

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

DOKTORA TEZİ

Murat ARI

Matematik Anabilim Dalı

HAZİRAN 2023

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

DOKTORA TEZİ

Murat ARI
(180832102)

Matematik Anabilim Dalı

Tez danışmanı: Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

HAZİRAN 2023

TEZ ONAYI

Murat Arı tarafından hazırlanan Fark Denklemleri Üzerine Bir Çalışma adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı'nda **DOKTORA** tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman:

Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Prof. Dr. Dağistan ŞİMŞEK

Dr. Öğr. Üyesi Merve KARA

İmza:

Tez Savunma Tarihi: 13/06/2023

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Ahmet KAYABAŞI

Enstitü Müdürü



BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Murat ARI





ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmam boyunca bilgi birikimi ve tecrübesiyle beni aydınlatan danışman hocam Doç. Dr. Ali GELİŞKEN'e ve tezin oluşma sürecinde yol gösteren değerli hocalarım Prof. Dr. Galip OTURANÇ ve Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca çalışmalarım süresince beni daima destekleyen sevgili eşim Aslı ARI'ya ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2023

Murat ARI



İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| TEZ ONAYI | iii |
| ÖNSÖZ | vii |
| İÇİNDEKİLER | ix |
| ŞEKİL LİSTESİ | xi |
| ÖZET | xiii |
| ABSTRACT | xv |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1 Maksimumlu Fark Denklemleri ile İlgili Yapılmış Çalışmalar | 3 |
| 1.2 Rasyonel Fark Denklemleri ile İlgili Yapılmış Çalışmalar | 8 |
| 1.3 Fark Denklemleri ile İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler | 9 |
| 2. MAKSİMUMLU BİR FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ VE DAVRANIŞLARI | 13 |
| 2.1 \sqrt{A} Civarında Salınım | 75 |
| 2.2 Sayısal Örnekler | 76 |
| 3. RASYONEL BİR FARK DENKLEM SİSTEMİ | 81 |
| 3.1 Denklem (3.1)'in Asimptotik Davranışı | 86 |
| 3.2 Sayısal Örnekler | 90 |
| TARTIŞMA VE SONUÇ | 93 |
| KAYNAKLAR | 95 |



ŞEKİL LİSTESİ

| | <u>Sayfa</u> |
|---|--------------|
| Şekil 2.1 : Bütün terimler $\sqrt{3}$ 'den küçüktür. | 76 |
| Şekil 2.2 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 2, 2, 2, 3, 1, ... olduğunu gösterir. | 77 |
| Şekil 2.3 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 2, 2, 2, ... olduğunu gösterir. | 77 |
| Şekil 2.4 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 2, 2, 2, ... olduğunu gösterir. | 77 |
| Şekil 2.5 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 1, 3, 2, ... olduğunu gösterir. | 78 |
| Şekil 2.6 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 1, 3, 2, ... olduğunu gösterir. | 78 |
| Şekil 2.7 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 2, 2, 2, 3, 1, ... olduğunu gösterir. | 78 |
| Şekil 2.8 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 2, 2, 2, 3, 1, ... olduğunu gösterir. | 79 |
| Şekil 2.9 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 1, 3, 2, ... olduğunu gösterir. | 79 |
| Şekil 2.10 : Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 1, 3, 2, ... olduğunu gösterir. | 79 |
| Şekil 3.11 : $ x_{6n+i} \rightarrow \infty$ | 90 |
| Şekil 3.12 : 6 periyotlu çözüm. | 91 |
| Şekil 3.13 : $ x_{6n+i} \rightarrow \infty$ | 91 |
| Şekil 3.14 : 8 periyotlu çözüm. | 92 |
| Şekil 3.15 : $ x_{10n+i} \rightarrow \infty$ | 92 |



ÖZET

Doktora Tezi

FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Murat ARI

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Haziran, 2023, 100 sayfa

Bu tez çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^2, A\}}{x_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

maksimumlu fark denklemi incelenmiştir. Burada $A > 1$ ve r_{-1}, r_0 pozitif rasyonel sayılar ve başlangıç şartları $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ biçimindedir.

İkinci bölümde

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-k}}{y_{n-k+1} - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-k} y_n}{x_{n-k+1} - \beta} + \alpha, \quad n = 0, 1, \dots$$

rasyonel fark denklem sistemi incelenmiştir. Burada a, b, α, β parametreleri ve $x_{-j}, y_{-j}, j = 0, 1, 2, \dots, k$ başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılardır.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, max operatörü, rasyonel fark denklemi, periyodiklik.



ABSTRACT

Ph.D. Thesis

A STUDY UPON DIFFERENCE EQUATIONS

Murat ARI

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Ali GELİŞKEN
June, 2023, 100 pages

This thesis consists of two main parts. In the first part we consider following difference equation with maximum operator

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^2, A\}}{x_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Where $A > 1$ and the initial conditions $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ such that r_{-1} and r_0 positive rational numbers.

In the second part following system of rational difference equations investigated

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-k}}{y_{n-k+1} - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-k} y_n}{x_{n-k+1} - \beta} + \alpha, \quad n = 0, 1, \dots$$

Where the parameters a, b, α, β and initial values $x_{-j}, y_{-j}, j = 0, 1, 2, \dots, k$ are non-zero real numbers.

Keywords: Difference equations, max operator, rational difference equations, periodicity.



1. GİRİŞ

Fark denklemleri mühendislik, kimya, fizik, biyoloji ve ekonomi gibi birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Fark denklemleri ile diferansiyel denklemlerin ilişkisi ayrık matematik ile sürekli matematiğin ilişkisine benzer. Fark denklemlerinin incelenmesi, diferansiyel denklemlere kıyasla daha yeni bir kavramdır. 20. yüz yılda, bilimin çeşitli dallarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, sürekli ifadeler dışında ifadelere ihtiyaç duyulduğunu göstermiştir. Diferansiyel denklemlerde karşılaşılan süreksizlik durumları, fark denklemleri ile kaldırılmak istenmektedir. Bu tür denklemlerin analizini yapmak günümüz toplumunda birçok uygulamada çok önemlidir. Özellikle doğadaki birçok denklem ayrıktır ve fark denklemleri teorisinin sağlam bir şekilde anlaşılmasını gerektirir. 1202’de Fibonacci, ünlü tavşan problemini formüle ederek 1 1 2 3 5 8 13, . . . şeklinde devam eden diziyi oluşturmuştur. Ancak bu diziye karşılık gelen fark denklemi $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ ilk defa Albert Girard tarafından 1634 civarında yazılmış ve 1730’da de Moivre tarafından çözülmüştür. İki indisli fark denkleminin bilinen en eski örneği olan $b_{n+1,r} = b_{n,r} + b_{n,r-1}$ denklemi Chia Hsien (1050) ve Omar Khayyam (1100)’e kadar dayanır. Yineleme yönteminde, on altıncı yüzyılda Francesco Maurolico tarafından matematiksel induksiyonun icadı ve on yedinci yüzyılda Fermat ve Pascal katkılarıyla kayda değer ilerleme sağlandı. Thomas Harriot (1560-1621) sonlu farklar hesabını icat etti ve Henry Briggs (1556-1630) bunu logaritma hesaplamasına uyguladı. 1672’de Leibniz tarafından yeniden keşfedildi. Newton, Euler, Lagrange, Gauss ve diğerleri interpolasyon teorisini incelemek için bu hesabı kullandılar. Sonlu farklar teorisi, on sekizinci yüzyılın başlarında Stirling tarafından büyük ölçüde geliştirilmiştir. 1669’da Newton metodu olarak bilinen önemli bir lineer olmayan fark denklem sınıfı $y^3 - 2y - 5 = 0$ denkleminin çözümleri ve daha sonra Kepler denkleminin hesaplamaları için Newton tarafından kullanıldı. 1690’da Raphson, yöntemi daha sistematik hale getirdi. Temel lineer fark denklemleri teorisi on sekizinci yüzyılda de Moivre, Euler, Lagrange, Laplace ve diğerleri tarafından geliştirilmiştir. İlk önce Fibonacci denklemini çözmek için de Moivre tarafından kullanılan üreteç fonksiyonları, olasılık teorisindeki çalışmalarının bir parçası olarak Laplace tarafından kullanıldı. Ayrıca çözümlerin integral gösterimlerini ve asimptotik davranışlarını (Laplace yöntemi) tanıttı. Lineer fark denklemlerinin çözümlerinin asimptotik özelliklerinin detaylı bir incelemesi 1880’lerde asimptotik seri kavramını şekillendiren Poincare tarafından atılmıştır ve ayrıca uygun koşullar altında, çözümün ardışık değerlerinin oranının bir karakteristik köke yaklaşması gerektiğini göstermiştir. 1909’da Perron bu sonu-

cun önemli bir uzantısını yaptı ve asimptotik teori Birkhoff ve öğrencileri tarafından 1930'da belli bir bütünlüğe getirildi. Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde fark denklemlerini kullanma fikri, 1769'da Euler poligonal yöntemiyle ortaya çıktı, yöntemin yakınsaklığı Cauchy tarafından 1840'da ispatlandı. Konu, Lipschitz, Runge ve Kutta'nın on dokuzuncu yüzyılın sonlarında geliştirdikleri yöntemlere kadar ihmal edildi. Birinci Dünya Savaşı sırasında sayısal yaklaşımlara duyulan acil ihtiyaç, bu alandaki araştırmaları büyük ölçüde teşvik etti ve yayın sayısı daha sonra bilgisayarın gelişimi ile birlikte patladı. Dahlquist, çok adımlı yöntemlerin yakınsamasının modern teorisini başlattı. Lineer fark denklemlerinin etkili bir uygulaması olan özel fonksiyonların hesaplanması, Miller'in Bessel fonksiyonları için 1952'de verdiği algoritmayla başlar. Bu tür hesaplamalar Gautschi'nin örneğinde gösterildiği gibi birikimli yuvarlama hatası olasılığı nedeniyle dikkatli yapılmalıdır. Lineer fark denklemleri teorisinin daha da geliştirilmesi, konuyu lineer diferansiyel denklemlerle karşılaştırılabilir bir duruma getirmiştir. 1950'lerde bazı ekolojistler, yinelemenin kararlılığı üzerinde durarak bir yılda (veya mevsimde) popülasyonlardaki değişimi incelemek için lojistik denklemi ve bazı basit lineer olmayan fark denklemlerini kullandılar. Bununla birlikte 1970'lerin başlarında lojistik denklemin sergilediği karmaşık davranış çeşitliliği ve bu davranışın gerçek popülasyonlardaki dalgalanma ile olası ilişkisi araştırıldı. Lojistik denklem ve ilgili denklemler hakkında ek keşifler ve bu denklemlerin dikkat çekici derecede karmaşık özellikleri kaotik dinamik sistemlerin odağı olmalarına neden oldu. Bu keşifler araştırmacıların dikkatini çekti ve sonuçları ekonomiden eczacılığa kadar çeşitli alanda uygulanmaya çalışıldı (Lakshmikantham ve Trigiante, 2002).

Bilindiği gibi en önemli matematiksel analiz kavramı bir fonksiyondur. Belirli bir x değeri bir y değerine karşılık gelirse, y 'nin bağımsız değişken x 'in bir fonksiyonu olduğunu ve sembolik olarak $y(x)$ yazıldığını söyleriz, matematiksel analizin fiziksel problemlere uygulanmasında iki tür fonksiyon ortaya çıkar; ilk olarak, x değişkeninin belirli bir aralıkta mümkün olan her değeri alabileceği fonksiyonlar vardır, yani x değişkeni süreklidir. Bu tür fonksiyonlar sıradan diferansiyel ve integral analizinde incelenmiştir. x değişkeninin yalnızca verilen x_1, x_2, \dots, x_n değerlerini aldığı ikinci tür bir fonksiyon vardır. Bu durumda x değişkeni süreksizdir. Sürekli analizin metotları genelde bu fonksiyonlar için uygun değildir. Sonlu fark analizi, özellikle ikinci tip fonksiyonları ele alır ancak ilk tipin fonksiyonlarına da uygulanabilir. Kısmi diferansiyel denklemlere de uygulanabilen sonlu fark yaklaşımına bir örnek verelim. Dirichlet sınır şartları ile birlikte Poisson denklemi:

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

şeklindedir. $\{v_j\}_{j=0}^{n+1}$ yaklaşımı ile birlikte denklem

$$-\frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{h^2} = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad v_0 = v_{n+1} = 0$$

olarak yazılır. Bu sistem ise

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matris, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ vektörünün bileşenleri $j = 1, 2, \dots, n$ için $b_j = h^2 f(x_j)$ ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ olmak üzere kısaca $Av = b$ şeklinde yazılır. Burada A matrisi nonsingular matris olup sistemin bir tek çözümü vardır.

1.1 Maksimumlu Fark Denklemleri ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

Maksimumlu fark denklemleri kontrol teori problemlerinde ortaya çıkmıştır. Kontrol teorisi son otuz yılda mühendisler, matematikçiler, bilim adamları ve diğer araştırmacılar için bir disiplin olarak önem kazanmıştır. Kontrol problemlerine verilebilecek örnekler; aya bir araç indirme, ülke ekonomisini kontrol etme ve salgının yayılmasının kontrol altına alınmasıdır. Ayırık kontrol teori fark denklemlerine örnektir. Kontrol etmek istediğimiz yani kontrolsüz sistem

$$x(n+1) = Ax(n) \quad (1.1)$$

olsun. Burada A matrisi $k \times k$ tipindedir. Bu sistemi kontrol etmek veya önceden belirlenmiş biçimde etkilemek için sisteme kontrol ya da zorlama terimi $u(n)$ 'i ekleyerek

$$x(n+1) = Ax(n) + u(n) \quad (1.2)$$

kontrollü sistemi elde edilir. Ekonomistler ve bazı siyasetçiler için; vergiler, para miktarı, bankaların faiz oranları gibi değişkenler değiştirilerek enflasyon oranının nasıl kontrol edileceğini bilmek çok önemlidir. Enflasyon oranını (1.2) denklemi kadar doğru tanımlayan başka bir denklem yoktur (Elaydi, 2005).

Maksimum operatör içeren fark denklemleri ile ilgili literatürde oldukça fazla çalışma bulunduğu gibi maksimumlu fark denklemleri ile ilgili birçok açık problem de bulunmaktadır. Bunların bir kısmı çözülebilmemiş bazıları ise hala çözülememiştir. Grove ve

Ladas tarafından aşağıdaki açık problemler ve hipotezler verilmiştir (2004).

Açık Problem 1. $A \in (0, \infty)$ ve r_1, r_2 pozitif rasyonel sayılar olsun. $x_{-1} = A^{r_1}$ ve $x_0 = A^{r_2}$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n, A\}}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini araştırınız.

Açık Problem 2. $A \in (0, \infty)$ ve r_1, r_2 pozitif rasyonel sayılar olsun. $x_{-1} = A^{r_1}$ ve $x_0 = A^{r_2}$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini araştırınız.

Açık Problem 3. $A \in (0, \infty)$ ve r_1, r_2 pozitif rasyonel sayılar olsun. $x_{-1} = A^{r_1}$ ve $x_0 = A^{r_2}$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^2, A\}}{x_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini araştırınız.

Açık Problem 4. $A \in (0, \infty)$ ve r_1, r_2 pozitif rasyonel sayılar olsun. $x_{-1} = A^{r_1}$ ve $x_0 = A^{r_2}$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n, A\}}{x_n^2 x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini araştırınız.

Açık Problem 5. $A \in (0, \infty)$ ve r_1, r_2 pozitif rasyonel sayılar olsun. $x_{-1} = A^{r_1}$ ve $x_0 = A^{r_2}$ başlangıç şartları ve k, l doğal sayıları için

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^k, A\}}{x_n^l x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.7)$$

denkleminin çözümlerinin periyodikliğini araştırınız.

Açık Problem 6. r ve s pozitif reel sayılar olsun.

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^r, x_n^s\}}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.8)$$

denkleminin tüm pozitif çözümlerinin periyodik olması için gerek ve yeter koşulları

elde ediniz.

Hipotez 1. $A \in (0, \infty)$ ve k bir rasyonel sayı olsun. Gösteriniz ki

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.9)$$

denkleminin tüm pozitif çözümlerinin periyodik olması için gerek ve yeter şart $0 \leq k \leq 1$ olmasıdır.

Hipotez 2. $A \in (0, \infty)$ ve k bir rasyonel sayı olsun. Gösteriniz ki

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^k, A\}}{x_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.10)$$

denkleminin tüm pozitif çözümlerinin periyodik olması için gerek ve yeter şart $0 \leq k \leq 3$ olmasıdır.

Açık Problem 1, Gelişken vd. tarafından çözülmüş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir (2008a).

$A > 1$ durumu

(1.3) denkleminde $n \geq -1$ için $x_n = A^{r_n}$ alalım. Denklem r_{-1} ve r_0 başlangıç şartları pozitif rasyonel sayılar olmak üzere

$$r_{n+1} = \max \{r_n, 1\} - r_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.11)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 1.1. r_{-1} ve r_0 başlangıç şartları pozitif rasyonel sayılar olmak üzere r_n , (1.11)'in bir çözümü olsun. Kabul edelim ki $\max \{r_{-1}, r_0, 1\} = k/m$ ve $(k, m) = 1$ olsun. O zaman r_n , $5k - m$ asal periyotludur.

$A < 1$ durumu

(1.3) denkleminde $n \geq -1$ için $x_n = A^{r_n}$ alalım. Denklem başlangıç şartları pozitif rasyonel sayılar olmak üzere

$$r_{n+1} = \min \{r_n, 1\} - r_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.12)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 1.2. r_n , (1.12)'nin bir çözümü olsun. Kabul edelim ki $\max \{r_{-1}, r_0, 1\} = k/m$ ve $(k, m) = 1$ olsun. O zaman r_n , $5k + m$ asal periyotludur.

Teorem 1.3. r_n , (1.12)'nin bir çözümü ve $r_{-1} > 1$ ve $r_0 > 1$ olsun. $r_{-1} + r_0 = r$, $r =$

k/m ve $(k, m) = 1$ alalım. O zaman $r_n, 5k - 4m$ asal periyotludur.

Denklem (1.3) ile ilgili başka çalışmalar da mevcuttur (Bas ve Roldán (2022), Bas ve Roldán (2023), Feuer (2003), Grove ve Ladas (2005), Janowski vd. (1995), Ladas (1995)).

Açık Problem 2 Gelişken vd. tarafından çözülmüş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir (2008b).

$A < 1$ durumu

(1.4) denkleminde $n \geq -1$ için $x_n = A^{r_n}$ alalım. Denklem r_{-1} ve r_0 başlangıç şartları pozitif rasyonel sayılar olmak üzere

$$r_{n+1} = \min \{0, 1 - r_n\} - r_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 1.4. $0 < A < 1$, r_{-1} ve r_0 pozitif rasyonel sayılar ve $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç şartları ile (1.13) denkleminin çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. r_{-1} ve r_0 'dan en az birinin bire eşit veya daha küçük olduğunu kabul edelim. Eğer $\max \{r_{-1}, r_0, 1\} = k/m$ ve $(k, m) = 1$ ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ periyodiktir ve

$$\begin{cases} \frac{7k + m}{2}, & k + m \text{ çift tam sayı ise} \\ 7k + m, & k + m \text{ tek tam sayı ise} \end{cases}$$

asal periyotludur.

Teorem 1.5. $0 < A < 1$, r_{-1} ve r_0 pozitif rasyonel sayılar ve $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç şartları ile (1.13) denkleminin çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun.

$1 < r_{-1}, r_0$ olsun. Eğer $r_{-1} + r_0 = k/m$ ve $(k, m) = 1$ ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ periyodiktir ve

$$\begin{cases} \frac{7k - 6m}{2}, & k + m \text{ çift tam sayı ise} \\ 7k - 6m, & k + m \text{ tek tam sayı ise} \end{cases}$$

asal periyotludur.

$A > 1$ durumu

(1.4) denkleminde $n \geq 1$ için $x_n = A^{r_n}$ alalım. Denklem başlangıç şartları pozitif rasyonel sayılar olmak üzere

$$r_{n+1} = \max \{0, 1 - r_n\} - r_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.14)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 1.6. $1 < A$, r_{-1} ve r_0 pozitif rasyonel sayılar ve $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç şartları ile (1.4) denkleminin çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $1 < r_{-1}, r_0$ olsun. Eğer $\max\{r_{-1}, r_0, 1\} = k/m$ ve $(k, m) = 1$ ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ periyodiktir ve

$$\begin{cases} \frac{7k - m}{2}, & k + m \text{ çift tam sayı ise} \\ 7k - m, & k + m \text{ tek tam sayı ise} \end{cases}$$

asal periyotludur.

Denklem (1.4) ile ilgili başka araştırmalar da literatürde mevcuttur (Bas ve Roldán (2022), Bas ve Roldán (2023), Feuer vd. (2000), Grove ve Ladas (2005), Ladas (1995)).

Denklem (1.5)'de $A = 1$ durumu Crampin tarafından incelenmiş ve fark denkleminin tüm çözümlerinin 9 periyotlu olduğu gösterilmiştir (1992). $A < 1$ durumu ise Devaney tarafından incelenmiş ve denklemin düzlemin bazı bölgelerinde kaotik yapıda olduğu ve diğer bölgelerde ise stabil olduğu gösterilmiştir (1984). Ayrıca denklemin bütün çözümlerinin sınırlı olduğu da gösterilmiştir. Literatürde Denklem (1.5) ile ilgili çeşitli çalışmalar mevcuttur (Abu-Saris ve Allan (1997), Grove ve Ladas (2005), Ladas (1995)).

Açık Problem 4 Yalçınkaya vd. tarafından çözülmüş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir (2010).

$A > 1$ durumu

(1.6) denkleminde $n \geq 1$ için $x_n = A^{r_n}$ alalım. Denklem başlangıç şartları r_{-1} ve r_0 pozitif rasyonel sayılar olmak üzere

$$r_{n+1} = \max\{r_n, 1\} - 2r_n - r_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.15)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 1.7. (1.15) denklemini düşünelim. Eğer $r_{-1} + r_0 = k/m \leq 1/2$ ve $(k, m) = 1$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- i) $(7m - 8k) \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $(7m - 8k)$ asal periyotludur.
- ii) $(7m - 8k) \equiv 0 \pmod{3}$ ise $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $(7m - 8k)/3$ asal periyotludur.

Teorem 1.8. (1.15) denklemini düşünelim. Eğer $r_{-1} + r_0 = k/m > 1/2$ ve $(k, m) = 1$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- i) $(8k - m) \not\equiv 0 \pmod{3}$ ise $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $(8k - m)$ asal periyotludur.

ii) $(8k - m) = 0 \pmod{3}$ ise $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $(8k - m)/3$ asal periyotludur.

$A < 1$ durumu

(1.6) denkleminde $n \geq -1$ için $x_n = A^{r_n}$ alalım. Denklem başlangıç şartları r_{-1} ve r_0 pozitif rasyonel sayılar olmak üzere

$$r_{n+1} = \min \{r_n, 1\} - 2r_n - r_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.16)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 1.9. (1.16) denklemini düşünelim. Eğer $r_{-1}, r_0 > 1$, $r(r_0 + r_{-1}) = k/m$ ve $(k, m) = 1$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $(8k - 7m) \neq 0 \pmod{3}$ ise $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $(8k - 7m)$ asal periyotludur.

ii) $(8k - 7m) = 0 \pmod{3}$ ise $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $(8k - 7m)/3$ asal periyotludur.

Teorem 1.10. (1.16)'deki başlangıç şartlarından en az biri birden küçük veya eşit $\max \{r_{-1}, r_0, 1\} = k/m$ ve $(k, m) = 1$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $(8k + m) \neq 0 \pmod{3}$ ise $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $(8k + m)$ asal periyotludur.

ii) $(8k + m) = 0 \pmod{3}$ ise $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $(8k + m)/3$ asal periyotludur.

Denklem (1.6) ile ilgili başka çalışmalar da mevcuttur (Bas ve Roldán (2022), Bas ve Roldán (2023), Grove ve Ladas (2005), Janowski vd. (1997), Ladas (1995)).

1.2 Rasyonel Fark Denklemleri ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

Lineer olmayan fark denklemleri çözümleri oldukça zor denklemler olmasına rağmen son yıllarda oldukça yoğun ilgi görmüşlerdir. Bu ilginin asıl sebebi rasyonel fark denklemlerinin biyoloji, finans, fizik ve ekonomi gibi birçok alanda kullanılmasıdır. Bu kısımda bu denklemler ile ilgili yapılmış bazı çalışmalarını tanıtacağız.

A pozitif reel sayı olmak üzere $x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}$ denklemi DeVault vd. tarafından çalışılmıştır (1998).

Bir açık problemin genellemesi olan $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{g(x_n)}$, $x_{-1}, x_0 > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ denklemini Stevic çözmüştür (2002).

Çınar $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{1 + bx_n x_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$ fark denkleminin çözümlerini vermiştir (2004). Burada a, b parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılardır.

Elabassy vd.

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}}{x_n - 1} + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.17)$$

denkleminin çözümlerini elde ettiler (2007).

Elsayed başlangıç şartları pozitif reel sayı olan

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}x_{n-4}}{x_{n-1}(\pm 1 \pm x_{n-2}x_{n-4})}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.18)$$

denkleminin çözümlerini araştırdı (2013).

Yalçınkaya vd. $a \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$z_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}, \quad t_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.19)$$

denkleminin çözümlerini verdiler (2008).

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.20)$$

sisteminin çözümlerini ve asimptotik davranışlarını Haddad vd. incelemişlerdir (2018). Denkleminde a, b, α, β parametreleri ve $x_{-i}, y_{-i}, i = 0, 1$, başlangıç şartları pozitif reel sayılardır.

Sistem (1.20)'den hareketle Yazlık ve Kara

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_{n-k+1} y_{n-k}}{y_n - \alpha_n} + \beta_{n+1}, \quad y_{n+1} = \frac{b_n y_{n-k+1} x_{n-k}}{x_n - \beta_n} + \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.21)$$

denkleminin çözümlerini $a_0 = b_1$ ve $a_1 = b_0$ durumu için araştırdılar (2019). Burada $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dizileri iki periyotlu ve $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0, 1, \dots, k\}$ başlangıç şartları pozitif reel sayılardır.

1.3 Fark Denklemleri ile İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler

n bağımsız değişken ve buna bağlı değişken de $x(n)$ olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $\Delta x(n), \Delta^2 x(n), \Delta^3 x(n), \dots, \Delta^n x(n)$ gibi farklarını içine alan bağıntılara Fark Denklemleri denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 1.1. $(k + 1)$ mertebeli bir fark denklemi, f sürekli fonksiyonu $J^{k+1} \rightarrow J$ bir dönüşüm olmak üzere

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.22)$$

şeklinindedir. J kümesi genellikle reel sayılar kümesinin bir alt aralığı olmakla birlikte

bu aralıkların bir birleşimi ve hatta tam sayılar kümesinin ayrık bir alt kümesi de olabilir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Teorem 1.11. J reel sayılarda bir alt aralık, $f : J^{k+1} \rightarrow J$ sürekli ve diferensiyellebilir bir fonksiyon olmak üzere her $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in J$ için denklem (1.22) bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 1.2. (1.22) denkleminin bir çözümü bütün $n \geq -k$ sayıları için sabit ise bu çözüme denklem (1.22)'in bir denge çözümü denir. Eğer her $n \geq -k$ sayısı için $x_n = \bar{x}$ denklem (1.22)'in bir denge çözümü ise \bar{x} 'e bir denge noktası denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 1.3. (i) (1.22) denkleminin bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü ve \bar{x} denge noktası olmak üzere herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{1-k} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ve her $n \geq -k$ için $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$ oluyorsa (1.22) denkleminin \bar{x} denge noktası lokal kararlıdır denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

(ii) (1.22) denkleminin \bar{x} denge noktası lokal kararlı ve denklemin $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü için

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{1-k} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı mevcut ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

ise \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

(iii) (1.22) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

ise denklemin \bar{x} denge noktası global çekicidir denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

(iv) (1.22) denkleminin \bar{x} denge noktası lokal kararlı ve aynı zamanda global çekici ise \bar{x} denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

(v) (1.22) denkleminin \bar{x} denge noktası lokal kararlı değil ise kararsızdır denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

(vi) (1.22) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü için

$$0 < |x_{-k} - \bar{x}| + |x_{1-k} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < r$$

ve $|x_N - \bar{x}| > r$ olacak şekilde $N \geq 1$ sayısı mevcut ise \bar{x} denge noktasına repeller denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 1.4. (1.22) denkleminin bütün $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümleri \bar{x} denge noktasından büyük veya küçük değil ise bu çözümlere \bar{x} denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde ise salınımlı değildir denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 1.5. Kabul edelim ki (1.22) denkleminin denge noktası \bar{x} ve denklemin bir çözümü $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ olsun.

$\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı döngüsü $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ sıralı kümesinden oluşur öyle ki kümenin bütün elemanları \bar{x} 'den büyük veya eşittir. $l \geq -k$ ve $m \leq \infty$ sayıları için

$$l = -k \text{ veya } l > 0 \text{ ve } x_{l-1} < \bar{x}$$

ya da

$$m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} < \bar{x}$$

dır.

Denklem (1.22)'in bir r_n çözümünün bir negatif yarı döngüsü $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ sıralı kümesinden oluşur öyle ki kümenin bütün elemanları \bar{x} 'dan küçüktür. $l \geq -k$ ve $m \leq \infty$ sayıları için

$$l = 0 \text{ veya } l > 0 \text{ ve } x_{l-1} \geq \bar{x}$$

ya da

$$m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} \geq \bar{x}$$

dır (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 1.6. Bir x_n dizisinde $x_{n+p} = x_n$ ise x_n dizisinin periyodu p 'dir denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayı ise dizinin esas periyodudur (Kulenović ve Ladas, 2002).



2. MAKSİMÜMLÜ BİR FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ VE DAVRANIŞLARI

Bu bölümde $A > 1$ ve r_{-1}, r_0 pozitif rasyonel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\max \{x_n^2, A\}}{x_n x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç şartları ile incelenmiştir.

Denklem (2.1)'de $A = 1$ durumu Crampin tarafından incelenmiş ve fark denkleminin tüm çözümlerinin 9 periyotlu olduğu gösterilmiştir (1992). $A < 1$ durumu ise Devaney tarafından incelenmiş ve denklemin düzlemin bazı bölgelerinde kaotik yapıda olduğu ve diğer bölgelerde ise stabil olduğu gösterilmiştir (1984). Ayrıca denklemin bütün çözümlerinin sınırlı olduğu da gösterilmiştir. Abu-Saris ve Allan, $A \neq 1$ durumunda her başlangıç şartı için denklemin çözümlerinin periyodik olmadığını gösterdiler (1997).

Denklem (2.1)'de $n \geq -1$ için $x_n = A^{r_n}$ dönüşümü yapıp gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$r_{n+1} = \max \{r_n, 1 - r_n\} - r_{n-1} \quad (2.2)$$

denklemi elde edilir. r_{-1}, r_0 pozitif rasyonel sayılardır.

Teorem 2.1. r_{-1}, r_0 başlangıç şartları pozitif rasyonel sayılar ve $r_{-1}, r_0 \leq 1/2$, $r_0 + r_{-1} \geq 1/2$ ise denklem (2.2)'nin her çözümü 3 periyotludur.

İspat. Kabul edelim ki $r_{-1} = x$, $r_0 = y$ olsun. $x \leq 1/2$, $y \leq 1/2$, $x + y \geq 1/2$ olduğundan denklem (2.2)'den $\{x, y, 1 - x - y, x, y, 1 - x - y, \dots\}$ çözümü elde edilir. □

Lemma 2.1. $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere denklem (2.2)'nin bir çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. Öyleyse bir N doğal sayısı ve $r = \max \{|r_{-1} - r_0|, \min \{r_{-1}, r_0\}\}$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Eğer $r_N = r$ ise $r_N = r_{N+3}$, $r_N = r_{N+4}$ veya $r_N = r_{N+6}$ dır.
- (ii) Eğer $r_N = r$ ve $r \leq r_{N-1} < 2r$ ise $r_{N+2} = 1 - 2r_N + r_{N-1} \leq 0$ ve $r_N = r_{N+3}$ dır.

(iii) Eğer $r_N = r$ iken $r_{N-1} = 0$ veya $r_{N-1} = 2r$ ise $r_{N+3} = 1 + r_{N-1} - r_N$ ve $r_N = r_{N+4}$ dır.

(iv) Eğer $r_N = r$ ve $r_{N-1} < 0$ ise $r_{N+5} = 1 + 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+6}$ dır.

İspat. (i) Kabul edelim ki $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$, bir N doğal sayısı ve $r = \max\{|r_{-1} - r_0|, \min\{r_{-1}, r_0\}\}$ için $r_N = r$ olsun. r_{N-1} ile r_N arasında 3 durum söz konusudur. $r_{N-1} = r_N$, $r_{N-1} < r_N$ veya $r_{N-1} > r_N$ dır. Öncelikle $r_{N-1} = r_N$ kabul edelim. $r_N = r$ olduğundan

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max\{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1} = 0, \\ r_{N+2} &= \max\{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1} = 1 - r, \\ r_{N+3} &= \max\{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = r_N = r \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+3}$ elde edilir.

Eğer $r_{N-1} < r_N$ ise r_{N-1} için 3 durum söz konusudur. Bunlar $0 < r_{N-1} < r_N$, $r_{N-1} < 0 < r_N$ ve $r_{N-1} = 0 < r_N$ dır.

$0 < r_{N-1} < r_N$ durumunda $r_{N-1}, r_N > 0$ olduğundan

$$r = \max\{|r_N - r_{N-1}|, \min\{r_N, r_{N-1}\}\} = \max\{|r - r_{N-1}|, r_{N-1}\}$$

yazılabilir ancak denklemin sağ tarafı r 'den küçük olur. Böylece $0 < r_{N-1} < r_N$ olacak şekilde r_{N-1} yoktur.

$r_{N-1} < 0 < r_N$ olması durumunda

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max\{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max\{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max\{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = -r_N, \\ r_{N+4} &= \max\{-r_N, 1 + r_N\} + r_{N-1} = 1 + r_N + r_{N-1} \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $1 + r_N + r_{N-1} \leq 0$ ise $r_{N+1} = r_N - r_{N-1}$ olduğundan $r_{N+1} \geq 2r_N + 1$ bulunur. $r_N, r_{N+1} > 0$ olup

$$r = \max\{|r_N - r_{N+1}|, \min\{r_N, r_{N+1}\}\} = \max\{|r - r_{N+1}|, r\}$$

yazılabilir ancak denklemin sağ tarafı r 'den büyük olur. Buradan $1 + r_N + r_{N-1} \geq 1$ olmalıdır, öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+5} &= \max\{1 + r_N + r_{N-1}, -r_N - r_{N-1}\} + r_N = 1 + 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+6} &= \max\{1 + 2r_N + r_{N-1}, -2r_N - r_{N-1}\} - 1 - r_N - r_{N-1} = r_N \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+6}$ elde edilir.

$r_{N-1} = 0 < r_N$ olması durumunda ise

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1} = 0, \\ r_{N+3} &= \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N = 1 + r_{N-1} - r_N, \\ r_{N+4} &= \max \{1 - r_N, r_N\} - 0 = r_N \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+4}$ elde edilir.

Son olarak $r_{N-1} > r_N$ kabul edelim. $r_N = r$ olduğundan

$$r = \max \{|r - r_{N-1}|, \min \{r, r_{N-1}\}\} = \max \{|r - r_{N+1}|, r\}$$

yazılabilir. Öyleyse $r_{N-1} \leq 2r$ dir. r_{N-1} için iki durum söz konusudur.

Birinci durum $r_{N-1} = 2r$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1} = -r, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 + r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1} = 1, \\ r_{N+3} &= \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 + r_{N-1} - r_N = 1 + r, \\ r_{N+4} &= \max \{1 + r_{N-1} - r_N, -r_{N-1} + r_N\} - 1 + 2r_N - r_{N-1} = r_N = r \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+4}$ dir.

İkinci durum $r_{N-1} < 2r$ olsun, öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = r_N \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+3}$ dir.

(ii) Kabul edelim ki $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$, bir N doğal sayısı ve $r = \max \{|r_{-1} - r_0|, \min \{r_{-1}, r_0\}\}$ için $r_N = r$ ve $r \leq r_{N-1} < 2r$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_N = r_{N-1} - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = r_N \end{aligned}$$

dir.

(iii) Kabul edelim ki $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$, bir N doğal sayısı ve $r = \max \{|r_{-1} - r_0|,$

$\min \{r_{-1}, r_0\}$ için $r_N = r$ ve $r_{N-1} = 0$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1} = 0, \\ r_{N+3} &= \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N = 1 + r_{N-1} - r_N, \\ r_{N+4} &= \max \{1 - r_N, r_N\} - 0 = r_N \end{aligned}$$

dir. Şimdi $r_N = r$ ve $r_{N-1} = 2r$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1} = -r, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 + r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1} = 1, \\ r_{N+3} &= \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 + r_{N-1} - r_N = 1 + r, \\ r_{N+4} &= \max \{1 + r_{N-1} - r_N, -r_{N-1} + r_N\} - 1 + 2r_N - r_{N-1} = r_N = r \end{aligned}$$

dir.

(iv) Kabul edelim ki $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$, bir N doğal sayısı ve $r = \max \{|r_{-1} - r_0|, \min \{r_{-1}, r_0\}\}$ için $r_N = r$ ve $r_{N-1} < 0$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = -r_N, \\ r_{N+4} &= \max \{-r_N, 1 + r_N\} + r_{N-1} = 1 + r_N + r_{N-1} \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $1 + r_N + r_{N-1} \leq 0$ ise $r_{N+1} = r_N - r_{N-1}$ olduğundan $r_{N+1} \geq 2r_N + 1$ bulunur. $r_N, r_{N+1} > 0$ olup

$$r = \max \{|r_N - r_{N+1}|, \min \{r_N, r_{N+1}\}\} = \max \{|r - r_{N+1}|, r\}$$

yazılabilir ancak denklemin sağ tarafı r 'den büyük olur. Buradan $1 + r_N + r_{N-1} \geq 1$ olmalıdır, öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+5} &= \max \{1 + r_N + r_{N-1}, -r_N - r_{N-1}\} + r_N = 1 + 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+6} &= \max \{1 + 2r_N + r_{N-1}, -2r_N - r_{N-1}\} - 1 - r_N - r_{N-1} = r_N \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+6}$ elde edilir. □

Sonuç 2.1. Lemma 2.1'in sonuçları aşağıdaki şekilde elde edilir. Öncelikle, Lemma 2.1 (ii)'den,

$$r_N = r_{N+3} = r, \quad r_{N+2} = 1 + r_{N-1} - r_N.$$

bulunur. Ardından Lemma 2.1 (iii)'den,

$$r_{N+7} = r_{N+3} = r, \quad r_{N+6} = 2 + r_{N-1} - 2r_N,$$

olur ve son olarak Lemma 2.1 (iv)'den,

$$r_{N+13} = r_{N+7} = r_{N+3} = r, \quad r_{N+12} = 3 + r_{N-1}$$

elde edilir. Şimdi, Lemma 2.1 (ii)'den sonra Lemma 2.1 (iv)'yi uygulayalım buradan

$$r_{N+9} = r_{N+3} = r, \quad r_{N+8} = 2 + r_{N-1} + r_N,$$

bulunur. Son olarak Lemma 2.1 (iii) uygulanırsa

$$r_{N+13} = r_{N+9} = r_{N+3} = r, \quad r_{N+12} = 3 + r_{N-1}.$$

elde edilir. Benzer şekilde Lemma 2.1 (ii), (iii) ve (iv) herhangi sırada uygulandığında son iki terimin aynı olduğu görülür. Böylece son iki terimin elde edilmesi için Lemma 2.1 (ii), (iii) ve (iv) herhangi sırada uygulanabilir.

Lemma 2.2. $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere denklem (2.2)'nin bir çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ ve $r = \max\{|r_{-1} - r_0|, \min\{r_{-1}, r_0\}\}$ olsun. Öyleyse r çift sayısı ve bir N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan $N \leq 9r - 1$ doğal sayılarının sayısı $r - 1$ 'dir.
- (ii) Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan $N \leq 9r - 1$ doğal sayılarının sayısı 2 'dir.
- (iii) Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan $N \leq 9r - 1$ doğal sayılarının sayısı $r - 1$ 'dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ denklem (2.2)'nin bir çözümü ve $r = \max\{|r_{-1} - r_0|, \min\{r_{-1}, r_0\}\}$ sayısı çift olsun. $r = 2$ için Lemmanın sağlandığı açıktır. Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan $r > 2$ çift doğal sayıların sayısı $r - 2$ olsun. Lemma 2.1 ve Sonuç 2.1'den Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv)'ü art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulayabiliriz. Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı N_1 ise $N_1 \leq 6$ dir. Öyleyse

$$r_{N_1} = r_{N_1+3} = r_{N_1+9} = r_{N_1+12} = r_{N_1+18} = \dots = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)-6} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)} = r$$

ve $r \leq r_{N_1-1+9i} < 2r$, $r_{N_1+2+9i} < 0$ için $i = 0, 1, 2, \dots, \frac{r}{2} - 2$ dir. Buradan

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)-1} = 2r - 1$$

elde edilir. Lemma 2.1 (ii)'den

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+3} = r$$

ve

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+2} = 0$$

bulunur. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+3} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+7} = r$$

ve

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+6} = 1 - r$$

olur. Lemma 2.1 (iv)'den

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+7} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+13} = r \quad (2.3)$$

ve

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+12} = r + 2 \quad (2.4)$$

buluruz. Şimdi Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv)'i art arda $\frac{r}{2} - 2$ kez uygulayarak

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+13} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+16} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+22} = \dots = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+13+9(\frac{r}{2}-2)} = r$$

ve

$$r_{N_1+9r-15} = 2r - 2$$

buluruz. Böylece Lemma 2.1 (ii) tekrar uygulanabilir. Öyleyse, Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $r - 2$ 'den büyüktür.

Şimdi kabul edelim ki Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan doğal sayıların sayısı r olsun. Denklem (2.3) ve (2.4)'den önceki hesaplamalarda Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv) $\frac{r}{2}$ kez, Lemma 2.1 (iii) ise bir kez uygulandı. Denklem (2.3) ve (2.4)'den sonra Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv)'yi art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulayalım. Buradan

$$r_{N_1+9r-5} = r$$

ve

$$r_{N_1+9r-6} = 2r$$

bulunur. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N_1+9r-5} = r_{N_1+9r-1} = r$$

ve

$$r_{N_1+9r-2} = r + 1$$

elde edilir. Lemma 2.1 (ii)'den

$$r_{N_1+9r-1} = r_{N_1+9r+2} = r$$

bulunur, ancak $N_1 + 9r - 1 < 9r - 1$ doğru olmadığından Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $r - 1$ dir.

(ii) Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan en küçük N doğal sayısı N_1 ise $N_1 \leq 6$ dır. $r_{N_1-1} = 2r$, $r_{N_1} = r$ ve Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan N doğal sayıları sayısının 1 olduğunu varsayalım. Öyleyse

$$r_{N_1} = r_{N_1+4} = r$$

ve

$$r_{N_1+3} = 1 + r$$

dir. Buradan Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv)'yi art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulanarak

$$r_{N_1+4} = r_{N_1+7} = r_{N_1+13} = r_{N_1+16} = r_{N_1+22} = \dots = r_{N_1+\frac{9r}{2}-5} = r$$

ve

$$r_{N_1+\frac{9r}{2}-6} = 2r - 1$$

elde edilir. Lemma 2.1 (ii)'den

$$r_{N_1+\frac{9r}{2}-5} = r_{N_1+\frac{9r}{2}-2} = r \quad (2.5)$$

ve

$$r_{N_1+\frac{9r}{2}-3} = 0 \quad (2.6)$$

bulunur. Böylece Lemma 2.1 (iii) tekrar uygulanabilir. Öyleyse, Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan doğal sayıların sayısı 1'den büyüktür.

Şimdi kabul edelim ki Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan doğal sayıların sayısı 3 olsun.

Denklem (2.4) ve (2.5)'den Lemma 2.1 (iii) ikinci kez uygulanarak

$$r_{N_1 + \frac{9r}{2} - 2} = r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 2} = r$$

ve

$$r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 1} = 1 - r$$

elde edilir. Lemma 2.1 (iv)'den

$$r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 2} = r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 8} = r$$

ve

$$r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 7} = 2 + r.$$

bulunur. Buradan Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv) art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulanarak

$$r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 8} = r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 11} = r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 17} = r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 20} = \dots = r_{N_1 + \frac{9r}{2} + 8 + 9(\frac{r}{2} - 1)} = r$$

ve

$$r_{N_1 + 9r - 2} = 2r$$

bulunur, böylece

$$r_{N_1 + 9r - 1} = r_{N_1 + 9r + 3} = r$$

ve

$$r_{N_1 + 9r + 2} = 1 + r$$

olur, ancak $N_1 + 9r - 1 < 9r - 1$ doğru olmadığından Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 2 dir.

(iii) Kabul edelim ki Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan doğal sayıların sayısı $r - 2$ olsun. Lemma 2.1 ve Sonuç 2.1'den Lemma 2.1 (iv) ve Lemma 2.1 (ii) art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulanabilir. Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı N_1 ise $N_1 \leq 6$ dir. Öyleyse

$$r_{N_1} = r_{N_1 + 6} = r_{N_1 + 9} = r_{N_1 + 15} = r_{N_1 + 18} = \dots = r_{N_1 + 9(\frac{r}{2} - 1) - 3} = r_{N_1 + 9(\frac{r}{2} - 1)} = r$$

ve $r_{N_1 - 1 + 9i} < 0$, $r \leq r_{N_1 + 5 + 9i} < 2r$ için $i = 0, 1, 2, \dots, \frac{r}{2} - 2$ dir. Buradan

$$r_{N_1 + 9(\frac{r}{2} - 1) - 1} = -1$$

elde edilir. Lemma 2.1 (iv)'den

$$r_{N_1 + 9(\frac{r}{2} - 1)} = r_{N_1 + 9(\frac{r}{2} - 1) + 6} = r$$

ve

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+5} = 2r$$

bulunur. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+6} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+10} = r \quad (2.7)$$

ve

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+9} = r + 1 \quad (2.8)$$

dir. Şimdi Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv)'yi art arda $\frac{r}{2} - 2$ uygulayarak

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+10} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+13} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+19} = \dots = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+10+9(\frac{r}{2}-2)} = r$$

ve

$$r_{N_1+9r-18} = 2r - 3$$

elde ederiz. Lemma 2.1 (ii)'den

$$r_{N_1+9r-17} = r_{N_1+9r-14} = r$$

ve

$$r_{N_1+9r-15} = -2$$

bulunur. Böylece Lemma 2.1 (iv) tekrar uygulanabilir. Öyleyse, Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $r - 2$ 'den büyüktür.

Şimdi kabul edelim ki Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan doğal sayıların sayısı r olsun. Denklem (2.7) ve (2.8)'den önceki hesaplamalarda Lemma 2.1 (iv) ve Lemma 2.1 (ii) $\frac{r}{2} - 1$ kez, Lemma 2.1 (iv) bir kez, Lemma 2.1 (iii) bir kez uygulandı. Denklem (2.7) ve (2.8)'den sonra Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv)'yi art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulayarak

$$r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+10} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+13} = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+19} = \dots = r_{N_1+9(\frac{r}{2}-1)+10+9(\frac{r}{2}-1)} = r$$

ve

$$r_{N_1+9r-9} = 2r - 1$$

elde ederiz. Lemma 2.1 (ii)'den

$$r_{N_1+9r-8} = r_{N_1+9r-5} = r$$

ve

$$r_{N_1+9r-6} = 0$$

bulunur. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N_1+9r-5} = r_{N_1+9r-1} = r$$

ve

$$r_{N_1+9r-2} = 1 - r$$

olur, ancak $N_1 + 9r - 1 < 9r - 1$ doğru olmadığından Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $r - 1$ dir. \square

Lemma 2.3. $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere denklem (2.2)'nin bir çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ ve $r = \max\{|r_{-1} - r_0|, \min\{r_{-1}, r_0\}\}$ olsun. Öyleyse r tek sayısı ve bir N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan $N \leq \frac{9r-1}{2}$ doğal sayılarının sayısı $(r-1)/2$ 'dir.

(ii) Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan $N \leq \frac{9r-1}{2}$ doğal sayılarının sayısı 1'dir.

(iii) Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan $N \leq \frac{9r-1}{2}$ doğal sayılarının sayısı $(r-1)/2$ 'dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ denklem (2.2)'nin bir çözümü ve $r = \max\{|r_{-1} - r_0|, \min\{r_{-1}, r_0\}\}$ sayısı tek olsun. $r = 1$ ve $r = 3$ için lemmanın sağlandığı açıktır. Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan N doğal sayıların sayısı $(r-3)/2$ olsun. Lemma 2.1 ve Sonuç 2.1'den Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv) 'ü art arda $\frac{r-3}{2}$ kez uygulayabiliriz. Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı N_1 ise $N_1 \leq 6$ dir. Öyleyse

$$r_{N_1} = r_{N_1+3} = r_{N_1+9} = r_{N_1+12} = r_{N_1+18} = \dots = r_{N_1+\frac{9(r-3)}{2}-6} = r_{N_1+\frac{9(r-3)}{2}} = r$$

ve $r \leq r_{N_1-1+9i} < 2r, r_{N_1+2+9i} < 0$ için $i = 0, 1, 2, \dots, \frac{r-3}{2} - 1$ dir. Buradan

$$r_{N_1+\frac{9(r-3)}{2}-1} = 2r - 2$$

bulunur. Böylece Lemma 2.1 (ii) tekrar uygulanabilir. Öyleyse, Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $(r-3)/2$ 'den büyüktür.

Şimdi kabul edelim ki Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan N doğal sayıların sayısı $(r+1)/2$ olsun. Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv) art arda $\frac{r-1}{2}$ kez uygulanarak

$$r_{N_1} = r_{N_1+3} = r_{N_1+9} = r_{N_1+12} = r_{N_1+18} = \dots = r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}-6} = r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}} = r$$

ve

$$r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} - 1} = 2r$$

elde edilir. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2}} = r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 4} = r$$

ve

$$r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 3} = r + 1$$

bulunur. Lemma 2.1 (ii)'den

$$r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 4} = r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 7} = r$$

olur, ancak $N_1 + \frac{9r-1}{2} < \frac{9r-1}{2}$ doğru olmadığından Lemma 2.1 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $(r-1)/2$ dir.

(ii) Kabul edelim ki Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan N doğal sayıların sayısı 2 olsun. Bu doğal sayılardan en küçüğü N_1 ise $N_1 \leq 6$ dir. $r_{N_1-1} = 0$, $r_{N_1} = r$ için

$$r_{N_1} = r_{N_1+4} = r$$

ve

$$r_{N_1+3} = 1 - r$$

dir. Buradan Lemma 2.1 (iv) ve Lemma 2.1 (ii)'yi art arda $\frac{r-1}{2}$ kez uygulanarak

$$r_{N_1+4} = r_{N_1+10} = r_{N_1+13} = r_{N_1+19} = r_{N_1+22} = \dots = r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 4} = r$$

ve

$$r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 3} = 0$$

elde edilir. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 4} = r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{4} + 7} = r$$

olur, ancak $N_1 + \frac{9r-1}{2} < \frac{9r-1}{2}$ doğru olmadığından Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 2'den küçüktür.

$r_{N_1-1} = 2r$, $r_{N_1} = r$ için

$$r_{N_1} = r_{N_1+4} = r$$

ve

$$r_{N_1+3} = 1 + r$$

dir. Buradan Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv)'yi art arda $\frac{r-1}{2}$ kez uygulanarak

$$r_{N_1+4} = r_{N_1+7} = r_{N_1+13} = r_{N_1+16} = r_{N_1+22} = \dots = r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}+4} = r$$

$$r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}+3} = 2r$$

elde edilir. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}+4} = r_{N_1+\frac{9(r-1)}{4}+7} = r$$

olur, ancak $N_1 + \frac{9r-1}{2} < \frac{9r-1}{2}$ doğru olmadığından Lemma 2.1 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 1 dir.

(iii) Kabul edelim ki $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ denklem (2.2)'nin bir çözümü ve $r = \max\{|r_{-1} - r_0|, \min\{r_{-1}, r_0\}\}$ sayısı tek olsun. $r = 1$ ve $r = 3$ için lemmanın sağlandığı açıktır. Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan N doğal sayıların sayısı $(r-3)/2$ olsun. Lemma 2.1 ve Sonuç 2.1'den Lemma 2.1 (iv) ve Lemma 2.1 (ii) 'ü art arda $\frac{r-3}{2}$ kez uygulayabiliriz. Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı N_1 ise $N_1 \leq 6$ dır. Öyleyse

$$r_{N_1} = r_{N_1+6} = r_{N_1+9} = r_{N_1+15} = r_{N_1+18} = \dots = r_{N_1+\frac{9(r-3)}{2}-3} = r_{N_1+\frac{9(r-3)}{2}} = r$$

ve $r_{N_1-1+9i} < 0, r \leq r_{N_1+5+9i} < 2r$ için $i = 0, 1, 2, \dots, \frac{r-3}{2} - 1$ dir. Buradan

$$r_{N_1+\frac{9(r-3)}{2}-1} = -2$$

bulunur, böylece Lemma 2.1 (iv) tekrar uygulanabilir. Öyleyse, Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $(r-3)/2$ 'den büyüktür.

Şimdi kabul edelim ki Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan N doğal sayıların sayısı $(r+1)/2$ olsun. Lemma 2.1 (iv) ve Lemma 2.1 (ii) art arda $\frac{r-1}{2}$ kez uygulanarak

$$r_{N_1} = r_{N_1+6} = r_{N_1+9} = r_{N_1+15} = r_{N_1+18} = \dots = r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}-3} = r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}} = r$$

ve

$$r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}-1} = 0$$

elde edilir. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}} = r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}+4} = r$$

ve

$$r_{N_1+\frac{9(r-1)}{2}+3} = 1 - r$$

bulunur. Lemma 2.1 (iv)'den

$$r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 4} = r_{N_1 + \frac{9(r-1)}{2} + 10} = r$$

olur, ancak $N_1 + \frac{9r-1}{2} < \frac{9r-1}{2}$ doğru olmadığından Lemma 2.1 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $(r-1)/2$ dir. \square

Teorem 2.2. Denklem (2.2)'nin başlangıç şartları $r_{-1}, r_0 \in \mathbb{N}$ ve

$$r = \max \{|r_{-1} - r_0|, \min \{r_{-1}, r_0\}\}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) Eğer r bir çift sayı ise denklem (2.2)'nin çözümleri periyodiktir ve periyodu $9r-1$ 'dir.
- (ii) Eğer r bir tek sayı ise denklem (2.2)'nin çözümleri periyodiktir ve periyodu $\frac{9r-1}{2}$ 'dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki $r = \max \{|r_{-1} - r_0|, \min \{r_{-1}, r_0\}\}$ ve r çift olsun. Lemma 2.1, Lemma 2.2 ve Sonuç 2.1 göz önüne alınır ve Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv) art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulanırsa

$$r_N = r_{N+3} = r_{N+9} = r_{N+12} = \dots = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)} = r$$

ve

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)-1} = r_{N-1} + r - 2$$

elde edilir. Lemma 2.1 (ii)'den

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)} = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+3} = r$$

ve

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+2} = r_{N-1} - 2r_N + r - 1$$

bulunur. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+3} = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+7} = r$$

ve

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+6} = r_{N-1} - 3r_N + r$$

bulunur. Lemma 2.1 (iv)'den

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+7} = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+13} = r$$

ve

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+12} = 1 + r_{N-1} - r_N + r$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv) art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulanarak

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+13} = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+16} = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+22} = \dots = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+13+9(\frac{r}{2}-1)} = r$$

ve

$$r_{N+9r-6} = r_{N-1} - r_N + 2r - 1$$

elde edilir. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N+9r-5} = r_{N+9r-1} = r$$

ve

$$r_{N+9r-2} = r_{N-1} - 2r_N + 2r$$

bulunur. $r_N = r$ olduğundan $r_{N+9r-2} = r_{N-1}$ olup (i)'nin ispatı tamamlanır.

(ii) Kabul edelim ki $r = \max\{|r_{-1} - r_0|, \min\{r_{-1}, r_0\}\}$ ve r tek olsun. Lemma 2.1, Lemma 2.3 ve Sonuç 2.1 göz önüne alınır ve Lemma 2.1 (ii) ve Lemma 2.1 (iv) art arda $\frac{r-1}{2}$ kez uygulanırsa

$$r_N = r_{N+3} = r_{N+9} = r_{N+12} = \dots = r_{N+9(\frac{r-1}{2})} = r$$

ve

$$r_{N+9(\frac{r-1}{2})-1} = r_{N-1} + r - 1$$

elde edilir. Lemma 2.1 (iii)'den

$$r_{N+9(\frac{r-1}{2})} = r_{N+9(\frac{r-1}{2})+4} = r$$

ve

$$r_{N+9(\frac{r-1}{2})+3} = r + r_{N-1} - r_N$$

bulunur. $r_N = r$ olduğundan $r_{N+9\frac{r-3}{2}} = r_{N-1}$ olup (ii)'nin ispatı tamamlanır. \square

Lemma 2.4. $z_1, z_2 \in 2\mathbb{N}$ ve $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in (0, 1/4]$ veya $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in [-1/4, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}, r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = \max\{|z_1 - z_2|, \min\{z_1, z_2\}\}, M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \frac{c}{d}, r - \frac{c}{d}, r + \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r - \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|\right\}$

ve N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Eğer $r_N \in M$ ise $r_N = r_{N+3}$, $r_{N+4} \in M$ veya $r_N = r_{N+6}$ dir.
- (ii) Eğer $r_N \in M$ ve $r_N - 1/2 \leq r_{N-1} \leq 2r_N - 1/2$ ise $r_{N+2} = 1 - 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+3}$ dür.
- (iii) Eğer $r_N \in M$ ve $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ ise $r_{N+5} = 1 + 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+6}$ dir.
- (iv) Eğer $r_N \in M$ ve $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ ise $r_{N+3} = 1 + 2r_{N-1} - r_N$ ve $r_{N+4} = r_N - r_{N-1}$ dir.
- (v) Eğer $r_N \in M$ ve $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ ise $r_{N+3} = 1 - 3r_N + 2r_{N-1}$ ve $r_{N+4} = r_{N-1} - r_N$ dir.

İspat. (i) Lemma'da verilen tüm koşulların sağlandığını ve $r = z_1$ olduğunu varsayalım. Öyleyse $z_1 < z_2 \leq 2z_1$ dir.

$$\begin{aligned}
r_1 &= \max \{r_0, 1 - r_0\} - r_{-1} = r_0 - r_{-1} = z_2 - z_1 + \frac{c}{d} - \frac{a}{b}, \\
r_2 &= \max \{r_1, 1 - r_1\} - r_0 = -z_1 - \frac{a}{b}, \\
r_3 &= \max \{r_2, 1 - r_2\} - r_1 = 1 + 2z_1 - z_2 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_4 &= \max \{r_3, 1 - r_3\} - r_2 = 1 + 3z_1 - z_2 + \frac{3a}{b} + \frac{c}{d}, \\
r_5 &= \max \{r_4, 1 - r_4\} - r_3 = z_1 + \frac{a}{b} \in M, \\
r_6 &= \max \{r_5, 1 - r_5\} - r_4 = -2z_1 + z_2 - 1 - \frac{2a}{b} + \frac{c}{d}, \\
r_7 &= \max \{r_6, 1 - r_6\} - r_5 = z_1 - z_2 + 2 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_8 &= \max \{r_7, 1 - r_7\} - r_6 = z_1 + \frac{a}{b}, \\
r_9 &= \max \{r_8, 1 - r_8\} - r_7 = z_2 - 2 + \frac{c}{d}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $z_2 = z_1 + 2$ ise $r_9 = z_1 + \frac{c}{d} \in M$ olup

$$\begin{aligned}
r_{10} &= \max \{r_9, 1 - r_9\} - r_8 = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}, \\
r_{11} &= \max \{r_{10}, 1 - r_{10}\} - r_9 = 1 - z_1 + \frac{a}{b} - \frac{2c}{d}, \\
r_{12} &= \max \{r_{11}, 1 - r_{11}\} - r_{10} = z_1 + \frac{c}{d} = r_9
\end{aligned}$$

dir. Eğer $z_2 \neq z_1 + 2$ ise

$$\begin{aligned}
r_{10} &= \max \{r_9, 1 - r_9\} - r_8 = z_2 - z_1 - 2 + \frac{c}{d} - \frac{a}{b}, \\
r_{11} &= \max \{r_{10}, 1 - r_{10}\} - r_9 = -z_1 - \frac{a}{b}, \\
r_{12} &= \max \{r_{11}, 1 - r_{11}\} - r_{10} = 2z_1 - z_2 + 3 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_{13} &= \max \{r_{12}, 1 - r_{12}\} - r_{11} = 3z_1 - z_2 + 3 + \frac{3a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_{14} &= \max \{r_{13}, 1 - r_{13}\} - r_{12} = z_1 + \frac{a}{b} = r_8, \\
r_{15} &= \max \{r_{14}, 1 - r_{14}\} - r_{13} = z_2 - 2z_1 - 3 - \frac{2a}{b} + \frac{c}{d}, \\
r_{16} &= \max \{r_{15}, 1 - r_{15}\} - r_{14} = z_1 - z_2 + 4 + \frac{a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_{17} &= \max \{r_{16}, 1 - r_{16}\} - r_{15} = z_1 + \frac{a}{b} = r_{14}, \\
r_{18} &= \max \{r_{17}, 1 - r_{17}\} - r_{16} = z_2 - 4 + \frac{c}{d}.
\end{aligned}$$

Burada iki durum söz konusudur $z_2 = z_1 + 4$ ve $z_2 \neq z_1 + 4$. Eğer $z_2 = z_1 + 4$ ise $r_{18} = z_1 + \frac{c}{d} \in M$ ve

$$\begin{aligned}
r_{19} &= \max \{r_{18}, 1 - r_{18}\} - r_{17} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}, \\
r_{20} &= \max \{r_{19}, 1 - r_{19}\} - r_{18} = 1 - z_1 + \frac{a}{b} - \frac{2c}{d}, \\
r_{21} &= \max \{r_{20}, 1 - r_{20}\} - r_{19} = z_1 + \frac{c}{d} = r_{18}
\end{aligned}$$

dir. Hesaplamalar $z_2 = z_1 + 2$ ve $z_2 \neq z_1 + 2$ 'deki gibi devam eder. $r = z_2$ ve $r = |z_1 - z_2|$ durumları da benzer şekilde yapılabilir. Böylece Lemma 2.4 (i)'in doğru olduğu görülür.

(ii) Lemma'da verilen tüm koşulların sağlandığını, $r_N \in M$ ve $r_N - \frac{1}{2} \leq r_{N-1} \leq 2r_N - \frac{1}{2}$ eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Öyleyse

$$\begin{aligned}
r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\
r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1}, \\
r_{N+3} &= \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = r_N
\end{aligned}$$

dir. Böylece $r_N = r_{N+3}$ bulunur.

(iii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $r_{N-1} <$

$-1/2 < r_N$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = -r_N, \\ r_{N+4} &= \max \{-r_N, 1 + r_N\} + r_{N-1} = 1 + r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+5} &= \max \{1 + r_N + r_{N-1}, -r_N - r_{N-1}\} + r_N = 1 + 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+6} &= \max \{1 + 2r_N + r_{N-1}, -2r_N - r_{N-1}\} - 1 - r_N - r_{N-1} = r_N \end{aligned}$$

dir. Böylece $r_N = r_{N+6}$ bulunur.

(iv) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 - r_N + 2r_{N-1}, \\ r_{N+4} &= \max \{1 - r_N + 2r_{N-1}, r_N - 2r_{N-1}\} + r_{N-1} = r_N - r_{N-1} \end{aligned}$$

dir.

(v) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 - 3r_N + 2r_{N-1}, \\ r_{N+4} &= \max \{1 - 3r_N + 2r_{N-1}, 3r_N - 2r_{N-1}\} - 1 + 3r_N - 2r_{N-1} = r_{N-1} - r_N \end{aligned}$$

dir. □

Sonuç 2.2. Lemma 2.4'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) Lemma 2.4 (ii)'de verilen $r_N - 1/2 \leq r_{N-1} \leq 2r_N - 1/2$ şartı düzenlenirse $-r_N + 1/2 \leq 1 - 2r_N + r_{N-1} \leq 1/2$ ve buradan $-r_N + 1/2 \leq r_{N+2} \leq 1/2$ olur. Öyleyse Lemma 2.4 (ii) uygulandıktan sonra Lemma 2.4 (iii) veya Lemma 2.4 (iv) uygulanabilir.

(ii) Lemma 2.4 (iii)'de $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ şartı ve $r_{N-1} < -r_N$ olamayacağı göz önüne alınırsa Lemma 2.4 (iii) uygulandıktan sonra Lemma 2.4 (ii) veya Lemma 2.4

(v) uygulanabilir.

(iii) Lemma 2.4 (iv)'de $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ şartı ve $1/4 < r_{N-1} \leq 1/2$ olamayacağı göz önüne alınırsa Lemma 2.4 (iv) uygulandıktan sonra Lemma 2.4 (iii) uygulanabilir.

(iv) Lemma 2.4 (v)'de $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ şartı düzenlenirse $r_N < 1 - 3r_N + 2r_{N-1}$ elde edilir. Öyleyse Lemma 2.4 (v) uygulandıktan sonra Lemma 2.4 (ii) uygulanabilir.

Lemma 2.5. $z_1, z_2 \in 2\mathbb{N}$ ve $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in (0, 1/4]$ veya $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in [-1/4, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}, r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = \max\{|z_1 - z_2|, \min\{z_1, z_2\}\}, M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \frac{c}{d}, r - \frac{c}{d}, r + \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r - \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|\right\}$ ve N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Lemma 2.4 (ii)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(ii) Lemma 2.4 (iii)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(iii) Lemma 2.4 (iv)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı 6 'dır.

(iv) Lemma 2.4 (v)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı 6 'dır.

İspat. (i) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.4 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ ve $r_N \in M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \frac{c}{d}, r - \frac{c}{d}, r + \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r - \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|\right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez sonra Lemma 2.4 (ii), Lemma 2.4 (iv) ve Lemma 2.4 (iii) bir kez, Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez ve Lemma 2.4 (v) bir kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.4 (ii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$r_{N_1+45r-6} = 3 + 7r_{N_1} - 2r_{N_1-1} - 4r,$$

$$r_{N_1+45r-5} = 1 + 3r_{N_1} - r_{N_1-1} - r \in M$$

elde edilir. Şimdi Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, sonra Lemma 2.4 (ii), Lemma 2.4 (iv) ve Lemma 2.4 (iii) bir kez, Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 2\right)$ kez uygulanırsa

$$r_{N_1+54r-20} = 3r_{N_1} - r_{N_1-1} - 1,$$

$$r_{N_1+54r-19} = 1 + 2r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M$$

bulunur. $r_{N_1+54r-19} - \frac{1}{2} \leq r_{N_1+54r-20} \leq 2r_{N_1+54r-19} - \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (ii) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.4 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ 'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.4 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 5$ olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$r_{N_1+54r-6} - \frac{1}{2} \leq r_{N_1+54r-7} \leq 2r_{N_1+54r-6} - \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.4 (ii)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-3}$ olur, ancak $N_1+54r-6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.4 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(ii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.4 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ ve $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \frac{c}{d}, r - \frac{c}{d}, r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.4 (iii) ve Lemma 2.4 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1 \right)$ kez sonra Lemma 2.4 (iii) ve Lemma 2.4 (v)'i birer kez, Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1 \right)$ kez ardından Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iv) birer kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.4 (iii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1+45r-6} &= 3r_{N_1} + 2r_{N_1-1} - 2r - 1, \\ r_{N_1+45r-5} &= r - r_{N_1} - r_{N_1-1} + 1 \in M \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Lemma 2.4 (iii) ve Lemma 2.4 (ii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1 \right)$ kez, sonra Lemma 2.4 (iii), Lemma 2.4 (v) birer kez, Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 2 \right)$ kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} r_{N_1+54r-23} &= 5r_{N_1} + 3r_{N_1-1} - 6, \\ r_{N_1+54r-22} &= 2r_{N_1} + r_{N_1-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

bulunur. $r_{N_1+54r-23} < -1/2$ olduğundan Lemma 2.4 (iii) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.4 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ 'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.4 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 5$ olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$r_{N_1+54r-7} < -1/2 < r_{N_1+54r-6}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.4 (iii)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r}$ olur, ancak $N_1+54r-6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.4 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı

$6r - 6$ 'dır.

(iii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.4 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5 ve $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \frac{c}{d}, r - \frac{c}{d}, r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.4 (iv)'yi bir kez, Lemma 2.4 (iii) ve Lemma 2.4 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1 \right)$, Lemma 2.4 (iii) ve Lemma 2.4 (v)'i birer kez, Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1 \right)$ kez ardından Lemma 2.4 (ii)'yi bir kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.4 (iii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1+45r-6} &= r_{N_1} - r, \\ r_{N_1+45r-5} &= r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M \end{aligned}$$

elde edilir. $-1/2 \leq r_{N_1+45r-6} \leq 1/2 < r_{N_1+45r-5}$ olduğundan Lemma 2.4 (iv) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.4 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.4 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 7 olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$-1/2 \leq r_{N_1+54r-7} \leq 1/2 < r_{N_1+54r-6}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.4 (iv)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-2}$ olur, ancak $N_1 + 54r - 6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.4 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 6'dır.

(iv) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.4 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5 ve $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \frac{c}{d}, r - \frac{c}{d}, r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.4 (v)'yi bir kez, Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1 \right)$ kez, Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iv)'i birer kez bir kez, Lemma 2.4 (iii) ve Lemma 2.4 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1 \right)$ kez, ardından Lemma 2.4 (iii)'yi bir kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.4 (v)'i sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1+45r-6} &= r_{N_1} + r, \\ r_{N_1+45r-5} &= r_{N_1} - r_{N_1-1} + 2r \in M \end{aligned}$$

elde edilir. $2r_{N_1+45r-5} - 1/2 < r_{N_1+45r-6}$ olduğundan Lemma 2.4 (v) uygulanabilir.

Öyleyse Lemma 2.4 (v)'i sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.4 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 7 olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$2r_{N_1+54r-6} - 1/2 < r_{N_1+54r-7}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.4 (v)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-2}$ olur, ancak $N_1+54r-6 < 54r-6$ doğru olmadığından Lemma 2.4 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 6'dır. \square

Teorem 2.3. $z_1, z_2 \in 2\mathbb{N}$ ve $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in (0, 1/4]$ veya $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in [-1/4, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}, r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = \max\{|z_1 - z_2|, \min\{z_1, z_2\}\}$ olmak üzere denklem (2.2)'nin çözümleri periyodiktir ve periyodu $54r - 6$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}, r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ için $z_1, z_2 \in 2\mathbb{N}$ ve $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in (0, 1/4]$ veya $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in [-1/4, 0)$ olsun. $r = \max\{|z_1 - z_2|, \min\{z_1, z_2\}\}$ ve N bir doğal sayı olmak üzere $r_N \in M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \frac{c}{d}, r - \frac{c}{d}, r + \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r - \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|\right\}$ olsun. Lemma 2.4, Lemma 2.5 ve Sonuç 2.2 göz önüne alınarak Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\frac{r}{2} - 1$ kez uygulanarak

$$r_N = r_{N+3} = r_{N+9} = r_{N+12} = \dots = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)}$$

ve

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)-1} = r_{N-1} + r - 2,$$

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)} = r_N$$

elde edilir. $2r_N - \frac{1}{2} \geq r_{N-1} + r - 2$ olduğundan Lemma 2.4 (ii)'den

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)-1} = r_{N-1} + r - 2r_N - 1,$$

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+3} = r_N$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq r_{N-1} + r - 2r_N - 1 \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iv)'den

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+6} = 2r_{N-1} + 2r - 5r_N - 1,$$

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+7} = 3r_N - r_{N-1} - r + 1 \in M$$

olur. $2r_{N-1} + 2r - 5r_N - 1 < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iii)'den

$$\begin{aligned} r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+12} &= r_N + 2, \\ r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+13} &= 3r_N - r_{N-1} - r + 1 \in M \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+13} = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+16} = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+22} = \dots = r_{N+9(\frac{r}{2}-1)+13+9(\frac{r}{2}-1)}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} r_{N+9r-6} &= r_N + r, \\ r_{N+9r-5} &= 3r_N - r_{N-1} - r + 1 \in M \end{aligned}$$

bulunur. $6r_N - 2r_{N-1} - 2r + 2 - \frac{1}{2} < r + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.4 (v)'den

$$\begin{aligned} r_{N+9r-2} &= 3r_{N-1} - 7r_N + 5r - 2, \\ r_{N+9r-1} &= 2r - 2r_N + r_{N-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

olur. Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+9r-1} = r_{N+9r+2} = r_{N+9r+8} = \dots = r_{N+9r-1+9(\frac{r}{2}-1)}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)-2} &= 3r_{N-1} - 7r_N + 6r - 4, \\ r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)-1} &= 2r - 2r_N + r_{N-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

bulunur. $4r - 4r_N + 2r_{N-1} - 2 - \frac{1}{2} \geq 3r_{N-1} - 7r_N + 6r - 4$ olduğundan Lemma 2.4 (ii)'den

$$\begin{aligned} r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+1} &= r_{N-1} - 3r_N + 2r - 1, \\ r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+2} &= 2r - 2r_N + r_{N-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

olur. $-\frac{1}{2} \leq r_{N-1} - 3r_N + 2r - 1 \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iv)'den

$$r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+5} = r_{N-1} - 4r_N + 2r,$$

$$r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+6} = r_N \in M$$

elde edilir. $r_{N-1} - 4r_N + 2r < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iii)'den

$$r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+11} = r_{N-1} - 2r_N + 2r + 1,$$

$$r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+12} = r_N \in M$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+12} = r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+15} = r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+21} = \dots = r_{N+9r+9(\frac{r}{2}-1)+12+9(\frac{r}{2}-1)}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+18r-7} = 3r + r_{N-1} - 2r_N - 1,$$

$$r_{N+18r-6} = r_N \in M$$

olur. $2r_N - \frac{1}{2} < 3r + r_{N-1} - 2r_N - 1$ olduğundan Lemma 2.4 (v)'den

$$r_{N+18r-3} = 6r + 2r_{N-1} - 7r_N - 1,$$

$$r_{N+18r-2} = 3r + r_{N-1} - 3r_N - 1 \in M$$

bulunur. Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+18r-2} = r_{N+18r+1} = r_{N+18r+7} = \dots = r_{N+18r-2+9(\frac{r}{2}-1)}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)-3} = 7r + 2r_{N-1} - 7r_N - 3,$$

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)-2} = 3r + r_{N-1} - 3r_N - 1 \in M$$

bulunur. $6r + 2r_{N-1} - 6r_N - 2 - \frac{1}{2} \geq 7r + 2r_{N-1} - 7r_N - 3$ olduğundan Lemma 2.4

(ii)'den

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)} = r - r_N,$$

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)+1} = 3r + r_{N-1} - 3r_N - 1 \in M$$

olur. $-\frac{1}{2} \leq r - r_N \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iv)'den

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)+4} = 2 - r + r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)+5} = 2r + r_{N-1} - 2r_N - 1 \in M$$

elde edilir. $2 - r + r_N - r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iii)'den

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)+10} = 1 - 3r_N + r_{N-1} + 3r,$$

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)+11} = 2r + r_{N-1} - 2r_N - 1 \in M$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)+11} = r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)+14} = r_{N+18r+9(\frac{r}{2}-1)+20} = \dots = r_{N+18r+18(\frac{r}{2}-1)+11}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+27r-8} = 4r + r_{N-1} - 3r_N - 1,$$

$$r_{N+27r-7} = 2r + r_{N-1} - 2r_N - 1 \in M$$

olur. $4r + 2r_{N-1} - 4r_N - 2 - \frac{1}{2} < 4r + r_{N-1} - 3r_N - 1$ olduğundan Lemma 2.4 (v)'den

$$r_{N+27r-4} = 2 - r_{N-1} + 2r,$$

$$r_{N+27r-3} = 2r - r_N \in M$$

bulunur. Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+27r-3} = r_{N+27r} = r_{N+27r+6} = \dots = r_{N+27r-3+9(\frac{r}{2}-1)}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)-4} = 3r - r_{N-1},$$

$$r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)-3} = 2r - r_N \in M$$

olur. $4r - 2r_N - \frac{1}{2} \geq 3r - r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.4 (ii)'den

$$\begin{aligned} r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)-1} &= 1 - r + 2r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)} &= 2r - r_N \in M \end{aligned}$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq 1 - r + 2r_N - r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iv)'den

$$\begin{aligned} r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)+3} &= 3 - 4r + 5r_N - 2r_{N-1}, \\ r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)+4} &= 3r - 3r_N + r_{N-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

elde edilir. $3 - 4r + 5r_N - 2r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iii)'den

$$\begin{aligned} r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)+9} &= 2 + 2r - r_N, \\ r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)+10} &= 3r - 3r_N + r_{N-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)+10} = r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)+13} = r_{N+27r+9(\frac{r}{2}-1)+19} = \dots = r_{N+27r+18(\frac{r}{2}-1)+10}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} r_{N+36r-9} &= 3r - r_N, \\ r_{N+36r-8} &= 3r - 3r_N + r_{N-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

olur. $6r - 6r_N + 2r_{N-1} - 2 - \frac{1}{2} < 3r - r_N$ olduğundan Lemma 2.4 (v)'den

$$\begin{aligned} r_{N+36r-5} &= 4 - 3r + 7r_N - 3r_{N-1}, \\ r_{N+36r-4} &= 2r_N - r_{N-1} + 1 \in M \end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+36r-4} = r_{N+36r-1} = r_{N+36r+5} = \dots = r_{N+36r-4+9(\frac{r}{2}-1)}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)-5} &= 2 - 2r + 7r_N - 3r_{N-1}, \\ r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)-4} &= 2r_N - r_{N-1} + 1 \in M \end{aligned}$$

olur. $4r_N - 2r_{N-1} + 2 - \frac{1}{2} \geq 2 - 2r + 7r_N - 3r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.4 (ii)'den

$$r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)-2} = 1 + 3r_N - r_{N-1} - 2r,$$

$$r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)-1} = 2r_N - r_{N-1} + 1 \in M$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq 1 + 3r_N - r_{N-1} - 2r \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iv)'den

$$r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)+2} = 2 + 4r_N - r_{N-1} - 4r,$$

$$r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)+3} = 2r - r_N \in M$$

elde edilir. $2 + 4r_N - r_{N-1} - 4r < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iii)'den

$$r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)+8} = 3 + 2r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)+9} = 2r - r_N \in M$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)+9} = r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)+12} = r_{N+36r+9(\frac{r}{2}-1)+18} = \dots = r_{N+36r+18(\frac{r}{2}-1)+9}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+45r-10} = 1 + 2r_N - r_{N-1} + r,$$

$$r_{N+45r-9} = 2r - r_N \in M$$

olur. $4r - 2r_N - \frac{1}{2} < 1 + 2r_N - r_{N-1} + r$ olduğundan Lemma 2.4 (v)'den

$$r_{N+45r-6} = 3 + 7r_N - 2r_{N-1} - 4r,$$

$$r_{N+45r-5} = 1 + 3r_N - r_{N-1} - r \in M$$

bulunur. Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+45r-5} = r_{N+45r-2} = r_{N+45r+4} = \dots = r_{N+45r-5+9(\frac{r}{2}-1)}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)-6} = 1 + 7r_N - 2r_{N-1} - 3r,$$

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)-5} = 1 + 3r_N - r_{N-1} - r \in M.$$

olur. $2 + 6r_N - 2r_{N-1} - 2r - \frac{1}{2} \geq 1 + 7r_N - 2r_{N-1} - 3r$ olduğundan Lemma 2.4 (ii)'den

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)-3} = r_N - r,$$

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)-2} = 1 + 3r_N - r_{N-1} - r \in M$$

olur. $-\frac{1}{2} \leq r_N - r \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iv)'den

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)+1} = r_{N-1} - r_N - r,$$

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)+2} = 1 + 2r_N - r_{N-1} \in M$$

elde edilir. $r_{N-1} - r_N - r < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.4 (iii)'den

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)+7} = 3 + 3r_N - r_{N-1} - r,$$

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)+8} = 1 + 2r_N - r_{N-1} \in M$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.4 (ii) ve Lemma 2.4 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)+8} = r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)+11} = r_{N+45r+9(\frac{r}{2}-1)+17} = \dots = r_{N+45r+18(\frac{r}{2}-1)+8}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+54r-11} = 1 + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+54r-10} = 1 + 2r_N - r_{N-1} \in M$$

olur. $2 + 4r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < 1 + 3r_N - r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.4 (v)'den

$$r_{N+54r-7} = r_{N-1},$$

$$r_{N+54r-6} = r_N$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Lemma 2.6. $z_1 \in 2\mathbb{N} + 1$, $z_2 \in 2\mathbb{N}$, $z_1 < z_2$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/4]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/2]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/4, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/2, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = \max\{|z_1 - z_2|, z_1\}$, $M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r - \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|\right\}$ ve N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $r_N \in M$ ise $r_N = r_{N+3}$, $r_{N+4} \in M$ veya $r_N = r_{N+6}$ dir.

(ii) Eğer $r_N \in M$ ve $r_N - 1/2 \leq r_{N-1} \leq 2r_N - 1/2$ ise $r_{N+2} = 1 - 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+3}$ dür.

(iii) Eğer $r_N \in M$ ve $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ ise $r_{N+5} = 1 + 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+6}$ dir.

(iv) Eğer $r_N \in M$ ve $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ ise $r_{N+3} = 1 - 3r_N + 2r_{N-1}$ ve $r_{N+4} = r_{N-1} - r_N$ dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın ve $r = z_1$ olsun. Öyleyse $z_1 < z_2 \leq 2z_1$ dir.

$$\begin{aligned} r_1 &= \max \{r_0, 1 - r_0\} - r_{-1} = r_0 - r_{-1} = z_2 - z_1 + \frac{c}{d} - \frac{a}{b}, \\ r_2 &= \max \{r_1, 1 - r_1\} - r_0 = -z_1 - \frac{a}{b}, \\ r_3 &= \max \{r_2, 1 - r_2\} - r_1 = 1 + 2z_1 - z_2 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d}, \\ r_4 &= \max \{r_3, 1 - r_3\} - r_2 = 1 + 3z_1 - z_2 + \frac{3a}{b} - \frac{c}{d}, \\ r_5 &= \max \{r_4, 1 - r_4\} - r_3 = z_1 + \frac{a}{b} \in M, \\ r_6 &= \max \{r_5, 1 - r_5\} - r_4 = -2z_1 + z_2 - 1 - \frac{2a}{b} + \frac{c}{d}, \\ r_7 &= \max \{r_6, 1 - r_6\} - r_5 = z_1 - z_2 + 2 + \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \end{aligned}$$

dir. Eğer $z_2 = z_1 + 1$ ise

$$\begin{aligned} r_8 &= \max \{r_7, 1 - r_7\} - r_6 = z_1 + 1 + \frac{3a}{b} - \frac{2c}{d}, \\ r_9 &= \max \{r_8, 1 - r_8\} - r_7 = z_1 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d} \in M, \\ r_{10} &= \max \{r_9, 1 - r_9\} - r_8 = -1 - \frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \\ r_{11} &= \max \{r_{10}, 1 - r_{10}\} - r_9 = 2 - z_1 - \frac{a}{b} \end{aligned}$$

dir. Kabul edelim ki $r_{11} > \frac{1}{2}$ olsun, buradan

$$\begin{aligned} r_{12} &= \max \{r_{11}, 1 - r_{11}\} - r_{10} = 3 - z_1 - \frac{c}{d}, \\ r_{13} &= \max \{r_{11}, 1 - r_{11}\} - r_{10} = 1 + \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \in M \end{aligned}$$

olur. Eğer $r_{11} \leq \frac{1}{2}$ ise

$$r_{12} = \max \{r_{11}, 1 - r_{11}\} - r_{10} = z_1 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d} = r_9$$

dir. Eğer $z_2 \neq z_1 + 1$ ise

$$r_8 = \max \{r_7, 1 - r_7\} - r_6 = z_1 + \frac{a}{b} = r_5,$$

$$r_9 = \max \{r_8, 1 - r_8\} - r_7 = z_2 - 2 + \frac{c}{d},$$

$$r_{10} = \max \{r_9, 1 - r_9\} - r_8 = z_2 - z_1 - 2 - \frac{a}{b} + \frac{c}{d},$$

$$r_{11} = \max \{r_{10}, 1 - r_{10}\} - r_9 = -z_1 - \frac{a}{b},$$

$$r_{12} = \max \{r_{11}, 1 - r_{11}\} - r_{10} = 2z_1 - z_2 + 3 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d},$$

$$r_{13} = \max \{r_{12}, 1 - r_{12}\} - r_{11} = 3z_1 - z_2 + 3 + \frac{3a}{b} - \frac{c}{d},$$

$$r_{14} = \max \{r_{13}, 1 - r_{13}\} - r_{12} = z_1 + \frac{a}{b} = r_8,$$

$$r_{15} = \max \{r_{14}, 1 - r_{14}\} - r_{13} = z_2 - 2z_1 - 3 - \frac{2a}{b} + \frac{c}{d},$$

$$r_{16} = \max \{r_{15}, 1 - r_{15}\} - r_{14} = z_1 - z_2 + 4 + \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$$

olur. Burada iki durum söz konusudur $z_2 = z_1 + 3$ ve $z_2 \neq z_1 + 3$. Eğer $z_2 = z_1 + 3$ ise

$$r_{17} = \max \{r_{16}, 1 - r_{16}\} - r_{15} = z_1 + 1 + \frac{3a}{b} - \frac{2c}{d},$$

$$r_{18} = \max \{r_{17}, 1 - r_{17}\} - r_{16} = z_1 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d} \in M$$

olur. Bu hesaplamalar $z_2 = z_1 + 1$ ve $z_2 \neq z_1 + 1$ durumundaki gibi devam eder. $r = |z_1 - z_2|$ durumu için de benzer işlemler yapılabilir. Böylece Lemma 2.6 (i)'nin doğru olduğu kolayca görülür.

(ii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $r_N - \frac{1}{2} \leq r_{N-1} \leq 2r_N - \frac{1}{2}$ olsun. Öyleyse

$$r_{N+1} = \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+2} = \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+3} = \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = r_N$$

olup $r_N = r_{N+3}$ bulunur.

(iii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $r_{N-1} <$

$-1/2 < r_N$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = -r_N, \\ r_{N+4} &= \max \{-r_N, 1 + r_N\} + r_{N-1} = 1 + r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+5} &= \max \{1 + r_N + r_{N-1}, -r_N - r_{N-1}\} + r_N = 1 + 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+6} &= \max \{1 + 2r_N + r_{N-1}, -2r_N - r_{N-1}\} - 1 - r_N - r_{N-1} = r_N \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+6}$ bulunur.

(iv) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 - 3r_N + 2r_{N-1}, \\ r_{N+4} &= \max \{1 - 3r_N + 2r_{N-1}, 3r_N - 2r_{N-1}\} - 1 + 3r_N - 2r_{N-1} = r_{N-1} - r_N \end{aligned}$$

dir. □

Sonuç 2.3. Lemma 2.6'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- (i) Lemma 2.6 (ii)'de verilen $r_N - 1/2 \leq r_{N-1} \leq 2r_N - 1/2$ şartı düzenlenirse $-r_N + 1/2 \leq 1 - 2r_N + r_{N-1} \leq 1/2$ ve buradan $-r_N + 1/2 \leq r_{N+2} \leq 1/2$ olur. Öyleyse Lemma 2.6 (ii) uygulandıktan sonra Lemma 2.6 (iii) uygulanabilir.
- (ii) Lemma 2.6 (iii)'de $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ şartı ve $r_{N-1} < -r_N$ olamayacağı göz önüne alınırsa Lemma 2.6 (iii) uygulandıktan sonra Lemma 2.6 (ii) veya Lemma 2.6 (iv) uygulanabilir.
- (iii) Lemma 2.4 (iv)'de $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ şartı düzenlenirse $r_N < 1 - 3r_N + 2r_{N-1}$ elde edilir. Öyleyse Lemma 2.6 (iv) uygulandıktan sonra Lemma 2.6 (ii) uygulanabilir.

Lemma 2.7. $z_1 \in 2\mathbb{N} + 1$, $z_2 \in 2\mathbb{N}$, $z_1 < z_2$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/4]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/2]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/4, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/2, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = \max \{|z_1 - z_2|, z_1\}$, $M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r - \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|\right\}$ ve N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Lemma 2.6 (ii)'yi sağlayan $N \leq 27r - 3$ doğal sayılarının sayısı $3r - 3$ 'dür.
- (ii) Lemma 2.6 (iii)'yi sağlayan $N \leq 27r - 3$ doğal sayılarının sayısı $3r - 3$ 'dür.

(iii) Lemma 2.6 (iv)'yi sağlayan $N \leq 27r - 3$ doğal sayılarının sayısı 6'dır.

İspat. (i) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.6 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $3r - 4$ ve $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda en fazla $\left(\frac{r-1}{2} \right)$ kez uygulanır, ardından Lemma 2.6 (iv) bir kez uygulanır, bu işlemler 5 kez tekrar edilip sonrasında Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-3}{2} \right)$ kez uygulanırsa Lemma 2.6 (ii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$r_{N_1+27(r-1)+10} = -1 + 3r_{N_1} - r_{N_1-1},$$

$$r_{N_1+27(r-1)+11} = 1 + 2r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M$$

elde edilir. $r_{N_1+27(r-1)+11} - \frac{1}{2} \leq r_{N_1+27(r-1)+10} \leq 2r_{N_1+27(r-1)+11} - \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.6 (ii) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.6 (ii)'yi sağlayan sayıların sayısı $3r - 4$ 'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.6 (ii)'yi sağlayan sayıların sayısı $3r - 2$ olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$r_{N_1+27r-3} - \frac{1}{2} \leq r_{N_1+27r-4} \leq 2r_{N_1+27r-3} - \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.6 (ii)'den $r_{N_1+27r-3} = r_{N_1+27r}$ olur, ancak $N_1 + 27r - 3 < 27r - 3$ doğru olmadığından Lemma 2.6 (ii)'yi sağlayan sayıların sayısı $3r - 3$ olur.

(ii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.6 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $3r - 4$ ve $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.6 (iii) ve Lemma 2.6 (iv) bir kez uygulanırsa Lemma 2.6 (iii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$r_{N_1+9} = r_{N_1} + 2r_{N_1-1} + 3,$$

$$r_{N_1+10} = r_{N_1} - r_{N_1-1} + 1 \in M$$

elde edilir. Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-1}{2} \right)$ kez, Lemma 2.6 (iv)'yi bir kez uygulayalım. Bu işlem 5 kez tekrar edilirse

$$r_{N_1+\frac{45(r-1)}{2}+29} = 2r_{N_1} + r_{N_1-1} - r + 2,$$

$$r_{N_1+\frac{45(r-1)}{2}+30} = r_{N_1} \in M$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-5}{2}\right)$ kez, Lemma 2.6 (ii) bir kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} r_{N_1+27r-13} &= r_{N_1-1} - 2, \\ r_{N_1+27r-12} &= r_{N_1} \in M \end{aligned}$$

elde edilir. $r_{N_1+27r-13} < -1/2 < r_{N_1+27r-12}$ olduğundan Lemma 2.6 (iii) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.6 (iii)'yi sağlayan sayıların sayısı $3r - 4$ 'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.6 (iii)'yi sağlayan sayıların sayısı $3r - 2$ olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıdaki $r_{N_1+27r-12}$ teriminden sonra Lemma 2.6 (iii) ve Lemma 2.6 (ii) birer kez uygulanırsa

$$r_{N_1+27r-4} < -1/2 < r_{N_1+27r-3}$$

bulunur. Bu ve Lemma 2.6 (iii)'den $r_{N_1+27r-3} = r_{N_1+27r+3}$ olur, ancak $N_1 + 27r - 3 < 27r - 3$ doğru olmadığından Lemma 2.6 (iii)'yi sağlayan sayıların sayısı $3r - 3$ olur.

(iii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.6 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5 ve $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.6 (iv)'yi bir kez, Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-1}{2}\right)$ kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.6 (iv)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1 + \frac{45(r-1)}{2} + 19} &= r + 3r_{N_1} - r_{N_1-1}, \\ r_{N_1 + \frac{45(r-1)}{2} + 20} &= r + 2r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M \end{aligned}$$

elde edilir. $2r_{N_1 + \frac{45(r-1)}{2} + 20} - 1/2 < r_{N_1 + \frac{45(r-1)}{2} + 19}$ olduğundan Lemma 2.6 (iv) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.6 (iv)'yi sağlayan sayıların sayısı 5'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.6 (iv)'yi sağlayan sayıların sayısı 7 olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$2r_{N_1+27r-3} - 1/2 < r_{N_1+27r-4}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.6 (iv)'den $r_{N_1+27r-3} = r_{N_1+27r+1}$ olur, ancak $N_1 + 27r - 3 < 27r - 3$ doğru olmadığından Lemma 2.6 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 6'dır. \square

Teorem 2.4. $z_1 \in 2\mathbb{N} + 1$, $z_2 \in 2\mathbb{N}$, $z_1 < z_2$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/4]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/2]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/4, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/2, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = \max\{|z_1 - z_2|, z_1\}$ olmak üzere denklem (2.2)'nin çözümleri periyodiktir ve periyodu $27r - 3$ dür.

İspat. Kabul edelim ki $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ için $z_1 \in 2\mathbb{N} + 1$, $z_2 \in 2\mathbb{N}$, $z_1 < z_2$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/4]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/2]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/4, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/2, 0)$ olsun. $r = \max\{|z_1 - z_2|, z_1\}$ ve N bir doğal sayı olmak üzere $r_N \in M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r - \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right|, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|\right\}$ olsun. Lemma 2.6, Lemma 2.7 ve Sonuç 2.3 göz önüne alınarak Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) 'ü art arda $\left(\frac{r-1}{2}\right)$ kez uygulayabiliriz. Böylece

$$r_N = r_{N+3} = r_{N+9} = r_{N+12} = \dots = r_{N+\frac{9(r-1)}{2}}$$

ve

$$r_{N+2} = 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+8} = 2 + r_{N-1},$$

$$r_{N+11} = 13 - 2r_N + r_{N-1},$$

⋮

$$r_{N+\frac{9(r-1)}{2}-1} = r - 1 + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{9(r-1)}{2}} = r_N$$

bulunur. $2r_N - \frac{1}{2} < r - 1 + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.6 (iv)'den

$$r_{N+\frac{9(r-1)}{2}+3} = 2r - 1 - 3r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{9(r-1)}{2}+4} = r - 1 + r_{N-1} - r_N \in M$$

olur. Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-1}{2}\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{9(r-1)}{2}+4} = r_{N+\frac{9(r-1)}{2}+7} = r_{N+\frac{9(r-1)}{2}+13} = \dots = r_{N+\frac{9(r-1)}{2}+4+\frac{9(r-1)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+9(r-1)+3} = 3r - 2 - 3r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+9(r-1)+4} = r - 1 + r_{N-1} - r_N$$

bulunur. $2r - 2 + 2r_{N-1} - 2r_N - \frac{1}{2} < 3r - 2 - 3r_N + 2r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.6 (iv)'den

$$\begin{aligned} r_{N+9(r-1)+7} &= 3r - 3r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+9(r-1)+8} &= 2r - 1 + r_{N-1} - 2r_N \in M \end{aligned}$$

olur. Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-1}{2}\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+9(r-1)+8} = r_{N+9(r-1)+11} = r_{N+9(r-1)+17} = \dots = r_{N+9(r-1)+8+\frac{9(r-1)}{2}}.$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} r_{N+\frac{27(r-1)}{2}+7} &= 4r - 1 - 3r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+\frac{27(r-1)}{2}+8} &= 2r - 1 + r_{N-1} - 2r_N \end{aligned}$$

bulunur. $4r - 2 + 2r_{N-1} - 4r_N - \frac{1}{2} < 4r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.6 (iv)'den

$$\begin{aligned} r_{N+\frac{27(r-1)}{2}+11} &= 2 + 2r - r_{N-1}, \\ r_{N+\frac{27(r-1)}{2}+12} &= 2r - r_N \in M \end{aligned}$$

olur. Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-1}{2}\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{27(r-1)}{2}+12} = r_{N+\frac{27(r-1)}{2}+15} = r_{N+\frac{27(r-1)}{2}+21} = \dots = r_{N+\frac{27(r-1)}{2}+12+\frac{9(r-1)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} r_{N+18(r-1)+11} &= 3r + 1 - r_{N-1}, \\ r_{N+18(r-1)+12} &= 2r - r_N \end{aligned}$$

bulunur. $4r - 2r_N - \frac{1}{2} < 3r + 1 - r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.6 (iv)'den

$$\begin{aligned} r_{N+18(r-1)+15} &= 3 + 3r_N - 2r_{N-1}, \\ r_{N+18(r-1)+16} &= r + 1 + r_N - r_{N-1} \in M \end{aligned}$$

olur. Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-1}{2}\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+18(r-1)+16} = r_{N+18(r-1)+19} = r_{N+18(r-1)+25} = \dots = r_{N+18(r-1)+16+\frac{9(r-1)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{45(r-1)}{2}+15} = r + 2 + 3r_N - 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{45(r-1)}{2}+16} = r + 1 + r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2r + 2 + 2r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < r + 2 + 3r_N - 2r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.6 (iv)'den

$$r_{N+\frac{45(r-1)}{2}+19} = 2 - r + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{45(r-1)}{2}+20} = 1 + 2r_N - r_{N-1} \in M$$

olur. Lemma 2.6 (ii) ve Lemma 2.6 (iii) art arda $\left(\frac{r-1}{2}\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{45(r-1)}{2}+20} = r_{N+\frac{45(r-1)}{2}+23} = r_{N+\frac{45(r-1)}{2}+29} = \dots = r_{N+\frac{45(r-1)}{2}+20+\frac{9(r-1)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+27(r-1)+19} = 1 + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+27(r-1)+20} = 1 + 2r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2 + 4r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < 1 + 3r_N - r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.6 (iv)'den

$$r_{N+27(r-1)+23} = r_{N-1},$$

$$r_{N+27(r-1)+24} = r_N$$

bulunur. Böylece

$$r_{N+27r-4} = r_{N-1},$$

$$r_{N+27r-3} = r_N$$

olup ispat tamamlanır. □

Lemma 2.8. $z_1, z_2 \in 2\mathbb{N} + 1$, $z_2 > 2z_1$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/10]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/6]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/10, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/6, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = |z_1 - z_2|$, $M = \left\{ r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ ve N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $r_N \in M$ ise $r_N = r_{N+3}$, $r_{N+4} \in M$ veya $r_N = r_{N+6}$ dir.

(ii) Eğer $r_N \in M$ ve $r_N - 1/2 \leq r_{N-1} \leq 2r_N - 1/2$ ise $r_{N+2} = 1 - 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+3}$ dır.

(iii) Eğer $r_N \in M$ ve $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ ise $r_{N+5} = 1 + 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+6}$ dır.

(iv) Eğer $r_N \in M$ ve $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ ise $r_{N+3} = 1 + 2r_{N-1} - r_N$ ve $r_{N+4} = r_N - r_{N-1}$ dır.

(v) Eğer $r_N \in M$ ve $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ ise $r_{N+3} = 1 - 3r_N + 2r_{N-1}$ ve $r_{N+4} = r_{N-1} - r_N$ dır.

İspat. (i) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın ve $r = |z_1 - z_2|$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_1 &= \max \{r_0, 1 - r_0\} - r_{-1} = r_0 - r_{-1} = z_2 - z_1 + \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in M, \\ r_2 &= \max \{r_1, 1 - r_1\} - r_0 = -z_1 - \frac{a}{b}, \\ r_3 &= \max \{r_2, 1 - r_2\} - r_1 = 1 + 2z_1 - z_2 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d}, \\ r_4 &= \max \{r_3, 1 - r_3\} - r_2 = z_2 - z_1 - \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = r_1, \\ r_5 &= \max \{r_4, 1 - r_4\} - r_3 = 2z_2 - 3z_1 - 1 - \frac{3a}{b} + \frac{2c}{d}, \\ r_6 &= \max \{r_5, 1 - r_5\} - r_4 = -2z_1 + z_2 - 1 - \frac{2a}{b} + \frac{c}{d} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $r_6 \leq \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned} r_7 &= \max \{r_6, 1 - r_6\} - r_5 = -z_1 + \frac{5a}{b} - \frac{3c}{d}, \\ r_8 &= \max \{r_7, 1 - r_7\} - r_6 = z_2 - z_1 + \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \in M \end{aligned}$$

olur. Eğer $r_6 > \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned} r_7 &= \max \{r_6, 1 - r_6\} - r_5 = z_1 - z_2 + \frac{a}{b} - \frac{c}{d}, \\ r_8 &= \max \{r_7, 1 - r_7\} - r_6 = z_1 + 2 + \frac{a}{b}, \\ r_9 &= \max \{r_8, 1 - r_8\} - r_7 = z_2 + 2 + \frac{c}{d}, \\ r_{10} &= \max \{r_9, 1 - r_9\} - r_8 = z_2 - z_1 - \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = r_4, \\ r_{11} &= \max \{r_{10}, 1 - r_{10}\} - r_9 = -z_1 - 2 - \frac{a}{b}, \\ r_{12} &= \max \{r_{11}, 1 - r_{11}\} - r_{10} = 2z_1 - z_2 + 3 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d} \end{aligned}$$

olur. Burada yine iki durum söz konusudur $r_{12} \leq \frac{1}{2}$ ve $r_{12} > \frac{1}{2}$. Eğer $r_{12} \leq \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned} r_{13} &= \max \{r_{12}, 1 - r_{12}\} - r_{11} = z_1 + 3 - \frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \\ r_{14} &= \max \{r_{13}, 1 - r_{13}\} - r_{12} = z_2 - z_1 - \frac{3a}{b} + \frac{2c}{d} \in M \end{aligned}$$

bulunur. Bu hesaplamalar $r_6 \leq \frac{1}{2}$ ve $r_6 > \frac{1}{2}$ durumlarındaki gibi devam eder. Böylece Lemma 2.8 (i)'nin doğru olduğu kolayca görülür.

(ii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $r_N - \frac{1}{2} \leq r_{N-1} \leq 2r_N - \frac{1}{2}$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = r_N \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+3}$ bulunur.

(iii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ olsun, öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = -r_N, \\ r_{N+4} &= \max \{-r_N, 1 + r_N\} + r_{N-1} = 1 + r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+5} &= \max \{1 + r_N + r_{N-1}, -r_N - r_{N-1}\} + r_N = 1 + 2r_N + r_{N-1}, \\ r_{N+6} &= \max \{1 + 2r_N + r_{N-1}, -2r_N - r_{N-1}\} - 1 - r_N - r_{N-1} = r_N \end{aligned}$$

olup $r_N = r_{N+6}$ bulunur.

(iv) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} r_{N+1} &= \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1}, \\ r_{N+2} &= \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1}, \\ r_{N+3} &= \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 - r_N + 2r_{N-1}, \\ r_{N+4} &= \max \{1 - r_N + 2r_{N-1}, r_N - 2r_{N-1}\} + r_{N-1} = r_N - r_{N-1} \end{aligned}$$

dir.

(v) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $2r_N - 1/2 <$

r_{N-1} olsun. Öyleyse

$$r_{N+1} = \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+2} = \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+3} = \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 - 3r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+4} = \max \{1 - 3r_N + 2r_{N-1}, 3r_N - 2r_{N-1}\} - 1 + 3r_N - 2r_{N-1} = r_{N-1} - r_N$$

dir. □

Sonuç 2.4. Lemma 2.8'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) Lemma 2.8 (ii)'de verilen $r_N - 1/2 \leq r_{N-1} \leq 2r_N - 1/2$ şartı düzenlenirse $-r_N + 1/2 \leq 1 - 2r_N + r_{N-1} \leq 1/2$ ve buradan $-r_N + 1/2 \leq r_{N+2} \leq 1/2$ olur. Öyleyse Lemma 2.8 (ii) uygulandıktan sonra Lemma 2.8 (iii) veya Lemma 2.8 (iv) uygulanabilir.

(ii) Lemma 2.8 (iii)'de $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ şartı ve $r_{N-1} < -r_N$ olamayacağı göz önüne alınırsa Lemma 2.8 (iii) uygulandıktan sonra Lemma 2.8 (ii) veya Lemma 2.8 (v) uygulanabilir.

(iii) Lemma 2.8 (iv)'de $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ şartı ve $1/4 < r_{N-1} \leq 1/2$ olamayacağı göz önüne alınırsa Lemma 2.8 (iv) uygulandıktan sonra Lemma 2.8 (iii) uygulanabilir.

(iv) Lemma 2.8 (v)'de $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ şartı düzenlenirse $r_N < 1 - 3r_N + 2r_{N-1}$ elde edilir. Öyleyse Lemma 2.8 (v) uygulandıktan sonra Lemma 2.8 (ii) uygulanabilir.

Lemma 2.9. $z_1, z_2 \in 2\mathbb{N} + 1$, $z_2 > 2z_1$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/10]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/6]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/10, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/6, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = |z_1 - z_2|$, $M = \left\{ r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ ve N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Lemma 2.8 (ii)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(ii) Lemma 2.8 (iii)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(iii) Lemma 2.8 (iv)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı 6 'dır.

(iv) Lemma 2.8 (v)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı 6 'dır.

İspat. (i) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.8 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ ve $r_N \in M = \left\{ r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.8

(ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda en fazla $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanır, ardından Lemma 2.8 (ii), (iv) ve (iii) art arda birer kez, Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, son olarak Lemma 2.8 (v) bir kez uygulanıp bu işlemler 5 kez tekrar edilirse Lemma 2.8 (ii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1+45(r-2)+84} &= 3 - 4r + 7r_{N_1} - 2r_{N_1-1}, \\ r_{N_1+45(r-2)+85} &= 1 - r + 3r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M \end{aligned}$$

elde edilir. Sonra Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, Lemma 2.8 (ii), (iv) ve (iii) art arda bir kez son olarak Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r-4}{2}\right)$ kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} r_{N_1+54(r-2)+88} &= -1 + 3r_{N_1} - r_{N_1-1}, \\ r_{N_1+54(r-2)+89} &= 1 + 2r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M \end{aligned}$$

bulunur. $r_{N_1+54(r-2)+89} - \frac{1}{2} \leq r_{N_1+54(r-2)+88} \leq 2r_{N_1+54(r-2)+89} - \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (ii) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.8 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ 'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.8 (ii)'yi sağlayan sayıların sayısı $6r - 5$ olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$r_{N_1+54r-6} - \frac{1}{2} \leq r_{N_1+54r-7} \leq 2r_{N_1+54r-6} - \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.8 (ii)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-3}$ olur, ancak $N_1+54r-6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.8 (ii)'yi sağlayan sayıların sayısı $6r - 6$ olur.

(ii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.8 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ ve $r_N \in M = \left\{ r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.8 (iii) ve Lemma 2.8 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez sonra Lemma 2.8 (iii) ve Lemma 2.8 (v)'i birer kez, Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez ardından Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iv) birer kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.8 (iii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1+45r-6} &= 3r_{N_1} + 2r_{N_1-1} - 2r - 1, \\ r_{N_1+45r-5} &= r - r_{N_1} - r_{N_1-1} + 1 \in M \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Lemma 2.8 (iii) ve Lemma 2.8 (ii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, sonra Lemma 2.8 (iii), Lemma 2.8 (v) birer kez, Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 2\right)$ kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} r_{N_1+54r-23} &= 5r_{N_1} + 3r_{N_1-1} - 6, \\ r_{N_1+54r-22} &= 2r_{N_1} + r_{N_1-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

bulunur. $r_{N_1+54r-23} < -1/2$ olduğundan Lemma 2.8 (iii) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.8 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ 'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.8 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 5$ olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$r_{N_1+54r-7} < -1/2 < r_{N_1+54r-6}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.8 (iii)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r}$ olur, ancak $N_1 + 54r - 6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.8 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(iii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.8 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5 ve $r_N \in M = \left\{ r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.8 (iv)'yi bir kez, Lemma 2.8 (iii) ve Lemma 2.8 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$, Lemma 2.8 (iii) ve Lemma 2.8 (v)'i birer kez, Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez ardından Lemma 2.8 (ii)'yi bir kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.8 (iii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1+45r-6} &= r_{N_1} - r, \\ r_{N_1+45r-5} &= r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M \end{aligned}$$

elde edilir. $-1/2 \leq r_{N_1+45r-6} \leq 1/2 < r_{N_1+45r-5}$ olduğundan Lemma 2.8 (iv) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.8 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.8 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 7 olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez

uygulayarak

$$-1/2 \leq r_{N_1+54r-7} \leq 1/2 < r_{N_1+54r-6}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.8 (iv)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-2}$ olur, ancak $N_1 + 54r - 6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.8 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 6'dır.

(iv) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.8 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5 ve $r_N \in M = \left\{ r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.8 (v)'yi bir kez, Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iv)'i birer kez birer kez, Lemma 2.8 (iii) ve Lemma 2.8 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, ardından Lemma 2.8 (iii)'yi bir kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.8 (v)'i sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$r_{N_1+45r-6} = r_{N_1} + r,$$

$$r_{N_1+45r-5} = r_{N_1} - r_{N_1-1} + 2r \in M$$

elde edilir. $2r_{N_1+45r-5} - 1/2 < r_{N_1+45r-6}$ olduğundan Lemma 2.8 (v) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.8 (v)'i sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.8 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 7 olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$2r_{N_1+54r-6} - 1/2 < r_{N_1+54r-7}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.8 (v)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-2}$ olur, ancak $N_1 + 54r - 6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.8 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 6'dır. \square

Teorem 2.5. $z_1, z_2 \in 2\mathbb{N} + 1$, $z_2 > 2z_1$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/10]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/6]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/10, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/6, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = |z_1 - z_2|$ olmak üzere denklem (2.2)'nin çözümleri periyodiktir ve periyodu $54r - 6$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ için $z_1, z_2 \in 2\mathbb{N} + 1$, $z_2 > 2z_1$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/10]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/6]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/10, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/6, 0)$ olsun. $r = |z_1 - z_2|$ ve N bir doğal sayı olmak üzere $r_N \in M = \left\{ r + \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r - \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, \right.$

$r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{2c}{d} - \frac{3a}{b} \right|$ olsun. Lemma 2.8, Lemma 2.9 ve Sonuç 2.4 göz önüne alınarak Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) 'ü art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulayabiliriz. Böylece

$$r_N = r_{N+3} = r_{N+9} = r_{N+12} = \dots = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}}$$

ve

$$r_{N+2} = 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$\begin{aligned} r_{N+8} &= 1 + 2r_{N+3} + r_{N+2} \\ &= 1 + 2r_N + 1 - 2r_N + r_{N-1} \\ &= 2 + r_{N-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{N+11} &= 1 - 2r_{N+9} + r_{N+8} \\ &= 1 - 2r_N + 2 + r_{N-1} \\ &= 3 - 2r_N + r_{N-1}, \end{aligned}$$

⋮

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}-1} = r - 2 + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}} = r_N$$

bulunur. $2r_N - \frac{1}{2} \geq r - 2 + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (ii)'den

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+2} = r - 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+3} = r_N$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq r - 1 - 2r_N + r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iv)'den

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+6} = 2r - 1 - 5r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+7} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2r - 1 - 5r_N + 2r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iii)'den

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+12} = 2 + r_N,$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+13} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+13} = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+16} = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+22} = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+25} = \dots = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+13+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+9(r-2)+12} = r + r_N,$$

$$r_{N+9(r-2)+13} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2 - 2r + 6r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < r + r_N$ olduğundan Lemma 2.8 (v)'den

$$r_{N+9(r-2)+16} = 5r - 2 - 7r_N + 3r_{N-1},$$

$$r_{N+9(r-2)+17} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+9(r-2)+17} = r_{N+9(r-2)+20} = r_{N+9(r-2)+26} = \dots = r_{N+9(r-2)+17+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+16} = 6r - 4 - 7r_N + 3r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+17} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $4r - 2 - 4r_N + 2r_{N-1} - \frac{1}{2} \geq 6r - 4 - 7r_N + 3r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (ii)'den

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+19} = 2r - 1 - 3r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+20} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq 2r - 1 - 3r_N + r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iv)'den

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+23} = 2r - 4r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+24} = r_N$$

bulunur. $2r - 4r_N + r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iii)'den

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+29} = 2r + 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+30} = r_N$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+30} = r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+33} = r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+39} = \dots = r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+30+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+18(r-2)+29} = 3r - 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+18(r-2)+30} = r_N$$

bulunur. $2r_N - \frac{1}{2} < 3r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (v)'den

$$r_{N+18(r-2)+33} = 6r - 1 - 7r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+18(r-2)+34} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+18(r-2)+34} = r_{N+18(r-2)+37} = r_{N+18(r-2)+43} = \dots = r_{N+18(r-2)+34+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+33} = 7r - 3 - 7r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+34} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $6r - 2 - 6r_N + 2r_{N-1} - \frac{1}{2} \geq 7r - 3 - 7r_N + 2r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (ii)'den

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+36} = r - r_N,$$

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+37} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq r - r_N \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iv)'den

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+40} = 2 - r + r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+41} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $2r - 4r_N + r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iii)'den

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+46} = 3r + 1 - 3r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+47} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+47} = r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+50} = r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+56} = \dots = r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+47+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+27(r-2)+46} = 4r - 1 - 3r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+27(r-2)+47} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $4r - 2 - 4r_N + 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < 4r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (v)'den

$$r_{N+27(r-2)+50} = 2r + 2 - r_{N-1},$$

$$r_{N+27(r-2)+51} = 2r - r_N$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+27(r-2)+51} = r_{N+27(r-2)+54} = r_{N+27(r-2)+60} = \dots = r_{N+27(r-2)+51+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+50} = 3r - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+51} = 2r - r_N$$

bulunur. $4r - 2r_N - \frac{1}{2} \geq 3r - r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (ii)'den

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+53} = 1 - r + 2r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+54} = 2r - r_N$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq 1 - r + 2r_N - r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iv)'den

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+57} = 3 - 4r + 5r_N - 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+58} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $3 - 4r + 5r_N - 2r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iii)'den

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+63} = 2 + 2r - r_N,$$

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+64} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+64} = r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+67} = r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+73} = \dots = r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+64+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+36(r-2)+63} = 3r - r_N,$$

$$r_{N+36(r-2)+64} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $6r - 2 - 6r_N + 3r_{N-1} - \frac{1}{2} < r - r_N$ olduğundan Lemma 2.8 (v)'den

$$r_{N+36(r-2)+67} = 4 - 3r + 7r_N - 3r_{N-1},$$

$$r_{N+36(r-2)+68} = 2r_N - r_{N-1} + 1$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+36(r-2)+68} = r_{N+36(r-2)+71} = r_{N+36(r-2)+77} = \dots = r_{N+36(r-2)+68+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+67} = 2 - 2r + 7r_N - 3r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+68} = 2r_N - r_{N-1} + 1$$

bulunur. $4r_N - 2r_{N-1} + 2 - \frac{1}{2} \geq 2 - 2r + 7r_N - 3r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (ii)'den

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+70} = 1 - 2r + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+71} = 2r_N - r_{N-1} + 1$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq 1 - 2r + 3r_N - r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iv)'den

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+74} = 2 - 4r + 4r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+75} = 2r - r_N$$

bulunur. $2 - 4r + 4r_N - r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iii)'den

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+80} = 3 + 2r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+81} = 2r - r_N$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+81} = r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+84} = r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+90} = \dots = r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+81+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+45(r-2)+80} = r + 1 + 2r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+45(r-2)+81} = 2r - r_N$$

bulunur. $4r - 2r_N - \frac{1}{2} < 2r - r_N$ olduğundan Lemma 2.8 (v)'den

$$r_{N+45(r-2)+84} = 3 - 4r + 7r_N - 2r_{N-1},$$

$$r_{N+45(r-2)+85} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+45(r-2)+85} = r_{N+45(r-2)+88} = r_{N+45(r-2)+94} = \dots = r_{N+45(r-2)+85+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+84} = 1 - 3r + 7r_N - 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+85} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2 - 2r + 6r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} \geq 1 - 3r + 7r_N - 2r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (ii)'den

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+87} = -r + r_N,$$

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+88} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq -r + r_N \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iv)'den

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+91} = -r - r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+92} = 1 + 2r_N - r_{N-1}$$

Since $-r - r_N + r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.8 (iii)'den

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+97} = 3 - r + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+98} = 1 + 2r_N - r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.8 (ii) ve Lemma 2.8 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+98} = r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+101} = r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+107} = \dots = r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+98+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+54(r-2)+97} = 1 + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+54(r-2)+98} = 1 + 2r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2 + 4r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < 1 + 3r_N - r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.8 (v)'den

$$r_{N+54(r-2)+101} = r_{N-1},$$

$$r_{N+54(r-2)+102} = r_N$$

elde edilir. Böylece

$$r_{N+54r-7} = r_{N-1},$$

$$r_{N+54r-6} = r_N$$

olup ispat tamamlanır. □

Lemma 2.10. $z_1 \in 2\mathbb{N}$, $z_2 = z_1 + 1$, $z_1 > 2$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/10]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/4]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/10, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/4, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = z_1$, $M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ ve N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Eğer $r_N \in M$ ise $r_N = r_{N+3}$, $r_{N+4} \in M$ veya $r_N = r_{N+6}$ dir.
- (ii) Eğer $r_N \in M$ ve $r_N - 1/2 \leq r_{N-1} \leq 2r_N - 1/2$ ise $r_{N+2} = 1 - 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+3}$ dür.
- (iii) Eğer $r_N \in M$ ve $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ ise $r_{N+5} = 1 + 2r_N + r_{N-1}$ ve $r_N = r_{N+6}$ dir.
- (iv) Eğer $r_N \in M$ ve $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ ise $r_{N+3} = 1 + 2r_{N-1} - r_N$ ve $r_{N+4} = r_N - r_{N-1}$ dir.
- (v) Eğer $r_N \in M$ ve $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ ise $r_{N+3} = 1 - 3r_N + 2r_{N-1}$ ve $r_{N+4} = r_{N-1} - r_N$ dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın ve $r = z_1$ olsun. Öyleyse

$$r_1 = \max \{r_0, 1 - r_0\} - r_{-1} = r_0 - r_{-1} = 1 + \frac{c}{d} - \frac{a}{b},$$

$$r_2 = \max \{r_1, 1 - r_1\} - r_0 = -z_1 - \frac{a}{b},$$

$$r_3 = \max \{r_2, 1 - r_2\} - r_1 = z_1 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d},$$

$$r_4 = \max \{r_3, 1 - r_3\} - r_2 = 2z_1 + \frac{3a}{b} - \frac{c}{d},$$

$$\begin{aligned}
r_5 &= \max \{r_4, 1 - r_4\} - r_3 = z_1 + \frac{a}{b} = r_{-1}, \\
r_6 &= \max \{r_5, 1 - r_5\} - r_4 = -z_1 - \frac{2a}{b} + \frac{c}{d}, \\
r_7 &= \max \{r_6, 1 - r_6\} - r_5 = 1 + \frac{a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_8 &= \max \{r_7, 1 - r_7\} - r_6 = z_1 + 1 + \frac{3a}{b} - \frac{2c}{d}, \\
r_9 &= \max \{r_8, 1 - r_8\} - r_7 = z_1 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d} \in M, \\
r_{10} &= \max \{r_9, 1 - r_9\} - r_8 = -1 - \frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \\
r_{11} &= \max \{r_{10}, 1 - r_{10}\} - r_9 = 2 - z_1 - \frac{a}{b}, \\
r_{12} &= \max \{r_{11}, 1 - r_{11}\} - r_{10} = z_1 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d} = r_9, \\
r_{13} &= \max \{r_{12}, 1 - r_{12}\} - r_{11} = 2z_1 - 2 + \frac{3a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_{14} &= \max \{r_{13}, 1 - r_{13}\} - r_{12} = z_1 - 2 + \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $r_{14} \leq \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned}
r_{15} &= \max \{r_{14}, 1 - r_{14}\} - r_{11} = -1 - \frac{4a}{b} + \frac{c}{d}, \\
r_{16} &= \max \{r_{15}, 1 - r_{15}\} - r_{14} = 2 + \frac{3a}{b} - \frac{c}{d} \in M
\end{aligned}$$

olur. Eğer $r_{14} > \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned}
r_{15} &= \max \{r_{14}, 1 - r_{14}\} - r_{11} = -z_1 - \frac{2a}{b} + \frac{c}{d}, \\
r_{16} &= \max \{r_{15}, 1 - r_{15}\} - r_{14} = 3 + \frac{a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_{17} &= \max \{r_{16}, 1 - r_{16}\} - r_{15} = 3 + z_1 + \frac{3a}{b} - \frac{2c}{d}, \\
r_{18} &= \max \{r_{17}, 1 - r_{17}\} - r_{16} = z_1 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_{19} &= \max \{r_{18}, 1 - r_{18}\} - r_{17} = -3 - \frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \\
r_{20} &= \max \{r_{19}, 1 - r_{19}\} - r_{18} = 4 - z_1 - \frac{a}{b}, \\
r_{21} &= \max \{r_{20}, 1 - r_{20}\} - r_{19} = z_1 + \frac{2a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_{22} &= \max \{r_{21}, 1 - r_{21}\} - r_{20} = 2z_1 - 4 + \frac{3a}{b} - \frac{c}{d}, \\
r_{23} &= \max \{r_{22}, 1 - r_{22}\} - r_{21} = z_1 - 4 + \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

olur. Burada iki durum söz konusudur $r_{23} \leq \frac{1}{2}$ ve $r_{23} > \frac{1}{2}$. Eğer $r_{23} \leq \frac{1}{2}$ ise

$$r_{24} = \max \{r_{23}, 1 - r_{23}\} - r_{22} = -3 - \frac{4a}{b} + \frac{c}{d},$$

$$r_{25} = \max \{r_{24}, 1 - r_{24}\} - r_{23} = 4 + \frac{3a}{b} - \frac{c}{d} \in M$$

dir. Bu hesaplamalar $r_{14} \leq \frac{1}{2}$ ve $r_{14} > \frac{1}{2}$ durumlarındaki gibi devam eder. Böylece Lemma 2.10 (i)'nin doğru olduğu kolayca görülür.

(ii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $r_N - \frac{1}{2} \leq r_{N-1} \leq 2r_N - \frac{1}{2}$ olsun. Öyleyse

$$r_{N+1} = \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+2} = \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+3} = \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = r_N$$

olup $r_N = r_{N+3}$ bulunur.

(iii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ olsun. Öyleyse

$$r_{N+1} = \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+2} = \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1},$$

$$r_{N+3} = \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = -r_N,$$

$$r_{N+4} = \max \{-r_N, 1 + r_N\} + r_{N-1} = 1 + r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+5} = \max \{1 + r_N + r_{N-1}, -r_N - r_{N-1}\} + r_N = 1 + 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+6} = \max \{1 + 2r_N + r_{N-1}, -2r_N - r_{N-1}\} - 1 - r_N - r_{N-1} = r_N$$

olup $r_N = r_{N+6}$ bulunur.

(iv) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ olsun. Öyleyse

$$r_{N+1} = \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+2} = \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = -r_{N-1},$$

$$r_{N+3} = \max \{-r_{N-1}, 1 + r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 - r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+4} = \max \{1 - r_N + 2r_{N-1}, r_N - 2r_{N-1}\} + r_{N-1} = r_N - r_{N-1}$$

dir.

(v) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, $r_N \in M$ ve $2r_N - 1/2 <$

r_{N-1} olsun. Öyleyse

$$r_{N+1} = \max \{r_N, 1 - r_N\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+2} = \max \{r_N - r_{N-1}, 1 - r_N + r_{N-1}\} - r_N = 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+3} = \max \{1 - 2r_N + r_{N-1}, 2r_N - r_{N-1}\} - r_N + r_{N-1} = 1 - 3r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+4} = \max \{1 - 3r_N + 2r_{N-1}, 3r_N - 2r_{N-1}\} - 1 + 3r_N - 2r_{N-1} = r_{N-1} - r_N$$

dir. □

Sonuç 2.5. Lemma 2.10'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) Lemma 2.10 (ii)'de verilen $r_N - 1/2 \leq r_{N-1} \leq 2r_N - 1/2$ şartı düzenlenirse $-r_N + 1/2 \leq 1 - 2r_N + r_{N-1} \leq 1/2$ ve buradan $-r_N + 1/2 \leq r_{N+2} \leq 1/2$ olur. Öyleyse Lemma 2.10 (ii) uygulandıktan sonra Lemma 2.10 (iii) veya Lemma 2.10 (iv) uygulanabilir.

(ii) Lemma 2.10 (iii)'de $r_{N-1} < -1/2 < r_N$ şartı ve $r_{N-1} < -r_N$ olamayacağı göz önüne alınırsa Lemma 2.10 (iii) uygulandıktan sonra Lemma 2.10 (ii) veya Lemma 2.10 (v) uygulanabilir.

(iii) Lemma 2.10 (iv)'de $-1/2 \leq r_{N-1} \leq 1/2 < r_N$ şartı ve $1/4 < r_{N-1} \leq 1/2$ olamayacağı göz önüne alınırsa Lemma 2.10 (iv) uygulandıktan sonra Lemma 2.10 (iii) uygulanabilir.

(iv) Lemma 2.10 (v)'de $2r_N - 1/2 < r_{N-1}$ şartı düzenlenirse $r_N < 1 - 3r_N + 2r_{N-1}$ elde edilir. Öyleyse Lemma 2.10 (v) uygulandıktan sonra Lemma 2.10 (ii) uygulanabilir.

Lemma 2.11. $z_1 \in 2\mathbb{N}$, $z_2 = z_1 + 1$, $z_1 > 2$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/10]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/4]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/10, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/4, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = z_1$, $M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{3a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{3a}{b}\right|\right\}$ ve N doğal sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Lemma 2.10 (ii)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(ii) Lemma 2.10 (iii)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(iii) Lemma 2.10 (iv)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı 6 'dır.

(iv) Lemma 2.10 (v)'yi sağlayan $N \leq 54r - 6$ doğal sayılarının sayısı 6 'dır.

İspat. (i) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.10 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ ve $r_N \in M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{3a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{3a}{b}\right|\right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.10 (ii) ve Lemma

2.10 (iii) art arda en fazla $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanır, ardından Lemma 2.10 (ii), (iv) ve (iii) art arda bir kez, Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, son olarak Lemma 2.10 (v) bir kez uygulanıp bu işlemler 5 kez tekrar edilirse

$$\begin{aligned} r_{N_1+45(r-2)+84} &= 3 - 4r + 7r_{N_1} - 2r_{N_1-1}, \\ r_{N_1+45(r-2)+85} &= 1 - r + 3r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M. \end{aligned}$$

elde edilir. Sonra Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, Lemma 2.10 (ii), (iv) ve (iii) art arda bir kez son olarak Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r-4}{2}\right)$ kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} r_{N_1+54(r-2)+88} &= -1 + 3r_{N_1} - r_{N_1-1}, \\ r_{N_1+54(r-2)+89} &= 1 + 2r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M \end{aligned}$$

bulunur. $r_{N_1+54(r-2)+89} - \frac{1}{2} \leq r_{N_1+54(r-2)+88} \leq 2r_{N_1+54(r-2)+89} - \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (ii) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.10 (ii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ 'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.10 (ii)'yi sağlayan sayıların sayısı $6r - 5$ olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$r_{N_1+54r-6} - \frac{1}{2} \leq r_{N_1+54r-7} \leq 2r_{N_1+54r-6} - \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.10 (ii)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-3}$ olur, ancak $N_1 + 54r - 6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.10 (ii)'yi sağlayan sayıların sayısı $6r - 6$ olur.

(ii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.10 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ ve $r_N \in M = \left\{r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{2a}{b}\right|, r + \left|\frac{c}{d} - \frac{3a}{b}\right|, r - \left|\frac{c}{d} - \frac{3a}{b}\right|\right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.10 (iii) ve Lemma 2.10 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez sonra Lemma 2.10 (iii) ve Lemma 2.10 (v)'i birer kez, Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez ardından Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iv) birer kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.10 (iii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1+45r-6} &= 3r_{N_1} + 2r_{N_1-1} - 2r - 1, \\ r_{N_1+45r-5} &= r - r_{N_1} - r_{N_1-1} + 1 \in M \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Lemma 2.10 (iii) ve Lemma 2.10 (ii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, sonra Lemma 2.10 (iii), Lemma 2.10 (v) birer kez, Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 2\right)$ kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} r_{N_1+54r-23} &= 5r_{N_1} + 3r_{N_1-1} - 6, \\ r_{N_1+54r-22} &= 2r_{N_1} + r_{N_1-1} - 1 \in M \end{aligned}$$

bulunur. $r_{N_1+54r-23} < -1/2$ olduğundan Lemma 2.10 (iii) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.10 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 7$ 'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.10 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 5$ olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$r_{N_1+54r-7} < -1/2 < r_{N_1+54r-6}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.10 (iii)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r}$ olur, ancak $N_1+54r-6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.10 (iii)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı $6r - 6$ 'dır.

(iii) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.10 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5 ve $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.10 (iv)'yi bir kez, Lemma 2.10 (iii) ve Lemma 2.10 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$, Lemma 2.10 (iii) ve Lemma 2.10 (v)'i birer kez, Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez ardından Lemma 2.10 (ii)'yi bir kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.10 (iii)'yi sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$\begin{aligned} r_{N_1+45r-6} &= r_{N_1} - r, \\ r_{N_1+45r-5} &= r_{N_1} - r_{N_1-1} \in M \end{aligned}$$

elde edilir. $-1/2 \leq r_{N_1+45r-6} \leq 1/2 < r_{N_1+45r-5}$ olduğundan Lemma 2.10 (iv) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.10 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.10 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 7 olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$-1/2 \leq r_{N_1+54r-7} \leq 1/2 < r_{N_1+54r-6}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.10 (iv)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-2}$ olur, ancak $N_1 + 54r - 6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.10 (iv)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 6'dır.

(iv) Kabul edelim ki Lemma'da verilen tüm koşullar sağlansın, Lemma 2.10 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5 ve $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ olsun. Öyleyse Lemma 2.10 (v)'yi bir kez, Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iv)'i birer kez bir kez, Lemma 2.10 (iii) ve Lemma 2.10 (ii)'yi art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez, ardından Lemma 2.10 (iii)'yi bir kez uygulayalım. Bu işlemler 5 kez tekrar edilerek Lemma 2.10 (v)'i sağlayan ilk N doğal sayısı $N_1 \leq 6$ için

$$r_{N_1+45r-6} = r_{N_1} + r,$$

$$r_{N_1+45r-5} = r_{N_1} - r_{N_1-1} + 2r \in M$$

elde edilir. $2r_{N_1+45r-5} - 1/2 < r_{N_1+45r-6}$ olduğundan Lemma 2.10 (v) uygulanabilir. Öyleyse Lemma 2.10 (v)'i sağlayan N doğal sayılarının sayısı 5'den büyüktür.

Tersine, kabul edelim ki Lemma 2.10 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 7 olsun. Önceki hesaplamalar göz önüne alınarak yukarıda tarif edilen işlemleri 6 kez uygulayarak

$$2r_{N_1+54r-6} - 1/2 < r_{N_1+54r-7}$$

elde ederiz. Bu ve Lemma 2.10 (v)'den $r_{N_1+54r-6} = r_{N_1+54r-2}$ olur, ancak $N_1 + 54r - 6 < 54r - 6$ doğru olmadığından Lemma 2.10 (v)'yi sağlayan N doğal sayılarının sayısı 6'dır. \square

Teorem 2.6. $z_1 \in 2\mathbb{N}$, $z_2 = z_1 + 1$, $z_1 > 2$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/10]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/4]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/10, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/4, 0)$ olmak üzere $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ başlangıç şartları için denklem (2.2)'nin çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = z_1$ olmak üzere denklem (2.2)'nin çözümleri periyodiktir ve periyodu $54r - 6$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $r_{-1} = z_1 + \frac{a}{b}$, $r_0 = z_2 + \frac{c}{d}$ için $z_1 \in 2\mathbb{N}$, $z_2 = z_1 + 1$, $z_1 > 2$ ve $\frac{a}{b} \in (0, 1/10]$, $\frac{c}{d} \in (0, 1/4]$ veya $\frac{a}{b} \in [-1/10, 0)$, $\frac{c}{d} \in [-1/4, 0)$ olsun. $r = z_1$ ve N bir doğal sayı olmak üzere $r_N \in M = \left\{ r + \frac{a}{b}, r - \frac{a}{b}, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{2a}{b} \right|, r + \left| \frac{c}{d} - \frac{3a}{b} \right|, r - \left| \frac{c}{d} - \frac{3a}{b} \right| \right\}$ olsun. Lemma 2.10, Lemma 2.11 ve Sonuç 2.5 göz önüne alınarak Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) 'ü art arda en fazla $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulayabiliriz. Böylece

$$r_N = r_{N+3} = r_{N+9} = r_{N+12} = \dots = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}}$$

ve

$$\begin{aligned}r_{N+2} &= 1 - 2r_N + r_{N-1}, \\r_{N+8} &= 1 + 2r_{N+3} + r_{N+2} \\&= 1 + 2r_N + 1 - 2r_N + r_{N-1} \\&= 2 + r_{N-1}, \\r_{N+11} &= 1 - 2r_{N+9} + r_{N+8} \\&= 1 - 2r_N + 2 + r_{N-1} \\&= 3 - 2r_N + r_{N-1}, \\&\vdots\end{aligned}$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}-1} = r - 2 + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}} = r_N$$

bulunur. $2r_N - \frac{1}{2} \geq r - 2 + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (ii)'den

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+2} = r - 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+3} = r_N$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq r - 1 - 2r_N + r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iv)'den

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+6} = 2r - 1 - 5r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+7} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2r - 1 - 5r_N + 2r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iii)'den

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+12} = 2 + r_N,$$

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+13} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+13} = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+16} = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+22} = \dots = r_{N+\frac{9(r-2)}{2}+13+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+9(r-2)+12} = r + r_N,$$

$$r_{N+9(r-2)+13} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2 - 2r + 6r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < r + r_N$ olduğundan Lemma 2.10 (v)'den

$$r_{N+9(r-2)+16} = 5r - 2 - 7r_N + 3r_{N-1},$$

$$r_{N+9(r-2)+17} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+9(r-2)+17} = r_{N+9(r-2)+20} = r_{N+9(r-2)+26} = \dots = r_{N+9(r-2)+17+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+16} = 6r - 4 - 7r_N + 3r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+17} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $4r - 2 - 4r_N + 2r_{N-1} - \frac{1}{2} \geq 6r - 4 - 7r_N + 3r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (ii)'den

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+19} = 2r - 1 - 3r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+20} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq 2r - 1 - 3r_N + r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iv)'den

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+23} = 2r - 4r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+24} = r_N$$

bulunur. $2r - 4r_N + r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iii)'den

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+29} = 2r + 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+30} = r_N$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+30} = r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+33} = r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+39} = \dots = r_{N+\frac{27(r-2)}{2}+30+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+18(r-2)+29} = 3r - 1 - 2r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+18(r-2)+30} = r_N$$

bulunur. $2r_N - \frac{1}{2} < 3r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (v)'den

$$r_{N+18(r-2)+33} = 6r - 1 - 7r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+18(r-2)+34} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+18(r-2)+34} = r_{N+18(r-2)+37} = r_{N+18(r-2)+43} = \dots = r_{N+18(r-2)+34+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+33} = 7r - 3 - 7r_N + 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+34} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

olur. $6r - 2 - 6r_N + 2r_{N-1} - \frac{1}{2} \geq 7r - 3 - 7r_N + 2r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (ii)'den

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+36} = r - r_N,$$

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+37} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq r - r_N \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iv)'den

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+40} = 2 - r + r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+41} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $2r - 4r_N + r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iii)'den

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+46} = 3r + 1 - 3r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+47} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+47} = r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+50} = r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+56} = \dots = r_{N+\frac{45(r-2)}{2}+47+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+27(r-2)+46} = 4r - 1 - 3r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+27(r-2)+47} = 2r - 1 - 2r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $4r - 2 - 4r_N + 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < 4r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (v)'den

$$r_{N+27(r-2)+50} = 2r + 2 - r_{N-1},$$

$$r_{N+27(r-2)+51} = 2r - r_N$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+27(r-2)+51} = r_{N+27(r-2)+54} = r_{N+27(r-2)+60} = \dots = r_{N+27(r-2)+51+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+50} = 3r - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+51} = 2r - r_N$$

bulunur. $4r - 2r_N - \frac{1}{2} \geq 3r - r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (ii)'den

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+53} = 1 - r + 2r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+54} = 2r - r_N$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq 1 - r + 2r_N - r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iv)'den

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+57} = 3 - 4r + 5r_N - 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+58} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $3 - 4r + 5r_N - 2r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iii)'den

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+63} = 2 + 2r - r_N,$$

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+64} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+64} = r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+67} = r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+73} = \dots = r_{N+\frac{63(r-2)}{2}+64+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+36(r-2)+63} = 3r - r_N,$$

$$r_{N+36(r-2)+64} = 3r - 1 - 3r_N + r_{N-1}$$

bulunur. $6r - 2 - 6r_N + 3r_{N-1} - \frac{1}{2} < r - r_N$ olduğundan Lemma 2.10 (v)'den

$$r_{N+36(r-2)+67} = 4 - 3r + 7r_N - 3r_{N-1},$$

$$r_{N+36(r-2)+68} = 2r_N - r_{N-1} + 1$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+36(r-2)+68} = r_{N+36(r-2)+71} = r_{N+36(r-2)+77} = \dots = r_{N+36(r-2)+68+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+67} = 2 - 2r + 7r_N - 3r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+68} = 2r_N - r_{N-1} + 1$$

bulunur. $4r_N - 2r_{N-1} + 2 - \frac{1}{2} \geq 2 - 2r + 7r_N - 3r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (ii)'den

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+70} = 1 - 2r + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+71} = 2r_N - r_{N-1} + 1$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq 1 - 2r + 3r_N - r_{N-1} \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iv)'den

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+74} = 2 - 4r + 4r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+75} = 2r - r_N$$

bulunur. $2 - 4r + 4r_N - r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iii)'den

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+80} = 3 + 2r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+81} = 2r - r_N$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+81} = r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+84} = r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+90} = \dots = r_{N+\frac{81(r-2)}{2}+81+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+45(r-2)+80} = r + 1 + 2r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+45(r-2)+81} = 2r - r_N$$

bulunur. $4r - 2r_N - \frac{1}{2} < 2r - r_N$ olduğundan Lemma 2.10 (v)'den

$$r_{N+45(r-2)+84} = 3 - 4r + 7r_N - 2r_{N-1},$$

$$r_{N+45(r-2)+85} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+45(r-2)+85} = r_{N+45(r-2)+88} = r_{N+45(r-2)+94} = \dots = r_{N+45(r-2)+85+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+84} = 1 - 3r + 7r_N - 2r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+85} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2 - 2r + 6r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} \geq 1 - 3r + 7r_N - 2r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (ii)'den

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+87} = -r + r_N,$$

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+88} = 1 - r + 3r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $-\frac{1}{2} \leq -r + r_N \leq \frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iv)'den

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+91} = -r - r_N + r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+92} = 1 + 2r_N - r_{N-1}$$

Since $-r - r_N + r_{N-1} < -\frac{1}{2}$ olduğundan Lemma 2.10 (iii)'den

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+97} = 3 - r + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+98} = 1 + 2r_N - r_{N-1}$$

olur. Lemma 2.10 (ii) ve Lemma 2.10 (iii) art arda $\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ kez uygulanarak

$$r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+98} = r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+101} = r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+107} = \dots = r_{N+\frac{99(r-2)}{2}+98+\frac{9(r-2)}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{N+54(r-2)+97} = 1 + 3r_N - r_{N-1},$$

$$r_{N+54(r-2)+98} = 1 + 2r_N - r_{N-1}$$

bulunur. $2 + 4r_N - 2r_{N-1} - \frac{1}{2} < 1 + 3r_N - r_{N-1}$ olduğundan Lemma 2.10 (v)'den

$$r_{N+54(r-2)+101} = r_{N-1},$$

$$r_{N+54(r-2)+102} = r_N$$

elde edilir. Böylece

$$r_{N+54r-7} = r_{N-1},$$

$$r_{N+54r-6} = r_N$$

olup ispat tamamlanır. □

2.1 \sqrt{A} Civarında Salınım

Bu bölümde denklem (2.2) çözümlerinin salınımını araştıracağız. Bilinen tanımlara benzer olarak \sqrt{A} civarında yarı döngü tanımımızı verelim.

Tanım 2.1. denklem (2.2)'nin bir $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün \sqrt{A} civarında bir pozitif yarı döngüsü $\{r_l, r_{l+1}, \dots, r_m\}$ sıralı kümesinden oluşur öyle ki kümenin bütün elemanları \sqrt{A} 'dan büyük veya eşittir. $l \geq 0$ ve $m \leq \infty$ sayıları için

$$l = 0 \text{ veya } l > 0 \text{ ve } x_{l-1} < \sqrt{A}$$

ya da

$$m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} < \sqrt{A}$$

dır. denklem (2.2)'nin bir $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün \sqrt{A} civarında bir negatif yarı döngüsü $\{r_l, r_{l+1}, \dots, r_m\}$ sıralı kümesinden oluşur öyle ki kümenin bütün elemanları \sqrt{A} 'dan küçüktür. $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ sayıları için

$$l = 0 \text{ veya } l > 0 \text{ ve } x_{l-1} \geq \sqrt{A}$$

ya da

$$m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} \geq \sqrt{A}$$

dır.

Teorem 2.7. Denklem (2.2)'nin \sqrt{A} civarında maksimum pozitif yarı döngü uzunluğu 3'tür ve \sqrt{A} civarında maksimum negatif yarı döngü uzunluğu ise 2'dir.

İspat. Kabul edelim ki $r_n > 1/2$ ve $r_{n+1} > 1/2$ olsun, öyleyse

$$r_{n+2} = \max \{r_{n+1}, 1 - r_{n+1}\} - r_n = r_{n+1} - r_n$$

dır. $r_{n+1} - r_n > 1/2$ olsun, buradan

$$r_{n+3} = \max \{r_{n+1} - r_n, 1 - r_{n+1} + r_n\} - r_{n+1} = -r_n$$

olur böylece denklem (2.2)'nin \sqrt{A} civarında maksimum pozitif yarı döngü sayısı 3 bulunur.

Şimdi $r_n < 1/2$ ve $r_{n+1} < 1/2$ olduğunu kabul edelim, buradan

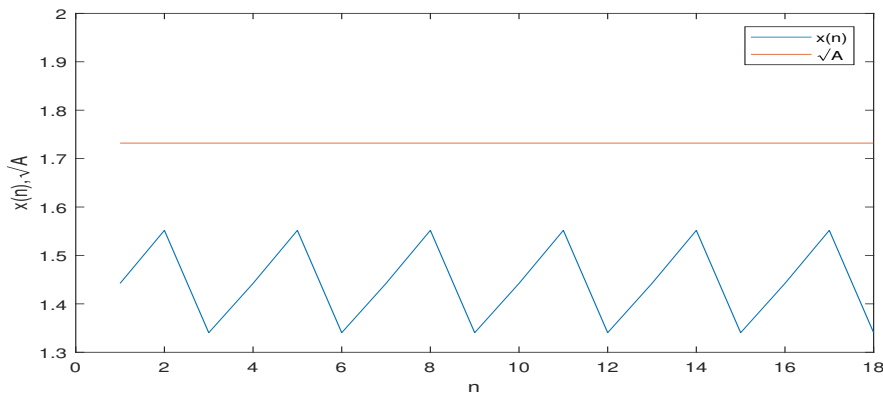
$$r_{n+2} = \max \{r_{n+1}, 1 - r_{n+1}\} - r_n = 1 - r_{n+1} - r_n$$

olur eğer $r_{n+2} < 1/2$ ise $r_{n+1} + r_n > 1/2$ dir. Teorem 2.1'den denklem 3 periyotlu olur. Böylece denklem (2.2)'nin \sqrt{A} civarında maksimum negatif yarı döngü sayısı 2 bulunur. \square

2.2 Sayısal Örnekler

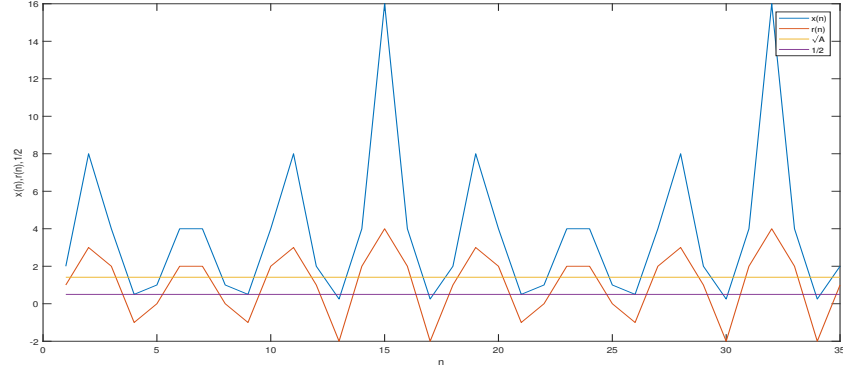
Bu kısımda tezimizdeki sonuçları doğrulayacak bazı sayısal örnekler vereceğiz. Bu örneklerdeki grafikler başlangıç şartları ve parametreler rastgele seçilerek çizilmiştir.

Örnek 2.1. Denklem (1.5)'te $A = 3$, $x_{-1} = A^{1/3}$, $x_0 = A^{2/5}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 3'tür ve Şekil 2.1'de gösterilmiştir.



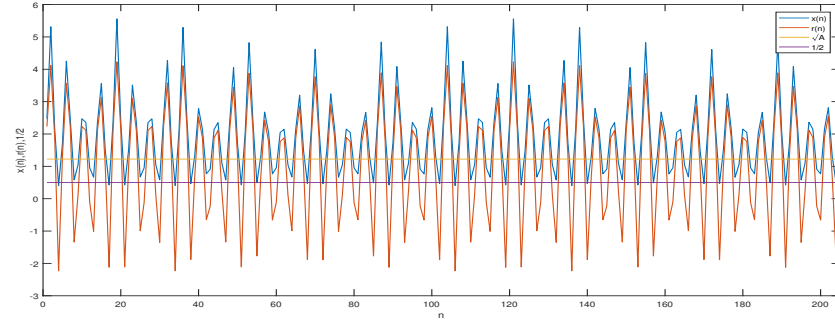
Şekil 2.1: Bütün terimler $\sqrt{3}$ 'den küçüktür.

Örnek 2.2. Denklem (1.5)'te $A = 2$, $r_{-1} = A$, $r_0 = A^3$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 17'dir ve Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



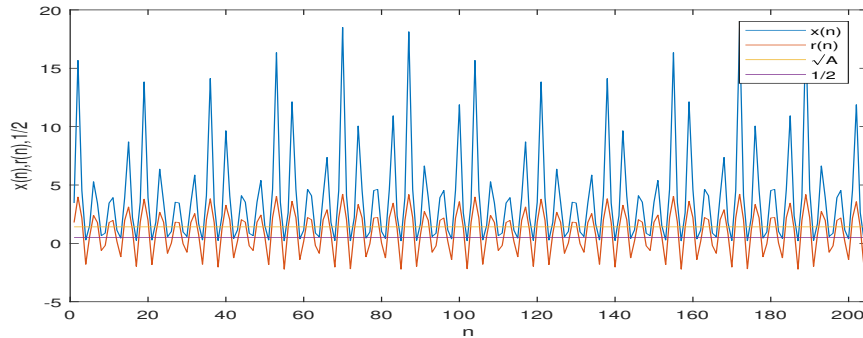
Şekil 2.2: Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 2, 2, 2, 3, 1, ... olduğunu gösterir.

Örnek 2.3. Denklem (1.5)'te $A = 1.5$, $r_{-1} = A^{2.23}$, $r_0 = A^{4.12}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 102'dir ve Şekil 2.3'de gösterilmiştir.



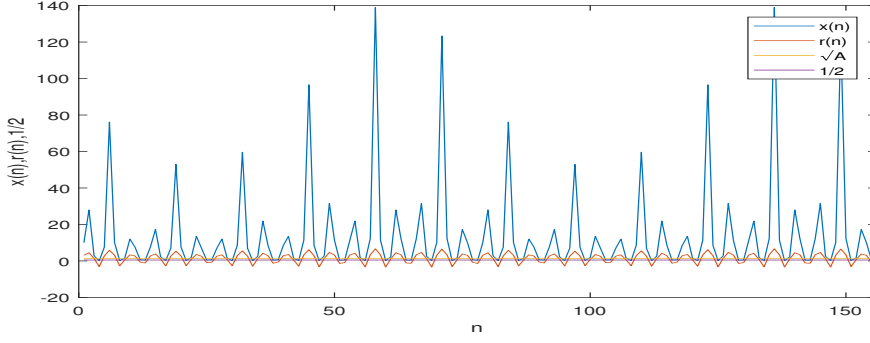
Şekil 2.3: Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 2, 2, 2, ... olduğunu gösterir.

Örnek 2.4. Denklem (1.5)'te $A = 2$, $r_{-1} = A^{1.79}$, $r_0 = A^{3.97}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 102'dir ve Şekil 2.4'de gösterilmiştir.



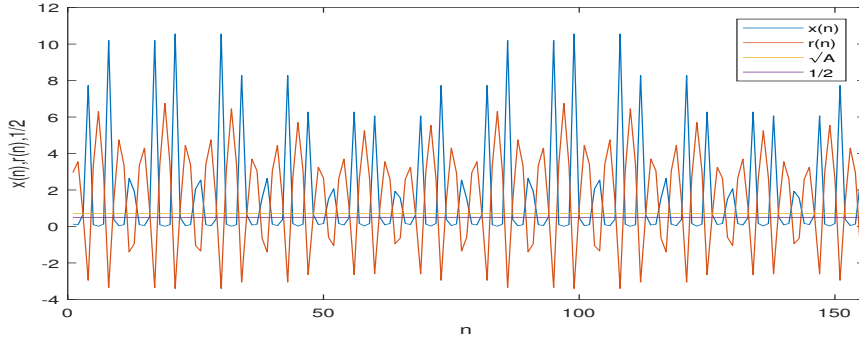
Şekil 2.4: Şekil \sqrt{A} civarında yarı dögülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 2, 2, 2, ... olduğunu gösterir.

Örnek 2.5. Denklem (1.5)'te $A = 2.1$, $r_{-1} = A^{3.11}$, $r_0 = A^{4.49}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 78'dir ve Şekil 2.5'de gösterilmiştir.



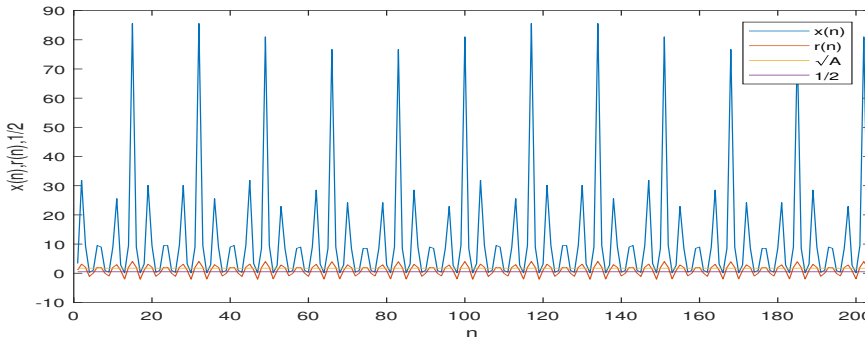
Şekil 2.5: Şekil \sqrt{A} civarında yarı döngülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 1, 3, 2, ... olduğunu gösterir.

Örnek 2.6. Denklem (1.5)'te $A = 1/2$, $r_{-1} = A^{2.95}$, $r_0 = A^{3.55}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 78'dir ve Şekil 2.6'de gösterilmiştir.



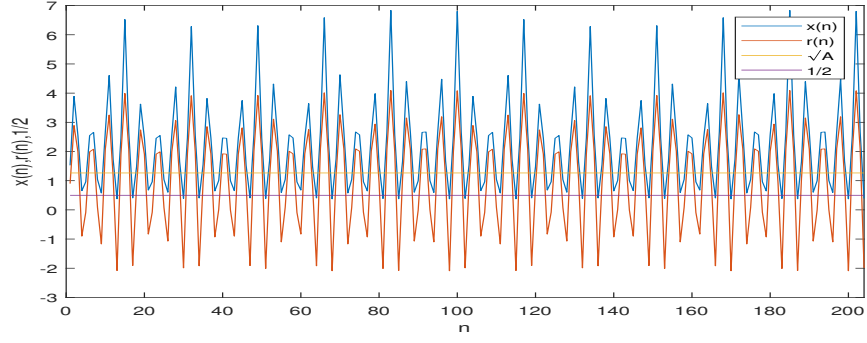
Şekil 2.6: Şekil \sqrt{A} civarında yarı döngülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 1, 3, 2, ... olduğunu gösterir.

Örnek 2.7. Denklem (1.5)'te $A = 3$, $r_{-1} = A^{1.1}$, $r_0 = A^{3.15}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 102'dir ve Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



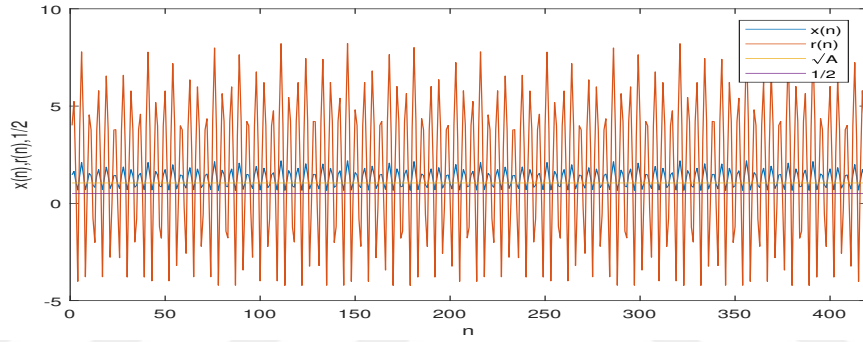
Şekil 2.7: Şekil \sqrt{A} civarında yarı döngülerin uzunluklarının 3, 2, 2, 2, 3, 1, ... olduğunu gösterir.

Örnek 2.8. Denklem (1.5)'te $A = 1.6$, $r_{-1} = A^{0.9}$, $r_0 = A^{2.89}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 102'dir ve Şekil 2.8'de gösterilmiştir.



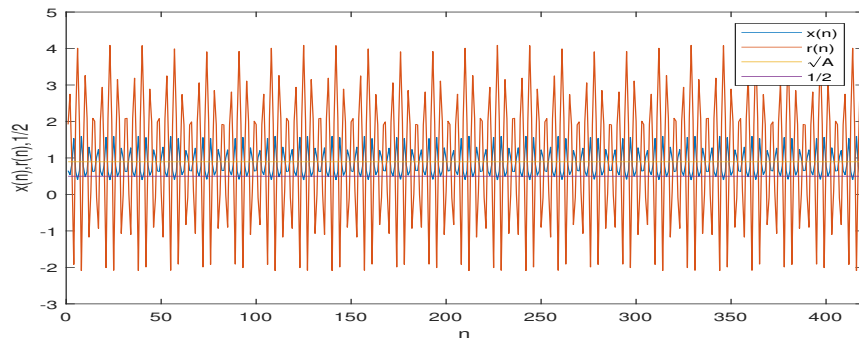
Şekil 2.8: Şekil \sqrt{A} civarında yarı döngülerin uzunluklarının 3, 2, 2, 2, 3, 1, ... olduğunu gösterir.

Örnek 2.9. Denklem (1.5)'te $A = 1.1$, $r_{-1} = A^{4.01}$, $r_0 = A^{5.24}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 210'dur ve Şekil 2.9'de gösterilmiştir.



Şekil 2.9: Şekil \sqrt{A} civarında yarı döngülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 1, 3, 2, ... olduğunu gösterir.

Örnek 2.10. Denklem (1.5)'te $A = 0.8$, $r_{-1} = A^{1.92}$, $r_0 = A^{2.75}$ olarak seçildiğinde denklemin periyodu 210'dur ve Şekil 2.10'de gösterilmiştir.



Şekil 2.10: Şekil \sqrt{A} civarında yarı döngülerin uzunluklarının 3, 1, 3, 1, 3, 2, ... olduğunu gösterir.



3. RASYONEL BİR FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde a, b, α, β parametreleri ve $x_{-j}, y_{-j}, j = 0, 1, 2, \dots, k$ başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-k}}{y_{n-k+1} - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-k} y_n}{x_{n-k+1} - \beta} + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.1)$$

rasyonel denklem sisteminin çözümlerini ve çözümlerin asimptotik davranışlarını inceleyeceğiz .

(3.1) denklem sistemi Haddad vd. (2018) tarafından çalışılan

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.2)$$

denklem sisteminin bir genellemesi olup literatürde (3.2) denklem sistemi ile ilgili başka çalışmalar da mevcuttur (Gelişken ve Arı (2022), Yazlık ve Kara (2019)).

Yazlık ve Kara $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dizileri iki periyotlu ve $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0, 1, \dots, k\}$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_{n-k+1} y_{n-k}}{y_n - \alpha_n} + \beta_{n+1}, \quad y_{n+1} = \frac{b_n y_{n-k+1} x_{n-k}}{x_n - \beta_n} + \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.3)$$

denklem sisteminin çözümlerini $a_0 = b_1$ ve $a_1 = b_0$ durumu için araştırdılar (2019).

Gelişken ve Arı a, b, α, β parametreleri ve $x_{-i}, y_{-i}, i = 0, 1, 2, 3$ başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-3}}{y_{n-2} - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-3} y_n}{x_{n-2} - \beta} + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.4)$$

denklem sisteminin çözümlerini vermiş ve bu çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemişlerdir (2022).

Öncelikle ispatlarımızda kullanacağımız iyi bilinen Lemma'yı ispatsız verelim.

Lemma 3.1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ve $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ iki reel sayı dizisi olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n$$

olsun. Öyleyse

$$y_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i \right) b_r$$

dır. Eğer $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ve $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sabitse (yani herhangi a ve b reel sayıları ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $a_n = a$ ve $b_n = b$ ise) o zaman

$$y_n = \begin{cases} y_0 + bn, & a = 1, \\ a^n y_0 + \left(\frac{a^n - 1}{a - 1} \right) b, & a \neq 1 \end{cases}$$

dır. Ayrıca $k < i$ için $\prod_{j=i}^k A_j = 1$ ve $\sum_{j=i}^k A_j = 0$ kabul edelim (Elaydi, 2005).

Şimdi (3.1) denklem sisteminin iyi tanımlı çözümlerini tanımlayan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1. (3.1) denklem sisteminin bir iyi tanımlı çözümü (x_n, y_n) olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} x_{2kn+i} &= F(i-1, n) \prod_{l=1}^{n-1} F(2k-1, l) x_{2k} \\ &+ F(i-1, n) \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{l=r+1}^{n-1} F(2k-1, l) G(2k-1, r) \right) \beta + G(i-1, n) \beta, \\ y_{2kn+i} &= F^*(i-1, n) \prod_{l=1}^{n-1} F^*(2k-1, l) y_{2k} \\ &+ F^*(i-1, n) \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{l=r+1}^{n-1} F^*(2k-1, l) G^*(2k-1, r) \right) \alpha + G^*(i-1, n) \alpha \end{aligned}$$

olur, burada $n \in \mathbb{N}_0$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2k-1$ ve

$$\begin{aligned} F(p, q) &= \prod_{j=0}^p \left(u_j \left(\frac{a}{b} \right)^q \right), \quad G(p, q) = \sum_{r=0}^p \left(\prod_{j=r+1}^p \left(u_j \left(\frac{a}{b} \right)^q \right) \right), \\ F^*(p, q) &= \prod_{j=0}^p \left(v_j \left(\frac{b}{a} \right)^q \right), \quad G^*(p, q) = \sum_{r=0}^p \left(\prod_{j=r+1}^p \left(v_j \left(\frac{b}{a} \right)^q \right) \right) \end{aligned}$$

dir.

İspat. (3.1) denklem sistemini

$$\frac{x_{n+1} - \beta}{x_n} = \frac{ay_{n-k}}{y_{n-k+1} - \alpha}, \quad \frac{y_{n+1} - \alpha}{y_n} = \frac{bx_{n-k}}{x_{n-k+1} - \beta}$$

şeklinde yazalım ve

$$u_n = \frac{x_{n+1} - \beta}{x_n}, \quad v_n = \frac{y_{n+1} - \alpha}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.5)$$

değişken değişimini yapalım. Buradan

$$u_n = \frac{a}{v_{n-k}}, \quad v_n = \frac{b}{u_{n-k}} \Rightarrow u_{n+k} = \frac{a}{v_n}, \quad v_{n+k} = \frac{b}{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.6)$$

ve

$$u_n = \frac{a}{b} u_{n-2k}, \quad v_n = \frac{b}{a} v_{n-2k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Buradan da

$$u_{n+2k} = \frac{a}{b} u_n, \quad v_{n+2k} = \frac{b}{a} v_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.8)$$

yazılır. Böylece $n \in \mathbb{N}_0$

$$u_{2kn+i} = \left(\frac{a}{b}\right)^n u_i, \quad v_{2kn+i} = \left(\frac{b}{a}\right)^n v_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2k-1 \quad (3.9)$$

elde edilir. Denklem (3.5) yeniden düzenlenirse,

$$x_{n+1} = u_n x_n + \beta, \quad y_{n+1} = v_n y_n + \alpha \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada n yerine $2kn + i$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2k-1\}$

$$x_{2kn+i+1} = u_{2kn+i} x_{2kn+i} + \beta = \left(\frac{a}{b}\right)^n u_i x_{2kn+i} + \beta, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.11)$$

$$y_{2kn+i+1} = v_{2kn+i} y_{2kn+i} + \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^n v_i y_{2kn+i} + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.12)$$

Denklem (3.11)'den,

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= \frac{a}{b} u_0 x_{2k} + \beta, \\ x_{2k+2} &= \frac{a}{b} u_1 x_{2k+1} + \beta = \frac{a}{b} u_1 \left(\frac{a}{b} u_0 x_{2k} + \beta \right) + \beta \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 u_1 u_0 x_{2k} + \frac{a}{b} u_1 \beta + \beta, \\ x_{2k+3} &= \frac{a}{b} u_2 x_{2k+2} + \beta = \frac{a}{b} u_2 \left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 u_1 u_0 x_{2k} + \frac{a}{b} u_1 \beta + \beta \right) + \beta \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^3 u_2 u_1 u_0 x_{2k} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 u_2 u_1 \beta + \frac{a}{b} u_2 \beta + \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{2k+4} &= \frac{a}{b} u_3 x_{2k+3} + \beta = \frac{a}{b} u_3 \left(\left(\frac{a}{b} \right)^3 u_2 u_1 u_0 x_{2k} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_2 u_1 \beta + \frac{a}{b} u_2 \beta + \beta \right) + \beta \\
&= \left(\frac{a}{b} \right)^4 u_3 u_2 u_1 u_0 x_{2k} + \left(\frac{a}{b} \right)^3 u_3 u_2 u_1 \beta + \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_3 u_2 \beta + \frac{a}{b} u_3 \beta + \beta,
\end{aligned}$$

⋮

$$x_{4k-1} = \left(\prod_{j=0}^{2k-2} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} + \left(\left(\prod_{j=1}^{2k-2} u_j \frac{a}{b} \right) + \left(\prod_{j=2}^{2k-2} u_j \frac{a}{b} \right) + \dots + 1 \right) \beta$$

olur ve

$$x_{4k} = \frac{a}{b} u_{2k-1} x_{4k-1} + \beta$$

olduğundan

$$x_{4k} = \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} + \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta$$

bulunur. Öyleyse

$$\begin{aligned}
x_{4k+1} &= \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_0 x_{4k} + \beta = \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_0 \left(\left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} + \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta \right) + \beta \\
&= \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_0 \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_0 \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta + \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{4k+2} &= \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_1 x_{4k+1} + \beta = \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_1 \left(\left(\frac{a}{b} \right)^2 u_0 \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_0 \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta + \beta \right) + \beta = \left(\frac{a}{b} \right)^4 u_1 u_0 \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} \\
&\quad + \left(\frac{a}{b} \right)^4 u_1 u_0 \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta + \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_1 \beta + \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{4k+3} &= \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_2 x_{4k+2} + \beta = \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_2 \left(\left(\frac{a}{b} \right)^4 u_1 u_0 \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a}{b} \right)^4 u_1 u_0 \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta + \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_1 \beta + \beta \right) + \beta = \left(\frac{a}{b} \right)^6 u_2 u_1 u_0 \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} \\
&\quad + \left(\frac{a}{b} \right)^6 u_2 u_1 u_0 \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta + \left(\frac{a}{b} \right)^4 u_2 u_1 \beta + \left(\frac{a}{b} \right)^2 u_2 \beta + \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{4k+4} &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 u_3 x_{4k+3} + \beta = \left(\frac{a}{b}\right)^2 u_3 \left(\left(\frac{a}{b}\right)^6 u_2 u_1 u_0 \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{a}{b}\right)^6 u_2 u_1 u_0 \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta \left(\frac{a}{b}\right)^4 u_2 u_1 \beta + \left(\frac{a}{b}\right)^2 u_2 \beta + \beta \right) + \beta \\
&= \left(\frac{a}{b}\right)^8 u_3 u_2 u_1 u_0 \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} + \left(\frac{a}{b}\right)^8 u_3 u_2 u_1 u_0 \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \beta + \left(\frac{a}{b}\right)^6 u_3 u_2 u_1 \beta \\
&+ \left(\frac{a}{b}\right)^4 u_3 u_2 \beta + \left(\frac{a}{b}\right)^2 u_3 \beta + \beta,
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
x_{6k} &= \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) x_{2k} + \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \frac{a}{b} \right) \\
&+ \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{2k-1} u_i \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \beta
\end{aligned}$$

olur, işlemlere devam edilerek

$$\begin{aligned}
x_{2kn+i} &= \prod_{j=0}^{i-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \frac{a}{b} \right) \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \dots \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} \right) \right) x_{2k} \\
&+ \prod_{j=0}^{i-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} \right) \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} \right) \dots \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \right. \\
&\left(\sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{j=r+1}^{2k-1} \left(u_j \frac{a}{b} \right) \right) \right) + \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} \right) \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} \right) \dots \left(\prod_{j=0}^{2k-1} u_j \left(\frac{a}{b}\right)^3 \right) \\
&\left. \left(\sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{j=r+1}^{2k-1} \left(u_j \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \right) \right) \right) + \dots + \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{j=r+1}^{2k-1} \left(u_j \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} \right) \right) \right) \beta \\
&+ \sum_{r=0}^{i-1} \left(\prod_{j=r+1}^{i-1} \left(u_j \left(\frac{a}{b}\right)^n \right) \right) \beta, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
y_{2kn+i} &= \prod_{j=0}^{i-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^n \left(\left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \frac{b}{a} \right) \left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right) \dots \left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \right) \right) y_{2k} \\
&+ \prod_{j=0}^{i-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^n \left(\left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \right) \left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} \right) \dots \left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right) \right. \\
&\left. \left(\sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{j=r+1}^{2k-1} \left(v_j \frac{b}{a} \right) \right) \right) + \left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \right) \left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} \right) \dots \left(\prod_{j=0}^{2k-1} v_j \left(\frac{b}{a}\right)^3 \right) \right. \\
&\left. \left(\sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{j=r+1}^{2k-1} \left(v_j \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right) \right) \right) + \dots + \sum_{r=0}^{2k-1} \left(\prod_{j=r+1}^{2k-1} \left(v_j \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \right) \right) \right) \alpha \\
&+ \sum_{r=0}^{i-1} \left(\prod_{j=r+1}^{i-1} \left(v_j \left(\frac{b}{a}\right)^n \right) \right) \alpha
\end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
F(p, q) &= \prod_{j=0}^p \left(u_j \left(\frac{a}{b}\right)^q \right), \quad G(p, q) = \sum_{r=0}^p \left(\prod_{j=r+1}^p \left(u_j \left(\frac{a}{b}\right)^q \right) \right), \\
F^*(p, q) &= \prod_{j=0}^p \left(v_j \left(\frac{b}{a}\right)^q \right), \quad G^*(p, q) = \sum_{r=0}^p \left(\prod_{j=r+1}^p \left(v_j \left(\frac{b}{a}\right)^q \right) \right)
\end{aligned}$$

fonksiyonları tanımlanırsa (3.13) ve (3.14) denklemleri

$$\begin{aligned}
x_{2kn+i} &= F(i-1, n) \prod_{l=1}^{n-1} F(2k-1, l) x_{2k} \\
&+ F(i-1, n) \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{l=r+1}^{n-1} F(2k-1, l) G(2k-1, r) \right) \beta + G(i-1, n) \beta, \\
y_{2kn+i} &= F^*(i-1, n) \prod_{l=1}^{n-1} F^*(2k-1, l) y_{2k} \\
&+ F^*(i-1, n) \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{l=r+1}^{n-1} F^*(2k-1, l) G^*(2k-1, r) \right) \alpha + G^*(i-1, n) \alpha
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve ispat biter. \square

3.1 Denklem (3.1)'in Asimptotik Davranışı

Bu kısımda (3.1) denklem sisteminde $a = b$ olması durumundaki asimptotik ve periyodik davranışlarını inceleyeceğiz. Öncelikle Teorem 3.1'in bir direk sonucunu vereceğiz, daha sonra sistemde $a = b$ olması halinde sistemin limitini inceleyeceğiz. Şimdi önceki

kısımda verilen bazı fonksiyonları yeniden tanımlayalım.

$a = b$ olduğundan

$$F(p, q) = \prod_{j=0}^p \left(u_j \left(\frac{a}{b} \right)^q \right) = \prod_{j=0}^p (u_j (1)^q) = \prod_{j=0}^p u_j,$$

yazılabilir. Böylece

$$F(p) = \prod_{j=0}^p u_j$$

dir. Benzer şekilde

$$G(p) = \sum_{r=0}^p \left(\prod_{j=r+1}^p (u_j) \right), F^*(p) = \prod_{j=0}^p v_j, G^*(p) = \sum_{r=0}^p \left(\prod_{j=r+1}^p (v_j) \right)$$

olur. $d_1, d_2, e_1, e_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $F(2k-1) = d_1, G(2k-1) = e_1, F^*(2k-1) = d_2$ ve $G^*(2k-1) = e_2$ olsun.

Sonuç 3.1. (3.1) denklem sisteminin $a = b$ durumunda iyi tanımlı bir çözümü (x_n, y_n) olsun. Öyleyse $n \in \mathbb{N}_0$ ve $i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}$ için

$$x_{2kn+i} = \begin{cases} F(i-1)x_{2k} + F(i-1)e_1\beta n + G(i-1), & d_1 = 1, \\ F(i-1)d_1^n x_{2k} + F(i-1)G(i-1) \left(\frac{d_1^n - 1}{d_1 - 1} \right) \beta, & d_1 \neq 1, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$y_{2kn+i} = \begin{cases} F^*(i-1)y_{2k} + F^*(i-1)e_2\alpha n + G^*(i-1), & d_2 = 1, \\ F^*(i-1)d_2^n y_{2k} + F^*(i-1)G^*(i-1) \left(\frac{d_2^n - 1}{d_2 - 1} \right) \alpha, & d_2 \neq 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

dir. Şimdi (3.1) sisteminin limitini inceleyelim.

Teorem 3.2. (3.1) denklem sisteminin $a = b$ durumunda iyi tanımlı bir çözümü (x_n, y_n) olsun. Öyleyse aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) Kabul edelim ki $d_1 = 1$ olsun. Öyleyse $i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}$ için $F(i-1)e_1\beta \neq 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $|x_{2kn+i}| \rightarrow \infty$ olur. Eğer $i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}$ olmak üzere $F(i-1)e_1\beta = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{2kn+i} = F(i-1)x_{2k} + G(i-1)$ dir.

b) Kabul edelim ki $F(i-1)x_{2k}(d_1 - 1) + F(i-1)G(i-1)\beta \neq 0$ olsun, öyleyse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2kn+i}| = \begin{cases} \left| \frac{F(i-1)G(i-1)\beta}{d_1 - 1} \right|, & |d_1| < 1 \\ \infty, & |d_1| > 1 \end{cases}$$

dir. Eğer $i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}$ olmak üzere $F(i-1)x_{2k}(d_1 - 1) + F(i-1)G(i-1)\beta = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{2kn+i} = F(i-1)x_{2k}$ olur.

c) Kabul edelim ki $d_2 = 1$ olsun. Öyleyse $i \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ için $F^*(i - 1)e_2\alpha \neq 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $|y_{2kn+i}| \rightarrow \infty$ olur. Eğer $i \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ olmak üzere $F^*(i - 1)e_2\alpha = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $y_{2kn+i} = F^*(i - 1)y_{2k} + G^*(i - 1)$ dir.

d) Kabul edelim ki $F^*(i - 1)y_{2k}(d_2 - 1) + F^*(i - 1)G^*(i - 1)\alpha \neq 0$ olsun, öyleyse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{2kn+i}| = \begin{cases} \left| \frac{F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha}{d_2-1} \right|, & |d_2| < 1 \\ \infty, & |d_2| > 1 \end{cases}$$

dir. Eğer $i \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ olmak üzere $F^*(i-1)y_{2k}(d_2-1) + F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $y_{2kn+i} = F^*(i - 1)y_{2k}$ olur.

İspat. a) Kabul edelim ki $d_1 = 1$ ve $F(i - 1)e_1\beta \neq 0$ olsun. (3.15)'den

$$x_{2kn+i} = F(i - 1)x_{2k} + F(i - 1)e_1\beta n + G(i - 1) \neq 0,$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken $|x_{2kn+i}| \rightarrow \infty$ olur. Eğer $F(i - 1)e_1\beta = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ve $i \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ için

$$x_{2kn+i} = F(i - 1)x_{2k} + 0.n + G(i - 1) = F(i - 1)x_{2k} + G(i - 1)$$

dir.

b) Kabul edelim ki $i \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ için $F(i - 1)x_{2k}(d_1 - 1) + F(i - 1)G(i - 1)\beta \neq 0$ olsun. Öyleyse $x_{2kn+i} \neq 0$ dir. (3.15)'den

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2kn+i}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{F(i - 1)(d_1 - 1)x_{2k} + F(i - 1)G(i - 1)\beta}{d_1 - 1} d_1^n + \frac{F(i - 1)G(i - 1)\beta}{1 - d_1} \right| \\ &= \left| \frac{F(i - 1)(d_1 - 1)x_{2k} + F(i - 1)G(i - 1)\beta}{d_1 - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} d_1^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(i - 1)G(i - 1)\beta}{1 - d_1} \right| \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{2kn+i}| = \begin{cases} \left| \frac{F(i-1)G(i-1)\beta}{d_1-1} \right|, & |d_1| < 1 \\ \infty, & |d_1| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

olur. Eğer $F(i - 1)x_{2k}(d_1 - 1) + F(i - 1)G(i - 1)\beta = 0$ ve $d_1 \neq 1$ ise

$$\begin{aligned}
x_{6n+i} &= F(i-1)d_1^n x_{2k} + F(i-1)G(i-1) \left(\frac{d_1^n - 1}{d_1 - 1} \right) \beta \\
&= F(i-1)d_1^n x_{2k} - \left(\frac{d_1^n - 1}{d_1 - 1} \right) F(i-1)x_{2k}(d_1 - 1) \\
&= F(i-1)x_{2k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}
\end{aligned}$$

bulunur.

c) Kabul edelim ki $d_2 = 1$ ve $F^*(i-1)e_2\alpha \neq 0$ olsun. (3.16)'den

$$y_{2kn+i} = F^*(i-1)y_{2k} + F^*(i-1)e_2\alpha n + G^*(i-1) \neq 0,$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken $|y_{2kn+i}| \rightarrow \infty$ olur. Eğer $F^*(i-1)e_2\alpha = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ve $i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}$ için

$$y_{2kn+i} = F^*(i-1)y_{2k} + 0 \cdot n + G^*(i-1) = F^*(i-1)y_{2k} + G^*(i-1)$$

dir.

d) Kabul edelim ki $i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}$ için $F^*(i-1)y_{2k}(d_2 - 1) + F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha \neq 0$ olsun. Öyleyse $y_{2kn+i} \neq 0$ dir. (3.16)'den

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{2kn+i}| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{F^*(i-1)(d_2 - 1)y_{2k} + F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha}{d_2 - 1} d_2^n + \frac{F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha}{1 - d_2} \right| \\
&= \left| \frac{F^*(i-1)(d_2 - 1)y_{2k} + F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha}{d_2 - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} d_2^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha}{1 - d_2} \right| \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{2kn+i}| = \begin{cases} \left| \frac{F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha}{d_2 - 1} \right|, & |d_2| < 1 \\ \infty, & |d_2| > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $F^*(i-1)y_{2k}(d_2 - 1) + F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha = 0$ ve $d_2 \neq 1$ ise

$$\begin{aligned}
y_{6n+i} &= F^*(i-1)d_2^n y_{2k} + F^*(i-1)G^*(i-1) \left(\frac{d_2^n - 1}{d_2 - 1} \right) \alpha \\
&= F^*(i-1)d_2^n y_{2k} - \left(\frac{d_2^n - 1}{d_2 - 1} \right) F^*(i-1)y_{2k}(d_2 - 1) \\
&= F^*(i-1)y_{2k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}
\end{aligned}$$

bulunur. □

Sonuç 3.2. (3.1) denklem sisteminin $a = b$ durumunda iyi tanımlı bir çözümü (x_n, y_n) olsun. Öyleyse aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $d_1 = -1$ olsun. Öyleyse $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ve $i \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ için

$$\begin{cases} x_{4kn+i} = F(i-1)x_{2k}, \\ x_{4kn+2k+i} = -F(i-1)x_{2k} + F(i-1)G(i-1)\beta \end{cases}$$

dir.

b) $d_2 = -1$ olsun. Öyleyse $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ve $i \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ için

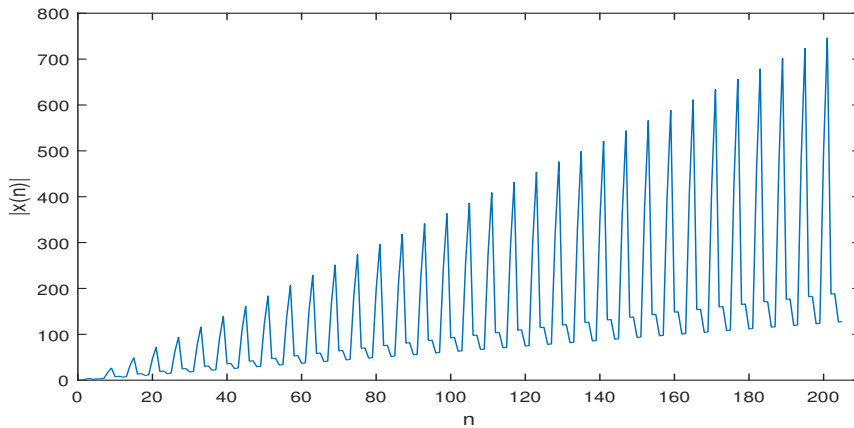
$$\begin{cases} y_{4kn+i} = F^*(i-1)y_{2k}, \\ y_{4kn+2k+i} = -F^*(i-1)y_{2k} + F^*(i-1)G^*(i-1)\alpha \end{cases}$$

dir.

3.2 Sayısal Örnekler

Bu kısımda (3.1) fark denklem sisteminin periyodik ve asimptotik davranışını gösteren sayısal örnekler vereceğiz. Bu örneklerin bazılarında başlangıç şartları ve parametreler rastgele bazılarında ise özellikle seçilmiştir. x_n ve y_n simetrik olduğundan örnekler x_n için yapılmıştır.

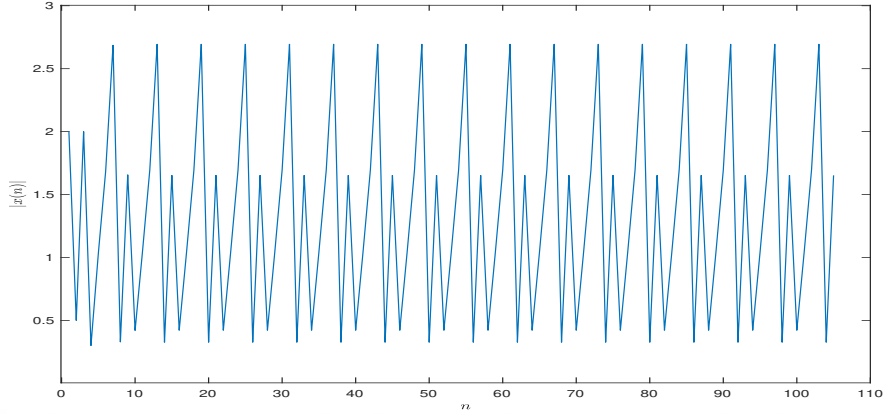
Örnek 3.1. $k = 3$ için başlangıç şartları ve parametreler $a = 1, b = 1, \alpha = 1, \beta = 1, x_{-3} = 1/4, x_{-2} = 2, x_{-1} = 4, x_0 = 2, y_{-3} = 1, y_{-2} = 2, y_{-1} = 4$ ve $y_0 = 5$ seçilerek $d_1 = 1$ bulunur, öyleyse $F(i-1)e_1\beta \neq 0$ dir. Şekil 3.11, $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$ için $n \rightarrow \infty$ iken $|x_{6n+i}| \rightarrow \infty$ olduğunu gösterir.



Şekil 3.11: $|x_{6n+i}| \rightarrow \infty$.

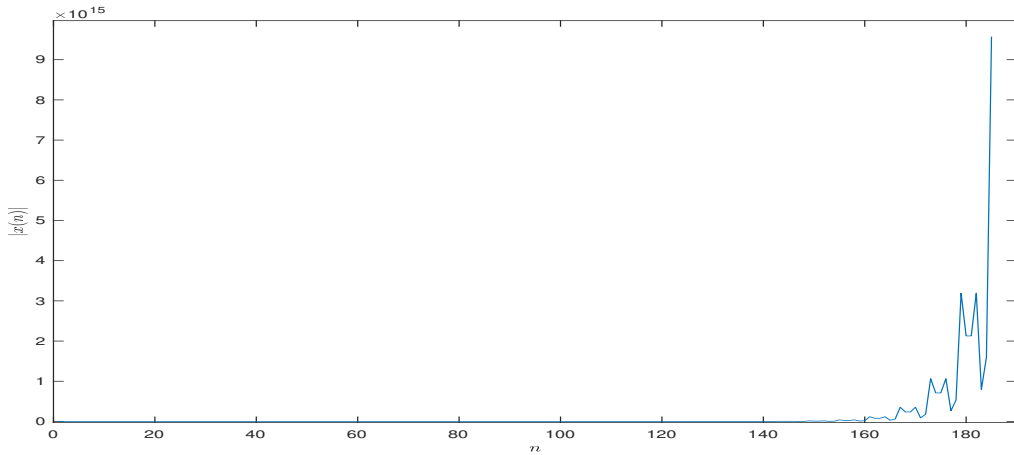
Örnek 3.2. $k = 3$ için başlangıç şartları ve parametreler $a = 1, b = 1, \alpha = 1, \beta = 1,$

$x_{-3} = 2, x_{-2} = 1/2, x_{-1} = 2, x_0 = 0.3, y_{-3} = 0.1, y_{-2} = 2, y_{-1} = 4$ ve $y_0 = 5$ seçilerek $d_1 = 0.0117$ bulunur, öyleyse $F(i-1)x_{2k}(d_1-1) + F(i-1)G(i-1)\beta \neq 0$ dır. Şekil 3.12, $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$ için $|x_{6n+i}|$ 'in 6 periyotlu çözüme yakınsadığını gösterir.



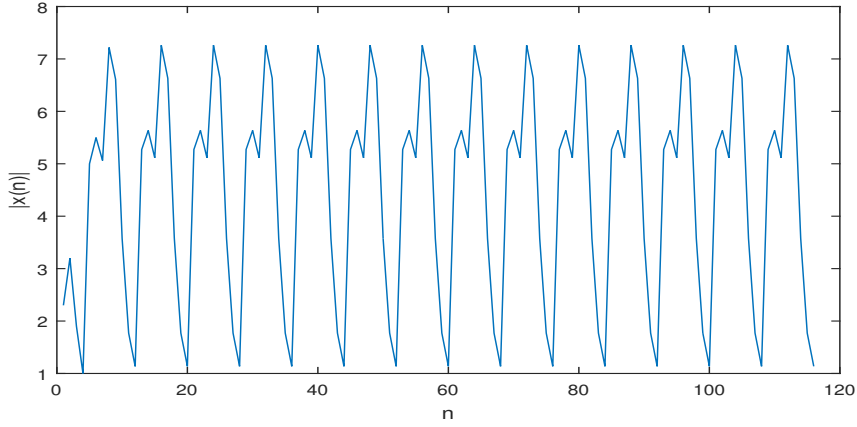
Şekil 3.12: 6 periyotlu çözüm.

Örnek 3.3. $k = 3$ için başlangıç şartları ve parametreler $a = 1, b = 1, \alpha = 1, \beta = 1,$ $x_{-3} = 2, x_{-2} = 4, x_{-1} = 2, x_0 = 5, y_{-3} = 6, y_{-2} = 2, y_{-1} = 4$ ve $y_0 = 5$ seçilerek $d_1 = 3$ bulunur, öyleyse $F(i-1)x_{2k}(d_1-1) + F(i-1)G(i-1)\beta \neq 0$ dır. Şekil 3.13, $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$ için $n \rightarrow \infty$ iken $|x_{6n+i}| \rightarrow \infty$ olduğunu gösterir.



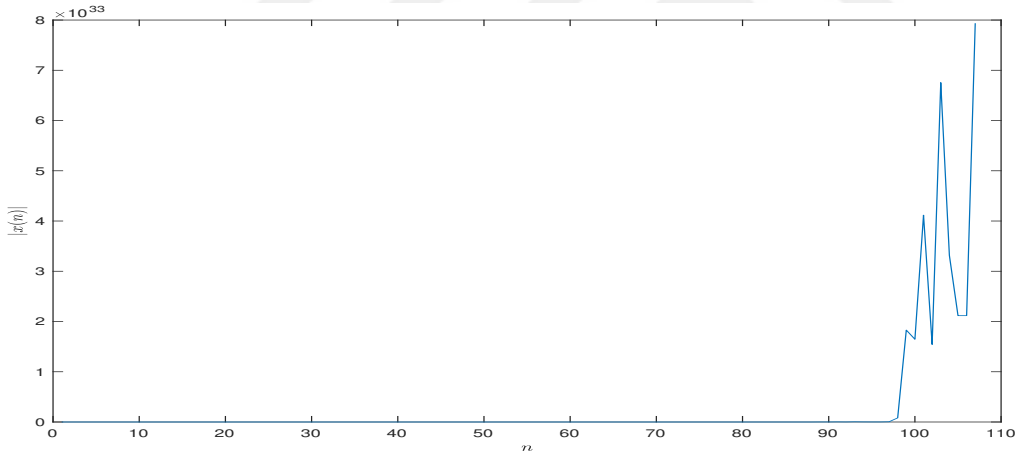
Şekil 3.13: $|x_{6n+i}| \rightarrow \infty$.

Örnek 3.4. $k = 4$ için başlangıç şartları ve parametreler $a = 0.5, b = 0.5, \alpha = 1,$ $\beta = 3, x_{-4} = 2.3, x_{-3} = 3.2, x_{-2} = 1.9, x_{-1} = 1, x_0 = 5, y_{-4} = 2, y_{-3} = 3, y_{-2} = 5,$ $y_{-1} = 4$ ve $y_0 = 5$ seçilerek $d_1 = 0.0049$ bulunur, öyleyse $F(i-1)x_{2k}(d_1-1) + F(i-1)G(i-1)\beta \neq 0$ dır. Şekil 3.14, $i \in \{0, 1, \dots, 7\}$ için $|x_{8n+i}|$ 'in 8 periyotlu çözüme yakınsadığını gösterir.



Şekil 3.14: 8 periyotlu çözüm.

Örnek 3.5. $k = 5$ için başlangıç şartları ve parametreler $a = 3, b = 3, \alpha = 1, \beta = 2,$
 $x_{-5} = 3.2, x_{-4} = 0.8, x_{-3} = 5.5, x_{-2} = 4.7, x_{-1} = 5, x_0 = 7, y_{-5} = 2.5, y_{-4} = 3,$
 $y_{-3} = 1.5, y_{-2} = 1.2, y_{-1} = 5$ ve $y_0 = 7$ seçilerek $d_1 = -7.71$ bulunur, öyleyse
 $F(i-1)x_{2k}(d_1-1) + F(i-1)G(i-1)\beta \neq 0$ dir. Şekil 3.15, $i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ için
 $n \rightarrow \infty$ iken $|x_{10n+i}| \rightarrow \infty$ olduğunu gösterir.



Şekil 3.15: $|x_{10n+i}| \rightarrow \infty$.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın orijinal kısmı ikinci ve üçüncü bölümden oluşmaktadır. Tezin ikinci bölümünde, A pozitif reel sayı ve r_{-1}, r_0 pozitif rasyonel sayılar olmak üzere, $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç şartları için $x_{n+1} = \max \{x_n^2, A\} / x_n x_{n-1}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiş ve çözümlerle ilgili sayısal örnekler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde ise rasyonel bir fark denklem sistemi üzerinde durulmuş, sistemin çözümleri elde edilmiş çözümlerin asimptotik ve periyodik davranışları incelenmiştir. Son olarak da denklem sisteminin çözümleri sayısal örnekler verilerek doğrulanmıştır.

Çalışmamızın orijinal kısmında ele alınan problemlere benzer problemler literatürde mevcut olup çalışmamızda kullanılan yöntemlerin bu problemlere de uygulanabileceği düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Abu-Saris, R., Allan, F. (1997). Periodic and nonperiodic solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n^2, A\}}{x_n x_{n-1}}$. In: Elaydi, S., Györi, I., Ladas, G. (eds.) *Advances in Difference Equations* (Veszprem, 1995), pp. 9-17. Gordon and Breach, Amsterdam.
- Bas, A. L., Roldán, D. N. (2022). On the relationship between Lozi maps and max-type difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*.
- Bas, A. L., Roldán, D. N. (2023). A survey on max-type difference equations. In: Elaydi, S., Kulenović, M.R.S., Kalabušić, S. (eds) *Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 416*. Springer, Cham.
- Crampin, M. (1992). Piecewise linear recurrence relations, *The Mathematical Gazette* 76, 355-359.
- Çinar, C. (2004). On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{1 + bx_n x_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation* 156 (2), 587-590.
- Devaney, R. L. (1984). A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map, *Physica* 10D, 387-393.
- DeVault, R., Ladas, G., Schultz, W. S. (1998). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}$, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(11) 3257-3261.
- Elaydi, S. (2005). *An introduction to difference equations*. Springer-Verlag New York.
- Elsayed, E. M. (2013). Behavior and expression of the solutions of some rational difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 15, 75-81.
- Feuer, J. (2003). Periodic solutions of the Lyness max equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 147-160.
- Feuer, J., Janowski, E. J., Ladas, G., Teixeira, T. (2000). Global behavior of solutions of $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2, 237-252.
- Gelişken, A., Çinar, C., Karataş, R. (2008a). A note on the periodicity of the

- Lyness max equation. *Hindawi Publishing Corporation Advances in Difference Equations*, Article ID 651747, 5 pages.
- Gelişken, A., Çinar, C., Yalçinkaya, İ. (2008b). On the periodicity of a difference equation with maximum. *Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 820629, 11 pages.
- Grove, E.A., Ladas, G. (2004). Periodicities in nonlinear difference equations. *Chapman and Hall/CRC*.
- Gelişken, A., Arı, M. (2022). Solution of a solvable system of difference equation, *Ikonion Journal of Mathematics*, 4 (1), 1-8.
- Haddad, N., Touafek N., Rabago J. F. T. (2018). Well-defined solutions of a system of difference equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 56(1-2):439-458.
- Janowski, E. J., Kocic, V. L., Ladas, G., Schultz, S. W. (1995). Global behavior of solutions of $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_{n-1}}$, In: *Elaydi, S., Graef, J.R., Ladas, G., Peterson, A.C. (eds.) Proceedings of the First International Conference on Difference Equations, Trinity University, San Antonio, Texas. Gordon and Breach Science Publishers, Basel*.
- Janowski, E.J., Ladas, G., Valicenti, S. (1997). Lyness-type equations with period-two coefficients. *Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations and Applications, August 7-11, 1995, Vespem, Hungary, Gordon and Breach Science Publishers, 327-334*.
- Kulenović, M. R. S., Ladas, G. (2002). Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures, *Boca Raton, London*.
- Ladas, G. (1995). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 1, 95-97.
- Lakshmikantham, V., Trigiante, D. (2002). Theory of difference equations numerical methods and applications. *Marcel Dekker, Inc*.
- Papaschinopoulos, G., Fotiades, N., Schinas, C. J. (2014). On a system of difference equations including negative exponential terms, *Journal of Difference Equations and Applications*, 20:717-732.
- Şimşek, D., Oğul, B., Abdullayev, F. (2017). Solutions of the rational difference equations $x_{n+1} = \frac{x_{n-11}}{1+x_{n-2}x_{n-5}x_{n-8}}$, *AIP Conference Proceedings*, 1880, 040003.

Şimsek D., Oğul B., Abdullayev F. (2020). Solution of the rational difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-13}}{1+x_{n-1}x_{n-3}x_{n-5}x_{n-7}x_{n-9}x_{n-11}}$, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 5(1):485-494.

Stevic, S. (2002). On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{x_n}{g(x_n)}$, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6 (3), 405-414.

Yalçinkaya, İ., Çinar, C., Gelişken, A. (2010). On the recursive sequence $x_{n+1} = \max\{x_n, A\}/x_n^2x_{n-1}$. *Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 583230, 13 pages.

Yazlık, Y., Kara, M. (2019). On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68 (2), 1675-1693.