

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GG-KONVEKS FONKSİYONLAR ve İLGİLİ BAZI
EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : **Kazım ÖZCAN**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : **Matematik**

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. İmdat İŞCAN**

Haziran 2023
GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GG-KONVEKS FONKSİYONLAR ve İLGİLİ BAZI
EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kazım ÖZCAN

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 23/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Jüri Başkanı**

**Prof. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç. Dr.
Sercan TURHAN
Üye**

**Prof. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Kazım ÖZCAN

23/06/2023

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmalarım süresince, bilimsel ve manevi desteğini esirgemeyen, çalışmamın planlanması ve yürütülmesinde tecrübelerini ve bilgilerini benimle paylaşan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. İmdat İŞCAN'a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca manevi desteklerini esirgemeyen eşim Serap, oğlum Ömer ve kızım Meva'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Teoremler	2
2.2. GG-Konveks Fonksiyonlar	6
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	9
3.1. Bazı Önemli Eşitsizlikler	9
3.2. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Önemli Eşitsizlikler	10
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	16
4.1. GG-Konveks Fonksiyonlarla İlgili Bazı Önemli Eşitsizlikler	16
4.2. GG-Konveks Fonksiyonlar İçin Jensen-Mercer Tipli Eşitsizlikler	21
4.3. GG-Konveks Fonksiyonlar İçin Lazhar Tipli Eşitsizlikler	23
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	26

KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ	29



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}_+	: $(0, \infty)$ aralığı
I	: \mathbb{R} ' de herhangi bir aralık
I°	: I aralığının içi
$C(I)$: Konveks fonksiyonlar sınıfı
\forall	: Her
\exists	: En az
f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
Γ	: Gamma fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Konveks küme.....	3
Şekil 2.2. Konveks olmayan (konkav) küme.....	3
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon.....	4



GG-KONVEKS FONKSİYONLAR ve İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER

ÖZET

Bu tezin amacı GG-konveks fonksiyon sınıfı için bazı yeni eşitsizlikler vermektir. Tezin birinci bölümünde konvekslik ve eşitsizlik teorisinin tarihsel süreçleri ve literatür çalışmalarına yer verilmiştir. İkinci bölümde tezin altyapısı için gerekli olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde tez çalışmasında kullanılan eşitsizlikler ile bu eşitsizlikleri içeren teoremler ve ispatları verilmiştir. Dördüncü bölümde ilk olarak GG-konveks fonksiyon sınıfı için bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra literatürde mevcut olan Jensen-Mercer eşitsizliği ve Lazhar eşitsizlikleri, GG-konveks fonksiyonlar için ifade ve ispat edilmiştir. Böylece literatüre yeni eşitsizlikler kazandırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyon, GG-Konveks Fonksiyon, Eşitsizlikler

GG-CONVEX FUNCTIONS and SOME RELATED INEQUALITIES

SUMMARY

The purpose of this thesis is to provide some new inequalities for the class of GG-convex function. This thesis includes historical developments and literature studies on convexity and inequality theory in the first chapter. The second chapter provides the necessary fundamental concepts, definitions and theorems for the framework of the thesis. The third chapter presents the inequalities used in the thesis along with the relevant theorems and their proofs. In the fourth chapter, some new inequalities were first obtained for the GG-convex function class. Then, the Jensen-Mercer and Lazhar inequalities, which are available in the literature, were expressed and proven for GG-convex functions. Thus, new inequalities have been added to the literature.

Keywords: Convex Function, GG-Convex Function, Inequalities

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konvekslik kavramı Arşimet'in M.Ö. 250 yıllarında π değerini sınırlı düzgün çokgenler kullanarak hesaplamasına kadar dayanmaktadır. Konvekslik son zamanlarda ekstremum problemleri gibi matematiğin birçok alanında giderek önem kazanmaktadır [1]. 1905 ve 1906 yıllarında, ünlü Danimarkalı mühendis ve matematikçi J. L. W. V. Jensen tarafından yayınlanan iki makaleden sonra, konveks fonksiyonlar teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Bu hızlı gelişmenin nedenleri şu şekilde sıralanabilir: Birincisi, modern analizde birçok alan doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların uygulamalarını içerir; ikinci olarak ise konveks fonksiyonlar, eşitsizlik teorisi ile yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik konveks fonksiyonların uygulamalarının sonuçlarıdır [2].

Eşitsizlikler konusunda ilk kapsamlı çalışma Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934'de yapılan çalışmadır. Hardy ve arkadaşları elde ettikleri birçok yeni eşitsizliği "Inequalities" isimli kitapta toplamışlardır [3]. Eşitsizlik teorisi konveks fonksiyonlarla doğrudan ilgilidir. Literatürde tanımlı olan birçok eşitsizliğin yanı sıra sadece konveks fonksiyonlar için tanımlanan bazı integral eşitsizlikleri de vardır. Bu eşitsizliklerin en önemlisi olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili önemli bir kaynak Dragomir ve Pearce tarafından 1991 yılında yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kitaptır [4]. Konveks fonksiyonlar için tanımlanan eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler B. G. Pachpatte, C. P. Niculescu, L. E. Persson, J. E. Pecaric, F. Proschan, R. T. Rockafellar, S. Varosanec, A. W. Roberts, D. E. Varberg, M. Alomari, K. Nikodem, J. L. Sanchez, T. Y. Zhang, M. E. Özdemir, U. S. Kırmacı, M. Z. Sarıkaya, H. Kavurmacı, E. Set ve İ. İşcan olarak sıralanabilir.

Son zamanlarda bir çok konveks fonksiyon sınıfı tanımlanmış olup bunlardan biri de P. Montel tarafından GG-konveks fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır. Bu tezin amacı da bu fonksiyon sınıfı için yeni eşitsizlikler elde etmektir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Konveks Fonksiyonlar İle İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde bazı temel kavramlara ve farklı türden konveks fonksiyon sınıflarına yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Vektör Uzayı): X boş olmayan bir küme ve K , bu vektör uzayı üzerinde bir cisim olsun. $+: X \times X \rightarrow X$ ve $\cdot: K \times X \rightarrow X$ işlemleri tanımlansın.

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa, X 'e K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

A) X , $+$ işlemine göre değişmeli gruptur.

- i. $\forall x, y \in X$ için $x + y \in X$ 'dir.
- ii. $\forall x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ 'dir.
- iii. $\forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
- iv. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.
- v. $\forall x, y \in X$ için $x + y = y + x$ 'dir.

B) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

- i. $\alpha x \in X$ 'dir.
- ii. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ 'dir.
- iii. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ 'dir.
- iv. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ 'dir.
- v. $1x = x$ 'dir. (Burada 1, X 'in birim elemanıdır).

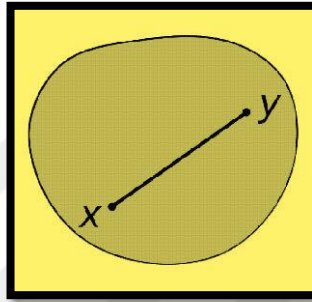
$K = \mathbb{R}$ ise X 'e reel vektör uzayı ve $K = \mathbb{C}$ ise X 'e kompleks vektör uzayı adı verilir [5].

Tanım 2.1.2. (Konveks Küme): X bir vektör uzayı, $A \subseteq X$ ve $x, y \in A$ olmak üzere,

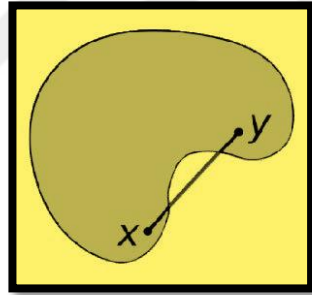
$$M = \{z \in X: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

ise A kümesine konveks küme denir [6].

Eğer $z \in M$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ 'deki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı daima doğrudur. Bu nedenle konveks küme tanımındaki α ve $(1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan α, β pozitif reel sayıları alınabilir. Burada geometrik olarak M 'nin uç noktaları x ve y olan (kapalı) bir doğru parçası olduğu açıktır [7].



Şekil 2.1. Konveks Küme



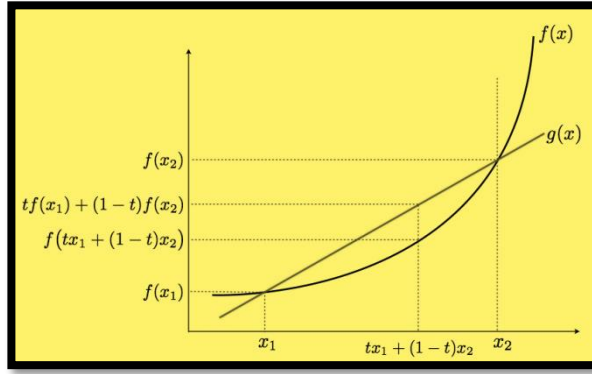
Şekil 2.2. Konveks Olmayan (Konkav) Küme

Tanım 2.1.3. (Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R} 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \quad (2.1)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir veya $C(I)$ sınıfına aittir denir. Eğer bu eşitsizlik $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir [8].

Eğer $-f$ fonksiyonu konveks (kesin konveks) fonksiyon ise f fonksiyonuna konkav (kesin konkav) fonksiyon denir [8].



Şekil 2.3. Konveks Fonksiyon

Geometrik olarak, $tx_1 + (1-t)x_2$ noktasında; f nin eğri üzerinde aldığı değer $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren doğru parçası her zaman eğrinin $[x_1, x_2]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.

Konveks fonksiyonun bazı özellikleri:

- i. Kapalı bir aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I^o de kalan herhangi bir $[x_1, x_2]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle, f fonksiyonu $[x_1, x_2]$ aralığında mutlak sürekli ve I^o süreklidir.
- iii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I^o de f'_- ve f'_+ türevleri mevcut olup, bu türevler artandır.
- iv. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise bu aralıkta sayılabilir bir E kümesi hariç f' mevcut ve süreklidir.
- v. $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, 3 \dots k$, k tane konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), a_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3 \dots k)$$

fonksiyonu da konvektir.

- vi. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveksfonksiyon olsun. Bu takdirde; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (goh)(x)$ bileşke fonksiyonu da konvektir.

Tanım 2.1.4. (*J* -Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R} 'de bir aralık olmak üzere $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya *J*-konveks fonksiyon denir [9].

Tanım 2.1.5 (Kesin *J* -Konveks Fonksiyon): $\forall x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin *J*-konveks fonksiyon denir [9].

Sonuç 2.1.1. Her *J*-konveks fonksiyon aynı zamanda bir konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2. Bir f fonksiyonunun $I \subset \mathbb{R}$ 'de konveks olması için gerek ve yeter şart, $\forall x, y \in I$ ve $\forall p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [2].

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, bu aralıkta konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $x \in (a, b)$ için $f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$ eşitsizliği vardır [10].

Tanım 2.1.6. Eğer f fonksiyonu hem konveks hem konkav fonksiyon ise f 'e lineerdir (afindir) denir [11].

Tanım 2.1.7. (Süreklilik): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $x_0 \in I$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in I$ ve $|x - x_0| < \delta$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 'da süreklidir denir [12].

Tanım 2.1.8. (Düzgün Süreklilik): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in I$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu I 'da düzgün süreklidir denir [12].

Tanım 2.1.9. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında bir fonksiyon olsun.

Her $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ için

- i. $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
- ii. $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
- iii. $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
- iv. $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

Eğer f fonksiyonu artmayan ve azalmayan bir fonksiyon ise monotonik fonksiyondur [12].

Teorem 2.1.2. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere; f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f' 'nin artan (kesin artan) olmasıdır [6].

Teorem 2.1.3. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks ise I° üzerinde süreklidir [1].

2.2. GG-Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.2.2. (GG-Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^{1-t}y^t) \leq [f(x)]^{1-t}[f(y)]^t \quad (2.2)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon veya GG-konveks fonksiyon denir [13,14,15].

Eğer (2.2) eşitsizliği tersine çevrilirse fonksiyon GG-konkav fonksiyon olur. Bu kavram, 1928 yılında P. Montel tarafından tanıtılmıştır [14], ancak bu alandaki araştırmaların kökenleri ondan çok önceye kadar dayanmaktadır [15].

$f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonunun GG-konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $g: \ln I \rightarrow \mathbb{R}$, $g = \ln \circ f \circ \exp$ fonksiyonunun $\ln I$ üzerinde konveks olmasıdır. [15].

r, f nin yakınsaklık yarıçapı olmak üzere, c_n nonnegatif katsayılı $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gerçel analitik fonksiyonu, $(0, r)$ aralığında GG-konvekstir. [15]. Dolayısıyla \exp , \sinh , \cosh gibi fonksiyonlar \mathbb{R} üzerinde GG-konveks, \tan , \sec , \csc , $\frac{1}{x} - \cot x$ fonksiyonları $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında GG-konveks ve $\frac{1}{1-x}$, $\ln \frac{1}{1-x}$ veya $\frac{1+x}{1-x}$ fonksiyonları $(0, 1)$ aralığında GG-konveks fonksiyonlardır. Ayrıca Γ fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında kesin GG-konveks fonksiyondur. [15].

Eğer bir f fonksiyonu GG-konveks fonksiyon ise $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\beta > 0$ için $x^\alpha f^\beta(x)$ fonksiyonu da GG-konveks fonksiyondur. Eğer f sürekli bir fonksiyon ise $f^x(x)$ ve $f(e^{1/\log x})$ fonksiyonlarından biri GG-konveks fonksiyon ise diğeri de GG-konveks fonksiyondur [15].

Önerme 2.2.1. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) f fonksiyonu I üzerinde GG-konveks fonksiyondur.
- (ii) $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ fonksiyonu I° üzerinde azalmayan bir fonksiyondur.
- (iii) Herhangi $x \in I$ ve $y \in I^\circ$ için

$$\frac{f(x)}{f(y)} \geq \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{yf'(y)}{f(y)}}$$

eşitsizliği sağlanır [15].

Önerme 2.2.2. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu I° üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) f, I da GG-konveks fonksiyondur.
 - (ii) Herhangi $x \in I^\circ$ için
- $$x[f(x)f''(x) - (f'(x))^2] + f(x)f'(x) \geq 0$$
- eşitsizliği sağlanır [15].

Tanım 2.2.6. (Bazı Özel Ortalamalar): Bu tanımda a ve b gibi iki pozitif reel sayı için bilinen bazı ortalamalar verilmiştir [16,17].

1. Aritmetik Ortalama: $A = A(a, b) = \frac{a+b}{2}$

2. Geometrik Ortalama: $G = G(a, b) = \sqrt{ab}$

3. Harmonik Ortalama: $H = H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$

4. Logaritmik Ortalama: $L = L(a, b) = \begin{cases} a & , a = b \\ \frac{b-a}{\ln b - \ln a} & , a \neq b \end{cases}$

5. İdentrik Ortalama: $I = I(a, b) = \begin{cases} a & , a = b \\ \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} & , a \neq b \end{cases}$

6. p – Logaritmik Ortalama:

$$L_p = L_p(a, b) = \begin{cases} a & , a = b \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} & , a \neq b \end{cases} , p \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

7. Ağırlıklı Aritmetik Ortalama: $x_i \in [a, b], p_i > 0$ ve $P_n = \sum_{i=1}^n p_i > 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere $A_n(x, p) = \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i$ ifadesine x_i sayılarının p_i ağırlıklı aritmetik ortalaması denir.

8. Ağırlıklı Geometrik Ortalama: $x_i \in [a, b], p_i > 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere $G_n(x, p) = \prod_{i=1}^n x_i^{p_i}$ ifadesine x_i sayılarının p_i ağırlıklı geometrik ortalaması denir.

9. Ağırlıklı Harmonik Ortalama: $x_i \in [a, b], p_i > 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere $H_n(x, p) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{x_i}}$ ifadesine x_i sayılarının p_i ağırlıklı geometrik ortalaması denir.

Ortalamlar arasındaki basit ilişki literatürde şu şekilde bilinir:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A .$$

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ için L_p monoton artandır ve $L_0 = I, L^{-1} = L$ ile gösterilir [17].

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak literatürde yer alan bazı önemli eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra Jensen, Jensen-Mercer, Lazhar ve Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ile ilgili temel teoremlere yer verilmiştir.

3.1. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1 (Hölder Eşitsizliği): $k = 1, \dots, n$ için $a_k \geq 0, b_k \geq 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda,

- i. Eğer p ve q pozitif ise $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq (\sum_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n b_k)^{\frac{1}{q}}$ eşitsizliği sağlanır.
- ii. Eğer $p < 0$ veya $q < 0$ ise $\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq (\sum_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n b_k)^{\frac{1}{q}}$ eşitsizliği sağlanır.

Bu iki eşitsizlik Hölder eşitsizliği olarak adlandırılır [9].

Teorem 3.1.4. (Üçgen Eşitsizliği): Her x ve y reel sayısı için,

- i. $|x + y| \leq |x| + |y|$
- ii. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- iii. $||x| - |y|| \leq |x + y|$
- iv. $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$

eşitsizlikleri sağlanır. i ve ii'deki eşitsizlikler ancak ve ancak $x = 0$ veya $y = 0$ veya x ve y aynı işarete sahip olduğunda sağlanır. iii'deki eşitsizlik ancak ve ancak $x = 0$ veya $y = 0$ veya x ve y zıt işarete sahip olduğunda sağlanır. iv'deki eşitsizlik ise ancak

ve ancak tüm x_1, \dots, x_n sayıları sıfırdan farklı ve aynı işarete sahip olduklarında sağlanır [18].

3.2. Konveks Fonksiyonlar İle İlgili Önemli Eşitsizlikler

3.2.1. Jensen Eşitsizliği $f, x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 'leri içeren bir aralıkta konveks bir fonksiyon ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right) \quad (3.1)$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. $n = 1$ için (3.1) açıktır.

Benzer şekilde $n = 2$ ise durum açıktır. Yani, klasik konvekslik tanımı elde edilir. $n - 1 \geq 2$ için (3.1) eşitsizliğinin doğru olduğunu varsayalım. Eğer $\lambda_n < 1$ ($\lambda_n = 1$ ise aşıkardır) ise konvekslik tanımı gereğince

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) &= f\left(\lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} x_i\right) \\ &\leq \lambda_n f(x_n) + (1 - \lambda_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} x_i\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \end{aligned}$$

olur. Burada dikkat edilmesi gereken husus,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} = \frac{1}{1 - \lambda_n} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \frac{1 - \lambda_n}{1 - \lambda_n} = 1$$

olmasıdır.

3.2.1. Not. (3.1) eşitsizliğinde $\lambda_i = \frac{p_i}{\sum p_i}$ olsun. O halde $\sum \lambda_i = 1$ olduğu görülür. Ayrıca

(3.1) eşitsizliği

$$f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \leq \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i} \quad (3.2)$$

biçimine dönüşür. Bu ifade de zaman zaman Jensen eşitsizliği olarak yazılır.

Konveks (konkav) fonksiyon söz konusu olduğunda klasik eşitsizliklerin ispatı için iyi bilinen Jensen eşitsizliğinden yararlanılır. Örneğin, $f(x), x$ in çift kuvvetleri, üstel ve

logaritmik olarak verilebilir. Bu halde, $[a, b]$ kapalı aralığında bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca, $x_1 = a, x_n = b$ ve $[a, b]$ kapalı aralığında $i = 1, \dots, n$ için $x_{i+1} > x_i$ olacak şekilde $p_i = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ verilsin ve $\sum p_i = \sum \Delta x_i = b - a$ olsun. $n \rightarrow \infty$ için (3.2) eşitsizliğindeki sağ tarafın payı $\int_a^b f(x) dx$ ve sol taraf da $f\left(\frac{\sum x_i \Delta x_i}{b-a}\right)$ olur.

Böylece, $\sum x_i \Delta x_i \rightarrow \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ olur. Buna göre, $f\left(\frac{b+a}{2}\right) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ elde edilir.

Benzer bir muhakeme ile $g(x)$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. (3.2) eşitsizliğinde $p_i = \Delta x_i$ ve x_i yerine de $g(x_i)$ alınırsa (3.2) eşitsizliği

$$f\left(\frac{\int_a^b g(x) dx}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b f(g(x)) dx}{b-a}$$

biçimine dönüşür.

Özel olarak, burada $f(x) = \ln x$ olsun. O halde, Jensen eşitsizliğinden

$$\ln\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \geq \frac{\sum p_i \ln x_i}{\sum p_i}, \ln\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \geq \frac{\ln(\prod x_i^{p_i})}{\sum p_i} = \ln\left(\prod x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum p_i}}$$

yazılarak her $x_i > 0$ için

$$\left(\prod x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum p_i}} \leq \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \quad (3.3)$$

Young eşitsizliği elde edilir. Özel olarak, her $p_i = 1$ ise

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (3.4)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu ise aritmetik-geometrik ortalama arasındaki bağıntıdır. (3.4) eşitsizliğinde x_i yerine $\frac{1}{x_i}$ yazılırsa $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ harmonik ve geometrik ortalama arasındaki bağıntı elde

edilir. $f(x) = x^k, x > 0$ ve $k > 1$ olması durumunda Jensen eşitsizliğinden

$$\left(\frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{\sum p_i}\right)^k \leq \frac{p_1}{\sum p_i} x_1^k + \dots + \frac{p_n}{\sum p_i} x_n^k = (p_1 x_1^k + \dots + p_n x_n^k) (\sum p_i)^{-1}$$

olur. Buradan,

$$\left(\sum p_i x_i\right)^k \leq \left(\sum p_i x_i^k\right) \left(\sum p_i\right)^{k-1}$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1. f , konveks bir fonksiyon ise,

$$f(x_1 + x_n - x_i) \leq f(x_1) + f(x_n) - f(x_i), \quad (1 \leq i \leq n)$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

İspat. $y_i = x_1 + x_n - x_i$ olsun. Bu durumda $x_1 + x_n = x_i + y_i$ olur. Böylece x_1, x_n ve x_i, y_i çiftleri aynı orta noktaya sahiptir. Bu durumda öyle bir t vardır ki,

$$x_i = tx_1 + (1-t)x_n$$

$$y_i = (1-t)x_1 + tx_n$$

olur. Burada $0 \leq t \leq 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olur. Bundan dolayı (3.1) eşitsizliğini iki kez uygulayarak

$$\begin{aligned} f(y_i) &\leq (1-t)f(x_1) + tf(x_n) \\ &= f(x_1) + f(x_n) - [tf(x_1) + (1-t)f(x_n)] \\ &\leq f(x_1) + f(x_n) - f(tx_1 + (1-t)x_n) \\ &= f(x_1) + f(x_n) - f(x_i) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $y_i = x_1 + x_n - x_i$ olduğu için lemmanın ispatı tamamlanır.

3.2.2. Jensen-Mercer Eşitsizliği Teorem 3.2.1'in şartları altında

$$f\left(x_1 + x_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq f(x_1) + f(x_n) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

İspat. (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f\left(x_1 + x_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) &\leq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_1 + x_n - x_i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_1 + x_n - x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i [f(x_1) + f(x_n) - f(x_i)] \\ &= f(x_1) + f(x_n) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2.3. Lazhar'ın Birinci Teoremi $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $1 < n \in \mathbb{N}$ için $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ olsun. O halde

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) - f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \geq \frac{n-1}{n} \left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f\left(\frac{x_n+x_1}{2}\right) \right]$$

eşitsizliği sağlanır [20].

İspat. (2.1) eşitsizliğinde $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f\left(\frac{x_n+x_1}{2}\right) \leq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n). \quad (3.5)$$

(3.5) eşitsizliğinin sağ tarafındaki toplamda, $\sum_{i=1}^n f(x_i)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) &= \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(x_i) \right]. \end{aligned}$$

Buna göre (3.5) denklemi,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f\left(\frac{x_n+x_1}{2}\right) \leq \frac{n}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(x_i) \right]$$

biçimine dönüşür. Bu son eşitsizliğin sağ tarafına Jensen eşitsizliği uygulanırsa,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f\left(\frac{x_n+x_1}{2}\right) \leq \frac{n}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) - f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2.4. Lazhar'ın İkinci Teoremi $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $1 < n \in \mathbb{N}$ için $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ olsun. O halde $a = \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$ ve $b_i = \frac{na-a_i}{n-1}$, $i = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$(n-1)[f(b_1) + \dots + f(b_n)] \leq n[f(a_1) + \dots + f(a_n) - f(a)]$$

eşitsizliği sağlanır [20].

İspat. Jensen eşitsizliği kullanılırsa,

$$f(b_1) + \dots + f(b_n) \leq f(a_1) + \dots + f(a_n)$$

olur. Böylece

$$f(b_1) + \dots + f(b_n) \leq \frac{n}{n-1} [f(a_1) + \dots + f(a_n)] - \frac{1}{n-1} [f(a_1) + \dots + f(a_n)],$$

veya buna denk olan

$$f(b_1) + \dots + f(b_n) \leq \frac{n}{n-1} [f(a_1) + \dots + f(a_n)] - \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} f(a_1) + \dots + \frac{1}{n} f(a_n) \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre,

$$f(b_1) + \dots + f(b_n) \leq \frac{n}{n-1} \left[f(a_1) + \dots + f(a_n) - \left(\frac{1}{n} f(a_1) + \dots + \frac{1}{n} f(a_n) \right) \right]$$

yazılabilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafına Jensen eşitsizliği uygulandığı takdirde,

$$f(b_1) + \dots + f(b_n) \leq \frac{n}{n-1} \left[f(a_1) + \dots + f(a_n) - f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \right]$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2.5. Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği: $I = [a, b]$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır [21,22].

İspat. $x = a(1-t) + bt$ ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \int_0^1 f(a(1-t) + bt) dt \\ &\leq f(a) \int_0^1 (1-t) dt + f(b) \int_0^1 t dt = \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi eşitsizliğin sol tarafını ispatlayalım.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right]$$

Yukarıdaki son parantezin ilk teriminde $x = a + \frac{t(b-a)}{2}$ için,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

elde edilir ve ikinci teriminde $x = b - \frac{t(b-a)}{2}$ için

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx &= -\frac{b-a}{2} \int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuçlar yerine yazılır ve konvekslik tanımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) \right] dt \\ &\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) dt \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.6. Eğer f fonksiyonu $[a, b] \subset [a_1, b_1]$ da konveks bir fonksiyon ve $p, q > 0$ için $v = \frac{pa+qb}{p+q}$ ise bu durumda $0 < y \leq \left[\frac{b-a}{p+q}\right] \min(p, q)$ için

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v f(t) dt \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}, \quad v, u \in [a_1, b_1]$$

eşitsizliği sağlanır. $p = q = 1$ ve $y = \frac{b-a}{2}$ olması durumunda bu eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliğine indirgenir [23].

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. GG-Konveks Fonksiyonlarla İlgili Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonunun GG-konveks olması için gerek ve yeter şart, $x < y < z$ koşulunu sağlayan $\forall x, y, z \in I$ için

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln x & \ln f(x) \\ 1 & \ln y & \ln f(y) \\ 1 & \ln z & \ln f(z) \end{vmatrix} \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonunun GG-konveks olduğunu varsayalım. $x, y, z \in I$, $x < y < z$ koşulunu sağlayan keyfi noktalar olsun ve $t \in [0, 1]$ için $y = x^t z^{1-t}$ alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & \ln x & \ln f(x) \\ 1 & \ln y & \ln f(y) \\ 1 & \ln z & \ln f(z) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & \ln x & \ln f(x) \\ 0 & \ln \frac{y}{x} & \ln \frac{f(y)}{f(x)} \\ 0 & \ln \frac{z}{x} & \ln \frac{f(z)}{f(x)} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \ln \frac{y}{x} & \ln \frac{f(y)}{f(x)} \\ \ln \frac{z}{x} & \ln \frac{f(z)}{f(x)} \end{vmatrix} \\ &= \left(\ln \frac{y}{x} \right) \left(\ln \frac{f(z)}{f(x)} \right) - \left(\ln \frac{z}{x} \right) \left(\ln \frac{f(y)}{f(x)} \right) \\ &= \left(\ln \frac{x^t z^{1-t}}{x} \right) \left(\ln \frac{f(z)}{f(x)} \right) - \left(\ln \frac{z}{x} \right) \left(\ln \frac{f(x^t z^{1-t})}{f(x)} \right) \\ &= \ln \left(\frac{z}{x} \right)^{1-t} \ln \left(\frac{f(z)}{f(x)} \right) - \left(\ln \frac{z}{x} \right) \left(\ln \frac{f(x^t z^{1-t})}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t) \left(\ln \frac{z}{x} \right) \left(\ln \frac{f(z)}{f(x)} \right) - \left(\ln \frac{z}{x} \right) \left(\ln \frac{f(x^t z^{1-t})}{f(x)} \right) \\
&= \ln \frac{z}{x} \left[\ln \left(\frac{f(z)}{f(x)} \right)^{1-t} - \ln \frac{f(x^t z^{1-t})}{f(x)} \right] \\
&= \ln \left(\frac{z}{x} \right) \ln \left(\frac{f^{1-t}(z) f^t(x)}{f(z^{1-t} x^t)} \right) \geq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi,

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln x & \ln f(x) \\ 1 & \ln y & \ln f(y) \\ 1 & \ln z & \ln f(z) \end{vmatrix} \geq 0$$

eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim. f fonksiyonunun I da GG-konveks olduğunu göstereceğiz.

$x, y, z \in I, x < y < z$ koşulunu sağlayan keyfi noktalar olsun.

$$\begin{vmatrix} 1 & \ln x & \ln f(x) \\ 1 & \ln y & \ln f(y) \\ 1 & \ln z & \ln f(z) \end{vmatrix} = \left(\ln \frac{y}{x} \right) \left(\ln \frac{f(z)}{f(x)} \right) - \left(\ln \frac{z}{x} \right) \left(\ln \frac{f(y)}{f(z)} \right) \geq 0$$

olduğundan,

$$\frac{\left(\ln \frac{f(y)}{f(z)} \right)}{\ln \frac{y}{x}} \leq \frac{\left(\ln \frac{f(z)}{f(x)} \right)}{\ln \frac{z}{x}}$$

eşitsizliği elde edilir.

$a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ keyfi alınan noktalar olsun.

$a, b \in I$ için $a = b, a < b$ veya $a > b$ dir.

$a = b$ olması durumunda

$$f(a^t b^{1-t}) = f(a) \leq f(a) = f^t(a) f^{1-t}(b)$$

elde edilir. Benzer şekilde $t = 0$ ve $t = 1$ durumları da aşikardır.

Şimdi $a \neq b$ ve $t \in (0,1)$ olduğunu varsayalım. Genelliği bozmayacağı için $a < b$ olduğunu kabul edelim.

$y = a^t b^{1-t}$ alınırsa $a < y < b$ dir. $x = a, z = b$ alalım.

O halde hipoteze göre,

$$\left(\ln \frac{y}{a} \right) \left(\ln \frac{f(b)}{f(a)} \right) - \left(\ln \frac{b}{a} \right) \left(\ln \frac{f(y)}{f(a)} \right) \geq 0$$

yazılır. Gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \left(\ln \frac{a^t b^{1-t}}{a} \right) \left(\ln \frac{f(b)}{f(a)} \right) - \left(\ln \frac{b}{a} \right) \left(\ln \frac{f(a^t b^{1-t})}{f(a)} \right) \geq 0 \\ & (1-t) \left(\ln \frac{b}{a} \right) \left(\ln \frac{f(b)}{f(a)} \right) - \left(\ln \frac{b}{a} \right) \left(\ln \frac{f(a^t b^{1-t})}{f(a)} \right) \geq 0 \\ & \ln \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right)^{1-t} \geq \ln \frac{f(a^t b^{1-t})}{f(a)} \end{aligned}$$

bulunur ve böylece

$$f(a^t b^{1-t}) \leq f^t(a) f^{1-t}(b)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.2. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ GG-konveks bir fonksiyon, $f(I) \subset I \subset (0, \infty)$ ve $g: I \rightarrow (0, \infty)$ GG-konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise $g \circ f: I \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu GG-konvektir.

İspat. $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ olsun.

f fonksiyonu I da GG-konveks olduğundan $f(x^t y^{1-t}) \leq f^t(x) f^{1-t}(y)$ dir.

g azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} g(f(x^t y^{1-t})) &= (g \circ f)(x^t y^{1-t}) \\ &\leq g(f^t(x) f^{1-t}(y)) \\ &\leq (g(f(x)))^t (g(f(y)))^{1-t} \\ &= (g \circ f)^t(x) (g \circ f)^{1-t}(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.3. Λ bir indis kümesi ve $\forall \lambda \in \Lambda$ için $f_\lambda: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ GG-konveks bir fonksiyon ve $f = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ olsun. Eğer $J = \{x \in I: f(x) < \infty\} (I \neq \emptyset)$ ise J bir aralık olup f, J üzerinde GG-konvektir.

İspat. $a, b \in J$ ve $t \in [0,1]$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} f(a^t b^{1-t}) &= \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(a^t b^{1-t}) \\ &\leq \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda^t(a) f_\lambda^{1-t}(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sup_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda}(a) \right)^t \left(\sup_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda}(b) \right)^{1-t} \\
&= f^t(a) f^{1-t}(b)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

bulunur. Buna göre f, J üzerinde GG-konvektir.

Öte yandan, $a, b \in J$ olduğundan $f(a) < \infty$ ve $f(b) < \infty$ olur. Dolayısıyla (4.1)'den

$$f(a^t b^{1-t}) \leq f^t(a) f^{1-t}(b) < \infty$$

olup $a^t b^{1-t} \in J$ dir. O halde a, b ve t keyfi olduğundan $\forall a, b \in J$ için

$$[a, b] = \{a^t b^{1-t} : t \in [0,1]\} \subset J \text{ olur ki bu da } J \text{ 'nin bir aralık olduğunu gösterir.}$$

Teorem 4.1.4. $f, g: I \subset (0, \infty)$ iki GG-konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde $\alpha f, f^{\alpha}, f \cdot g$ ve $f + g$ fonksiyonları da I üzerinde GG-konvektir.

İspat. $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ keyfi alınsın. f ve g fonksiyonları I üzerinde GG-konveks olduklarından

$$\begin{aligned}
f(x^t y^{1-t}) &\leq f^t(x) f^{1-t}(y), \\
g(x^t y^{1-t}) &\leq g^t(x) g^{1-t}(y)
\end{aligned}$$

dir.

i) $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
(\alpha f)(x^t y^{1-t}) &= \alpha f(x^t y^{1-t}) \\
&\leq \alpha f^t(x) f^{1-t}(y) \\
&= (\alpha f(x))^t (\alpha f(y))^{1-t}
\end{aligned}$$

olduğundan αf fonksiyonu I üzerinde GG-konvektir.

ii) $\alpha > 0$ olsun.

$$\begin{aligned}
f^{\alpha}(x^t y^{1-t}) &\leq (f^t(x) f^{1-t}(y))^{\alpha} \\
&= (f^{\alpha}(x))^t (f^{\alpha}(y))^{1-t}
\end{aligned}$$

olduğundan f^{α} fonksiyonu I üzerinde GG-konvektir.

$$\begin{aligned}
\text{iii) } (f \cdot g)(x^t y^{1-t}) &= f(x^t y^{1-t}) \cdot g(x^t y^{1-t}) \\
&\leq f^t(x) f^{1-t}(y) g^t(x) g^{1-t}(y) \\
&= (f \cdot g)^t(x) (f \cdot g)^{1-t}(y)
\end{aligned}$$

olup $f \cdot g$ fonksiyonu I üzerinde GG-konvektir.

iv) $\forall a, b, c, d > 0, \forall t \in [0,1]$ için

$$a^t b^{1-t} + c^t d^{1-t} \leq (a+c)^t (b+d)^{1-t} \quad (4.2)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\begin{aligned} (f+g)(x^t y^{1-t}) &= f(x^t y^{1-t}) + g(x^t y^{1-t}) \\ &\leq f^t(x) f^{1-t}(y) + g^t(x) g^{1-t}(y) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.2) eşitsizliğinden,

$$(f+g)(x^t y^{1-t}) \leq (f+g)^t(x) (f+g)^{1-t}(y)$$

olur ki bu da $f+g$ fonksiyonunun I üzerinde GG-konveks olduğunu gösterir.

Önerme 4.1.1. $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $h \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonu $(\varphi(a), \varphi(b))$ aralığında sürekli ise h fonksiyonu, (a, b) aralığında süreklidir.

İspat. $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu artan ve sürekli olduğundan $\varphi^{-1}: [(\varphi(a), \varphi(b))] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da artan ve süreklidir.

$x_0 \in (a, b)$ keyfi alınsın. O halde $\varphi(x_0) \in (\varphi(a), \varphi(b))$ olur.

$h \circ \varphi^{-1}; \varphi(x_0)$ da sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0: |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta$ olan $\forall x \in (a, b)$ için

$$|(h \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_0) - (h \circ \varphi^{-1})\varphi(x_0))| = |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon \quad (4.3)$$

olur. Diğer taraftan $\delta > 0$ için φ fonksiyonu $x_0 \in (a, b)$ de sürekli olduğundan

$$\exists \delta^* > 0: |x - x_0| < \delta^* \text{ olan } \forall x \in (a, b) \text{ için } |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta \text{ dir.} \quad (4.4)$$

(4.3) ve (4.4) den $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta^* > 0$ sayısı vardır ki $|x - x_0| < \delta^*$ koşulunu sağlayan $\forall x \in (a, b)$ için $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ olur. Bu ise h fonksiyonunun (a, b) de sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.5. $f: [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ GG-konveks ise f fonksiyonu (a, b) aralığında süreklidir.

İspat. $\ln \circ f \circ \exp$ fonksiyonu, $[\ln a, \ln b]$ aralığında konveks olup $(\ln a, \ln b)$ aralığında süreklidir.

Önerme 4.1.1 e göre, $\ln \circ f$ fonksiyonu (a, b) aralığında süreklidir. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olduğundan $\exp \circ (\ln \circ f) = f$ fonksiyonu (a, b) de sürekli olur.

4.2. GG-Konveks Fonksiyonlar İçin Jensen-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1. $f: [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu GG-konveks olsun. O halde $\forall x \in [a, b]$ için

$$f\left(\frac{ab}{x}\right) \leq \frac{f(a)f(b)}{f(x)} \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x \in [a, b]$ keyfi alınsın. O halde $x = a^t b^{1-t}$ olacak şekilde $t \in [0, 1]$ vardır.

Buna göre

$$\frac{ab}{x} = \frac{ab}{a^t b^{1-t}} = a^{1-t} b^t$$

yazılır. f fonksiyonu GG-konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{ab}{x}\right) &= f(a^{1-t} b^t) \\ &\leq f^{1-t}(a) f^t(b) \\ &= f(a) f(b) [f^t(a) f^{1-t}(b)]^{-1} \\ &= \frac{f(a) f(b)}{f^t(a) f^{1-t}(b)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeye tekrar f fonksiyonunun GG-konveksliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{ab}{x}\right) &\leq \frac{f(a) f(b)}{f(a^t b^{1-t})} \\ &= \frac{f(a) f(b)}{f(x)} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu GG-konveks olsun. Buna göre, $\sum \lambda_i = 1$ koşulunu sağlayan her $\lambda_i \geq 0$ ve her $x_i \in I$ ($i = 1, 2, \dots, n$) için

$$f\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}\right) \leq \prod_{i=1}^n f^{\lambda_i}(x_i) \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\ln \circ f \circ \exp$, $\ln I$ 'da konveks olduğundan Jensen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\ln \circ f \circ \exp) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln x_i \right) &\leq \sum_{i=1}^n (\lambda_i (\ln \circ f \circ \exp) \ln x_i) \\ \ln \left(f \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \right) \right) &\leq \ln \prod_{i=1}^n f^{\lambda_i}(x_i) \\ f \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \right) &\leq \prod_{i=1}^n f^{\lambda_i}(x_i) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu GG-konveks olsun.

$\forall a, b \in I, \forall x_i \in [a, b], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ koşulunu sağlayan $\lambda_i \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$f \left(\frac{ab}{\prod_{i=1}^n f(x_i)^{\lambda_i}} \right) \leq \frac{f(a)f(b)}{\prod_{i=1}^n f(x_i)^{\lambda_i}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\forall x_i \in [a, b], \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ olsun. Teorem 4.2.2. kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f \left(\frac{ab}{\prod_{i=1}^n f(x_i)^{\lambda_i}} \right) &= f \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{ab}{x_i} \right)^{\lambda_i} \right) \\ &\leq \prod_{i=1}^n f \left(\frac{ab}{x_i} \right)^{\lambda_i} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadeye (4.5) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f \left(\frac{ab}{\prod_{i=1}^n f(x_i)^{\lambda_i}} \right) &\leq \prod_{i=1}^n \frac{f(a)^{\lambda_i} f(b)^{\lambda_i}}{f(x_i)^{\lambda_i}} \\ &= \frac{f(a)f(b)}{\prod_{i=1}^n f(x_i)^{\lambda_i}} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3. GG-Konveks Fonksiyonlar İçin Lazhar Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.3.1 $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu GG-konveks bir fonksiyon ve $1 < n \in \mathbb{N}$ için $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ olsun. O halde

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i)}{f(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}} \geq \left(f(\sqrt{x_1 x_2}) \dots f(\sqrt{x_{n-1} x_n}) \cdot f(\sqrt{x_n x_1}) \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

I.yol. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu GG-konveks olsun. $\ln \circ f \circ \exp$ $\ln I = \{\ln x : x \in I\}$ kümesinde konveks olup, konveks fonksiyonlar ile Lazhar'ın birinci teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \ln \circ f \circ \exp(\ln x_1) + \ln \circ f \circ \exp(\ln x_2) + \dots + \ln \circ f \circ \exp(\ln x_n) \\ & \quad - \ln \circ f \circ \exp \frac{1}{n} \ln(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ & \geq \frac{n-1}{n} \left[\ln \circ f \circ \exp \left(\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} \right) + \dots \right. \\ & \quad \left. + \ln \circ f \circ \exp \left(\frac{\ln x_{n-1} + \ln x_n}{2} \right) + \ln \circ f \circ \exp \left(\frac{\ln x_n + \ln x_1}{2} \right) \right] \\ & \ln f(x_1) + \dots + \ln f(x_n) - \frac{1}{n} \ln f(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \\ & \geq \frac{n-1}{n} \left[\ln f(\sqrt{x_1 x_2}) + \dots + \ln f(\sqrt{x_{n-1} x_n}) + \ln f(\sqrt{x_n x_1}) \right] \\ & \ln \left[\frac{f(x_1) \dots f(x_n)}{f(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}} \right] \geq \frac{n-1}{n} \left[\ln \left(f(\sqrt{x_1 x_2}) \dots f(\sqrt{x_{n-1} x_n}) \cdot f(\sqrt{x_n x_1}) \right) \right] \\ & \ln \left[\frac{f(x_1) \dots f(x_n)}{f(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}} \right] \geq \ln \left(f(\sqrt{x_1 x_2}) \dots f(\sqrt{x_{n-1} x_n}) \cdot f(\sqrt{x_n x_1}) \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ & \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i)}{f(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}} \geq \left(f(\sqrt{x_1 x_2}) \dots f(\sqrt{x_{n-1} x_n}) \cdot f(\sqrt{x_n x_1}) \right)^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

II.yol. (2.2) eşitsizliğinde $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa $f(\sqrt{xy}) \leq \sqrt{f(x)f(y)}$ olur ve aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x_1x_2}) &\leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \\ f(\sqrt{x_2x_3}) &\leq \sqrt{f(x_2)f(x_3)} \\ &\vdots \\ f(\sqrt{x_nx_1}) &\leq \sqrt{f(x_n)f(x_1)} \end{aligned}$$

Elde edilen bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x_1x_2}) \dots f(\sqrt{x_nx_1}) &\leq \prod_{i=1}^n f(x_i) \\ &= \left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{n-1}{n-1}} \\ &= \left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{n}{n-1}} \left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{-1}{n-1}} \\ &= \left(\left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right] \left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &= \left[\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i)}{\prod_{i=1}^n f^{\frac{1}{n}}(x_i)} \right]^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned}$$

bulunur. (4.6) eşitsizliğinde $\lambda_i = \frac{1}{n}$ alınırsa,

$$f(\sqrt{x_1x_2}) \dots f(\sqrt{x_nx_1}) \leq \left[\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i)}{f(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}} \right]^{\frac{n}{n-1}}$$

bulunur ve böylece

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i)}{f(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}} \geq \left(f(\sqrt{x_1x_2}) \dots f(\sqrt{x_{n-1}x_n}) \cdot f(\sqrt{x_nx_1}) \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.2. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu GG-konveks bir fonksiyon olsun.

$n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ olmak üzere $a = (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$ ve $b_i = \left(\frac{a^n}{a_i}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, $i = 1, \dots, n$ için

$a_1, \dots, a_n \in I$ ise

$$\left(\prod_{i=1}^n f(b_i)\right)^{n-1} \leq \left(\frac{\prod_{i=1}^n f(a_i)}{f(a)}\right)^n$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu GG-konveks bir fonksiyon olsun. O halde Lazhar'ın ikinci teoreminden,

$$\begin{aligned} & (n-1)[(\ln \circ f \circ \exp)(\ln b_1) + \dots + (\ln \circ f \circ \exp)(\ln b_n)] \\ & \leq n[(\ln \circ f \circ \exp)(\ln a_1) + \dots + (\ln \circ f \circ \exp)(\ln a_n) - (\ln \circ f \circ \exp)(\ln a)] \\ & (n-1)[\ln f(b_1) + \dots + \ln f(b_n)] \leq n[\ln f(a_1) + \dots + \ln f(a_n) - \ln f(a)] \\ & (n-1)[\ln(f(b_1) \dots f(b_n))] \leq n \left[\ln \left(\frac{f(a_1) \dots f(a_n)}{f(a)} \right) \right] \\ & \ln((f(b_1) \dots f(b_n))^{n-1}) \leq \ln \left(\frac{f(a_1) \dots f(a_n)}{f(a)} \right)^n \\ & (f(b_1) \dots f(b_n))^{n-1} \leq \left(\frac{f(a_1) \dots f(a_n)}{f(a)} \right)^n \\ & \left(\prod_{i=1}^n f(b_i) \right)^{n-1} \leq \left(\frac{\prod_{i=1}^n f(a_i)}{f(a)} \right)^n \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, GG-konveks fonksiyon sınıfı için bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca Jensen-Mercer eşitsizliği ve Lazhar eşitsizlikleri, GG-konveks fonksiyonlar için ifade ve ispat edilmiştir. Kullanılan ispat yöntemleri konveks fonksiyonlarla ilgili daha önceki çalışmalara benzer olarak yapılmıştır. Bu çalışmalar bu alanda çalışan araştırmacılar için yeni bir kaynak oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Rockafellar, R. T. (1972). Convex analysis. Princeton University Press, New Jersey, USA, 451.
- [2] Pecaric, J. E., Proschan, F., & Tong, Y. L. (1992). Convex functions, partial orderings and statistical applications. Academic Press, Inc., Boston, 485.
- [3] Hardy, G., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1934). Inequalities. Cambridge University Press, 327.
- [4] Dragomir, S. S., & Pearce, C. E. M. (1991). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. Melbourne and Adelaide, 351.
- [5] Anton, H. (1994). Elementary Linear Algebra. John Wiley & Sons. Inc, New York, USA.
- [6] Kreyszig, E. (1989). Introductory functional analysis with applications. John Wiley & Sons., New York, USA, 703.
- [7] Bayraktar, M. (1987). Fonksiyonel analiz. Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Erzurum, 177.
- [8] Niculescu, C. P., & Persson, L. E. (2006). Convex functions and their applications: A Contemporary Approach. Springer Science Business Media Inc., New York, USA, 269.

- [9] Mitrinovic, D. S. (1970). *Analytic inequalities*. Springer-Verlag, New York, USA, 416.
- [10] Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1973). *Convex functions*. Academic Press Inc., New York, USA, 321.
- [11] Greenberg, H. J., & Pierskalla, W. P. (1970). A Review of quasi-convex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19(7).
- [12] Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1975). *Introductory real analysis*. Dover Publications Inc., New York, USA, 392.
- [13] Zhang, T. Y., Ji, A. P., & Qi, F. (2012). On integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s -geometrically convex functions. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, doi:10.1155/2012/560586.
- [14] P. MONTEL, (1928). Sur les fonctions convexes et les fonctions susharmoniques, *Journal de Math.*, 9, 29–60.
- [15] Niculescu, C. P. (2000). Convexity according to the geometric mean. *Mathematical Inequalities and Applications*, 3(2), 155-167.
- [16] Bullen, P. S., Mitrinovic, D. S., & Vasic, P. M. (1998). *Means and their inequalities*. Springer Media, B.V., Springer, Netherlands, 459.
- [17] Pachpatte, B. G. (2012). *Analytic inequalities*. Atlantis Studies in Mathematics, Paris, France, 309.

- [18]Mitrinovic, D. S., Pecaric, J. E., & Fink, A. M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 740.
- [19]Mercer, AM. (2003). A variant of Jensen's inequality. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 73, 4(4).
- [20]Lazhar Bougoffa, (2006). New inequalities about convex functions, JIPAM, V. 7, I. 4, Art. 148.
- [21]Pachpatte, B. G. (2005). Mathematical inequalities. Elsevier, North-Holland Mathematical Library, 67, 591.
- [22]Azpeitia, A. G. (1994). Convex functions and Hadamard inequality. Revista Colombiana De Matematicas, 28, 7-12.
- [23]Lupaş, A. (1976). A generalization of Hadamard inequalities for convex functions. Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz, 544(576), 115-121.

ÖZGEÇMİŞ

Kazım ÖZCAN ilk, orta ve lise eğitimini Burdur'da tamamladı. 2006 yılında Burdur AAL'den mezun oldu. 2006 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2011 yılında bitirdi. 2022 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Kırklareli'nde bir devlet lisesinde öğretmenlik yapmaktadır. Bir erkek ve bir kız çocuğu babasıdır.