KONTAKT GEOMETRİNİN TEMELLERİ

Serdar Karataş

Yüksek Lisans

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Programı

Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR

Kasım-2019

T.C
KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTAKT MANİFOLDLARIN TEMELLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serdar KARATAŞ

Anabilim Dalı: Matematik

Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR

KARAMAN 2019

TEZ ONAYI

Serdar KARATAŞ tarafından hazırlanan "Kontakt Geometrinin Temelleri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:
Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR

Jüri Üyeleri: İmza:

Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR

Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL

Tez Savunma Tarihi: 18/11/2019

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Sadık Alper YILDIZEL
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Serdar KARATAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONTAKT MANİFOLDLARIN TEMELLERİ

Serdar KARATAŞ

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR

Kasım, 2019, 52 sayfa

Yapılan bu tez çalışması, Andrew Mclnerney 'in First Steps in Differential Geometry adlı kitabı temel alınarak hazırlanmıştır.

Bu araştırmanın odak noktası, kontakt geometrinin fizik ve matematik disiplinleri ile ilişkisi olup, bu çalışmada kontakt geometrinin fiziksel ve matematiksel yorumları ele alınmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kontakt geometrinin tarihçesi ve gelişimi hakkında bilgi verilip, kontakt geometrinin çalışma alanlarına değinilmiştir.

İkinci bölümde tez çalışması boyunca kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve metot kısmı bu çalışmanın üçüncü bölümü olup, kontakt geometrinin fiziksel ve matematiksel yorumları burada vurgulanmıştır. Fizik alanındaki yorum, kontakt elemanlar ile Huygens prensibi arasındaki bağlantı olarak ele alınmıştır. Matematiksel yorum ise kontakt yapının diferansiyel denklemler, kontakt vektör alanları ve kontakt diffeormorfizmler arasındaki ilişkiden söz edilerek yapılmıştır.

Bu konulara ek olarak Darboux teoreminin kontakt geometri için nasıl kullanıldığı ifade edilmiştir ve bu teoremin bir sonucu olarak kontak yapılar yorumlanmıştır.

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümü sonuç bölümü olup, kontakt geometrinin önemine ve bu tez çalışmasının literatüre sağladığı katkılara değinilmiştir.

Son olarak bu araştırma boyunca yardımcı olan kaynaklar bu çalışmanın beşinci bölümünü oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kontakt vektörleri, Kontakt dönüşümler, Kontakt yapı, Darboux's teoremi

ABSTRACT

Ms Thesis

FUNDAMENTALS OF CONTACT GEOMETRY

Serdar Karataş

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Matematik

Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR

Nowember, 2019, 52 pages

This thesis was based on the book Andrew Mclnerney's first Steps in Differential Geometry.

The focus of this research is on the relationship between contact geometry with physics and mathematics disciplines and the physical and in this study mathematical interpretations of contact geometry have been discussed.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the history and development of contact geometry is given and the research areas of contact geometry are discussed.
In the second chapter, the basic definitions and theorems used throughout this thesis are given.

The material and method part is the third chapter of this study and the physical and mathematical interpretations of contact geometry are emphasized here. The interpretation in the field of physics is considered as the connection between contact elements and Huygens principle. The mathematical interpretation is made by talking about the relationship between contact structures with differential equations, contact vector fields and contact diffeormorphisms.

In addition to these topics, how Darboux's theorem is used for contact geometry is expressed and contact structures are interpreted as a result of this theorem.

The fourth chapter of this thesis is the conclusion part. In this part the importance of contact geometry and the contributions of this thesis to the literature are discussed.

Finally, the references that assisted throughout this research are included in the fifth chapter of this study.

Keywords: Contact vectors, Contact transforms, contact structure, Darboux's theorem

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması sürecinde gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR ’a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Serdar KARATAŞ

(Karaman 2019)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
∇	Levi-Civita koneksiyonu
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	Lie türev operatörü
$\boldsymbol{\chi(M)}$	M üzerindeki C^{∞} vektör alanları uzayı
$\boldsymbol{TM}$	M üzerindeki tanjant demeti
$\boldsymbol{S_{f,a}}$	f fonksiyonun a daki Seviye kümesi
$\boldsymbol{c}$	Düzgün diferansiyellenebilir eğri
$\boldsymbol{\tilde{c}}$	c 'nin lifti
$\boldsymbol{KerF}$	F 'nin çekirdeği
$\boldsymbol{V}^{*}$	V nin dual uzayı
$\wedge_{\boldsymbol{k}}$	k- formların uzayı
$\boldsymbol{R}$	Riemann eğrilik tensörü
$\boldsymbol{g}$	Riemann metrik tensörü
$(\boldsymbol{M^n}, \boldsymbol{g})$	Rimeann manifoldu
$\boldsymbol{T_q}(\boldsymbol{R^n})$	q noktasındaki tanjant vektör uzayı
$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\sigma})$	Kesit eğriliği

1.GİRİŞ

Riemann Geometrisi 'nin temel unsurları: Uzunluk, açılar, eğriler vb. konulardır. Gerçekten de Riemann Geometrisi 'nde yer alan uzaysal "noktaların" altında yatan yol, Euclid 'in bin yıl önce tarif ettiği yoldan çok da farklı değildir.

19 yy. da projektif geometrinin gelişimi uzaysal noktalara bakış açısına meydan okumuştur. "Sonsuzluktaki noktalar" ve "noktasal çizgiler" gibi fikirler Euclid 'in beşinci postulatını diğer aksiyomlardan çıkarmak için asırlarca süren çabalara son vermiştir. Objeleri noktalara çevirme özgürlüğü uzaysal nesnelerden daha genel olarak, modern geometrilere özellikle de kontakt geometrinin gelişimine büyük bir kapı açtı.

Yeni bir başka gelişme de 1872 Erlangen programında Felix Klein tarafından başlatılan Öklid olmayan kontakt geometri çalışmasıdır. Klein 'e göre doğru nesneler ve geometri ilişkileri, belirli dönüşümler altında değişmez olarak kalanlardır. Öklid Geometrisi de bu nesnelerin belirli dönüşümler, rotasyonlar ve yansımalar altında korunması çalışmasıydı. Klein 'in bu bakış açısı, Sophus Lie 'nin 1890 la kısmi diferansiyel denklemler çalışmasında kullandığı kontakt dönüşümler ile birleşerek modern kontakt geometri teorisine hız kazandırdı.

Kontakt geometri, 1950 yıllarından başlayarak yavaş yavaş kendine özgü çalışma alanını ortaya çıkardı. Matematiksel araştırmanın diğer alanlarındaki gelişmeler sayesinde kontakt geometri 1990 lı yıllarda büyük ilgi uyandırmıştır. Kontakt geometri üzerine yüksek lisans seviyesindeki ilk ders kitabı 2008 yılında Hansjorg Geiges (Geiges) tarafından yayınlanmasına rağmen, Kontakt geometrinin temel fikirleri; Huygens 'in geometrik optikler formülasyonuna bakılarak, 1690 yıllarına dayanmaktadır. Geometrici Vl. Arnold 'un iddiasına göre kontakt geometri tüm geometridir.

Bu bölüme kontakt geometrinin ilk olarak fizikte ve ikinci olarak matematikte nasıl kullanıldığı konularıyla başlıyoruz.

Kontakt geometri konusu Riemann Geometrisi konusuna paralel bir şekilde ilerler. Kontakt geometrinin yapısı olan kontakt form, non-dejenere olan diferansiyel 1-formdur. Bu formu tanıttıktan sonra kontakt formun tanımından ortaya çıkan nesneleri tanımlayacağız. Bununla birlikte en başından beri kontakt geometrideki çalışmaların kontakt formunun kendisi değil de ilgili kontakt hiper düzlemi olduğunu biliyoruz. Bunları özellikle yapıyı koruyan dönüşümlerin tanımında yani kontakt diffeomorfizmlerde tekrar ele alacağız.

Kontakt geometri ve Riemann geometrisi arasındaki önemli farklardan biri tüm kontakt yapılarının "yerel olarak aynı" olmasıdır. Bu darboux teoreminden gelir. Bir bütün olarak bu, kalkülüs bazlı tekniklerden ziyade topolojiye çok daha büyük bir ağırlık vermenin sonucudur. Doğal olarak hangi topolojik uzayların (veya manifoldların) bir kontakt yapı oluşturacağı sorularını ortaya çıkarır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere bir f ⊂ A × B altkümesi olsun.

i. $\forall a \in A$ ve $b \in B$ için $(a, b) \in f$
ii. $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in f \ ve \ a_1 = a_2 \ ise \ b_1 = b_2$

şartları sağlanıyor ise f 'ye fonksiyon denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.2. $V \neq \emptyset$ olan bir küme ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise V kümesi K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır denir (McInerney, 2013).

- $\forall u, v \in V$ için $u + v$ tanımlıdır ve $u + v \in V$ dir.
- $\forall u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$ dir.
- $\exists 0 \in V$ ve $\forall u \in V$ için $u + 0 = u \ ve \ 0 + u = u$ dur.

- $\forall u \in V$ için V kümesinde $-u$ ile gösterilen $u + (-u) = 0$ ve $(-u) + u = 0$ eşitliğini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır ve bu elemana toplama işlemine göre tersidir denir.
- $\forall u, v \in V$ için $u + v = v + u$ dur.
- $\forall a \in K, \forall u, v \in V$ için $a(u + v) = au + av$
- $\forall a, b \in K, \forall u \in V$ için $(a + b)u = au + bu$
- $\forall a, b \in K, \forall u \in V$ için $(ab)u = a(bu)$
- K nın çarpma işlemine göre birim elemanı 1 olduğuna göre $\forall u \in V$ için $1.u = u$ dur.

Tanım 2.3. V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve W, V 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki iki önerme doğru ise W, V 'nin bir alt uzayıdır denir. (Sabuncuoğlu, 2014).

i. $\forall u, v \in W\ için\ u + v \in W$ dır.

ii. $\forall u, \in W\ \forall k \in K\ için\ ku \in W$ dır.

Tanım 2.4. V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $G = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ V 'nin alt kümesi olsun. Eğer $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots, a_mv_m = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots a_m \in F$ varsa, o takdirde G kümesine F cismi üzerinde lineer bağımlı denir. Eğer a_i $a_1v_1 + a_2v_2 + a_mv_m = 0$ olması için $\forall i\ (i = 1,2, \dots, m)$ için $a_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa, o zaman G kümesine F cismi üzerinde lineer bağımsızdır denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.5. V bir vektör uzayı ve $S = \{a_1, a_2, \dots a_n\} \subset V$ olsun. Eğer S lineer bağımsız ve $Span(S) = V$ ise S ye V 'nin bir bazı denir.
V vektör uzayının sonlu bir tabanı varsa V ye sonlu boyutlu vektör uzayıdır denir. V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. V 'nin tabanındaki vektör sayısına, V 'nin boyutu denir ve $dimV$ veya $boyutV$ ile gösterilir (McInerney, 2013).

Tanım 2.6. V ve W iki reel vektör uzayı ve $L: V \to W$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i. $\forall u, v \in V$ için $L(u+v) = L(u) + L(v)$

ii. $\forall c \in R$ ve $\forall u \in V$ için $L(cu) = cL(u)$ ise

L dönüşümüne V 'den W 'ya bir lineer dönüşüm denir.

$L: V \to W$ lineer dönüşümü birebir ve örten ise L 'ye lineer izomorfizm denir. V 'den W uzayına giden en az bir lineer izomorfizm varsa V uzayı W uzayına izomorftur**.**

$L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. R_L 'nin ya da $R(L)$ ile gösterilen görüntü cümlesi

$$R_L = R(L) = \{w \in W : \forall v \in V \text{ için } L\ (v) = w\}$$

şeklinde W 'daki görüntü noktalarının cümlesidir. L 'nin $D(L)$ ile gösterilen tanım bölgesi V cümlesidir. L 'nin Kernel F ya da kısaca $KerF$ ile gösterilen çekirdeği (kernel) ya da sıfır uzayı (null space),

$$Kernel\, L = Ker\, L = \{v \in V : L(v) = 0\}$$

şeklinde $0 \in U$ elemanına dönüşen V 'deki elemanlar cümlesidir. $KerF$, daima V 'nin sıfır vektörünü kapsar (McInerney, 2013).

Teorem 2.1. $L: V \to W$ dönüşümü sonlu boyutlu bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına bir lineer dönüşüm ise

$$rankA + sıfırlıkA = boyV$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1985).

Tanım 2.7. V, $n -$ boyutlu reel vektör uzayı olsun. $V^* = \{f | f: V \to R, f\ lineer\}$ kümesi de bir reel vektör uzayıdır. Bu uzaya V vektör uzayının dual uzayı denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.8. $L: V \to W$ dönüşümü V ve W vektörleri arasında bir lineer dönüşüm ve

$$B: W \times W \to R$$

dönüşümü W üzerinde bir bi-lineer form olsun. Bu durumda L tarafından B 'nin pullback dönüşümü $T^*B : V \times V \to R$ bir bi-lineer formdur ve $\forall\, X, Y \in V$ için

$$B(v_1, v_2) = B(T(v_1), T(v_2))$$

şeklinde tanımlıdır (McInerney, 2013).

Tanım 2.9. R^n uzayında $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ vektörleri verilsin. Buna göre $a\beta = a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n$ değerine a ve β nin skaler çarpımı (ya da iç çarpımı) denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.10. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde simetrik bilineer dönüşüm L olmak üzere $\forall\alpha \in V$ için

$$L(a, a) = 0 \Rightarrow a = 0$$

oluyorsa L 'ye non-dejeneredir denir (Hacısalihoğlu, 1985).

Tanım 2.11. $q \in R^n$ ve $v \in R^n$ olmak üzere q noktasında $q + v$ noktasına giden yönlü doğru parçasını, q noktasında, v teğet vektörü diye adlandıracağız ve v_q biçiminde göstereceğiz. q noktasındaki bütün teğet vektörlerin kümesine $T_q(R^n)$ ile gösterilir (McInerney, 2013).

Tanım 2.12. $T_q(R^n)$ yukarıdaki tanımlanan işlemlere göre R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Böylece elde edilen $T_q(R^n)$ vektör uzayına, R^n uzayının q noktasındaki tanjant uzayı denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.13. $f: R^n \to R$ düzgün bir fonskiyon f fonksiyonun görüntüsünde $a \in R$ olsun. a noktasında f 'in seviye kümesi olması için

$$S_{f,a} = \{(x_1, \dots x_n) \in R^n \mid f(x_1, \dots x_n) = a\}$$

şeklinde tanımlanır. $\forall p \in S_{f,a}$ için f 'in düzgün değerli olduğunu söyleyebiliriz (McInerney, 2013).

Tanım 2.14. $f: R^n \to R^m$ $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ olsun. $v_q \in T_q(R^n)$ için

$$f_{*q}(v_q) = (v_q[f_1], v_q[f_2], \dots, v_q[f_m])_{f(q)}$$

eşitliğiyle tanımlı

$$f: T_q(R^n) \to T_{f(q)}(R^m)$$

fonksiyonuna, f fonksiyonun q noktasındaki tanjant dönüşümü denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.15. $U\ ve\ V$, R^n uzayının açık alt kümeleri olmak üzere $f: U \to V$ fonksiyonu homeormorfizm ve f ile f^{-1} fonksiyonlarının ikisi de düzgün ise f fonksiyonu bir difeomorfizmdir. U kümesinden V kümesine bir diffeomorfizm varsa U kümesi V kümesine diffeomorftur denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.16. R^n uzayında bir tanjant demeti TR^n ile gösterilir ve $p \in R^n\ ve\ v_p \in T_p(R^n)$ için tüm sıralı $(p, \boldsymbol{v_p})$ ikililerinin kümesidir (McInerney, 2013).

Tanım 2.17. U, R^n uzayının açık bir alt kümesi olsun. U 'nun her bir q noktasına q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyona, U üzerinde bir vektör alanı denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.18. Bir fonksiyonun her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise bu fonksiyona diferansiyellenebilirdir denir. C^∞ sınıfından olan fonksiyonlara sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyon denir (McInerney, 2013). $I \subset R$ açık bir aralık olmak üzere $a: I \to E^3$, $a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ fonksiyonu verilsin. $a: I \to E^3$, $a_i(t), 1 \leq i \leq 3$ fonksiyonlarına öklid koordinat fonksiyonları denir. Eğer a_i fonksiyonları diferansiyellenebilir ise a fonksiyonuna diferansiyellenebilir fonksiyon denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.19. $\forall p \in R^n$ için $V(p) \in T_p(R^n)$ olmak üzere R^n uzayında düzgün bir vektör alanı V olsun. I kümesinin 0 içerdiği aralıkta V 'den p 'ye bir integral eğrisi düzgün parametreli $c: I \to R^n$ eğrisidir ve

$$c(0) = p \text{ ve } \forall t \in I \text{ için } c'(t) = V\,(c(t))$$

şeklinde tanımlanır (McInerney, 2013).

Tanım 2.20. R^n üzerinde bir düzgün V vektör alanı $\forall p \in R^n$ için p boyunca integral eğrisi üzerindeki tüm I aralıkları $I = R$ olacak şekilde alınabiliyorsa, V 'ye tam uzay denir (McInerney, 2013).

Tanım 2.21. M^n, n −boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n, R)$ olmak üzere,

$$g: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to C^\infty(M^n, R)$$

simetrik 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir. M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M^n ye bağlantılı manifold adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.22. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir vektör alanı X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup ϕ_r olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M^n$ için

$$(\mathcal{L}_X K)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[K_p - (\phi_r K)_p\right]$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}_X K$ dönüşümüne X yönünde K nın Lie türevi denir ve $\mathcal{L}_X K$ ile gösterilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.23. M bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. M üzerindeki koneksiyon olmak üzere $R: \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z) &= R(X,Y)Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= [\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı tensör alanına Riemann eğrilik tensör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.24. M bir Riemann manifoldu ve M üzerinde afin konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $\nabla_X Y - \nabla_{YX} Y X = [X, Y]$

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ 'ya Riemann koneksiyonu (Levi Civita konneksiyonu) denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.25. n −boyutlu bir Riemann manifoldu (M, g), üzerinde eğrilik tensörü R ve $\chi(M)$ 'nin bir ortonormal bazı $\{E_1, E_2, \dots E_n\}$ olsun $Q: \chi(M) \to \chi(M)$

$$X \to QX = -\sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)\, E_i$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne M 'nin Ricci operatörü,

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \to R$$

olmak üzere

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i, X)Y, E_i)$$

şeklinde tanımlı S tensör alanına, M üzerinde Ricci eğrilik tensörü adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.26. n −boyutlu bir Riemann manifold M ve $\{E_1, E_2, \dots E_n\}$ ortonormal vektör alanları olmak üzere M nin skaler eğriliği

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(E_i, E_i)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.27. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzay σ ve $V, W \in \sigma$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarını alan $g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2 \neq 0$ olmak üzere

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, W)W, V)}{g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2}$$

eşitliğine σ 'nin kesit eğriliği denir ve $K(\sigma)$ ile gösterilir (O'neill, 1983).

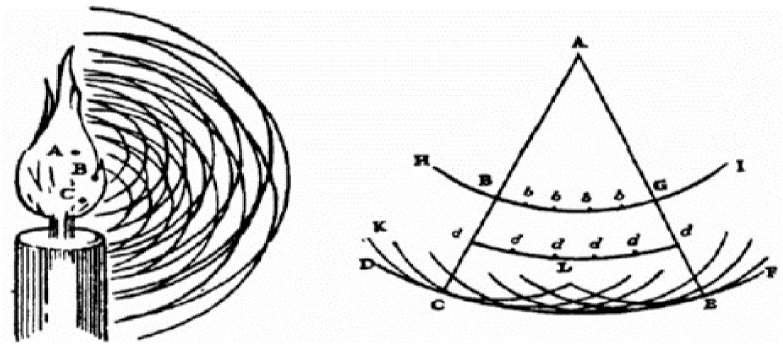
3. MATERYAL ve METOT

Bu tez çalışmasının bundan sonraki bölümlerinde Andrew Mclnerney ’in First Steps in Differential Geometry adlı kitabı kaynak olarak alınmıştır.

3.1. Huygens Prensibi ve Kontakt Elemanlar

Klasik fiziğin temel amaçlarından biri, fiziksel ışık teorisini tanımlamaktır. Işığın parçacık kuramları ve dalga teorileri konuları, Maxwell 'in elektromanyetizma kuramı ile örtüşür ve (ve daha sonra kuantum elektrodinamiği teorileri ile daha da ileri derecede geliştirilmiş) elektrik ve manyetizma derslerinde ilk anlatılan konulardan biridir. Işık teorisini ve yansıma ile kırılmanın fiziksel fenomenlerini formüle etmek için yapılan ilk girişimlerden biri Christiaan Huygens tarafından 1690 da "ışık üzerine incelemede" gerçekleştirildi. Modern terminolojide olmasına rağmen bu modelin burada kısa bir özetini verelim. Bu genellikle geometrik optiklere bir örnektir.

Huygens prensibinin matematiksel bir modelini oluştururken, kontakt geometrinin temel kavramlarının buradaki rolünün nasıl olduğunu gösterebiliriz. Huygens ’in ışığın yayılması ile ilgili açıklaması, hava boyunca sonlu hızda (fakat çok yüksek) yayılan ışık ışınlarının bir nokta kaynağı modeli ile başlar.

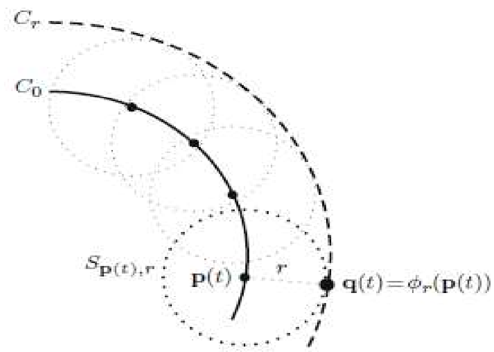


Şekil 3.1. 1912 baskısında Huygens 'in Işık Üzerine İncelemesi (Chicago Üniversitesi)

Bir temel dalga belirli bir zamanda, tek bir nokta kaynağından yayılan tüm ışınlar tarafından erişilebilecek tüm noktalardan oluşur. Geometrik olarak, ortamın ışık ışınları için sabit hıza uygun olduğunu varsayarsak, bir temel ışın, merkezi nokta kaynağı olan bir küre ile temsil edilebilir.

Huygens 'in yansıma ve kırılma hakkındaki daha önemli açıklamaları, dalgadaki her noktanın sırayla daha çok temel dalgalar için yeni bir nokta kaynağı haline geldiği yönündeki varsayımlardır. Bu varsayımın özgün mantığı, komşu toplara bilardo topu iletme momentumunun benzetilmesine dayanır. Dahası ikincil kaynak dalgasından gelen ışık ışınlarının hızı orijinal ilk dalganınkiyle aynı olduğundan, ikincil dalga Huygens terminolojisine göre orijinal ilk dalgaya "dokunmalıdır" (yani teğet olmalıdır). Aşağıda daha kesin olarak belirteceğimiz geometrik dilde, bir ışık dalgası, $t_0 + \Delta t$ zamanda oluşan dalganın, t_0 anındaki dalgalar üzerindeki noktalardan, temel dalgaların zarfı olarak elde edilir. HUYGENS PRENSİBİ: Bir dalganın her noktası temel bir dalga kaynağıdır. Dalga cephesi daha sonraki bir zamanda bu temel dalgaların zarfıdır.

Bu çalışmanın geri kalanındaki amacımız Huygens prensibi için matematiksel bir çerçeve sağlamaktır. İlk olarak vektör hesabını kullanmaya başlayacağız. Daha sonra "noktaları" farklı şekilde tanımlayarak, kontakt geometrinin bazı önemli elamanlarına karşılık gelecek şekilde yeniden ele alacağız. Şimdi R^2 'de eğriler olarak gösterdiğimiz düzlem dalgalarını tanımlayarak kavramları açıklayacağız. Temel dalgalar, daha sonra küre yerine daire haline gelecektir.



Şekil 3.2. Dalga cephesi φ_r dönüşümü

İlk dalga cephesini $p: I \rightarrow R^2,\ p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ bileşenleriyle düzgün parametrelenmiş olduğunu varsayarak, $C_0 \subset R^2$ olacak şekilde bir eğri olarak tanımlayalım. Dahası, $\forall p(t) \in C_0$ için $S_{p(t),r}$ yarıçapı r olan $p(t)$ merkezli bir daire temel dalga olsun ve r belirli bir zamanda bir ışık ışını ile kat edilen mesafeyi temsil etsin. W_r kümesi $t \in I$ için tüm $S_{p(t),r}$ dairelerinin bulunduğu koleksiyonu temsil etsin.

Tanım 3.1.1. Önceki paragrafta tarif edilen W_r kümesinin C_r zarfı aşağıdaki özellikleri sağlayan R^2 'deki bir eğridir:

- $\forall\ q \in C_r$ noktası tam olarak bir $S_{p(t),r}$ dairesi üzerinde bir noktadır. Yani $\forall\ q \in C_r$ için $q \in S_{p(t),r}$ olacak biçimde bir tek $p(t) \in C_0$ vardır.
- C_r 'ye teğet doğrusu $q \in S_{p(t),r}$ için $S_{p(t),r}$ dairesinde q 'ya denk gelir. (çakışır.)

Bu konunun geri kalanı için bu tür zarfların varlığını kabul edeceğiz. Amacımız Huygens prensibini $r \geq 0$ uzaklık olan bir diffeomorfizm

$$\varphi_r: R^2 \rightarrow R^2$$

ile ifade etmektir. Bu diffeomorfizm olan dalga cephesini aşağıdaki gibi tanımlar: Bir C_0 dalga cephesi bir r mesafesi boyunca, C_0 'ın değişimi $C_r = \varphi_r(C_0)$ olarak verilir ve $p(t) \in C_0$ noktaları $q = \varphi_r(p(t)) \in C_r$ noktalarına karşılık gelir. Bunu yaparken C_0 'ı parametreleştirmek için kullanılan t parametresinin C_r 'i parametreleştirmek için de kullanılabileceğini ve $q(t) \in S_{p(t),r}$ olacak şekilde $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ 'nin C_r üzerinde bir tek nokta olarak yazılabileceğini söyleyebiliriz. (Şekil 3.2.)

$q(t)$ parametresinin düzgün olduğu ile ilgili aşikâr olmayan (genel zarf yapılanlarında kolaylıkla yanlış olabilecek bir varsayım) bir varsayım yapalım:
Bu yapıda Tanım 3.1.1. in iki koşulu

$$\big(q(t) - p(t)\big) \cdot \big(q(t) - p(t)\big) = r^2 \qquad (3.1)$$

$$q'(t).\,(q(t) - p(t)) = 0 \qquad (3.2)$$

olarak vektör hesabı notasyonu kullanılarak formüle edilebilir. Denklem (3.1), $q(t)$ 'nin merkezi $p(t)$ ve yarıçapı r olan daire üzerinde olduğunu ifade eder. Denklem (3.2),

C_r 'ye teğet vektör $q'(t)$ 'nin bütün t ler için radyal vektör $q(t) - p(t)$ 'ye dik olduğunu ve dolayısıyla $S_{p(t),r}$ çemberine teğet olduğunu ifade eder. (3.1) denklemini yeniden düzenlersek;

$$(q'(t) - p'(t)).(q(t) - p(t)) = 0$$

elde edilir ve (3.2) denklemiyle

$$p'(t)(q(t) - p(t)) = 0$$

şeklini alır. Bu bileşenlerle

$$p_1{}'(q_1 - p_1) + p_2{}'(q_2 - p_2) = 0$$

yazılır. Kolaylık sağlamak için $p_1{}' \neq 0$ olan bütün t ler için

$$q_1 - p_1 = -m(q_2 - p_2) \qquad (3.3)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Burada $m(t) = ((p_2{}'(t))/(p_1{}'(t)))$ ifadesi C_0 dalga cephesine $p(t)$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimidir. (3.1) eşitliğinde (3.3) denklemini yerine koyarak ve $(q_2 - p_2)^2 = \frac{r^2}{1+m^2}$ denklemi için $(q_2 - p_2)^2$ ifadesini çözerek veya özel olarak pozitif bir karekök

$$q_2 = p_2 + \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$$

seçerek, bu denklem ile birlikte (3.3) ifadesi

$$q_1 = p_1 - \frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}$$

olarak elde edilir.

Bu sonuç Huygens prensibinin koşullarının

$$\varphi_r(p_1, p_2) = \left(p_1 - \frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}, p_2 + \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

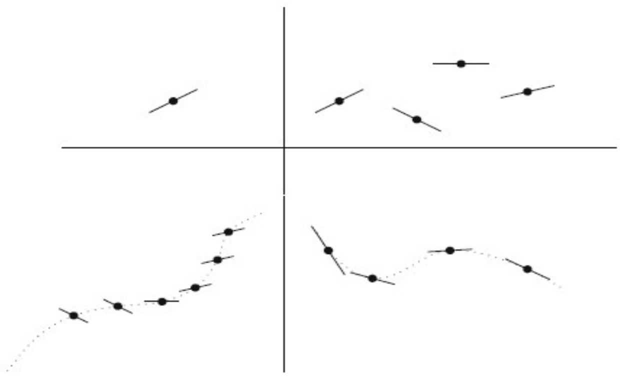
dönüşümünün $p = (p_1, p_2) \in C_0$ ile $q = \varphi_r(p) \in C_r$ arasındaki noktaları işaret ettiği gerçeğini göstermektedir.

φ_r dönüşümü sadece $p = (p_1, p_2)$ 'ye bağlı değildir. Burada m sadece $p(t)$ noktasına değil aynı zamanda $p: I \to R^2$ parametrelerine de bağlıdır. Bu sorunu çözüp dalga cephelerini ifade etmek için yeni bir tanım sunuyoruz: "kontakt elemanları"

Tanım 3.1.2. R^2 'de $P = (x, y) \in R^2, \ell \subset R^2$ ve dikey olmayan doğrusu $P \in \ell$ gibi ile birlikte (P, ℓ) noktasını içeren ikiliye kontakt eleman denir. R^2 'deki bütün kontakt elemanların kümesi CR^2 ile gösterilir. $P = (x, y)$ 'den geçen ℓ doğrusunun eğimi m olmak üzere (P, ℓ) kontakt elemanına karşılık gelen (x, y, m) sıralı üçlüsü

$$CR^2 = \{(x, y, m) \mid (x, y) \in R^2, m \in R\}$$

olarak adlandırılır ve CR^2 'nin standart bir koordinat sistemi vardır. Bu nedenle CR^2, R^3 ile aynıdır. Dolayısıyla $\forall p = (x, y, m)$ için $T_p(CR^2) = T_p(R^3)$ düşünebiliriz. CR^2 'de uzaysal noktalar olarak " noktaları" R^3 'te de genel olarak görebiliriz. (Şekil 3.)



Şekil 3. 3. CR^2 de kontakt elemanlar ve eğrileri

Tanım 3.1.3. $g: I \to R^2$ düzgün bir eğri, $c(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ olmak üzere $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ eğimi $g(I)$ için teğet doğrusunun eğimi $c(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ noktasındadır. Dolayısıyla

$$\hat{c}: I \to R^2, \qquad \hat{c}(t) = \big(x(t), y(t), m(t)\big)$$

eğrisine CR^2 için c eğrisinin lifti denir.

İki eğri $c_1: I_1 \to R^2$ ve $c_2: I_2 \to R^2$ 'nin görüntülerinin $P \in R^2$ noktasında kesiştiğini varsayalım. c_1 ve c_2 görüntüleri P 'de ortak bir teğet doğrusu ℓ 'ye sahip olduğunda $\hat{c}_1, \hat{c}_2$

liftlerinin görüntüleri sadece CR^2 ’de kesişir. Bu durumda c_1 ve c_2 kontakt elemanları adıyla P ’de kontakt halinde (ilk sıra için) olarak söylenir.

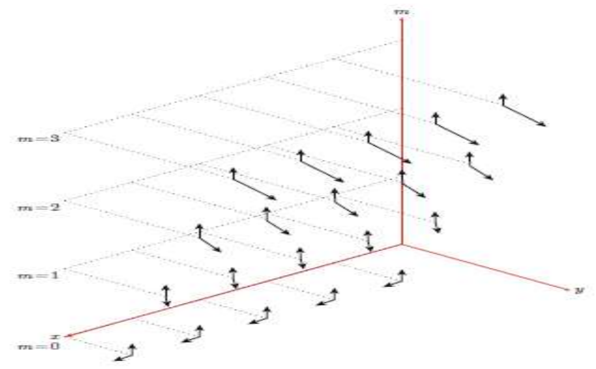
CR^2 ’deki her eğri R^2 ’deki bir eğrinin lifti olarak kabul edilemez. Aslında bir $c: I \to R^2$ eğrisinin lifti $\gamma(t) = (x(t), y(t), m(t))$ şeklinde belirlenen bir $\gamma: I \to CR^2$ eğrisi için gerek ve yeter şart $\forall t$ için $x'(t) \neq 0$ ve $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ olmasıdır.

CR^2 ’de (x, y, m) standart koordinatlarla özel diferansiyel 1-form olan $\alpha = dy - mdx$ ’i düşünelim. $\forall p = (x, y, m) \in CR^2$ noktasında $\alpha(p)$ bir $E_p \subset T_p(CR^2)$ alt vektör uzayını

$$E_p = ker\alpha(p) = \{V_p \in T_p(CR^2) \mid \alpha(p)(V_p) = 0\}$$

şeklinde tanımlar. (Şekil 3.4.)

Bu terminolojide γ nin koşulunu, R^2 deki bir eğrinin lifti olarak şu şekilde yeniden ifade edebiliriz.



Şekil 3.4. $E_p = ker\alpha(p)$ Alt uzayları için bazlar

Önerme 3.1.1. $\gamma: I \to CR^2$, CR^2 de bir eğri ve $x'(t) \neq 0$ olmak üzere $\forall t \in I$ için $\gamma(t) = (x(t), y(t), m(t))$ olsun. Çekirdeği $E_p = ker\alpha(p)$ olarak gösterdiğimiz CR^2 ’de $\alpha = dy - mdx$ 1-formunu düşünelim. $\forall t \in I$ için $\gamma'(t) \in E_{\gamma(t)}$ oluyorsa γ eğrisi R^2 üzerindeki bir c eğrisinin liftidir. Buna denk olarak γ, bir c eğrisinin liftidir ancak ve ancak $\gamma^*\alpha = 0$ ’dır deriz. Bu nedenle, şimdi CR^2 ’de bir $c: I \to R^2$ eğrisinin lifti olan bir $\gamma: I \to CR^2$ eğrisini değerlendirelim. Huygens prensibini bir diffeomorfizm açısından ifade etme durumumuza dönersek, yukarıda dalga cephesi dönüşümü φ_r için uygun bir $\varphi_r: CR^2 \to CR^2$ dönüşümü olduğunu görürüz.

Önerme 3.1.2. $\varphi_r: CR^2 \to CR^2$ dönüşümü

$$\varphi_r(x, y, m) = \left(x - \frac{rm}{\sqrt{1+m^2}}, y + \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}, m\right)$$

şeklinde verilen bir diffeomorfizmdir. Buna ek olarak, φ_r 'nin en önemli özelliğini aşağıdaki önerme ile verebiliriz.

Önerme 3.1.3. $\varphi_r: CR^2 \to CR^2$ difeomorfizmi Önerme 3.2.1 özel 1- form olan $\alpha = dy - mdx$ ve Önerme 3.1.2 yi alalım. O halde aşağıdaki gibi yazılır.

$$\varphi_r{}^*\alpha = \alpha.$$

İspat.

$$\begin{aligned}
\varphi_r{}^*\alpha &= d\left(y + \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right) - md\left(x - \frac{rm}{\sqrt{1+m^2}}\right) \\
&= \left(dy - \frac{rm}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} dm\right) - \left(dx - \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} dm\right) \\
&= dy - mdx \\
&= a.
\end{aligned}$$

Sonuç 3.1.1. $\gamma: I \to CR^2$ nin bir dalga cephesi olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\gamma_r = \varphi_r \circ \gamma_0$$

da bir dalga cephesidir. Diğer bir deyişle φ_r dalga cephelerini dalga cephelerine dönüştürür.

İspat. γ_r 'ın R^2 'de bir eğrinin lifti olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Önerme 3.1.1 'e göre 1-form olan $\alpha = dy - mdx$ için $\gamma_0{}^*\alpha = 0$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
(\varphi_r \circ \gamma_0)^*\alpha &= \gamma_0{}^*\varphi_r{}^*\alpha \\
&= \gamma_0{}^*a \qquad \text{(önerme 3.1.3 'den)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla yine Önerme 3.1.1 ile $\gamma_r,\ R^2$ ’de bir eğrinin liftidir.

Bu bölümü Huygens prensibinde, kontakt elemanlarının belirlenmesinde özel diferensiyel form olan α ’nın rolünü vurgulayarak tamamladık. İlk olarak 1-form $\alpha,\ CR^2$ ’deki hangi eğrilerin dalga cepheleri olduğunu ayırt etmemizi sağlar. Huygens prensibinin şartlarına göre inşa edilen diffeomorfizm φ_r ’nin α ’yı koruma özelliği vardır. Dolayısıyla φ_r dalga cephelerini dalga cephelerine dönüştürür ve böylece ışığın yayılması için bir model tarif eder.

3.2. Diferansiyel Denklemler ve Kontakt Elemanlar

Önceki bölümde kontakt elemanlarının ışığının yayılması için Huygens prensibinin geometrik tanımını nasıl sağladığını gördük. Huygens kontakt elemanlarının matematiksel yapısını kullanmamıştır. Kontakt elemanlarının kümesinin ("lineal-çizgisel elemanlar") açıkça kullanıldığı ilk yer 19. yüzyılın sonlarında Sophus Lie ’nin çalışmasıdır. Lie ’nin çalışmalarının çoğu diferansiyel denklemlerdeki problemleri analiz etmek için geometrik ve cebirsel teknikleri kullanma girişimi olarak görülebilir.

Yaklaşımımız birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için tasarlanan yöntemlerden türetilmesine rağmen, bu bölümde birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözme bağlamında, bu fikirlerin bazılarını sunacağız.

Örnek verecek olursak, $u\colon R \to R,\ t$ bağımsız değişken için adi diferansiyel denklem

$$(2u-t).u' = u-t, \qquad u(0)=1 \qquad (3.1)$$

başlangıç problemini düşünelim. Bu denklemi çözmek için sıradan diferansiyel denklemlerde, temel bir derste karşılaşılan problemde hangi yöntemlerin uygulanacağını incelememiz gerekir. Fakat amacımız bu adi diferansiyel denklemi kontakt elemanlarının yardımıyla yeniden tanımlayarak farklı bir yaklaşım oluşturmaktır.

Tanım 3.2.1. Lifti $\hat{c}\colon I \to CR^2, \hat{c}(t) = \big(x(t), y(t), m(t)\big)$ şeklinde tanımlı

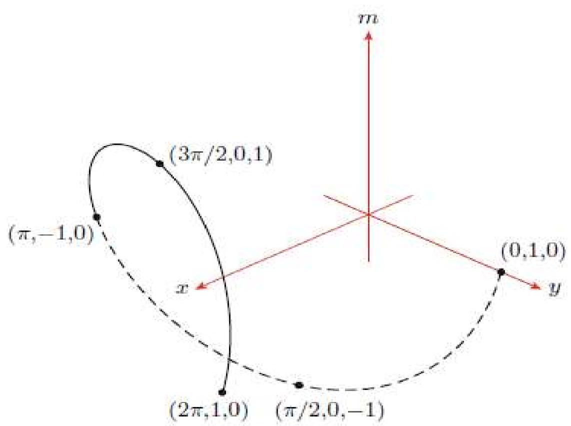
$$c\colon I \to R^2, \qquad c(t) = (x(t), y(t))$$

ve $t \in I$ için $x'(t) \neq 0$ olmak üzere $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ olan eğriyi hatırlayalım.

Aynı şekilde düzgün bir reel değerli fonksiyon $u: R \to R$ aşağıdaki gibi $\hat{u}: I \to CR^2$ eğrisinin oluşmasına yol açar.

$$\hat{u}(t) = (t, u(t), u'(t))$$

şeklinde parametrelendirilen û eğrisi, u fonksiyonunun 1-jeti olarak adlandırılır. 1-jeti kontakt elemanlarının kümesindeki grafik olarak düşünülebiliriz. (Şekil 3.5)



Şekil 3.5. Fonksiyonun 1-jet görüntüsü u : R → R, $u(t) = \cos t$.

Önerme 3.2.1. $c: I \to R^2, CR^2$ 'de düzgün bir eğri

$$c(s) = (x(s), y(s), m(s))$$

$\alpha = dy - m dx$ formu $c^*\alpha = 0$ koşulunu sağlar. Bu takdirde $x'(s_0) \neq 0$ olan bir $s_0 \in I$ olduğunu varsayarsak, $x(s_0)$ 'ı içeren bir I_1 aralığı vardır ve I 'nın bir I_0 alt aralığında $c: I_0 \to CR^2$ nin görüntüsü ile 1-jet $\hat{g}: I_1 \to CR^2$ 'nin görüntüsü çakışacak şekilde bir $g: I_1 \to R$ fonksiyonu vardır.

İspat. $I_0 \subset I$ her bir $s \in I_0$ için $x'(s) \neq 0$ olacak şekilde s_0 içeren bir aralık olsun. Ters fonksiyon teoreminin tek boyutlu versiyonuna göre x, I_0 'da tersinirdir, yani $x(s_0)$ 'ı içeren bir I_1 aralığı ve $s \in I_0$ lar için 1-1, örten $\chi: I_1 \to I_0$ fonksiyonu $(\chi \circ x)(s) = s$ ve $\forall t \in I_1$ için $(x \circ \chi)(t) = t$ şeklinde yazılır. $g: I \to R, g(t) = (y \circ \chi)(t)$ olarak tanımlayalım. $\forall t \in I_1$ için $x(s) = t$ olmak üzere $\chi(t) = s \in I_0$ olduğunu göz önünde bulundurursak,

$$g'(t) = (y \circ \chi)'(t)$$
$$= y'(\chi(t)).\chi'(t)$$
$$= y'(s).\frac{1}{x'(s)}$$
$$= m(s) \qquad (c^*a = 0 \text{ olduğundan})$$

elde edilir. Tüm bunlar $\hat{g}(t) = (t, g(t), g'(t))$ fonksiyonu ile verilen 1-jet $\hat{g}: I_1 \to CR^2$ nin görüntüsünün $c(s) = (x(s), y(s), m(s))$ ile verilen $c: I_0 \to CR^2$ 'nin görüntüsüne denk geldiğini gösterir. Aslında $c \circ \chi = \hat{g}$ dir.

Şimdi;

$$F(t, u, u') = 0 \qquad (3.2)$$

formunda birinci mertebeden adi diferansiyel denklemini $F: CR^2 \to R$ 'nin düzgün bir reel değerli fonksiyon olarak düşünelim. Bu bölümün başlangıcındaki denklem (3.1)

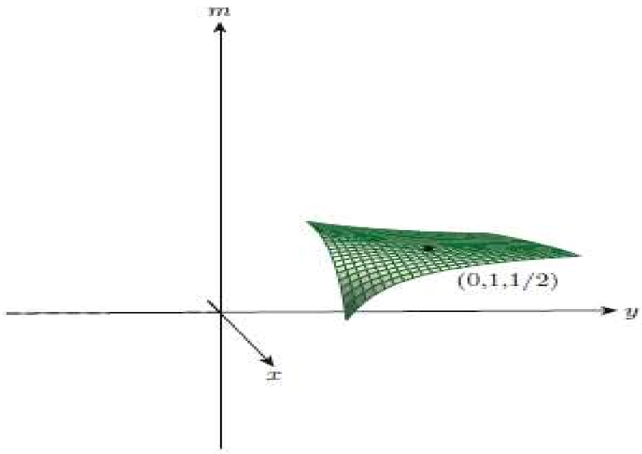
$$F(x, y, m) = (2y - x)m + x - y$$

ile sıradan, bir diferansiyel denklemin örneğidir. Eğer $F \circ \hat{u} = 0$ ise

$$S_F = \{(x, y, m) \in CR^2 \mid F(x, y, m) = 0\}$$

seviye kümesinde veya eşdeğerinde olan u 'nun tek düzeyli û grafiği ise $u: I \to R$ fonksiyonun adi diferansiyel denklem olan denklem (3.2) 'ye bir çözüm olduğunu söyleyebiliriz. Diğer bir deyişle eğer û, S_F geometrik kümesinde parametre edilmiş bir eğri ise o zaman u, denklem (3.2) nin bir çözümüdür. $u(t_0) = u_0$ başlangıç koşulu tek düzeyli û grafiğin $\{(x, y, m) \mid x = t_0, y = u_0\}$ ile verilen CR^2 deki doğru ile kesiştiği ifadesine karşılık gelir.

Model örneğimizde başlangıç koşulu $u(0) = 1$, $F(x, y, m) = 0$ olması koşuluyla, $(0,1,\frac{1}{2}) \in Image(\hat{u})$ olduğunu gerektirir. (Şekil 3.6.)



Şekil 3. 6. $CR^2 = R^3$ *'de* S_F *yüzeyi* $F(x, y, m) = (2y - x)m + x - y$.

Bir birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi, CR^2 kontakt elemanlarının üç boyutlu uzayında iki boyutlu bir seviye olarak tanımladıktan sonra, sıradan diferansiyel denklemi çözmek için geometrik bir tekniği özetleyeceğiz. Yukarıda gördüğümüz çözüm CR^2 'de, karakteristik vektör alanı olarak adlandırılan belirli bir vektör alanının integrasyonu altında adi diferansiyel denklem sistemleri için var olan teorem vasıtasıyla elde edilen bir eğridir. Karakteristiklerin metodu olarak bilinen yöntemi belirledikten sonra, yöntemi Lie tarafından geliştirilen bir tekniğe uyarlayacağız.

Yukarıda açıklandığı tanımlamada bu yöntemi kullanmak için $\alpha = dy - mdx$ ve dF formlarının, seviye kümesi S_F 'nin tüm noktalarında lineer bağımsız olduğunu varsaymak zorundayız. Burada $(x, y, m) \in S_F$ için $F_x, F_y, ve\ F_m$ 'nin belirtilen değişkenlere göre kısmi türevler olduğu $F_m \neq 0$ veya $F_x \neq -mF_y$ olduğunda bu koşulun karşılığını doğrular. Bu durum $\forall p = (x, y, m) \in S_F$ noktası için $T_p \subset R^2$ nin bir tek boyutlu alt uzayında $T_pS_F \subset T_p \subset R^2$ teğet düzleminin $E_p = ker\alpha(p) = \{Y_p \in T_p \subset R^2 \mid \alpha(p)(Y_p) = 0\}$ olarak tanımlanan $E_p \subset T_p \subset R^2$ ile kesişmesini sağlar.

Tanım 3.2.2. $F: CR^2 \rightarrow R$ düzgün bir fonksiyon ve {F=0} S_F seviye kümesi olmak üzere $\forall p \in S_F$ için α ve dF 'nin lineer bağımsız olsun. Buna göre $\hat{X}_F = \langle \hat{X}_F^1, \hat{X}_F^2, \hat{X}_F^3 \rangle$ vektör alanı aşağıdaki şekilde tek türlü tanımlıdır.

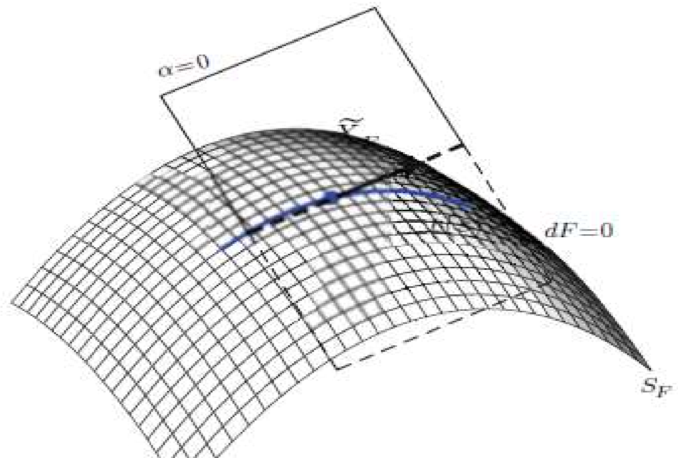
- $a(\hat{X}_F) = 0$
- $dF(\hat{X}_F) = 0$
- $\hat{X}_F^1 = -F_m$

koordinatları

$$\hat{X}_F = \langle -F_m, -mF_m, F_x + mF_y \rangle$$

olacak şekilde $\hat{X}_F$ alanına, F fonksiyonuna bağlı olan karakteristik vektör alanı olarak adlandırılır.

α ve dF 'nin $\forall p \in S_F$ de lineer bağımsız olduğu varsayımı, $\hat{X}_F$ vektör alanının hiçbir yerde sıfır olmadığını ve dolayısıyla alt vektör uzayı $T_pS_F \cap E_p$ 'yi germediğini gösterir. Bu tanımdaki üçüncü koşul $\hat{X}_F$ 'nin tekliğini sağlayan bir normalleşme koşuludur.



Şekil 3.7. Karakteristik vektör alanı $\hat{X}_F$

Teorem 3.2.1. Tanım (3.2) 'deki gibi F, $\hat{X}_F$ ve S_F ile bir $c(0) = (x_0, y_0, m_0) \in S_F$ noktasındaki $c(s) = (x_s, y_s, m_s)$ olarak tanımlanan $\hat{X}_F$ integral eğrisi $c: I \rightarrow CR^2$ eğrisini alalım. $u(t) = (y \circ \chi)(t)$ şeklinde tanımlı $u: I_1 \rightarrow R$ fonksiyonu $F(t, u, u') = 0$ ve

$u(x_0) = y_0$ tarafından belirlenen başlangıç değer probleminin bir çözümü olacak şekilde bir I_1 aralığı vardır.

İspat.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big(F\big(c(s)\big)\Big) &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial m}\frac{dm}{ds} \\ &= dF\big(\hat{X}_F\big) \qquad\qquad (c, \text{bir integral eğrisi olduğundan}) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\; (\hat{X}_F \text{ tanımından})\end{aligned}$$

Böylelikle $c(0) \in S_F$ olduğundan

$$F\big(c(s)\big) = F\big(c(0)\big) = F(x_0, y_0, m_0) = 0.$$

Ayrıca $a\hat{X}_F = 0$ koşulu $c^*\alpha = 0$ ya eşdeğerdir. Dolayısıyla önerme (3.2.1) c 'nin tekrar parametrelendirilerek bir $u = y \circ \chi$ fonksiyonunun lifti ile çakışması anlamına gelir. Bu yüzden $u, u(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan adi diferensiyel denklem (3.2) 'nin bir çözümünü temsil eder.

Bu teoremin özeti şudur: Bir diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için karşılık gelen karakteristik vektör alanının integral eğrisini bulmalıyız. Lie, S_F nin sadece herhangi bir seviye kümesi değil sıfır seviye kümesi olduğu gerçeğini bu yönteme uyarlamıştır.

Önerme 3.2.3. Yukarıda olduğu gibi düzgün fonksiyon F 'ye bağlı olan $\hat{X}_F$ karakteristik vektör alanını ele alalım. Buna göre yeni bir X_F vektör alanının $X_F = \hat{X}_F + F\partial y$ veya koordinatları $X_F =< -F_m, F - mF_m, F_x + mF_y >$ olacak şekilde tanımlayalım. Dolayısıyla, X_F 'nin bir $p \in S_F$ noktası boyunca integral eğrisi, p boyunca $\hat{X}_F$ 'nin integral eğrisi ile örtüşür.

İspat. Teorem (3.1) 'in ispatına göre X_F 'nin c integral eğrisi boyunca $F = 0$ 'dır. Ancak $\forall\, p \in S_F$ için $X_F(p) = \hat{X}_F(p)$ yazılabilir. Dolayısıyla, akıların tekliğinden, bir $p \in S_F$ noktası boyunca $\hat{X}_F$ nin ĉ integral eğrisi ve X_F nin c integral eğrisi birbiri ile çakışmalıdır. Önerme (3.2.3.) te tanımlanan X_F vektör alanı, F nin Lie karakteristik vektör alanı olarak adlandırılır.

Bu bölümün amaçlarından biri, bu bölümün sonuçlarını, $\hat{X}_F$ karakteristik vektör alanı ile Lie karakteristik alan X_F arasındaki geometrik ayrım da dahil olmak üzere kontakt geometrinin dili haline getirmek olacaktır. Burada sadece adi diferansiyel denklemlerin çözülmesi amacıyla X_F 'in akı çizgilerini elde etme integrasyonunun $\hat{X}_F$ 'ninkinden daha kolay olduğunu vurgulayabiliriz.

Örnek 3.2.1. Başlangıç değer problemi (3.1) i çözmek için karakteristik yöntemini kullanalım.

$$F: CR^2 \to R, \qquad F(x, y, m) = (2y - x)m + x - y$$

düzgün fonksiyonunu tekrar hatırlayalım. Bu nedenle Lie karakteristik vektör alanı

$$X_F = < x - 2y, x - y, 2m^2 - 2m + 1 >$$

ile verilirken, karakteristik vektör alanı

$$\hat{X}_F = \langle x - 2y, (x - 2y)m, 2m^2 - 2m + 1 \rangle$$

olarak verilir. X_F 'in integral eğrilerini bulmaya ilişkin adi diferansiyel denklemler sistemi, x ve y 'ye göre 1. mertebeden lineer denklemler dizisi ile ayrıştırarak, sadece m bağımlı değişkeni içeren ayrılabilir adi diferansiyel denklem ile belirlenir.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{ds} = x - y \\ \dfrac{dm}{ds} = m^2 - 2m + 1 \end{cases}$$

Adi diferansiyel denklemlerin birinci mertebeden lineer sistemlerini çözmek için standart teknikleri kullanarak $(x(0), y(0)) = (0,1)$ başlangıç koşulu ile birlikte $(x(s), y(s)) = (-2sin\, s, cos\, s - sin\, s)$ denklemi ilk iki koşulu sağlar. Şimdi m için 3. denklemi çözebiliriz. Dahası diferansiyel denklem (3.2) 'i çözmek için yeteri kadar bilgiye sahibiz. Burada

$$t = x(s) = -2sins$$

ifadesini yazarak, $I_1 = (-2,2)$ aralığındaki $s(t) = sin^{-1}(-t/2)$ ' yi yukarıdaki χ(t) olarak adlandırdığımız $s(t)$ elde ederiz. Bu nedenle önerme (3.2.1) ile

$$u(t) = y(s(t)) = \frac{\sqrt{4-t^2}}{2} + \frac{t}{2}$$

diferansiyel denklem

$$(2u-t).u' = u - t, \qquad u(0) = 1$$

ifadesinin bir çözümüdür. Burada üçüncü denklem, diferensiyel denklemlerin çözümünde önemsizdir.

Bahsettiğimiz gibi, karakteristik yöntemlerin önemi, adı diferansiyel denklemlerin belirlenmesinde tam olarak anlaşılamamaktadır. İleride birinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemlerdeki büyük önemini göstereceğiz. Bu bağlamda yöntemi sadece Lie 'nin kontakt geometrideki ilk resmi adımları olan, kontakt elemanlarının birinci mertebeden diferansiyel denklemler için nasıl doğal bir ortam sağladığını göstermek için kullandık. Burada özel bir 1-form α tarafından oynanan rol büyüktür. Özel 1-form, karakteristik yönteminde hali hazırda rol oynayan temel kontakt geometri elemanlarından sadece bir tanesidir.

3.3. Temel Konseptler

Önceki iki bölümü kontakt uzayın ilk örneği olarak adlandırılabileceğimiz kontakt elemanlarının kümesini göstererek genelleyebiliriz. Bu bölümde R^3 'ü, CR^2 kontakt elemanları kümesi biçiminde farklı olarak düşünmemize rağmen girişte belirttiğimiz gibi sadece R^3 te çalışacağız. Tüm tanımlar ve teoremler son bölümün konusu olacak biçimde daha yüksek boyutlara genellenebilir.

Kontakt geometrisindeki çalışmanın birincil amacı, aşağıda detaylandırdığımız belirli özelliklere sahip olan bir $E \subset TR^3$ düzlem alanıdır. Burada $E = ker\alpha$ 'nın Huygens prensibini formüle etme ve sınıflandırma yönteminde, dalga cephelerinin tanımlamada oynadığı rolü unutmamak gerekir.

Kesitsel eğrilikle ilgili incelemelerimizde karşılaştığımız bir düzlem alanı, düzgün vektör alanları X, Y ve $\forall p \in R^3$ için $\{X(p), Y(p)\}$, E_p 'nin bazı olacak şekilde, iki boyutlu $E_p \subset T_p R^3$ alt uzaylar ailesi olarak tanımlanır.

R^3 'de bir düzlem alanı ise sıfırdan farklı bir 1-formun çekirdeği olarak da tarif edilebilir. Biz bu bölümde sadece bu türdeki düzlem alanlarını ele alacağız. Yani bir $E \subset TR^3$ düzlem alanı verildiğinde $\forall p \in R^3$ için

$$E_p = \{X_p \in T_p R^3 \mid \alpha(p) X_p) = 0\}$$

olan sıfırdan farklı 1-form α olduğunu kabul edeceğiz. Aslında α burada sadece E düzlem alanını tanımlamaz. Herhangi bir sıfır olmayan f fonksiyonu için

$$f: R^3 \to R,\ \ ker\alpha = ker(f\alpha) \text{ dır.}$$

Tanım 3.3.1. R^3 te bir kontakt form, $\forall p \in R^3$ için $\alpha_p \wedge d\alpha_p \neq 0$ şartı sağlayan yani herhangi bir $\{X_p, Y_p, Z_p\} \subset T_p R^3$ bazı için $(\alpha_p \wedge d\alpha_p)(X_p, Y_p, Z_p) \neq 0$ olan R^3 te bir non-dejenere α, 1-formudur. α ile ilişkilendirilmiş kontakt dağılım E_a, $E_a = kera$ şeklinde tanımlı bir düzlem alanıdır. (U, α) ikilisi; U tanım kümesi ve bir α kontakt formu ile birlikte kontakt uzayı belirtir. Bu bölümde U tanım kümesini genellikle R^3olarak ele alacağız.

Örnek 3.3.1. R^3 te standart koordinatla (x, y, z) 'yi ele alalım.

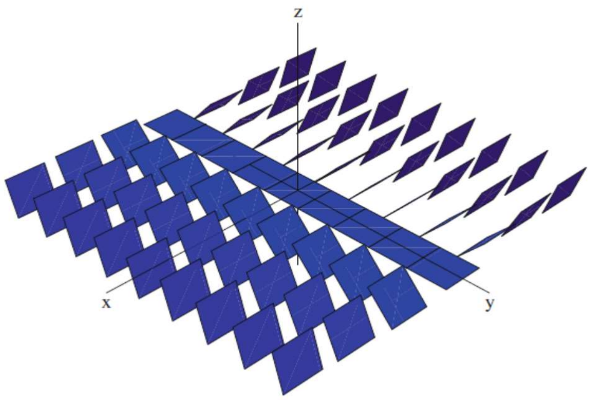
$$a_0 = xdy + dz$$

olsun. a_0'ı R^3 üzerinde standart kontakt form olarak adlandırırız. $da_0 = dx \wedge dy$ olduğundan ve böylelikle $a_0 \wedge da_0 = dx \wedge dy \wedge dz$ olduğundan a_0, R^3 'de standart hacimli 3-formdur.

Kontakt dağılımın $\{\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 0, 1, -x \rangle\}$ örneğindeki gibi bazlara sahip bir

$$E_0 = \{\langle X^1, X^2, X^3 \rangle \mid X^3 = -xX^2\}$$

olduğu görülebilir. (Şekil 3.8 'e bakınız.)



Şekil.3.8. a_0 tarafından üretilen standart kontakt yapısına yönelik kontakt dağılımı.

Örnek 3.3.2. CR^2 kontakt elemanlar kümesi, (x, y, m) koordinatlarına sahip R^3 olarak düşünülebilir. İlk iki bölümde belirttiğimiz özel bir 1-form,

$$a_1 = dy - mdx,$$

bir kontakt formdur, çünkü $a_1 \wedge da_1 = -dx \wedge dy \wedge dm$ dir. İlgili kontakt dağılım $\{\langle 1, m, 0 \rangle, \langle 0, 0.1 \rangle\}$ bazına sahip olan

$$E_1 = \{\langle X^1, X^2, X^3 \rangle \mid X^2 = mX^1\}$$

olarak verilebilir.

Önerme 2.1 'i bir parametrik $c: I \to CR^2$ eğrisinin $\dot{c}(t)$ 'nin $\forall t \in I$ için sadece kontakt dağılım halinde olması durumunda R^2 'de bir eğrinin lifti olduğunu söyleyerek yeniden ifade edebiliriz. Aynı zamanda bir $F: R^3 \to R$ düzgün fonksiyonunun, $\tilde{X}_F$ karakteristik vektör alanının $\forall p \in R^3$ için $\tilde{X}_F(p) \in (E_1)$, p ye karşılık geldiğini söyleyebiliriz. (Tanım 3.2 'ye bakınız)

Örnek 3.3.3. $a_2 = dz + xdy - ydx$ 'yi tanımlayalım.

$a_2 \wedge da_2 = 2dx \wedge dy \wedge dz$ olduğundan a_2 kontakt formu, $V_1 = \langle 1, 0, y \rangle$ ve $V_2 = \langle 0, 1, -x \rangle$ vektör alanları tarafından üretilen E_2 kontakt dağılımına sahip olan bir kontakt formdur.

Örnek 3.3.4. $\alpha_3 = (\cos z)dx + (\sin z)dy$ olsun.

$$d\alpha_3 = (\sin z)dx \wedge dz - (\cos z)dy \wedge dz$$

olduğundan ve böylece

$$\alpha_3 \wedge d\alpha_3 = -dx \wedge dy \wedge dz,$$

elde edildiğinden α_3 bir kontakt formdur. E_3 kontakt dağılımı

$$\{\langle 0,0,1\rangle, \langle -\sin z, \cos z, 0\rangle\}$$

vektör alanları tarafından üretilmektedir.

Örnek 3.3.5. Silindirik koordinatlar halinde

$$a_4 = \cos r\, dz + r \sin r\, d\theta$$

olarak gösterilen ve genellikle $r^2 = x^2 + y^2$ ve $\tan\theta = y/x$ olarak iafde edilen R^3 'te bir 1-form ele alalım. Kısmen silindirik koordinatlarda gizlenen a_4 'ün, özellikle z ekseni boyunca (r = 0 olduğunda) , düzgünlüğü ile ilgili konular vardır. Açık bir şekilde,

$$d\theta = \frac{-ydx + dy}{r^2}$$

olduğundan, dikdörtgen koordinatlar halinde yazılan,

$$a_4 = \cos r\, dz + \left(\frac{\sin r}{r}\right)(-ydx + dy)$$

$$da_4 = \left(\frac{-x \sin r}{r}\right) dx \wedge dz - \left(\frac{y \sin r}{r}\right) dy \wedge dz + \left(\cos r + \frac{\sin r}{r}\right) dx \wedge dy$$

elde ederiz. $r = 0$ durumundaki diferansiyellenebilirlik koşulları için $\frac{\sin r}{r}$ 'yi

$$f(r)\begin{cases} \frac{\sin r}{r} & r > 0 \\ 1 & r = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu yerine yazabiliriz.

a_4 'ü $\frac{\sin r}{r}$ cinsinden yazmaya devam edecek olursak, aslında f ve dolayısıyla a_4 'ün diferansiyellenebilir olduğunu ifade etmiş oluruz. Yukarıdaki hesaplamalar,

$$a_4 \wedge da_4 = \left(1 + \cos r \,.\frac{\sin r}{r}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

ifadesinin sıfırdan farklı olduğunu yani a_4 'ün bir kontakt form olduğunu gösterir. E_4 kontakt dağılımı,

$$\left\{(\cos r)\partial_z + y\left(\frac{\sin r}{r}\right)\partial_z, (\cos r)\partial_y - x\left(\frac{\sin r}{r}\right)\partial_z\right\}$$

vektör alanları ya da silindirik koordinatlar halinde,

$$\{\partial_r\ , (\ \cos r)\partial_{\ \theta} - (r\ \sin r)\partial_z\}$$

tarafından üretilmektedir.

Bu kısmın geri kalanında, bir kontakt form için non-dejenere koşulunun anlamını ve bazı olası sonuçların araştıracağız.

R^3 'te bir 3-form olarak $\alpha \wedge d\alpha$ diferansiye l-formu, fdV formundadır ve burada $dV,$ 3-formu örneğin $dx \wedge dy \wedge dz$ örneğinde olduğu gibi, $\Lambda(R^3)$ tek boyutlu vektör uzayı için bir bazdır. Bu nedenle $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ non-dejenerelik koşulu $\alpha \wedge d\alpha$ nın dV den sıfırdan farklı f fonksiyonu ile ayrıldığını göstermektedir. Bundan dolayı, $\alpha \wedge d\alpha$, α non-dejenere olduğunda R^3 'de bir "hacim formu" olarak kabul edilebilir.

Bir sabit hacimli dV formuna bakıldığında, α 'yı uygun f 'nin her yerde pozitif ya da her yerde negatif olması durumuna göre "pozitif" veya "negatif" olarak sınıflandırmak mümkündür. Örneğin, R^3 'deki standart hacimli $dx \wedge dy \wedge dz$ formuna kıyasla, Örnek 3.3.2 ve Örnek 3.3.4 'teki kontakt formlar negatiftir, buna karşılık Örnek 3.3.3 ve Örnek 3.3.5 dekiler pozitiftir. Aslında R^3 'te pozitif veya negatif olmak sadece E kontakt dağılımına bağlıdır: Herhangi bir sıfırdan farklı g fonksiyonu için α ve $g\alpha$ formlarının ikisinin de pozitif ya da negatif olduğu durumlar da olabilir.

Non-dejenerelik koşulu hakkındaki bu ön yorumlar cebirsel bir karaktere sahiptir. Fakat biz bu koşulun daha geometrik olan tarafını inceleyeceğiz. Özellikle α 'nın non-dejenerelik koşulunun ne anlama geldiğini E_α kontakt dağılımı perspektifinden irdeleyeceğiz. Bunu yaparken bir düzlem alanını "integrallenebilirlik" konusunu ele alıyoruz.

Örneğin bir $F: R^3 \rightarrow R$ düzgün fonksiyonunu düşünelim. $\forall p \in R^3$ için $dF(p) \neq 0$ olduğu varsayarsak F fonksiyonu, R^3 'de bir E_F düzlem alanını tanımlar: Herhangi bir $p \in R^3$ için Sp, F 'nin, p boyunca düz yüzeyi ve $E_F(p) = T_pS_p \subset T_pR^3$ olsun. Yani;

$$E_F = ker\ dF$$

dir. Bu örnek şu soruyu aklımıza getirir: Keyfi bir düzgün düzlem alanı $E \subset TR^3$ ile aldığımızda $\forall p \in R^3$ noktasında $E = ker\ dF$ olan düzgün bir $F: R^3 \to R$ fonksiyonu var mıdır? Eğer varsa, E 'nin F düzgün kümelerine teğet olduğu kabul edilebilir ve E 'ye integrallenebilirdir (tamamen integrallenebilir olarak da adlandırılabilir) denir. Bu terminoloji, F fonksiyonunu elde etmek için 1-form dF 'nin "integrallenebilirliği" karşılaştırmasından gelir. Aslında soru doğrudan, integral eğrilerini elde etmek için bir vektör alanının (bir “çizgi alanı”) “integralenebilirliği” ile ilgilidir.

Bu sorunun cevabı Frobenius teoremi ile verilmektedir. Teoremin ifade ederen, bir k-boyutlu $E \subset TR^n$ $(k \leq n)$ dağılımını, bir k- boyutlu düzgün değişen tanjant uzayın bir alt uzayı olarak tanımlarız. k- boyutlu dağılımı, her noktada lineer bağımsız olan, düzgün değişen k tane $X_1, X_2, \dots, X_k$ vektör alanları tarafından üretilen alt uzay olarak düşünebiliriz.

Teorem 3.3.1. (Frobenius) $E,\ R^n$ 'de k boyutlu bir dağılım olsun. Bu dağılım $\forall p \in R^n$ ve $X_p, Y_p \in E_p$ için $[X_p, Y_p] \in E_p$ olan özelliğine sahiptir. Bu durumda $E,$ aşağıdaki şekilde lokal olarak integrallenebilirdir: $\forall p \in R^n$ için bir $U_p \subset R^k$ alanı ve $p \in S = \varphi(U_p)$ ve $\forall q \in S$ için $E_q = T_q S$ için düzgün, regüler bir φ: $U_p \to R^n$ fonksiyonu vardır. Dahası, $S \cap Vp = F^{-1}(0)$ olan p ve düzgün fonksiyon F: $V_p \to R^{n-k}$ yi içeren $V_p \subset R^n$ alanı vardır. Bunun aksine, eğer E integrallenebilir ise bu durumda, $\forall$p $\in$ R^{3}ve $\forall p \in R^n$ için $X_p, Y_p \in E_p$ olan $\forall X, Y$ vektör alanları için $[X_p, Y_p] \in E_p$ dir.

$\forall X, Y \in E$ için $[X, Y] \in E$ özelliğine sahip olan bir E düzlem alanı, involütif olarak adlandırılır. Frobenius teoreminin bir sonucu olarak, E 'nin, $k = n-1$ boyutlu bir involütif dağılım olması halinde, her bir $q \in V$ için $E_q = ker\ dF(q)$ olacak şekilde p yi ve bir $F: V \to R$ düzgün fonksiyonu içeren bir V alanı vardır. Burada, $k = 2$ ve $n = 3$ olması, yani E 'nin R^3 de bir düzlem alanı olması durumunu ele alacağız.

Teorem 3.3.2. E, R^3 'de bir 1-form α 'nın çekirdeği olarak tanımlı, yani $E = \ker \alpha$ şeklinde tanımlı bir düzlem alanı olsun. $\alpha \wedge d\alpha = 0$ olası durumunda E integrallenebilirdir denir. Tersi de doğrudur.

İspat. İlk önce E 'nin integrallenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda $\ker \alpha = \ker dF$ olan $F: R^3 \rightarrow R$ fonksiyonu vardır. Bu ise $\alpha = adF$ olan düzgün, hiçbir yerde sıfır olmayan $a: R^3 \rightarrow R$ fonksiyonu mevcut olduğu anlamına gelir. Böylece

$$d\alpha = da \wedge dF$$

ve

$$\alpha \wedge d\alpha = (a\, dF) \wedge (da \wedge dF) = 0.$$

Öte yandan, $\alpha \wedge d\alpha = 0$ olduğunu varsayalım. $p \in R^3$ için p nin civarındaki her q noktasında $\{U(q), V(q)\}$, E_q nun bir bazı olacak şekilde U, V vektör alanlarını alalım. W 'de, p nin civarında tanımlı özellikle $W(q) \notin E_q$ olan bir vektör alanı olan ve TR^3 bir $\{U, V, W\}$ bazı olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha \wedge d\alpha)(U, V, W) \\ &= \alpha(U)d\alpha(V, W) - \alpha(V)d\alpha(U, W) + a(W)d\alpha(U, V) \end{aligned}$$

$U, V \in \ker \alpha$ olduğundan

$$0 = \alpha(W)d\alpha(U, V) \text{ dır.}$$

$W \notin \ker \alpha$ olduğundan bu $d\alpha(U, V) = 0$ anlamına gelir. Ancak,

$$\begin{aligned} 0 &= d\alpha(U, V) \\ &= U[\alpha(V)] - V[\alpha(U)] - \alpha([U, V]) \\ &= (\alpha[U, V]) \end{aligned}$$

dır. Bu nedenle $[U, V] \in \ker \alpha = E$ dir. $\{U, V\}$ (lokal olarak) E 'nin bir bazı olduğundan, her hangi iki $X, Y \in E$ vektör alanı için $[X, Y] \in E$ vardır. Böylece, Teorem 3.3.1. 'ye göre, E integrallenbilidir.

Düzlem alanların integrallenebiliğinin incelenmesi, kontakt formlar için non-dejenerelik koşulunun yeniden formüle edilmesini amaçlamaktadır. Dahası, bir kontakt forma ilişkin non-dejenerelik koşulunun, kontakt dağılımın "maksimum derecede integrallenemez" anlamına geldiği söylenebilir. Çünkü sadece $\alpha \wedge d\alpha$ sıfıra eşit olmamakla kalmaz aynı zamanda hiçbir yerde sıfır değildir.

E kontakt dağılımı = kerα integrallebilir değildir.

Bu bölümü tamamlamadan önce, kontakt geometride bir başka temel konuyu daha tanıtalım. Kontakt formun non-dejenerelik koşulu, kontakt dağılımına transvers olan ayrı bir vektör alanı olduğu anlamına gelir.

Önerme 3.3.1. Ω, her $p \in R^3$ için $\Omega_p \neq 0_p$ olan ve sıfırdan farklı R^3 'de bir 3-form olsun $p \in R^3$ için $(\Lambda_2)_p$, R^3 'deki p noktasında 2-formların vektör uzayı olsun. Bu durumda, $\forall p \in R^3$için Ω, $\widetilde{\Omega}_p(X_p) = i(X_p)\Omega_p$ şeklinde tanımlı bir $\widetilde{\Omega}_p: T_pR^3 \rightarrow (\Lambda_2)_p$ vektör uzayı izomorfizmi üretir. Dahası, $p \rightarrow \Omega_p$ bağıntısı düzgündür, yani X, R^3 'de düzgün bir vektör alanı ise, o zaman $\widetilde{\Omega}_p(X)$, R^3 de bir düzgün 2-formdur.

Teorem 3.3.3. α, R^3 üzerinde bir kontakt form olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip ξ vektör alanı, α reeb vektör alanı olarak adlandırılır.

- $\alpha(\xi) = 1$
- $i(\xi)d\alpha = 0.$

İspat. α kontakt formunun non-dejenere olması tam olarak, 3-form $\Omega = \alpha \wedge d\alpha$ hiçbir yerde sıfır olmadığı ve dolayısıyla Önerme 3.3.1. in hipotezlerini sağladığı anlamına gelir. $\xi = \tilde{\Omega}_p^{\;-1}(d\alpha)$ 'i tanımlayalım. Ayrıca, herhangi bir X vektör alanı için

$$\begin{aligned}(i\,(\xi)\,d\alpha)\,(X) &= (i\,(\xi)\,(i\,(\xi)\,\Omega))\,(X)\\ &= \Omega\,(\xi,\xi,X)\\ &= 0\end{aligned}$$

sağlanır ve böylece $i(\xi)d\alpha = 0$ dır.

Eğer $E = \ker a$, α nın kontakt dağılımı ise, bu durumda, $\xi \notin E$ olur. Aksi halde, bazı $p \in R^3$ için $\xi_p \in E_p$ olsaydı, $\{\xi_p, B_p^2\}$, iki boyutlu $\xi_p \subset T_pR^3$ alt uzayınını bir bazı olacak şekilde T_pR^3 ün bir $\{\xi_p, B_p^2, B_p^3\}$ bazını bulabilirdik. Ancak $i(\xi)da = 0$, α 'nın non-dejenere olması ile çelişir:

$$
\begin{aligned}
0 &= (\alpha \wedge d\alpha)\big(\xi p, B_p^2, B_p^3\big) \\
&= \alpha(\xi p)d\alpha\big(B_p^2, B_p^3\big) - \alpha\big(B_p^2\big)d\alpha\big(\xi p, B_p^3\big) + \alpha(B_p^3)d\alpha(\xi p, B_p^2).
\end{aligned}
$$

Böylece, her p için , $\xi \notin E$ dir.

ξ 'un ikinci özelliğini göstermek için, $\forall p \in R^3$ olmak üzere, E_p'de herhangi iki lineer bağımsız X_p, Y_p vektörlerini alalım. $\{\xi_p, X_p, Y_p\}$ kümesi T_pR^3 'nin bir bazı olduğundan, önceki paragraftakine benzer bir hesaplama ile

$$d\alpha(X_p, Y_p) \neq 0$$

dır.

$$d\alpha\big(X_p, Y_p\big) = 1$$

olduğunu varsayarsak, gerekmesi halinde $\alpha = d\alpha(X_p, Y_p)$ eşitliğini kullanarak ve X_p yerine $1/aX_p$ alarak,

$$
\begin{aligned}
(\Omega_p)\ (\xi_p, X_p, Y_p) &= (i(\xi_p)\ \Omega_p)\ (X_p, Y_p) \\
&= d\alpha_p(X_p, Y_p) \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece

$$
\begin{aligned}
1 &= (\alpha \wedge d\alpha)\big(\xi_p, X_p, Y_p\big) \\
&= \alpha\xi_p d\alpha(X_p, Y_p) - \alpha(X_p)d\alpha(\xi_p, Y_p) + \alpha(Y_p)d\alpha(\xi_p, X_p) \\
&= \alpha(\xi_p) \quad \text{çünkü } X_p, Y_p \in E_p \text{ ve } d\alpha(X_p, Y_p) = 1.
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır. Son olarak, bu şekilde tanımlanan ξ 'un bir tek olduğunu göstermek için ξ' 'nin $\alpha(\xi') = 1$ ve $i(\xi')d\alpha = 0$ özellilerini sağlayan bir vektör alanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$i(\xi')(\Omega) = i(\xi')(\alpha \wedge d\alpha)$$

$$= \alpha\,(\xi')d\alpha - \alpha \wedge i(\xi')d\alpha$$
$$= d\alpha.$$

ve böylece $\tilde{\Omega}_p(\xi') = \tilde{\Omega}_p$ elde edilir. Fakat $\tilde{\Omega}_p$ birebir olduğu için, $\xi' = \xi$ dir.

Yukarıda geçen inceleme ve ispatlarda bir kaç kez, bir α kontakt formun ξ reeb vektör alanının, E_a kontakt dağılımına transvers olduğunu ve ξ 'nin E_a 'nın bir bazı ile birlikte, TR^3 için bir baz oluşturduğunu göstermiş olduk.

Örneğin, R^3 'deki $\alpha_0 = xdy + dz$ standart kontakt formuna ilişkin reeb vektör alanı, $\xi_0 = \partial/\partial z$ dir. Reeb vektör alanının kontakt dağılımına transvers olmasının doğrudan bir sonucu, her vektör alanının bir "dikey" ve "yatay" kısma ayrıştırılabilir olması gerçeğidir.

Önerme 3.3.2. α, R^3 'de, ξ reeb vektör alanına ve E kontakt dağılımına karşılık gelen bir kontakt form olsun. Bu durumda, R^3 üzerindeki her düzgün X vektör alanı,

$$X = f\xi + H(X),$$

şeklinde tek türlü olarak yazılır. Burada, f: $R^3 \to R$ düzgün bir fonksiyondur ve $H(X)$ $\forall p \in R^3$ için $H_p(X) \in E_p$ olacak şekilde düzgün bir vektör alanıdır.

İspat. Herhangi bir $p \in R^3$ için, $(p) = f\alpha(p)(Xp)$ olsun. f fonksiyonununn tanımından, α ve X düzgün olduğundan olayı f de düzgün olur. $H(X) = X - f\xi$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $H\,(X) \in E$ 'dir. F 'nin tanımından tek türlü olduğunu gösterelim: $H(X)$, X 'in ''yatay bileşeni'' olarak adlandırılır. Bir X vektör alanı $H\ (X) = 0$ eşitliğini sağladığından ve reeb vektör alanına paralel olduğundan, dikey olarak adlandırılır. Benzer şekilde, bir vektör alanı için $X = H(X)$ tir ve yatay olarak adlandırılır.

Reeb vektör alanının esasında α kontakt formu açısından tanımlandığına ve kontakt dağılımı açısından tanımlanmadığına dikkat etmek gerekir. Bilhassa, hiçbir yerde sıfır olmayan bir $f: R^3 \to R$ fonksiyonu için α ve $f\alpha$ kontakt formları aynı kontakt dağılımına fakat farklı reeb vektör alanlarına sahiptir. Bu anlamda, reeb vektör alanı aslında, kontakt geometrinin başlı başına bir amacı değil, "kontakt dinamiğin" bir amacıdır.

3.4. Kontakt Difeomorfizm

Bu bölüm, tanjant demeti üzerindeki bir tensör alanı tarafından tanımlanan bir yapının geometrini incelemek üzerinedir. Önceki bölümde, tüm difeomorfizmler dizisinden özellilkle izometrileri- yani Riemann metrik yapısını koruyanları seçtik. İzometriler, metrik tensör g çinisinden φ bir difeomorfizmi ile $\varphi^* g = g$ biçiminde tanımlanmıştır. Kontakt geometriye ilişkin durum biraz karışıktır. Çünkü kontakt geometrinin esası olarak belirlediğimiz eleman α kontakt formu değil, kontakt form ile bağlantılı olan kontakt dağılımdır. Bu nedenle, iki özel tip difeomorfizm arasına dağılımı koruyanlar ve kontakt formun kendisini koruyanlar olarak ayrım yapacağız. Bu bölümün amaçlarından biri, bunlar arasındaki farklılıkları vurgulamaktır.

Tanım 3.4.1. $U_1, U_2 \subset R^3$ tanım kümeleri olmak üzere, (U_1, a_1) ve (U_2, a_2) kontakt uzaylarını ve $\varphi: U_1 \to U_2$ diffeomorfizmini ele alalım. Eğer; $\varphi^* a_2 = f a_1$ olacak şekilde hiçbir yerde sıfır olmayan bir $f: U_1 \to R$ fonksiyonu varsa φ 'ye bir kontakt difeomorfizm denir ve $\varphi: (U_1, a_1) \to (U_2, a_2)$ şeklinde yazılır. Bu tanımı açıklamadan önce $\varphi^* a_2 = f a_1$ durumunun özünü ispatlayan bir önerme vereceğiz.

Önerme 3.4.1. $U_1, U_2 \subset R^3$ tanım kümeleri için E_1 ve E_2 kontakt dağılımları ile bağlantılı (U_1, a_1) ve (U_2, a_2) kontakt uzaylarını ele alalım. $\varphi: U_1 \to U_2$ bir diffeomorfizmi

$$\varphi_* (E_1) = E_2$$

oluyorsa o zaman $\varphi: (U_1, a_1) \to (U_2, a_2)$ bir kontakt difeomorfizmdir.

İspat. İlk önce $\varphi: (U_1, a_1) \to (U_2, a_2)$ bir kontakt difeomorfizm olduğunu varsayalım. Böylece $\varphi^* a_2 = f a_1$ olacak şekilde hiç bir yerde sıfır olmayan bir $f: U_1 \to R$ fonksiyonu vardır. $p \in U_1$ için $Y_{\varphi(p)} \in (E_2)_{\varphi(p)}$ ve $(\varphi_*)_p(X_p) = Y_{\varphi(p)}$ olacak biçimde $X_p \in (E_1)_p$ alalım. $(\varphi_*)_p: T_p U_1 \to T_p U_2$ bir izomorfik vektör uzayıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= a_2(\varphi(p))\left(Y_{\varphi(p)}\right) \\ &= a_2(\varphi(p))\left((\varphi_*)_p(X_p)\right) \end{aligned}$$

$$= (\varphi^* a_2)(p)(X_p)$$
$$= f(p) a_1(p)(X_p)$$

şeklindedir. Diğer bir deyişle f hiç bir yerde sıfır olmadığından, $X_p \in (E_1)_p$ olur ve böylece $Y_{\varphi(p)} \in (\varphi_*)_p (E_1)_p$ elde edilir. Bu durum bize $E_2 \subset \varphi_*(E_1)$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $X_p \in (E_1)_p$ alalım. O halde

$$a_2(\varphi(p))\left((\varphi_*)_p(X_p)\right) = (\varphi^* a_2)(p)(X_p)$$
$$= f(p) a_1(p)(X_p)$$
$$= 0$$

böylelikle $(\varphi_*)_p(X_p) \in (E_2)_{\varphi(p)}$ olur.

$\varphi(E_1) \subset E_2$ olduğundan dolayı, bir önceki gösterimle birlikte $\varphi_* \, (E_1) = E_2$ 'dir.
Tersine $\varphi_*(E_1) = E_2$ olacak şekilde φ 'nin bir difeomorfizm olduğunu varsayalım. ξ_1, a_1 ile bağlantılı olan reeb vektör alanı olsun. $f: U_1 \to R$ fonksiyonu

$$f(p) = a_2(\varphi(p))\big((\varphi_*)_p((\xi_1)_p\big) = (\varphi^* a_2)(p)((\xi_1)_p)$$

olarak tanımlayalım. İlk olarak f 'nin hiçbir yerde sıfır olmadığını bildiğimize göre, eğer $f(p) = 0$ ise $(\varphi_*)_p(\xi_1)_p \in (E_2)_{\varphi(p)}$ dir ve böylelikle $(\xi_1)_p \in E_1$ olur. Çünkü varsayımımızdan dolayı $E_2 \subset \varphi_*(E_1)$ve φ_* bir izeomorfizmdir. Bu ise $a_1(\xi_1) = 1$ olması ile çelişir.

Şimdi f in $\varphi^* a_2 = f a_1$ yapısını yani φ 'nin bir kontakt difeomorfizmdir olduğunu gösterelim. $\forall p \in U_1$ için $X_p \in T_p U_1$ alalım. Önerme 3.3.2. de verileni yazarsak $V_p = \left(a_1(p)(X_p)\right)(\xi)_p$ ve $H_p = X_p - V_p \in (E_1)_p$ olmak üzere

$$X_p = V_p + H_p$$

dir. Burada φ^* ve α 'nın lineerliğinden

$$(\varphi^* \alpha_2)(p)(X_p) = \alpha_2(\varphi(p))\,((\varphi_*)_p(X_p))$$
$$= \alpha_2((\varphi(p))((\varphi_*)_p(V_p) + (\varphi_*)_p(H_p))$$
$$= \alpha_2((\varphi(p))((\varphi_*)_p(V_p)) + \alpha_2((\varphi(p))((\varphi_*)_p(H_p))$$

$$= \alpha_2((\varphi(p))\left((\varphi_*)_p(V_p)\right) \text{ çünkü } \varphi_*(E_1) \subset E_2$$

$$= \left(\alpha_1(p)(X_p)\right).\alpha_2(\varphi\ (p))((\varphi_*)_p(\xi_1)_p)$$

$$= f(p).(\alpha_1(p)(X_p)).$$

elde edilir. Dolayısıyla $\varphi^*\alpha_2 = f\alpha_1$ ve önermesi ispatlanmış olur.

Aşağıdaki tanım bu metinde gördüğümüz diğer yapı-koruyucu diffeomorfizmlere daha yakın olan daha da kısıtlayıcı "özel" bir tür difeomorfizmdir.

Tanım 3.4.2. $U_1, U_2 \subset R^3$ tanım kümeleri olmak üzere, $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ bir difeomorfizm ve (U_1, a_1), (U_2, a_2) kontakt uzaylar olsun. Bu durumda eğer $\varphi^* a_2 = a_1$ ise φ bir kesinlikle (strictly) kontakt diffeomorfizmidir.

$f = 1$ koşulu ile birlikte Tanım 3.4.1. e göre, her kesinlikle (strictly) kontakt diffeomorfizm, bir kontakt diffeomorfizmdir ve dolayısıyla kontakt dağılımı korur. Ayrıca, aşağıdaki önerme, kesinlikle (strictly) kontakt diffeomorfizmlerin, reeb vektör alanını koruduğunu göstermektedir.

Önerme 3.4.2. (U_1, a_1) ve (U_2, a_2), ikilileri reeb vektör alanları ξ_1 ve ξ_2 karşılık gelen iki kontakt uzayı olsun. Eğer $\varphi_*\xi_1 = \xi_2$ *ise,* φ*:* $U_1, a_1) \rightarrow (U_2, a_2)$ kontakt diffeomorfizmi kesinlikle (strictly) kontakttır.

İspat. φ 'nın kesinlikle (strictly) kontakt olduğunu varsayalım. Bu durumda $\varphi^*\alpha_2 = a_1$ olur. Buradaki amacımız $a_2(\varphi_*\xi_1) = 1$ ve $i(\varphi_*\xi_1)da_2 = 0$ olduğunu göstermek olacaktır. Teorem 3.3.3. ve $\xi_2 = \varphi_*\xi_1$ eşitliği ile reeb vektör alanının tek türlü olduğunu göstermiştik. Bu nedenle, ilk özellik yeterince açıktır:

$$\begin{aligned} a_2(\varphi_*\xi_1) &= (\varphi_* a_2)(\xi_1) \\ &= a_1(\xi_1) \quad \text{Tanım 3.4.1 den} \\ &= 1 \qquad\quad \text{Teorem 3.3.3.den.} \end{aligned}$$

şekilnde yazılır.

İkinci koşulu doğrulamak amacıyla, $p \in U_1$ için, herhangi bir $W_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}U_2$ 'yi alalım. φ bir difeomorfizm olduğundan, $(\varphi_*)_p(V_p) = W_{\varphi(p)}$ özelliğinde $V_p \in T_pU_1$ tanjant vektörü vardır. Böylece

$$
\begin{aligned}
\left(i\left((\varphi_*)_p(\xi_1)_p\right)da_2\left(\varphi\,(p)\right)\right)\left(W_{\varphi(p)}\right) &= da_2\left(\varphi\,(p)\right)\left((\varphi_*)_p(\xi_1)_p, W_{\varphi(p)}\right) \\
&= da_2(\varphi\,(p))((\varphi_*)_p(\xi_1)_p, (\varphi_*)_p((V_p))) \\
&= (\varphi^* da_2)\,(p)\,(\xi_1)_p, V_p) \\
&= d(\varphi^* a_2)(p)\left((\xi_1)_p, V_p\right) \\
&= da_1(p)\left((\xi_1)_p, V_p\right) \\
&= 0 \qquad \text{(teorem 3.3.3 den)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sondan bir önceki eşitliğe göre, φ 'nın kesinlikle (strictly) kontakt olduğu varsayımına doğrularız. Aynı zamanda bu ξ_2, a_2 için bir reeb vektör alanı olacak şekilde $\varphi_*\,\xi_1 = \xi_2$ olduğununu gösterir. Şimdi φ 'nın bir kontakt diffeomorfizmi olduğunu yani hiçbir yerde sıfır olmayan $f: U_1 \to R$ fonksiyonu için $\varphi^* a_2 = f a_1$ olduğunu varsayalım. Ek olarak, $\varphi_*\xi_1 = \xi_2$varsayımı altında $\forall p \in U_1$ için $f(p) = 1$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bu durumda $\forall p \in U_1$ için

$$
\begin{aligned}
f(p) &= i((\xi_1)_p)(f(p).\alpha(p)) \\
&= i((\xi_1)_p)\,(\varphi^* a_2)(p) \\
&= \varphi^*(i(\varphi_*(\xi_1)_p)\,a_2)(p) \\
&= \varphi^*(i\,(\xi_2)\,a_2\,)(p) \qquad \text{varsayım ile} \\
&= \varphi^*(1)(p) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

olduğunu ele alalım. Daha önce de belirttiğimiz gibi, kontakt geometride çalışmanın ana amacı kontakt form değil kontakt dağılımıdır. Bu nedenle, kendisini koruyan kesinlikle (strictly) kontakt difeomorfizmler, en önemli yapı-koruyan difeomorfizmler değildir. Buna rağmen, kontakt formun sunumumuzdaki önemli rolü ve özellikle de reeb vektör alanının önemi nedeniyle, bölüm boyunca daha kısıtlayıcı kesinlikle (strictly) kontakt difeomorfizmler yer alacaktır. Şimdi kontakt difeomorfizm örnekleri verelim.

Örnek 3.4.1. $a_0 = xdy + dz$ ve $a_1 = dy - mdx$, daha önce tanımladığımız kontakt formlar olsun. Bu durumda,

$$\varphi_1\,(x, y, z) = (y, z, -x)$$

şeklinde verilen $\varphi_1 : (R^3, \alpha 0) \to (R^3, a_1)$ dönüşümü $\varphi_1^* a_1 = a_0$ eşitliğini sağlar. Dolayısıyla φ_1 bir kesinlikle (strictly) kontakt difeomorfizmdir. Burada φ_1 'in lineer olduğuna dikkat etmeliyiz.

Örnek 3.4.2. $a_0 = xdy + dz$ ve $a_2 = dz + xdy - ydx$, daha önce tanımlanan kontakt formlar olsun. $\varphi_2 : (R^3, a_0) \to (R^3, a_2)$

$$\varphi_2\,(x, y, z) \;=\; (x, \frac{y}{z}, z + \frac{xy}{2})$$

şeklinde verilmiş olsun. Önceki örnekte olduğu gibi, $\varphi_2^* a_2 = a_0$ olduğundan, φ_2 bir kesinlikle (strictly) kontakt difeomorfizmdir.

Örnek 3.4.3. $a_0 = xdy + dz$, R^3 'de standart kontakt form olmak üzere, (R^3, a_0)'ı göz önüne alalım. $a = (a_1, a_2, a_3)$, bir sıralı üçlü sabitler olacak şekilde $T_a : (R^3, a_0) \to (R^3, a_0)$ difeomorfizmini

$$T_a(x, y, z) = (x \,+\, a_1, y + a_2, z + a_3 - a_1 y)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda T_a bir (strictly) kesinlikle kontakt difeomorfizmdir. Bu tür difeomorfizmleri, “kontakt ötelemeler” olarak adlandırırız. (strictly) Kesinlikle kontakt difeomorfizmler, kontakt kümesinden Riemann kümesindeki izometrilere formal benzeşimdir: Yani yapı tensörünü koruyan difeomorfizmlerdir. İki kontakt uzayı arasında bir (strictly) kesinlikle kontakt dönüşüm olduğunda, sadece karşılıklı kontakt dağılımlara sahip olmaları anlamında, kontakt yapıları “aynı” olmakla kalmaz, aynı zamanda karşılıklı reeb vektör alanlarına da sahip olurlar. Yukarıdaki örnekler Örnek 3.3.1 ila 3.3.3 teki kontakt formların aslında, karşılık gelen reeb vektör alanlara sahip olan izomorfik kontakt yapıları tarif ettiğini göstermektedir.

İzometrilerde olduğu gibi, (strictly) kesinlikle kontaktlık koşulu, diffeomorfizmin bileşen fonksiyonlarının, bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri sistemini sağladığını anlamına gelir. Örneğin, (R^3, a_0) standart kontakt uzayını yani $a_0 = xdy + dz$ 'ı alalım. $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ bileşen fonksiyonu ile birlikte bir $\varphi: (R^3, a_0) \to (R^3, a_0)$(strictly) kesinlikle kontakt difeomorfizm olsun. Bu durumda $\varphi_i: R^3 \to R$ fonksiyonu

$$\begin{cases} \varphi^1 \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial x} = 0, \\ \varphi^1 \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial y} = x, \\ \varphi^1 \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial z} + \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial z} = 1. \end{cases}$$

denklem sistemini sağlar. Kontakt geometrinin inceliğinin bir kısmı, reeb vektör alanının, kontakt form ile ilgili ancak kontakt dağılımla rastlantısal olan "ekstra" bir yapı olarak değerlendirildiği gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Kontakt dağılımı koruyan ancak reeb vektör alanını koruma zorunluluğu olmayan kontakt difeomorfizmler, bu nedenle kontakt geometride uygun yapı-koruyucu difeomorfizmler olarak görülür.

Örnek 3.4.3. α_0, R^3 de standart kontakt form ve λ sıfırdan farklı bir reel sayı olsun.

$$D\lambda: (R^3, a_0) \to (R^3, a_0, \quad D_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $D_\lambda^* a_0 = \lambda^2 a_0$ olduğundan D_λ bir kontakt difeomorfizmdir. $\lambda \neq 1$ olduğunda, D_λ 'nın (strictly) kesinlikle kontakt olmadığına dikkat edilmelidir.

Tüm kontakt difeomorfizmler kümesi üzerinde aşağıdaki teorem ile verilen cebirsel bir yapı vardır.

Teorem 3.4.1. Bir $U \subset R^3$ için *(U, a)* ikilisi $\mathrm{E_a} = \ker\alpha$ kontakt dağılımına sahip olan bir kontakt uzayı olsun ve $\mathrm{Diff(U, E_a)}$, (U, α) 'dan kendisine, tüm kontakt diffeomorfizmlerin kümesi olsun. Bu durumda:

1. φ_1, $\varphi_2 \in \mathrm{Diff}\,(\mathrm{R^3, E_a})$ ise, bu durumda $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \mathrm{Diff(R^3, E_a)}$,

2. Birim dönüşüm $\mathrm{Id} \in \mathrm{Diff}\,(\mathrm{R^3, E_a})$,

3. $\varphi \in \mathrm{Diff(R^3, E_a)}$ ise, bu durumda, $\varphi^{-1} \in \mathrm{Diff(R^3, E_a)}$.

Başka bir deyişle, $\mathrm{Diff(R^3, E_a)}$ bir gruptur.

İspat. İfade (1) ve (3); bir $\varphi: U \to U$ diffeomorfizmi için, bir $f: U \to R$ fonksiyonu için ve U üzerindeki bir tek-form α için,

$$\varphi^*(f\alpha) = (f \circ \varphi)(\varphi^*\alpha)$$

olduğundan kaynaklanır. Özellikle, $(\varphi \circ \varphi^{-1})^*\ \alpha = \alpha$ olduğundan,

$$(\varphi^{-1})^*\alpha = \left(\frac{1}{f \circ \varphi^{-1}}\right)\alpha$$

elde ederiz. İfade (2), tam olarak $(Id)^*\alpha = \alpha$ olduğu gerçeğini ifade etmektedir.

Aşağıdaki soru kontakt diffeomorfizmleri bağlamında doğal olarak ortaya çıkmaktadır: İki kontakt uzay olması halinde, bunların aralarında bir kontakt diffeomorfizmi olur mu? Başka bir deyişle, iki kontakt uzayın ne zaman aynı olduğunu nasıl belirleyebiliriz? Örneğin, Örnek 3.4.2. 'nın kontakt formu tarafından tanımlanan kontakt yapı, $\alpha 0 = xdy + dz$ tarafından tanımlanan standart kontakt yapı ile aynı değildir. 1983 yılında Bennequin tarafından belirtilen bu gerçek, kontakt geometride bir dönüm noktası haline geldi ve "sıkı" ve "aşırı bükülmüş kontakt yapıları arasındaki ayrım da dahil olmak üzere alana zengin bir doku kazandırdı.

3.5. Kontakt Vektör Alanları

Şimdi, "sonsuz küçük diffeomorfizmleri" Killing vektör alanlarının Riemann kümesinde "sonsuz küçük izometriler" olarak ele alınmasına şeklinde inceleyeceğiz. Bunu yaparken, kontakt formda non-dejenerelik koşulunun önemini tekrar göreceğiz. Ayrıca, verilen bir (U, α) kontakt uzayı için, pratikte her zaman etkili olmasa da prensipte ilginç kontakt diffeomorfizm örnekleri üreten bir alanda geliştireceğiz.

Tanım 3.5.1. (U, α) bir kontakt uzay olsun ve $X, U \subset R^3$ 'de düzgün bir vektör alanı olsun. Eğer bir düzgün $g: U \to R$ fonksiyonu için $\mathcal{L}_X\alpha = g\alpha$ ise bu durumda X, bir kontakt vektör alanıdır. Eğer $\mathcal{L}_X\alpha = 0$ ise X 'in (strictly) kesinlikle kontakt vektör alanı olduğunu söyleriz.

Kontakt vektör alanlarını, örnek oluşturma kolay olacak şekilde nasıl karakterize edileceğini biraz sonra göstereceğiz. Ancak, bir örneği hemen verelim.

Örnek 3.5.1. (U,α) ikilisi ξ reeb vektör alanına sahip olan bir kontakt uzay olsun. Bu durumda ξ, (strictly) kesinlikle bir kontakt vektör alanıdır:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi}\alpha &= i(\xi)d\alpha + d(i(\xi)\alpha) \\ &= 0 + d\,(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teorem 3.5.1. X, (U,α) kontakt uzayı üzerinde düzgün $g: U \to R$ fonksiyonu için $\mathcal{L}_X\alpha = g\alpha$ şartını sağlayan bir kontakt vektör alanı olsun. φ_t , X tarafından üretilen bir akış olsun. Bu durumda, φ_t yi tanımlayan bütün t ler için φ_t nin bir kontakt difeomorfizmdir. Eğer X bir (strictly) kesinlikle kontakt vektör alanı ise, bu durumda, φ_t de bir tam (strictly) kontakt diffeomorfizmdir.

İspat. İlk ifade, aynı argümanın biraz değiştirilmesinden kaynaklanır.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,(\varphi_t^*a) &= \varphi_t^*(\mathcal{L}_X\alpha\,) \\ &= \varphi_t^*(g\alpha) \\ &= (g\circ\varphi_t)\,(\varphi_t^*a). \end{aligned}$$

elde ederiz. Bunu koordinatlar halinde ifade etmek, ayrılabilir birinci dereceden adi diferansiyel denklemlerden oluşan bir sistemi gösterir ve buradan

$$f(t,p) = exp\left(\int_0^t (g\circ\varphi_s)(p)ds\right)$$

olacak şekilde $\varphi_t^*a = fa$ sonucuna ulaşılır. Bu teorem ayrıca kontakt vektör alanlarının "sonsuz küçük diffeomorfizmleri" olduğunu da kanıtlar.

Kontakt vektör alanları ile ilgili temel bir gerçek, α 'ya ilişkin non-dejenerelik koşulunun aşağıda ifade edilen sonucudur. Burada, kontakt vektör alanlarının $\chi(R^3,\alpha)$ uzayının, nokta tabanlı tanjant vektörlerde toplama işlemi ve düzgün reel değerli fonksiyonlar ile skaler çarpım işlemi ile birlikte bir vektör uzayı olduğunu göz önünde bulundurmalıyız.

Teorem 3.5.2. (U, α); $U \subset R^3$ tanım kümeli bir kontakt uzay olsun. $\chi(U, \alpha)$; (U, α) üzerinde kontakt vektör alanlarının vektör uzayı ve $C^\infty(U)$, U üzerinde düzgün reel değerli fonksiyonların vektör uzayı olsun. Bu durumda,

$$\Phi(X) = \alpha(X)$$

şeklinde verilen $\Phi: \mathcal{X}(U, \alpha) \to C^\infty(U)$ dönüşümü, bir vektör uzayı izomorfizmidir.

İspat. Φ dönüşümünün lineer bir dönüşüm olması, α 'nın lineer olmasının bir sonucudur. Φ 'nın bire bir olduğunu göstermek için, X kontakt vektör alanını alalım ve $\Phi(X) = 0$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{L}_X\alpha = g\alpha$ olacak şekilde $g: U \to R$ düzgün bir fonksiyonu vardır. İlk önce $g \equiv 0$ olduğunu göstereceğiz. ξ, α ile bağlantılı reeb vektör alanı olsun. Varsayıma göre,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\alpha &= i\,(X)d\alpha + d\,(i\,(X)\alpha) \\ &= i\,(X)d\alpha + d(0) \\ &= i(X)d\alpha,\end{aligned}$$

dir ve böylece

$$\begin{aligned}g &= g \cdot i(\xi)\alpha, \text{çünkü} \quad \alpha\,(\xi) = 1 \\ &= i(\xi)(g\alpha) \\ &= i(\xi)(\mathcal{L}_X\alpha) \\ &= i(\xi)(i(X)d\alpha) \\ &= -i(X)(i(\xi)d\alpha) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Önceden yapılan iki hesaplama aslında $\Phi(X) = 0$ ise, $i(X)d\alpha = 0$ olduğunu göstermektedir. Buradan

$$\begin{aligned}i(X)(\alpha \wedge d\alpha) &= (\alpha(X))d\alpha - \alpha \wedge i(X)d\alpha \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edildi. Böylece α 'nın non-dejenerelik özelliği nedeniyle, $X = 0$ dır. Bundan dolayı, Φ bire birdir. Φ 'nın örten olduğunu göstermek için, aşağıdaki lemmayı vereceğiz.

Lemma 3.5.1. (U, α) ikilisi, ξ reeb vektör alanına ve $E = ker\alpha$ kontakt dağılımı ile bağlantılı bir kontakt uzay olsun. B; $\beta(\xi) = 0$ özelliğine sahip olan β_1 1-formlar kümesi (bu tür 1-formlar yarı-bazlı olarak adlandırılır) olsun. Bu durumda,

$$A(H) = i(H)d\alpha$$

biçiminde verilen $A : E \to B$ dönüşümü, $\forall p \in U$ için bir $E_p \to \beta_p$ vektör uzayı izomorfizmini üretir.

İspat. β_p p noktasındaki yarı-bazlı (semi basic) 1-formlar kümesinin, her $p \in U$ için Λ_1 (T_pU) uzayının bir alt vektör uzayıdır. A dönüşümü iç çarpım özelliğinden dolayı lineerdir. Ayrıca, her X vektör alanı için,

$$\begin{aligned}(i(X)d\alpha)(\xi) &= -i(X)(i(\xi)d\alpha)\\ &= 0 \quad \text{(reeb alanı tanımına göre)}\end{aligned}$$

vardır ve özellikle, $H \in E$ ise, $A\ (H) \in \beta$'dir.

A 'nın bire bir olduğunu göstermek için her $H \in E$ için $A(H) = 0$ olduğunu varsayalım. Φ 'nın bire bir olduğuna dair yukarıdaki ispatta, $\alpha(H) = 0$ ve $i(H)d\alpha = 0$ koşullarının, α 'nın non-dejenere olması ile birlikte, $H = 0$ olduğunu ifade ettiklerini gösterdik. Fakat H yataydır, bu yüzden tanım gereği $\alpha\ (H) = 0$ ve varsayıma göre $A\ (H) = 0$ olur. Böylece $i\ (H)\ d\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $H = 0$ dır ve A bire birdir. A 'nın örten olduğunu göstermek için, $\beta(\xi) = 0$ olacak şekilde $\beta \in B$ alalım. Bu, α nın non- dejenere olmasının, $\forall p \in U$ için n $Tp\ (U)$ 'nun bir $\{B_1(p), B_2(p), B_3(p)\}$ bazı ve $d\alpha(B_2, B_3) = 1$ olacak şekilde $B_1 = \xi$ ve $B_2, B_3 \in E$ olan $\{B_1, B_2, B_3\}$ vektör alanlarının var olmasını garantilediği bir örnektir.

Bu durumda, $d\alpha(B_2, B_3) = 1$ olacak şekilde $B_1 = \xi$ ve $B_2, B_3 \in E$ olan bir $\{B_1, B_2, B_3\}$ bazı için, $b_2 = \beta(B_3)$ ve $B_3 = -\beta(B_2)$ özelliğine sahip $H_\beta = b_2B_2 + b_3B_3$ ü tanımlayalım. Bu yapıda $H\beta \in E$ dir. Ayrıca, herhangi bir $V = v_1B_1 + v_2B_2 + v_3B_3$ için

$$(i(H\beta)d\alpha)(V) = d\alpha(H\beta, V)$$
$$= (b_2v_3 - b_3v_2)d\alpha(B_2, B_3)$$
$$= v_2\beta\,(B_2) + v_3\beta(B_3)$$
$$= \beta\,(V) \qquad \text{çünkü varsayım gereği}$$
$$\beta(B_1) = 0$$

elde ederiz. Bu yüzden $A(H\beta) = \beta$ ve dolayısıyla A, örtendir.

Şimdi Teorem 3.4.2. ün ispatına geri dönecek olursak, $\beta_f = \xi\,[f]\alpha - df$ 1-formunu göz önünde bulundurarak, $f \in C^\infty(U)$ alalım. β_f tanımından $\beta_f(\xi) = 0$ dır. Dolayısıyla Lemma 3.4.1. notasyonunda olduğu gibi yani $d\alpha H_f = A^{-1}(\beta_f)$, $i(H_f)d\alpha = \beta_f$ olacak şekilde

$$X_f = f\xi + X_f$$

tanımlayabiliriz. Bu durumda

$$i\,(Xf)\,\alpha = \alpha\,(f\xi) + \alpha\,(Hf)$$
$$= f\alpha\,(\xi), \text{çünkü } Hf \in E$$
$$= f$$

elde ederiz. Ayrıca, X_f 'nin bir kontakt vektör alanı oluğundan

$$\mathcal{L}_{X_f}a = i(X_f)d\alpha + d\big(i(X_f)\alpha\big)$$
$$= i(f\xi)d\alpha + i(H_f)d\alpha + d(f)$$
$$= \xi[f]\alpha - df + df$$
$$= \xi\,[f]\,\alpha,$$

dir ve böylece, $g = \xi\,[f]$ için $\mathcal{L}_{X_f}a = ga$ elde edilir.

$X_f = \Phi^{-1}(f)$ kontakt vektör alanı, f 'nin kontakt gradyantı olarak adlandırılır. Aşağıdaki sonuç, Teorem 3.4.3. ün ispatından hemen sonra ortaya çıkar.

Sonuç 3.5.1. (U,α) ikilisi, ξ reeb alanına sahip olan bir kontakt uzay olsun. X_f 'nin, bir $f: U \to R$ düzgün fonksiyonunun kontakt gradyantı olduğunu varsayalım. Bu durumda, X_f, bir kontakt vektör alanıdır ve

$$\xi[f] = 0$$

şeklindedir. Bu bölümün ana fikirlerini göstermek için birkaç örnek vereceğiz.

Örnek 3.5.1. (R^3,α); ξ reeb vektör alanına sahip olan bir kontakt uzay olsun ve $f: R^3 \to R$, $\forall p \in R^3$ için $f\,(p) = c$ olan bir sabit fonksiyon olsun. Bu durumda, X_c kontakt gradyantı, $X_c = c\xi$ biçiminde verilir. Sonuç 3.6.1. 'ye göre özellikle, $f \equiv 1$, $X_f = X_1 = \xi$ olduğunda, X_c, tam kontaktır. Ayrıca, $f \equiv 0$, $X_f = X_0 = 0$ olduğunda; X_0 'ın akının, özdeşlik diffeomorfizmidir.

Örnek 3.5.2. (R^3, a_0); $a_0 = xdy + dz$'ye sahip olan standart kontakt uzay olsun, ξ reeb vektör alanı, $\frac{\partial}{\partial z}$ ye eşit olsun ve $X = \langle X^1, X^2, X^3\rangle$ şeklinde yazmakla,

$$\begin{aligned} A(X) &= i(X)da_0 \\ &= i(X)(dx \wedge dy) \\ &= -X^2dx + X^1dy. \end{aligned}$$

Dolayısıyla bir $\beta = b_1dx + b_2dy$ yarı bazlı 1-form için şunu elde ederiz.

$$A^{-1}(\beta) = \langle b_2, -b_1, xb_1\rangle\,.$$

Bilhassa, bir $f: R^3 \to R$ düzgün fonksiyonu için, β_f yarı bazlı form,

$$\begin{aligned} \beta_f &= \xi[f]\alpha - df \\ &= f_z(xdy + dz) - (f_xdx + f_zdy + f_zdz) \\ &= -f_xdx + (xf_z - f_y)\,dy \end{aligned}$$

şeklinde verilir,

$$H_f = A^{-1}(\xi[f]\alpha - df) = \langle -f_y + xf_z, f_x, -xf_x\rangle$$

Bu hesaplamalar, a_0 standart kontakt formu için, kontakt gradyantın

$$X_f = f\xi + H_f = \langle xf_z - f_y, f_x, f - xf_x\rangle \qquad (6.8)$$

tarafından verildiğini göstermektedir.

Örneğin, $f\ (x, y, z)\ =\ yz$ fonksiyonunu düşünün. kontakt gradyant bu durumda, Denklem (6.8) e göre,

$$X_f(xy - z, 0, yz)$$

tarafından verilir.

İntegral eğrisini bir (x_0, y_0, z_0) başlangıç noktası ile bulmak amacıyla X_f 'nin integralini almak mümkündür, çünkü ilgili

$$\begin{cases} \dot{x} & = xy - z, \\ \dot{y} & = 0, \\ \dot{z} & = yz, \end{cases}$$

bu sistem kısmen ayrıştırılmıştır ve $c: I \to R^3$ integral eğrisi

$$\begin{aligned} c(t) \ &= \ (x(t), y(t), z(t)) \\ &= e^{y_0 t}(x_0 + z_0 t), y_0, z_0 e^{y_0 t} \end{aligned}$$

Bu integral eğrilerin tüm $t\ (I\ =\ R)$ için tanımlandığını ve özellikle de, X_f tarafından üretilen, bir zaman akışını $\varphi_f\colon R^3 \to R^3$

$$\varphi_f\ (x, y, z) = (e^y(x + z), y, ze^y)$$

şeklinde tanımlanır. Bunun φ_f 'nin $\varphi_f^* a_0 = e^y a_0$ ile kontakt diffeormorfizmi olduğunu söyleyebiliriz.

3.6. Kontakt Geometri 'de Darboux Teoremi

Şimdi kontakt geometride temel bir sonuca varıyoruz. Diğer bazı temel teoremleri ve diferansiyel geometri tekniklerini göstermek için bu bağlamdan yararlanacağız. Darboux teoremi, aslında lokal bir bakış açısıyla, tüm kontakt yapıların "aynı" olduğunu söyler. Daha doğrusu, herhangi bir noktanın yakınında, R^3 üzerindeki bir α formu, standart kontakt form $a_0 = xdy + dz$ = olacak şekilde koordinat değişimi yoluyla yani yerel bir diffeomorfizm olarak ifade edilir. Bu anlamda, Darboux teoremi bir tür lineer cebir alanında yaygın olan "normal form" teoremidir. Geometrik bir bakış açısından daha önemli olan darboux teoremi, bir kontakt yapıyı diğerinden ayıran hiçbir lokal özellik olmadığını belirtir. Bu ise Riemanian geometride, eğrilik gibi tensör değerlerinin belirgin bir lokal karaktere sahip olduğu durumu ile çelişir.

Kontakt yapılar arasındaki farklar, ortaya çıkarlarsa, topolojik invaryantlar veya integral eğrilerinin küresel davranışı gibi küresel düzeyde bulunmalıdır. Aslında, bu konunun daha ileri düzeyde şekillenmesine sebep olur. Bunun şöyle bir dezavantajı vardır: Kontakt geometrideki en ilginç soruların çoğu bu tanımın sınırlarının dışına düşecektir.

Teorem 3.6.1. (Darboux teoremi) (R^3, a) bir kontakt uzay ve R^3 'te $a_0 = xdy + dz$ standart kontakt form olsun. $\forall p \in R^3$ için p 'yi içeren bir tanım kümesi ve bir $\varphi : U \to \varphi(U) \subset R^3$ vardır. Bu yüzden $\varphi(p) = p$ ve U 'da $\varphi^* a = a_0$ dır.
Daha sonra, kontakt 1-formdan standart form elde etmek için lineer bir dönüşüm kullanacağız.

Belirli bir formdan standart kontakt formuna 1-formların "yolunu" oluşturacağız. Bu da sonuçta uygun koordinat değişikliği veren bir parametreli diffeomorfizm ailesi oluşturmamızı sağlar. Son olarak, problemi tekrar temel nokta p 'ye çevireceğiz. R^3 te bir $p = (p_1, p_2, p_3)$ noktası için $t_p: R^3 \to R^3$ diffeormorfizmi

$$t_p(x, y, z) = (x + p_1, y + p_2, z + p_3)$$

şeklinde tanımlayalım. $\beta_0 = t_p^* a$ ve $\beta_0(0) = a(p)$ 1-form β_0 non-dejenere ve t_p diffeormorfizmi olsun. α_0 başlangıç "nokta" ve $\alpha_1 = \beta_1$ bitiş "nokta" lı 1-formlların "satır segmenti" olarak kabul edilebilir.

$\alpha_t(0) = \alpha_0(0) = \beta_0(0)$ olan tüm t ler için özellikle de $\alpha_t(0)$ tüm t ler için non-dejeneredir. Dahası sırasıyla $a_0 = xdy + dz$ ve β_0 için reeb vektör alanları $\xi_0 = \frac{\partial}{\partial z}$ ve ξ_1 olmak üzere $E_1 = ker\beta_0$ için $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ bir bazdır. $A_* : T_0R^3 \to T_0R^3$ lineer izomorfizmi aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \zeta_1,\ \ A_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \zeta_2,\ \ A_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \xi_1.$$

A_* 'yı lineer dönüşüm $A:\ R^3 \to\ R^3$ ya genişletirsek A bir diffeomorfizmdir. Ayrıca, $(A^*\beta_0\ )(0)\ =\ \alpha_0(0)$ inşasıyla $A(0) = 0$ ve temel vektörler $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_0, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_0$ üzerinde dönüşümler sağlanır. Dolayısyla

$$\beta_1 = A^*\beta_0 \ \text{ ve } \ a_t = (1-t)a_0 + t\beta_1$$

olarak tanımlanır. $\alpha_t \wedge d\alpha_t$ 'ın sürekliliğini ve [0, 1] 'in kompaktlığını içeren topolojik bir argümanla, V_1 deki Tüm t ler için α_t 'nin non-dejenere olduğu yani α_t nin bir kontakt form olduğu $0 \in R^3$ içeren bir alan V_1 tanım kümesi vardır. a_t reeb vektör alanı olacak şekilde ξ_t 'yi alalım. İspatın ana teması, $\varphi_t^* a_t = a_0\quad \forall t \in [0,1]$ özelliğine sahip $0 \in R^3$ içeren $V \subset V_1$ tamım kümesi için $\varphi_t: V \to \varphi_t(V)$ düzgün diffeomorfizma ailesini oluşturmaktır. Önerme 3.3.2 yi takip eden tanımda olduğu gibi, ilk önce X_t 'nin dikey bileşenini inşa edeceğiz. Bu, $a_t X_t = f_t$ olacak şekilde, düzgün değişen fonksiyonlar ailesinin belirlenmesinde etkilidir. Bunu yaparken $\dot{a}_t = \frac{d}{dt} a_t$ olacak şekilde

$$g_t = -\dot{a}_t(\xi_t)$$

bir fonksiyonu tanımlayalım. Sonuç 3.6.2 'ye göre $V_2 \subset V_1 \subset R^3$, 0 içeren bir tanım kümesi vardır ve $f_t: V_2 \to R$ fonksiyon ailesi için $\xi_t\ [f_t] = g_t$ şeklindedir. Aslında, f_t fonksiyonları için birkaç ek varsayım yapabiliriz. Bunlardan birincisi $t \in [0,1]$ için $f_t(0) = 0$ olduğunu varsayalım. Eğer değilse f_t fonksiyonunu $\widetilde{f_t} = f_t - f_t(0)$ ile yer değiştirirsek $\xi_t\ [\widetilde{f_t}] = g_t$ elde edilir. İkinci olarak, $df_t(0) = 0$ olduğunu varsayalım. Bunu görmek için, öncelikle $t \in [0,1]$ için $df_t(0)$, ξ_t reeb vektör alanına göre yarı bazlıdır.

$$\begin{aligned} df_t(0)\big(\xi_t(0)\big) &= \xi_t(0)[f_t(0)] \\ &= g_t(0) \\ &= -\dot{a}_t(\xi_t)(0) \\ &= \big(a_0(0) - \beta_1(0)\big)(\xi_t)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daha sonra Teorem 3.6.1 'e göre, 0 içeren ve koordinatları (s_1, s_2, s_3) olan bir $V_3 \subset V_2$ vektör alanı vardır. Buna göre $\xi_t \Big| V_3 = \frac{\partial}{\partial s_3}$ ve k_1, k_2 sabitleri için $df_t(0) = a_1 ds_1 + a_2 ds_2$ durumundadır. Bu yüzden $df_t(0) \neq 0$ dır. f_t ile $\widetilde{f_t} = f_t - a_1 s_1 + a_2 s_2$ değiştirilirse $\xi_t\,[\widetilde{f_t}] = \xi_t\,[f_t\,], \widetilde{f_t}(0) = f_t(0)$ ve $df_t = 0$ elde edilir.

Şimdi X_t 'nin yatay bileşenini inşa edelim. 1- form $-\dot{a_t} - df_t$ 'nin ξ_t 'ya göre yarı bazlıdır.

$$
\begin{aligned}
(-\dot{a_t} - df_t)(\xi_t) &= -\dot{a}_t \xi_t - df_t \xi_t \\
&= -\dot{a}_t \xi_t - g_t \qquad (g_t \text{ 'nin tanımından}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Buna göre bir yatay vektör alanları ailesi Y_t vardır ve

$$i(Y_t) d\dot{a}_t - df_t$$

$df_t(0) = 0$ varsayımına göre $\dot{a}_t(0) = \beta_1(0) - a_0(0) = 0$ dır.

Bütün t ler için $Y_t(0) = 0$ dir.

$$X_t = f_t \xi_t - Y_t$$

$\forall t \in [0, 1]$ için $\varphi_t(V) \subset V_2$ özelliğine sahip olan ve $V \subset V_2$ alanında tanımlanan X_t akısının bütün t ler için $\varphi^* a_t = a_0$ yerine getirdiğini göstereceğiz. Her zamanki gibi akıların özellikleri, $\varphi_0 = Id$. Ayrıca, tüm t için $\varphi_t(0) = 0$ şeklindedir çünkü tüm t için $X_t(0) = 0$ dır.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi_t^* a_t) &= \varphi_t^*\big(\dot{a}_t + \mathcal{L}_{X_t} a_t\big) \\
&= \varphi_t^*\Big(\dot{a}_t + i(X_t) da_t + d\big(a_t(X_t)\big)\Big) \\
&= \varphi_t^*(\dot{a}_t + i(Y_t) da_t + df_t) \\
&= \varphi_t^*(\dot{a}_t - \dot{a}_t - df_t + df_t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Dolayısıyla $\varphi_t^* a_t$, t 'ye göre sabittir. Bu yüzden bütün t ler için

$$\varphi_t^* a_t = \varphi_t^* a_0 = a_0.$$

Özellikle; $\varphi_t^* a_1 = \varphi_t^* \beta_1 = a_0$ eşitliği ve $\tilde{t}_p$ kontakt dönüşümü (p_1, p_2, p_3) için a_0 'nın kesinlikle kontakt bir diffeomorfizması olduğunu gösterir. Yani $\tilde{t}_p{}^* a_0 = a_0$ şeklinde elde ederiz. $\varphi = t_p o A o \phi_1 o \tilde{t}_p{}^{-1}$ dönüşümü $p = \tilde{t}_p(0)$ ve $0 \in V$ 'yi içeren $U = \tilde{t}_p(V)$ tanım kümesinde bir p vardır.

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= t_p\left(A\left(\phi_1\left(\tilde{t}_p{}^{-1}(p)\right)\right)\right)\\ &= t_p\left(A\left(\phi_1(0)\right)\right)\\ &= t_p\left(A(0)\right)\\ &= t_p(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi^* a &= \left(t_p o A o \phi_1 o \tilde{t}_p{}^{-1}\right)^* a\\ &= \left(\tilde{t}_p{}^{-1}\right)^* \phi_1{}^* A^* t_p^* a\\ &= \left(\tilde{t}_p{}^{-1}\right)^* \phi_1{}^* A^* \beta_0\\ &= \left(\tilde{t}_p{}^{-1}\right)^* \phi_1{}^* \beta_1\\ &= \left(\tilde{t}_p{}^{-1}\right)^* a_0\\ &= a_0.\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

4. SONUÇ

Kontakt geometri, 1950 yıllarından başlayarak yavaş yavaş kendine özgü çalışma alanını ortaya çıkarmıştır. Matematiksel araştırmanın diğer alanlarındaki gelişmeler sayesinde kontakt geometri 1990 lı yıllarda büyük ilgi uyandırmıştır. Kontakt geometrinin birçok alanda uygulamaları vardır. Bu çalışmanın temel amacı kontakt geometrinin ana kaynaklarının araştırılması ve kontak geometrinin uygulama alanlarının geliştirilmesine katkı sağlamaktır. Bu nedenle bu çalışmada kontakt geometrinin ilk olarak fizikte ve ikinci olarak matematikte nasıl kullanıldığı konuları üzerine yoğunlaşılmıştır.

Fizikte, Huygens ’ın dalga cepheleri üzerine çalışmasında kontakt geometrinin yerinden bahsedilmiştir. Fizikteki ilk uygulamalarından birisi olan Huygens prensibi ile matematiksel modellemede kontakt geometrinin büyük etkisinin olduğu ve kontakt elemanların bu yöntemde nasıl bir rol üstlendiği gösterilmiştir. Daha sonra matematiğin alt bilimlerinden olan diferansiyel geometri ile ilgili bağlantısından ve yine Sophus Lie tarafından, bir diferansiyel denklem sisteminin integralleri ile tanımlanan yerel bir dönüşüm grubunun özel bir örneği olarak kontakt dönüşümlerin tanıtılması gibi çalışmalardan söz edilmiştir. Bunların yanı sıra son kontak geometri için önemli bir yer teşkil eden Darboux teoremi incelenmiş ve bu teoremin bir sonucu olarak lokal bir bakış açısıyla, tüm kontakt yapıların “aynı” olduğu yorumundan bahsedilmiştir.

Yapılan bu çalışmalar doğrultusunda kontakt geometrisinin, pek çok fiziksel fenomenin altında olduğu ve diğer birçok matematiksel yapı ile ilişkili olduğu görülmüştür. Bu çalışma boyunca Andrew Mclnerney ’in First Steps in Differential Geometry kitabından yararlanılmıştır. Bu tez çalışması içerik bakımından kontak geometrinin tarihçesi üzerine temel bir kaynak niteliğindedir.

Böylelikle bu çalışma ile literatüre bu kaynak eksikliğini tamamlamak bakımından önemli bir katkı sağlayacaktır.

5. KAYNAKLAR

Abraham, R., Marsden, J. E., & Ratiu, T., 2012. *Manifolds, tensor analysis, and applications* (Vol. 75). Springer Science & Business Media.

Anton, H., & Rorres, C., 2013. *Elementary Linear Algebra, Binder Ready Version: Applications Version*. John Wiley & Sons.

Bachman, D., 2012. *A geometric approach to differential forms*. Springer Science & Business Media.

Banyaga, A., & McInerney, A., 1995. On isomorphic classical diffeomorphism groups, III. *Annals of Global Analysis and Geometry*, *13* (2), 117-127.

Blanchard, P., Devaney, R.L., Hall, G.R, 2006. *Differential Equations*, 3rd edn. Thomson Brooks/Cole, Pacific Grove.

Burke, W. L., Burke, W. L., & Burke, W. L., 1985. *Applied differential geometry*. Cambridge University Press.

Do Carmo, M. P., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc.

Do Carmo, M. P., 1992. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston.

Geiges, H., 2001. A brief history of contact geometry and topology. *Expositiones Mathematicae*, 19 (1), 25-53.

Geiges, H., 2005. Christiaan Huygens and contact geometry. *arXiv preprint math/0501255*.

Geiges, H., 2008. *An introduction to contact topology* (Vol. 109). Cambridge University Press.

Hacısalihoğlu, H. H., 2003. *Diferensiyel geometri*. Hacısalihoğlu Eğtim Hizmetleri Firması.

Kühnel, W., 2006. Differential Geometry, Curves–Surfaces–Manifolds, translated by B. *Hunt, AMS.*

McInerney, A., 2015. *First Steps in Differential Geometry*. Springer, 271-315 s, New York.

Mishra R. S., 1984. *Structures on a Differentiable manifold and their applications,* Chandrama Prakashan, Allahabad.

O'neill, B., 2006. *Elementary differential geometry*. Elsevier.

Sabuncuoğlu, A., 2014. *Lineer Cebir*, Nobel Basımevi, 197 s, Turkiye.

Warner, F.W., 1983. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, New York.

Weintraub, S.H., 1997. *Differential Forms: A Complement to Vector Calculus*. Academic, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Serdar Karataş
e-mail : hskaratas70@gmail.com
Adres : Gazi Dükkân Mahallesi 92. Sokak No:6 Merkez/KARAMAN

Eğitim

Lise : Karaman Fatih Lisesi
Lisans : Erciyes Üniversitesi
Yüksek Lisans : Karamanoğlu Mehmet Bey Üniversitesi

Yabancı dil ve düzeyi **:** İngilizce orta
İş Deneyimi **:** Matematik öğretmeni
Deneyim Alanları **:** Kolej