

**PARALEL YÖNELİMLİ ELEKTRİK VE MANYETİK ALANLAR İÇİN  
İKİ BİLEŞENLİ DİRAC DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**NURDAN YILDIZ**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK  
ANABİLİM DALI**

**MERSİN  
AĞUSTOS - 2019**

**PARALEL YÖNELİMLİ ELEKTRİK VE MANYETİK ALANLAR İÇİN  
İKİ BİLEŞENLİ DİRAC DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**NURDAN YILDIZ**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**


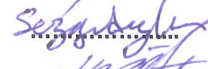

**FİZİK  
ANABİLİM DALI**

**Danışman  
Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT**

**MERSİN  
AĞUSTOS - 2019**

## ONAY

Nurdan YILDIZ tarafından Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT danışmanlığında hazırlanan “Paralel Yönelimli Elektrik ve Manyetik Alanlar İçin İki Bileşenli Dirac Denkleminin Tam Çözümleri” başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 23 Ağustos 2019 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT	
Üye	Prof. Dr. Sezgin AYDIN	
Üye	Dr.Öğr. Üy. Hasan Fatih KIŞOĞLU	

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...18.10..... 2019 tarih ve  
2019.10.18/11626 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



*Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.*

## ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

## ETHICAL DECLARATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

23./08/ 2019

İmza / Signature

  
MURDAN YILDIZ

## ÖZET

### Paralel Yönelimli Elektrik ve Manyetik alanlar İçin İki Bileşenli Dirac Denklemine Tam Çözümleri

Bu tez çalışmasında paralel yönelimli elektrik ve manyetik alanların bir arada olduğu bir durum için Minkowski uzayında iki bileşenli Dirac denklemi çözülmüştür. Elde edilen denklem çözümlerle parçacığın hareketini temsil eden dalga fonksiyonu belirlenmiştir. Ayrıca yarı-klasik bir yaklaşımla parçacığın pozitif ve negatif frekanslı çözümleri için Bogoliubov katsayıları belirlenerek parçacık yaratma sayı yoğunluğu hesaplanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Dış Alanlar, Dirac Denklemi, Tam Çözümler, Parçacık Yaratma, Bogolyubov Dönüşüm Yöntemi.

**Danışman:** Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT, Mersin Üniversitesi, Fizik Ana Bilim Dalı, Mersin

## ABSTRACT

### Exact Solutions of the Two-Component Dirac Equation for Parallel Electric and Magnetic Fields

In this thesis, the two-component Dirac equation in Minkowski space is solved for a case where parallel oriented electric and magnetic fields are together. The wave equation representing the motion of the particle is determined by solving the obtained equation. In addition, Bogoliubov coefficients were calculated for the positive and negative frequency solutions of the particle with a semi-classical approach and the particle creation number density is calculated.

**Keywords:** External Fields, Dirac Equation, Exact Solutions, Particle Creation, Bogoliubov Transformation Technique.

**Advisor:** Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT, Department of Physics, University of Mersin, Mersin.



## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın bütün aşamalarında bilgi ve birikimini benimle paylaőan her zaman örnek aldığım ve her zaman örnek alacağım değerli hocam Prof. Dr. Kenan Söğüt'e sonsuz teőekkürlerimi bir borç bilirim. Her konuda öneri ve eleőtirileriyle destek sağlayan Prof. Dr. Ali Havare, Doc. Dr. Mustafa Saltı, Doc. Dr. Oktay Aydođdu ve Dr. Hilmi Yanar' a teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu çalıőmadaki katkılarından dolayı Dr. Öğr. y. Evrim Ersin Kangal hocama teşekkür ederim. Tez savunma sınavımda tavsiyeleriyle bana yol gösteren jüri yeleri Prof. Dr. Sezgin Aydın ve Dr. Öğr. y. Hasan Fatih Kıőođluna da teşekkür ederim.

Bu alıőma Mersin Üniversitesi Bilimsel Araőtırma Projeleri Birimi (BAP) tarafından 2017-2-TP2-2558 no'lu proje ile desteklenmiőtir. Desteklerinden dolayı teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
İÇ KAPAK	ii
ONAY	iii
ETİK BEYAN	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
KISALTMALAR ve SİMGELER	x
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI</b>	<b>7</b>
2.1. Schrödinger Denklemi	7
2.1.1. Coulomb Potansiyeli için çözümler	7
2.1.2. Manyetik Alan İçin Çözümler	10
2.2. Klein-Gordon Denklemi	13
2.2.1. Coulomb Alanı için KG Denklemine Çözüm	14
2.2.2. Manyetik Alan için KG Denklemine Çözümü	19
2.3. Dirac Denklemi ve Dış Alanlar İçin Tam Çözümleri	22
2.3.1. Merkezi Potansiyel İçin Dirac Denklemine Değişkenlerinin Ayrılması	23
2.3.2. Coulomb Potansiyeli İçerisindeki Bir Dirac Parçacığı İçin Radyal Denklemlerin Çözümü	27
2.3.3. Sabit Bir Manyetik Alan İçin Dirac Denklemine Çözümü	34
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b>	<b>37</b>
3.1. Hamiltonyen-Jacobi Denklemine Çözümü	38
3.2. Dirac Denklemine Çözümü	40
3.3. Bogoliubov Dönüşüm Yöntemi ve Parçacık Yaratma Sürecinin İncelenmesi	43
<b>4. BULGULAR ve TARTIŞMA</b>	<b>48</b>
4.1. Klein-Gordon Denklemine Çözümü	48
4.2. Dirac Denklemine Çözümü	52
4.3. Hamilton-Jacobi Denklemine Çözümü	58
4.3.1. Parçacık Yaratma	61
<b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER</b>	<b>65</b>
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	68

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1. Coulomb Alanındaki Parçacık Temsili	8
Şekil 2.2. Parçacık z- yönünde uygulanan manyetik alana maruz kalmaktadır.	19
Şekil 5.1. Parçacık yaratma sayı yoğunluğunun manyetik alana göre değişimi	65
Şekil 5.2. Parçacık yaratma sayı yoğunluğunun elektrik alana göre değişimi	66
Şekil 5.3. Parçacık yaratma sayı yoğunluğunun elektrik ve manyetik alana göre değişimi	66



## KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
KED	Kuantum Elektrodinamiği
KRD	Kuantum Renkdinamiği
HJ	Hamilton- Jacobi
$A_\mu$	Uzay-zamanında elektromanyetik alan tensörü
$\Psi$	Dalga Fonksiyonu
$\hat{U}_{sc}(t)$	Schrödinger için konuma bağlı işlemci
$\hat{V}_{sc}(t)$	Schrödinger için zamana bağlı işlemci
$\hat{U}_{KG}(x)$	Klein-Gordon için konuma bağlı işlemci
$\hat{V}_{KG}(t)$	Klein-Gordon için zamana bağlı işlemci
$\gamma^\mu$	Dirac matrisleri
$\Psi_D$	Dört bileşenli spinörler
$\vec{\sigma}$	Pauli spin matrisleri
$g^{\alpha\mu}$	Metrik tensör
H	Hermityen işlemcisi
$\hat{H}_D$	Dirac hamiltonyeni

## 1.GİRİŞ

Kuantum mekaniği ve Einstein'ın özel göreliliği yirminci yüzyılın ilk yarısı boyunca geliştirilen modern fiziğin ana yapısı için temel oluşturur. Görelî dalga denklemleri ile betimlenen fiziksel sistemler temel tanecikleri kapsar. Genellikle bu temel tanecikler, spin-0 olan parçacıklar için Klein-Gordon denklemi ile spin- $\frac{1}{2}$  olan parçacıklar için de Dirac denklemi ile ele alınır. Elektron için yazılan Dirac kuramının birçok başarısı vardır: Bu denklem Lorentz kovaryant bir denklemdir ve kuramın öngördüğü karşıt-parçacık olan pozitron deneysel olarak keşfedilmiştir. Dirac denkleminin müon ve nötrinolar gibi diğer leptonlara ve hatta kuarklara hatalı modellerle uygulanması bu kuramın nicel başarılarına yol açmıştır. Görelî etkilerin küçük tedirginmeler olarak görüldüğü atom ya da molekül fiziğinden farklı olarak temel parçacık fiziği ve alan kuramlarına uygun bir giriş yapmak için görelî dalga denklemleri ile başlamak zorunludur [1].

Ancak Dirac denklemi ile çalışmanın zorlukları da vardır. Bunlardan birisi, tek bir elektron için yazılan kuramı birçok elektron sistemine genişletmektir. Bir diğeri ise çok daha temel bir yapısı vardır, şöyle ki, tek bir elektronu temsil etmek için başlayan kuram, elektronların sonsuz denizde negatif enerji durumların da olmasından dolayı, tıpkı bir "çok-parçacık sistemi" gibi ayrılmaz biçimde bağlı olan bir sistem olarak sonuçlanır. Şiddetli bir elektrik alanın varlığında, bir elektron yalnız bir elektron gibi değil, sonsuz sayıda çok elektron ve pozitron barındıran bir sistem gibi davranır. Böylece tek-elektron kuramı, sadece bir serbest elektronun sınırlı bir durumunda geçerlidir ve bir "çok-elektronlu" kuram ile değiş-tokuş edilmelidir.

İçinde bulunduğumuz durumda sonsuz genişlikli ve değişken "parçacık" sayılı bir sistem için uygun olan bir temsil "alan" dır (tıpkı elektromanyetik alandaki foton gibi...). Bu yüzden diyebiliriz ki parçacık bakış açısıyla başlarsak, ilk olarak görelilik kuramını sağlayan bir parçacık kuramı araştırılır ve uygun kuramın bir "çok-parçacık kuramı" olduğunu buluruz. Bu nedenle bir "çok-parçacık" sisteminin uygun temsili "alan" dır.

Salt bir elektronun kuantum kuramını oluşturmak için herhangi bir zorluk yoktur, ancak elektromanyetik alanlarla çiftlenen bir sistem için kuantum elektrodinamik (KED) olarak bilinen bir görelî kuantum kuramında çok ciddi derin köklü zorluklar vardır, şöyle ki fiziksel niceliklerin hesaplamalarının sonuçlarında karşılaşılan sonsuzluklar bulunur.

Kuantumlu elektromanyetik alanların kuramı 1927'de Dirac'ın çalışmasıyla başlar ve 1930'larda Jordan, Wigner ve Fermi'nin çalışmalarıyla devam eder İlk buluş ancak 1940'larda Tomonaga-Schwinger-Feynman ve Dyson ile gelir. Hesaplamalarda integrallerde sonsuzlukların

devam etmesine rağmen, bu kuram sonlu sonuçları elde edebilmek için sonsuzlukları tanımlı, kovaryant bir yolla gidermeyi başarmıştır. Lamb kayması ve “g-anomali” gözlemleriyle mükemmel uyum içinde olan sonuçlar elde edilmiştir. 1940 ve 1950 yılları arası KED çalışmalarının çok hararetli olduğu yıllardır. Bu yıllarda, bu “renormalizasyon” kuramı üzerinde daha ileri düzeyde çalışmalar yapmak ve sonsuzlardan kurtulmak için çok emek harcanmıştır. Şimdiye kadar, bu problem için tatmin edici bir çözüm henüz bulunabilmiş değildir ve aynı zamanda fizikçiler ilgi odaklarını diğer alanlara çevirmiş durumlar: şimdilerde esas amaç temel parçacıklar, bunların etkileşmeleri ve bu etkileşmelerin birleştirilmesidir.

Son yıllarda parçacık fiziğinin gelişimi birkaç buluştan oluşur ve bu buluşlar güçlü, elektromanyetik ve zayıf etkileşmelerin  $SU(3)_{renk} \times SU(2)_{zayıf} \times U(1)$  ayar alanlarını içeren “standart model”ini doğurmuştur. Glashow-Salam-Weinberg [GSW]  $SU(2)_{zayıf} \times U(1)$  ayar kuramı elektromanyetik ve zayıf etkileşmeler için birleşik bir betimleme sağlar. Bu kuram yüksüz zayıf etkileşmelerin varlığını, tılsımlı kuarkın varlığını ve  $W^{\pm}$  ve  $Z^0$  zayıf bozonlarının varlığını öngörür ve bunların tümü deneysel olarak kanıtlanmıştır. Aynı zamanda kuantumlu  $SU(3)_{renk}$  ayar kuramı, ya da diğer adıyla Kuantum Renk dinamiği (KRD); kuarkların ve gluonların arasındaki güçlü etkileşmelerin aday kuramı olarak inşa edilmiştir. Bu parçacıklar tüm gözlenen güçlü etkileşen parçacıkların ya da hadronların yapı taşlarıdır. KRD bir protonu: (i) yüksek enerjilerde neredeyse hiç etkileşmeyen kuarklar, karşıt kuarklar ve gluonların toplamı olan bir sistem olarak (KRD’nin asimptotik serbest doğasından ötürü) ya da (ii) hapsedilmiş, değerlik kuarklarıyla şekillenmiş bir sistem olarak (çünkü KRD renk hapsi ile uyumludur ) iki farklı biçimde resmeder.

Yüksek enerjilerde olguları betimlemek için görelî dalga denklemleri incelenir. Bu durumda incelenen denklemlerin Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalması gerekir. Göresiz dalga denklemi betimlemesinden görelî dalga denklemi betimlemesine geçiş yaparken göresiz kuramın bazı kavramlarının yeniden incelenmesi gerekir [2].

Uzaysal ve zamansal koordinatlar kuramının içinde eşdeğer olarak alınmalı,

- i.  $\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim \frac{\hbar}{m_0 c}$  olduğundan, görelî bir parçacık  $\approx \frac{\hbar}{m_0 c}$  değerinden daha hassas yerelleştirilemez; aksi halde  $E > 2m_0 c^2$  için parçacık yaratma oluşur. Böylece, bir parçacık harici sınırlamalar sebebiyle, yaklaşık olarak  $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c}$  Compton dalga boyundan daha küçük bir hacme hapsedilemezse, serbest parçacık fikrinin bir anlamı olmaz. Yoksa parçacık kendiliğinden parçacık-karşıt parçacık yaratma sebebiyle kendine eşlik eden parçacıklara sahip olur.

- ii. Eğer parçacığın konumu belirsiz ise, yani  $\Delta x \sim \frac{\hbar}{m_0 c}$  ise, zaman da belirsiz olur ve şu ifade ile verilir:  $\Delta t \sim \frac{\Delta x}{c} > \frac{\hbar}{m_0 c^2}$
- Göresiz bir kuramda  $\Delta t$  istediği kadar küçük olabilir, çünkü  $c \rightarrow \infty$ . Böylece, bir parçacığı sabit  $t$  zamanında bir  $r$  belirli konumunda bulma olasılığını betimleyen  $\varrho(x, y, z, t)$  olasılık yoğunluğu kavramını yeniden düşünmenin gerekliliğini fark ederiz[2].
- iii. Yüksek (görelî) enerjilerde genellikle parçacık-karşıt parçacık çiftleri yaratma biçiminde görülen çift yaratma ve çift yok-olma süreçleri meydana gelir. Böylece, görelî enerjilerde parçacık sayısının korunumu artık geçerli bir varsayım değildir. Görelî bir kuram çift yaratma, boşluk kutuplanması, parçacık sayısının korunumu vb. süreçleri betimleme kabiliyetine sahip olmalıdır.

Artık özel görelilik kuramının ilkeleri genel olarak kabul edildiğinden geçerli bir kuantum kuramının oluşturulması mutlaka özel görelilik kuramının gerekliliklerini yerine getirmelidir: bir eylemsizlik sisteminde geçerli olan hareket yasaları tüm eylemsizlik sistemlerinde geçerli olmak zorundadır. Matematiksel olarak ifade edildiğinde, görelî bir kuantum kuramı Lorentz değişmezliği biçiminde formüle edilmelidir. Bunları kısaca özetlersek [3]:

- a. Verilen fiziksel bir sistem için, sistem hakkında her şeyi bilmemizi sağlayan ve sistemi özetleyen bir  $\Phi$  durum fonksiyonu vardır. Görelî tek-parçacık kuramını başlangıçta geliştirdiğimizde, genellikle durum fonksiyonunun bir koordinat kavrayışıyla ilgileniriz,  $\psi(q_i, \dots, s_i, \dots, t)$ .  $\psi(q, s, t)$  tüm klasik serbestlik derecelerinin karmal bir fonksiyonudur. Burada spin  $s$ , doğası gereği kuantum mekaniksel bir niceliktir. Dalga fonksiyonunun doğrudan bir fiziksel yorumu yoktur; ancak  $|\psi(q_i, \dots, q_n, s_i, \dots, s_n, t)|^2 \geq 0$  ifadesi sistemin  $t$  anında  $(q_1, \dots, s_n)$  değerlerine sahip olma olasılığı olarak yorumlanabilir. Açık olarak bu olasılık yorumu  $t$  anında tüm  $q_1, \dots, s_n$  değerleri için pozitif  $|\psi|^2$  katkılarının, fiziksel olarak kabul edilebilen tüm  $\psi$  dalga fonksiyonları için sonlu olmalarını gerektirir.
- b. Her fiziksel gözlenebilir, çizgisel bir hermityen işlemci ile temsil edilir. Özel olarak,  $p_i$  kanonik momentumu için koordinat bakışımında buna karşılık gelen işlemci şöyle yazılır[3]:  $p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i}$ .
- c.  $\Omega \Phi_n = \omega_n \Phi_n$  ise, fiziksel sistem  $\Omega$  işlemcisinin bir öz-durumudur.  $\Phi_n$ ,  $\omega_n$  öz-değerine karşılık gelen  $n$ . öz-durumdur. Hermityen bir işlemci için  $\omega_n$  gerçel bir sayıdır. Koordinat bakışımında bu ifadenin genel hali  $\Omega(q, s, t) \psi_n(q, s, t) = \omega_n \psi_n(q, s, t)$  biçimindedir.
- d. Açılım postülası, keyfi bir dalga fonksiyonunun ya da durum fonksiyonunun; sıra değiştiren  $\Omega_n$  işlemcilerinin tam kümesinin ortanormal öz-fonksiyonları olan  $\psi_n$ 'lerin tam kümesine açılabileceğini ifade eder.  $\psi = \sum_n a_n \psi_n$  ise, ortanormallik durumu şöyle

yazılır:  $\sum_a \int (dq_1 \dots) \psi_n^*(q_1 \dots, s \dots, t) \psi_m(q_1 \dots, s \dots, t) = \delta_{mn} \cdot |a_n|^2$  sistemin  $n$ . öz-  
durumda olma olasılığını ifade eder.

- e. Fiziksel bir gözlenebilirin ölçüm sonucu öz-değerlerinden herhangi biridir. Özel olarak,  $\psi = \sum_n a_n \psi_n$  dalga fonksiyonuyla temsil edilen bir sistem için bir  $\Omega$  fiziksel gözlemlenebilirinin ölçümü  $|a_n|^2$  olasılığıyla  $\omega_n$  öz-değeri olarak ölçülür.  $\Omega$  gözlenebilirinin özdeş olarak hazırlanan sistemler üzerinde çok sayıda yapılan gözleminin ortalaması şöyle verilir:

$$\langle \Omega \rangle_\psi \equiv \sum_s \int \psi^*(q_1 \dots, s \dots, t) \Omega \psi(q_1 \dots, s \dots, t) (dq_1 \dots) = \sum_n |a_n|^2 \omega_n$$

- f. Fiziksel bir sistemin evrimi Schrödinger denklemi ile verilir:  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ . Bu denklemde  $H$  hamiltonyeni çizgisel bir işlemcidir, kapalı fiziksel sistemler için açıkça zamana bağlı değildir,  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , bu durumda öz-değerleri sistemin olası kararlı durumlarıdır.  $H$ 'nin çizgiselliğinden üst-üste binme ilkesi ortaya çıkar ve  $H$ 'nin hermityenlik özelliğinden olasılığın korunumu ifadesi şöyle yazılır:

$$\frac{d}{dt} \sum_a \psi^* \psi (dq_1 \dots) = \frac{i}{\hbar} \sum_a \int (dq_1 \dots) [(H\psi^* \psi - \psi^* (H\psi))] = 0$$

Bu altı tane ilke görelili bir kuantum kuramını oluşturmak için sürdürülmelidir.

En basit fiziksel sistem yalıtılmış bir serbest parçacıktır ve hamiltonyeni şöyle verilir:

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (1.1)$$

Kuantum mekaniğine geçildiğinde  $H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  ve  $\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$  alınır bu denklem Schrödinger denkleminde yol açar:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(q,t) \quad (1.2)$$

Denklem (1.1) ve (1.2) kovaryant değildirler ve tatmin edici değildir. Sol ve sağ yanlar Lorentz dönüşümleri altında farklı dönüşürler. Özel görelilik kuramına göre toplam enerji  $E$  ve momentum  $(p_x, p_y, p_z)$ ;  $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$  biçiminde verilen bir kontrovaryant dört-vektörün bileşenleri olarak dönüşürler. Bu dört-vektörün değişmez uzunluğu

$$\sum_{\mu=0}^3 p_\mu p^\mu \equiv p_\mu p^\mu \equiv \frac{E^2}{c^2} - p \cdot p \equiv m^2 c^2 \quad (1.3)$$

Burada  $m$  parçacığın kütlesi,  $c$  vakumda ışığın hızıdır.

Buradan görelili bir serbest parçacığın hamiltonyeni şöyle yazılır:

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.4)$$

Denklem (1.2)'nin görelî bir kuantum benzerini şöyle yazarız[3].

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi \quad (1.5)$$

Burada hemen sağ yandaki işlemcinin kare-kökünü yorumlama problemi karşımıza çıkar. Bunu açarsak, türev işlemcisinin tüm kuvvetlerini içeren bir denklem elde ederiz. Bunun sonucunda yerel-olmayan bir kuram karşımıza çıkar. Bu kuramları ele almak çok zordur ve Schrödinger denkleminin çekici olmayan bir başka çeşidi ile karşılaşılır, uzay ve zaman koordinatları simetrik olmayan bir biçimde görünür.

Matematiksel kolaylık açısından denklem (1.5) deki kare-köklü işlemci kaldırılır ve şöyle yazılır:

$$H^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.6)$$

Eşdeğer olarak, (1.5)'in iterasyonu ve  $[A, B] = 0$ ,  $A\psi = B\psi$  ise  $A^2\psi = B^2\psi$  sonucunu kullanarak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \psi \quad (1.7)$$

Bu denklem klasik dalga denklemi olarak tanınır

$$\left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad (1.8)$$

burada,  $\square = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Denklem (1.8) de detaya gitmeden önce, ilk olarak enerji bağıntısının karesinin alınması ile konumuz dışında kalan bir negatif-enerji kökü el ettiğimizi belirtmeliyiz:

$H = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Basit bir denklem elde etmek için, pozitif tanımlı enerjii feda ettik ve "fazladan" negatif-enerjili çözümlerin zorluğuyla karşılaştık. Bu zorluğun eninde sonunda üstesinden gelinir ve negatif-enerjili çözümler fiziksel yorumlama yeteneğini ortaya koyar. Özellikle, bu çözümler karşı-parçacıklar ile ilişkilidir ve doğada karşı-parçacıkların varlığı bu süreç için güçlü deneysel destek verir. Bu nedenle, denklem (1.6) ve ondan elde edilen (1.8)'i göz önüne alalım. İlk işimiz korunumlu bir akım oluşturmaktır, denklem (1.8) ikinci mertebe bir dalga denklemidir ve denklem (1.2)'deki Schrödinger biçiminden farklılaşmıştır, bunun üzerine göresiz kuramdaki olasılık yorumu temel alınmıştır. Bunu Schrödinger denkleminin benzeri yaparız, denklem (1.8)'i  $\psi^*$  ile çarparsak, eşlenik denklemi de  $\psi$  ile çarparsak ve farkını alırsak:

$$\psi^* \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0$$

$$\nabla^\mu (\psi^* \nabla_\mu \psi - \psi \nabla_\mu \psi^*) = 0$$

ya da

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \text{div} \frac{\hbar}{2im} [\psi^* (\nabla \psi) - \psi (\nabla \psi^*)] = 0 \quad (1.9)$$

elde ederiz. Burada  $\frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$  ifadesini  $\rho$  olasılık yoğunluğu olarak yorumlamak isterdik. Ancak, bu imkânsızdır, çünkü bu pozitif tanımlı bir ifade değildir. Bu nedenle geleneksel yöntemi izleriz ve geçici olarak denklem (1.8)'i, Schrödinger durumundaki gibi kolay bir olasılık yorumu elde etmek için, zamanla birinci mertebeden değişen bir denklem bulma umuduyla bir kenara atarız. Denklem (1.8) Klein-Gordon denklemi olarak bilinir ve görelî kuantum mekaniği için güçlü bir aday olarak yerini alır.

Bu tez çalışmasında görelî, spin- $\frac{1}{2}$  parçacıkları betimleyen Dirac denkleminin Feynman ve Gell-Mann tarafından önerilen iki bileşenli biçimi, bir dış elektromanyetik alanın varlığında çözülmüştür. Bu çözümler kullanılarak, şiddetli dış alanların etkisiyle oluşan fermiyonik parçacık sayı yoğunluğu hesaplanmıştır.

Tezin içeriği özetle şöyle düzenlenmiştir: Tezin ikinci bölümünde görelî ve göresiz kuantum mekaniğinin temel dalga ve parçacık denklemlerini tanıtmak amacıyla bu denklemlerin dış alanların varlığında çözümleri incelenmiştir. Bu amaçla Schrödinger, Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinin Coulomb ve manyetik alanların varlığında analitik çözümleri derlenmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, ele aldığımız problem için analitik çözümlerin elde edilmesinde kullanılacak yöntemi tanıtmak amacıyla, tez çalışmasında kullanılan biçimden daha farklı bir elektromanyetik potansiyel seçilerek Dirac denklemi çözülmüştür. Son bölüm olan Bulgular ve Tartışma bölümünde ise konuma bağlı bir manyetik alan ve zamana üstel olarak bağlı olan bir elektrik alan için Klein-Gordon ve iki bileşenli Dirac denklemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca fiziksel bir uygulama olması için Dirac parçacıklarının yaratılma sayı yoğunluğu hesaplanmıştır. Sonuç ve öneriler bölümünde ise elde edilen sonuçların değerlendirmesi yapılarak daha sonra yapılacak çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Bu bölümün amacı göresiz ve görelî kuantum mekaniğinin temel parçacık denklemlerini tanıtmaktır. Bu denklemlerin matematiksel biçimleri ve özellikleri verilerek bu alanda kaynak niteliğindeki kitaplarda da bulunabilecek bazı çözümler derlenmiştir. Bu amaçla Schrödinger, Klein-Gordon (KG) ve Dirac denklemlerinin elektrik ve manyetik alanların varlığında tam çözümleri elde edilmiştir.

### 2.1 Schrödinger Denklemi

Schrödinger denklemini elde etmenin bir yolu, aşağıdaki klasik enerji- momentum bağıntısı ile başlamaktır [4]:

$$\frac{p^2}{2m} + V = E \quad (2.1)$$

Buna kuantum reçetesi uygulandığında;

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}, \quad E \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Elde edilen işlemciler  $\Psi'$  dalga fonksiyonu üzerine etki ederse Schrödinger denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Bu denklemin uygulaması olması için, aşağıda Coulomb ve Manyetik alan durumları için bu denklemin çözümü verilmiştir.

#### 2.1.1.Coulomb Potansiyeli için çözümler

Coulomb potansiyelinin değeri aşağıdaki gibi verilir:

$$V = -\frac{Ze}{r} \quad (2.2)$$

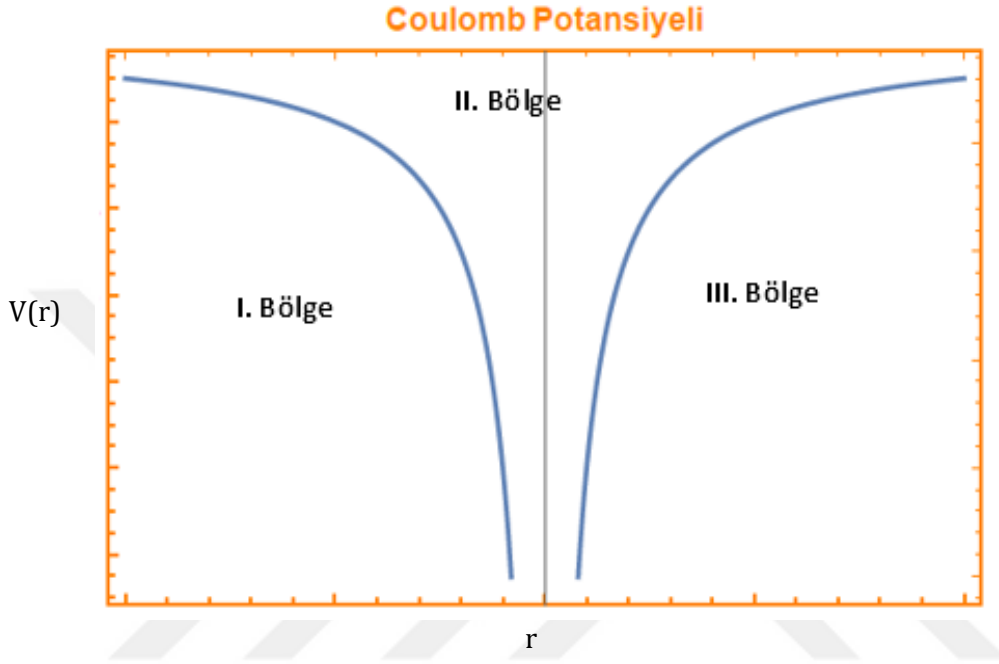
Bu durumda çözümleri bölgelere bağılı olarak elde edebiliriz.

Birinci bölgede herhangi bir potansiyel olmadığı için bu bölgedeki çözümler serbest parçacık gibi davranırlar. Bu bölgede denklemin çözümü,

$$\Psi_1(z, t) = Ae^{i(P_1z - iEt)} + Be^{-i(P_1z + iEt)} \quad (2.3)$$

Burada  $P_1 = (E^2 - m_0^2)^{\frac{1}{2}}$  kısaltması yapılmıştır. Benzer biçimde üçüncü bölge için çözümler de yine potansiyel olmadığı için serbest parçacık çözümleridir:

$$\Psi_3(z, t) = D e^{i(P_1 z - iEt)} + F e^{-i(P_1 z + iEt)} \quad (2.4)$$



Şekil 2.1. Coulomb potansiyelinin grafiksel gösterimi [5].

İkinci bölgede Coulomb potansiyeli etkilidir. Bu bölgede  $\vec{A} = 0$  ancak  $\phi \neq 0$  farklıdır. Bu nedenle  $\vec{P}^2$  işlemcisi küresel koordinatlarda yazılır ve yukarıdaki Schrödinger denkleminde uygulanırsa;

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] - \frac{Ze^2}{r} \Psi = E \Psi \quad (2.5)$$

bulunur.  $\Psi$  ifadesi  $\Psi = R(r)Y(\phi, \theta)$  biçiminde değişkenlere ayrılır ve denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{Y}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{Y}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} - \frac{Ze^2}{r} R Y \right] \right\} = E R Y \quad (2.6)$$

elde edilen denklemin her iki yanını  $R(r)Y(\phi, \theta)$  ile bölünürse,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{Y}{r^2 \sin(\theta)} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] - \frac{Ze^2}{r} = E \quad (2.7)$$

biçiminde olacaktır. Bu ifadenin her iki yanını  $r^2$  ile çarpılırsa,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] - Ze^2 r = Er^2 \quad (2.8)$$

denklemin açısal kısmını  $-l(l+1)$  durumuna eşitlenir. Bu durumda yukarıdaki denklem;

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - l(l+1) \right] - Ze^2 r = Er^2$$

$$\left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - l(l+1) \right] + \frac{2mZe^2 r}{\hbar^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} r^2 R$$

$$\left( \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E + \frac{Ze^2}{r} \right] R - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0$$

olur. Bu denklemde  $\alpha^2 = \frac{8m|E|}{\hbar^2}$ ,  $\lambda = \frac{2mZe^2}{\alpha\hbar^2} = \frac{Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2|E|}}$  tanımları ve  $\rho = \alpha r$  değişken değişimi yapıp denklem yeniden düzenlenirse;

$$\left( \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} \right) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{1}{4} R - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R + \frac{\lambda}{\rho} R = 0 \quad (2.9)$$

olur. Bu denklemin genel çözümü için,

$$R(\rho) = G(\rho) e^{-\frac{\rho}{2}}$$

biçiminde bir çözüm önerilir. Bu durumda elde edilen son denklem aşağıdaki biçime dönüşür:

$$G'' + \left[ \frac{2}{\rho} - 1 \right] G' + \left[ \frac{\lambda-1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] G = 0 \quad (2.10)$$

Bu diferansiyelin denklemin çözümü için

$$G = \rho^m L(\rho)$$

biçiminde bir çözüm önerilir. Bu çözüm önerisi denklemde yerine yazılırsa;

$$\rho L'' + [2(l+1)]L' + (\lambda - n - 1)L = 0 \quad (2.11)$$

Bu denklemin yapısı standart Laguerre fonksiyonlarının sağladığı diferansiyel denklemin yapısına uyar. Bu nedenle radyal çözümler Laguerre fonksiyonları türünden şöyle ifade edilecektir:

$$R(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\frac{(m-1)}{2}} L_l^m(\rho)$$

Enerji bağıntısı ise şöyle elde edilir:

$$E = \frac{m}{\left(\frac{\hbar}{2e^2} \left(p - \frac{m-1}{2}\right)\right)^2}$$

Böylece Coulomb potansiyeli için elde edilen tam çözümler şu biçimde olur:

$$\Psi(\rho, \phi, z) = e^{\frac{\rho}{2}} \rho^{\frac{(m-1)}{2}} L_l^m(\rho) e^{i(m\phi + k_z z)} \quad (2.12)$$

### 2.1.2. Manyetik Alan İçin Çözümler

Elektromanyetik alan içerisinde hareket eden parçacık için Schrödinger denklemini bu defa bir dış manyetik alanın varlığı için irdedeceğiz [4].

$$\left[\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m}\right] \Psi = (i\partial_0 - A_0)\Psi$$

Elektrik ve manyetik alanlar, elektromanyetik 4-vektör potansiyel cinsinden aşağıdaki gibi türetildiği için

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

parçacık sadece manyetik alan içerisinde hareket edecektir. Vektör potansiyel

$$\vec{A} = -\frac{x_B}{2} \hat{j} + \frac{y_B}{2} \hat{i}$$

olarak seçilirse, manyetik alan z-yönünde olur. Bu durumda I. Bölge için ve III. Bölge için (2.13) ve (2.14) denklemlerini elde edilir.

$$\Psi_1(z, t) = A e^{i(P_1 z - Et)} + B e^{-i(P_1 z + Et)} \quad (2.13)$$

$$\Psi_3(z, t) = D e^{i(P_1 z - Et)} + F e^{-i(P_1 z + Et)} \quad (2.14)$$

Ara bölgede vektör potansiyelin seçilen biçimi için çözümleri silindirik koordinatlarda aramak matematiksel kolaylık sağlar. Bu nedenle Schrödinger denkleminin silindirik koordinatlardaki ifadesi ile işlemler yapılır. Vektör potansiyel sadece konuma bağlı olduğu için ikinci bölgedeki dalga fonksiyonu  $\Psi_2(z, t) = e^{-iEt} \Phi(z)$  olarak seçilirse, denklemin yeni biçimi aşağıdaki gibi yazılır:

$$(\vec{P}^2 - e\vec{P} \cdot \vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{P} + e^2\vec{A}^2)^2 \Phi(\rho, \phi, z) = E\Phi(\rho, \phi, z) \quad (2.15)$$

Vektör potansiyelin silindirik koordinatlardaki ifadesi,

$$\vec{A}^2 = \frac{B^2}{4}\rho$$

için, denklem

$$\left( \vec{P}^2 + i \frac{eB\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e^2 B^2}{4} \rho \right) E\Phi(\rho, \phi, z) = 2mE\Phi(\rho, \phi, z)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{eB\hbar}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{e^2 \rho^2 B^2}{4\hbar^2} \right) E\Phi(\rho, \phi, z) = -\frac{2m}{\hbar^2} E\Phi(\rho, \phi, z)$$

olacaktır. Dalga fonksiyonu için yeniden

$$\Phi(\rho, \phi, z) = U e^{im_\phi \phi + ik_z z}$$

biçiminde bir çözüm önerelim. Bu tanımdan sonra,

$$\frac{d^2 U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - \frac{m_\phi^2}{\rho^2} U - \left( \frac{e\rho B}{2\hbar} \right)^2 U + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{eBm}{\hbar} - k_z^2 \right) U = 0 \quad (2.16)$$

olacaktır. Bu denklemi çözmek için  $\lambda = \frac{4m}{eB\hbar} \left[ E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right] - 2m_\phi$  ve  $\sqrt{\frac{eB}{\hbar}} \rho = x$  dönüşümleri yapılırsa, denklem aşağıdaki gibi daha sade bir hale dönüşür:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dU}{dx} - \frac{m_\phi^2}{x^2} U - x^2 U + \lambda U = 0 \quad (2.17)$$

Bu denklemin çözümlerini elde edebilmek için ilk olarak yeni değişken  $x$  için sonsuzdaki davranışa bakılır, bu durumda denklemin biçimi

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - x^2 U = 0 \quad (2.18)$$

olur ve çözümler

$$U(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

biçiminde davranacaktır.  $x = 0$  civarında denklemin sağlayacağı biçim,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dU}{dx} - \frac{m_\phi^2}{x^2} U = 0$$

olur ve bu denklemin çözümü olarak;

$$U(x) = x^{|m_\phi|} e^{-\frac{x^2}{2}} G(x)$$

biçiminde bir fonksiyon önerilir. Bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left( \frac{2|m_\phi| + 1}{x} - 2x \right) \frac{dG}{dx} + (\lambda - 2|m_\phi| - 2)G = 0 \quad (2.19)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklem için  $y=x^2$  dönüşümü yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + \left( \frac{|m_\phi| + 1}{y} - 2x \right) \frac{dG}{dy} + (\lambda - 2|m_\phi| - 2)G = 0 \quad (2.20)$$

Bu denklemin çözümü için serisel çözüm yöntemini kullanırız:  $G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) \left[ a_n + \left( \frac{|m_\phi| + 1}{y} \right) \right] a_{n+1} + \left( \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2} (|m_\phi| + 1) \right) a_n y^{n-1} \right] = 0 \quad (2.21)$$

Bu denklemde katsayılar arasındaki ilişki için şu bağıntıya ulaşılır:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - \left( \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2} (|m_\phi| + 1) \right)}{(n+1)(n+1+|m_\phi|)} \quad (2.22)$$

Limit  $n \rightarrow \infty$  durumunda katsayılar arasındaki ilişki,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n}$$

Bu nedenle serinin yakınsak olabilmesi için aşağıdaki koşul sağlanmalıdır:

$$\lambda = 4n + 2(|m_\phi| + 1)$$

Bu durumda  $\lambda$  değeri yerine yazıldığında enerji için

$$\lambda = \frac{4m}{eB\hbar} \left[ \left( \frac{E}{\hbar} \right)^2 - \left( \frac{m}{\hbar} \right)^2 - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right] - 2m_\phi$$

$$E = 2\hbar \left( n + \frac{\hbar k_z^2}{2eB} + \frac{m_\phi}{2} + \frac{|m_\phi| + 1}{2} \right) \quad (2.23)$$

ifadesi elde edilir. Buradaki  $n$  ve  $m_\phi$  kuantum sayılarını tanımlamaktadır. Bu durumda enerji düzeyleri kuantumludur. Diferansiyel denklemin çözümü ise Laguerre polinomları olacaktır:

$$G(y) = L_n^{|m_\phi|}(y)$$

Böylece, çözüm

$$U(\rho, \phi, z) = \left[ \left( \frac{eB}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \rho \right]^{|m_\phi|} e^{-\frac{eB}{4\hbar} \rho^2} \left( \frac{eB}{2\hbar} \rho^2 \right) L_n^{|m_\phi|} \quad (2.24)$$

olur ve normalize olmamış dalga fonksiyonu için şu ifade elde edilir:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = A_{n,m_\phi} \left[ \left( \frac{eB}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \rho \right]^{m_\phi} e^{-\frac{eB}{4\hbar} \rho^2} L_n^{|m_\phi|} \left( \frac{eB}{2\hbar} \rho^2 \right) e^{im_\phi \phi + ik_z z} \quad (2.25)$$

## 2.2.Klein-Gordon Denklemi

Atom altı taneciklerin görelî olmayan davranışı Schrödinger denklemi ile betimlenmişti. Görelî ve spinsiz parçacıkların davranışı ise Klein-Gordon (KG) denklemi ile ele alınır. Bu denklem görelî dinamikte toplam enerji ifadesi için verilen, görelî enerji-momentum  $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$  bağıntısına uyar. Dört-vektör gösteriminde bu ifade şöyle yazılır[6]:

$$P^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \quad (2.26)$$

Buradan başlanarak ve serbest parçacık durumları göz önüne alınarak  $p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$  ve  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$  için yukarıdaki denklem şu biçime dönüşür:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi = \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi \quad (2.27)$$

Bu denklem Klein-Gordon denklemi olarak adlandırılır. Bu denklemi Schrödinger, görelî olmayan ve kendi adını taşıyan denklemden önce bulmuştur ancak bu denklemi kullanmaktan vazgeçmiştir. Bunun nedeni denklemin (Coulomb potansiyeli de dâhil olmak üzere), hidrojen için Bohr enerji düzeylerini vermekte başarısız olması idi. Sorun elektronun spin- $\frac{1}{2}$  olması ve Klein-Gordon denkleminin spin-0 olan parçacıklara uygulanabilmesiydi. Ayrıca Klein-Gordon denklemi,  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  nin  $\mathbf{r}$  noktasında parçacığın bulunma olasılığını verdiğini söyleyen Born'un istatistiksel yorumu ile uyuşmamaktadır. Bu zorluğun kaynağı Klein- Gordon denkleminin zamana göre ikinci mertebeden olması ile ilgilidir. Böylece Dirac, görelî enerji-momentum formülüyle uyumlu zamana göre birinci mertebeden bir denklem bulmaya çalışmıştır.

1934 yılında Pauli ve Weisskopf, görelî kuantum kuramında istatistiksel yorumun yeniden formüle edilmesi gerektiğini gösterdiler ve spini  $\frac{1}{2}$  olan parçacıklar için Dirac denklemi yerini korurken, Klein-Gordon denkleminin de görelî spinsiz parçacıklar için doğru betimleme olduğunu kanıtladılar.

### 2.2.1 Coulomb Alanı için KG Denkleminin Çözümü

Yine Denklem (2.2) ile verilen Coulomb potansiyeli için Klein-Gordon denklemini üç bölgede inceleyeceğiz. Birinci ve üçüncü bölgede herhangi bir potansiyel söz konusu olmadığından bu bölgelerdeki çözümler serbest parçacığın çözümleridir ve sırasıyla şöyle verilirler [6]:

$$\Psi_1(z, t) = Ae^{i(P_0z - Et)} + Be^{-i(P_0z + Et)} \quad P_0 = (E^2 - m_0^2)^{1/2} \quad (2.28)$$

$$\Psi_3(z, t) = De^{i(P_0z - Et)} + fe^{-i(P_0z + Et)} \quad (2.29)$$

İkinci bölgede  $\vec{A}=0$  fakat  $\phi \neq 0$  farklıdır. Bu ifadeler elektromanyetik alan için düzenlenen Klein-Gordon denkleminde yazılırsa;

$$[\vec{p}^2 - (E - e\phi)^2]\Psi_2 = -m_0^2\Psi_2 \quad (2.30)$$

olur. Buradaki  $\Psi_2(\vec{r}, t) = U(r)T(t)$  dalga fonksiyonunun zamana bağlı olan kısmının çözümü,

$$T(t)[\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2} + e\phi] = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

$$T(t) = Me^{\sqrt{E^2 + e\phi}}$$

biçiminde verilir ve  $p^2 + m_0^2 = E^2$  dir.

Konuma bağlı olan kısmın çözümleri ise küresel koordinatlarda yapılır. Bu şartlar altında Klein-Gordon denklemindeki P işlemcisi tek başına bırakılırsa,

$$\vec{p}^2\Psi_2 = [(E - e\phi)^2 - m_0^2]\Psi_2 \quad (2.31)$$

olur. Buradaki Laplace işlemcisi ve  $\Psi_2(r, t) = U(r)T(t)$  ifadesi denklem (2.31) de yerine yazılırsa;

$$-T(t)\vec{p}^2U(r) = ((E - e\phi)^2 - m_0^2)U(r)T(t)$$

biçiminde olur. Elde edilen denklemde zamana bağlı olan kısım sadeleşir. Bu durumda yukarıdaki denklem;

$$-\vec{\nabla}^2 U(r) = ((E - e\phi)^2 - m_0^2)U(r) \quad (2.32)$$

biçimini alır.  $\vec{\nabla}^2$  ifadesi küresel koordinatlarda;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

şeklinde tanımlanır.  $\vec{\nabla}^2$  işlemcisi (2.32) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = (m_0^2 - (E - e\phi)^2)U \quad (2.33)$$

olur. Denklemin her tarafı  $r^2$  ile genişletilirse;

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = (m_0^2 - (E - e\phi)^2)Ur^2 \quad (2.34)$$

olur. Denklemdaki  $U$  ifadesi yerine  $U=R(r)Y(\theta, \phi)$  yazılır ve her iki yanı  $U = R(r)Y(\theta, \phi)$  ile bölünürse;

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \psi^2} = (m_0^2 - (E - e\phi)^2)r^2$$

elde edilir. Elde edilen denklemin radyal kısmı  $-I(I + 1)$  eşit olacaktır. Bu şartlar altında yukarıdaki denklem;

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - I(I + 1)R = (m_0^2 - (E - e\phi)^2)r^2 R \quad (2.35)$$

olacaktır. Oluşan denklemin sağ tarafı gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$[(m_0^2 - E^2)r^2 + 2e\phi Er^2 - e^2\phi^2 r^2]R \quad (2.36)$$

olur. Coulomb potansiyeli için çekici bir özelliğe sahip ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$e\phi = -\frac{Ze^2}{4\pi r}$$

Bu durumda, aşağıdaki gibi değişken değişimi yapılırsa denklem (2.36)ifadesi;

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \rightarrow \phi e = -\frac{Z\alpha}{r} \quad \frac{1}{\lambda} = ZE\alpha, \quad \epsilon = (m_0^2 - E^2)\lambda^2, \quad \rho = \frac{r}{\lambda}$$

$$\epsilon\rho^2 - 2\rho - Z^2\alpha^2 \quad (2.37)$$

olur. (2.35) denkleminin sol tarafı değişken değişimi yapılırsa;

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR}{d\rho} \quad (2.38)$$

olur. (2.37)ve (2.38) sonuçları birleştirilir ve denklem (2.35) yerine yazılırsa;

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR}{d\rho} - I(I+1)R = (\varepsilon\rho^2 - 2\rho - Z^2\alpha^2)R$$

olur. Elde edilen denklemin her tarafını  $\rho^2$  ile bölünüp düzenlenirse;

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2dR}{\rho d\rho} + \left( -\varepsilon + \frac{2}{\rho} - \frac{I(I+1)-Z^2\alpha^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (2.39)$$

olur. (2.39)denkleminin çözümü olarak aşağıdaki çözüm önerilir.

$$R(\rho) = \frac{1}{\rho} e^{-\sqrt{\varepsilon}p} V(\rho)$$

$R(\rho)$  ifadesinin birinci ve ikinci dereceden türevleri alınırsa;

$$\frac{dR}{d\rho} = -\frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}p} V}{\rho^2} - \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}p} \sqrt{\varepsilon} V}{\rho} + \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}p} V'}{\rho}$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} = \frac{2e^{-\sqrt{\varepsilon}p} V}{\rho^3} - \frac{2e^{-\sqrt{\varepsilon}p} V}{\rho^2} + \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}p} \varepsilon V}{\rho} - \frac{2e^{-\sqrt{\varepsilon}p} V'}{\rho^2} - \frac{2e^{-\sqrt{\varepsilon}p} \sqrt{\varepsilon} V'}{\rho} + \frac{e^{-\sqrt{\varepsilon}p} V''}{\rho}$$

bulunur. Bulunan ifadeler denklem (2.39)de yazılır ve düzenlenirse;

$$\frac{d^2 V}{d\rho^2} = -2\sqrt{\varepsilon} \frac{dV}{d\rho} + \left( +\frac{2}{\rho} - \frac{I(I+1)-Z^2\alpha^2}{\rho^2} \right) V = 0 \quad (2.40)$$

elde edilir. Bu denklemi Frobenius yöntemi ile çözebiliriz:

$$V(p) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \rho^{\beta+s}$$

biçiminde bir çözüm önerilir.  $V(p)$  ifadesinin birinci ve ikinci türevleri alınarak denklemde yerine yazılırsa;

$$V'(p) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (\beta + s) \rho^{\beta+s-1}$$

$$V''(p) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (\beta + s)(\beta + s - 1) \rho^{\beta+s-2}$$

$$\underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} a_s (\beta + s)(\beta + s - 1)\rho^{\beta+s-2}}_1 - 2\sqrt{e} \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} a_s (\beta + s)\rho^{\beta+s-1}}_2 +$$

$$2 \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} a_s \rho^{\beta+s-1}}_3 - (I(I + 1) - Z^2 \alpha^2) \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} a_s \rho^{\beta+s-2}}_4$$

bulunur. Serilerdeki  $\rho$  terimlerinin üst kısmındaki indisleri eşitlemek için indis değişimi yapılırsa;

Birinci ve dördüncü seri için:

$$s - 2 = k \quad s = 0 \rightarrow k = -2$$

İkinci ve üçüncü seriler için:

$$s - 1 = k \quad s = 0 \rightarrow k = -1$$

$$\underbrace{\sum_{k=-2}^{\infty} \alpha_{k+2} (\beta + k + 2)(\beta + k + 1)\rho^{\beta+k}}_1 - 2\sqrt{e} \underbrace{\sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_{k+1} (\beta + k + 1)\rho^{\beta+k}}_2 +$$

$$2 \underbrace{\sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_{k+1} \rho^{\beta+k}}_3 - (I(I + 1) - Z^2 \alpha^2) \underbrace{\sum_{k=-2}^{\infty} \alpha_{k+2} \rho^{\beta+k}}_4 =$$

$$0 \quad (2.41)$$

olur. Serilerin tabanlarını -1'de eşitlemek için 1 ve 4 no'lu seriler -2 tabanında açılırsa;

$$a_0 \beta (\beta - 1) - [I(I + 1) - Z^2 \alpha^2] a_0 = 0 \quad a_0 \neq 0$$

$$\beta^2 - \beta - (I(I + 1) - Z^2 \alpha^2) = 0 \quad (2.42)$$

bulunur, (2.42) denkleminin kökleri;

$$(I(I + 1) - Z^2 \alpha^2) = 0$$

$$\beta^2 - \beta - \alpha = 0 \quad \Delta = 1 + 4\alpha$$

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{(2I+1)^2 - 4Z^2 \alpha^2}}{2} \quad (2.43)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (2.41)' de bulunan verilerin tekrarlama bağıntısı,

$$\sum_{s=-1}^{\infty} [a_{k+2} ((\beta + k + 2)(\beta + k + 1) - Z^2 \alpha^2) + a_{k+1} (2 + (-2\sqrt{\varepsilon}(\beta + k + 1)))] p^{\beta+k} = 0$$

$$a_{k+2} = a_{k+1} \frac{2 - (-2\sqrt{\varepsilon}(\beta + k + 1))}{(\beta + k + 2)(\beta + k + 1) - Z^2 \alpha^2}$$

olarak elde edilir. Denklem (2.43) ifadesi tekrarlamaya bağıntısında yerine yazılırsa;

$$a_{k+2} = a_{k+1} \frac{2 - [-2\sqrt{\varepsilon} \left( \frac{1 + \sqrt{(2l+1)^2 - 4Z^2 \alpha^2}}{2} + k + 1 \right)]}{\left( \frac{1 + \sqrt{(2l+1)^2 - 4Z^2 \alpha^2}}{2} + k + 2 \right) \left( \frac{1 + \sqrt{(2l+1)^2 - 4Z^2 \alpha^2}}{2} + k + 1 \right) - Z^2 \alpha^2}$$

bulunur.  $k=k-2$   $k \rightarrow s$  değişimi ile tekrarlamaya bağıntısı düzenlenirse,

$$a_s = a_{s-1} \frac{2 - [-2\sqrt{\varepsilon} \left( \frac{1 + \sqrt{(2l+1)^2 - 4Z^2 \alpha^2}}{2} + s - 1 \right)]}{\left( \frac{1 + \sqrt{(2l+1)^2 - 4Z^2 \alpha^2}}{2} + s \right) \left( \frac{1 + \sqrt{(2l+1)^2 - 4Z^2 \alpha^2}}{2} + s - 1 \right) - Z^2 \alpha^2}$$

olacaktır. Sonuç olarak denklemimizin çözümü aşağıdaki biçimde olur:

$$R(r) = \frac{1}{xr} e^{-\sqrt{\varepsilon} Xr} \sum_{s=0}^{\infty} a_s (xr)^{\beta+s} \quad (2.44)$$

Sistemin açılal kısmının çözümleri ise;

$$Y(\phi, \theta) = (Ae^{-iN\phi} + Be^{iN\phi}) P_L(\cos(\theta)) \quad (2.45)$$

olacağından U çözümü için,

$$U(r, \phi, \theta) = (Ae^{-iN\phi} + Be^{iN\phi}) P_L(\cos(\theta)) \frac{1}{xr} e^{-\sqrt{\varepsilon} Xr} \sum_{s=0}^{\infty} a_s (xr)^{\beta+s}$$

elde edilir. Parçacığın ikinci bölgedeki dalga fonksiyonu için elde edilen son ifade

$$\Psi(r, \phi, \theta) = M e^{\sqrt{E^2 + e\phi t}} (Ae^{-iN\phi} + Be^{iN\phi}) P_L(\cos(\theta)) \frac{1}{xr} e^{-\sqrt{\varepsilon} Xr} \sum_{s=0}^{\infty} a_s (xr)^{\beta+s} \quad (2.46)$$

biçiminde olacaktır.

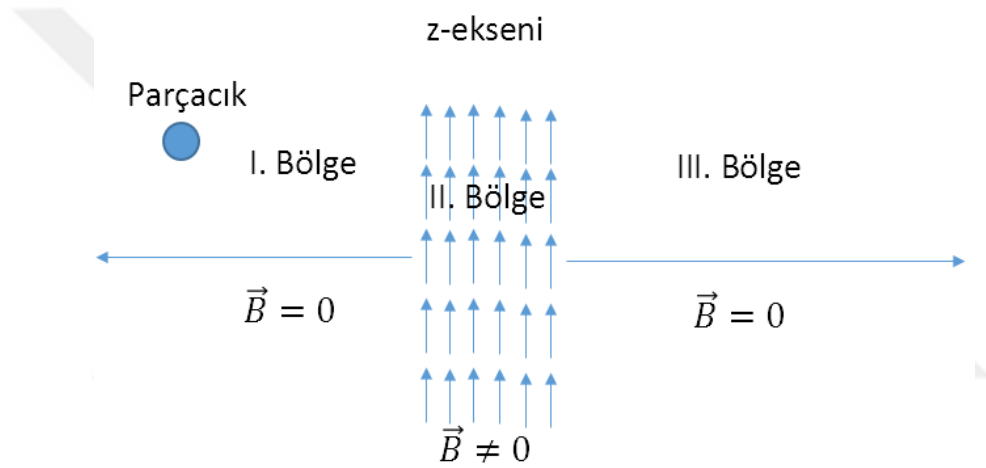
### 2.2.2 Manyetik Alan için KG Denkleminin Çözümü

Elektromanyetik alan içerisinde hareket eden görelî ve spinsiz parçacıklar için Klein-Gordon denklemi şöyle verilir [1, 4]:

$$(\vec{P} - e\vec{A})^2 - (E^2 - e\phi)^2 = -m_0^2$$

Parçacık sadece manyetik alan içerisinde olduğu için skaler potansiyel  $\phi = 0$  dır. Manyetik alanın z-yönünde olması için vektör potansiyel seçimi aşağıdaki gibi yapılır:

$$\vec{A} = -\frac{x_B}{2}\hat{j} + \frac{y_B}{2}\hat{i} \quad (2.47)$$



**Şekil 2.2.** Parçacık z-yönünde uygulanan manyetik alana maruz kalmaktadır.

Serbest parçacık için birinci ve üçüncü bölgelerdeki çözümler sırasıyla yazılırsa;

$$\Psi_1(z, t) = Ae^{i(p_0z - Et)} + Be^{-i(p_0z + Et)}$$

$$\Psi_3(z, t) = De^{i(p_0z - Et)} + Fe^{-i(p_0z + Et)}$$

olur. İkinci bölge için Klein-Gordon denklemi yazılır ve düzenlenirse;

$$(\vec{P} - e\vec{A})^2 \Psi_2 = (E^2 - m_0^2) \Psi_2$$

$$(\vec{P} - e\vec{A})(\vec{P} - e\vec{A})\Psi_2 = (E^2 - m_0^2)\Psi_2$$

$$(\vec{P}^2 - e\vec{P}\vec{A} - e\vec{A}\vec{P} + e^2A^2)\Psi_2 = (E^2 - m_0^2)\Psi_2$$

$$\vec{A} = -\frac{x_B}{2}\hat{i} + \frac{y_B}{2}\hat{j} \rightarrow \vec{P}\vec{A} = 0$$

$$(\vec{P}^2 - e\vec{A}\cdot\vec{P} + e^2A^2)\Psi_2 = (E^2 - m_0^2)\Psi_2 \quad (2.48)$$

(2.48) denklemini elde edilir. Denklem (2.48)'deki  $\vec{A}\cdot\vec{P}$  ifadesi açık olarak yazılırsa;

$$\vec{A}\cdot\vec{P} = -i\left(-\frac{x_B}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{y_B}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (2.49)$$

bulunur. Elde edilen sonuç silindirik koordinatlarda yazılırsa;

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(\phi)}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\phi)\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos(\phi)}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$x = \rho \cos(\phi) \quad y = \rho \sin(\phi)$$

$$-i\frac{B}{2}\left[(-\rho)\cos(\phi)\left(\sin(\phi)\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos(\phi)}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) + \rho\sin(\phi)\left(\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(\phi)}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\right] \rightarrow i\frac{B}{2}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

elde edilir. Bu durumda (2.49) denklemindeki Laplace işlemcisi silindirik koordinatlarda yazılır ve düzenlenirse;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right] - i\frac{eB}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \frac{e^2B^2}{4}\rho^2\Psi = (E^2 - m_0^2)\Psi \quad (2.50)$$

olur. Elde edilen denklemde  $\phi$  ve  $z$  yönünde parçacık serbest olduğu için  $\Psi$  dalga fonksiyonu  $\Psi = R(\rho)e^{im_\phi\phi + ik_z z}$  olur ve tayin edilen dalga fonksiyonu yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) - \frac{m_\phi^2}{\rho^2}R - k_z^2R\right) + \frac{eBm_\phi}{2}R + \frac{e^2B^2}{4}\rho^2R = (E^2 - m_0^2)R$$

şeklinde bulunur. Elde edilen denklem düzenli bir şekilde yazılırsa;

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{m_\phi}{\rho^2}R - \left(\frac{e\rho B}{2\hbar}\right)R + \left\{\left[\frac{E}{\hbar}\right]^2 - \left[\frac{m}{\hbar}\right]^2 + \frac{eBm}{\hbar} - k_z^2\right\}R = 0 \quad (2.51)$$

olur. Burada yeni değişkenler kullanılırsa,

$$\sqrt{\frac{eB}{\hbar}}\rho = x \quad \text{ve} \quad \lambda = \frac{4m}{eB\hbar}\left[\left(\frac{E}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 - \frac{\hbar^2k_z^2}{2m}\right] - 2m_\phi$$

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \frac{m_\phi^2}{x^2} R - x^2 R + \lambda R = 0$$

denklemini bulunur. Bu denklemi çözmeden önce  $x$ 'in sonsuzdaki davranışına bakılırsa,  $R$  çözümü

$$\frac{d^2 R}{dx^2} - x^2 R \approx 0$$

$$R(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

biçiminde olacaktır.  $x = 0$  dolayındaki çözüm ise,

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \frac{m_\phi^2}{x^2} = 0$$

olur. Elde edilen denklem için aşağıdaki çözüm önerisini yaparsak,

$$R(x) = x^{|m_\phi|} e^{-\frac{x^2}{2}} G(x)$$

denklem şu biçimi alacaktır:

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left( \frac{|m_\phi|+1}{x} - 2x \right) \frac{dG}{dx} + (\lambda - 2|m_\phi| - 2)G = 0 \quad (2.52)$$

Burada  $y = x^2$  dönüşümü yapılırsa;

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + \left( \frac{|m_\phi|+1}{y} - 2x \right) \frac{dG}{dy} + \frac{1}{4y} (\lambda - 2|m_\phi| - 2)G = 0 \quad (2.53)$$

Bu denklemin çözümü için  $G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  çözümü önerilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) \left[ a_n + \left( \frac{|m_\phi|+1}{y} \right) \right] a_{n+1} + \left( \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2} (|m_\phi|+1) \right) a_n y^{n-1} \right] = 0 \quad (2.54)$$

olur. Katsayılar arasındaki ilişki için  $n \rightarrow \infty$  durumuna bakılırsa;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2} (|m_\phi|+1)}{(n+1)(n+1+|m_\phi|)} \quad (2.55)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n}$$

ilişkisi görülür. Dolayısıyla serinin yakınsak olabilmesi için,

$$\lambda = 4n + 2(|m_\phi| + 1)$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu durum da  $\lambda$  değerini yerini yazdığımızda enerji için

$$\lambda = \frac{4m}{eB\hbar} \left[ \left( \frac{E}{\hbar} \right)^2 - \left( \frac{m}{\hbar} \right)^2 - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right] - 2m\phi \quad (2.56)$$

$$E = \pm \hbar \left( (4n + 4m_\phi + 2) \frac{eB\hbar}{4m} + \left( \frac{m}{\hbar} \right)^2 - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right)^{1/2} \quad (2.57)$$

ifadesini elde ederiz. Buradaki  $n$  ve  $m_\phi$  kuantum sayılarını tanımlamaktadır. Bu durumda enerji düzeyleri kuantumludur. Diferansiyel denkleminin çözümü ise Laguerre polinomları olacaktır. Bu durumda dalga fonksiyonun çözümü,

$$G(y) = L_n^{|m_\phi|}(y)$$

$$R(\rho) = \left[ \left( \frac{eB}{2\hbar} \right)^{1/2} \rho \right]^{|m_\phi|} e^{-\frac{eB\hbar}{4m} \rho^2} \left( \frac{eB}{2\hbar} \rho^2 \right)$$

$$\Psi(\rho, \phi, z) = A_{n,|m_\phi|} \left[ \left( \frac{eB}{2\hbar} \right)^{1/2} \rho \right]^{|m_\phi|} e^{-\frac{eB\hbar}{4m} \rho^2} \left( \frac{eB}{2\hbar} \rho^2 \right) e^{im_\phi \phi + izk_z} \quad (2.58)$$

biçiminde olacaktır.

### 2.3. Dirac Denklemi ve Dış Alanlar İçin Tam Çözümleri

Görelilik kuantum mekaniğinde spin- $\frac{1}{2}$  olan temel parçacıklar Dirac denklemiyle betimlenir. Dirac'ın yazmış olduğu bu denklem görelilik enerji momentum formülüyle uyumlu ve zamana göre birinci mertebeden bir denklemdir [2,6]. Bu denklemi yazarken Dirac'ın izlediği strateji görelilik enerji momentum bağıntısını çarpanlarına ayırmak idi. Yazılan denklemde parçacığı temsil eden dalga fonksiyonu dört bileşene sahip olan ve Dirac spinörü olarak adlandırılan, buna rağmen bir dört-vektör tanımına uymayan bir yapıya sahiptir.

Bu kesimde Dirac denklemi tanıtılarak bu denklem için daha önceki kesimlerde yapıldığı gibi dış alanların varlığında bu denklemin çözümlerini tartışacaktır.

Dış elektromanyetik alanlar için Dirac denklemi şöyle verilir [2,6]:

$$[i\gamma^\nu \partial_\nu + eA_\nu \gamma^\nu - m]\psi = 0$$

Burada  $\gamma^\nu$  Dirac matrisleridir,  $m$  ve  $e$  elektronun kütlesi ve yükü,  $A_\nu$  dört-vektör elektromanyetik potansiyel ve  $\psi$  ise dört bileşenli spinördür.

### 2.3.1. Merkezi Potansiyel İçin Dirac Denkleminin Değişkenlerinin Ayrılması

Merkezcil potansiyelleri için Dirac- Hamiltonyeni şöyle verilir [2]:

$$\hat{H}_D = c\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \hat{\beta}m_0c^2 + V(r) \quad (2.59)$$

Burada  $V(r) = eA_0(r)$  dir. Alanın küresel simetrik olmasından dolayı  $\hat{J}$  ve  $\hat{P}$  açısal momentum ve parite işlemcileri hamiltonyeniyle sıra değiştirebilir. Bu nedenle belirli enerji, açısal momentum ve parite değerlerine sahip durumlar meydana gelir. Buna karşılık gelen dalga fonksiyonları şöyle verilir:

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(x, t) \\ X_{jl'm}(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Burada,  $\varphi_{jlm}$  ve  $X_{jl'm}$  hesaplanacak iki bileşenli spinörlerdir.

$$\psi'_{jm}(x', t') = \psi_{jm}(x', t') \text{ ya da } \hat{P}\psi_{jm}(X') = \lambda\psi_{jm}(X') \quad (2.60a)$$

Parite işlemcisi uygulandığında;

$$\begin{aligned} \hat{P}\psi_{jm} &= e^{i\psi} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \hat{P}_0 \begin{pmatrix} \psi_{jm}(x, t) \\ X_{jl'm}(x, t) \end{pmatrix} = e^{i\psi} \begin{pmatrix} \hat{P}_0\psi_{jlm}(x, t) \\ -\hat{P}_0X_{jl'm}(x, t) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \psi_{jm}(x, t) \\ X_{jl'm}(x, t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.60b)$$

kararlı Dirac denkleminde başlandığında,  $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$  tanımıyla şu denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} c(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})X + m_0c^2\psi + V\psi &= E\psi \\ c(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})\psi - m_0c^2X + VX &= EX \end{aligned} \quad (2.61)$$

ya da,

$$\begin{aligned} (E - m_0c^2 - V)\psi &= c(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})X \\ (E + m_0c^2 - V)X &= c(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})\psi \end{aligned} \quad (2.62)$$

Açısal momentum ve parite işlemcilerinin öz-fonksiyonları küresel spinörlerdir. Tam dalga fonksiyonu  $\psi$  ile karıştırmamak için küresel spinörleri  $\Omega_{jlm}$  ile gösterilirse:

$$\Omega_{jlm} = \sum_{m', m_s} \left( l \frac{1}{2} j \mid m' m_s m \right) Y_{lm'} X_{\frac{1}{2} m_s} \quad (2.63)$$

Burada spin işlemcisinin öz-fonksiyonları şöyle verilir:

$$X_{\frac{11}{22}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{\frac{1}{2} \frac{-1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Burada aşağıdaki açık ifadeler kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} \varphi_{jlm} &= ig(r) \Omega_{jlm} \left( \frac{\Gamma}{r} \right) \\ X_{j'l'm} &= -f(r) \Omega_{j'l'm} \left( \frac{\Gamma}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

ve

$$l' = 2j - 1 = \begin{cases} 2 \left( l + \frac{1}{2} \right) - l = l + 1 & \text{için } j = l + \frac{1}{2} \\ 2 \left( l - \frac{1}{2} \right) - l = l - 1 & \text{için } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \varphi_{jlm} &= \hat{\sigma} \cdot \hat{p} [ig(r)] \Omega_{jlm} \left( \frac{\Gamma}{r} \right) = [\hat{\sigma} \cdot \hat{p} ig(r)] \Omega_{jlm} + ig(r) \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \Omega_{jlm} \\ &= \hbar \frac{dg(r)}{dr} \left( \hat{\sigma} \cdot \left( \frac{\Gamma}{r} \right) \right) \Omega_{jlm} + ig(r) \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \Omega_{jlm} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\Omega_{l+\frac{1}{2}l,m} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (2.66.a)$$

$$\Omega_{l-\frac{1}{2}l,m} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (2.66.b)$$

(2.66) denkleminde, karekök içindeki ifadeler Clebsch-Gordon katsayılarının açık ifadesidir. Şimdi küresel spinörler için verilen aşağıdaki bağıntıyı kullanarak,

$$\left( \hat{\sigma} \cdot \frac{\Gamma}{r} \right) \Omega_{jlm} = -\Omega_{j'l'm} \quad (2.67)$$

şu bağıntıyı elde ederiz:

$$-(\hat{\sigma} \cdot \hat{p}) \Omega_{jlm} = (\hat{\sigma} \cdot \hat{p}) \left( \hat{\sigma} \cdot \frac{\Gamma}{r} \right) \Omega_{j'l'm} \quad (2.68)$$

Burada çok bilinen bir ifadeyi kullanacağız:

$$(\hat{\sigma} \cdot \vec{A})(\hat{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\hat{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (2.69)$$

Bu bağıntı yardımıyla (2.68) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})\Omega_{jlm} = \left[ \hat{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + i\hat{\sigma} \cdot \left( \hat{p} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \right] \Omega_{jlm} \quad (2.70)$$

$\hat{p} = i\hbar\vec{\nabla}$  ve  $\vec{L} = \vec{r} \times \hat{p}$  tanımları kullanılarak denklem (2.70) aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$\begin{aligned} [\hat{p} \cdot r + i\hat{\sigma} \cdot (\hat{p} \times r)] \frac{1}{r} \Omega_{jl'm} &= [-i\hbar(\nabla \cdot r) - i\hbar r \cdot \nabla - i\hat{\sigma} \cdot (r \times p)] \frac{1}{r} \Omega_{jl'm} \\ &= \left[ -i\hbar \frac{3}{r} - i\hbar r \left( -\frac{1}{r^2} \right) - i \frac{\hat{\sigma} \cdot \hat{L}}{r} \right] \Omega_{jl'm} \\ &= -i \left( \frac{2\hbar}{r} + \frac{1}{r} \hat{L} \cdot \hat{\sigma} \right) \Omega_{jl'm} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Aşağıdaki bağıntı yardımıyla,

$$\hat{J}^2 = \left( \hat{L} + \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \right)^2 = \hat{L}^2 + \left( \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \right)^2 + \hbar \hat{\sigma} \cdot \hat{L} \quad (2.72)$$

şu ifadeyi elde ederiz:

$$\hbar \hat{L} \cdot \hat{\sigma} \Omega_{jl'm} = \left[ \hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \left( \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \right)^2 \right] \Omega_{jl'm} = \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \Omega_{jl'm} \quad (2.73)$$

Yeni bir kuantum sayısı tanımlayalım:

$$\kappa = \pm \left( j + \frac{1}{2} \right) = \begin{cases} -(l+1) & \text{için } j = l + \frac{1}{2} \\ l & \text{için } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.73a)$$

$$|\kappa| = j + \frac{1}{2} \text{ ya da } |\kappa| - \frac{1}{2} \quad (2.73b)$$

Çeşitli  $j$  değerleri için şu ifadeler türetilir:

- $j = l + \frac{1}{2}$  için,

$$\begin{aligned} \left( l + \frac{1}{2} \right) \left( l + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left[ 2 \left( l + \frac{1}{2} \right) - l \right] \left[ 2 \left( l + \frac{1}{2} \right) - l + 1 \right] - \frac{3}{4} \\ = l^2 + \frac{1}{2}l + l \frac{1}{2}l + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - (l+1)(l+2) - \frac{3}{4} \\ = l^2 + 2l - l^2 - 2l - l - 2 = -(l+2) = \kappa - 1 \end{aligned} \quad (2.74a)$$

- $j = l - \frac{1}{2}$  için,

$$\begin{aligned} \left(l - \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2}\right) - \left[2\left(l - \frac{1}{2}\right) - l\right]\left[2\left(l - \frac{1}{2}\right) - l + 1\right] - \frac{3}{4} \\ = l^2 - \frac{1}{4} - (l-1)l - \frac{3}{4} = l - 1 = \kappa - 1 \end{aligned} \quad (2.74b)$$

Denklem (2.71) bu değerlendirmelerden sonra aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$(2\hbar + \hat{L} \cdot \hat{\sigma})\Omega_{jl'm} = (1 + \kappa)\hbar\Omega_{jl'm} \quad (2.75)$$

Literatürde, genellikle bu denklem için aşağıdaki gösterim kullanılır:

$$\chi_{\kappa,m} = \Omega_{jlm}, \quad \chi_{-\kappa,m} \equiv \Omega_{jl'm} \quad (2.76a)$$

$$\hat{\kappa} = \hbar + \hat{L} \cdot \hat{\sigma} \quad (2.77b)$$

$$\hat{\kappa}\chi_{\kappa,m} = -\hbar\hat{\kappa}\chi_{\kappa,m}, \quad \hat{\kappa}\chi_{-\kappa,m} = -\hbar\hat{\kappa}\chi_{-\kappa,m} \quad (2.77c)$$

burada,

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1) = -\left(j + \frac{1}{2}\right), & \text{için } j = l + \frac{1}{2} \\ l = +\left(j + \frac{1}{2}\right) & \text{için } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ve } |\kappa| = j + \frac{1}{2}$$

Denklem (2.64) deki küresel spinörler  $\chi_{\kappa,m} = \Omega_{jlm}$  ve  $\chi_{-\kappa,m} = \Omega_{jl'm}$  biçiminde gösterilebilir, böylece merkezsel bir alanda dört spinör için şu yazılabilir:

$$\psi_{j,m} = \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(x,t) \\ \chi_{jl'm}(x,t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ig(r)\Omega_{jlm}\left(\frac{\Gamma}{r}\right) \\ -f(r)\Omega_{jl'm}\left(\frac{\Gamma}{r}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ig(r)\chi_{\kappa,m} \\ -f(r)\chi_{-\kappa,m} \end{bmatrix} = +i \begin{bmatrix} g(r)\chi_{\kappa,m} \\ if(r)\chi_{-\kappa,m} \end{bmatrix}$$

Bazı durumlarda bu alternatif gösterim kullanılabilir. Böylece denklem (2.64) aşağıdaki biçimi alır:

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{p}\varphi_{jlm} = -\Omega_{jl'm}\left(\hbar \frac{dg}{dr} + \frac{(\kappa+1)}{r}\hbar g(r)\right) \quad (2.78)$$

$(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})\chi_{jl'm}$  için benzer olarak aşağıdaki ifade türetilebilir:

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})\chi_{jl'm} = -\Omega_{jlm}\left(\hbar \frac{df(r)}{dr} + \frac{\kappa-1}{r}\hbar f(r)\right) \quad (2.79)$$

Artık (2.78) ve(2.79) ifadeleri denklem (2.62) te yerinde yazılır. Denklemin her iki yanından açılmal fonksiyonlar elenebilir. Böylece,  $f(r)$  ve  $g(r)$  radyal fonksiyonları için aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \hbar c \frac{dg(r)}{dr} + (1 + \kappa)\hbar c \frac{g(r)}{dr} - [E + m_0c^2 - V(r)]f(r) &= 0 \\ \hbar c \frac{df(r)}{dr} + (1 - \kappa)\hbar c \frac{f(r)}{dr} + [E - m_0c^2 - V(r)]g(r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

burada, şu dönüşümleri yaparak, sonuçta aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$G(r) = rg(r), \quad F(r) = rf(r) \quad (2.81)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dr} = g + r \frac{dg(r)}{dr} \text{ ve } \frac{dF}{dr} = F + r \frac{df(r)}{dr} \\ \hbar c \frac{dG(r)}{dr} + \hbar c \frac{\kappa}{r} G(r) - [E + m_0c^2 - V(r)]F(r) = 0 \\ \hbar c \frac{dF(r)}{dr} - \hbar c \frac{\kappa}{r} F(r) + [E - m_0c^2 - V(r)]G(r) = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Bunlar genellikle küresel simetrik bir potansiyel için Dirac denkleminin radyal fonksiyonları sağlayan çiftlenimli diferansiyel denklemleri olarak kullanılır.

### 2.3.2 Coulomb Potansiyeli İçerisindeki Bir Dirac Parçacığı İçin Radyal Denklemlerin Çözümü

Bir önceki alt başlıkta merkezi bir potansiyel için Dirac denkleminin radyal kısımlarının diferansiyel biçimlerini elde etmiştik. Burada Coulomb potansiyeli içinde hareket eden bir Dirac parçacığı için çiftlenimli radyal denklemleri çözerek bağlı durumlar için enerji öz-değerlerini belirleyeceğiz [2]. Noktasal bir çekirdek ile  $-e$  yüklü bir parçacığın Coulomb etkileşme enerjisi  $V = -Ze^2/r$  için Dirac parçacığının radyal denklemleri şöyle olur [2]:

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{\kappa}{r} G + \left[ \frac{E + m_0c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right] F(r) = 0$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\kappa}{r}F - \left[ \frac{E - m_0c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right] G(r) = 0 \quad (2.83)$$

Burada ince yapı sabiti,  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx 1/137$  değerine sahiptir. İlk olarak denklem (2.83) in küçük  $r$  değerleri için (0 dolayında) çözümünü inceleyeceğiz. Bu durum için  $E \pm m_0c^2$  terimleri ihmal edilebilir ve sonuçta aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r}G - \frac{Z\alpha}{r}F(r) = 0$$

$$\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r}F + \frac{Z\alpha}{r}G(r) = 0 \quad (2.84)$$

Denklem (2.84) nin çözümü için, kuvvet serisi açılımını kullanırsak serinin birinci terimi orijin yakınındaki bölgede baskın hale gelir ve bu durumda  $G = ar^\gamma$  ve  $F = br^\gamma$  yazılabilir. Böylece;

$$a\gamma r^{\gamma-1} + \kappa ar^{\gamma-1} - Z\alpha br^{\gamma-1} = 0$$

$$b\gamma r^{\gamma-1} + \kappa br^{\gamma-1} + Z\alpha ar^{\gamma-1} = 0 \quad (2.85)$$

ya da,

$$a(\gamma + \kappa) - bZ\alpha = 0, aZ\alpha + b(\gamma - \kappa) = 0 \quad (2.86)$$

ifadelerini elde ederiz. Katsayılar determinantının 0 olma şartından,

$$\gamma^2 = \kappa^2 - (Z\alpha)^2,$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} = \pm \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 + Z^2\alpha^2} \quad (2.87)$$

ifadelerini elde ederiz.

Dalga fonksiyonun normalize edilebilir olma şartından dolayı  $\gamma$  için pozitif işaretli değeri almalıyız. Negatif çözüm için  $\gamma = -|\gamma|$ ,  $F^2 + G^2 \sim r^{-2|\gamma|}$  ( $r=0$  dolayında), bu ise  $|\gamma| \leq 1/2$  olması durumunda norm için ıraksak bir integrale yol açar. Ancak  $\kappa^2 = 1$  ve  $Z\alpha \sqrt{3}/2$  ya da  $Z \geq 118$  için negatif gama değerli düzenli çözümlerin olasılığı mevcuttur. Coulomb enerjisinin beklenen değeri var olmalıdır, yani

$$\int \psi^t \left( -\frac{Ze^2}{r} \right) \psi d^3x = \int (F^2 + G^2) \left( -\frac{Ze^2}{r} \right) dr$$

Hacim elemanından gelen  $r^2$  standart çarpanı burada  $(F^2 + G^2)$  içinde yer almaktadır. Denklem (2.84) çözmek için aşağıdaki tanımları yaparsak:

$$\varrho = 2\lambda r \text{ ile } \lambda = \frac{(m_0 c^2 c^4 - E^2)^{1/2}}{\hbar c} \quad (2.88)$$

Radyal çözümlerin sağladığı diferansiyel denklemler aşağıdaki biçimde olacaktır:

$$\frac{dG(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{\kappa G(\varrho)}{\varrho} + \left[ \frac{E + m_0 c^2}{2\lambda \hbar c} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] F(\varrho) = 0$$

$$\frac{dF(\varrho)}{d\varrho} = -\left[ \frac{E - m_0 c^2}{2\lambda \hbar c} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] G(\varrho) + \frac{\kappa}{\varrho} F(\varrho) = 0 \quad (2.89)$$

$\varrho \rightarrow \infty$  için  $1/\varrho$  ile orantılı terimler ihmal edileceğinden yukardaki denklemler şu biçimi alır:

$$\frac{dG(\varrho)}{d\varrho} = \frac{E + m_0 c^2}{2\lambda \hbar c \lambda} F(\varrho)$$

$$\frac{dF(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{E - m_0 c^2}{2\hbar c \lambda} G(\varrho)$$

Denklem (2.88) ile birleştirildiğinde bu ifadelerden şunu elde ederiz.

$$\frac{d^2 G(\varrho)}{d\varrho^2} = \frac{(E^2 + m_0 c^2 c^4)}{(2\hbar c \lambda)^2} G(\varrho) = \frac{1}{4} G(\varrho)$$

$G(\varrho) \sim e^{\pm \varrho/2}$  biçiminde davranan iki olası çözüm vardır, ancak sadece azalan üstel çözüm normalize edilebildiğinden bu çözüm alınır. Benzer bir sonuç  $F(\varrho)$  içinde geçerlidir. Buna göre aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$G(\varrho) = (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} [\phi_1(\varrho) + \phi_2(\varrho)],$$

$$F(\varrho) = (m_0 c^2 - E)^{1/2} e^{-\varrho/2} [\phi_1(\varrho) - \phi_2(\varrho)] \quad (2.90)$$

Bu ifadeler denklem (2.88) de yerine yazılırsa, şu ifadelere ulaşılır:

$$\begin{aligned} & (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} \left[ -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} + \frac{d\phi_2}{d\varrho} \right], \\ & = \frac{-\kappa}{\varrho} (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1 + \phi_2) + \left[ \frac{E + m_0 c^2}{2\hbar c \lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_0c^2 + E)^{1/2}e^{-\varrho/2} \left[ -\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} - \frac{d\phi_2}{d\varrho} \right] \\
&= - \left[ \frac{E-m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] (m_0c^2 + E)^{1/2}e^{-\varrho/2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{\kappa}{\varrho} (m_0c^2 - E)^{1/2}e^{-\varrho/2}(\phi_1 - \phi_2) \quad (2.91)
\end{aligned}$$

Bu ifadelerin düzenlemesiyle,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} + \frac{d\phi_2}{d\varrho} \\
&= \frac{-\kappa}{\varrho}(\phi_1 + \phi_2) + \left[ \frac{E + m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0c^2 - E)^{1/2}}{(m_0c^2 + E)^{1/2}}(\phi_1 - \phi_2), \\
& -\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} - \frac{d\phi_2}{d\varrho} \\
&= \left[ \frac{E-m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0c^2+E)^{1/2}}{(m_0c^2-E)^{1/2}}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 - \phi_2) \quad (2.92)
\end{aligned}$$

Öte yandan,

$$\frac{(m_0c^2 - E)^{1/2}}{(m_0c^2 + E)^{1/2}} = \frac{m_0c^2 - E}{\hbar c\lambda}$$

$$\frac{(m_0c^2 + E)^{1/2}}{(m_0c^2 - E)^{1/2}} = \frac{m_0c^2 + E}{\hbar c\lambda}$$

bağıntıları nedeniyle aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} + \frac{d\phi_2}{d\varrho} = \frac{-\kappa}{\varrho}(\phi_1 + \phi_2) + \left[ \frac{E + m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0c^2 - E)^{1/2}}{\hbar c\lambda}(\phi_1 - \phi_2), \\
& -\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} - \frac{d\phi_2}{d\varrho} \\
&= - \left[ \frac{E-m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{m_0c^2+E}{\hbar c\lambda}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 - \phi_2) \quad (2.93)
\end{aligned}$$

Denklem (2.91) nin her iki denklemi sırasıyla toplanır ve çıkartılırsa,

$$-\phi_1 + 2 \frac{d\phi_1}{d\varrho} = -\frac{2\kappa}{\varrho} \phi_2 + \phi_1 + \frac{Z\alpha m_0c^2+E}{\varrho \hbar c\lambda}(\phi_1 - \phi_2) - \frac{Z\alpha (m_0c^2+E)}{\varrho \hbar c\lambda}(\phi_1 + \phi_2) \quad (2.94)$$

$$-\phi_2 + 2 \frac{d\phi_2}{d\rho} = -\frac{2\kappa}{\rho} \phi_1 + \phi_2 + \frac{Z\alpha m_0 c^2 - E}{\rho \hbar c \lambda} (\phi_1 - \phi_2) + \frac{Z\alpha (m_0 c^2 + E)}{\rho \hbar c \lambda} (\phi_1 + \phi_2) \quad (2.95)$$

Yukarda yapılan işlemler toparlanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{d\rho} &= \left(1 - \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda \rho}\right) \phi_1 - \left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho}\right) \phi_2, \\ \frac{d\phi_2}{d\rho} &= \left(-\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho}\right) \phi_1 + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda \rho} \phi_2 \end{aligned} \quad (2.96)$$

$\phi_1$  ve  $\phi_2$  için çözümleri bulabilmek için kuvvet serisi açılımını kullanırız:

$$\phi_1 = \rho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \rho^m, \phi_2 = \rho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \rho^m \quad (2.97)$$

Bu denklem (2.96) te yerine yazılırsa,

$$\sum (m + \gamma) \alpha_m \rho^{m+\gamma-1} = \sum \alpha_m \rho^{m+\gamma} - \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \sum \alpha_m \rho^{m+\gamma-1} - \left(\kappa + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}\right) \sum \beta_m \rho^\gamma m + \gamma - 1 \quad (2.98)$$

$$\sum \beta_m (m + \gamma) \rho^{m+\gamma-1} \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}\right) \sum \alpha_m \rho^\gamma m + \gamma - 1 + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \sum \beta_m \rho^{m+\gamma-1}$$

Burada katsayılar karşılaştırılarak aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\alpha_m (m + \gamma) = \alpha_{m-1} - \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \alpha_m - \left(\kappa + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}\right) \beta_m$$

$$\beta_m (m + \gamma) = \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}\right) \alpha_m + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \beta_m \quad (2.99)$$

Burada,

$$\frac{\beta_m}{\alpha_m} = \frac{-\kappa + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}}{m + \gamma - \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda}} = \frac{\kappa - \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}}{n' - m} \quad (2.100)$$

$$n' = \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} - \gamma \quad (2.101)$$

$m = 0$  için,

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\kappa - \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}}{n'} = \frac{\kappa - (n' + \gamma) \frac{m_0 c^2}{E}}{n'} \quad (2.102)$$

(2.100)'deki sonucu, (2.99)'deki ilk denklemde yerine yazarsak,

$$\alpha_m \left[ m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} + \left( \kappa + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda} \right) \left( \frac{\kappa - \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}}{n' - m} \right) \right] = \alpha_{m-1}$$

ya da,

$$\alpha_m \left[ \left( m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right) (n' - m) + \left( \kappa^2 - \frac{z^2 \alpha^2 m_0^2 c^2}{\hbar^2 c^2 \lambda^2} \right) \right] = \alpha_{m-1} (n' - m) \quad (2.103)$$

Denklem (2.103) ün sol yanındaki her iki parantez içini hesaplarız:

$$\left( m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right) \left( \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} - \gamma - m \right) = -2m\gamma - m^2 - \gamma^2 + \left( \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right)^2 \quad (2.104)$$

$\gamma^2 = \kappa^2 - (Z\alpha)^2$  dir. Buradan şu sonuç bulunur:

$$\alpha_m \left[ -m(2\gamma + m) + (Z\alpha)^2 + \left( \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right)^2 - \left( \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda} \right)^2 \right] = \alpha_{m-1} (n' - m)$$

Bu ifade ise, şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= -\frac{(n' - m)}{m(2\gamma + m)} \alpha_{m-1} \\ &= \frac{(-1)^m (n' - 1) \dots (n' - m)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0 \\ &= \frac{(1 - n)(2 - n') \dots (m - n')}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Denklem (2.100)'den aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$\beta_m = \frac{\kappa - \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}}{n' - m} \frac{(-1)^m (n' - 1) \dots (n' - m)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0 \quad (2.106)$$

Burada (2.100) kullanılırsa,

$$\beta_m = (-1)^m \frac{n(n' - 1) \dots (n' - m + 1)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \beta_0 \quad (2.107)$$

Bu kuvvet serisi konfluent hipergeometrik fonksiyona dönüşür

$$F(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Böylece tam çözümler için şu sonuçlara ulaşılır:

$$\phi_1 = \alpha_0 e^{\gamma} F(1 - n', 2\gamma + 1; \rho)$$

$$\phi_2 = \beta_0 \varrho^\gamma F(-n', 2\gamma + 1; \varrho) = \left( \frac{\kappa - \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda}}{n'} \right) F(-n', 2\gamma + 1; \varrho) \quad (2.108)$$

Dalga fonksiyonunun normalize edilebilmesi için  $\phi_1$  ve  $\phi_2$  için serilerin yakınsak olması gerekir; yani hipergeometrik fonksiyonlar basitçe polinom olmalıdırlar. Bunun sağlanması için  $n'$  pozitif tamsayılar olmalıdır,  $n' = 0,1,2 \dots$

Temel bir kuantum sayısı tanımlayalım;

$$n = n' + |\kappa| = n' + j + \frac{1}{2}, n = 1,2,3, \dots$$

Bu bağıntıdan (2.101) kullanarak enerji öz-değerini hesaplayabiliriz;

$$\frac{Z\alpha E}{(m_0^2 c^2 - E^2)^2} = n' + \gamma = n - j - \frac{1}{2} + \gamma \quad (2.109)$$

ve sonuç olarak,

$$\left[ (Z\alpha)^2 + \left( n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \right] E^2 = m_0^2 c^4 \left( n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \quad (2.110)$$

$$E = \pm m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[ n - j - \frac{1}{2} + \left( \left( j + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2 \right)^{1/2} \right]^2} \right]^{-1/2}$$

$$n = 1,2,3 \dots$$

$$\kappa = \pm \left( j + \frac{1}{2} \right) \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.111)$$

Denklem (2.112)' deki negatif işaret alınmamalıdır, çünkü pozitif yüklü çekirdek için ( $Z\alpha > 0$ ) negatif yüklü enerjiler gerçek denklem (2.110)' u sağlamazlar (çünkü bu denklemin sağ yanı pozitiftir.). Bu yüzden (2.112)' deki işareti parantez içinde yazarız. Böylece atom içindeki elektronların enerji öz- değerleri için, Sommerfeld ince yapı formülünü elde ederiz.

Dalga fonksiyonu normalizasyon koşulunu sağlaması gerektiği için;

$$\int_0^\infty (f^2 + g^2) r^2 dr = 1$$

radyal dalga fonksiyonu için normalize edilmiş tam çözümler aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\left. \begin{array}{l} g(r) \\ f(r) \end{array} \right\} = \frac{\pm(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma+1)} x \sqrt{\frac{(m_0c^2 \pm E)\Gamma(2\gamma+n'+1)}{4m_0c^2 + \gamma \frac{(n'+\gamma)m_0c^2}{E} \left( \frac{(n'+\gamma)m_0c^2}{E} - \kappa \right) n!}} x(2\lambda r)^{\gamma-1} e^{-i\lambda r} \left\{ \left( \frac{(n'+\gamma)m_0c^2}{E} - \kappa \right) F(-n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \pm n' F(1 - n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \right\} \quad (2.112)$$

### 2.3.3. Sabit Bir Manyetik Alan İçin Dirac Denkleminin Çözümü

Burada vektör potansiyel için  $\vec{A} = (0, xB, 0)$  seçimi yapılacaktır. Bu durumda Dirac denklemi şuna indirgenir [7]:

$$\begin{aligned} (E^2 - m^2)\varphi &= [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]^2 \varphi = [(\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\vec{\sigma}\vec{B}] \varphi \\ &= [\vec{p}^2 + e^2 B^2 x^2 - eB(\sigma_z + 2xp_y)] \varphi \end{aligned} \quad (2.113)$$

Bu harmonik salınıcının hamiltoniyenidir. Burada  $p_y, p_z$  ve  $\sigma_z$  sıra değiştirebildikleri için çözümler:

$$\varphi(\vec{x}) = e^{i(p_y y + p_z z)} f(x) \quad (2.114)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu durumda  $f(x)'$  e bağlı denklem

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + (eBx - p_y)^2 - eB\sigma_z \right] f(x) = (E^2 - m^2 - p_z^2) f(x) \quad (2.115)$$

olarak elde edilir. Yeni bir değişken tanımlar

$$u = \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \quad (2.116)$$

ve

$$a = \frac{E^2 - m^2 - p_z^2}{eB}$$

seçersek, elimizdeki denklem şu biçime indirgenir.

$$\left( -\frac{d^2}{du^2} + u^2 - \sigma_z \right) f = af \quad (2.117)$$

Bu denklemin tam çözümü literatürden kolayca aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\varphi_{\pm}(\vec{x}) = C e^{-\frac{eB}{2}\left(x - \frac{p_y}{eB}\right)^2} H_{n_{\pm}} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \quad (2.118)$$

Burada  $H_{n_{\pm}}$  Hermite polinomlarıdır. Dalga fonksiyonunun sonsuzda sonlu olması gerekliliğinden, yani Hermite polinomlarının indisinin pozitif tam sayı olması koşulu karşımıza çıkar:  $a + \alpha = 2n + 1$ ,  $\alpha$ ;  $\sigma_z$ 'nin öz-değerleri olan  $\pm 1$  değerine sahiptir. Bu nedenle enerji düzeylerini veren bağıntı:

$$E^2 = m^2 + p_z^2 + eB(2n + 1 - \alpha) \quad (2.119)$$

Bu enerji düzeylerine karşılık gelen dalga fonksiyonları kolayca yazılabilir. Düzeyler kesikli ( $n, \alpha = -1; n + 1, \alpha - 1$ ) ve sürekli ( $p_y$ )'de katmerliliğin her ikisine birden sahiptir. Sürekli düzeylerin katmerliliği sonlu bir kutudaki parçacığı göz önüne alarak kesikli katmerliliğe indirgenebilir.

Spinin manyetik alanla olan yönelimine bağlı olarak aşağıdaki tartışmayı yapabiliriz:

**1.Durum:** Spin manyetik alan yönündedir. Bu  $\varphi_-$  bileşeninin sıfır olması demektir.

a) Bu durumda dalga denkleminin çözümü

$$\chi_+ = \frac{(sbt)}{i(E+m)} p_z K(x, y, z) H_{n_+ + 1} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \frac{p_y}{eB} \quad (2.120)$$

$$\chi_- = \frac{(sbt)}{i(E+m)} K(x, y, z) \sqrt{eB} (2(n+1) H_{n_+} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right]) \quad (2.121)$$

olur.

$$K(x, y, z) = e^{i(p_y y + p_z z)} e^{-\frac{eB}{2}\left(x - \frac{p_y}{eB}\right)^2} \quad (2.122)$$

$\alpha = 1$  için ( $n_+ + 1$ ) olmak üzere,

$$E_+^2 = m^2 + p_z^2 + 2eB(n_+ + 1) \quad (2.123)$$

bağıntısı elde edilir.

$$\chi_+ = \frac{(sbt)}{i(E+m)} p_z K(x, y, z) H_{n_+} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \quad (2.124)$$

$$\chi_- = \frac{(sbt)}{i(E+m)} K(x, y, z) \sqrt{eB} 2n H_{n_+ - 1} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \quad (2.125)$$

olur.  $\alpha = -1$  için ( $n_+$ ) enerji düzeyleri

$$E_+^2 = m^2 + p_z^2 + 2eBn_+ \quad (2.126)$$

biçiminde olur.

**2.Durum:** Spin manyetik alan yönündedir. Bu  $\varphi_+$  bileşenin sıfır olması demektir. Aynı şekilde işlem yapıldığında diğer bileşenler elde edilir.

Bütün bu öz durumları matris gösterimine yazarsak

1.  $\alpha = 1$  için ( $n_+$ )

Bu duruma karşılık gelen enerji

$$E_+^2 = m^2 + p_z^2 + 2eBn_+ + 1$$

$$\Psi_2(x, y, z) = AK(x, y, z) \begin{bmatrix} H_{n_++1} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \\ \frac{p_z}{(E+m)} H_{n_++1} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \\ \frac{\sqrt{eB} 2(n_++1)}{i(E+m)} H_{n_+} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

2.  $\alpha = -1$  için ( $n_+$ )

Bu duruma karşılık gelen enerji

$$E_+^2 = m^2 + p_z^2 + 2eBn_+$$

$$\Psi_2(x, y, z) = AK(x, y, z) \begin{bmatrix} H_{n_+} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \\ \frac{p_z}{(E+m)} H_{n_+} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \\ \frac{\sqrt{eB} 2n}{i(E+m)} H_{n_+-1} \left[ \sqrt{eB} \left( x - \frac{p_y}{eB} \right) \right] \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

olur.

### 3. Materyal ve Yöntem

Bu bölümde tezde çalışılan problem için kullanılacak yöntem tanıtılacaktır [8]. Problemin çözümünde kullanılan *değişken değiştirme yöntemi* ile ilgili diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesini sağlayacaktır. İlk olarak iki bileşenli Dirac denkleminin bir dış elektrik ve manyetik alan bileşimi için çözümleri elde edilerek parçacık yaratma sayı yoğunluğu belirlenecektir.

Sauter, Heisenberg ve Euler in güçlü elektromanyetik alanlar aracılığıyla parçacık yaratma işlemi üzerine yaptıkları öncü çalışmalardan sonra Schwinger, sabit ve homojen klasik elektrik alan için 1-ilmek etkin eylemini elde ederek birim zaman ve birim hacim için aşağıda verilen parçacık yaratma olasılığını formüle etmişlerdir:

$$w = \frac{(eE)^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{eE}\right) \quad (3.1)$$

Burada,  $m$  ve  $e$  parçacığın kütlesi ve yükü,  $E$  elektrik alanıdır. Bu çalışmadan sonra bu fiziksel süreç Schwinger mekanizması olarak adlandırıldı ve bu süreç Kuantum alan teorisinin önemli bir problemi haline geldi. Bu bağıntıda yer alan klasik elektrik alanların  $E \approx 10^{16} \text{ V/cm}$  mertebesinde olduğu varsayılır, bu değerinde bir elektrik alanın ise günümüz teknolojisi ile üretilmesi oldukça zordur.

Görelî yüksek enerjili parçacıklar ile ağır iyonlar arasındaki çarpışmalardan meydana gelen güçlü alanlar renk elektrik alanları olarak adlandırılır ve bu alanların vakumdan parçacık yaratma kabiliyetleri vardır. Bu tip çarpışmalar CERN 'deki modern çarpıştırıcılar ile oluşturulabilir. Schwinger mekanizması hadronik parçacık yaratılmasına atıf edilir, bu fazdaki oluşum Glasma olarak adlandırılır.

Literatür incelendiğinde Schwinger mekanizmasının çeşitli kararlı ve kararsız dış alanlar için çalışıldığı görülür. Elektrik ve manyetik alan bileşenlerinin her ikisini de içeren ayar alanları için Schwinger mekanizmasının tartışıldığı bu çalışmalar parçacık yaratma olgusunda elektrik alanın daha baskın bir etkisinin olduğunu ortaya koymuştur. Bu nedenle parçacık yaratma mekanizması bütünüyle saf elektrik alanlara atıf edilir. Genellikle klasik elektromanyetik alanlar için yapılan bu gibi kuantum etkilerinin incelendiği çalışmalara eğri uzay zamanlarda da taşınmıştır. Eğri uzay zamanlar için yapılan bu incelemeler bu tez çalışmasının kapsamı dışındadır ve bu nedenle incelenmeyecektir.

Fermiyonik parçacık yaratma oranı için yapılan hesaplama pozitif ve negatif frekanslı enerji durumlarının belirlenmesini gerektirir; bu durumlar " iç ve dış " kip vakum çözümleri

olarak adlandırılır. Bir dış alan içerisinde hareket eden göreceli yüklü parçacıkların hareketi için kip fonksiyonlarının analizinin pozitif ve negatif frekanslı çözümler olarak belirlenmesi kolay bir işlem değildir, çünkü böyle bir sisteme karşılık gelen Lagrangian bütünüyle uzay zaman koordinatlarına dayanır. Yani dış alanlarla olan etkileşme nedeniyle parçacık kavramı belirsiz hale gelir. Bu nedenle parçacık kavramını tanımlamak için bir koşula ihtiyaç duyarız. Bu çalışmada yarı klasik bir yöntemle başvuracağız. Hamilton – Jacobi denkleminin tam çözümlerini elde ederek bu çözümlerin sonsuz geçmiş ve sonsuz gelecek için asimptotik davranışlarını tartışacağız. Daha sonra zaman tekillikleri dolayında Dirac denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı belirlenecektir. Bu analiz yardımıyla ve Hamilton- Jacobi ve Dirac denklemlerinin sonsuz geçmiş ve sonsuz gelecekteki asimptotik çözümlerinin karşılaştırılmasıyla parçacık nitelmesi bir kimlik kazanacaktır.

Burada pozitif ve negatif frekanslı kip fonksiyonlarını asimptotik bölgelerde; pozitif frekanslı kip fonksiyonu  $e^{iS(t)}$  ve negatif frekanslı kip fonksiyonu  $e^{-iS(t)}$  ye yaklaşacak biçimde tanımlarız. Burada  $S(t)$  Hamilton-Jacobi denkleminin çözümü olan eylem fonksiyonudur. Bu aşamada aşağıda verilen 4-vektör elektromanyetik potansiyel için inceleme yapılmıştır:

$$A_\nu = B_0\tau[1 + \tanh(x/\tau)\delta_\nu^2 - E_0(\Gamma + \Lambda t)\delta_\nu^3] \quad (3.2)$$

Burada  $\tau, \Gamma, \Lambda$  sabitlerdir. Vektör Potansiyelin bu biçimi birbirine paralel kararlı elektrik alan ve Sauter-Type manyetik alan yaratır. Bu biçimde seçilen 4- vektör elektromanyetik potansiyelden aşağıda verilen manyetik akım elde edilir:

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2|\vec{B}|}{\tau} \tanh(x/\tau, ) \right] \delta_\nu^2 \quad (3.3)$$

### 3.1.Hamilton-Jacobi Denkleminin Çözümü

Çalışmanın bundan sonraki aşamalarında doğal birimler kullanılacaktır,  $\hbar = c = 1$ .

S eylemi için göreceli Hamilton- Jacobi denklemi şöyle verilir [9]:

$$\zeta^{\epsilon\theta} \left[ \frac{\partial S}{\partial x^\epsilon} - eA_\epsilon \right] \left[ \frac{\partial S}{\partial x^\theta} - eA_\theta \right] + m^2 = 0 \quad (3.4)$$

Burada  $\zeta^{\epsilon\theta} = (1, -1, -1, -1)$  Minkowski metriği, m parçacığın kütlesidir.

Elektromanyetik potansiyel Lorentz ayarına uyar ve Lorentz değişmezleri elektromanyetik alan tensöründen aşağıdaki gibi hesap edilebilir.

$$F^{\pi q} F_{\pi q} = 2(B^2 - E^2) = 2B_0^2 \sec^4(x/\tau) - E_0^2 \Lambda^2 \quad (3.5)$$

ve

$$F^{\pi q} F^*_{\pi q} = 4\vec{E} \cdot \vec{B} = 4\Lambda E_0 B_0 \sec^2(x/\tau) \quad (3.6)$$

Göz önüne alınan manyetik alanın uzay zaman bağımlılığı nedeniyle Hamilton-Jacobi denkleminin çözümü aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir:

$$S(t, \vec{x}) = P(x) + Q(t) + (yk_y + zk_z) \quad (3.7)$$

Burada  $k_y$  ve  $k_z$  elektromanyetik alan için yapılan seçimden ortaya çıkan korunumlu momentumlar olarak adlandırılır. (3.7) no'lu denklemin (3.4) no'lu denklemde kullanılmasıyla aşağıdaki denklem elde edilir. Burada  $\dot{U}$ s olarak kullanılan nokta ve kesme işaretleri zamana ve konuma göre olan türevleri ifade eder.

$$\dot{Q}^2 - \dot{P}^2 - [k_z + eE_0(\Gamma + \Lambda t)]^2 - [k_y - eB_0\tau(1 + \tan h(x/\tau))]^2 + m^2 = 0 \quad (3.8)$$

Buradan iki tane birinci merteye diferansiyel denklem elde edilir:

$$\dot{Q}^2 - [eE_0(\Gamma + \Lambda t)]^2 - 2k_z eE_0(\Gamma + \Lambda t) + m^2 - k_z^2 = v^2 \quad (3.9)$$

ve

$$\dot{P}^2 + \{eB_0\tau[1 + \tanh(x/\tau)]\}^2 - 2k_y eB_0\tau[1 + \tanh(x/\tau)] = v^2 \quad (3.10)$$

Burada  $v^2$  ayırma sabitidir.

Zamana bağlı dış alanlar vakumda kararsızlığa yol açar ve bunun sonucunda da vakumdan parçacık yaratılır. Bu nedenle uzaysal koordinatları içeren dinamik çözümlere yalnızca bir katsayı olarak katkı sağlar ve denklem 2 de verilen elektromanyetik ayar için Hamilton-Jacobi denkleminin çözümünü aşağıda verilen biçimde buluruz. Burada  $q = \Gamma + \partial t$  dir.

$$\begin{aligned} S(q, \vec{x}) &= S_0(0, \vec{x}) + \frac{eE_0}{\Lambda} \int_0^q \sqrt{q^2 + \frac{2k_z}{eE_0} q + \left( \frac{k_z^2 + v^2 - m^2}{e^2 E_0^2} \right)} dq \\ &= \left( \frac{qeE_0 + k_z}{2\Lambda} \right) \sqrt{q^2 + \frac{2k_z}{eE_0} q + \left( \frac{k_z^2 + v^2 - m^2}{e^2 E_0^2} \right)} dq + \left( \frac{v^2 - m^2}{2eE_0^2} \right) \end{aligned}$$

$$x \ln \left\{ 2\varrho + \frac{2k_z}{eE_0} + 2\sqrt{\varrho^2 + \frac{2k_z}{eE_0}\varrho + \left(\frac{k_z^2 + v^2 - m^2}{e^2 E_0^2}\right)} \right\} + S_0(0, \vec{x}) \quad (3.11)$$

Çözümün zamana bağlılığı  $\psi \rightarrow e^{-iS(t)}$  den türetilir ve görelî dalga denkleminin asimptotik davranışı için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\psi(t \rightarrow \pm\infty) = e^{iS(t)} \rightarrow e^{\pm i\left(\frac{eE_0 A}{2}\right)t^2 \pm i\left(\frac{v^2 - m^2}{2eE_0^2}\right)\ln(2\Lambda|t|)} \quad (3.12)$$

Buradaki üst ve alt işaretler negatif ve pozitif frekanslı durumları temsil eder.

### 3.2. Dirac Denkleminin Çözümü

Dış elektromanyetik alanlar için Dirac denklemi şöyle verilir:

$$[i\gamma^\nu \partial_\nu + eA_\nu \gamma^\nu - m]\psi = 0 \quad (3.13)$$

Burada  $\gamma^\nu$  Dirac matrisleridir,  $m$  ve  $e$  elektronun kütlesi ve yükü  $\psi$  ise dört bileşenli spinörlerdir. Bu spinörü için Dirac denklemi dört tane çiftlenimli diferansiyel denkleme indirgenir. Matematiksel olarak karmaşık olan dış alanlar için analitik çözümleri elde etmek genellikle zordur. Denklemin bu zorluğunun üstesinden Feynman ve Gell-Mann dış alanlar için Dirac denklemini iki bileşenli bir biçimini tanımlayarak gelmişlerdir [8]:

$$\left[ (\vec{P} - e\vec{A})^2 + m^2 - e\vec{\sigma} \cdot (\vec{B} + i\vec{E}) \right] \phi = (p_0 - eA_0)^2 \phi \quad (3.14)$$

Burada  $\phi$  alışıla gelmiş Pauli matrisleri ve  $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$  iki bileşenli denklemin çözümleridir. Dört bileşenli spinör ile iki bileşenli spinör arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$\psi = \begin{pmatrix} [\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A} + (P_0 - eA_0) + m)]\phi \\ [\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) + (P_0 - eA_0) - m]\phi \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Böylece analitik çözümleri elde etmek amacıyla iki bileşenli formalizmi takip ederiz. Verilen ayar alanı  $x$  ve  $t$  ye bağlı oldukları için  $k_y$  ve  $k_z$  hareket sabitleridirler. Ve çözümler aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\phi = e^{i(yk_y + zk_z)} \begin{bmatrix} X_1(x)T_1(t) \\ X_2(x)T_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Böylece denklem (3.2) ve (3.16) denklem (3.14) de kullanılırsa aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} - eB_0(eB_0\tau^2 + s) \operatorname{sech}^2(x/\tau) + 2eB_0(eB_0 - \tau k_y) \tanh(x/\tau) + 2eB_0\tau(eB_0\tau - k_y) + m^2 \right. \\ \left. + k_y^2 + k_z^2 + \frac{d^2}{dt^2} (eE_0\Lambda t)^2 + 2eE_0\Lambda(eE_0\Gamma + k_z)t + eE_0\Gamma(eE_0\Gamma + 2k_z) \right. \\ \left. - iseE_0\Lambda \right\} \chi_s(x) T_s(t) = 0 \quad (3.17)$$

Burada spin indisi  $s$  ve  $\pm 1$  öz-değerlerine sahiptir ve bunların her biri  $\phi_1$  ve  $\phi_2$  spinörlerine karşılık gelir. Bu denklem daha basit bir biçimde şöyle yazılabilir:

$$[\hat{F}(x) + \hat{Q}(t)] \chi_s(x) T_s(t) = 0 \quad (3.18)$$

Burada aşağıdaki işlemciler tanımlanmıştır:

$$\hat{F}(x) = -\frac{d^2}{dx^2} - eB_0[eB_0\tau^2 + s] \operatorname{sech}^2(x/\tau) + 2eB_0[eB_0 - \tau k_y] \tanh(x/\tau) + 2eB_0\tau[eB_0\tau - k_y] + m^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.19)$$

$$\hat{Q}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + (eE_0\Lambda t)^2 + 2eE_0\Lambda(eE_0\Gamma + k_z)t + eE_0\Gamma(eE_0\Gamma + k_z) - iseE_0\Lambda \quad (3.20)$$

Denklem (3.18) de aşağıdaki gibi iki denklem elde edilir:

$$[\hat{F}(x) - w^2] \chi_s(x) = 0 \quad (3.21)$$

$$[\hat{Q}(t) + w^2] T_s(t) = 0 \quad (3.22)$$

Burada  $w^2$  ayrılma sabitidir.

$x = \tau r$  tanımı yapılırsa, denklem (3.21) şu biçime dönüşür.

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \Sigma \operatorname{sech}^2 r - \gamma \tanh r - \varepsilon \right] \chi_s(x) = 0 \quad (3.23)$$

Burada şu tanımlar yapılmıştır:

$$\Sigma = eB_0(eB_0\tau^2 + s), \quad \gamma = 2eB_0\tau^2(eB_0 - \tau k_y),$$

$$\varepsilon = 2eB_0\tau^3(eB_0\tau - k_y) + \tau^2(m^2 + k_y^2 + k_z^2 - w^2) \quad (3.24)$$

Bu denklemi çözmek amacıyla Rosen ve Morse u izleyebiliriz. Dalga fonksiyonu için  $\chi_s(r) = e^{ra} \cos h^{-b} r f_s(r)$  tanımlanırsa,

$$\left\{ \begin{aligned} & f_s'' + 2(a - b \tanh r) f_s' + \\ & [(\Sigma - b(b + 1)) \operatorname{sech}^2 r - (2ab + \gamma) \tanh r + (a^2 + b^2 - \varepsilon)] f_s \end{aligned} \right\} = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir.  $\mathcal{X}/f$  nin  $-\infty \leq r \leq +\infty$  da sonlu olabilmesi için  $(a^2 + b^2 \pm \varepsilon) = 0$  ve  $(2ab + \Upsilon) = 0$  koşulları gereklidir. Bu koşullardan a ve b için aşağıdaki ifadeleri türetiriz:

$$a = -\frac{1}{2} \left[ (\varepsilon + \gamma)^{\frac{1}{2}} - (\varepsilon - \gamma)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.26)$$

$$b = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon + \gamma)^{\frac{1}{2}} - (\varepsilon - \gamma)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.27)$$

Burada  $\eta = \frac{1}{2}(1 + \tanh r)$  tanımı yapılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left\{ \eta(1 - \eta) \frac{d^2}{d\eta^2} + [a + b + 1 - 2(b + 1)\eta] \frac{d}{d\eta} + [\Sigma - b(b + 1)] \right\} f = 0 \quad (3.28)$$

Bu denklem ise hipergeometrik fonksiyonların sağladığı diferansiyel denklemdir.  $\eta = 0$  da sonlu kalan hipergeometrik fonksiyon bu denklemi sağlar ve çözüm şöyle verilecektir.

$$f_{s(\eta)} = {}_2F_1 \left[ (b + 1/2) - (\Sigma + 1/4)^{\frac{1}{2}}; (b + 1/2) + (\Sigma + 1/4)^{\frac{1}{2}}; a + b + 1; \eta \right] \quad (3.29)$$

Böylece tam çözüm:

$$\chi_s = e^{ra} \cosh^{-b} r {}_2F_1 \left[ (b + 1/2) - (\Sigma + 1/4)^{\frac{1}{2}}; (b + 1/2) + (\Sigma + 1/4)^{\frac{1}{2}}; a + b + 1; \eta \right] \quad (3.30)$$

Bu çözümün sonsuzluğa yakınsak olması için aşağıdaki koşul sağlanmalıdır:

$$\left[ (b + 1/2) - (\Sigma + 1/4)^{\frac{1}{2}} \right] - n \quad (3.31)$$

Böylece,

$$a = -\gamma \left[ (4\Sigma + 1)^{\frac{1}{2}} - (2n + 1) \right]^{-1} \quad (3.32)$$

ve

$$b = \frac{1}{2} \left[ (4\Sigma + 1)^{\frac{1}{2}} - (2n + 1) \right] \quad (3.33)$$

Ayrılma sabiti w şu koşuldanda  $(a^2 + b^2 - \varepsilon) = 0$  kolaylıkla türetilebilir.

Yeni bir değişken tanımlayarak,  $\xi = \sqrt{\frac{2}{eE_0\Lambda}(eE_0\Lambda + eE_0\Gamma + k_z)}$  denklem (3.22)den aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{iesE_0\Lambda + k_z^2 - w^2}{2eE_0\Lambda} \right\} T_s(\xi) = 0 \quad (3.34)$$

Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri parabolik silindirik fonksiyonlardır[10]:

$$T_s(\xi) = \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{a}}{4}}}{(2eE_0\Lambda)^{\frac{1}{4}}} \left[ D_{-i\tilde{a}-1/2} \left( e^{i\pi/4}\xi \right) + D_{-i\tilde{a}-1/2}^* \left( e^{i\pi/4}\xi \right) \right] \quad (3.35)$$

Burada,  $\tilde{a} = \left( \frac{iesE_0\Lambda + k_z^2 - w^2}{2eE_0\Lambda} \right)$  dir.

Böylece, tam çözümler elde edilir ve Dirac spinörünün tüm bileşenleri, (3.30) ve (3.35) denklemlerinin denklem (3.16)'da yerine yazılmasıyla elde edilebilir.

### 3.3. Bogoliubov Dönüşüm Yöntemi le Parçacık Yaratma Sürecinin İncelenmesi

Çift yaratmanın sabit bir alanda doğrudan gözlenmesinin yarattığı zorluktan kaynaklı olarak parçacık yaratma süreci (3.28) denkleminde verilen dalga fonksiyonun zamana bağlı bileşenleriyle incelenebilir, bu bileşenler parabolik silindirik fonksiyonlardır.

Denklem (3.34) ün iki çözümü aşağıdaki biçimde verilir:

$$T_{s_1}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{a}}{4}}}{(2eE_0\Lambda)^{\frac{1}{4}}} D_{-i\tilde{a}-1/2} \left( e^{i\pi/4}\xi \right) \quad (3.36)$$

ve

$$T_{s_2}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{a}}{4}}}{(2eE_0\Lambda)^{\frac{1}{4}}} D_{-i\tilde{a}-1/2}^* \left( e^{i\pi/4}\xi \right) \quad (3.37)$$

Elimizdeki tek çözümler bunlar değildir ve geri kalan herhangi bir çözüm Bogoliubov kat sayıları aracılığıyla oluşturulabilir.

$$\tilde{T}_{s_1}(\xi) = \alpha T_{s_1}(\xi) - \beta^* T_{s_2}(\xi) \quad (3.38)$$

ve

$$\tilde{T}_{S_2}(\xi) = \alpha^* T_{S_2}(\xi) + \beta T_{S_1}(\xi) \quad (3.39)$$

Bogoliubov dönüşüm yöntemi bir izomorfizm aracılığıyla oluşan kanonik bir sıra değiştirme bağıntısı cebirinin başka bir cebirle ilişkilendiren bir yöntemdir. Düz uzayda kuantum alan teorisinde alan denkleminin öz fonksiyonları olan  $\psi$  kip çözümler cinsinden aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\psi = \sum_n (a_n \varphi_n + a_n^\dagger \varphi_n^*) = \sum_k (b_k \Theta_k + b_k^\dagger \Theta_k^\dagger) \quad (3.40)$$

Burada, şu bağıntılar geçerlidir  $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j}, (\varphi_i^*, \varphi_j^*) = \delta_{i,j}, (\varphi_i, \varphi_j^*) = 0$  ve  $(\theta_i, \theta_j) = \delta_{i,j}, (\theta_i^*, \theta_j^*) = \delta_{i,j}, (\theta_i, \theta_j^*) = 0$

Yaratma ve yok etme işlemcileri  $a_n^\dagger, b_k^\dagger$  ve  $a_n, b_k$  aşağıdaki bağıntılarla verilir:

$$a_n = \sum_k (\alpha_{kn} a_n + \beta_{kn}^* b_k^\dagger) \quad (3.41)$$

$$b_k = \sum_n (\alpha_{kn}^* a_n - \beta_{kn} a_n^\dagger) \quad (3.42)$$

$\alpha_{kn}$  ve  $\beta_{kn}$  Bogoliubov katsayılarıdır ve  $\alpha_{ij} = (\theta_i, \varphi_j)$  ve  $\beta_{ij} = -(\theta_i, \varphi_j^*)$  ile hesaplanır. Bu katsayılar aşağıdaki bağıntılarla ilişkilendirilir:

$$\sum_i (\alpha_{ni} \alpha_{ki}^* - \beta_{ni} \beta_{ki}^*) = \delta_{nk} \quad (3.43)$$

$$\sum_i (\alpha_{ni} \beta_{ki} - \beta_{ni} \alpha_{ki}) = 0 \quad (3.44)$$

$|0_a\rangle$  ve  $|0_b\rangle$  Fock uzayında iki vakuüm durumu olsunlar, bunlar tüm n ve k drumları için aşağıdaki gibi temsil edilirler:

$$|0_a\rangle: a_n |0_a\rangle = 0 \quad (3.45)$$

$$|0_b\rangle: b_k |0_b\rangle = 0 \quad (3.46)$$

Eğer  $0_b$  vakuüm olarak alınırsa,  $0_a$  durumu birçok parçacık durumu olarak adlandırılır. Böylece,  $0_a$   $\Theta_n$ - kipli parçacıkların sayısı :

$$\langle 0_a | b_k^+ b_k | 0_a \rangle = \sum_n |\beta_{kn}|^2 \quad (3.47)$$

Eğer  $\varphi_n(x)$  pozitif frekanslı kipler olarak tanımlanırsa ve  $\theta_{n-}$  kipleri bunların çizgisel bileşimi ise,  $\beta_{jk} = 0$  olur ve  $b_k | 0_a \rangle = 0$  ve  $a_k | 0_a \rangle = 0$  olur. Böylece  $\varphi_j$  ve  $\theta_k$  kipleri ortak bir vakum durumuna sahip olurlar.  $\beta_{jk} \neq 0$ ,  $\theta_k$  pozitif  $\varphi_k$  ve  $-\varphi_k^*$  frekansta kiplerin bileşimine sahip olur.

Böylece Bogoliubov katsayılarını bulmak için pozitif ve negatif frekanslı çözümleri tanımlayabiliriz.

Parabolik silindirik fonksiyonların asimptotik açılımı şöyle verilir,

$$D_\nu(z)_{|z| \rightarrow +\infty} \approx z^\nu e^{-z^2/4}, \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4} \quad (3.48)$$

Bu ifadenin  $t \rightarrow +\infty$  limitinde denklem (3.36) ve (3.37) için göz önüne alınmasıyla ve bunların denklem (3.12) ile karşılaştırılmasıyla aşağıda verilen pozitif ve negatif frekanslı kip çözümleri elde edilecektir;

$$T_{s_1}(\xi) \approx (\sqrt{2eE_0\Lambda|t|})^{-1/2} e^{\left(-ieE_0\Lambda t^2 - i\tilde{a} \ln(\sqrt{2eE_0\Lambda|t|})\right)} \quad (3.49)$$

ve

$$T_{s_2}(\xi) \approx (\sqrt{2eE_0\Lambda|t|})^{-1/2} e^{\left(ieE_0\Lambda t^2 + i\tilde{a} \ln(\sqrt{2eE_0\Lambda|t|})\right)} \quad (3.50)$$

Sonuç olarak çözümler  $T_{\pm} \approx e^{\pm iS(t)}$  biçiminde davranacaktır.

$t \rightarrow -\infty (\xi \rightarrow -\infty)$  için çözümler aşağıdaki biçimde olacaktır;

$$T_{s_1}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{a}}{4}}}{(2eE_0\Lambda)^{\frac{1}{4}}} D_{-i\tilde{a}-1/2}^* \left(-e^{i\pi/4}\xi\right) \quad (3.51)$$

ve

$$T_{s_2}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{a}}{4}}}{(2eE_0\Lambda)^{\frac{1}{4}}} D_{-i\tilde{a}-1/2} \left(-e^{i\pi/4}\xi\right) \quad (3.52)$$

Bunların asimptotik davranışı ise,  $T_{\pm} \approx e^{\pm iS(t)}$  olacaktır.

Çözümlerin asimptotik bölgelerde farklı olacağı açıktır, bunun kaynağı parçacık yaratma olgusunun kendisidir. Bu yüzden  $t \rightarrow +\infty$  için çözümler “dış” vakum kipleri,  $t \rightarrow -\infty$  çözümleri ise “iç” vakum kipleri olacaktır.

Pozitif ve negatif frekanslı dış ve iç vakum kipleri Bogoliubov katsayıları aracılığıyla ilişkilendirilebilir. Denklem (39) kullanılarak aşağıdaki ifade yazılabilir,

$$D_{-i\tilde{a}-1/2}(-e^{i\pi/4}\xi) = \alpha^* D_{-i\tilde{a}-1/2}^*(-e^{i\pi/4}\xi) + \beta D_{-i\tilde{a}-1/2}(-e^{i\pi/4}\xi) \quad (3.53)$$

Bu bağıntının sol tarafındaki ifadeyi aşağıdaki formüle göre açarsak,

$$D_\nu(z) = \left[ e^{-i\pi\nu} D_\nu(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-i\pi(\nu+1)/2} D_{-\nu-1}(iz) \right] \quad (3.54)$$

ve  $[D_\nu(-z)]^* = D_{-\nu-1}(-iz)$  ifadesini göz önüne alırsak,  $\alpha$  ve  $\beta$  Bogoliubov katsayılarını açık olarak aşağıdaki biçimde elde ederiz:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\tilde{a}} e^{-\pi\tilde{a}/2}}}{\Gamma(-i\tilde{a})} \quad (3.55)$$

ve

$$\beta = e^{-\pi\tilde{a}} \quad (3.56)$$

Burada,  $\tilde{a} = \left( \frac{k_z^2 - w^2}{2eE_0\Lambda} \right)$  dir ve  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  koşulu sağlanmaktadır.

Yukarda elde edilen Bogoliubov katsayılarından yararlanarak,

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = \frac{2\pi}{\tilde{a}} e^{\pi\tilde{a}} \frac{1}{|\Gamma(-i\tilde{a})|^2} \quad (3.57)$$

ifadesini elde ederiz.

Gamma fonksiyonları için aşağıdaki formülü göz önüne alırsak

$$|\Gamma(iq)|^2 = \frac{\pi}{q \sinh(\pi q)} \quad (3.58)$$

Parçacık yaratma sayı yoğunluğunun aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$N \simeq |\beta|^2 = \left[ \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} + 1 \right]^{-1} = e^{-2\pi\tilde{a}} \quad (3.59)$$

Burada  $\check{\alpha}$  parametresi dört vektör potansiyelin fiziksel sabitleri cinsinden yazılan bir parametredir ve açık hali aşağıdaki biçimde verilir:

$$\check{\alpha} = \frac{1}{2eE_0\Lambda} \left[ \frac{4e\tau^2 B_0^2 (eB_0 - \tau k_y)^2}{(-1 - 2n + \sqrt{1 + 4eB_0(s + eB_0\tau^2)})^2} - \frac{1}{4\tau^2} \left( -1 - 2n + \sqrt{1 + 4eB_0(s + eB_0\tau^2)} \right)^2 - (m^2 + k_y^2) - 2eB_0\tau(eB_0\tau - k_y) \right] \quad (3.60)$$

## 4.BULGULAR

Bu bölümde Dirac denkleminin seçilen bir dış elektromanyetik alan için tam çözümleri elde edilerek fermiyonik parçacıkların yaratılma sayı yoğunluğu hesaplanacaktır. Bu probleme başlarken ilk olarak Klein-Gordon denklemi ele alınacaktır. Ardından Dirac denkleminin çözümü elde edilecektir. Fiziksel bir uygulama olarak parçacık yaratma süreci tartışılacaktır. Parçacık yaratma uygulaması sadece Dirac denkleminin çözümleri için tartışılacaktır. Bunun nedeni ise Dirac denkleminin seçilen iki-bileşenli biçiminin  $s = 0$  durumu için Klein-Gordon denklemine indirgenebilmesidir. Yani denklemin bu yapısı spinsiz parçacıkları ve onların yaratılma sayı yoğunluklarını da barındırdığından ayrıca hesap yapılmayacaktır. Dirac denklemi için elde edilen sonuçlarda  $s = 0$  alınır, bu sonuçlar Klein-Gordon denklemi için de geçerli olacaktır.

### 4.1 Klein-Gordon Denkleminin Çözümü

4-vektör elektromanyetik potansiyel aşağıdaki gibi seçilecektir:

$$A_\mu = -\frac{B_0}{x} \delta_\mu^2 - \frac{E_0}{\xi} (1 - e^{-\zeta t}) \delta_\mu^3 \quad (4.1)$$

Burada  $\mu, \xi$  ve  $\zeta$  sabitlerdir.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{E_0}{\xi} (1 - e^{-\zeta t}) \right] \hat{k} = \frac{E_0}{\xi} (\xi e^{-\xi t}) \hat{k}$$

$$\vec{E} = E_0 e^{-\xi t} \hat{k}$$

Aynı zamanda potansiyelin rotasyonelini aldığımızda manyetik alanı elde ederiz:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & -\frac{B_0}{x} & -\frac{E_0}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) \end{vmatrix} = \hat{k} \left( \frac{B_0}{x^2} \right)$$

Seçilen vektör potansiyele göre  $\vec{E} \parallel \vec{B}$  olmaktadır.

Elektromanyetik alan içerisinde hareket eden görel ve spinsiz parçacıkları temsil eden Klein-Gordon denklemi şöyle verilir [1, 4]:

$$[(\vec{P} - e\vec{A})^2 + m^2]\Psi = (P_0 - eA_0)^2\Psi \quad (4.2)$$

Bu denklem (4.1) de verilen 4-vektör elektromanyetik potansiyel için şu biçimi alır:

$$[\bar{P}^2 + e^2 \bar{A}^2 - e(\bar{P} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \bar{P}) + m^2] \Psi = P_0^2 \Psi$$

$$(\bar{P} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \bar{P}) \psi_{\parallel} = \underbrace{(P_x A_x + P_y A_y + P_z A_z)}_0 + \underbrace{(A_x P_x + A_y P_y + A_z P_z)}_0 \psi_{\parallel}$$

$$\begin{aligned} (P_y A_y + A_y P_y + P_z A_z + A_z P_z) \psi_{\parallel} &= A_y (P_y \psi_{\parallel}) + A_y (P_y \psi_{\parallel}) + A_z (P_z \psi_{\parallel}) + A_z (P_z \psi_{\parallel}) \\ &= 2 [A_y (P_y \psi_{\parallel}) + A_z (P_z \psi_{\parallel})] \\ &= -2 \left[ \frac{B_0 k_y}{x} + \frac{E_0}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) k_z \right] \psi_{\parallel} \end{aligned}$$

$$\bar{P}^2 = \hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2 = -\frac{d^2}{dx^2} + k_y^2 + k_z^2$$

$$\bar{A}^2 = \frac{B_0^2}{x^2} + \frac{E_0^2}{\xi^2} (1 - e^{-\xi t})^2 = \frac{B_0^2}{x^2} + \frac{E_0^2}{\xi^2} (1 + e^{-2\xi t} - 2e^{-\xi t})$$

Ayrıca,

$$\Psi = e^{-i(yk_y + zk_z)} G(x) H(t)$$

biçiminde bir çözüm önerilir ve yukarıdaki bağıntılar denklem (4.2)'de yerine yazılırsa,

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + k_y^2 + k_z^2 + \frac{e^2 B_0^2}{x^2} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} e^{-2\xi t} - 2 \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} e^{-2\xi t} + \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2e B_0 k_y}{x} + \frac{2e E_0}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) k_z + m^2 \right\} G(x) H(t) = 0 \quad (4.3)$$

veya

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{e^2 B_0^2}{x^2} + \frac{2e B_0 k_y}{x} + k_y^2 + k_z^2 + m^2 + \frac{d^2}{dt^2} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} e^{-2\xi t} + \frac{2e E_0}{\xi} \left( -k_z - \frac{e E_0}{\xi} \right) e^{-\xi t} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} + \frac{2e B_0 k_z}{\xi} \right\} G(x) H(t) = 0 \quad (4.4)$$

olur. Bu denklemi iki işlemci tanımlayarak kısaca şöyle yazabiliriz:

$$[\hat{U}_{KG}(x) + \hat{V}_{KG}(t)] G(x) H(t) = 0$$

denklemini elde ederiz. Burada tanımlanan işlemcilerin açık biçimleri aşağıda verilmiştir:

$$\hat{U}_{KG}(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{e^2 B_0^2}{x^2} + \frac{2e B_0 k_y}{x} + k_y^2 + k_z^2 + m^2 \quad (4.5)$$

$$\hat{V}_{KG}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} e^{-2\xi t} + \frac{2eE_0}{\xi} \left( -k_z - \frac{eE_0}{\xi} \right) e^{-\xi t} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} + \frac{2eB_0 k_z}{\xi} \quad (4.6)$$

Bu iki denklem ise ayrıştırılabilir,  $b^2$  sabit olmak üzere iki ifade elde edilir:

$$[\hat{U}_{KG}(x) - b^2]G(x) = 0 \quad (i)$$

$$[\hat{V}_{KG}(t) + b^2]H(t) = 0 \quad (ii)$$

**(i). Denklemi:**

$$[\hat{U}_{KG}(x) - b^2]G(x) = 0$$

(i) denkleminin açık biçimi yeniden yazılarak denklem düzenlenirse,

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{e^2 B_0^2}{x^2} + \frac{2eB_0 k_y}{x} + k_y^2 + k_z^2 + m^2 - b^2 \right] G(x) = 0$$

veya

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{e^2 B_0^2}{x^2} + \frac{2eB_0 k_y}{x} + b^2 - \underbrace{(k_y^2 + k_z^2 + m^2)}_{\gamma^2} \right] G(x) = 0 \quad (4.7)$$

$\rho = 2i\gamma x$  değişkeni ile yeni bir dönüşüm uygulanırsa,

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\rho}{dx} \frac{d}{d\rho} = 2i\gamma \frac{d}{d\rho}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = -4\gamma^2 \frac{d^2}{d\rho^2}$$

Bunlar denklemde (4.7)'de yerine konulursa,

$$\left[ -4\gamma^2 \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{e^2 B_0^2}{\rho^2} (-4\gamma^2) - 2eB_0 k_y \frac{(2i\gamma)}{\rho} + \gamma^2 \right] G(\rho) = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{e^2 B_0^2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4} \right] G(\rho) = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. Bu ise Whittaker denklemidir ve bu denklem şöyle verilir:

**Tanım:** Whittaker fonksiyonlarının sağladığı diferansiyel denklem [11]:

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} + \frac{k}{z} - \frac{1}{4} \right] W_{k,\mu}(z) = 0$$

Buna göre denklem (4.5)'in çözümü Whittaker fonksiyonlarıdır:

$$G(\rho) = A M_{k,\mu}(\rho) + B W_{k,\mu}(\rho)$$

Burada  $A, B$  normalizasyon sabitleridir.

(4.5) denklemi bu denklem ile karşılaştırılırsa Whittaker fonksiyonlarının indisleri belirlenebilir:

$$\frac{1}{4} - \mu^2 = -e^2 B_0^2$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + e^2 B_0^2}$$

$$\lambda = \frac{ieB_0 k_y}{\gamma} = \frac{ieB_0 k_y}{\sqrt{b^2 - (k_y^2 + k_z^2 + m^2)}}$$

**(ii). Denklemi:**

$$[\hat{V}_{KG}(t) + b^2]H(t) = 0$$

(ii) denklemini açık bir biçimde yazalım.

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} e^{-2\xi t} - \frac{2eE_0}{\xi} \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} \right) e^{-\xi t} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} + \frac{2eB_0 k_z}{\xi} + b^2 \right] H(t) = 0 \quad (4.9)$$

Bir önceki kesimde yaptığımız dönüşümü yeniden hatırlayalım:  $e^{-\xi t} = \alpha$  değişken dönüşümü yapılır ve ilgili bağıntılar denklem (4.8) de yerine konulursa,

$$\left\{ \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^4} - \frac{2eE_0}{\xi} \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} \right) \frac{1}{\alpha} + \left[ \frac{eE_0}{\xi^3} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{b^2}{\xi^2} \right] \right\} H(\alpha) = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada 1.türevi yok etmek için;  $H(\alpha) = \alpha^{-\frac{1}{2}} h(\alpha)$  bağıntısı yazılırsa,

$$\left\{ \frac{d^2}{d\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \left[ \frac{eE_0}{\xi^3} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{b^2}{\xi^2} + \frac{1}{4} \right] - \frac{2eE_0}{\xi^3} \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} \right) \frac{1}{\alpha} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^4} \right\} h(\alpha) = 0 \quad (4.11)$$

Yeni bir değişken dönüşümü yapıp çözümler denklem (4.10)' da yerine konulursa,

$$\theta = 2i\beta\alpha, \beta^2 = \frac{e^2 E_0^2}{\xi^4} \text{ için}$$

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{d\theta}{d\alpha} \frac{d}{d\theta} = 2i\beta \frac{d}{d\theta}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} = -4\beta^2 \frac{d^2}{d\theta^2}$$

$$\left\{ -4\beta^2 \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{d^2}{d\theta^2} (-4\beta^2) \left[ \frac{eE_0}{\xi^3} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{b^2}{\xi^2} + \frac{1}{4} \right] - \frac{2eE_0}{\xi^3} \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} \right) \frac{2i\beta}{\theta} + \beta^2 \right\} h(\theta) = 0 \quad (4.12)$$

veya

$$\left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} \left[ \frac{eE_0}{\xi^3} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{b^2}{\xi^2} + \frac{1}{4} \right] + \frac{ieE_0}{\xi^3\beta} \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} \right) \frac{1}{\theta} - \frac{1}{4} \right\} h(\theta) = 0 \quad (4.13)$$

elde edilir. Bu denklem de yine Whittaker denklemidir ve

$$\frac{1}{4} - \tilde{\mu}^2 = \frac{eE_0}{\xi^3} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{b^2}{\xi^2} + \frac{1}{4}$$

$$\tilde{\mu} = \pm \frac{i}{\xi} \sqrt{\frac{eE_0}{\xi^3} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + b^2}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{ieE_0}{\xi^3\beta} \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} \right) = \frac{i}{\xi^3} eE_0 \frac{\xi^2}{eE_0} \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} \right)$$

burada  $\beta = \frac{eE_0}{\xi^2}$  olur ve

$$\tilde{\lambda} = \frac{i}{\xi} \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} \right)$$

olmak üzere çözüm,

$$H(e^{-\xi t}) = e^{\xi t/2} \left[ \tilde{A} M_{\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}} \left( \frac{2ieE_0}{\xi^2} e^{-\xi t} \right) + \tilde{B} \tilde{W}_{\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}} \left( \frac{2ieE_0}{\xi^2} e^{-\xi t} \right) \right] \quad (4.14)$$

biçiminde olacaktır.

Böylece Klein-Gordon denklemi için tam çözüm,

$$\psi_{KG} = e^{i(yk_y + zk_z)} [A M_{\lambda, \mu}(\rho) + B W_{\lambda, \mu}(\rho)] x e^{\xi t/2} [\tilde{A} M_{\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}}(\theta) + \tilde{B} W_{\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}}(\theta)] \quad (4.15)$$

şeklinde olacaktır.

#### 4.2. Dirac Denkleminin Çözümü

Bir dış elektromanyetik alanda spin- $\frac{1}{2}$  parçacık olan elektronlar için Dirac denklemi önceki bölümlerde yazılmıştı [7]:

$$[i\gamma^\mu(P_\mu - eA_\mu) + m]\Psi_D = 0 \quad (\hbar = c = 1) \quad (4.16)$$

Burada  $\gamma^\mu$  Dirac matrisleridir,  $m$  ve  $e$  elektronun kütlesi ve yükü,  $\Psi_D$  ise dört bileşenli spinörlerdir. Dirac denkleminin iki bileşenli biçimi ilk defa Feynman ve Gell-Mann tarafından tanımlanmıştır [12].

$$\left[ (\vec{P} - e\vec{A})^2 + m^2 - e\vec{\sigma} \cdot (\vec{B} + i\vec{E}) \right] \varphi = (P_0 - eA_0)^2 \varphi \quad (4.17)$$

Burada  $\vec{\sigma}$  Pauli spin matrisleridir ve  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  iki bileşenli denklemin çözümleridir. Dört bileşenli spinör ile iki bileşenli spinör arasındaki ilişki şöyle verilir [10].

$$\psi_D = \begin{bmatrix} \{\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) + (P_0 - eA_0) + m\} \varphi \\ \{\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) + (P_0 - eA_0) - m\} \varphi \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Verilen ayar alanı  $x$  ve  $t$  ye bağlı olduğu için  $k_y$  ve  $k_z$  hareket sabitleridir ve çözümler aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\varphi_j = e^{i(yk_y + zk_z)} X_j(x) T_j(t) \quad j = 1, 2 \quad (4.19)$$

Böylece denklem (4.1) ve (4.17) denklem (4.18) de kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

Denklem (4.26) düzenlenirse,

$$\left[ \vec{p}^2 + e^2 \vec{A}^2 - 2e(\vec{P} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{P}) + m^2 - e\vec{\sigma} \cdot (\vec{B} + i\vec{E}) \right] \varphi = (p_0 - eA_0)^2 \varphi \quad (4.20)$$

$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ -i\hbar\partial_x & 0 \end{array}$

Denklemin sol yanında yer alan üçüncü terimin açık ifadesi,

$$\begin{aligned} 2(\vec{P} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{P}) &= 2(A_2 P_2 + A_3 P_3) \\ &= 2 \left[ \frac{B_0}{x} k_y - \frac{E_0}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) k_z \right] \end{aligned}$$

Böylece denklem daha açık olarak yazıldığında,

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{p}_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + e^2 \frac{B_0^2}{x^2} + e^2 \frac{E_0^2}{\xi^2} (1 - e^{-\xi t})^2 + \frac{2B_0 k_y e}{x} + \frac{2eE_0}{\xi} k_z + m^2 - es \left( \frac{B_0}{x^2} + iE_0 e^{-i\xi t} \right) \right. \\ \left. + \frac{d^2}{dt^2} \right\} X_j T_j = 0 \quad (4.21) \end{aligned}$$

denklem tekrar düzenlenirse,

$$\left\{ \hat{p}_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2 + e^2 \frac{B_0^2}{x^2} + \frac{2B_0 k_y e}{x} - es \frac{B_0}{x^2} + \frac{d^2}{dt^2} + e^2 \frac{E_0^2}{\xi^2} [1 + e^{-2\xi t} - 2e^{\xi t}] + \frac{2E_0 k_z e}{\xi} - iesE_0 e^{-\xi t} \right\} X_j T_j = 0 \quad (4.22)$$

Burada spin indisi  $s$  ve  $\pm 1$  öz değerlerine sahiptir ve bunların her biri  $\varphi_1$  ve  $\varphi_2$  spinörlerine karşılık gelir. Bu denklem daha basit bir biçimde şöyle yazılabilir:

$$[\hat{F}(x) + \hat{Q}(t)]X_j(x)T_j(t) = 0 \quad (4.23)$$

Burada aşağıdaki işlemciler tanımlanmıştır.

$$\hat{F}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{eB_0(eB_0 - s)}{x^2} + \frac{2eB_0 k_y}{x} + m^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (4.24)$$

$$\hat{Q}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + e^2 \frac{E_0^2}{\xi^2} e^{-2\xi t} - eE_0 \left( \frac{2eE_0}{\xi^2} + is \right) e^{-\xi t} + \frac{E_0 e}{\xi} + \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) \quad (4.25)$$

Denklem (4.25)'ten aşağıdaki gibi iki denklem elde edilir.

$$\frac{1}{XT} [\hat{F}(x) + \hat{Q}(t)]XT = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{X} \hat{F}(x) X(x)}_{c^2} + \underbrace{\frac{1}{T} \hat{Q}(t) T(t)}_{-c^2} = 0$$

$$[\hat{F} - c^2]X(x) = 0 \quad (iii)$$

$$[\hat{Q} + c^2]T(t) = 0 \quad (iv)$$

Burada  $c^2$  ayırma sabitidir.

**(iii) Denklemi:**

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{eB_0(eB_0 - s)}{x^2} + \frac{2eB_0 k_y}{x} + c^2 - (k_y^2 + k_z^2 + m^2) \right] X_j(x) = 0 \quad (4.26)$$

Burada şu tanımlar yapılmıştır.

$$\rho = 2\gamma x \quad \gamma = \sqrt{m^2 + k_y^2 + k_z^2 - c^2}$$

$\rho$  ve  $\gamma$  tanımlarını denklem (4.22) te yerine koyarsak;

$$\left[ 4\gamma^2 \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{eB_0(eB_0 - s)}{\rho^2} (4\gamma^2) - \frac{2eB_0k_y}{\rho} (2\gamma) - \gamma^2 \right] X_j(\rho) = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{eB_0(eB_0 - s)}{\rho^2} - \frac{eB_0k_y}{\gamma} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4} \right] X_j(\rho) = 0 \quad (4.27)$$

bu denklem de Whittaker denklemidir ve çözüm;

$$X_j(\rho) = AM_{k,\mu}(\rho) + BW_{k,\mu}(\rho) \quad (4.28)$$

olur. Burada,

$$\frac{1}{4} - \mu^2 = (s - eB_0)eB_0$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s)$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s)}$$

$$\kappa = -\frac{eB_0k_y}{\gamma} = \frac{-eB_0k_y}{\sqrt{m^2 + k_y^2 + k_z^2 - c^2}}$$

Whittaker fonksiyonunun sonlu olma koşulu;

$$\frac{1}{2} + \mu - \kappa = n$$

olduğundan yukarıdaki  $\mu$  ve  $\kappa$  tanımları yerine konulduğunda,

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s)} + \frac{eB_0k_y}{\sqrt{m^2 + k_y^2 + k_z^2 - c^2}} = -n$$

$$\left[ \sqrt{\frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s)} + \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 = \left( \frac{-eB_0k_y}{\sqrt{m^2 + k_y^2 + k_z^2 - c^2}} \right)^2 \quad (4.29)$$

$n + \frac{1}{2} = N$  tanımını yapıp (4.28) denkleminin karesini alalım:

$$N^2 + \frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s) + 2N \sqrt{\frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s)} = \frac{e^2 B_0^2 k_y^2}{m^2 + k_y^2 + k_z^2 - c^2}$$

$$m^2 + k_y^2 + k_z^2 - c^2 = \frac{e^2 B_0^2 k_y^2}{N^2 + \frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s) + 2N\sqrt{\frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s)}}$$

$$c^2 = m^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{e^2 B_0^2 k_y^2}{N^2 + \frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s) + 2N\sqrt{\frac{1}{4} + eB_0(eB_0 - s)}} \quad (4.30)$$

**(iv) Denklemi:**

$$\hat{Q}(t) = \left[ \frac{d^2}{dt^2} + e^2 \frac{E_0^2}{\xi^2} e^{-2\xi t} - eE_0 \left( \frac{2eE_0}{\xi^2} + is \right) e^{-\xi t} + \frac{E_0 e}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + c^2 \right] T_j(t) = 0 \quad (4.31)$$

$e^{-\xi t} = \alpha$  dönüşümünü yapalım:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{d}{d\alpha} = -\xi \alpha \frac{d}{d\alpha}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \xi^2 \left( \alpha \frac{d}{d\alpha} \right) \left( \alpha \frac{d}{d\alpha} \right) \\ &= \xi^2 \alpha \left( \frac{d}{d\alpha} \right) \left( \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) \\ &= \xi^2 \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + \xi^2 \alpha \frac{d}{d\alpha} \end{aligned}$$

$$\left\{ \xi^2 \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + \xi^2 \alpha \frac{d}{d\alpha} + e^2 \frac{E_0^2 \alpha^2}{\xi^2} - eE_0 \left( \frac{2eE_0}{\xi^2} + is \right) \alpha + \frac{E_0 e}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + c^2 \right\} T_j(t) = 0 \quad (4.32)$$

denklem (4.31) tekrar düzenlenirse,

$$\left[ \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} + e^2 \frac{E_0^2}{\xi^4} - \frac{1}{\alpha} \frac{eE_0}{\xi^2} \left( \frac{2eE_0}{\xi^2} + is \right) + \frac{1}{\alpha^2} \frac{E_0 e \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + c^2}{\xi^2} \right] T_j(t) = 0 \quad (4.33)$$

$$\begin{array}{ccc} & d_2 & d_1 \end{array}$$

$T_j(\alpha) = \alpha^{-1/2} f_j(\alpha)$  tanımı yapılırsa,

$$\left[ \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} - \frac{d_2}{\alpha} + \frac{d_1}{\alpha^2} + e^2 \frac{E_0^2}{\xi^4} \right] T_j(\alpha) = 0$$

birinci türev yok olur ve,

$$\left[ \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{1}{4} + d_1 \right) - \frac{d_2}{\alpha} + e^2 \frac{E_0^2}{\xi^4} \right] f_j(\alpha) = 0 \quad (4.34)$$

$\Lambda = 2\theta\alpha$  tanımı yapılarak ve  $e^2 \frac{E_0^2}{\xi^4} = \theta^2$  dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d}{d\alpha} = 2\theta \frac{d}{d\Lambda}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} = 4\theta^2 \frac{d^2}{d\Lambda^2}$$

$$[4\theta^2 \frac{d^2}{d\Lambda^2} + \frac{1}{\Lambda^2} (\frac{1}{4} + d_1)(4\theta^2) - \frac{d_2}{\Lambda} (2\theta) + \theta^2] f_j(\alpha) = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\Lambda^2} + \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{1}{4} + d_1 \right) - \frac{d_2}{2\theta\Lambda} - \frac{1}{4} \right] f_j(\alpha) = 0 \quad (4.35)$$

(iv) denklemin çözümü yine Whittaker denklemi olur:

$$\frac{1}{4} - \tilde{\mu}^2 = \frac{1}{4} + d_1$$

$$\tilde{\mu} = \pm i\sqrt{d_1}\hbar$$

$$\tilde{\mu} = \pm i \sqrt{\frac{\frac{E_0 e}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + c^2}{\xi^2}}$$

$$\tilde{k} = -\frac{d_2}{2\theta}$$

$$\tilde{k} = -\frac{\frac{eE_0}{\xi^2} \frac{1}{\alpha} \left( \frac{2eE_0}{\xi^2} + is \right)}{2e^2 \frac{E_0^2}{\xi^4}} = -\frac{\xi^2}{2e_0} \left( \frac{2eE_0}{\xi^2} + is \right) = -\left( 1 + \frac{is\xi^2}{2eE_0} \right)$$

$$\tilde{k} = -\left( 1 + \frac{is\xi^2}{2eE_0} \right)$$

Böylece çözüm aşağıdaki gibi olur:

$$f_{j(\Lambda)} = \tilde{A} M_{\tilde{k}, \tilde{\mu}}(\Lambda) + \tilde{B} W_{\tilde{k}, \tilde{\mu}}(\Lambda) \quad (4.36)$$

Dirac denkleminin göz önüne alınan elektromanyetik potansiyel için tam çözümü ise şöyle olacaktır:

$$\varphi_j = e^{i(yk_y + zk_z)} [AM_{k,\mu}(\rho) + BW_{k,\mu}(\rho)] [\tilde{A}M_{\tilde{k},\tilde{\mu}}(\Lambda) + \tilde{B}W_{\tilde{k},\tilde{\mu}}(\Lambda)] \quad (4.37)$$

#### 4.4. Hamilton-Jacobi Denklemi

S eylemi için göreceli HJ denklemi şöyle verilir:

$$\mathcal{G}^{\alpha\mu} \left( \frac{\partial S}{\partial X^\beta} - eA_\alpha \right) \left( \frac{\partial S}{\partial X^\beta} - eA_\alpha \right) + m^2 = 0 \quad (\hbar = c = 1) \quad (4.38)$$

Burada  $\mathcal{G}^{\alpha\mu} = (1, -1, -1, -1)$  Minkowski metriği,  $m$  parçacığın kütesidir ve  $A_\alpha$  dört-vektör elektromanyetik potansiyel denklem (4.1) ile verilmiştir. Ayrıca  $\alpha$  ve  $\mu$  indisleri 0-3 arasında değer alan indislerdir.

Böylece HJ denklemi şu biçimde olur:

$$\left( \frac{dS}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 - \left( \frac{dS}{dy} + \frac{eE_0}{x} \right)^2 - \left( \frac{dS}{dz} + \frac{eE_0}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) \right)^2 + m^2 = 0 \quad (4.39)$$

Göz önüne alınan manyetik alanın uzay ve elektrik alanın zamana bağımlılığı nedeniyle HJ denkleminin çözümü aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir:

$$S(t, \vec{x}) = B(x) + G(t) + yk_y + zk_z \quad (4.40)$$

Burada  $k_y$  ve  $k_z$  elektromanyetik alan için yapılan seçimden ortaya çıkan korunumlu momentumlar olarak adlandırılır. (4.38) no'lu denklemin (4.39) no'lu denklemde kullanılmasıyla aşağıdaki denklem elde edilir

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dB}{dx} \right)^2 - \left( k_y + \frac{eE_0}{x} \right)^2 - \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) \right)^2 + m^2 = 0 \quad (4.41)$$

Böylece iki tane birinci mertebe diferansiyel denklem elde edilir.

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dB}{dx} \right)^2 - k_y^2 - \frac{e^2 E_0^2}{x^2} - \frac{2k_y e E_0}{x} - k_z^2 - \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} (1 - e^{-\xi t})^2 - \frac{2k_z e E_0}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) + m^2 = 0$$

$$\left[ \underbrace{\left( \frac{dG}{dt} \right)^2 - \left( k_z + \frac{eE_0}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) \right)^2 + m^2}_{b^2} - \underbrace{\left( \frac{dB}{dx} \right)^2 + \left( k_y + \frac{eE_0}{x} \right)^2}_{b^2} \right] = 0 \quad (4.42)$$

Burada  $b^2$  ayırma sabitidir.

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 - \left(k_z + \frac{eE_0}{\xi}(1 - e^{-\xi t})\right)^2 + m^2 - b^2 = 0 \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dG}{dt}\right)^2 &= \left(k_z + \frac{eE_0}{\xi}(1 - e^{-\xi t})\right)^2 + b^2 - m^2 \quad (4.44) \\ &= \underbrace{k_z^2 - m^2 + b^2 + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2}}_{u^2} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} e^{-\xi t} - \frac{2e^2 E_0^2}{\xi^2} e^{-\xi t} \end{aligned}$$

$u^2$  tanımı ve  $\alpha = e^{-\xi t}$  değişken dönüşümü yapıp denklem (4.41)'de yerine konulduğunda,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{d}{d\alpha} = -\xi\alpha \frac{d}{d\alpha}$$

$$\left(-\xi\alpha \frac{dG}{dt}\right)^2 = u^2 + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2} \alpha^2 - \frac{2e^2 E_0^2}{\xi^2} \alpha$$

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = \frac{u^2}{\xi^2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^4} - \frac{2e^2 E_0^2}{\xi^2} \frac{1}{\alpha}$$

$$G(\alpha) = \int \sqrt{\frac{u^2}{\xi^2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^4} - \frac{2e^2 E_0^2}{\xi^2} \frac{1}{\alpha}} d\alpha$$

veya

$$G(\alpha) = \frac{u}{\xi} \int \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2e^2 E_0^2}{u^2 \xi^2} \frac{1}{\alpha} - \frac{e^2 E_0^2}{u^2 \xi^2}} d\alpha$$

olur ve tekrar düzenlenirse,

$$G(\alpha) = \frac{u}{\xi} \int \sqrt{\frac{1 - \frac{2e^2 E_0^2}{u^2 \xi^2} \alpha - \frac{e^2 E_0^2}{u^2 \xi^2} \alpha^2}{\alpha}} d\alpha \quad (4.45)$$

elde edilir.

Çözümün zamana bağlılığı  $\psi \rightarrow e^{-iS(t)}$  den türetilir ve görelî dalga denkleminin asimptotik davranışı için integral içinde kalan kısmın asimptotik davranışına bakalım:

- $T \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  için çözümler aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha) = \pm \ln \alpha$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha) = \pm \ln(e^{-\xi t})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha) = \pm \xi t$$

- $T \rightarrow -\infty, \alpha \rightarrow +\infty$  için çözümler,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha) = \pm a_3^{1/2} \alpha \pm \frac{a_2}{a_3^{1/2}} \ln(\alpha)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha) = \pm \left( \frac{eE_0}{u\xi} \right) e^{-\xi t} \pm \left( -\frac{2e^2 E_0^2}{u^2 \xi^2} \right) \sqrt{\frac{u^2 \xi^2}{e^2 E_0^2}} \ln(e^{-\xi t})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha) = \pm \left( \frac{eE_0}{u\xi} \right) e^{-\xi t} \pm \left( \frac{2eE_0}{u\xi} \right) \ln(e^{-\xi t})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha) = \pm \left( \frac{eE_0}{u\xi} \right) e^{-\xi t} \pm \left( \frac{2eE_0}{u\xi} \right) t$$

olur.

Çözümlerin asimptotik bölgelerde farklı olacağı görülür, bunun sebebi parçacık yaratmanın kendisidir. Bu yüzden  $t \rightarrow +\infty$  için çözümler “dış” vakum kipleri,  $t \rightarrow -\infty$  çözümleri ise” iç” vakum kipleri olacaktır.

Pozitif ve negatif frekanslı dış ve iç vakum kipleri Bogoliubov katsayıları aracılığıyla ilişkilendirilebilir.

$$S^{(-)} = [C_{(-)}(\vec{x}) \pm \xi t] \frac{u}{\xi} = C_{(-)}(\vec{x}) \pm ut \quad (4.46)$$

$$S^{(+)} = \left[ C_{(+)}(\vec{x}) \pm \left( \frac{eE_0}{u\xi} \right) e^{-\xi t} \pm \left( \frac{2eE_0}{u} \right) t \right] \frac{u}{\xi}$$

$$S^{(+)} = \left[ C_{(+)}(\vec{x}) \pm \left( \frac{eE_0}{\xi^2} \right) e^{-\xi t} \pm \left( \frac{2eE_0}{\xi} \right) t \right] \frac{u}{\xi} \quad (4.47)$$

Böylece çözümü zamana bağlı biçimiyle negatif ve pozitif frekanslı durumlar için şöyle yazarız:

$$\Psi^{(-)} \rightarrow \Psi_0(\vec{x}) e^{iS^{(-)}} \rightarrow \Psi_0(\vec{x}) e^{\pm iut} \quad (4.48)$$

$$\Psi^{(+)} \rightarrow \Psi_0(\vec{x}) e^{iS^{(+)}} \rightarrow \Psi_0(\vec{x}) e^{\pm i \left( \frac{eE_0}{\xi^2} \right) e^{-\xi t}} e^{\pm i \left( \frac{2eE_0}{\xi} \right) t}$$

$$\Psi^{(+)} \rightarrow \Psi_0(\vec{x}) \exp \left\{ \pm i \left( \frac{eE_0}{\xi^2} \right) e^{-\xi t} \pm i \left( \frac{2eE_0}{\xi} \right) t \right\} \quad (4.49)$$

Denklem (4.44) de tanımlanan  $u = \sqrt{k_z^2 - m^2 + b^2 + \frac{e^2 E_0^2}{\xi^2}}$  için,

$$u = \left(\frac{eE_0}{\xi}\right) \sqrt{1 + \frac{\xi^2(k_z^2 - m^2 + b^2)}{e^2 E_0^2}} t$$

elde edilir ve denklem (4.45) ve denklem (4.46)'de yerine konulduğunda,

$$\Psi^{(-)} \rightarrow \Psi_0(\vec{x}) e^{\pm i \frac{eE_0}{\xi} \sqrt{1 + \frac{\xi^2(k_z^2 - m^2 + b^2)}{e^2 E_0^2}} t} \quad (4.50)$$

$$\Psi^{(+)} \rightarrow \Psi_0(\vec{x}) e^{\pm i \left(\frac{2eE_0}{\xi}\right) t} e^{\pm i \left(\frac{eE_0}{\xi^2}\right) e^{-\xi t}} \quad (4.51)$$

elde edilir. Buradaki üst ve alt işaretler negatif ve pozitif frekanslı durumları temsil eder.

#### 4.4.1. Parçacık Yaratma

Çift yaratmanın sabit bir alanda doğrudan gözlenmesinin yarattığı zorluktan kaynaklı olarak parçacık yaratma süreci için denklem (4.35) de elde edilen tam çözümün, dalga fonksiyonun zamana bağlı bileşenleriyle inceleme yapılacaktır. Bu inceleme için kullanılacak Hamilton-Jacobi yöntemi ve Bogoliubov dönüşüm yöntemi Bölüm 3 de ele alınmıştır. Aşağıdaki denklem (4.35) sınır şartları için değerlendirilecektir:

- $t \rightarrow +\infty$  için  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow 0$  olacaktır ve bu durumda (4.35) dalga fonksiyonunun asimptotik davranışı aşağıdaki gibi olur:

$$M_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta) \rightarrow e^{-\frac{\theta}{2}} \theta^{\tilde{\mu}+1/2} \quad (4.52)$$

Bu durumda pozitif ve negatif frekanslı vakum "iç" çözümleri sırasıyla şöyle olacaktır:

$$f_0^+(\theta) = A_0^+ M_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta)$$

$$f_0^-(\theta) = [A_0^+ M_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta)]^* = A_0^+ (-1)^{-\tilde{\mu}+1/2} M_{\tilde{k},-\tilde{\mu}}(\theta) \quad (4.53)$$

$$f(\theta)_0 = A_0^+ \left[ M_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta) + (-1)^{-\tilde{\mu}+1/2} M_{\tilde{k},-\tilde{\mu}}(\theta) \right] \quad (4.54)$$

- $t \rightarrow -\infty$ ,  $\alpha \rightarrow +\infty$ ,  $\theta \rightarrow \infty$  olacaktır ve bu durumda (4.37) dalga fonksiyonunun asimptotik davranışı aşağıdaki gibi olur:

$$W_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta) \rightarrow e^{-\frac{\theta}{2}} \theta^k \quad (4.55)$$

Bu durumda pozitif ve negatif frekanslı vakum “dış” çözümleri sırasıyla şöyle olacaktır:

$$f_{\infty}^{+}(\theta) = B_{\infty}^{+} W_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta)$$

$$f_{\infty}^{-}(\theta) = [B_{\infty}^{+} W_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta)]^{*} = B_{\infty}^{+} W_{-\tilde{k},\tilde{\mu}}(-\theta) \quad (4.56)$$

$$f(\theta)_{\infty} = B_{\infty}^{+} [W_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta) + W_{-\tilde{k},\tilde{\mu}}(-\theta)] \quad (4.57)$$

Elde edilen çözümler fiziksel olarak tek değildir diğer çözümler birbirlerine Bogoliubov dönüşüm yöntemiyle bağlanabilir. Buna göre sıfırdaki vakum çözümleri ile sonsuzdaki vakum çözümleri Bogoliubov katsayıları aracılığı ile birbiriyle aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilir:

$$f_0^{+}(\theta) = \alpha f_{\infty}^{+} + \beta f_{\infty}^{-} \quad (4.58)$$

$$A_0^{+} M_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta) = \alpha \left( \frac{B_{\infty}^{+}}{A_0^{+}} \right) W_{\tilde{k}\tilde{\mu}}(\theta) + \beta \left( \frac{B_{\infty}^{+}}{A_0^{+}} \right) W_{-\tilde{k},\tilde{\mu}}(-\theta) \quad (4.59)$$

Yukarıdaki denklemde Whittaker fonksiyonları için şu bağıntı kullanılırsa [10].

$$M_{k,\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(\mu + k + 1/2)} e^{-i\pi k} W_{-k,\mu}(-z) + \frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(\mu - k + 1/2)} e^{-i\pi(k-\mu-1/2)} W_{k,\mu}(z)$$

Bogoliubov katsayıları için sırasıyla aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\alpha \left( \frac{B_{\infty}^{+}}{A_0^{+}} \right) = \frac{\Gamma(2\tilde{\mu} + 1)}{\Gamma(\tilde{\mu} + \tilde{k} + 1/2)} e^{-i\pi k} \quad (4.60)$$

ve

$$\beta \left( \frac{B_{\infty}^{+}}{A_0^{+}} \right) = \frac{\Gamma(2\tilde{\mu} + 1)}{\Gamma(\tilde{\mu} - \tilde{k} + 1/2)} e^{-i\pi \tilde{k}} \quad (4.61)$$

Bu katsayılar birbirine oranlandığında,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(2\tilde{\mu} + 1)}{\Gamma(\tilde{\mu} + \tilde{k} + 1/2)} \frac{e^{-i\pi(\tilde{k}-\tilde{\mu}+1/2)}}{e^{-i\pi k}} \frac{\Gamma(2\tilde{\mu} + 1)}{\Gamma(\tilde{\mu} - \tilde{k} + 1/2)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\tilde{\mu} - \tilde{k} + 1/2)e^{-i\pi(\tilde{\mu}+1/2)}}{\Gamma(\tilde{\mu} + \tilde{k} + 1/2)} e^{-i\pi(\tilde{\mu}+1/2)}$$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \frac{|\Gamma(\tilde{\mu} - \tilde{k} + 1/2)|^2}{|\Gamma(\tilde{\mu} + \tilde{k} + 1/2)|^2} \quad (4.62)$$

elde edilir. Burada bazı tanımlamalar yapılmıştır:

$$\tilde{k} = - \left( 1 + \frac{is\xi^2}{2eE_0} \right)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{i}{\xi} \sqrt{\frac{eE_0}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + c^2}$$

Bu tanımlamalar kullanılarak Gamma fonksiyonlarının argümanları için şu ifadeler elde edilir:

$$\tilde{\mu} - \tilde{k} = \frac{i}{\xi} \sqrt{\frac{eE_0}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + c^2} + 1 + \frac{is\xi^2}{2eE_0}$$

$$\tilde{\mu} - \tilde{k} + 1/2 = i \left[ \underbrace{\sqrt{\frac{eE_0}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{c^2}{\xi^2}}}_{q} + i \frac{\xi^2 s + 2eE_0}{2eE_0} \right] + \frac{1}{2}$$

$$\tilde{\mu} - \tilde{k} + 1/2 = (iq + 1/2)$$

$$\tilde{\mu} + \tilde{k} + 1/2 = i \left[ \underbrace{\sqrt{\frac{eE_0}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{c^2}{\xi^2}}}_{\tilde{q}} - i \frac{\xi^2 s + 2eE_0}{2eE_0} \right] + 1/2$$

$$\tilde{\mu} + \tilde{k} + 1/2 = i\tilde{q} + 1/2$$

**Tanım:** Gama fonksiyonları için şu özellik vardır [12].

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cos h\pi z}$$

Bu tanım yardımıyla Bogoliubov katsayıları arasında şöyle bir ilişki elde edilir:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \frac{\pi}{\cos h\pi q} \cdot \frac{\cos h\pi \tilde{q}}{\pi} = \frac{\cos h\pi \tilde{q}}{\cos h\pi q} \quad (4.63)$$

Ele alınan problemde fermiyonik parçacıkların dinamiğini tartışıldığından bu parçacıklar Fermi-Dirac istatistiğine uyarlar ve bu durumda dalga fonksiyonları arasındaki katsayılar şu şartı sağlamalıdır:  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Ayrıca parçacık yaratma sayı yoğunluğu  $n \approx |\beta|^2$  ifadesine eşdeğerdir. Buna göre;

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} + 1 = \frac{1}{\beta^2} \rightarrow |\beta|^2 = \frac{1}{\left[1 + \frac{|\alpha|^2}{\beta^2}\right]}$$

Böylece parçacık yaratma sayı yoğunluğu için

$$n \approx |\beta|^2 = \frac{1}{\left[1 + \frac{\cos h\pi\tilde{q}}{\cos h\pi q}\right]} \quad (4.64)$$

bağıntısı elde edilir.

Burada şu kısaltmalar yapılmıştır:

$$q = \sqrt{\frac{eE_0}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{c^2}{\xi^2} + \frac{\xi^2 s}{2eE_0} + 1}$$

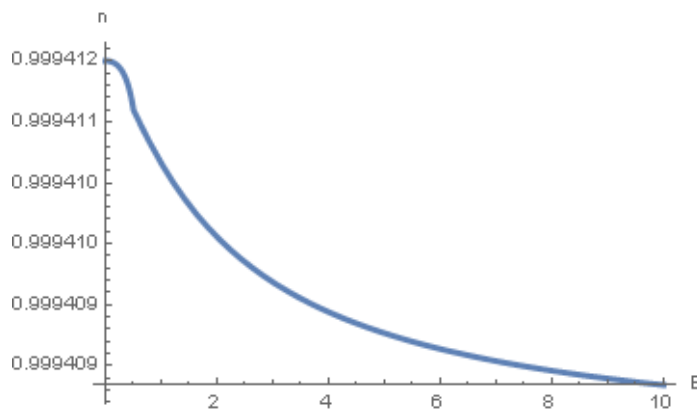
$$\tilde{q} = \sqrt{\frac{eE_0}{\xi} \left( \frac{eE_0}{\xi} + 2k_z \right) + \frac{c^2}{\xi^2} - \frac{\xi^2}{2eE_0} - 1}$$

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

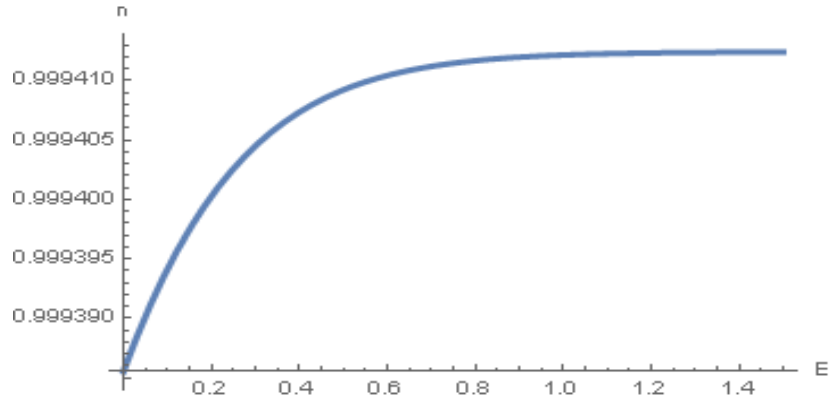
Bu tezde iki bileşenli Dirac denklemi  $\vec{E} = E_0 e^{-\xi t} \hat{k}$  biçiminde verilen zamana bağlı bir elektrik alan ve  $\vec{B} = \hat{k} \left( \frac{B_0}{x^2} \right)$  biçiminde verilen konuma bağlı bir manyetik alan için analitik olarak çözülmüştür ve çözümler Whittaker fonksiyonları cinsinden elde edilmiştir.

Çalışmada, Feynman ve Gell-Mann tarafından Dirac denklemi için önerilen iki bileşenli formalizm kullanılmıştır. Bu yaklaşımda tam çözümler elde edilirken dört bileşenli Dirac denkleminde karşılaşılan analitik zorluklar ortadan kalkar. Dirac denkleminin bu biçiminin çalışmaya sağladığı yararlarından biri de elde edilen çözümlerde  $s = 0$  alındığında çözümlerin, Klein-Gordon parçacıklarının çözümleri için de geçerli olmasıdır. Böylece, elde edilen sonuçlar hem skaler hem de fermiyonik parçacıklar için kullanılabilir.

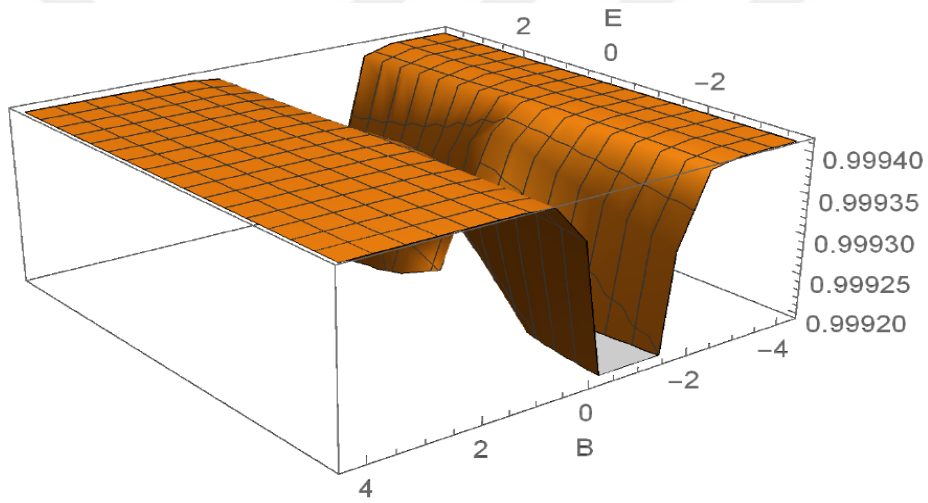
Güçlü elektrik alanların varlığında kararsız vakumdan parçacıklar yaratılır. Bu çalışmada vakum kararsızlığından parçacıkların oluştuğunu tartışmak için vakumun “iç” ve “dış” kipleri belirlenmiştir. Bunun için yarı-klasik HJ denklemi ele alınmıştır. Vakumun “iç” ve “dış” çözümleri görelî HJ denkleminin asimptotik çözümleri yardımıyla belirlenmiştir. Dirac denkleminin seçilen 4-vektör elektromanyetik potansiyel için elde edilen çözümleri tek değildir. Bu çözümler diğerleri ile asimptotik davranış göz önüne alınarak Bogoliubov katsayıları aracılığı ile ilişkilendirilir. Denklem (4.64)'ün elde edilmesinde kullanılan Bogoliubov katsayıları analitik çözümlerin asimptotik davranışlarıyla belirlenmiştir. Parçacık yaratma sayı yoğunluğunun matematiksel biçimi Fermi-Dirac ısıl dağılımına uymamaktadır. (4.64)'de elde edilen bağıntı nümerik olarak değerlendirildiğinde aşağıdaki grafikler elde edilir [5].



**Şekil 5.1.** Parçacık yaratma sayı yoğunluğunun manyetik alana göre değişimi.



**Şekil 5.2.** Parçacık yaratma sayı yoğunluğunun elektrik alana göre değişimi.



**Şekil 5.3.** Parçacık yaratma sayı yoğunluğunun elektrik ve manyetik alana göre değişimi.

Şekil 5.1 ve 5.2 incelendiğinde şiddetlenen manyetik alanların parçacık yaratma sayı yoğunluğunu azalttığı, elektrik alanların ise arttırdığı görülmektedir. Bu durum literatürde elde edilen sonuçlarla da uyum içerisindedir. Tipik olarak  $|eE| \ll m^2$  olduğundan, parçacık yaratma sürecinin sabit bir alanda doğrudan gözlenmesi zordur. Bu süreçte etkili olan zamana bağlı alanlardır ve dalga fonksiyonunun zamana bağlı çözümleri parçacık yaratmayı tetikleyecektir, bu çözümlerin kaynağı ise zamana bağlı seçilen elektrik alanıdır.

Genel olarak kuantum elektrodinamiğinde hesaplanan parçacık yaratma süreci son yıllarda eğri uzay için yapılan çalışmaların da ilgi odağı olmuştur. Bu tezde elde edilen sonuçlar için bir sonraki aşama, güçlü elektrik alanların etkisiyle oluşturulan kütleçekimsel dalgalar için skaler ve spinör alanları tartışmaktır.

## KAYNAKLAR

- [1]. Wu, T. Y. and Hwang W-Y, P. (1991). *Relativistic Quantum Mechanics and Quantum Fields*. Singapore: World Scientific.
- [2]. Greiner, W. (Ed.). (2000). *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [3]. Birrell, N. D. and Davies, P. C. (1982). *Quantum fields in curved space*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4]. Önengüt, G. (Ed.). (2015). *Temel Parçacıklara Giriş*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.
- [5]. Wolfram MATHEMATICA 11.2 ile çizdirilmiştir.
- [6]. Gross, F. (Ed.). (2004). *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. Germany: Wiley-VCH.
- [7]. Itzykson, C. and Zuber, J.B. (1980). *Quantum Field Theory*. New-York: McGraw-Hill Inc.
- [8]. Sogut, K., Yanar, H. and Havare, A. (2017). Production of Dirac Particles in External Electromagnetic Fields. *Acta Physica Polonica B*, 48 (9), 1493-1505.
- [9]. Villalba, V. M. and Grenier, W. (2002). Creation of Dirac Particles In The Presence of A Constant Electric Field In An Anisotropic Bianchi I Universe. *International Journal of Modern Physics A*, 17 (28), 1883-1891.
- [10]. Kamke, E. (1967). *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Leipzig: B. G. Teubner.
- [11]. Abramowitz, M. (Ed.), Stegun, I. (Ed.). (1974). *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications.
- [12]. Feynman, R. P. and Gell-Mann, M. (1958). Theory of the Fermi Interaction. *Physical Review*, 109 (1), 193-198.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı ve Soyadı** : Nurdan Yıldız  
**Doğum Tarihi** :02/12/1986  
**E-mail** : yl20141896@mersin.edu.tr

**Öğrenim Durumu** : Lisans

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Fizik	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2013
Yüksek Lisans	Fizik	Mersin üniversitesi	2019

### ESERLER (Makaleler ve Bildiriler):

1. YILDIZ. N and SOGUT K., *Exact Solutions of the Two-Component Dirac Equation for Parallel Electric and Magnetic Fields*, IMSEC 2017, October 25-27, Adana, TURKEY.