

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜZGÜN UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK

Yelda ARAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
2020

Her hakkı saklıdır

## TEZ ONAYI

Yelda ARAT tarafından hazırlanan " **Düzgün Uzaylarda İdeal Yakınsaklık** " adlı tez çalışması 07/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Doç. Dr. Mehmet ÜNVER



**Jüri Üyeleri:**

**Başkan:** Prof. Dr., Cihan ORHAN  
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



**Üye** : Doç. Dr. Mehmet ÜNVER  
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



**Üye** : Dr. Öğr. Üyesi Nilay ŞAHİN BAYRAM  
Başkent Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM  
Enstitü Müdürü

## ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

07/01/2020



Yelda ARAT

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## DÜZGÜN UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK

Yelda ARAT

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet ÜNVER

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, metrik uzaylarda süzgeç, ideal ve ideal yakınsaklık ( $I$ -yakınsaklık) kavramları tanıtılıp bu kavramların bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca  $I^*$ -yakınsaklık kavramı tanıtılıp,  $I$ -yakınsaklık ve  $I^*$ -yakınsaklığın hangi durumlarda denk olduğu gösterilmiştir. Devamında dördüncü bölümde ağların tanımlanması için gerekli olan yönlendirilmiş küme kavramı tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, süzgeçler ve pseudometrik fonksiyon aileleri yardımıyla üretilen düzgün uzaylar tanıtılmıştır. Bir düzgünlük yapısının bazı özellikleri yine bu bölümde verilmiştir.

Dördüncü bölümde, düzgün uzaylarda  $I$ -yakınsak ağlar ve  $I$ -Cauchy ağ kavramları tanıtılıp bu kavramlar arasındaki ilişki  $I$ -değme noktaları yardımıyla incelenmiştir. Devamında ise alt ağ kavramı tanıtılıp bir düzgün uzayın tamlığı bir  $I$  ideali yardımıyla incelenmiştir.

Beşinci bölümde, düzgün uzaylarda tamlık ve  $I$ -Cauchy kavramlarının hangi durumlarda  $I$ -yakınsaklık kavramını gerektirdiği incelenmiştir.

**Ocak 2020, 32 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Düzgün Uzay, İdeal Yakınsaklık,  $I$ -Cauchy Dizisi, İstatistiksel Yakınsaklık

# ABSTRACT

Master Thesis

IDEAL CONVERGENCE IN UNIFORM SPACES

Yelda ARAT

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ÜNVER

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In chapter two, the concepts of filter, ideal and ideal convergence ( $I$ -convergence) are studied in metric spaces and some properties of these concepts are given. Also, the concept of  $I^*$ -convergence is reminded and the situations in which the concept of  $I$  and  $I^*$ -convergence are equivalent are investigated. Later on, the concept of directed set that is necessary in chapter four to define the concept of net is reminded.

In chapter three, uniform spaces are studied with the help of filters and family of pseudo-metric functions. Some features required a uniform structure are given in this chapter.

In chapter four, the concepts of  $I$ -convergence net and  $I$ -Cauchy net are studied and the relationship between them is given via  $I$ -cluster points. Subsequent subnets are given and completeness of a uniform space is studied with the help of the  $I$  ideal.

In chapter five, situations in which the concepts of completeness and  $I$ -Cauchy net yield the concept of  $I$ -convergence are investigated.

**January 2020, 32 pages**

**Key Words:** Uniform Spaces, Ideal Convergence,  $I$ -Cauchy Sequence, Statistical Convergence

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma konusunu bana veren ve çalıŐmalarım boyunca ilgi ve yardımlarımı esirgemeyen danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimin boyunca yardımlarımı esirgemeyen hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, haftalık seminerlerimizde benimle birlikte olan arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca yanımda olan aileme ve çalıŐmalarım boyunca desteğini esirgemeyen AraŐ. Gör. Mustafa GÜLFİRAT (Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi)'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yelda ARAT  
Ankara, Ocak 2020

## İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK .....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ .....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
2.1 Temel Bilgiler .....	3
2.2 $I$ - Yakınsaklık ve $I^*$ - Yakınsaklık.....	4
2.3 Yönlendirilmiş Kümeler .....	7
3. DÜZGÜN UZAYLAR .....	8
3.1 Temel Bilgiler .....	8
3.2 Süzgeçler Yardımıyla Tanımlanan Düzgün Uzaylar .....	9
3.3 Pseudometrik Aileleri Yardımıyla Tanımlanan Düzgün Uzaylar .	15
4. $I$ -CAUCHY AĞLAR VE TAMLIK .....	17
4.1 Temel Bilgiler .....	17
4.2 $I$ -Yakınsaklık ve $I$ -Değme Noktası .....	17
5. TAM DÜZGÜN UZAYLARDA $I$ -CAUCHY AĞLAR VE $I$ -YAKINSAKLIK .....	24
5.1 Temel Bilgiler .....	24
5.2 $I^*$ -Cauchy Ağı .....	24
6. SONUÇ .....	30
KAYNAKLAR .....	31
ÖZGEÇMİŞ .....	32

## SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$I$	İdeal
$\Delta$	Kümeler arasındaki simetrik fark işlemi
$\bar{A}$	$A$ kümesinin kapanışı
$2^X$	$X$ kümesinin kuvvet kümesi
$\mathcal{D}$	Düztünlük yapısı



## 1. GİRİŞ

“Toplanabilme teorisinin amacı ıraksak bir diziye (veya bir seriye) bir limit karşılık getirmektir. Bir dizi yakınsak olmadığı durumda, uygun toplanabilme yöntemleri kullanılarak diziye bir limit karşılık getirilebilir” (Boos 2000). İdealler yardımıyla toplanabilme teorisinin önemli kavramlarından biri olan ideal yakınsaklık ( $I$ -yakınsaklık) kavramı tanımlanır. İdeal yakınsaklık toplanabilme teorisinin ilgi çeken metotlarından biri olup tanımlandığı uzayda lineer bir yapıya gerek duymadığından metrik uzaylardan keyfi Hausdorff topolojik uzaylara kadar geniş bir kategoride çalışılabilmektedir.

Bir  $X$  kümesi üzerinde bir düzgünlük yapısı  $X \times X$  Kartezyen çarpımı üzerinde belirli şartları sağlayan bir süzgeçtir ve bir küme üzerindeki düzgünlük yapısı küme üzerinde topolojik bir yapı belirler. Farklı düzgünlük yapıları aynı topolojik yapıyı belirleyebilmektedir. Diğer yandan her metrik uzay bir düzgünlük yapısı olmakla birlikte metrikleşebilir bir topoloji aynı zamanda bu metriğin ürettiği düzgünlük yapısının belirlediği topolojidir. Bir düzgünlük yapısı verildiği küme üzerinde tanımlı ve belirli şartları sağlayan pseudometrik fonksiyonlarının ailesi ile de belirlenebilir.  $X$  kümesi, üzerindeki bir düzgünlük yapısı ile göz önüne alındığında  $(X, \mathfrak{D})$  ikilisine bir düzgün uzay denir. Burada  $\mathfrak{D}$ , düzgünlük yapısını belirleyen süzgeç veya pseudometrik fonksiyonlarının bir ailesidir.

Düzgün uzayların metrik uzayların bir genellemesi olduğu açıktır ve metrik uzaylarda olduğu gibi düzgün uzaylarda da Cauchy dizisi ve tamlık kavramları tanımlanabilmektedir (Bourbaki 1998). Metrik uzayların tamlığını karakterize etmek için diziler yeterli iken düzgün uzaylarda tamlık karakterizasyonu süzgeç ve ağların yakınsaklıkları ile karakterize edilmektedir. Bir başka deyişle metrik uzaylarda dizisel tamlık ve tamlık birbirine denk iken düzgün uzaylarda dizisel tamlık tamlığı karakterize etmek için yeterli değildir.

Yakınsak her ağ bir Cauchy ağıdır ancak bunun karşıtı her zaman doğru olmak zorunda değildir. Bu durum aşağıda verilen tamlık tanımı için bir motivasyon oluşturmaktadır.

“( $X, \mathfrak{D}$ ) düzgün uzayında her Cauchy ağı yakınsak ise bu düzgün uzaya tamdır denir” (Bourbaki 1998). Tam düzgün uzaylara örnek olarak yansımali Banach uzaylarının zayıf topolojileri verilebilir ”(Bachman ve Narici 1966). Bu uzaylarda zayıf yakınsaklık ve zayıf Cauchy ağı kavramları aslında sırasıyla düzgünlük yapısına karşılık gelen yakınsaklık ve Cauchy ağı kavramlarıdır.

Bu yüksek lisans tezinde yukarıda bahsedilen kavramlar ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir. Esas olarak tamlık ve  $I$ -Cauchy kavramlarının hangi durumlarda  $I$ -yakınsaklığı gerektirdiği problemi incelenecektir. Bunun için literatürdeki mevcut çalışmalar kullanılacağından tez, yukarıda bahsedilen kavramların incelendiği çalışmaların bir derlemesi olacaktır.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak doğal sayılar kümesinin,  $\mathbb{N}$ , alt kümelerinin aileleri yardımıyla tanımlanan bir toplanabilme metodunu ( $I$ -yakınsaklık) tanıtır ve bu metodun bazı özelliklerine değineceğiz. Daha sonra yönlendirilmiş küme kavramını vereceğiz.

### 2.1 Temel Bilgiler

**Tanım 2.1 (Asimptotik Yoğunluk)** “ $A \subset \mathbb{N}$  olmak üzere ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\delta_n(A) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_A(k)$$

şeklinde tanımlansın.  $\underline{\delta}(A) =: \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_n(A)$  ve  $\bar{\delta}(A) =: \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n(A)$  sayılarına sırasıyla  $A$  kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu denir. Eğer  $\underline{\delta}(A) = \bar{\delta}(A)$  ise yani  $(\delta_n(A))$  dizisinin limiti mevcut ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(A) = \delta(A)$  ile tanımlanır ve  $\delta(A)$  sayısına  $A$  kümesinin asimptotik yoğunluğu denir” (Salat ve Tijdeman 1983).

Burada  $\{\chi_A(k)\}$  ile  $A$  kümesinin karakteristik dizisi gösterilmektedir.

**Tanım 2.2 (İstatistiksel Yakınsaklık)** “ $x = (x_n)$  reel terimli bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa  $\{x_n\}$  dizisi  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir” (Fast 1951).

Bu kavram klasik Cauchy yakınsaklık kavramının bir genişlemesidir ve benzer tanım metrik uzaylarda hatta topolojinin temel açıları yardımıyla topolojik uzaylarda da verilebilmektedir.

**Tanım 2.3 (İdeal)** “ $Y \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere  $I \subset 2^Y$  sınıfı için

- i)  $\emptyset \in I$
- ii)  $A, B \in I$  iken  $A \cup B \in I$
- iii)  $A \in I$  ve  $B \subset A$  iken  $B \in I$

gerçekleniyorsa  $I$  sınıfına  $Y$  üzerinde bir ideal denir.

Burada  $2^Y$ ,  $Y$  kümesinin kuvvet kümesini göstermektedir. Eğer  $I \neq \emptyset$  ve  $Y \notin I$  ise  $I$  sınıfına aşikar olmayan ideal denir” (Kostyrko vd. 2000).

**Örnek 2.1**  $\{\Delta_j\}$  ailesi  $\mathbb{N}$  kümesinin bir sonsuz ayrışımı olsun. Bu durumda,

$$I = \{A : A \cap \Delta_j \neq \emptyset \text{ öyleki } j = 1, 2, 3, \dots, k\}$$

sınıfı, bir aşikar olmayan idealdir.(Kostyrko vd. 2000).

**Tanım 2.4 (Uygun-İdeal)** “ $Y$  üzerinde  $I$  aşikar olmayan ideali, her  $m \in Y$  için  $\{m\} \in I$  şartını sağlıyorsa bir uygun ideal adını alır” (Kostyrko vd. 2000).

**Tanım 2.5 (Maksimal İdeal)** “ $I \subset 2^{\mathbb{N}}$  bir uygun ideal ve her  $A \subset \mathbb{N}$  için  $A \in I$  ya da  $\mathbb{N} \setminus A \in I$  sağlanıyorsa  $I$ ’ya maksimal uygun ideal denir” (Kostyrko vd. 2000).

**Tanım 2.6 (Süzgeç)** “ $Y \neq \emptyset$  olsun.  $\mathcal{F} \subset 2^Y$  sınıfı için,

- i)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ,
- ii) Her  $A, B \in \mathcal{F}$  için  $A \cap B \in \mathcal{F}$ ,
- iii) Her  $A \in \mathcal{F}$ ,  $A \subset B$  için  $B \in \mathcal{F}$

gerçekleniyorsa  $\mathcal{F}$  sınıfına  $Y$  üzerinde bir süzgeç denir” (Kostyrko vd. 2000).

$I$  idealinin  $Y$  üzerinde aşikar olmayan bir ideal olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(I) = \{Y \setminus A : A \in I\}$$

sınıfının  $Y$  üzerinde bir süzgeç olmasıdır.

## 2.2 $I$ – Yakınsaklık ve $I^*$ – Yakınsaklık

Bu kısımda bir metrik uzay üzerinde  $I$ –yakınsaklık ve  $I^*$ –yakınsaklık kavramlarını tanıtip bunlara ilişkin bazı temel bilgileri vereceğiz. Kısım boyunca  $(X, \rho)$  bir metrik uzay olarak ele alınacaktır.

Bu bölüm boyunca  $\mathbb{N}$  üzerindeki idealler ile çalışılacaktır.

**Tanım 2.7 (İdeal Yakınsaklık)** “ $I$ , aşık olmayan bir ideal olsun.  $\{x_n\}$ ,  $X$  uzayında bir dizi ve  $x \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$K(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x) \geq \varepsilon\} \in I$$

oluyorsa  $\{x_n\}$  dizisi  $x$  noktasına ideal yakınsaktır ( $I$ -yakınsak) denir ve  $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ile gösterilir” (Kostyrko vd. 2000).

**Uyarı 2.1** Eğer  $I$  sınıfı bir uygun ideal ise Cauchy yakınsaklık,  $I$ -yakınsaklığı gerektirir.

**Tanım 2.8 ( $I^*$ -Yakınsaklık)** “ $\{x_n\}$ ,  $X$  uzayında bir dizi ve  $I$ , aşık olmayan bir ideal olsun. Bir  $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$  kümesi için  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_{m_k}, x) = 0$  sağlanıyorsa  $\{x_n\}$  dizisi  $x$  noktasına  $I^*$ -yakınsaktır denir ve  $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ile gösterilir” (Kostyrko vd. 2000).

**Önerme 2.1**  $I$  bir uygun ideal ve  $\{x_n\}$ ,  $X$  uzayında bir dizi olsun. Eğer  $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ise  $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gerçekleşir (Kostyrko vd. 2000).

**İspat.**  $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  olsun. O halde  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_{m_k}, x) = 0$  ve

$$M := \mathbb{N} \setminus A = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < \dots\}$$

olacak şekilde bir  $A \in I$  vardır Dolayısıyla her  $\varepsilon > 0$  için  $k > k_0$  olduğunda  $\rho(x_{m_k}, x) < \varepsilon$  olacak biçimde bir  $k_0 \in \mathbb{N}$  vardır. O halde

$$E \subset \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_{k_0}\}$$

kümesi üzerinde  $\rho(x_{m_k}, x) \geq \varepsilon$  ise  $k \leq k_0$  olmalıdır. ( $I$ , bir uygun ideal olduğundan sonlu sayıda elemana sahip tüm alt kümeleri içerir, yani  $E \in I$  olur.) Böylece,

$$K(\varepsilon) \subset A \cup E \in I$$

olur ve  $K(\varepsilon) \in I$  sağlanır. O halde  $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  bulunur. ■

Bu bölümün devamında  $I$ -yakınsaklık ile  $I^*$ -yakınsaklık kavramlarının hangi durumlarda denk olduğunu inceleyeceğiz.

**Teorem 2.1**  $I$  bir uygun ideal olsun. Eğer  $X$ , bir yığılma noktasına sahip değil ise  $X$  uzayında  $I$ -yakınsaklık ile  $I^*$ -yakınsaklık denktir (Kostyrko vd. 2000).

**İspat.** Önerme 2.1'den gereklilik açıktır.

Şimdi;  $\{x_n\}$ ,  $X$  uzayında bir dizi olmak üzere  $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  iken  $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  olduğunu göstereceğiz.  $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  olduğundan  $K(\varepsilon) \in I$  olur.  $X$ , bir yığılma noktasına sahip olmadığı için

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(y, x) < \varepsilon\} = \{x\}$$

olacak biçimde bir  $\varepsilon > 0$  vardır. Dolayısıyla

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x) < \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x\} \in \mathcal{F}(I)$$

elde edilir. Yani  $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x\} \in \mathcal{F}(I)$  olmak üzere  $\lim_{n \in M} \rho(x_n, x) = 0$  olur ki bu da  $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  olmasını gerektirir. ■

**Tanım 2.9** “ $I$  bir uygun ideal olsun.  $I$  idealine ait sayılabilir ve ikişer ikişer ayrık her  $\{A_1, A_2, \dots\}$  kümeler ailesi için  $(A_n \setminus B_n) \cup (B_n \setminus A_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sonlu küme ise ve  $B = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \in I$  şartını sağlayan sayılabilir bir  $\{B_1, B_2, \dots\}$  kümeler ailesi varsa,  $I$  ideali  $(AP)$  şartını sağlar denir” (Kostyrko vd. 2000).

**Uyarı 2.2**  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  ve  $B \in I$  olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $B_n \subset B$  ve  $I$  bir ideal olup  $B_n \in I$  gerçekleşir.

**Teorem 2.2**  $I$  bir uygun ideal olsun.

i)  $I, (AP)$  şartını sağlasın.  $X$  uzayında  $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ise  $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gerçekleşir.

ii)  $(X, \rho)$  en az bir yığılma noktasına sahip olsun.  $X$  uzayında keyfi bir  $\{x_n\}$  dizisi için  $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  iken  $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gerçekleşiyorsa  $I$  ideali “ $(AP)$ ” şartını sağlar (Kostyrko vd. 2000).

### 2.3 Yönlendirilmiş Kümeler

**Tanım 2.10** “ $T \neq \emptyset$  bir küme ve “ $\geq$ ”,  $T$  üzerinde yansıma ve geçişme özelliğine sahip bir bağıntı olmak üzere her  $m, n \in T$  için  $p \geq m$  ve  $p \geq n$  olacak şekilde

bir  $p \in T$  mevcut olsun. Bu durumda  $(T, \geq)$  ikilisi bir yönlendirilmiş küme olarak adlandırılır” (Kelley 1975).

**Uyarı 2.3**  $T$  yönlendirilmiş kümesinin aşikar olmayan bir ideali  $I$  ile gösterilsin ve  $n \in T$  için  $M_n = \{k \in T : k \geq n\}$  olsun. O halde,

$$\mathcal{F}_0 = \{A \subset T \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ için } M_n \subset A\}$$

$T$  üzerinde bir süzgeçtir ve

$$I_0 = \{A \subset T \mid T \setminus A \in \mathcal{F}_0\}$$

$T$  üzerinde bir aşikar olmayan idealdir.

İlerleyen bölümlerde  $I$  yerine  $I_0$  ve  $\mathcal{F}$  yerine  $\mathcal{F}_0$  alındığında  $I$ -yakınsaklık ve  $I$ -Cauchy kavramlarının hangi kavramlara denk geldiği üzerinde durulacaktır.

### 3. DÜZGÜN UZAYLAR

Bu bölümde düzgün uzaylar tanıtılıp düzgün uzaylara ait bazı temel bilgiler verilecektir.

#### 3.1 Temel Bilgiler

**Tanım 3.1** “a)  $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere  $X \times X$  kümesinin  $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$  ile gösterilen alt kümesine  $X \times X$  kümesinin köşegeni denir.

b)  $A \subset X \times X$  olmak üzere  $A^{-1} := \{(x, y) : (y, x) \in A\}$  ile tanımlanır. Eğer  $A = A^{-1}$  ise  $A$  kümesine simetrik küme denir. Burada  $A^{-1}$  kümesine,  $A$  kümesinin tersi denir.

c)  $A$  ve  $B$ ,  $X \times X$ 'in alt kümeleri olmak üzere

$$A \circ B := \{(x, y) : \exists z \in X \ni (x, z) \in B \text{ ve } (z, y) \in A\}$$

ile tanımlanır.

d)  $A^2 := A \circ A$  olmak üzere  $A^{n+1} := A^n \circ A$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ile tanımlanır” (Bourbaki 1998).

**Uyarı 3.1**  $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $A, B, C \subset X \times X$  verilsin. O halde,

a)  $A \subset B$  ise  $A^{-1} \subset B^{-1}$  ve  $A \circ C \subset B \circ C$

b)  $(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$

c)  $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$

gerçeklenir (Bourbaki 1998).

**İspat.**  $A, B, C \subset X \times X$  alalım.

a)  $A \subset B$  olsun. Buradan  $A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$  olup  $A \subset B$  olduğundan her  $(y, x) \in A$  için  $(y, x) \in B$  ve her  $(x, y) \in A^{-1}$  için  $(x, y) \in B^{-1}$  olur. O halde  $A^{-1} \subset B^{-1}$  olmalıdır. Diğer yandan,

$$A \circ C = \{(a, x) : \exists z_1 \in X \ni (a, z_1) \in C \text{ ve } (z_1, x) \in A\}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi  $(a, x) \in A \circ C$  alalım. O halde bir  $z \in X$  ve her  $(y, x) \in A$  için  $(a, z) \in C$  ve  $(z, x) \in A$  sağlanır.  $A \subset B$  olduğundan  $(z, x) \in A \subset B$  olup  $(a, x) \in B \circ C$  elde edilir. Bu ise  $A \circ C \subset B \circ C$  olduğunu gösterir.

**b)**  $(y, x) \in (A \circ B)^{-1}$  olsun. O halde  $(x, y) \in (A \circ B)$  olup  $(x, z) \in B$  ve  $(z, y) \in A$  olacak biçimde  $z \in X$  mevcuttur. Buradan da  $(z, x) \in B^{-1}$  ve  $(y, z) \in A^{-1}$  olur. Bu durumda  $(y, x) \in B^{-1} \circ A^{-1}$  sağlanır.

**c)** Tanım 3.1 (c)'den açıktır. ■

### 3.2 Süzgeçler Yardımıyla Tanımlanan Düzgün Uzaylar

**Tanım 3.2** “ $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere  $X \times X$  kümesinin alt kümelerinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir  $\mathfrak{D} \neq \emptyset$  ailesine  $X$  üzerinde bir düzgünlük yapısı denir:

- a) her  $D \in \mathfrak{D}$  için  $\Delta \subset D$
- b) her  $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$  için  $D_1 \cap D_2 \in \mathfrak{D}$
- c) her  $D \in \mathfrak{D}$  için  $E \circ E \subset D$  olacak şekilde bir  $E \in \mathfrak{D}$  vardır
- d) her  $D \in \mathfrak{D}$  için  $E^{-1} \subset D$  olacak şekilde bir  $E \in \mathfrak{D}$  vardır.
- e)  $D \in \mathfrak{D}$  ve  $D \subset E$  ise  $E \in \mathfrak{D}$  sağlanır.

$\mathfrak{D}$ ,  $X$  üzerinde bir düzgünlük yapısı ise  $(X, \mathfrak{D})$  ikilisine bir düzgün uzay denir” (Bourbaki 1998).

Yukarıda tanımlanan düzgünlük yapısına süzgeçler tarafından üretilen düzgünlük yapısı denir.

**Tanım 3.3** “ $(X, \mathfrak{D})$  bir düzgün uzay olsun. Eğer,

$$\bigcap \{D : D \in \mathfrak{D}\} = \Delta$$

oluyorsa  $\mathcal{D}$  düzgünlük yapısına bir Hausdorff düzgünlük yapısı ve  $(X, \mathcal{D})$  düzgün uzayına da bir Hausdorff düzgün uzay denir” (Bourbaki 1998).

**Tanım 3.4** “ $(X, \mathcal{D})$  bir düzgün uzay ve  $\mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$  olsun. Eğer her  $D \in \mathcal{D}$  için  $B \subset D$  olacak şekilde  $B \in \mathfrak{B}$  varsa bu  $\mathfrak{B}$  alt ailesine  $\mathcal{D}$  düzgünlük yapısı için bir taban denir” (Bourbaki 1998).

Yukarıdaki tanıma göre eğer bir  $\mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$  alt ailesi  $\mathcal{D}$  düzgünlük yapısı için bir taban ise  $\mathcal{D}$  ailesi,  $\mathfrak{B}$ 'ye  $\mathfrak{B}$ 'nin elemanlarını kapsayan tüm kümeler eklenerek elde edilebilir.

**Teorem 3.1**  $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere  $\mathfrak{B}$  ailesi  $X \times X$  kümesinin alt kümelerinin

- a) her  $A \in \mathfrak{B}$  için  $\Delta \subset A$
- b) her  $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}$  için  $A_3 \subset A_1 \cap A_2$  olacak biçimde bir  $A_3 \in \mathfrak{B}$  vardır.
- c) her  $A \in \mathfrak{B}$  için  $C \circ C \subset A$  olacak şekilde bir  $C \in \mathfrak{B}$  vardır.
- d) her  $A \in \mathfrak{B}$  için  $C^{-1} \subset A$  olacak şekilde bir  $C \in \mathfrak{B}$  vardır.

koşullarını sağlayan bir aile ise bu  $\mathfrak{B}$  ailesi  $X$  üzerinde bir düzgünlük yapısının tabanıdır (Bourbaki 1998).

**Tanım 3.5** “ $(X, \mathcal{D})$  bir düzgün uzay ve  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{D}$  olsun. Eğer  $\mathfrak{S}$ 'nin elemanlarının bütün sonlu arakesitleri  $\mathcal{D}$  düzgünlük yapısı için bir taban oluşturuyorsa, bu  $\mathfrak{S}$  ailesine  $\mathcal{D}$  için bir alt taban denir” (Bourbaki 1998).

Şimdi bazı özel düzgünlük yapılarından bahsedelim.

**Örnek 3.1** Her  $\varepsilon > 0$  için  $D_\varepsilon =: \{(x, y) : |x - y| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\mathfrak{B} := \{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$$

ailesi  $\mathbb{R}$  üzerinde bir düzgünlük yapısının tabanıdır. Bu düzgünlük yapısına  $\mathbb{R}$ 'nin alışılmış düzgünlük yapısı denir (Bourbaki 1998). Burada  $\mathbb{R}$ , tüm reel sayıların kümesidir.

**Örnek 3.2**  $(X, \rho)$  bir metrik uzay ve  $\varepsilon > 0$  olmak üzere

$$D_\varepsilon := \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

kümelerinin

$$\mathfrak{B} := \{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$$

ailesi  $X$  üzerinde bir düzgünlük yapısı için bir tabandır. Bu düzgünlük yapısına  $\rho$  metriği ile üretilen metrik düzgünlük yapısı denir (Bourbaki 1998).

$(X, \mathfrak{D})$  düzgün uzayının düzgünlük yapısı bir metrik yardımıyla üretilebiliyorsa bu  $(X, \mathfrak{D})$  uzayına metrikleşebilir düzgün uzay denir.

**Örnek 3.3** “ $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere  $X \times X$  kümesinin  $\Delta$ 'yı içeren bütün alt kümelerinin

$$\mathfrak{D} = \{U \subset X \times X : \Delta \subset U\}$$

ailesi  $X$  üzerinde bir düzgünlük yapısıdır. Bu düzgün yapıya ayrık düzgünlük yapısı denir. Bu düzgünlük yapısının tabanı  $\mathfrak{B} = \{\Delta\}$  ailesidir” (Bourbaki 1998).

**Örnek 3.4** “ $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere  $\mathfrak{D} = \{X \times X\}$  ailesi  $X$  üzerinde bir düzgünlük yapısıdır. Bu düzgünlük yapısına ilkel düzgünlük yapısı denir” (Bourbaki 1998).

**Önerme 3.1**  $\mathfrak{D}$ ,  $X$  üzerinde bir düzgünlük yapısı olmak üzere aşağıdaki önermeler gerçekleşir.

a) Keyfi  $D \in \mathfrak{D}$  için  $D^{-1} \in \mathfrak{D}$ .

b)  $\mathfrak{D}$ 'nin simetrik elemanları,  $\mathfrak{D}$  için bir taban oluşturur (Bourbaki 1998).

**İspat.** a) Her  $D \in \mathfrak{D}$  için  $E^{-1} \subset D$  olacak şekilde bir  $E \in \mathfrak{D}$  vardır. Buradan  $E = (E^{-1})^{-1} \subset D^{-1}$  olup Tanım 3.2'den  $D^{-1} \in \mathfrak{D}$  elde edilir.

b) Eğer  $E \in \mathfrak{D}$  ise (a)'dan  $E^{-1} \in \mathfrak{D}$  sağlanır. Buradan  $D = E \cap E^{-1} \in \mathfrak{D}$  simetrik olup  $D \subset E$  sağlanır. O halde taban tanımından  $D \in \mathfrak{B}$  olur. ■

**Uyarı 3.2** Tanım 3.2 (c) ve (d) birlikte “her  $D \in \mathfrak{D}$  için  $E \circ E^{-1} \subset D$  olacak biçimde bir  $E \in \mathfrak{D}$  vardır” önermesine denktir.

**Tanım 3.6** “ $(X, \mathfrak{D})$  bir düzgün uzay olmak üzere her  $x \in X$  ve  $U \in \mathfrak{D}$  için  $x$  noktasının komşuluklar ailesi

$$U(x) := \{y \in X : (x, y) \in U\}$$

şeklinde tanımlanır” (Bourbaki 1998).

Şimdi topolojik uzayda bir noktanın komşuluklar ailesinin bazı özelliklerini hatırlatalım.

**Teorem 3.2**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $x \in X$  olmak üzere  $\mathcal{U}_\tau(x)$ ,  $x$  noktasının komşuluk ailesi, aşağıdaki özellikleri sağlar:

- a)  $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$  ise  $x \in U$
- b)  $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$  ve  $U \subset V$  ise  $V \in \mathcal{U}_\tau(x)$
- c)  $U, V \in \mathcal{U}_\tau(x)$  ise  $U \cap V \in \mathcal{U}_\tau(x)$
- d)  $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$  ise her  $y \in U$  için  $V \in \mathcal{U}_\tau(y)$  olacak biçimde bir  $V \in \mathcal{U}_\tau(y)$  vardır (Bülbul 2014).

Her metrik uzayın bir düzgün uzay olduğunu belirtmiştik. Her düzgün uzayın da bir topolojik uzay olduğunu veren aşağıdaki teoremi hatırlatalım:

**Teorem 3.3**  $(X, \mathfrak{D})$  bir düzgün uzay olmak üzere,

- a) Her  $x \in X$  için  $\mathcal{U}_x = \{U(x) : U \in \mathfrak{D}\}$  ailesi verilen düzgünlük yapısı üzerindeki bir topolojinin  $x$  noktasındaki komşuluklar ailesini oluşturur. (Bu topolojiyi  $\tau_{\mathfrak{D}}$  ile gösterelim.  $\tau_{\mathfrak{D}}$  topolojisine  $\mathfrak{D}$  ile üretilen düzgün uzay topolojisi veya kısaca düzgün topoloji denir.)
- b)  $(X, \mathfrak{D})$  düzgün uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter şart  $(X, \mathcal{T}_{\mathfrak{D}})$  topolojik uzayının Hausdorff olmasıdır (Bourbaki 1998).

**İspat. a)**  $\mathfrak{U}_x$  ailesinin bir komşuluklar ailesi oluşturduğunu Teorem 3.2'den yararlanarak gösterelim.

**i)**  $U(x) \in \mathfrak{U}_x$  ise  $U \in \mathfrak{D}$  ve  $\Delta \in \mathfrak{D}$  olduğundan  $(x, x) \in U$  ve dolayısıyla  $x \in U(x)$  olur.

**ii)**  $U(x) \in \mathfrak{U}_x$  ve  $U(x) \subset V$  olsun. O halde  $V \in \mathfrak{U}_x$  sağlanır. Çünkü,  $U \in \mathfrak{D}$  ve

$$W := U \cup \{(x, y) : y \in V\}$$

olarak tanımlanırsa  $U \subset W$  olduğundan  $W \in \mathfrak{D}$  ve  $V = W(x)$  olduğu görülür.

**iii)**  $U_1(x), U_2(x) \in \mathfrak{U}_x$  ise  $U_1, U_2 \in \mathfrak{D}$  ve  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{D}$  olur. Buradan  $U_1(x) \cap U_2(x) = (U_1 \cap U_2)(x)$  elde edilir. Gerçekten;  $y \in U_1(x) \cap U_2(x)$  ise  $(x, y) \in U_1$  ve  $(x, y) \in U_2$  sağlanır. Buradan da  $(x, y) \in U_1 \cap U_2$  olur. O halde  $y \in (U_1 \cap U_2)(x)$  olup  $U_1(x) \cap U_2(x) \in \mathfrak{U}_x$  elde edilir.

**iv)**  $U(x) \in \mathfrak{U}_x$  olsun. O halde  $U \in \mathfrak{D}$  olup Tanım 3.2'den  $V \circ V \subset U$  olacak biçimde bir  $V \in \mathfrak{D}$  vardır. Buna göre  $V(x) \in \mathfrak{U}_x$  istenen özelliği sağlar. Çünkü,  $y \in V(x)$  ise  $(x, y) \in V$  olur. Buradan her  $z \in V(y)$  için  $(y, z) \in V$  ve dolayısıyla  $(x, z) \in V \circ V \subset U$  olur. O halde  $z \in U(x)$  sağlanır. Sonuç olarak  $V(y) \subset U(x)$  olup  $U(x) \in \mathfrak{U}_y$  elde edilir.

Böylece verilen bir  $X$  düzgün uzayı üzerinde, düzgünlük yapısı yardımıyla bir topoloji tanımlanır.

**b)** Önce gerekliliği ispatlayalım.  $X$  düzgün uzayı Hausdorff olsun. O halde  $\bigcap \{U : U \in \mathfrak{D}\} = \Delta$  olur.  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  ise  $(x, y) \notin \Delta$  olup hipoteze göre  $(x, y) \notin U$  olacak şekilde bir  $U \in \mathfrak{D}$  vardır.  $\mathfrak{D}$ 'nin simetrik elemanları bir taban oluşturduğundan  $V \circ V \subset U$  ve  $V = V^{-1}$  olacak biçimde bir  $V \in \mathfrak{D}$  vardır. Buradan

$V(x) \cap V(y) = \emptyset$  olduğu görülür. Gerçekten,

kabul edelim ki  $z \in V(x) \cap V(y)$  olsun. O halde  $(x, z) \in V$  ve  $(z, y) \in V = V^{-1}$  olur. Bu ise  $(x, y) \in V \circ V \subset U$  olup  $(x, y) \notin U$  olması ile çelişir. O halde gereklilik ispatlanır.

Yeterlilik için  $(X, \tau_{\mathfrak{D}})$  topolojik uzayı Hausdorff olsun.  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  için  $U(x) \cap V(y) = \emptyset$  olacak biçimde bir  $U(x) \in \mathfrak{U}_x$  ve  $V(y) \in \mathfrak{U}_y$  vardır. Buradan

$U, V \in \mathfrak{D}$  ve dolayısıyla  $U \cap V \in \mathfrak{D}$  olur. Fakat  $(x, y) \notin U \cap V$  olduğundan  $(x, y) \notin \bigcap \{U : U \in \mathfrak{D}\}$  olur. O halde  $\bigcap \{U : U \in \mathfrak{D}\} = \Delta$  olup ispat tamamlanır. ■

Metrikleşebilir bir düzgün uzay metrikleşebilir bir topoloji tanımlar. Diğer yandan,  $\mathbb{R}$  üzerindeki alışılmış düzgünlük yapısı  $\mathbb{R}$  üzerindeki alışılmış topolojiyi üretir. Ayrıca, ayrık düzgünlük yapısı bir küme üzerindeki en ince topolojiyi ve ilkel düzgünlük yapısı da en kaba topolojiyi üretir.

**Tanım 3.7** “ $(X, \mathfrak{D})$  bir düzgün uzay ve  $A \subset X$  olsun. Her  $U \in \mathfrak{D}$  için

$$U(A) := \bigcup_{x \in A} U(x) = \{y \in X \mid \exists x \in A : (x, y) \in U\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $A$  kümesinin bir düzgün komşuluğu denir” (Bourbaki 1998).

**Teorem 3.4**  $(X, \mathfrak{D})$  bir düzgün uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $A$ 'nın düzgün topolojiye göre kapamışı  $\bar{A}$ ,  $A$ 'nın düzgün komşuluklarının arakesetine eşittir. Yani

$$\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathfrak{D}} U(A)$$

sağlanır (Bourbaki 1998).

**İspat.** Eğer  $x \in U(y)$  ise  $y \in U^{-1}(x)$  olur.  $x \in \bar{A}$  alalım. O halde her  $U \in \mathfrak{D}$  için  $U(x) \cap A \neq \emptyset$  sağlanır. Buradan bir  $y \in A$  için  $y \in U(x)$  olur. O halde  $y \in U(x)$  olduğundan  $x \in U^{-1}(y)$  olup her  $U \in \mathfrak{D}$  için sağlandığından  $x \in U^{-1}(A)$  olur. Ayrıca her  $U \in \mathfrak{D}$  için  $U^{-1} \in \mathfrak{D}$  olduğu göz önüne alınırsa  $x \in U(A)$  olup ispat tamamlanır. ■

**Tanım 3.8** “ $(X, \mathfrak{D})$  ve  $(Y, \mathfrak{C})$  iki düzgün uzay ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Her  $C \in \mathfrak{C}$  için  $(x, y) \in D$  olduğunda  $(f(x), f(y)) \in C$  olacak biçimde bir  $D \in \mathfrak{D}$  varsa bu  $f$  fonksiyonuna (düzgün) süreklidir denir” (Bülbül 2014).

Ayrıca  $f$  iki düzgün uzay arasında tanımlı birebir ve örten bir fonksiyon olmak üzere eğer  $f$  ile  $f^{-1}$  fonksiyonları sürekli ise bu  $f$  fonksiyonuna bir düzgünlük izomorfizmi ve bu iki düzgün uzaya da (düzgün) izomorf denir.

**Örnek 3.5** a)  $(X, d)$  ve  $(Y, \rho)$  iki metrik uzay ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonunun  $\mathfrak{D}_d$  ve  $\mathfrak{D}_\rho$  metrik düzgün yapılarına göre sürekli olması için gerek ve yeter şart metrik uzay anlamında düzgün sürekli olmasıdır. Gerçekten, her  $D_\varepsilon^\rho \in \mathfrak{D}_\rho$  ve her  $D_\delta^d \in \mathfrak{D}_d$  için  $(x, y) \in D_\delta^d$  olacak biçimde  $(f(x), f(y)) \in D_\varepsilon^\rho$  vardır. O halde her  $\varepsilon > 0$  için  $d(x, y) < \delta$  iken  $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$  olacak biçimde bir  $\delta > 0$  vardır.

b) Bir ayrık düzgün uzaydan herhangi bir düzgün uzaya tanımlanmış her fonksiyon sürekli dir.

**Teorem 3.5** Düzgün uzaylar arasında tanımlı sürekli her fonksiyon düzgün topolojilere göre sürekli dir (Bülbül 2014).

**İspat.**  $(X, \mathfrak{D})$  ve  $(Y, \mathfrak{C})$  iki düzgün uzay olmak üzere  $f : X \rightarrow Y$  düzgün sürekli bir fonksiyon ve  $\xi \in X$  olsun.  $V(f(\xi))$ ,  $f(\xi)$ 'nin  $Y$ 'deki düzgün topolojiye göre herhangi bir komşuluğu ise  $V \in \mathfrak{C}$  ve  $f$  düzgün sürekli olduğundan her  $(\xi, \eta) \in U$  için  $(f(\xi), f(\eta)) \in V$  olacak biçimde bir  $U \in \mathfrak{D}$  vardır. Buradan  $f(U(\xi)) \subset V(f(\xi))$  elde edilir. O halde  $f$ ,  $\xi$  noktasında sürekli dir. ■

### 3.3 Pseudometrik Aileleri Yardımıyla Tanımlanan Düzgün Uzaylar

**Tanım 3.9** “ $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  bir fonksiyon olsun. O halde,

**P<sub>1</sub>)** her  $x \in X$  için  $d(x, x) = 0$ ,

**P<sub>2</sub>)** her  $x, y \in X$  için  $d(x, y) = d(y, x)$ ,

**P<sub>3</sub>)** her  $x, y, z \in X$  için  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa  $d$  fonksiyonuna bir pseudometrik denir” (Bachman ve Narici 1966).

$P$  bir pseudometrik ailesi olmak üzere  $d \in P$  ve  $r > 0$  için

$$U_d(r) := \{(x, y) : d(x, y) < r\}$$

olsun. O halde

$$\{U_d(r) : d \in P, r > 0\}$$

ailesi bir düzgünlük yapısının alt tabanını oluşturur. Dolayısıyla bu ailenin elemanlarının sonlu arakesiti ise  $X$  üzerinde bir  $\mathfrak{U}_p$  düzgünlük yapısının tabanıdır. Ayrıca her düzgünlük yapısı bir alt tabana hatta tabana sahiptir (Hart 2004).

**Teorem 3.6**  $X$  bir düzgün uzay olsun. Ayrıca  $\{V_n\}$   $X$  kümesinde  $V_0 = X \times X$  ve  $V_{n+1}^3 \subseteq V_n$  özelliklerini sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$U_d(2^{-n}) \subseteq V_n \subseteq \{(x, y) : d(y, x) \leq 2^{-n}\}$$

olacak şekilde  $X$  üzerinde bir  $d$  pseudometriği vardır (Hart 2004).

Bu yüzden her düzgünlük yapısı bir pseudometrik ailesi yardımıyla tanımlanabilir.

## 4. $I$ -CAUCHY AĞLAR VE TAMLIK

Ağlar; süreklilik, kapanış gibi bazı topolojik kavramları karakterize eder ve dolayısıyla dizilere göre daha kullanışlı yapılardır.

Bu bölümde, bir düzgün uzaydaki  $I$ -yakınsak ağlar ve  $I$ -Cauchy ağları tanımlayıp aralarındaki ilişkiyi  $I$ -değme noktaları yardımıyla inceleyeceğiz. Devamında alt ağları tanımlayıp, bir düzgün uzayın tamlığını yönlendirilmiş  $T$  kümesinin bir  $I$  ideali yardımıyla inceleyeceğiz.

### 4.1 Temel Bilgiler

**Tanım 4.1** “ $(T, \geq)$  yönlendirilmiş bir küme ve  $X \neq \emptyset$  bir küme olsun. Bir

$$\begin{aligned} s : T &\rightarrow X \\ \alpha &\rightarrow s(\alpha) = s_\alpha \end{aligned}$$

dönüşümüne  $X$  üzerinde bir ağ denir ve  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in T}$  ile gösterilir.

Tez boyunca  $T$  önceden belirlenmiş ise ağları kısaca  $\{s_\alpha\}$  ile göstereceğiz” (Bourbaki 1998).

Bu bölüm boyunca  $(X, \mathcal{D})$  bir düzgün uzay ve  $I$ , bir  $T$  yönlendirilmiş kümesi üzerinde bir ideal olarak göz önüne alınacaktır.

**Tanım 4.2** “ $I$  aşık olmayan bir ideal olsun. Her  $\alpha \in T$  için  $M_\alpha \in \mathcal{F}(I)$  ise bu  $I$  ideali  $T$ -uygun olarak adlandırılır” (Lahiri ve Das 2007)

### 4.2 $I$ -Yakınsaklık ve $I$ -Değme Noktası

**Tanım 4.3** “ $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  üzerinde bir ağ ve  $I$  bir ideal olmak üzere eğer  $x_0 \in X$  noktasını içeren her  $U$  açık alt kümesi için

$$\{\alpha \in T \mid s_\alpha \notin U\} \in I$$

sağlanıyorsa  $\{s_\alpha\}$  ağı,  $x_0$  noktasına  $I$ -yakınsaktır denir ve  $I - \lim s_\alpha = x_0$  ile gösterilir” (Lahiri ve Das 2007).

**Tanım 4.4** “ $I$  bir ideal ve  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  üzerinde bir ağ olsun. Eğer  $y \in X$  olmak üzere  $y$  noktasını içeren her  $U$  açığı için

$$\{\alpha \in T \mid s_\alpha \in U\} \notin I$$

ise  $y$ ,  $\{s_\alpha\}$  ağının bir  $I$ -değme noktası olarak adlandırılır” (Lahiri ve Das 2007).

**Tanım 4.5** “ $I$  bir ideal ve  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  düzgün uzayında bir ağ olsun. Her  $U \in \mathfrak{D}$  için

$$\{\alpha \in T \mid (s_\alpha, s_\beta) \notin U\} \in I$$

olacak şekilde bir  $\beta \in T$  varsa  $\{s_\alpha\}$  ağına  $X$  düzgün uzayı üzerinde bir  $I$ -Cauchy ağı denir” (Das ve Ghosal 2010).

Burada Uyarı 2.3 dikkate alınır,  $I$  yerine  $I_0$  alırsak  $I$ -Cauchy ağı kavramı Cauchy ağı kavramı ile çakışır .

Aşağıdaki teorem  $I$ -Cauchy ağı kavramına denk iki önerme verir. Bu önermeler ilerleyen kısımlarda verilen bir ağın  $I$ -Cauchy ağı olduğunu göstermek için bize kolaylık sağlayacaktır.

**Teorem 4.1**  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  düzgün uzayın üzerinde bir ağ olsun. O halde aşağıdaki koşullar denktir.

- (1)  $\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağıdır.
- (2) Her  $U \in \mathfrak{D}$  için  $(s_\gamma, s_\alpha) \in U$  ve  $\gamma, \alpha \notin A$  olacak şekilde bir  $A \in I$  mevcuttur.
- (3) Her  $U \in \mathfrak{D}$  için  $E_\beta(U) := \{\alpha \in T : (s_\alpha, s_\beta) \notin U\}$  olmak üzere  $\{\beta \in T \mid E_\beta(U) \notin I\} \in I$  sağlanır (Das ve Ghosal 2010).

**İspat.** (1) $\Rightarrow$ (2):  $\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağı ve  $U \in \mathfrak{D}$  olsun.  $X$  düzgün uzay olduğundan  $W \circ W \subset U$  olacak şekilde simetrik bir  $W \in \mathfrak{D}$  vardır.  $\{s_\alpha\}$ ,  $I$ -Cauchy ağı olduğundan  $\{\alpha \in T : (s_\alpha, s_\beta) \notin W\} \in I$  olacak biçimde bir  $\beta \in T$  mevcuttur. Buradan ise  $\{\alpha \in T : (s_\alpha, s_\beta) \in W\} \in \mathcal{F}(I)$  gerçekleşir. Şimdi

$$A := \{\alpha \in T : (s_\alpha, s_\beta) \notin W\}$$

tanımlayalım. O halde  $A \in I$  sağlanır.  $\gamma, \alpha \notin A$  ise  $(s_\gamma, s_\beta) \in W$  ve  $(s_\alpha, s_\beta) \in W$  olup  $W$  simetrik olduğundan  $(s_\beta, s_\alpha) \in W$  sağlanır.  $(s_\gamma, s_\beta) \in W$  ve  $(s_\beta, s_\alpha) \in W$  olup  $(s_\gamma, s_\alpha) \in W \circ W \subset U$  sağlanır.

**(2)⇒(3):**  $U \in \mathfrak{D}$  olsun. (2)'den  $\gamma, \alpha \notin A$  iken  $(s_\gamma, s_\alpha) \in U$  olacak biçimde bir  $A \in I$  vardır. Şimdi

$$\{\beta \in T \mid E_\beta(U) \notin I\} \subset A$$

olduğunu göstermeliyiz.  $E_\beta(U) \notin I$  olacak şekilde  $\beta \in T$  olsun. Kabul edelim ki  $\beta \notin A$  olsun. Hipotezden  $A \in I$  olduğundan ve  $E_\beta(U) \notin I$  olduğundan  $E_\beta(U)$ ,  $A$ 'nın bir alt kümesi değildir. O halde  $\alpha \in E_\beta(U) \setminus A$  olacak şekilde  $\alpha$  bulabiliriz.  $E_\beta(U)$  kümesinin tanımından  $(s_\alpha, s_\beta) \notin U$  gerçekleşir. Fakat  $\gamma, \alpha \notin A$  iken  $(s_\gamma, s_\alpha) \in U$  olmalıydı. O halde kabulümüz yanlış olup  $\beta \in A$  olmalıdır. Yani

$$\{\beta \in T \mid E_\beta(U) \notin I\} \subset A \in I$$

elde edilir.

**(3)⇒(1)**  $U \in \mathfrak{D}$  olsun.  $\emptyset \notin \mathcal{F}(I)$  olduğundan  $\{\beta \in T \mid E_\beta(U) \in I\} \neq \emptyset$  olup

$$\beta_0 \in \{\beta \in T \mid E_\beta(U) \in I\}$$

seçebiliriz. O halde (3)'ten

$$E_{\beta_0}(U) = \{\alpha \in T : (s_\alpha, s_{\beta_0}) \notin U\} \in I$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.2**  $X$  düzgün uzayında  $I$ -yakınsak olan her ağ,  $I$ -Cauchy ağıdır (Das ve Ghosal 2010).

**İspat.**  $I - \lim s_\alpha = x_0$  ve  $U \in \mathfrak{D}$  alalım.  $V \circ V \subset U$  olacak biçimde simetrik  $V \in \mathfrak{D}$  mevcuttur. Ayrıca  $I - \lim s_\alpha = x_0$  olduğundan

$$B := \{\alpha \in T : s_\alpha \notin V(x_0)\} \in I$$

elde edilir.  $I$ , aşikar olmayan bir ideal olduğundan  $T \notin I$  olup  $T \neq B$  sağlanır. Bu

durumda  $s_\beta \in V(x_0)$  olacak biçimde  $\beta \in T$  mevcuttur. O halde  $(s_\beta, x_0) \in V$  olur.

$$B^c = \{\alpha \in T : s_\alpha \in V(x_0)\} \in \mathcal{F}(I)$$

olup  $(s_\alpha, x_0) \in V$  elde edilir.  $(s_\beta, x_0) \in V$  ve  $(s_\alpha, x_0) \in V$  olduğundan  $(s_\alpha, s_\beta) \in V \circ V \subset U$  sağlanır. Bu durumda

$$B^c \subset \{\alpha \in T : (s_\alpha, s_\beta) \in U\}$$

olup  $\{\alpha \in T : (s_\alpha, s_\beta) \in U\} \in \mathcal{F}(I)$  elde edilir. Buradan da

$$\{\alpha \in T : (s_\alpha, s_\beta) \notin U\} \in I$$

olur. O halde  $\{s_\alpha\}$ , bir  $I$ -Cauchy ağıdır. ■

**Teorem 4.3**  $X$  düzgün uzayında  $\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağı olsun. Eğer  $\{s_\alpha\}$  bir  $x_0 \in X$   $I$ -değme noktasına sahip ise  $\{s_\alpha\}$  ağı  $x_0$  noktasına  $I$ -yakınsaktır (Das ve Ghosal 2010).

**İspat.**  $U \in \mathfrak{D}$  olsun.  $(X, \mathfrak{D})$  bir düzgün uzay olduğundan  $V \circ V \subset U$  olacak şekilde simetrik bir  $V \in \mathfrak{D}$  mevcuttur. Şimdi

$$B = \{\alpha \in T : s_\alpha \in V(x_0)\}$$

olsun.  $x_0$  noktası  $I$ -değme noktası olduğundan  $B \notin I$  olmalıdır. Aynı zamanda  $\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağı olduğundan Teorem 4.1 gereği  $\gamma, \alpha \notin A$  iken  $(s_\gamma, s_\alpha) \in U$  olacak biçimde bir  $A \in I$  mevcuttur.  $A \in I$  ve  $B \notin I$  olduğundan  $B \cap A^c \neq \emptyset$  olmalıdır. O halde bir  $\beta \in B \cap A^c$  mevcuttur. Buradan da  $s_\beta \in V(x_0)$  yani  $(s_\beta, x_0) \in V$  olur.  $\alpha \notin A$  ve  $\beta \notin A$  olduğundan  $(s_\alpha, s_\beta) \in V$  elde edilir.  $(s_\alpha, s_\beta) \in V$  ve  $(s_\beta, x_0) \in V$  olduğundan  $(s_\alpha, x_0) \in V \circ V \subset U$  olup  $s_\alpha \in U(x_0)$  sağlanır. Bu ise

$$A^c \subset \{\alpha \in T : s_\alpha \in U(x_0)\}$$

olduğunu gösterir. O halde  $A \in I$  olup  $A^c \in \mathcal{F}(I)$  olur ki süzgeç tanımından  $\{\alpha \in T : s_\alpha \in U(x_0)\} \in \mathcal{F}(I)$  elde edilir. O halde  $I$ -lim  $s_\alpha = x_0$  olup ispat tamamlanır. ■

**Tanım 4.6** “  $E$  yönlendirilmiş bir küme ve  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in T}$  bir ağ olsun.  $i : E \rightarrow T$  ve  $t = s \circ i : E \rightarrow X$  olmak üzere  $\beta \in T$  ve  $E$  kümesindeki  $\alpha \geq \alpha_0$  özellikli her  $\alpha$  için  $i(\alpha) \geq \beta$  şartını gerçekleyen bir  $\alpha_0 \in E$  mevcut ise  $\{t_\beta\}_{\beta \in E}$  ağına  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in T}$  ağının bir alt ağıdır denir” (Lahiri ve Das 2007).

**Uyarı 4.1**  $I$  bir ideal,  $E$  yönlendirilmiş bir küme ve  $i : E \rightarrow T$  olmak üzere

$$I_E(i) := \{A \subset E \mid i(A) \in I\} \subset 2^E$$

bir idealdir (Das ve Ghosal 2010).

**Lemma 4.1**  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  düzgün uzayında bir ağ ve  $I$  bir  $T$ -uygun ideal ve olsun.  $i(E) \notin I_T$  ve bir  $\{t_\beta\}_{\beta \in E}$  ağı  $x_0$  noktasına  $I_E(i)$ -yakınsak olacak şekilde  $\{s_\alpha\}$  ağının bir alt ağı oluyorsa  $x_0$  noktası  $\{s_\alpha\}$  ağının bir  $I$ -değme noktasıdır (Das ve Ghosal 2010).

(Burada  $i$  ve  $E$ , Uyarı 4.1'deki gibi alınmıştır.)

**İspat.**  $x_0$  noktası  $\{s_\alpha\}$  ağının bir  $I$ -değme noktası değilse  $\{\alpha \in T : s_\alpha \in U\} \in I$  olacak biçimde  $x_0$  noktasını içeren en az bir  $U$  açığı vardır. Hipotezden  $\{t_\beta\}_{\beta \in E}$   $x_0$  noktasına  $I_E(i)$ -yakınsak olduğundan  $\{\beta \in E \mid t_\beta \notin U\} \in I_E(i)$  olur. Yani

$$\{\beta \in E \mid t_\beta \in U\} \in \mathcal{F}(I_E(i))$$

olup buradan da  $\{\beta \in E : s_{i(\beta)} \in U\} \in \mathcal{F}(I_E(i))$  sağlanır. O halde

$$i(\{\beta \in E \mid t_\beta \in U\}) \subset \{\alpha \in T : s_\alpha \in U\} \in I$$

olup

$$i(\{\beta \in E \mid t_\beta \in U\}) \in I$$

sağlanır. Buradan  $\{\beta \in E \mid t_\beta \in U\} \in I_E(i)$  olur. O halde  $E \in I_E(i)$  olur ki bu ise çelişkidir. ■

**Teorem 4.4**  $X$  düzgün uzayında  $\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağ olsun. O halde  $\{t_\beta\}$   $x_0$  noktasına  $I_E(i)$ -yakınsak ve  $i(E) \notin I_D$  iken  $\{s_\alpha\}$   $x_0$  noktasına  $I$ -yakınsak olacak biçimde bir  $\{t_\beta\}_{\beta \in E}$  alt ağı vardır (Das ve Ghosal 2010).

**İspat.**  $X$  düzgün uzayında  $\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağı ve  $\{t_\beta\}$   $\{s_\alpha\}$  ağının  $I_E(i) - \lim t_\beta = x_0$  olacak biçimde bir alt ağı olsun. O halde  $I - \lim s_\alpha = x_0$  sağlanır. Gerçekten, Lemma 4.1 gereği  $i(E) \notin I$  ve  $\{s_\alpha\}$  ağında  $I_E(i) - \lim t_\beta = x_0$  olacak biçimde bir alt ağı olduğundan  $x_0$  noktası  $\{s_\alpha\}$  ağının bir  $I$ -değme noktasıdır.  $\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağı ve bir  $x_0$   $I$ -değme noktasına sahip olduğundan  $I - \lim s_\alpha = x_0$  gerçekleşir. ■

**Teorem 4.5**  $X$  düzgün uzayında her keyfi  $T$  yönlendirilmiş kümesi için her  $\{s_\alpha\}$   $I$ -Cauchy ağı,  $I$ -yakınsak olacak şekilde bir  $I$  uygun ideali mevcut ise  $X$  tamdır (Das ve Ghosal 2010).

**İspat.**  $T$  keyfi bir yönlendirilmiş küme,  $\{s_\alpha\}$  bir Cauchy ağı ve  $I$ , bir uygun ideal olsun.  $I$ , uygun ideal olduğundan her Cauchy ağı  $I$ -Cauchy ağıdır ve hipotezden  $X$  uzayında yakınsak bir ağıdır. Yani  $x_0 \in X$  olmak üzere  $I - \lim s_\alpha = x_0$  sağlanır.

Şimdi  $E := \{(U(x_0), \beta) : U \in \mathfrak{D}, \beta \in T\}$  olsun.  $(E, \geq)$  yönlendirilmiş küme olacak şekilde  $E$  üzerinde “ $\geq$ ” bağıntısını şu şekilde tanımlayalım: “Keyfi  $(U(x_0), \beta)$  ve  $(V(x_0), \alpha)$  için

$$(U(x_0), \beta) \geq (V(x_0), \alpha) \Leftrightarrow U(x_0) \subset V(x_0) \text{ ve } \beta \geq \alpha$$

olsun.”  $(U(x_0), \beta) \in E$  alalım.  $I - \lim s_\alpha = x_0$  olduğundan her  $U \in \mathfrak{D}$  için  $\{\alpha \in T \mid s_\alpha \notin U(x_0)\} \in I$  olup

$$\{\alpha \in T \mid s_\alpha \in U(x_0)\} \in \mathcal{F}(I)$$

sağlanır.  $I$ , uygun ideal olup her  $\beta \in T$  için  $M_\beta \in \mathcal{F}(I)$  olduğundan

$$\{\alpha \in T \mid s_\alpha \in U(x_0)\} \cap M_\beta \in \mathcal{F}(I)$$

olur.  $\emptyset \notin \mathcal{F}(I)$  olduğundan bir  $\gamma \in T$  mevcuttur.  $\gamma \in \{\alpha \in T \mid s_\alpha \in U(x_0)\} \cap M_\beta$  olur.  $\gamma = \gamma_{(U(x_0), \beta)}$  olarak yazalım. Şimdi,

$$\begin{aligned} i: E &\rightarrow T \\ (U(x_0), \beta) &\rightarrow i((U(x_0), \beta)) = \gamma_{(U(x_0), \beta)} \end{aligned}$$

ve

$$t: E \rightarrow X$$
$$(U(x_0), \beta) \rightarrow t((U(x_0), \beta)) = s_{\gamma(U(x_0), \beta)}$$

tanımlayalım.  $(t_n)_{n \in E}$  ağının,  $\{s_\alpha\}$  ağının bir alt ağı olduğu açıktır.  $(t_n)_{n \in E}$  alt ağı  $x_0$  noktasına yakınsak olduğundan  $\{s_\alpha\}$  ağı  $x_0$  noktasına yakınsaktır. Bu da ispatı tamamlar. ■

**Teorem 4.6**  $X$  sayılabilir tabana sahip bir tam düzgün uzay olsun. O halde  $I$  uygun ideali için her maksimal  $I$ -Cauchy ağı  $I$ -yakınsaktır.



## 5. TAM DÜZGÜN UZAYLARDA $I$ -CAUCHY AĞLAR VE $I$ -YAKINSAKLIK

Bu bölümde tamlık koşulu altında  $I$ -Cauchy ağlarının hangi durumlarda  $I$ -yakınsak olduğu incelenecektir. Bunun için ağların  $I^*$ -yakınsaklık kavramına ihtiyaç duyulacaktır.

Bu bölüm boyunca  $(X, \mathfrak{D})$  bir düzgün uzay ve  $(T, \leq)$  bir yönlendirilmiş küme olarak göz önüne alınacaktır.

### 5.1 Temel Bilgiler

Bölüm 2’de dizilerde  $I^*$ -yakınsaklık kavramı tanıtılmıştı. Şimdi ağlar için  $I^*$ -yakınsaklık kavramını tanıyalım.

**Tanım 5.1** “ $I$  bir ideal ve  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  üzerinde bir ağ olsun. Eğer  $M$ ’nin kendisi yönlendirilmiş küme ve  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$ ,  $x_0$  noktasına yakınsak olan bir ağ olmak üzere  $M \in \mathcal{F}(I)$  var ise  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in D}$  ağı  $x_0$  noktasına  $I^*$ -yakınsaktır denir” (Lahiri ve Das 2007).

### 5.2 $I^*$ -Cauchy Ağı

Şimdi  $I$ -yakınsaklık kavramından yola çıkılarak  $I$ -Cauchy ağı kavramını tanıttığımız gibi  $I^*$ -yakınsaklık kavramından da yola çıkarak  $I^*$ -Cauchy ağı kavramını tanıyalım.

**Tanım 5.2** “ $I$  bir ideal ve  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  üzerinde bir ağ olsun.  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$  Cauchy ağı olacak şekilde yönlendirilmiş bir  $M \in \mathcal{F}(I)$  varsa  $\{s_\alpha\}$  ağına  $I^*$ -Cauchy ağı denir” (Das ve Ghosal 2011).

**Önerme 5.1**  $X$  düzgün uzayında her  $I^*$ -yakınsak ağ  $I^*$ -Cauchy ağıdır (Das ve Ghosal 2011).

**İspat.**  $I$  bir ideal ve  $U \in \mathfrak{D}$  olsun. Ayrıca  $\{s_\alpha\}$  bir ağ ve  $I^* - \lim s_\alpha = x_0$  olsun. O halde  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$  ağ  $x_0$  noktasına yakınsak olacak şekilde bir yönlendirilmiş  $M \in \mathcal{F}(I)$  vardır.  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$  ağ  $x_0$  noktasına yakınsak olduğundan bir Cauchy ağdır. Buradan ve  $I^*$ -Cauchy ağ tanımıından  $\{s_\alpha\}$   $I^*$ -Cauchy ağ olmalıdır. ■

**Teorem 5.1**  $I$  bir  $T$ -uygun ideal ve  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  üzerinde bir  $I^*$ -Cauchy ağ olsun. O halde  $\{s_\alpha\}$  ağ  $I$ -Cauchy ağdır (Das ve Ghosal 2011).

**İspat.**  $U \in \mathfrak{D}$  olsun.  $\{s_\alpha\}$  ağ  $I^*$ -Cauchy ağ olduğundan  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$  Cauchy ağ olacak şekilde bir yönlendirilmiş  $M \in \mathcal{F}(I)$  vardır. Buradan Teorem 4.1 gereğince  $\gamma, \delta \in M$  olup  $(s_\gamma, s_\delta) \in U$  ve  $\gamma, \delta \geq \beta$  olacak şekilde bir  $\beta \in M$  vardır.  $A = T \setminus (M \cap M_\beta)$  seçelim.  $M, M_\beta \in \mathcal{F}(I)$  olup  $M \cap M_\beta \in \mathcal{F}(I)$  olur. Buradan da  $A \in I$  elde edilir.  $\delta, \gamma \in M \cap M_\beta$  alalım. O halde  $\delta, \gamma \notin A$  olup  $\delta, \gamma \in M$  ve  $\delta, \gamma \geq \beta$  olmak üzere  $(s_\gamma, s_\delta) \in U$  olur. Buradan da Teorem 4.1 gereği  $\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağdır. ■

**Teorem 5.2**  $\Delta \in \mathfrak{D}$  olsun. O halde keyfi  $T$ -uygun  $I$  ideali için  $I$ -Cauchy ve  $I^*$ -Cauchy kavramları birbirine denktir (Das ve Ghosal 2011).

**İspat.** Teorem 5.1'de  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  üzerinde bir  $I^*$ -Cauchy ağ olduğunda  $I$ -Cauchy ağ olduğu gösterildi. Şimdi diğer tarafı gösterelim:

$\{s_\alpha\}$  bir  $I$ -Cauchy ağ olsun.  $\Delta \in \mathfrak{D}$  olduğundan  $\gamma, \delta \notin A$  iken  $(s_\gamma, s_\delta) \in \Delta$  olacak şekilde bir  $A \in I$  mevcuttur.  $M = T \setminus A$  alalım. O halde  $M \in \mathcal{F}(I)$  sağlar.  $\mathcal{F}(I)$  süzgeç olup boş kümeyi içermediğinden  $M \neq \emptyset$  olmalıdır. O halde bir  $\beta \in M$  vardır.  $s_\beta = x_0$  alalım. Her  $\alpha \in M$  için  $s_\alpha - s_\beta = x_0$  olduğundan  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$  sabit ağ olup bir Cauchy ağdır. Şimdi  $M \subset T$  olacak şekildeki kümenin “ $\geq$ ” bağıntısına göre bir yönlendirilmiş küme olduğunu gösterelim.

“ $\geq$ ” bağıntısı  $M$  üzerinde yansıma ve geçişme özelliklerini sağlar.  $\alpha_1, \alpha_2 \in M$  alalım. O halde  $\alpha \geq \alpha_1, \alpha_2$  olacak şekilde bir  $\alpha \in D$  mevcuttur.  $I$  ideali  $T$ -uygun ideal olduğundan

$$M_\alpha = \{\beta \in T : \beta \geq \alpha\} \in \mathcal{F}(I)$$

sağlanır.  $M \cap M_\alpha \in \mathcal{F}(I)$  ve  $\mathcal{F}(I)$  süzgeç olup boş kümeyi içermediğinden  $M \cap M_\alpha \neq \emptyset$  sağlanır. Buradan  $\gamma \geq \alpha \geq \alpha_1, \alpha_2$  olacak şekilde bir  $\gamma \in M$  vardır. O halde  $M$  yönlendirilmiş küme olup  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$  Cauchy ağı olduğundan  $\{s_\alpha\}$  bir  $I^*$ -Cauchy ağı olur. Bu da ispatı tamamlar. ■

**Teorem 5.3**  $X$ , farklı noktalardan oluşan  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisine sahip olan  $\bigcap_{U \in \mathfrak{D}} U = \Delta$  kümesini içersin. O halde  $X$  kümesinde  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $I$ -Cauchy olacak fakat  $I^*$ -Cauchy olmayacak şekilde  $\mathbb{N}$  üzerinde bir aşikar olmayan  $I$  ideali vardır (Das ve Ghosal 2011).

**İspat.**  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  kümeleri ikişer ikişer ayrık ve sonsuz çoklukta elemana sahip olan kümelerin ailesi olmak üzere  $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  olsun. O halde

$$I = \{A \subset \mathbb{N} : A \cap A_j \neq \emptyset \exists j = 1, 2, 3, \dots, k\}$$

sınıfı aşikar olmayan bir uygun idealdir. Ayrıca her  $j$  için  $A_j \in I$  sağlanır. Şimdi  $\{y_n\}$  dizisi  $n \in A_j$  için  $y_n = x_j$  şeklinde tanımlı olsun.  $U \in \mathfrak{D}$  alalım.  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  hipotez gereği Cauchy dizisi olduğundan her  $k, l \geq k_0$  için  $(x_k, x_l) \in U$  olacak biçimde  $k_0 \in \mathbb{N}$  vardır. O halde

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{k_0} = C \in I$$

$m, n \notin C$  iken  $(y_m, y_n) = (x_p, x_q)$  olacak biçimde en az bir  $p, q \geq k_0$  vardır.

$(x_p, x_q) \in U$  olduğundan  $(y_m, y_n) \in U$  olup  $\{y_n\}$   $I$ -Cauchy dizisi olur. Kabul edelimki  $\{y_n\}$   $I^*$ -Cauchy olsun. O halde  $M = \mathbb{N} \setminus H$  iken  $\{y_n\}$  Cauchy dizisi olacak biçimde bir  $H \in I$  mevcuttur.  $I$  idealinin tanımından

$$H \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_l$$

olacak şekilde bir  $l \in \mathbb{N}$  vardır ve buradan  $i \geq l + 1$  için  $A_i \subset M = \mathbb{N} \setminus H$  sağlanır. Özel olarak  $A_{l+1} \subset M$  ve  $A_{l+2} \subset M$  alınırsa  $\{y_n\}$  dizisi sırasıyla  $x_{l+1}$  ve  $x_{l+2}$  sayılarına eşit terimleri içeren, sonsuz çoklukta eleman içerir. Diğer yandan  $\bigcap_{U \in \mathfrak{D}} U = \Delta$  ve  $x_{l+1} \neq x_{l+2}$  olup  $(x_{l+1}, x_{l+2}) \notin V$  sağlanacak biçimde bir  $V \in \mathfrak{D}$

vardır. O halde  $m, n \geq m_0$  iken  $(y_m, y_n) \in V$  olacak biçimde  $m_0 \in M$  mevcut değildir. Bu ise  $\{y_n\}$  dizisinin Cauchy dizisi olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup  $\{y_n : n \in M\}$   $I^*$ -Cauchy dizisi değildir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Bir önceki teoremden tanımlanan  $I$  ideali için  $(AP)$  şartı yeterli değildir. Şimdi  $I$ -Cauchy ve  $I^*$ -Cauchy kavramları arasındaki denkliği  $(DP)$  şartı ile vereceğiz. Bu şart Bölüm 1'de verilen  $(AP)$  şartına benzerdir.

**Tanım 5.3** “ $I$  bir uygun ideal olsun.  $I$  idealine ait ikişer ikişer ayrık ve sayılabilir  $\{A_1, A_2, \dots\}$  kümeler ailesi için en az bir  $\alpha_j \in T$  ve  $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$  için  $(A_j \setminus B_j) \cup (B_j \setminus A_j) \subset T \setminus M_{\alpha_j}$  olacak şekilde  $T$ 'ye ait  $\{B_1, B_2, \dots\}$  sayılabilir kümeler ailesi varsa,  $I$  ideali  $(DP)$  şartını sağlar denir” (Lahiri ve Das 2007).

**Uyarı 5.1**  $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$  ve  $B \in I$  olup her  $j \in \mathbb{N}$  için  $B_j \subset B$  ve  $I$  bir ideal olduğundan her  $j \in \mathbb{N}$  için  $B_j \in I$  elde edilir.

**Teorem 5.4**  $I$  ideali  $(DP)$  şartını sağlasın.  $X$  sayılabilir tabana sahip bir düzgün uzay ise  $X$  üzerinde her  $I$ -Cauchy  $\{s_\alpha\}$  ağı bir  $I^*$ -Cauchy ağı olur (Das ve Ghosal 2011).

**İspat.**  $X$  üzerinde  $\mathcal{B} = \{U_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$  sayılabilir bir taban olsun. Genelliği bozmaksızın  $\mathcal{B}$  monoton azalan alınabilir.  $\{s_\alpha\}$  ağı  $I$ -Cauchy ağı ise Teorem 4.1'den her  $U_i \in \mathcal{B}$  için  $\beta, \alpha \notin K_i$  iken  $(s_\beta, s_\alpha) \in U_i$  olacak biçimde  $K_i \in I$  vardır. Şimdi,

$$\begin{aligned} A_1 &:= K_1 \\ A_2 &:= K_2 \setminus K_1 \\ A_3 &:= K_3 \setminus (K_1 \cup K_2) \\ A_4 &:= K_4 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3) \\ &\vdots \\ A_i &:= K_i \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{i-1}) \end{aligned}$$

tanımlayalım. O halde  $\{A_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$  ailesi ikişer ikişer ayrık sayılabilir bir ailedir.  $I$  ideali,  $(DP)$  şartını sağladığından  $(A_j \setminus B_j) \cup (B_j \setminus A_j) \subset T \setminus M_{\alpha_j}$  ve

$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$  olacak şekilde bir  $\alpha_j \in T$  ve  $I$ 'da sayılabilir bir  $\{B_1, B_2, \dots\}$  kümeler ailesi vardır.  $M = D \setminus B$  olsun. O halde  $M \in \mathcal{F}(I)$  olup “ $\geq$ ” bağıntısına karşılık gelen yönlendirilmiş küme olur. Şimdi  $\{s_\alpha\}$  ağının  $I^*$ -Cauchy olduğunu göstermek için  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$  ağının Cauchy ağı olduğunu göstereceğiz.  $U \in \mathfrak{D}$  alalım.  $\mathcal{B}, \mathfrak{D}$  için bir taban olduğundan  $U_l \subset U$  olacak şekilde  $l \in \mathbb{N}$  vardır. O halde

$$K_l \setminus B \subset \bigcup_{i=1}^l (A_i \setminus B) \subset \bigcup_{i=1}^l (A_i \setminus B_i) \subset \bigcup_{i=1}^l (T \setminus M_{\alpha_i})$$

olur. Şimdi  $\alpha \geq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  olacak şekilde  $\alpha \in D$  seçelim. O halde

$$K_l \setminus B \subset \bigcup_{i=1}^l (T \setminus M_{\alpha_i}) \subset (T \setminus M_\alpha)$$

sağlanır.  $M, M_\alpha \in \mathcal{F}(I)$  ise  $M \cap M_\alpha \neq \emptyset$  olup  $\beta \in M \cap M_\alpha$  olur.  $M$  yönlendirilmiş küme olduğundan  $\beta \in M$  için  $\beta \geq \alpha$  sağlanır. Buradan da  $\delta, \gamma \in M$  ve  $\delta, \gamma \geq \beta$  olup  $\delta, \gamma \in M \cap M_\alpha$  elde edilir. O halde  $\gamma, \delta \notin K_l$  iken  $(s_\gamma, s_\delta) \in U_l \subset U$  sağlanır. Bu ise  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in M}$  ağının Cauchy olduğunu söyler ve buradan da  $\{s_\alpha\}$  ağı  $I^*$ -Cauchy ağı olur.

■

Şimdi aşağıdaki iki teoremi ispatsız vereceğiz

**Teorem 5.5**  $X$  sayılabilir tabana sahip ve  $\bigcap_{U \in \mathfrak{D}} U = \Delta$  olsun. Ayrıca  $X$  uzayı en az bir limit noktasına sahip olsun. Eğer  $\{s_\alpha\}$ ,  $I$ -Cauchy ağı iken  $I^*$ -Cauchy ağı oluyorsa  $I$  ideali  $(DP)$  şartını sağlar (Das ve Ghosal 2011).

**Teorem 5.6**  $I$  ideali  $T$ -uygun olsun. Ayrıca  $\{s_\alpha\}$ ,  $X$  uzayında bir ağ olsun. Eğer  $\{s_\alpha\}$  ağı  $I^*$ -yakınsak ise  $I$ -yakınsaktır (Lahiri ve Das 2007).

Aşağıdaki teorem  $I$ -Cauchy ağların ne zaman  $I$ -yakınsak olabileceğini vermektedir:

**Teorem 5.7**  $I$  ideali  $(DP)$  şartını sağlasın. Ayrıca  $X$  sayılabilir tabana sahip bir tam düzgün uzay olsun. O halde  $X$  uzayındaki her  $I$ -Cauchy ağı  $X$  uzayında  $I$ -yakınsaktır (Das ve Ghosal 2011).

**İspat.**  $I$  ideali  $(DP)$  şartını sağladığından Teorem 5.4 gereğince  $X$  uzayından alınan keyfi her  $I$ -Cauchy ağı  $I^*$ -Cauchy ağı olur.  $X$  tam olduğundan her  $I^*$ -Cauchy ağı  $I^*$ -yakınsak olur. Buradan Teorem 5.6 gereğince  $I^*$ -yakınsaklık  $I$ -yakınsaklığı gerektirdiğinden istenen elde edilir. ■



## 6. SONUÇ

Düzgün uzaylarda  $I$ -yakınsaklık ve tamlık kavramı arasındaki ilişki, bu tez çalışmasında kaynaklar bölümünde verilen bir çok makale ve kitap yardımıyla incelenmiştir. İlk olarak düzgün uzaylar tanıtılıp bu düzgün uzay üzerindeki düzgünlük yapısında  $I$ -yakınsaklık ve  $I$ -Cauchy ağı arasındaki ilişki  $I$ -değme noktaları yardımıyla incelenmiştir. Daha sonra  $I^*$ -yakınsaklık kavramı tanımlanıp bu tanımdan yararlanarak  $I^*$ -Cauchy ağı kavramı tanıtılmış ve bir düzgün uzay tam iken  $I$ -Cauchy kavramının  $I$ -yakınsaklığı gerektirdiği durumlar üzerinde yoğunlaşmıştır.

## KAYNAKLAR

- Bachman, G. and Narici, L. 1966. Functional Analysis, Academic Press, New York.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford Math. Monogr. Oxford University Press, Oxford.
- Bourbaki, N.1998. Elements of Mathematics General Topology Chapters 1-4, Springer-Verlag, New York.
- Bülbül, A. 2014. Genel Topoloji. Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique, Coll. Math. 2; 241-244.
- Ghosal, S.K. and Das, P. 2010. On  $I$ -Cauchy nets and completeness, Topology and its Applications 157; 1152-1156.
- Ghosal, S.K. and Das, P. 2011. When  $I$ -Cauchy nets in complete uniform spaces are  $I$ -convergent, Topology and its Applications 158; 1529-1533.
- Hart, K.P. 2004. e-7 Uniform Spaces, 1. Encyclopedia of General Topology. 259-263.
- Kelley, J.L. 1975. General Topology. Springer-Verlag, New York.
- Kostyrko, P., Salat, T. and Wilczyński, W. 2000-2001.  $I$ -convergence, Real Anal. Exchange 26 (2); 669-685.
- Lahiri, B.K. and Das P. 2007-2008.  $I$  and  $I^*$  convergence of nets, Real Anal. Exchange 33; 431-442.
- Salat, T. and Tijdeman, R. 1983. Asymptotic densities of sets of positive integers, Math. Slov. 33; 199-207
- Salat, T., Tripathy, B.C. and Ziman, M. 2004. On some properties of  $I$ -convergence, Tatra Mt. Math. Publication.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Yelda ARAT

**Doğum Yeri** : Ankara

**Doğum Tarihi** : 12/07/1992

**Medeni Hali** : Bekar

**Yabancı Dili** : İngilizce

### **Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):**

**Lise** : Yıldırım Beyazıt Lisesi (2010)

**Lisans** : Ankara Üniv. Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2011-2015)

**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2017-Ocak 2020)