3
Şekil 4: $MSC_8$ , $MSC_4$ , $MSC_4$ ....	9
Şekil 5: $MSS_{18}$ , $MSS_{18}$ , $MSS_6$ .....	10
Şekil 6: Simpleksler. ....	12
Şekil 7: $MSC'_8$ .....	14
Şekil 9: $MSS_{18}'$ .....	20
Şekil 10: $MSC_{18}$ .....	21
Şekil 11: $MSC'_6$ .....	21
Şekil 12: $X \times Y$ .....	40

## SEMBOL LİSTESİ

$\kappa$	:	Yakınlık bağıntısı
$(X, \kappa)$	:	$\kappa$ -yakınlıklı dijital görüntü
$[a, b]_{\mathbb{Z}}$	:	Dijital aralık
$(X, x_0)$	:	Noktalı dijital görüntü
$N_{\kappa}(x_0, \varepsilon)$	:	$x_0$ noktasının $\varepsilon$ yarıçaplı $\kappa$ -komşuluğu
$Int(X)$	:	X dijital görüntüsünün içi
$X \# Y$	:	X ve Y dijital görüntülerinin bağlantılı toplamı
$f * g$	:	f ve g dijital $\kappa$ -yollarının çarpımı
$f'$	:	f kapalı yolunun aşikar genişlemesi
$[f]_X$	:	X dijital görüntüsünde kapalı yol sınıfı
$\pi_1^{\kappa}(X, x_0)$	:	$(X, x_0)$ in $\kappa$ -temel grubu
$C_q^{\kappa}(X)$	:	X dijital görüntüsünde q-boyutlu simpleksler zincir grubu
$\partial_q$	:	Sınır operatörü
$Z_q^{\kappa}(X)$	:	Dijital simpleksler q-devirlerin grubu
$B_q^{\kappa}(X)$	:	Dijital simpleksler q-sınırların grubu
$H_q^{\kappa}(X)$	:	q-boyutlu dijital simpleksler homoloji grubu

## ÖNSÖZ

Bu tezi hazırlarken, değerli vakitlerini ve yardımlarını esirgemeyen, her safhasında bilgi ve tecrübelerine başvurduğum Sayın Hocam Dr. Öğr. Üyesi GÜLSELİ BURAK'a, Sayın Hocam Doç. Dr. Mustafa AŞCI'ya, teşekkür ederim. Tezi yazmamda ve uluslararası konferanslarda beni destekleyen, bana maddi olanak sağlayan PAUBAP'a teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi her türlü desteği veren ailem ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.



# 1 Giriş

Dijital Topoloji, bilgisayar grafiklerinde, nöroloji, tıbbi görüntüleme, endüstriyel kontrol, jeoloji ve sıvı dinamikleri gibi birçok alanda önemli bir rol oynamaktadır. Dijital görüntü veya resim işleme, devre planlarının bileşenleri, pop smear hücreler, x-ışınlarındaki tümörler, hava fotoğraflarındaki yapılar, resimlerde nesnelerin veya bölümlerin tanımlanması ile önemli ölçüde ilişkilendirilebilir. Normal çarpım yakınlığının bazı durumlarda, dijital topoloji literatüründe yaygın olarak kullanılan  $\kappa_l$ -yakınlığı ile korunmayan, dijital görüntülerin Kartezyen çarpımlarının bir çok özelliğini korur. Bu çalışmada, normal çarpım yakınlığını baz alan dijital görüntülerin kartezyen çarpımları için simpleksler homoloji gruplarını araştırıyoruz. Dijital görüntülerin homoloji gruplarının bazı özelliklerini ve dijital görüntülerin sonlu kartezyen çarpımı için normal çarpım yakınlığı ile ilgili örnekler veriyoruz.

## 2 Temel Tanımlar

$\mathbb{Z}$  tamsayılar kümesi olmak üzere  $\mathbb{Z}^n$ ,  $n$ -boyutlu Euclid uzayında kafes noktalarının kümesidir. Bir dijital görüntü ikilisi, bir yakınlık bağıntısı ile  $\mathbb{Z}^n$  nin sonlu alt kümesinden oluşur. Dijital görüntü araştırmalarında çeşitli yakınlık bağıntıları kullanıldığından yakınlık bağıntısını tanımlayalım.

**Tanım 2.1**  $1 < l < n$  olmak üzere pozitif  $l$  tam sayısı ve

$$p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$$

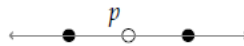
ayrık iki nokta için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa  $p$  ve  $q$  ya  $\kappa_l$  -yakın denir;

- $|p_j - q_j| = 1$  olacak şekilde en çok  $l$  kadar  $i$  indisi vardır.
- $|p_j - q_j| \neq 1$  olacak şekilde diğer tüm  $j$  indisleri için  $p_j = q_j$ .

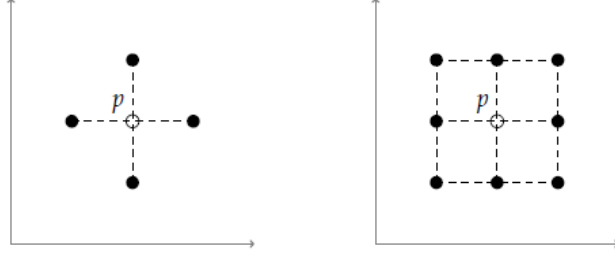
Buna göre  $\kappa_l$ , verilen bir  $p \in \mathbb{Z}^n$  noktasına yakın olan  $q \in \mathbb{Z}^n$  noktalarının sayısını gösterir. Tanım 2.1 den  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^2$  ve  $\mathbb{Z}^3$  de yakınlıkları řu şekilde ifade edilebilir:

- $\mathbb{Z}$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları  $|p - q| = 1$  ise bu noktalara 2-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^2$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları, her bir koordinatında en fazla 1 farklı ise bu noktalara 8-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^2$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları 8-yakın ve sadece bir koordinatında farklı ise bu noktalara 4-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^3$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları, her bir koordinatında en fazla 1 farklı ise bu noktalara 26-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^3$  de  $p$  ve  $q$  noktaları 26-yakın ve en fazla iki koordinatında farklı ise bu noktalara 18-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^3$  de  $p$  ve  $q$  noktaları 18-yakın ve sadece bir koordinatında farklı ise bu noktalara 6-yakındır denir.

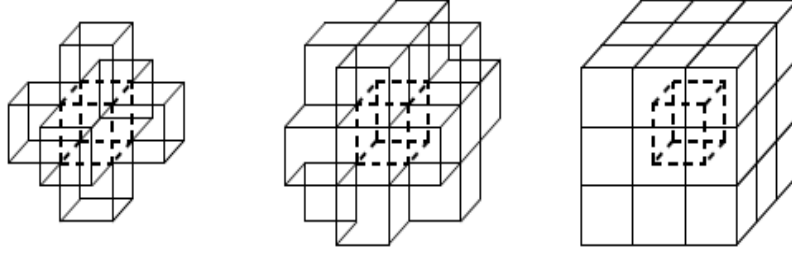
$\kappa \in \{2, 4, 8, 6, 18, 26\}$  olsun. Bir  $p$  latis noktasının  $\kappa$ -komşuluğu  $p$  ye  $\kappa$ -yakın olan noktalardan oluşur. (Boxer 1994).



şekil 1 2-yakın



Şekil 2 4-yakın ve 8-yakın



Şekil 3 6-yakın, 18-yakın ve 26-yakın

**Tanım 2.2** Bir dijital aralık  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq b$  olmak üzere,

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{Z} : a \leq z \leq b\}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir kafes noktasının  $\kappa$ -komşuluğu ise bu noktaya  $\kappa$ -yakın olan noktaların kümesidir.  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  dijital görüntüsü ve  $\epsilon \in \mathbb{N}$  olsun. Dijital görüntünün  $x_0$  elemanın  $\epsilon$  yarıçaplı  $\kappa$ -komşuluğu,  $l_{\kappa}(x_0, x)$ ,  $x_0$  dan  $x$  e en kısa basit  $\kappa$ -yolunun uzunluğu olmak üzere;

$$N_{\kappa}(x_0, \epsilon) = \{x \in X | l_{\kappa}(x_0, x) \leq \epsilon\} \cup \{x_0\}$$

şeklinde tanımlanır [7].  $\mathbb{Z}^n$  de  $\kappa$ -yakınlık bağıntısı tanımlı ve  $X \subset \mathbb{Z}^n$  bir dijital görüntü olsun.  $\forall x, y \in X$ ,  $x \neq y$  için  $x = x_0$ ,  $y = x_r$  ve  $i = 0, 1, \dots, r-1$  iken  $x_i$  ile  $x_{i+1}$   $\kappa$ -yakın olacak şekilde  $X$  in bir  $\{x_0, x_1, \dots, x_r\}$  altkümesi var ise  $X$  dijital görüntüsüne  $\kappa$ -bağlantılı denir. (Boxer 1994).

**Örnek 2.3**  $X \subset \mathbb{Z}^2$  kümesi

$$X = \{x_0 = (1, 1), x_1 = (2, 1), x_2 = (3, 2), x_3 = (3, 0), x_4 = (4, 0)\}$$

olsun.  $X$  dijital görüntüsünde  $x_1$  e 4-yakın olan sadece  $x_0$  olduğundan  $x_1$  in 4-komşuluğunda  $x_0$  vardır.  $x_1$  in 8-komşuluğunda bulunan noktalar ise  $x_0$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  dür. (Boxer 1994).

**Tanım 2.4**  $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $X$  in her  $\kappa_0$ -bağlantılı  $U$  alt kümesi için  $f(U)$ ,  $Y$  nin  $\kappa_1$ -bağlantılı alt kümesi ise  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -süreklidir denir. (Boxer 1994).

**Örnek 2.5**  $X \subset \mathbb{Z}$  ve  $Y \subset \mathbb{Z}^2$  kümeleri sırasıyla

$$X = \{x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4\},$$

$$Y = \{y_0 = (0, 0), y_1 = (1, 1), y_2 = (2, 0), y_3 = (3, 1)\}$$

olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $i = 0, 1, 2, 3$  için  $f(x_i) = y_i$  şeklinde tanımlansın.  $X$  in her 2-bağlantılı  $U$  alt kümesi için  $f(U)$ ,  $Y$  nin 8-bağlantılı alt kümesi olduğundan  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(2, 8)$ -süreklidir. (Boxer 1994).

**Önerme 2.6**  $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekliliği için gerek ve yeter şart  $X$  in her  $\kappa_0$ -yakın  $\{x_0, x_1\}$  noktaları için  $f(x_0) = f(x_1)$  veya  $f(x_0)$  ve  $f(x_1)$  in  $Y$  de  $\kappa_1$ -yakın olmasıdır. (Boxer 1999).

**İspat:**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekliliği olduğunda  $x$  in  $\kappa_0$ -bağlantılı  $\{x_0, x_1\}$  alt kümesi için  $\{f(x_0), f(x_1)\}$   $Y$  nin  $\kappa_1$ -bağlantılı alt kümesidir. Yani  $f(x_0)$  ile  $f(x_1)$   $Y$  de  $\kappa_1$ -yakındır veya  $f(x_0) = f(x_1)$  dir.

Tersine  $\kappa_0$ -yakın  $x_0, x_1 \in X$  noktaları için yani  $X$  in  $\kappa_0$ -bağlantılı  $\{x_0, x_1\}$  alt kümesi için  $f(x_0) = f(x_1)$  veya  $f(x_0)$  ve  $f(x_1)$ ,  $Y$  de  $\kappa_1$ -yakın ise  $\{f(x_0), f(x_1)\}$   $Y$  nin  $\kappa_1$ -bağlantılı alt kümesidir. Bu durumda  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -süreklidir.

Örneğin,  $\kappa$ ,  $Y$  dijital görüntüsü üzerinde bir yakınlık bağıntısı olsun.

$f : [a, b]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonunun  $(2, \kappa)$ -sürekliliği için gerek ve yeter şart her  $c, c + 1 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$  için  $f(c) = f(c + 1)$  veya  $f(c)$  ile  $f(c + 1)$  in  $Y$  de  $\kappa$ -yakın olmasıdır.

$X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekliliği ve biyektif,  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  fonksiyonu  $(\kappa_1, \kappa_0)$ -sürekliliği ise  $f$  fonksiyonuna dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfizm denir [1] ve  $X \approx_{(\kappa_0, \kappa_1)} Y$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 2.7**  $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekliliği ve  $g : (Y, \kappa_1) \rightarrow (Z, \kappa_2)$  dijital  $(\kappa_1, \kappa_2)$ -sürekliliği fonksiyonlar ise  $f \circ g : (X, \kappa_0) \rightarrow (Z, \kappa_2)$  bileşke fonksiyonu dijital  $(\kappa_0, \kappa_2)$ -süreklidir. (Boxer 1994).

## 2.1 Dijital Homoemorfizma

(Boxer 1994) ve (Boxer 1999) makalelerinde homeomorfizma kavramını " $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  fonksiyonu dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli, bijektif ve  $f^{-1}$  dijital  $(\kappa_1, \kappa_0)$ -sürekli ise  $f$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homeomorfizma denir." şeklinde tanımlanmıştır.

**Önerme 2.8** Dijital homeomorfizm dijital görüntüler arasında bir denklik bağıntısıdır. (Boxer 1994).

**İspat:**

i) Her  $X$  dijital görüntüsünün  $1_X : X \rightarrow X$  birim dönüşümü ile kendisine dijital homeomorfik olduğu açıktır. Yani yansıma vardır.

ii)  $f : X \rightarrow Y$  bir dijital homeomorfizm olsun.  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  fonksiyonunda bir dijital homeomorfizm olduğu kolayca görülür. O zaman dijital homeomorfizma simetriktir.

iii)  $f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Y \rightarrow Z$  dijital homeomorfizmalar olsunlar. Önerme 2.7 den  $g \circ f : X \rightarrow Z$  dijital homeomorfizmdir. O zaman dijital homeomorfizma geçişmelidir.

**Örnek 2.9**  $X = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$  ve  $Y = \{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$  olsun.

$f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = x/2$  ile tanımlanmış bir fonksiyon olsun.  $f$ , dijital sürekli bijeksiyondur, fakat  $f^{-1}$  fonksiyonu dijital sürekli değildir. Böylece  $f$ , bir dijital homeomorfizm değil ve  $X$  ile  $Y$  de dijital homeomorfik değildir. (Boxer 1994).

Dijital homeomorfizma topolojideki tanımıyla aynı şekilde tanımlanmış olsa da uygulamada farklılık göstermektedir.  $\mathbb{R}$  deki topolojide bütün kapalı aralıklar birbirine homeomorf iken  $\mathbb{Z}$  deki dijital topolojide dijital aralıklar dijital homeomorf değildir. Örneğin;

$$[1, 3]_{\mathbb{Z}} = \{1, 2, 3\} \text{ ve } [2, 5]_{\mathbb{Z}} = \{2, 3, 4, 5\}$$

dijital aralıkları birbirine dijital  $(2, 2)$ -homeomorf değildir.

Bu nedenle (Boxer 2006). da dijital homeomorfizma kavramı dijital izomorfizma kavramını kullanmayı önermiştir.



## 2.2 Dijital Retrakt Olan Uzaylar

**Tanım 2.10**  $\emptyset \neq A \subset X$  ve  $i : A \hookrightarrow X$   $\kappa_0$ -kapsama dönüşümü olsun.  $\forall a \in A$ ,  $r \circ i(a) = a$  olacak şekilde  $r : X \rightarrow A$  dijital  $\kappa_0$ -süreklili fonksiyonu varsa  $X$  e  $\kappa_0$ -retrakt denir. (Boxer 1994).

**Teorem 2.11**  $X_0$ ,  $X$  in bir dijital retraktı ve  $f : X \rightarrow Y$  bir dijital homeomorfizm olsun. O zaman  $f(X_0)$  da  $Y$  nin bir dijital retraktıdır. (Boxer 1999).

**İspat:**  $f : X \rightarrow X_0$  bir dijital retrakt fonksiyonu olsun. O zaman Önerme 2.7 den  $f \circ r \circ f^{-1} : Y \rightarrow f(X_0)$  bir dijital retrakt dönüşümüdür.

## 2.3 Dijital Homotopi

**Tanım 2.12**  $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı,  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler ve  $f, g : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -süreklili fonksiyonlar olsun. Pozitif bir  $m$  tamsayısı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan  $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu varsa,  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarına  $Y$  de dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopik fonksiyonlar denir. (Boxer 2005).

- $\forall x \in X$  için  $H(x, 0) = f(x)$  ve  $H(x, m) = g(x)$ ,
- $\forall x \in X$  için

$$H_x : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y \quad t \rightarrow H_x(t) = H(x, t)$$

şeklinde tanımlanan  $H_x$  indirgenmiş fonksiyonu  $(2, \kappa_1)$ -süreklidir.

- $\forall t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$  için

$$H_t : X \rightarrow Y \quad x \rightarrow H_t(x) = H(x, t)$$

şeklinde tanımlanan  $H_t$  indirgenmiş fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -süreklidir.

Burada  $H$  fonksiyonuna  $f$  ve  $g$  arasında dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi fonksiyonu denir.

$f$  ve  $g$  fonksiyonlarının  $Y$  de dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopik olduğunu göstermek için

$$f \simeq_{(\kappa_0, \kappa_1)} g$$

notasyonunu kullanılır.

**Önerme 2.13** Dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi, dijital sürekli fonksiyonlar arasında bir denklik bağıntısıdır. (Boxer 1994).

**İspat:** Dijital homotopinin yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz.

- Her  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu ve her pozitif  $m$  tamsayısı için,  $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu her  $(x, t) \in X \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$  için

$$H(x, t) = f(x)$$

şeklinde tanımlandığında  $f$  den  $f$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi olur. O halde dijital homotopi yansıma özelliğini sağlar.

- $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu  $f$  den  $g$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi olsun.  $G : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu her  $(x, t) \in X \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$  için

$$G(x, t) = H(x, m - t)$$

şeklinde tanımlanırsa  $g$  den  $f$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi olur. Böylece dijital homotopinin simetri özelliğini sağladığı görülür.

- $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu  $f$  den  $g$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi ve  $G : X \times [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu  $g$  den  $h$  a dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi olsun.  $F : X \times [0, m + m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, t), & (x, t) \in X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \\ G(g(x), t - m), & (x, t) \in X \times [m, m + m_0]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında  $f$  den  $h$  a dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi olur. Bu durumda dijital homotopi geçişme özelliğini sağlar.  $\square$

**Tanım 2.14**  $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli fonksiyonu eğer  $Y$  de bir sabit fonksiyona dijital homotopik ise  $f$ ,  $Y$  de nullhomotoptur denir. (Boxer 1999).

**Tanım 2.15**  $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $f : X \rightarrow Y$   $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli fonksiyonu için

$$g \circ f \simeq_{(\kappa_0, \kappa_1)} 1_X$$

ve

$$f \circ g \simeq_{(\kappa_0, \kappa_1)} 1_Y$$

olacak şekilde  $g : Y \rightarrow X, (\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli fonksiyonu varsa  $f$  fonksiyonuna  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi denklik denir [4].  $X$  ve  $Y$  dijital görüntüleri aynı  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi tipine sahiptir ve  $X$  ile  $Y, (\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi denktir denir. (Boxer 2005).

## 2.4 Dijital Büzülebilir Uzaylar

**Tanım 2.16**  $(X, \kappa_0)$  bir dijital görüntü olsun.  $(X, \kappa_0)$  üzerindeki birim dönüşüm sabit dönüşüme  $(\kappa_0, \kappa_0)$ -homotopik ise  $X$  e  $\kappa_0$ -büzülebilir denir. (Boxer 1999).

**Örnek 2.17** Her  $[0, m]_{\mathbb{Z}}$  dijital aralık dijital büzülebilirdir.

$$H : [0, m]_{\mathbb{Z}} \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow [0, m]_{\mathbb{Z}}$$

homotopi fonksiyonu  $H(x, t) = \max\{0, x - t\}$  şeklinde tanımlandığında,  $1_{[0, m]_{\mathbb{Z}}}$  birim dönüşümü ile  $\bar{0}$  sabit dönüşümü homotopik olur. (Boxer 1999).

**Önerme 2.18**  $m > 0$  için  $I_m$  dijital büzülebilirdir. (Boxer 1994).

**İspat:**  $F : I_{m+1} \longrightarrow I_m$  fonksiyonu

$$F(x_1, \dots, x_m, t) = (M(x_1, t), \dots, M(x_m, t))$$

ile tanımlandığında büzülebilirlik kolayca görülür. Burada

$$M(x, t) = \max\{0, x - t\}.$$

**Önerme 2.19**  $X$ , dijital bağlantılı olmayan bir dijital görüntü ise  $X$  dijital büzülebilir değildir. (Boxer 1994).

**İspat:**  $X$  in dijital büzülebilir olduğunu kabul edelim, yani  $F : X \times [0, p]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$  bir dijital homotopi her  $x \in X$  ve  $x_0 \in X$  için  $F(x, 0) = x$  ve  $F(x, p) = x_0$  olsun.

$y \in X$  noktası  $x_0$  ile  $X$  in aynı dijital bileşeninde olmayan bir nokta olsun.

O zaman öyle bir  $t \in [1, p]_{\mathbb{Z}}$  vardır ki  $F(y, t - 1)$  ve  $F(y, t)$ ,  $X$  in farklı bileşenlerindedir.

Böylece  $F(y, t - 1)$  ve  $F(y, t)$ , komşu değildir. Bu durum  $F$  nin dijital sürekliliği ile çelişkilidir.

**Teorem 2.20**  $X$  dijital büzülebilir ve  $Y$ ,  $X$  in dijital retraktı ise  $Y$  dijital büzülebilirdir. (Boxer 1994).

Aşağıdaki örnek ile dijital bütülebilirliğin, Euclidean bütülebilirliğin bir analogu olmadığını göreceğiz. Euclidean uzay  $\mathbb{R}^k$  nin kapalı ve sınırlı bir  $X$  alt kümesi bütülebilir ve lokal bütülebilir (her  $x \in X$  ve  $x$  in her  $U$  komşuluğu için  $x$  in öyle bir  $U_0 \subset U$  komşuluğu vardır ki  $i : U_0 \rightarrow U$  kapsama dönüşümü  $U$  da bir sabit fonksiyona homotoptur) ise,  $X, \mathbb{R}^k$  nin bir retraktıdır. (Borsuk 1967).

**Örnek 2.21**  $U \subset I_2$  ve

$$U = (\{0, 2\} \times I_1) \cup \{(1, 0)\}$$

olsun. O zaman  $U$  dijital bütülebilir fakat  $I_2$  nin bir retraktı değildir. (Boxer 1994).

## 2.5 Dijital Yol ve Dijital Kapalı Yol

**Tanım 2.22**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  dijital görüntüsünde  $x$  noktasından  $y$  noktasına bir dijital  $\kappa$ -yolu,  $f : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ ,  $f(0) = x$ ,  $f(m) = y$  olacak şekildeki dijital  $(2, \kappa)$ -süreklili fonksiyonudur. Eğer ilave olarak  $f(0) = f(m)$  ise  $f$  ye dijital  $\kappa$ -loop denir ve  $p = f(0)$  noktası  $f$  loopunun baz noktasıdır. Eğer  $f$  bir sabit fonksiyon ise aşık loop denir. (Khalimsky 1987).

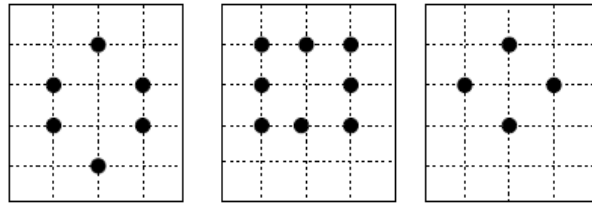
## 2.6 Dijital Basit Kapalı Eğri

**Tanım 2.23**  $X \subset \mathbb{Z}^n$ ,  $\kappa$  yakınlık bağıntısı ile bir dijital görüntü olsun. Eğer öyle  $m > 3$  için aşağıdaki koşulları sağlayan bir

$f : [0, m - 1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$   $(2, \kappa)$ -süreklili fonksiyon var ise  $X$ ' e bir dijital basit kapalı  $\kappa$ -eğri denir: (Boxer 2005).

- $f$  bire bir ve örten;
- $f(0)$  ile  $f(m - 1)$   $\kappa$ -yakın;
- her  $t \in [0, m - 1]_{\mathbb{Z}}$  için,  $f(t)$  nin  $f([0, m - 1]_{\kappa})$  de  $\kappa$ -komşuları sadece  $f((t - 1) \bmod(m))$  ve  $f((t + 1) \bmod(m))$  dir.

Bilinen basit kapalı eğriler Şekil 4 de gösterilmiştir.



Şekil 4  $MSC_8$ ,  $MSC_4$  ve  $MSC'_8$

## 2.7 Dijital Kapalı Yüzey

**Tanım 2.24**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ ,  $n \geq 3$  dijital görüntü ve  $X = \mathbb{Z}^n - X$  olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa  $X$  e kapalı  $\kappa$ -yüzey denir. (Han 2006).

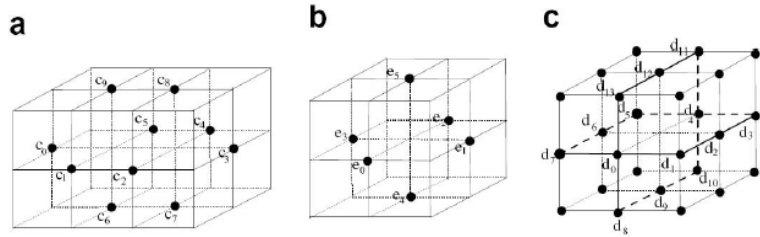
1.  $(\kappa, \bar{\kappa}) \in \{(\kappa, 2n), (2n, 3^n - 1)\}$  ve  $\kappa \neq 3^n - 2^n - 1$  için;
  - Her  $x \in X$  için  $|X|^x := N_{26}(x, 1) - \{x\}$  kümesi  $x$  e  $\kappa$ -yakın olan bir tane eleman içerir.
  - $|\bar{X}|^x$ ,  $x$  e  $\bar{\kappa}$ -yakın iki tane  $\bar{\kappa}$  bileşene sahiptir. (Bu bileşenleri  $C^{xx}$  ve  $D^{xx}$  ile gösterelim.)
  - Her  $y \in N_{\kappa} \cap$  için  $N_{\bar{\kappa}} \cap C^{xx} \neq \emptyset$  ve  $N_{\bar{\kappa}} \cap D^{xx} \neq \emptyset$  dir.

Ayrıca  $X$  kapalı  $\kappa$ -yüzeyi için,  $X$  basit  $\kappa$ -noktaya sahip değil ise  $X$  e basit kapalı  $\kappa$ -yüzey denir.

2.  $(\kappa, \bar{\kappa}) = (3^n - 2^n - 1, 2n)$  için;
  - $X$ ,  $\kappa$ -bağlantılı
  - Her  $x \in X$  için  $|X|^x$  genelleştirilmiş basit kapalı eğri

Ayrıca  $|X|^x$  basit kapalı  $\kappa$  eğri ise  $X$  e basit kapalı  $\kappa$ -yüzey denir. Bilinen dijital basit kapalı yüzeyler Şekil 5 de verilmiştir.

**Tanım 2.25**  $\bar{S}_k$  ile  $S_k$ , kapalı  $\kappa$ -yüzeyin  $\mathbb{Z}^n$  deki kapamışını gösterelim. Eğer bir  $x \in S_k$  noktası  $S_k$  'nın bir sınırlı  $\kappa$ -bağlantılı bileşenine ait ise  $x$ 'e  $S_k$ 'nın içindedir denir. Diğer durumda  $S_k$ 'nın dışındadır denir.  $S_k$ 'nın tüm iç noktalarının kümesini  $IntS_k$  ile, tüm dış noktalarının kümesi  $ExtS_k$  ile gösterilir. (Han 2006).



Şekil 5 (a)  $MSS_{18}$ , (b)  $MSS'_{18}$  ve (c)  $MSS_6$

Şimdi  $MSC_{\kappa}$ ,  $S_{\kappa}$ ,  $SS_{\kappa}$  ve  $MSS_{\kappa}$  ile  $n \geq 3$  için  $\mathbb{Z}^n$ 'de sırasıyla minimal basit kapalı  $\kappa$ -eğri, kapalı  $\kappa$ -yüzey, basit kapalı  $\kappa$ -yüzey ve minimal basit kapalı  $\kappa$ -yüzeydir.

**Teorem 2.26** (Han 2006).

1.  $MSS_6$ , 18-büzülebilirdir.
2.  $MSS_6$ , 6-büzülebilir değildir.
3.  $MSS_{18}$ , 18-büzülebilir değildir.

## 2.8 Basit Kapalı Yüzeylerin Bağlantılı Toplamı

**Tanım 2.27**  $S_{\kappa_0}$ ,  $\mathbb{Z}^{n_0}$  de kapalı  $\kappa_0$ -yüzey  $A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0} \subset S_{\kappa_0}$  ve  $S_{\kappa_1}$ ,  $\mathbb{Z}^{n_1}$  de kapalı  $\kappa_1$ -yüzey,  $n_0, n_1 \geq 3$  için. Burada

$$A_{\kappa_0} \approx (\kappa_0, 8) \cdot hMSC_8^*$$

$$A_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0, 4) \cdot h} MSC_4^* \quad A_{\kappa_0} \approx_{(\kappa_0, 8) \cdot h} MSC_8'^*$$

$f : A_{\kappa_0} \rightarrow f(A_{\kappa_0}) \subset S'_{\kappa_1}$  bir  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homeomorfizm olsun öyle ki burada

$$S'_{\kappa_1} = S_{\kappa_1} - f(A'_{\kappa_0})$$

ve

$$S'_{\kappa_1} = S_{\kappa_1} - A'_{\kappa_0}$$

dır. O zaman  $S'_{\kappa_0} \cup S'_{\kappa_1}$  ( ayrık birleşim ) üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı bir  $\sim'$ denklik bağıntısı elde ederiz:  $x \in A_{\kappa_0} - A'_{\kappa_0}$  için  $i(x) \sim f(x) = y \in S'_{\kappa_1}$ . Denklik sınıflarının kümesine bağlantılı toplam denir ve  $S_{\kappa_0} \# S_{\kappa_1}$  ile gösterilir. (Han 2006).

**Teorem 2.28**

1.  $MSS_6 \# S_6 \approx_{6 \cdot h} S'_6$ , burada  $A_6(\subset MSS_6) \approx_{(6,4) \cdot h} MSC_4^*$  ve  $S'_6$ , 6-yüzey;
2.  $MSS_{18} \# S_{18} \approx_{18 \cdot h} S'_{18}$ , burada  $A_{18}(\subset MSS_{18}) \approx_{(18,8) \cdot h} MSC_8^*$  ve  $S'_{18}$ , kapalı 6-yüzey;
3.  $MSS_{18} \# MSS_{18} = MSS_{18}$ , burada  $A_{18}(\subset MSS_{18}) \approx_{(18,8) \cdot h} MSC_8^*$  ve  $S'_{18}$ , kapalı 6-yüzey;
4.  $MSS'_{18} \# S_{18} \approx_{18 \cdot h} S_{18}$ , burada  $A_{18}(\subset MSS'_{18}) \approx_{(18,8) \cdot h} MSC_8'^*$ ;
5.  $MSS'_{18} \# MSS'_{18} = MSS'_{18}$ , burada  $A_{18}(\subset MSS'_{18}) \approx_{(18,8) \cdot h} MSC_8^*$ . (Han 2006).

### **Teorem 2.29**

1.  $S_\kappa$  ve  $S'_\kappa$  iki basit kapalı  $\kappa$ -yüzey verildiğinde,  $S_\kappa \# S'_\kappa$  bir basit kapalı  $\kappa$ -yüzezdür.
2.  $S_{\kappa_0}$  ve  $S'_{\kappa_1}$  iki basit kapalı yüzey için,  $(S_{\kappa_0} \# S'_{\kappa_1}, \kappa)$ , bir basit kapalı  $\kappa$ -yüzey olmak zorunda değildir. (Han 2006).



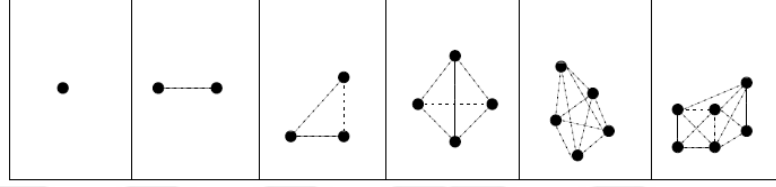
## 3 Dijital Görüntülerin Homoloji Grupları

### 3.1 Dijital Simpleksler

**Tanım 3.1**  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$  da bir dijital görüntü olsun. Eğer

- $\sum_{i=0}^m t_i p_i = 0$  ve  $\sum_{i=0}^m t_i = 0$  ise  $t_0 = \dots = t_m = 0$ .
- Her  $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $i \neq j$  için  $p_i$  ve  $p_j$   $\kappa$ -yakın ise  $P$  ye dijital  $(\kappa, m)$ -simpleks denir ve  $P = \langle p_0, p_1, \dots, p_m \rangle$  ile gösterilir.  $m$  ye de simpleksin boyutu denir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

Bu durumda bazı simpleksler Şekil 6 de (ki bütün noktalar birbirine sırasıyla 2, 2, 8, 26-yakın olmak üzere) gösterilmiştir.



Şekil 6 Sırasıyla  $(2,0)$ ,  $(2,1)$ ,  $(8,2)$ ,  $(26,4)$ -simpleksler

### 3.2 Dijital Simpleksler Kompleksi

**Tanım 3.2**  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$  da dijital  $(\kappa, m)$ -simplekslerinin sonlu koleksiyonu olsun. Eğer

- $s \in K$  ise  $s$  nin yüzüde bu simpleksler kompleksine ait,
- $s, t \in K$  iken  $s \cap t$  boş ya da  $s$  ve  $t$  nin ortak bir dijital simpleksi var ise  $K$  ya bir dijital simpleksler kompleksi denir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Tanım 3.3** Dijital simpleksler kompleks  $(K, \kappa)$  ya ait köşeler üzerinde bir sıralama var ise  $(K, \kappa)$  ya yönlü dijital simpleksler kompleksi denir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Tanım 3.4**  $(K, \kappa)$  bir dijital simpleksler kompleksin geometrik reelizasyonu  $|K|$ , tüm dijital simplekslerin birleşimi olarak tanımlanır. Yani

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s.$$



Dijital görüntüler aynı zamanda  $(\kappa, 0)$ -simplekslerin birleşimi gibi düşünülebilir. Bu durumda her dijital görüntü bir dijital simpleksler kompleksidir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Tanım 3.5**  $(X, \kappa_0)$  bir dijital görüntü olsun. Bir simpleksler kompleksi  $(K, \kappa_1)$  ve  $h : |K| \rightarrow X$   $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfizması varsa  $X$  dijital görüntüsü çok yüzlüdür denir.

Bu durumda dijital görüntülerin çok yüzlüsü yerine kendisiyle doğrudan çalışılabilir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Önerme 3.6**  $P \subset (\mathbb{Z}^{n_0}, \kappa_0)$ ,  $Q \subset (\mathbb{Z}^{n_1}, \kappa_1)$  sırasıyla dijital  $(\kappa_0, m)$  ve  $(\kappa_1, m)$  simpleksler olsun. O zaman  $P$  ve  $Q$  dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfiktirler. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$  ve  $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$  olsun.

$$h : (P, \kappa_0) \rightarrow (Q, \kappa_1), p_i \rightarrow h(p_i) = q_i$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm her  $p_i \in P$  için dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfizmdir.  $\square$

O halde elimizdeki simpleks yapısı ile serbest değişmeli grupları inşa edebiliriz.

**Tanım 3.7**  $C_q^\kappa(K)$ , dijital simpleksler kompleksi  $(K, \kappa)$  daki dijital  $(\kappa, q)$ -simpleksleri baz kabul eden serbest değişmeli grup denir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Sonuç 3.8**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  de  $m$  boyutlu bir dijital simpleksler kompleksi olsun. Her  $q > m$  için,  $C_q^\kappa(K)$  bir aşıkardır. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**  $X, m$  boyutlu bir dijital simpleksler kompleksinde  $q > m$  için  $(\kappa, q)$ -simpleks mevcut olmadığından  $C_q^\kappa(K) = \{0\}$  dir.  $\square$

### 3.3 Sınır Homomorfizması

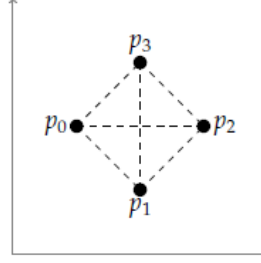
**Tanım 3.9**  $(K, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  da  $m$  boyutlu yönlü dijital simpleksler kompleksi olsun.  $\hat{p}_i, p_i$  elemanının simpleksten çıkarılması olmak üzere;

$$\partial_q : C_q^\kappa(K) \rightarrow C_{q-1}^\kappa(K)$$

$$\partial_q(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) = \begin{cases} \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, p_1, \dots, p_i, \dots, p_q \rangle, & m \geq q \text{ ise} \\ 0 & , m < q \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan homomorfizmaya sınır homomorfizması denir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Örnek 3.10**  $MSC'_8$  dijital görüntüsünü ele alalım.



Şekil 7  $MSC'_8$

$MSC'_8 = \{p_0 = (1, 2), p_1 = (2, 1), p_2 = (3, 2), p_3 = (2, 3)\} \subset \mathbb{Z}^2$  ve  $p_0 < p_1 < p_3 < p_2$  olsun. 0-simpleksler

$$\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle$$

ve 1-simpleksler

$$e_0 = \langle p_0 p_3 \rangle, e_1 = \langle p_3 p_2 \rangle, e_2 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_3 = \langle p_0 p_1 \rangle$$

şeklindedir. 1-simplekslere sınır operatörünü uygularsak

$$\partial_1(e_0) = \langle p_3 \rangle - \langle p_0 \rangle$$

$$\partial_1(e_1) = \langle p_2 \rangle - \langle p_3 \rangle$$

$$\partial_1(e_2) = \langle p_2 \rangle - \langle p_1 \rangle$$

$$\partial_1(e_3) = \langle p_1 \rangle - \langle p_0 \rangle$$

elde edilir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Önerme 3.11** Her  $1 \leq q \leq m$  için  $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$  dır. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:** Her  $\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \in C_q^\kappa(X)$  için

$$\begin{aligned}
\partial_{q-1} \circ \partial_q(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) &= \partial_{q-1} \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle \right) \\
&= \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle \right) \\
&= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_q \rangle \\
&\quad + \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_q \rangle \\
\sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_q \rangle &= \sum_{k < l} (-1)^{k+l+1} \langle p_0, \dots, \hat{p}_k, \dots, \hat{p}_l, \dots, p_q \rangle
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) = 0$$

elde edilir. □

**Sonuç 3.12**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  de  $m$  boyutlu dijital simpleksler kompleksi olsun.

Bu durumda

$$C_*^\kappa(X) : 0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

bir zincir komplekstir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**  $C_q^\kappa(X)$  serbest abel grup ve  $\partial_q$  homomorfizm ve  $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$  olduğundan

$$C_*^\kappa(X) : 0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

bir zincir kompleks olur. □

### 3.4 Simpleksler Homoloji Grupları

Şimdi dijital görüntüler için homoloji gruplarını tanımlayabiliriz;

**Tanım 3.13**  $(X, \kappa)$ , dijital simpleksler kompleksi olsun.

- $Z_q^\kappa(X) = \text{Ker} \partial_q$  grubuna dijital simpleksler  $q$ - devirlerin grubu denir.
- $B_q^\kappa(X) = \text{Im} \partial_{q+1}$  grubuna dijital simpleksler  $q$ - sınırların grubu denir.
- $H_q^\kappa(X) = Z_q^\kappa(X) / B_q^\kappa(X)$  bölüm grubuna  $q$ . dijital simpleksler homoloji grubu denir.

(Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Tanım 3.14**  $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  dijital görüntüler arasında bir fonksiyon olsun.  $X$  de  $\kappa_0$ -yakınlıklı her  $P$  dijital  $(\kappa_0, m)$ -simpleksi için  $\varphi(P)$ ,  $n \leq m$  için  $Y$  de  $(\kappa_1, n)$ -simpleks ise  $\varphi$  ye dijital simpleksler dönüşüm denir. (Boxer, Karaca ve Öztel 2011).

**Tanım 3.15**  $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  dijital simpleksler dönüşüm olsun.  $q \geq 0$  için  $\varphi_{\#} : C_q^{\kappa_0}(X) \rightarrow C_q^{\kappa_1}(Y)$  homomorfizmi

$$\varphi_{\#}(\langle p_0, \dots, p_q \rangle) = \langle \varphi(p_0), \dots, \varphi(p_q) \rangle$$

şeklinde tanımlanır. (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).

Böylece cebirsel topolojide artık aksiyom haline gelmiş teoremlerin dijitaldeki karşılıklarını inceleyebiliriz:

**Teorem 3.16**  $f : K \rightarrow L$  dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfizm ise  $\forall m \geq q$  için

$$H_q^{\kappa_0}(K) \cong H_q^{\kappa_1}(L)$$

dir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**  $f : K \rightarrow L$  bir dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfik dönüşüm olsun. Bu durumda,  $f$  bijeksiyon ve Önerme 2.7 den " $k_1, k_2 \in K$ ,  $k_1$  ve  $k_2$ ,  $\kappa_0$ - yakın olması için gerek ve yeter şart  $f(k_1)$  ve  $f(k_2)$   $\kappa_1$ - yakın ya da  $f(k_1) = f(k_2)$ " koşulunu sağlar.  $m \geq q \geq 0$  olsun.

$$\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \in C_q^{\kappa_0}(K)$$

için;

$$\phi : C_q^{\kappa_0}(K) \longrightarrow C_q^{\kappa_1}(L), \quad \phi(\langle p_0, \dots, p_q \rangle) = \langle f(p_0), \dots, f(p_q) \rangle$$

şeklinde tanımlansın.  $\phi$  dönüşümü  $f$  nin tanımından dolayı iyi tanımlı ve bijeksiyondur. Böylece

$$C_q^{\kappa_0}(K) \cong C_q^{\kappa_1}(L)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$H_q^{\kappa_0}(K) \cong H_q^{\kappa_1}(L).$$

□

**Teorem 3.17**  $(X, \kappa)$  tek noktalı dijital görüntü ise

$$H_q^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dır. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**  $X = \{x_0\}$  olsun.  $m \geq q > 0$  için  $X$  in içerdiği dijital  $(\kappa, q)$ -simpleks mevcut olmadığından  $C_q^\kappa(X) = 0$  dir. Böylece, tüm  $m \geq q > 0$  için  $H_q^\kappa(X) = 0$  dir.

$q = 0$  olsun.  $C_0^\kappa(X)$ , dijital  $(\kappa, 0)$ -simpleks bazlı serbest değişmeli grup olduğundan  $C_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$  dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisinde  $Im\partial_1 = 0$  ve  $Ker\partial_0 \cong \mathbb{Z}$  dir. Böylece

$$H_0^\kappa(K) \cong \mathbb{Z}$$

dir. □

**Teorem 3.18**  $X$  dijital basit kapalı  $\kappa$ -eğri ise

$$H_q^\kappa = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_q\} \subset \mathbb{Z}^2$  bir dijital basit kapalı  $\kappa$ -eğri olsun. Bu durumda,  $x_i$  ve  $x_j$ ,  $\kappa$ -yakındır gerek ve yeter şart  $i = j \pm 1(modq)$  dur.

$$C_0^\kappa(X) = \{\langle x_0 \rangle, \langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_q \rangle\} \cong \mathbb{Z}^{q+1}$$

$$C_1^\kappa(X) = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_q, x_0 \rangle\} \cong \mathbb{Z}^{q+1}$$

dir.  $m > q > 1$  için  $C_q^\kappa(X) = 0$  olduğundan  $H_q^\kappa(X) = 0$  dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisinden  $Im\partial_2 = 0$  ve  $Ker\partial_0 \cong \mathbb{Z}^{q+1}$  bulunur. Diğer taraftan

$$\partial_1(n_0\langle x_0, x_1 \rangle + n_1\langle x_1, x_2 \rangle + \dots + n_q\langle x_q, x_0 \rangle) =$$

$$n_0(x_1 - x_0) + n_1(x_2 - x_1) + \dots + n_q(x_0 - x_q)$$

eşitliğinden  $Im\partial_1 = \mathbb{Z}^q$  dur.

$$\partial_1(n_0\langle x_0, x_1 \rangle + n_1\langle x_1, x_2 \rangle + \dots + n_q\langle x_q, x_0 \rangle) = 0$$

$$n_0(x_1 - x_0) + n_1(x_2 - x_1) + \dots + n_q(x_0 - x_q) = 0$$

$$(n_q - n_0)x_0 + (n_0 - n_1)x_1 + \dots + (n_{q-1} - n_q)x_q = 0$$

eşitliği çözüldüğünde  $n_0 = n_1 = \dots = n_q = n$  olur. Buradan  $Ker\partial_1 \cong \mathbb{Z}$  dir. Sonuç olarak

$$H_1^\kappa(X) = \mathbb{Z} = H_0^\kappa(X)$$

elde edilir. □

**Teorem 3.19**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  dijital görüntüsü  $\kappa$ -yol bağlantılı ise

$$H_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$$

dir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**  $X$  in 0-simplekslerinin  $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \dots, \langle p_n \rangle$  olduğunu kabul edelim.

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} C_1^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dizisi elde edilir.  $\partial_0$  sıfır homomorfizmi olduğundan

$$Z_0^\kappa(X) = Ker\partial_0 = C_0^\kappa(X)$$

olur.  $C_0^\kappa(X)$  in elemanları  $\sum_{i=0}^n k_i p_i, k_i \in \mathbb{Z}$  şeklindedir. İddia ediyoruz ki

$$B_0^\kappa(X) = \left\{ \sum_{i=0}^n k_i p_i \in C_0^\kappa(X) \mid \sum k_i = 0 \right\}$$

dır. İddiamız doğruysa,

$$\varphi : Z_0^\kappa(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sum k_i p_i \longrightarrow \sum k_i$$

dönüşümü örtendir ve çekirdeği  $B_0^\kappa(X)$  dir. Birinci İzomorfizm Teoreminden  $H_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$  olur. (3.19) eşitliğini göstermek için çift taraflı kapsamayı gösterelim.

$$\gamma = \sum_{i=0}^n k_i p_i \in C_0^\kappa(X) \text{ ve } \sum k_i = 0$$

olsun. Herhangi bir  $p \in X$  seçersek  $X$ ,  $\kappa$ -yol bağlantılı olduğundan her  $p_i \in X$  için  $p$  den  $p_i$  ye bir  $\kappa$ -yol vardır.  $\sigma_i : p$  den  $p_i$  ye olan  $\kappa$ -yolu oluşturan dijital 1-simplekslerin kümesi olsun.  $\partial_1(\sigma_i) = p_i - p$  olduğu açıktır.

$$\sum_{i=0}^n k_i \sigma_i \in C_1^\kappa(X)$$

dir ve

$$\partial_1\left(\sum_{i=0}^n k_i \sigma_i\right) = \sum_{i=0}^n k_i \partial_1(\sigma_i) = \sum k_i (p_i - p) = \sum k_i p_i - \left(\sum k_i\right)p$$

olur.  $\sum k_i = 0$  olduğundan

$$\gamma = \sum_{i=0}^n k_i p_i = \partial_1(\sum k_i \sigma_i) \in B_0^\kappa(X)$$

dır. Tersine  $\gamma \in B_0^\kappa(X)$  ise  $\gamma = \partial_1(\sum k_i e_i)$ ,  $e_i \in C_1^\kappa(X)$  yani  $e_i$ , 1-simplekstir ve  $e_i = \langle p_{r_i}, p_{s_i} \rangle$  şeklindedir. Böylece

$$\gamma = \sum k_i \partial_1(e_i) = \sum k_i \partial_1(\langle p_{r_i}, p_{s_i} \rangle) = \sum k_i (p_{s_i} - p_{r_i}) = \sum k_i p_{s_i} - \sum k_i p_{r_i}$$

olur.  $k_i$  iki kez ve zıt işaretli olarak tekrarladığından  $\sum k_i = 0$  dır. Böylece

$$H_0^\kappa(X) = Z_0^\kappa(X)/B_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$$

elde edilir. □

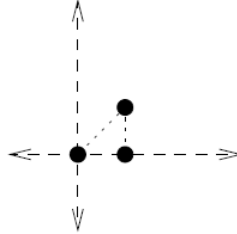
**Teorem 3.20**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^m$  bir dijital görüntü ve  $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$   $X$ 'in  $\kappa$ -yol bileşenlerinin koleksiyonu olsun. O zaman

$$\text{rank}(H_0^\kappa(X)) = \text{card}\Lambda$$

dır. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:** (Arslan, Karaca ve Öztel 2008) de Teorem 3.18' in bir sonucudur.

□



Şekil 8: (X,8)

**Örnek 3.21**  $X, Y$  ye dijital homotopi denk iken  $H_0^{\kappa_0}(X)$  ve  $H_0^{\kappa_1}(Y)$  izomorf olmayabilir.

$$MSC'_8 = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$$

dijital görüntüsünü ele alalım.  $MSC'_8$  dijital basit kapalı 8-eğri ve 8-büzülebilir bir egridir. Bu nedenle tek noktalı uzaya dijital (8, 8)-homotopi denktir. Teorem 3.17 ve 3.18 den  $H_1^8(MSC'_8) = \mathbb{Z}$  ve  $H_1^8(\{*\}) = 0$  dır.

Sonuç olarak  $MSC'_8 \simeq_{(8,8)} \{*\}$  iken  $H_1^8(MSC'_8)$  ve  $H_1^8(\{*\})$  izomorf değildir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Örnek 3.22**  $X = \{p_0 = (0, 0), p_1 = (1, 0), p_2 = (1, 1)\}$  ve  $(X, 8)$  Şekil 8 de  $(p_0 < p_1 < p_2)$  ile sıralanmıştır. O zaman  $C_0^8(X)$ ,  $C_1^8(X)$  ve  $C_2^8(X)$  sırayla

$$\{\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle\}, \{\langle p_0p_1 \rangle, \langle p_1p_2 \rangle, \langle p_0p_2 \rangle\}$$

ve

$$\{\langle p_0p_1p_2 \rangle\}$$

ile üretilmiş serbest abel gruplardır. Böylece,

$$H_0^8(X) = \mathbb{Z} \text{ ve } H_q^8(X) = 0, q \neq 0.$$

(Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Teorem 3.23**  $MSC'_8 = \{(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)\}$  nün simpleksler homoloji grubu,

$$H_q^8(MSC'_8) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır. (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).

**Örnek 3.24**

$$MSC'_8 = \{c_0 = (-1, 0), c_1 = (0, -1), c_2 = (0, 1), c_3 = (1, 0)\}$$

(Şekil 4) ve sıralama bağlantısı ile yönlendirilmiştir.  $C_q^8(MSC'_8) = 0, q > 1$ .  $C_1^8(MSC'_8)$  ve  $C_0^8(MSC'_8)$  sırasıyla;

$$\{\langle c_0c_1 \rangle, \langle c_1c_3 \rangle, \langle c_2c_3 \rangle, \langle c_0c_2 \rangle\}$$

ve

$$\{\langle c_0 \rangle, \langle c_1 \rangle, \langle c_2 \rangle, \langle c_3 \rangle\}$$

ile üretilmiş serbest abel gruplardır. Böylece

$$Ker\partial_1 \cong \mathbb{Z}, Im\partial_1 \cong \mathbb{Z}^3, Ker\partial_0 \cong \mathbb{Z}^4$$

ve

$$H_q^8(MSC'_8) = \mathbb{Z}, q = 0, 1 \text{ ve } H_q^8(MSC'_8) = 0, q \neq 0, 1.$$

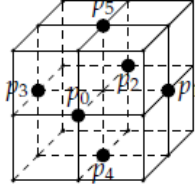
(Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Teorem3.25**  $MSS'_{18}$  nün dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

dır. (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).



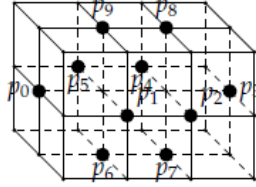


Şekil 9  $MSS'_{18}$

**Teorem 3.26**  $MSS_{18}$  in dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^{18}(MSS_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^3, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır. (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).

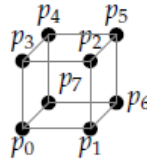


Şekil 10  $MSS_{18}$

**Teorem 3.27**  $MSS'_6$  in dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^6(MSS'_6) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^5, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır. (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).



Şekil 11  $MSS'_6$

### 3.5 Euler Karakteristik

**Tanım 3.28**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  bir dijital görüntü ve  $q \geq 0$  için  $\alpha_q, (X, \kappa)$  daki dijital  $q$ -simplekslerin sayısı olsun.  $(X, \kappa)$  nın Euler karakteristiği;

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q$$

şeklinde tanımlanır. (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).

**Teorem 3.29** Bir  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  dijital görüntüsü için

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank} H_q^\kappa(X)$$

dir. (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**

$$0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

zincir kompleksini gözönüne alalım. Her bir  $C_q^\kappa(X)$  rankı  $\alpha_q$  olan bir serbest değişmeli gruptur. Ayrıca

$$H_q^\kappa(X) = Z_q^\kappa(X) / B_q^\kappa(X) = \ker \partial_q / \text{Im} \partial_{q+1}$$

olduğundan  $\text{rank} H_q^\kappa(X) = \text{rank} Z_q^\kappa(X) - \text{rank} B_q^\kappa(X)$  olur. Her  $q \geq 0$  için

$$0 \longrightarrow Z_q^\kappa(X) \longrightarrow C_q^\kappa(X) \longrightarrow B_{q-1}^\kappa(X) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Buradan

$$\alpha_q = \text{rank} C_q^\kappa(X) = \text{rank} Z_q^\kappa(X) + \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \chi(X, \kappa) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \alpha_q = \sum_{q=0}^m (-1)^q (\text{rank} Z_q^\kappa(X) + \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X)) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} Z_q^\kappa(X) + \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X) \end{aligned}$$

bulunur.  $\text{rank} B_{q-1}^\kappa(X) = 0 = \text{rank} B_m^\kappa(X)$  olduğundan  $q-1$  yerine  $q$  alabiliriz.

$$\begin{aligned} \chi(X, \kappa) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} Z_q^\kappa(X) + \sum_{q=0}^m (-1)^{q+1} \text{rank} B_q^\kappa(X) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q [\text{rank} Z_q^\kappa(X) - \text{rank} B_q^\kappa(X)] \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} H_q^\kappa(X) \end{aligned}$$

elde edilir.  $\square$

**Teorem 3.30**  $(X, \kappa_0) \subset \mathbb{Z}^{n_0}$  ve  $(Y, \kappa_1) \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorf iki dijital görüntü olsun. Bu durumda

$$\chi(X, \kappa_0) = \chi(X, \kappa_1)$$

dir. (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).

**İspat:**  $X$  ve  $Y$  dijital görüntüleri arasında  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfizm varsa Teorem 3.16 dan

$$H_q^{\kappa_0}(X) \cong H_q^{\kappa_1}(Y)$$

olur. Teorem 3.28 den ispat elde edilir.  $\square$

**Örnek 3.31**  $MSS_{18}$  in Euler karakteristiğini hesaplayalım. (Khalimsky 1987).

$$\chi(MSS_{18}, 18) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 10 - 20 + 8 = -2$$

Teorem 3.28 i kullanarak hesaplırsak yine aynı sonucu elde ederiz:

$$\chi(MSS_{18}, 18) = \text{rank}H_0^{18}(MSS_{18}) - \text{rank}H_1^{18}(MSS_{18}) = 1 - 3 = -2.$$

**Örnek 3.32**  $MSS'_{18}$  nün Euler karakteristiğini hesaplayalım. (Khalimsky 1987).

$$\begin{aligned} \chi(MSS'_{18}, 18) &= \text{rank}H_0^{18}(MSS'_{18}) - \text{rank}H_1^{18}(MSS'_{18}) + \text{rank}H_2^{18}(MSS'_{18}) \\ &= 1 - 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

## 4 Normal Çarpım Yakınlığı

**Tanım 4.1**  $u$  ve  $v$  pozitif tamsayılar ve  $1 < u \leq v$  olsun.  $\{(X_i, \kappa_i)\}_{i=1}^v$  dijital görüntü olsun.  $\prod_{i=1}^v X_i$  kartezyen çarpımı üzerinde  $NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_u)$  yakınlığı aşağıdaki gibi tanımlanır.  $x_i, x'_i \in X_i$  için  $p = (x_1, \dots, x_v)$  ve  $q = (x'_1, \dots, x'_v)$  nün  $NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_u)$ -yakın olması için gerek ve yeter şart

- en az 1 ve en fazla  $u$  tane  $i$  indisi için,  $x_i$  ve  $x'_i$   $\kappa_i$ -yakındır ve
- diğer tüm  $i$  indisleri için  $x_i = x'_i$  dir. (Boxer 2017).

**Önerme 4.2**  $NP(\kappa, \lambda) = NP_2(\kappa, \lambda)$  yani verilen  $x, x' \in (X, \kappa)$ ,  $y, y' \in (Y, \lambda)$ ,  $p = (x, y)$  ve  $p' = (x', y')$  nün  $X \times Y$  de  $NP(\kappa, \lambda)$ -yakın olması için gerek ve yeter şart  $p$  ve  $p'$  nün  $NP_2(\kappa, \lambda)$ -yakın olmasıdır. (Boxer ve Karaca 2012).

**Teorem 4.3**  $X \in \mathbb{Z}^m$  ve  $Y \in \mathbb{Z}^n$ ,  $NP_2(c_m, c_n) = c_{m+n}$  için yani  $(X, c_m) \times (Y, c_n)$  için normal çarpım yakınlığı ile  $X \times Y$  için  $c_{m+n}$ -yakınlığı çakışır. Örnek verilecek olursa  $X \in \mathbb{Z}^m$ ,  $Y \in \mathbb{Z}^n$  ve  $a < m$  ya da  $b < n$  dir. O zaman  $NP_2(c_a, c_b) \neq c_{a+b}$  dir. (Boxer ve Karaca 2012).

**Önerme 4.4**  $v > 2$  olsun. Bu durumda

$$NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v) = NP_2(NP_{v-1}(\kappa_1, \dots, \kappa_{v-1}), \kappa_v)$$

dır. (Boxer 2017).

**İspat:**  $1 < i \leq v$  için  $x_i, x'_i \in X_i$  olsun. O zaman  $p = (x_1, \dots, x_v)$  ve  $p' = (x'_1, \dots, x'_v)$ ,  $NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)$ -yakın olması için gerek ve yeter şart en az 1 ve en fazla  $v$  tane  $i$  indisi için  $x_i$  ve  $x'_i$  de  $\kappa_i$ -yakın ve  $i$  nin tüm diğer indisleri için  $x_i = x'_i$  dür. Buradan  $p = (x_1, \dots, x_v)$  ve  $p' = (x'_1, \dots, x'_v)$  nün  $NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)$ -yakın olması için gerek ve yeter şart

- $\{1, \dots, v-1\}$  arasında 1 den  $u$  ya kadar olan  $i$  indisleri için  $x_i$  ve  $x'_i$   $\kappa_i$ -yakın,  $\{1, \dots, v-1\}$  arasındaki diğer tüm indisler için  $x_i = x'_i$
- $\{1, \dots, v-1\}$  arasındaki 1 den  $u-1$  e kadar olan indisler için  $x_i$  ve  $x'_i$   $\kappa_i$ -yakın ve tüm diğer indisler için  $x_v$  ve  $x'_v$ ,  $\kappa_v$ -yakın olmasıdır.

Böylece  $p = (x_1, \dots, x_v)$  ve  $p' = (x'_1, \dots, x'_v)$ ,  $NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)$ -yakın olması için gerek ve yeter şart  $p$  ve  $p'$  nün  $NP_2(NP_{v-1}(\kappa_1, \dots, \kappa_{v-1}), \kappa_v)$ -yakın olması gerekir.

**Örnek 4.5**  $x_i, x'_i \in (X_i, \kappa_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  olsun.  $x_1$  ve  $x'_1$   $\kappa_1$ -yakın,  $x_2$  ve  $x'_2$   $\kappa_2$ -yakın ve  $x_3 = x'_3$  dür. Bu durumda  $X_1 \times X_2 \times X_3$  de  $(x_1, x_2, x_3)$  ve  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  noktaları  $NP_2(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ -yakındır fakat  $X_1 \times X_2$  de  $(x_1, x_2)$  ve  $(x'_1, x'_2)$  noktaları  $NP_1(\kappa_1, \kappa_2)$ -yakın değildir. Böylece

$$NP_2(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \neq NP_2(NP_1(\kappa_1, \kappa_2), \kappa_3)$$

dür. (Boxer 2017).

**Teorem 4.6**  $f, g : (X, \kappa) \rightarrow (Y, \lambda)$  fonksiyon olsun.  $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu  $\forall x \in X$  için  $H(x, 0) = f(x)$  ve  $H(x, m) = g(x)$  şartlarını sağladığında  $H$  in bir homotopi olması için gerek ve yeter şart  $H$  in  $(NP_1(\kappa, c_1), \lambda)$ -sürekli olmasıdır. (Boxer 2017).

**İspat:**  $x, x' \in X$  ve  $t, t' \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$  olmak üzere  $X \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$  de  $(x, t)$  ile  $(x', t')$  noktaları  $(NP_1(\kappa, c_1), \lambda)$  - yakın olsun. Bu durumda

1.  $x$  ve  $x'$   $\kappa$ -yakın ve  $t = t'$  ya da
2.  $x = x'$  ve  $t$  ile  $t'$  de 2-yakın yani  $|t - t'| = 1$  dir.

$H$  bir homotopi olsun. O halde  $f$  ve  $g$  fonksiyonları sürekli ve  $X \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$  de verilen  $(x, t)$  ve  $(x', t')$  noktaları  $(NP_1(\kappa, c_1), \lambda)$ -yakın olması durumunda yukarıdaki maddeler değerlendirilirse

- 1 durumunda,  $H$  bir homotopi olduğundan,  $H(x, t)$  ve  $H(x', t) = H(x', t')$  eşit ya da  $\lambda$ -yakındır.
- 2 durumunda,  $H$  bir homotopi olduğundan,  $H(x, t)$  ve  $H(x', t') = H(x, t')$  eşit ya da  $\lambda$ -yakındır.

Bu nedenle  $H$ ,  $(NP_1(\kappa, 2), \lambda)$ -sürekli dir.

$H$  in  $(NP_1(\kappa, c_1), \lambda)$  - sürekli olduğunu kabul edelim.  $\kappa$ -yakın olan  $x, x'$  noktaları için

$$f(x) = H(x, 0)$$

ve

$$H(x', 0) = f(x')$$

noktaları eşit ya da  $\lambda$ -yakındır, yani  $f$  sürekli dir. Benzer şekilde

$$g(x) = H(x, m)$$

ve

$$g(x') = H(x', m)$$

eşit ya da  $\lambda$ -yakındır, yani  $g$  süreklidir. Ayrıca  $H$  ın sürekliliğinden  $H(x, t)$  ve  $H(x', t)$  eşit ya da  $\lambda$ -yakındır, dolayısıyla  $H_t$  indirgenmiş fonksiyonu  $(\kappa, \lambda)$ -süreklidir. 2-yakın  $t, t'$  noktaları için  $H$  ın sürekliliğinden  $H(x, t)$  ve  $H(x, t')$  eşit ya da  $\lambda$ -yakındır, dolayısıyla  $H_x$  indirgenmiş fonksiyonu süreklidir. O halde  $H$  bir homotopidir.



## 5 Çarpımlar Üzerinde $NP_v$ ve Dönüşümler

$f_i : (X_i, \kappa_i) \rightarrow (Y_i, \lambda_i)$ ,  $1 < i \leq v$  verilen fonksiyonu için

$$\prod_{i=1}^v f_i : (\prod_{i=1}^v X_i, NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_v)) \rightarrow (\prod_{i=1}^v Y_i, NP_u(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$$

fonksiyonu

$$\prod_{i=1}^v f_i(x_1, \dots, x_v) = (f(x_1), \dots, f(x_v)),$$

$x_i \in X_i$  ile tanımlanır. (Boxer ve Karaca 2012).

**Teorem 5.1**  $f_i : (X_i, \kappa_i) \rightarrow (Y_i, \lambda_i)$ ,  $1 < i \leq v$  olsun. Bu durumda

$$f = \prod_{i=1}^v f_i : (\prod_{i=1}^v X_i, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)) \rightarrow (\prod_{i=1}^v Y_i, NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$$

çarpım dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart her  $f_i$  nin sürekli olmasıdır. (Boxer 2017).

**İspat:**  $x_i, x'_i \in X_i$  için  $p = (x_1, \dots, x_v)$  ve  $p' = (x'_1, \dots, x'_v)$  olsun. Her  $f_i$  nin sürekli ve  $p$  ile  $p'$  nün  $NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)$ -yakın olduğunu kabul edelim. Buna göre tüm  $i$  indisleri için  $x_i$  nin  $x'_i$  ne eşit ya da  $\kappa_i$ -yakındır, dolayısıyla  $f_i(x_i)$  ve  $f_i(x'_i)$  eşit ya da  $\lambda_i$ -yakındır. Bundan dolayı  $f(p)$  ve  $f(p')$  eşit ya da  $NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)$ -yakındır. Böylece  $f$  süreklidir.

Kabul edelim ki  $f$  sürekli ve tüm  $i$  indisleri için  $x_i$  ve  $x'_i$ ,  $\kappa_i$ -yakın olsun. Bu durumda  $f(p)$  ve  $f(p')$  eşit ya da  $NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$ -yakındır. Bundan dolayı her  $i$  indisi için  $f_i(x_i)$  ve  $f_i(x'_i)$  eşit ya da  $\lambda_i$ -yakındır. Böylece her  $f_i$  süreklidir.

**Örnek 5.2**  $X = \{(0,0), (1,0)\} \subset \mathbb{Z}^2$  ve  $Y = \{(0,0), (1,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$  olsun.  $f : (X, 8) \rightarrow (Y, 8)$  bir izomorfizm vardır.

$$X' = X \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^3$$

ve

$$Y' = Y \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^3$$

dijital görüntülerini ele alalım.  $X'$ , 4-bağlantılı ve  $Y' = (f \times 1_{\{0\}})(X')$ , 4-bağlantılı olmadığından  $f \times 1_{\{0\}}$  çarpım dönüşümü sürekli değildir. (Han 2005)

**Sonuç 5.3**  $x_i \in (X_i, \kappa_i)$  için  $p_i(x_1, \dots, x_v) = x_i$  olarak tanımlanan

$$p_i : (\prod_{i=1}^v X_i, NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_v)) \longrightarrow (X_i, \kappa_i)$$

izdüşüm dönüşümleri tüm  $1 < u \leq v$  için süreklidir. (Boxer 2017).

**İspat:**  $x_i, x'_i \in X_i$  için  $p = (x_1, \dots, x_v)$  ve  $p' = (x'_1, \dots, x'_v)$ ,  $(\prod_{i=1}^v X_i, NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_v))$  de  $NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_v)$ -yakındır. Buna göre tüm  $i$  indisleri için  $x_i = p_i(p)$  ve  $x'_i = p_i(p')$  eşit ya da  $\kappa_i$ -yakındır. Böylece  $p_i$  süreklidir.

**Örnek 5.4**  $X = [0, 1]_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$  ve  $Y = \{(0, 0), (1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$  olsun.  $X \times Y$ , 26-bağlantılı ve  $Y$ , 4-bağlantılı olmadığından  $p_2 : (X \times Y, 26) \rightarrow (Y, 4)$  izdüşüm dönüşümü sürekli değildir. (Boxer ve Karaca 2012).

**Teorem 5.5**  $X = \prod_{i=1}^v X_i$  ve

$$f_i : (X_i, \kappa_i) \rightarrow (Y_i, \lambda_i),$$

$1 \leq i \leq v$  olsun.

- $1 \leq u \leq v$  için  $f = \prod_{i=1}^v f_i : (X, NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_v)) \rightarrow (\prod_{i=1}^v Y_i, NP_u(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$  çarpım dönüşümü izomorfizm ise  $1 \leq i \leq v$  için  $f_i$  izomorfizmdir.
- Her  $i$  için  $f_i$  izomorfizm ise

$$f = \prod_{i=1}^v f_i : (X, NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_v)) \rightarrow (\prod_{i=1}^v Y_i, NP_u(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$$

çarpım dönüşümü izomorfizmdir. (Boxer 2017).

**İspat:**  $f$  izomorfizm olsun. Buna göre her  $f_i$ , 1-1 ve örten olmalıdır.  $x_i \in X_i$  olsun.  $I_i : X_i \rightarrow X$  fonksiyonu

$$I_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_v)$$

ile tanımlansın.  $p_i : X \rightarrow X_i$  ve  $p'_i : Y \rightarrow Y_i$  izdüşüm fonksiyonları olsun.  $I_i$ ,  $(\kappa_i, NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_v))$ -süreklili ve  $I'_i$ ,  $(\lambda_i, NP_u(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$ -süreklidir. Benzer şekilde  $I'_i : Y_i \rightarrow Y$  ile tanımlansın. Önerme 2.7 ve Teorem 5.3 den  $f_i = p'_i \circ f \circ I_i$  ve  $f_i^{-1} = p_i \circ f^{-1} \circ I'_i$  süreklidir. Bundan dolayı  $f_i$  izomorfizmdir.

$f_i : X_i \rightarrow Y_i$  bir izomorfizm olsun.  $f$ , 1-1 ve örtendir ve Teorem 5.1 den süreklidir.  $f_i^{-1}$  çarpım fonksiyonu olan  $f^{-1}$  ters fonksiyonu Teorem 5.1 den süreklidir. Böylece  $f$  izomorfizmdir.

**Örnek 5.6**  $X = \{(0, 0), (1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$  ve  $Y = \{(0, 0), (1, 0)\} \subset \mathbb{Z}^2$  olsun.  $(X, 8)$  ve  $(Y, 8)$  dijital görüntüleri izomorfiktir.

$$X' = X \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^3$$



ve

$$Y' = Y \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^3$$

dijital görüntülerini ele alalım.  $(X', 6)$  ve  $(Y', 6)$  izomorfik değildir. Çünkü  $(X', 6)$  6-bağlantısız ve  $(Y', 6)$  6-bağlantılıdır. (Boxer 2017).

**Teorem 5.7**  $f_i : (X_i, \kappa_i) \longrightarrow (Y_i, \lambda_i)$ ,  $1 < i \leq v$  olsun. Bu durumda

$$\prod_{i=1}^v f_i : (\prod_{i=1}^v X_i, NP_u(\kappa_1, \dots, \kappa_v)) \rightarrow (\prod_{i=1}^v Y_i, NP_u(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$$

çarpım dönüşümünün dijital izomorfizm olması için gerek ve yeter şart her  $f_i$  nin dijital izomorfizm olmasıdır. (Boxer 1994)



## 6 $NP_v$ ve Bağlantılık

**Teorem 6.1**  $i \in \{1, 2, \dots, v\}$  için  $(X_i, \kappa_i)$  dijital görüntüler olsun. O halde her  $i$  için  $(X_i, \kappa_i)$  nin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart  $(\Pi_{i=1}^v X_i, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v))$  nin bağlantılı olmasıdır. (Boxer 2017).

**İspat:** Kabul edelim ki her  $i$  için  $(X_i, \kappa_i)$  bağlantılı ve  $x_i, x'_i \in X_i$  olsun. Bu durumda  $X_i$  de  $x_i$  den  $x'_i$  ye kadar  $P_i$  yolları mevcuttur.  $p = (x_1, \dots, x_v)$ ,  $p' = (x'_1, \dots, x'_v) \in \Pi_{i=1}^v X_i$  olsun.

$$P'_1 = P_1 \times \{(x_2, \dots, x_v)\}$$

$$P'_i = \{(x'_1, \dots, x'_{i-1})\} \times P_i \times \{(x_{i+1}, \dots, x_v)\}, \quad 2 \leq i < v$$

$$P'_v = \{(x'_1, \dots, x'_{v-1})\} \times P_v$$

olmak üzere  $\cup_{i=1}^v P'_i$ ,  $\Pi_{i=1}^v X_i$  de  $p$  den  $p'$  ne bir yoldur.  $p$  ve  $p'$ ,  $\Pi_{i=1}^v X_i$  de keyfi olarak seçilmiş noktalar olduğundan  $(\Pi_{i=1}^v X_i, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v))$  bağlantılıdır.

Eğer  $(\Pi_{i=1}^v X_i, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v))$  bağlantılı ise Tanım 2.4 ve Teorem 5.3 den  $(X_i, \kappa_i) = p_i(\Pi_{i=1}^v X_i)$  bağlantılıdır.

**Örnek 6.2**  $X = [0, 1]_{\mathbb{Z}}$  ve  $Y = \{(0, 0), (1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2$  olsun. Buna göre  $X \times Y$ , 18-bağlantılıdır fakat  $Y$ , 4-bağlantılı değildir. Ayrıca  $X$ , 2-bağlantılıdır ve  $Y$ , 8-bağlantılıdır fakat  $X \times Y$ , 6-bağlantılı değildir. (Boxer ve Karaca 2012).

## 7 $NP_v$ ve Retraksiyon

**Tanım 7.1**  $Y \subset (X, \kappa)$  olsun.  $r : X \rightarrow Y$ ,  $(\kappa, \kappa)$ -süreklili fonksiyonu her  $y \in Y$  için  $r(y) = y$  eşitliğini sağlıyorsa  $r$  ye bir retraksiyon,  $A$  ya  $X$  in bir rekraktı denir. (Borsuk 1967).

**Teorem 7.2**  $A_i \subset (X_i, \kappa_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, v\}$  olsun. Bu durumda her  $i$  için  $A_i$  nin  $X_i$  de bir rekrakt olması için gerek ve yeter şart  $\prod_{i=1}^v A_i$  nin  $(\prod_{i=1}^v X_i, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v))$  de bir rekrakt olmasıdır. (Boxer 2017).

**İspat:** Her  $i$  için  $A_i$  nin  $X_i$  de bir rekrakt olduğunu kabul edelim.  $r_i : X_i \rightarrow A_i$  bir retraksiyon olsun. Teorem 5.1 den  $\prod_{i=1}^v r_i : \prod_{i=1}^v X_i \rightarrow \prod_{i=1}^v A_i$  süreklili olduğu için bir retraksiyondur.

Kabul edelim ki  $r : \prod_{i=1}^v X_i \rightarrow \prod_{i=1}^v A_i$  bir retraksiyon olsun.  $r_j : X_j \rightarrow A_j$  retraksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.  $a_i \in A_i$  olsun.  $f_j : X_j \rightarrow \prod_{i=1}^v X_i$  fonksiyonu

$$f_j(x) = (a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_v)$$

ile tanımlanır.  $f_j$  süreklidir. Teorem 2.12 ve Sonuç 5.3 den  $r_j = p_j \circ r \circ f_j$  süreklili ve retraksiyondur.

$A \subset (X, \kappa)$  olsun.  $1x$  den  $X$  in  $A$  ya retraksiyonuna bir  $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$   $\kappa$ -homotopisi varsa  $A$  ya  $X$  in deformasyon rekraktı denir. Her  $(a, t) \in Y \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$  için  $H(a, t) = a$  ise  $H$  ye güçlü deformasyon rekrakt ve  $A$  ya  $X$  in güçlü deformasyon rekraktı denir.

**Teorem 7.3**  $A_i \subset (X_i, \kappa_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, v\}$  olsun. Her  $i$  için  $A_i$  nin  $X_i$  de bir güçlü deformasyon rekrakt olması için gerek ve yeter şart  $A = \prod_{i=1}^v A_i$  nin  $X = (\prod_{i=1}^v X_i, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v))$  de bir güçlü deformasyon rekrakt olmasıdır. (Boxer 2017).

**İspat:**  $1 \leq i \leq v$  için  $A_i, X_i$  nin bir deformasyon rekraktı olsun. Tanım 2.13 ve Teorem 7.2 den  $A, X$  in bir deformasyon rekraktıdır. Her  $A_i, X$  in güçlü deformasyon rekraktı ise Tanım 2.13 den  $1x$  den  $X$  in  $A$  ya retraksiyonuna bir homotopi elde ederiz.  $A, X$  in güçlü deformasyon rekraktıdır.

$A$  nın,  $X$  in güçlü bir deformasyon rekraktı olduğunu kabul edelim. Bunun anlamı  $1x$  den  $X$  in  $A$  ya bir retraksiyonuna  $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$  homotopisi vardır. (Her  $(a, t) \in A \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$  için  $H(a, t) = a$  dır.) Teorem 7.2 den  $f_i : X_i \rightarrow X$  olsun.  $H_i : X_i \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X_i$ ,  $H_i(x, t) = p_i(H(f_i(x), t))$  ile tanımlanır. Bu

durumda  $H_i$ ,  $p_i \circ f_i = 1_{X_i}$  ile  $p_i \circ r \circ f_i$  arasında bir homotopidir, (Her  $a_i \in A_i$  için  $H_i(a_i, t) = a_i$ ).

$$p_i \circ r \circ f_i(X_j) \subset p_i \circ r(X) = p_i(A) = A_i$$

ve  $a \in A_i$  için  $p_i \circ r \circ f_i(a) = a$  olduğundan  $p_i \circ r \circ f_i$  bir retraksiyondur. Böylece  $A_i$ ,  $X_i$  nin güçlü deformasyon retraktıdır.



## 8 $NP_v$ ve Dijital Borsuk-Ulam Teoremi

$\mathbb{R}^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayı ve  $S^n$ ,  $\mathbb{R}^{n+1}$  de birim küre yani

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

olmak üzere Öklid topolojisinin Borsuk-Ulam teoremi  $f : S_n \rightarrow \mathbb{R}_n$  sürekli fonksiyon ise  $f(-x) = f(x)$  olacak şekilde  $x \in S^n$  nin mevcut olmasını ifade eder.  $n = 2$  için bu teoreme göre (Layman örneği) dünya yüzeyindeki iki zıt  $x$ ,  $x'$  noktaları aynı sıcaklık ve aynı barometrik basınca sahiptir. Her  $x \in X$  için  $-x \in X$  ise  $X \subset \mathbb{Z}^n$  kümesine orjine göre simetrik denir.

### Teorem 8.1

- $S$  orjine göre simetrik olmak üzere  $(S, \kappa)$ ,  $\mathbb{Z}^n$  de dijital basit kapalı eğri ve  $f : S \rightarrow \mathbb{Z}$  bir  $(\kappa, 2)$ -sürekli fonksiyon olsun. Bir  $x \in S$  için  $f(x)$  ve  $f(-x)$  eşit ya da 2-yakındır. Yani  $|f(x) - f(-x)| \leq 1$  dir. (Boxer 2006).
- $u \in \{1, n-1\}$  ve  $f : \delta B_n \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}$  de  $(c_n, c_u)$ -sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda bir  $x \in \delta B_n$  için  $f(x)$  ve  $f(-x)$  eşit ya da  $c_u$ -yakındır. (Boxer 2006).

$X_i \subset \mathbb{Z}^{n_i}$  için  $\mathbb{Z}^{\sum_{i=1}^v n_i}$  nin başlangıcına göre  $\prod_{i=1}^v X_i$  nin simetrik olması için gerek ve yeter şart  $\mathbb{Z}^{n_i}$  nin başlangıcına göre her  $i$  indisi için  $X_i$  nin simetrik olmasıdır.

$m, n \in \mathbb{N}$  için  $1 \leq m \leq n$  olsun. Her  $(\kappa, \lambda)$ -sürekli  $f : S \rightarrow \mathbb{Z}^m$  fonksiyonu için  $\mathbb{Z}^n$  de  $f(x)$  ve  $f(-x)$ , eşit veya  $\lambda$ -yakın olacak şekilde  $x \in X$  mevcutsa orjine göre simetrik olan  $S \subset \mathbb{Z}^{n+1}$  dijital görüntüsü  $(m, \kappa, \lambda)$ -Borsuk-Ulam özelliğine sahiptir denir.

### Teorem 8.2 Kabul edelim ki

- $v > 1$ ,
- $1 \leq i \leq v$  için  $S_i \subset \mathbb{Z}^{n_i+1}$ ,  $\mathbb{Z}^{n_i+1}$  nin başlangıcına göre simetriktir ve
- $m = \sum_{i=1}^v n_i$  ve  $\mathbb{Z}^{n_i+1}$  için  $\kappa_i$  ile  $\mathbb{Z}^{n_i}$  için  $\lambda_i$  yakınlıkları olmak üzere  $\prod_{i=1}^v S_i$ ,  $(m, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$ -Borsuk-Ulam özelliğine sahiptir.

O halde her  $i$  için  $S_i$ ,  $(n_i, \kappa_i, \lambda_i)$ -Borsuk-Ulam özelliğine sahiptir. (Boxer 2017).



## 9 $NP_v$ ve Temel Gruplar

**Teorem 9.1**  $(E, \kappa)$  ve  $(B, \lambda)$  dijital görüntüler ve  $g : E \rightarrow B$  ye  $(\kappa, \lambda)$ -sürekli örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $g$  nin  $(\kappa, \lambda)$ -örtülü dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her  $b \in B$  için  $M$  indeks kümesi vardır öyle ki

- $e_i \in g^{-1}(b)$  için  $g^{-1}(N_\lambda^*(b, 1, B)) = \cup_{i \in M} N_\kappa^*(e_i, 1, E)$  dir;
- $i, j \in M$  ve  $i \neq j$  ise  $N_\kappa^*(e_i, 1, E) \cap N_\kappa^*(e_j, 1, E) = \emptyset$  ve
- Her  $i \in M$  için kısıtlama dönüşümü  $g|_{N_\kappa^*(e_i, 1, E)} : N_\kappa^*(e_i, 1, E) \rightarrow N_\lambda^*(b, 1, B)$  bir  $(\kappa, \lambda)$ -izomorfizmdir. (Boxer 2006).

**Örnek 9.2**  $f(0)$  ve  $f(m-1)$ ,  $\kappa$ -yakın olacak şekilde  $f : [0, m-1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow C$ ,  $(2, \kappa)$ -sürekli örten fonksiyonuyla tanımlanan  $C \subset \mathbb{Z}^n$  bir basit kapalı  $\kappa$ -eğri olsun.  $g : \mathbb{Z} \rightarrow C$  yi  $g(z) = f(z \bmod m)$  olarak tanımlayalım O halde  $g$  örtülü dönüşümdür. (Han 2005).

**Önerme 9.3**  $i \in \{1, 2\}$  için  $g_i : E_i \rightarrow B_i$  bir  $(\kappa_i, \lambda_i)$ -örtülü dönüşüm olsun. Bu durumda

$$g_1 \times g_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$$

bir  $(NP_2(\kappa_1, \kappa_2), NP_2(\lambda_1, \lambda_2))$ -örtülü dönüşüm olur. (Boxer ve Karaca 2012).

**Sonuç 9.4**  $i \in \{1, \dots, v\}$  için  $g_i : E_i \rightarrow B_i$  bir  $(\kappa_i, \lambda_i)$  örtülü dönüşüm olsun. O halde

$$\prod_{i=1}^v g_i : \prod_{i=1}^v E_i \rightarrow \prod_{i=1}^v B_i$$

bir  $(NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$ -örtülü dönüşümdür. (Boxer 2017).

**Teorem 9.5**  $S \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$  dijital basit kapalı  $\kappa$ -eğrisi büzülebilir olmasın.  $s_0 \in S$  olsun. O halde  $S$  nin temel grubu  $\Pi_1^k(S, s_0) \approx \mathbb{Z}$  dir. (Boxer 1999).

**Teorem 9.6.** [31]  $i \in \{1, 2\}$  için  $S_i \subset (\mathbb{Z}^{n_i}, c_{n_i})$  büzülebilir olmayan dijital basit kapalı eğri olsun.  $s_i \in S_i$  olsun. Bu durumda temel grubu

$$\Pi_1^{c_{n_1} + c_{n_2}}(S_1 \times S_2, (s_1, s_2)) \approx \mathbb{Z}^2$$

dir.

**Teorem 9.7**  $i \in \{1, \dots, v\}$  için  $S_i \subset (\mathbb{Z}^{n_i}, \kappa_i)$  büzülebilir olmayan dijital basit kapalı eğri olsun.  $s_i \in S_i$  olsun. O halde

$$\Pi_1^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(\Pi_{i=1}^v S_i, (s_1, \dots, s_v)) \approx \mathbb{Z}^v$$

dir. (Boxer 2017).

**Tanım 9.8**  $n \in \mathbb{N}$  olsun. Her  $i \in M$  için  $e_i, b_i, M$  Teorem 9.1 deki gibi olmak üzere

$$p \mid_{N_\kappa^*(e_i, n)} : N_\kappa^*(e_i, n) \rightarrow N_\lambda^*(b_i, n)$$

kısıtlanmış dönüşümü bir izomorfizm ise bir  $(E, p, B)$ ,  $(\kappa, \lambda)$ -örtüsüne  $n$  yarıçaplı bir yerel izomorfizm denir. (Boxer 2017).

**Lemma 9.9**  $x_i \in (X_i, \kappa_i)$  olsun. Bu durumda

$$N_{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}^*((x_1, \dots, x_n), n) = \Pi_{i=1}^v N_{\kappa_i}^*(x_i, n)$$

dir. (Boxer 2017).

**Teorem 9.10**  $1 \leq i \leq v$  için  $p_i : (E_i, \kappa_i) \rightarrow (B_i, \lambda_i)$  sürekli ve  $n \in \mathbb{N}$  olsun. Her  $i$  için  $(E_i, p_i, B_i)$ , bir örtü ve  $n$  yarıçaplı yerel bir izomorfizm ise

$$\Pi_{i=1}^v p_i : \Pi_{i=1}^v E_i \longrightarrow \Pi_{i=1}^v B_i$$

çarpım fonksiyonu,  $n$  yarıçaplı yerel izomorfizm olan  $(NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$ -örtü dönüşümüdür. (Boxer 2017).



## 10 $NP_v$ ve Homotopik İlişki

### 10.1. Homotopik Dönüşüm ve Homotopi Tipi

**Teorem 10.1**  $1 \leq i \leq v$  için  $(X_i, \kappa_i)$  ve  $(Y_i, \lambda_i)$  dijital görüntüler olsun.

$$X = (\prod_{i=1}^v X_i, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_i))$$

ve

$$Y = (\prod_{i=1}^v Y_i, NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_i))$$

olsun.  $f_i, g_i : X_i \rightarrow Y_i$  sürekli ve  $H_i : X_i \times [0, m_i]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y_i$ ,  $f_i$  den  $g_i$  ye bir homotopi olsun. O halde  $F = \prod_{i=1}^v f_i : X \rightarrow Y$  ve  $G = \prod_{i=1}^v g_i : X \rightarrow Y$  çarpım dönüşümleri arasında  $H$  bir homotopisi vardır.  $H_i$  homotopileri noktalı homotopi ise  $H$  noktalı homotopidir. (Boxer 2017).

**İspat:**  $M = \max\{m_i\}_{i=1}^v$  olsun.  $H'_i : X_i \times [0, M]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y_i$ ,

$$H'_i(x, t) = \begin{cases} H_i(x, t) & , 0 \leq t \leq m_i \text{ ise} \\ H_i(x, m_i) & , m_i \leq t \leq M \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.  $H'_i, f_i$  den  $g_i$  ye bir homotopidir.

$$H : X \times M \rightarrow Y,$$

$$H((x_1, \dots, x_v), t) = (H'_1(x_1, t), \dots, H'_v(x_v, t))$$

olarak tanımlandığında  $H$  ın  $F$  den  $G$  ye bir homotopi olduğu görülür. Eğer  $H_i$  noktalı homotopi ise  $H$  noktalı homotopidir.  $\square$

**Teorem 10.2**

$$X_i \simeq_{\kappa_i, \lambda_i} Y_i, \quad 1 \leq i \leq v. \quad (1)$$

ise

$$X = \prod_{i=1}^v X_i \simeq_{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)} Y = \prod_{i=1}^v Y_i \quad (2)$$

dir. (Boxer 2017).

Ayrıca (1) deki homotopi denklik  $x_i \in X$  ve  $y_i \in Y$  ye göre noktalı homotopi denklik ise (2) deki homotopi denklik de  $(x_1, \dots, x_v) \in X$  ve  $(y_1, \dots, y_v) \in Y$  ye göre noktalı homotopi denklidir.

**İspat:** Homotopi denkliğin noktalı olmadığı durum için ispatı yapalım. Diğer durumda ispat benzer şekilde yapılır.

Bu hipoteze göre  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  ve  $g_i : Y_i \rightarrow X_i$  sürekli fonksiyonları ve  $f_i \circ g_i$  den  $1_{Y_i}$  ye  $K_i : Y_i \times [0, n_i]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y_i$  ve  $g_i \circ f_i$  den  $1_{X_i}$  ye  $H_i : X_i \times [0, m_i]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X_i$  homotopileri vardır.

$M = \max\{m_i\}_{i=1}^v$  olsun.  $H'_i : X_i \times [0, M]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X_i$ ,

$$H'_i(x, t) = \begin{cases} H_i(x, t) & , 0 \leq t \leq m_i; \\ H_i(x, m_i) & , m_i \leq t \leq M \end{cases}$$

ile tanımlanır.  $H'_i, g_i \circ f_i$  den  $1_{X_i}$  ye bir homotopidir.

$F = \prod_{i=1}^v f_i : X \rightarrow Y$  ve  $G = \prod_{i=1}^v g_i : Y \rightarrow X$  olsun. Teorem 5.1 den  $F$  ve  $G$  süreklidir.  $H : X \times [0, M]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ ,

$$H(x_1, \dots, x_v, t) = (H'_1(x_1, t), \dots, H'_v(x_v, t))$$

ile tanımlanır.  $H$  ın  $G \circ F$  den  $\prod_{i=1}^v 1_{X_i} = 1_X$  ye bir homotopi olduğu kolayca görülebilir. Benzer olarak  $F \circ G \simeq 1_Y$  olduğu gösterilir. Bu durumda  $X \simeq Y$  dir.

## 10.2 Homotopik Benzerlik

**Tanım 10.3**  $X$  ve  $Y$  dijital görüntüler olsun.  $Y$  nin  $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$  ve  $X$  in  $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$  alt kümeleri için

- $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, Y = \cup_{j=1}^{\infty} Y_j$  ve her  $j$  için  $X_j \subset X_{j+1}, Y_j \subset Y_{j+1}$  dir
- $g_j \circ f_j \simeq_{\kappa, \kappa} 1_{X_j}$  ve  $f_j \circ g_j \simeq_{\lambda, \lambda} 1_{Y_j}$  olacak şekilde  $f_j : X_j \rightarrow Y_j, g_j : Y_j \rightarrow X_j$  sürekli fonksiyonları vardır,
- $m \leq n$  için  $Y_m$  de  $f_n | X_m \simeq_{\kappa, \lambda} f_m$  ve  $X_m$  de  $g_n | Y_m \simeq_{\lambda, \kappa} g_m$  dir.

şartları sağlamyorsa  $(X, \kappa)$  ve  $(Y, \lambda)$  dijital görüntüleri homotopik benzerdir

denir ve  $X \simeq_{\kappa, \lambda}^s Y$  şeklinde gösterilir.

Tüm bu homotopiler  $x_1 \in X_1$  ve  $y_1 \in Y_1$  noktalarına göre noktalı homotopi ise  $(X, x_1)$  ve  $(Y, y_1)$  e noktalı homotopik benzerdir denir.  $(X, x_1) \simeq_{\kappa, \lambda}^s (Y, y_1)$  veya  $(X, x_1) \simeq^s (Y, y_1)$  şeklinde gösterilir. (Han 2005).

**Teorem 10.4**  $1 \leq i \leq v$  için  $X_i \simeq_{\kappa_i, \lambda_i}^s Y_i$ , ve  $X = \prod_{i=1}^v X_i, Y = \prod_{i=1}^v Y_i$  olsun. O halde

$$X \simeq_{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)} Y$$

dir.  $x_i \in X_i, y_i \in Y_i$  noktalarında  $X_i \simeq_{\kappa_i, \lambda_i}^s Y_i$  benzerliği noktalı ise  $x_0 = (x_1, \dots, x_v) \in X, y_0 = (y_1, \dots, y_v) \in Y$  noktalarında

$$X \simeq_{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)}^s Y$$

benzerliği de noktalıdır. (Boxer 2017).

**İspat:** Noktalı olmayan durum için ispatı verelim. Diğer durum için de ispat benzer şekilde yapılır.  $j \in \mathbb{N}$  için

$$X_{i,j} \subset X_{i,j+1}, X_i = \cup_{j=1}^{\infty} X_{i,j}, Y_{i,j} \subset Y_{i,j+1}, Y_i = \cup_{j=1}^{\infty} Y_{i,j}$$

olacak şekilde  $X_{i,j} \subset X_i, Y_{i,j} \subset Y_i$  dijital görüntüleri vardır ve  $m \leq n$  için  $Y_{i,m}$  de  $f_{i,n} \mid X_{i,m} \simeq_{\kappa_i, \lambda_i} f_{i,m}, X_{i,m}$  de  $g_{i,n} \mid X_{i,m} \simeq_{\lambda_i, \kappa_i} g_{i,m}$  ve

$$g_{i,j} \circ f_{i,j} \simeq_{\kappa_i, \kappa_i} 1_{X_{i,j}}, f_{i,j} \circ g_{i,j} \simeq_{\lambda_i, \lambda_i} 1_{Y_{i,j}}$$

olacak şekilde  $f_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow Y_{i,j}, g_{i,j} : Y_{i,j} \rightarrow X_{i,j}$  sürekli fonksiyonları vardır.  $X_j = \prod_{i=1}^v X_{i,j}, Y_j = \prod_{i=1}^v Y_{i,j}$  olsun.

$$X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, Y = \cup_{j=1}^{\infty} Y_j, X_j \subset X_{j+1}, Y_j \subset Y_{j+1}$$

dir.

$$f_j = \prod_{i=1}^v f_{i,j} : X_j \rightarrow Y_j$$

ve

$$g_j = \prod_{i=1}^v g_{i,j} : Y_j \rightarrow X_j$$

olsun. Teorem 5.1 den  $f_j, (NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$ -sürekli ve  $g_j$  de  $(NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v), NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v))$ -sürekli.

Teorem 10.1 den

$$g_j \circ f_j \simeq_{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)} 1_{X_j}$$

ve

$$f_j \circ g_j \simeq_{NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)} 1_{Y_j}$$

dir. Ayrıca Teorem 10.1 den  $m \leq n$  için  $Y_m$  ve  $X_m$  de sırasıyla

$$f_n \mid X_m \simeq_{(NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v))} f_m$$

ve

$$g_n \mid Y_m \simeq_{(NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v), (NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v))} g_m$$

dir. Bu ispatı tamamlar.

## 11 $NP_v$ Yakınlığı ve Homoloji

**Teorem 11.1**  $1 \leq i \leq v$  için  $(X_i, \kappa_i)$  ve  $(Y_i, \lambda_i)$ , dijital görüntüler ve  $f_i : (X_i, \kappa_i) \rightarrow (Y_i, \lambda_i)$ , olsun.  $X = \prod_{i=1}^v X_i$  ve  $Y = \prod_{i=1}^v Y_i$  için

$$f = \prod_{i=1}^v f_i : (X, NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)) \rightarrow (Y, NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v))$$

çarpım dönüşümü ise

$$H_q^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) \simeq H_q^{NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)}(Y)$$

dijital izomorfizmdir. (Boxer 2006).

**İspat:**  $f$  dijital izomorfizm olsun.  $f$  nin sürekliliğinden  $X$  de  $NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)$ -yakın  $t = (x_1, \dots, x_v)$  ve  $t' = (x'_1, \dots, x'_v)$  noktaları için  $f(t) = f(t')$  ya da  $f(t)$  ve  $f(t')$ ,  $Y$  de  $NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)$ -yakındır.  $0 \leq q \leq m$  için zincir dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$f_{\#} : C_q^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) \rightarrow C_q^{NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)}(Y)$$

$$\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \rightarrow f_{\#}(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) = \langle f(p_0), f(p_1), \dots, f(p_q) \rangle,$$

$f_{\#}$  da iyi tanımlı ve birebir ve örten fonksiyondur. Bu nedenle

$$C_q^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) \simeq C_q^{NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)}(Y)$$

dır. Böylece

$$H_q^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) \simeq H_q^{NP_v(\lambda_1, \dots, \lambda_v)}(Y)$$

dır. □

**Teorem 11.2**  $1 \leq i \leq v$  için  $(X_i, \kappa_i)$  tek noktalı dijital görüntü ise  $X = \prod_{i=1}^v X_i$  için

$$H_q^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \text{ ise} \\ 0, & q > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır. (Boxer 2017).

**İspat:**  $X$  de  $0 \leq q \leq m$  için  $NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)$ -simpleks olmadığı için

$$C_q^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) = 0$$

dır. Bu nedenle  $0 \leq q \leq m$  için

$$H_q^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) = 0$$

dir.  $q = 0$  olsun.  $(NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v), 0)$ -simpleks bazlı  $C_0^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X)$  serbest abelyen grubu için

$$C_0^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) \simeq \mathbb{Z}$$

dir. Aşağıdaki kısa dizi elde edilir.

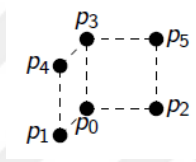
$$0 \xrightarrow{\partial_1} C_0^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dir. Buradan  $\text{Im } \partial_1 = 0$  ve  $\text{Ker } \partial_0 \simeq \mathbb{Z}$  dir. Böylece

$$H_0^{NP_v(\kappa_1, \dots, \kappa_v)}(X) = \mathbb{Z}$$

dir. □

**Örnek 11.3**  $X = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\} \subset \mathbb{Z}^2$  olsun.  $Y = [0, 1] \subset \mathbb{Z}$  olsun.  $X \times Y \subset \mathbb{Z}^3$  homolojisini hesaplayalım.



Sekil12 :  $X \times Y$

$X \times Y = \{p_0 = (0, 0, 0), p_1 = (1, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0), p_3 = (0, 0, 1), p_4 = (1, 0, 1), p_5 = (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^3$  için

$$p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5$$

dir.

$X \times Y$  dijital görüntüsü  $\mathbb{Z}^3$  de  $NP_2(8, 2)$ -yakındır.  $\mathbb{Z}^3$  de  $NP_2(8, 2)$ -yakınlık, 18-yakınlığa eşittir.

$C_0^{18}(X \times Y)$ ,  $C_1^{18}(X \times Y)$ ,  $C_2^{18}(X \times Y)$  ve  $C_3^{18}(X \times Y)$  serbest abelyan gruplarının bazıları sırasıyla,

0-simpleksler

$$\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle,$$

1-simpleksler

$$\begin{aligned} e_0 &= \langle p_0 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_0 p_2 \rangle, e_2 = \langle p_0 p_3 \rangle, e_3 = \langle p_0 p_4 \rangle, e_4 = \langle p_0 p_5 \rangle \\ e_5 &= \langle p_3 p_2 \rangle, e_6 = \langle p_3 p_5 \rangle, e_7 = \langle p_3 p_1 \rangle, e_8 = \langle p_3 p_4 \rangle, e_9 = \langle p_2 p_5 \rangle \\ e_{10} &= \langle p_2 p_1 \rangle, e_{11} = \langle p_5 p_4 \rangle, e_{12} = \langle p_1 p_4 \rangle \end{aligned}$$

2-simpleksler

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \langle p_0 p_3 p_2 \rangle, \sigma_1 = \langle p_0 p_3 p_1 \rangle, \sigma_2 = \langle p_0 p_3 p_4 \rangle, \sigma_3 = \langle p_0 p_3 p_5 \rangle \\ \sigma_4 &= \langle p_0 p_2 p_5 \rangle, \sigma_5 = \langle p_0 p_2 p_1 \rangle, \sigma_6 = \langle p_0 p_5 p_4 \rangle, \sigma_7 = \langle p_3 p_2 p_5 \rangle \\ \sigma_8 &= \langle p_3 p_2 p_1 \rangle, \sigma_9 = \langle p_3 p_5 p_4 \rangle, \sigma_{10} = \langle p_3 p_1 p_4 \rangle, \sigma_{11} = \langle p_0 p_1 p_4 \rangle\end{aligned}$$

ve

3-simpleksler

$$\delta_0 = \langle p_0 p_3 p_2 p_1 \rangle, \delta_1 = \langle p_0 p_3 p_5 p_4 \rangle$$

dır.

Aşağıdaki kısa dizi ele alınırsa;

$$0 \xrightarrow{\partial_4} C_3^{18}(X \times Y) \xrightarrow{\partial_3} C_2^{18}(X \times Y) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{18}(X \times Y) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{18}(X \times Y) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

homoloji tanımından elde edilir ki,

$$\text{Im } \partial_4 = B_3^{18}(X \times Y) \cong \{0\}, \text{ Ker } \partial_3 = Z_3^{18}(X \times Y) \cong \{0\},$$

$$H_3^{18}(X \times Y) = Z_3^{18}(X \times Y) / B_3^{18}(X \times Y) \cong \{0\}$$

$$\text{Im } \partial_3 = B_2^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}^2, \text{ Ker } \partial_2 = Z_2^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}^4,$$

$$H_2^{18}(X \times Y) = Z_2^{18}(X \times Y) / B_2^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$\text{Im } \partial_2 = B_1^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}^3, \text{ Ker } \partial_1 = Z_1^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}^8,$$

$$H_1^{18}(X \times Y) = Z_1^{18}(X \times Y) / B_1^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}^5$$

$$\text{Im } \partial_1 = B_0^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}^5, \text{ Ker } \partial_0 = Z_0^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}^6,$$

$$H_0^{18}(X \times Y) = Z_0^{18}(X \times Y) / B_0^{18}(X \times Y) \cong \mathbb{Z}$$

Sonuç olarak

$$H_q^{18}(X \times Y) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \text{ ise} \\ \mathbb{Z}^5, & q = 1 \text{ ise} \\ \mathbb{Z}^2, & q = 2 \text{ ise} \\ 0, & q \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

## 12 Sonuç Ve Öneriler

Bu çalışmada cebirsel topolojideki bazı özelliklerin dijital versiyonları bulunmaya çalışıldı. İlk olarak dijital topolojinin temel kavramları verilerek, dijital temel grubun nasıl oluşturulduğu ifade edildi. Sonra dijital simpleksler homoloji grubu tanımlanarak, çeşitli dijital görüntülerin homoloji grupları belirlendi. Ayrıca Euler karakteristiği, relatif homoloji grupları ve homoloji için çeşitli sonuçlara ulaşıldı. Daha sonra normal çarpım yakınlığı tanımlanarak, bazı dijital yüzeylerin normal çarpım yakınlığı hesaplandı. Normal çarpım yakınlığının homotopik ilişkisi ifade edildi. Son olarak normal çarpım yakınlığının homotopi yardımı ile hesaplandığı, ifade edildi. Bundan sonraki aşamada ulaşılan sonuçlar kullanılarak, Dijital Kohomoloji grupları, Dijital Steenrod karesi gibi cebirsel topoloji kavramları, normal çarpım yakınlığı baz alınarak incelenebilir.

### 13. KAYNAKLAR

Arslan, H., Karaca, I., Oztel, A. "Homology groups of n-dimensional digital images", *XXI. Turkish National Mathematics Symposium*, B1-13, Turkey, (2008).

Burak, G., Karaca, I. "Digital Borsuk-Ulam theorem", *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 43(2): 477-499, (2017).

Boxer, L., "Digital products, wedges and covering spaces", *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25:159-171, (2006).

Boxer, L., "Generalized normal product adjacency in digital Topology", (25 July 2019 ), <http://arxiv.org/abs/1608.03204v2>, (2017).

Han, S.E., "Connected sum of digital closed surfaces", *Information Sciences*, 176:332-348, (2006).

Boxer, L., "Digitally continuous functions", *Pattern Recognition Letters*, 15: 833-839, (1994).

Boxer, L., "A classical construction for the digital fundamental Group", *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 10: 51-62, (1999).

Boxer, L., "Properties of digital homotop", *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22: 19-26, (2005).

Boxer, L., "Homotopy properties of sphere-like digital images", *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24: 167-175, (2006).

Boxer, L., Karaca, I., Oztel, A., "Topological Invariants in Digital Images", *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 11(2):109-140, (2011).

Han, S.E., "Connected sum of digital closed surfaces", *Information Sciences* 176 p.332\_348, (2006).

Khalimsky, E., "Motion, deformation, and homotopy in finite spaces", *Proceedings IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 227-234, (1987).

Borsuk, K., "Theory of retracts, Polish Scientific Publisher Warsaw", (1967).



L. Boxer, “Digitally Continuous Functions, Pattern Recognition Letters”, 15,833-839, (1994).

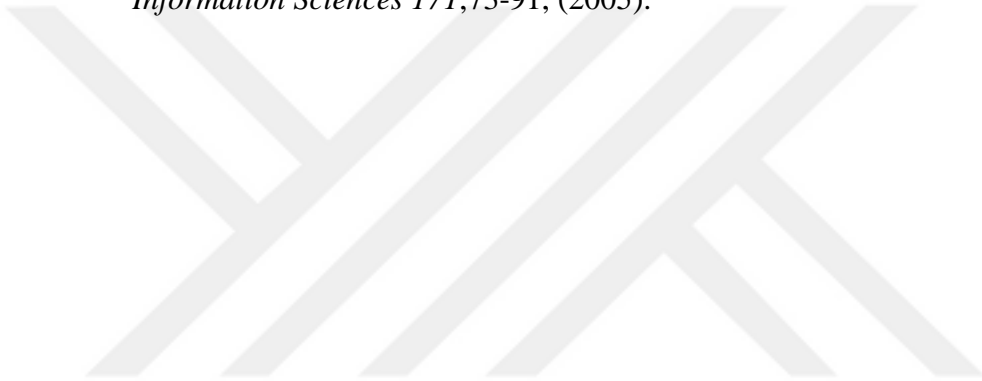
L. Boxer, “A Classical Construction for the Digital Fundamental Group”, *Pattern Recognition Letters* 10, 51-62, (1999).

L. Boxer, “Digital Products, Wedges, and Covering Spaces”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 25,159-171, (2006).

L. Boxer, “Digital Shy Maps, Applied General Topology 18 (1) ”, 143 152, (2017).

L. Boxer and I. Karaca, “Fundamental Groups for Digital Products”, *Advances and Applications in Mathematical Sciences* 11(4),161-180, (2012).

S.-E. Han, “Non-product property of the digital fundamental group”, *Information Sciences* 171,73-91, (2005).



## 14. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :GÖKHAN SARICAN

Doğum Yeri ve Tarihi : ANTALYA, 20/07/1993

Lisans Üniversite : PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ

Y. Lisans Üniversite :PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ

Elektronik posta :gsarican07@gmail.com

**Konferans listesi** :

- IV. ULUSLARARASI MULTİDİSİPLİNER ÇALIŞMALARI KONGRESİ  
18-19 Ekim 2018 Girne/KKTC