

**KOORDİNATLARDA KONVEKS DÖNÜŞÜMLER İÇİN
GENİŞLETİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ
EŞİTSİZLİKLER**

DİLŞATNUR KILIÇER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA**

DÜZCE, 2023

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

KOORDİNATLARDA KONVEKS DÖNÜŞÜMLER İÇİN
GENİŞLETİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TIPLI
EŞİTSİZLİKLER

Dilşatnur KILIÇER tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet GÜMÜŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 06/07/2023

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

6 Temmuz 2023

Dilşatnur Kılıçer

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

6 Temmuz 2023

Dilşatnur Kılıçer

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL KAVRAMLAR	4
2.1. GENEL KAVRAMLAR	4
2.2. KESİRLİ İNTEGRALLER	12
3. KOORDİNATLAR ÜZERİNDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD'IN EŞİTSİZLİĞİ	17
3.1. GİRİŞ	17
3.2. HADAMARD'IN EŞİTSİZLİĞİ	19
3.3. HADAMARD EŞİTSİZLİĞİYLE İLGİLİ BAZI DÖNÜŞÜMLER	22
4. KOORDİNATLAR ÜZERİNDE İKİ KONVEKS FONKSİYONUN ÇARPIMI İÇİN HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	28
4.1. GİRİŞ	28
4.2. ÖN SONUÇLAR	29
4.3. ANA SONUÇLAR	32
5. KOORDİNATLARDA KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	42
5.1. KOORDİNATLARA GÖRE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER	42
6. TÜREVLENEBİLİR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER	55
6.1. GİRİŞ	55
6.2. ANA SONUÇLAR	55
7. KOORDİNATLARDA KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENİŞLETİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	66
7.1. GİRİŞ	66
7.2. ANA SONUÇLAR	69
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	82
9. KAYNAKLAR	83
ÖZGEÇMİŞ	91

SİMGELER

β	Beta Fonksiyonu
f'	f fonksiyonunun 1. Dereceden türevi
Γ	Gamma Fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayı
I°	I aralığının içi
I	$\mathbb{R}$ 'de Herhangi Bir Aralık
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
J_a^α	α . Dereceden Kesirli İntegraller
$J_{a+}^\alpha f$	α . mertebeden Sol Kesirli İntegral
$J_{b-}^\alpha f$	α . mertebeden Sağ Kesirli İntegral
$L_1[a, b]$	1. Dereceden (a,b) Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi

ÖZET

KOORDİNATLARDA KONVEKS DÖNÜŞÜMLER İÇİN GENİŞLETİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TIPLI EŞİTSİZLİKLER

Dilşatnur Kılıçer

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki Sarıkaya

Temmuz 2023, 90 sayfa

Bu tez çalışması, koordinatlarda konveks fonksiyonlar için önemli olan bir eşitsizlik elde etmek olup eşitsizliklerin sonucunda Riemann-Liouville kesirli integral ve logaritmik integral için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin bir genişlemesi olduğu gösterilecektir. Bu çalışmada ayrıca elde edilen eşitsizliklerin daha önceki çalışmalarda verilen bazı sonuçların genelleştirilmesi olduğu da verilecektir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Koordinatlarda konveks fonksiyon, Riemann-Liouville kesirli integral.

ABSTRACT

ON THE EXTENSION OF HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR COORDINATED CONVEX MAPPINGS

Dilşatnur KILIÇER

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki Sarıkaya

July 2023, 90 pages

This thesis is to obtain an inequality in coordinates, which is important for convex functions, and it will be shown that as a result of the inequalities there is an expansion of the Hermite-Hadamard type inequalities for the Riemann-Liouville fractional integral and logarithmic integral. It will also be given that the inequalities obtained in this study are a generalization of some of the results given in previous studies.

Keywords: Hermite-Hadamard inequality, Convex function in coordinates, Riemann-Liouville fractional integral.

1. GİRİŞ

Matematikte 'eşitsizlik' terimi, iki nesne arasındaki korelasyonu yansıtmak için kullanılan iki nicelik arasındaki ilişkiyi ifade eder. Eşitsizliklerin dokunuşu ve rolü, on dokuzuncu yüzyılda hesabın icadından sonra giderek daha önemli hale geldi. Eşitsizlikler, çağdaş matematiğin hemen hemen tüm alanlarında hayati bir rol oynamakta fizik ve mühendislik bilimleri dahil olmak üzere tüm bilim dallarında geniş bir uygulama alanına sahiptir. Konvekslik genellikle eşitsizlikler verir ve geometrinin çok temel bir konusudur, ayrıca matematiğin birçok alanında da yaygın olarak kullanılır. Konvekslik zaten Yunan filozofları için bir tartışma konusuydu ve muhtemelen Babil ve Mısır antik dönemlerine kadar uzanıyor. Arşimet'in (Syracuse Arşimetleri) "Küre ve silindir üzerine" [1] adlı incelemesinde konveksliğin ilk doğru tanımını (MÖ 287-M.Ö. 212) sağladığı anlaşılmaktadır.

Arşimet'in postülaları, "Uç noktaları ortak olan iki dışbükey yaydan biri diğeriyle bitiş noktalarını birleştiren doğru arasında bulunuyorsa, birinci yayın uzunluğu ikinci yayın uzunluğundan daha küçüktür" şeklinde tanımlanır. Muhtemelen konvekslik fikri, sayılarınki kadar eski değildir, ancak insan uygarlığının başlangıcından beri daireler veya üçgenler gibi temel geometrik şekillerin çizilmesidir. Konvekslik, fonksiyonel analiz, ayrık matematik, kimya, fizik ve diğer bilimler gibi matematiğin farklı bölümlerinde sıklıkla gizlenir. Fotoğrafçılık ve trafik güvenliği için tümsek aynaların çekici bir uygulaması. Modern araştırmalarda konveksliğin doğrudan veya dolaylı olarak kullanıldığı yaygın olarak kabul edilmektedir. Geniş kullanımı ve alaka düzeyi nedeniyle, konveks kümeler kavramı ve sonuç olarak konveks fonksiyonlar, çeşitli alanlarda geniş çapta genelleştirilmiştir. Konveks fonksiyonlar, büyük bir eşitsizlik sınıfını kanıtlamak için güçlü araçlardır. Günümüzde konveks fonksiyon analizi, yarı konveks fonksiyonlar [2], log konveks fonksiyonlar [3], koordinatlara göre konveks fonksiyonlar [4], harmonik konveks fonksiyonlar [5], GA-konveks fonksiyonlar [6], $(\alpha; m)$ -konveks fonksiyonlar [7] dahil olmak üzere daha geniş bir fonksiyon teorisine doğru genişletilmiştir.

Eşitsizlikler teorisi ve konveks fonksiyonlar fikri birbiriyle yakından ilişkilidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyonlardan geliştirilen birincil önemli sonuçtur.

Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konveks kümeler ve ilgili geometrik konular matematikçiler tarafından kullanılan 95 ana konudan biridir (52. sırada). Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi(lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

Konveks terimine ilk olarak, 1881 de Ch. Hermite(1822-1901) in Mathesis 3(1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta rastlanmıştır. Mektupta;

“Sur deux limites d'une intégrale définie. Soit une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, á $x = b$. On aura les relations

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x) dx > (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses.

En faisant dans ces formules $f(x) = 1/(1+x)$, $a = 0$, $b = x$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}."$$

yazılıydı. Eşitsizlikler alanında daha fazla dikkate alınan önemli sonuçlar vardır ama maalesef Hermit'in temel çalışmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları(quasi-convex fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve r-convex fonksiyonlar, p-convex fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar (p-logarithmic ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için onu uygulamaya,

genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.

Dragomir, [8] deki çalışmasında $\mathbb{R}^2$ düzleminde bir dikdörtgen üzerinde koordinatlara göre konveks fonksiyonların tanımını vererek bu fonksiyonlar için ilk olarak Hermite-Hadamard tipli yeni bir eşitsizlik vermiştir. Daha sonraki yıllarda bu çalışma göz önüne alınarak yukarda bahsetmiş olduğumuz farklı treden birçok yeni koordinatlara göre konvekslik tanımları verilerek yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezde koordinatlarda konveks fonksiyonlar için önemli olan bir eşitsizlik elde edilecek olup ve bu eşitsizliklerin sonucunda Riemann-Liouville kesirli integral ve logaritmik integral için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin bir genişlemesi olduğu gösterilecektir. Bu çalışmada ayrıca elde edilen eşitsizliklerin daha önceki çalışmalarda verilen bazı sonuçların genelleştirilmesini olduğu da verilecektir.



2. KURAMSAL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler sunulacaktır. Ayrıca teze ışık tutan literatürde var olan bazı eşitsizlikler ispatsız olarak verilecektir.

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Limit) $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve bu durum

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ile gösterilir [64].

Tanım 2.2. (Süreklilik) $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. f fonksiyonu a üzerinde süreklidir ancak ve ancak $|x - a| < \delta$ olduğu zaman $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Yani,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

İse f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyon A üzerinde süreklidir denir [64].

Teorem 2.1. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır.

Tanım 2.3. (Mutlak Süreklilik) $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının birikimi $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

olduğu zaman

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \delta$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir denir [65].

Tanım 2.4. (Türev) $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 'nın bir yığılma noktası ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti veya $x = x_0 + h$ yazılmasıyla elde edilen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti varsa f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limitin değeri f nin x_0 noktasındaki türevi adını alır. Bu türev $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ veya $Df(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir [64].

Tek değişkenli fonksiyonlarda türevlenebilme ve diferansiyellenebilme kavramları aynı anlama gelmektedir.

Tanım 2.5. (Konveks Küme) V bir lineer uzay ve $A \subset V$ ve $x, y \in A$ olsun.

$$B = \{t \in V : t = \alpha x + (1-\alpha) y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

şeklinde tanımlanabiliyorsa A kümesine konveks küme denir. Ancak $t \in B$ ise $t = \alpha x + (1-\alpha) y$ eşitliğinde x ve y nin katsayıları için bağıntı her zaman doğrudur. Bundan dolayı konveks küme tanımındaki $(1-\alpha)$, α yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan negatif olmayan α, β sayıları yazabiliriz. Geometrik anlamda B kümesi uç noktalar x ve y olan bir doğru parçasını belirtmektedir. Sonuç olarak konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasına karşılık gelen kümedir [72].

Tanım 2.6. (Konveks Fonksiyon) $\forall a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(at + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliğini sağlayan $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (eşdeğer olarak $t \in (0,1)$ aralığında da seçilebilir.). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçtiği anlamına gelmektedir. Aşağıda bazı

konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir.

i) e^{ax}

ii) $-\log(x)$

iii) $x^a, (\mathbb{R}^+), a \geq 1$ ve $a \leq 0$

iv) $x^a, (\mathbb{R}^+), a \leq 0 \leq 1$

v) $|x^a|, a \geq 1$

vi) $x \log(x), (\mathbb{R}^+)$

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

1. I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

2. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

3. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f nin konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır [73].

4. $f'', (a, b)$ de mevcut olsun. Bu durumda f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

5. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a, b)$ için f fonksiyonunun en az bir support doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0 bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman

$$\lambda = f'(x_0) \text{ ya da } f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \text{ ise } \lambda \in [f'_-(x_0) + f'_+(x_0)]$$

dır.

6. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [74].

Konveks fonksiyonların temel özellikleri şunlardır:

1. $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (j = 1, 2, 3, \dots, k)$ fonksiyonlar konveks olmak üzere

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), \quad a_j > 0; (1, 2, 3, \dots, k)$$

fonksiyonuda konvektir. Konveksliğin tanımından;

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= \sum_{j=1}^k a_j f_j(tx + (1-t)y) \\ &\leq \sum_{j=1}^k a_j [t f_j(x) + (1-t)f_j(y)] \\ &= \sum_{j=1}^k [t a_j f_j(x) + (1-t)a_j f_j(y)] \\ &= t \sum_{j=1}^k (a_j f_j(x)) + (1-t) \sum_{j=1}^k (a_j f_j(y)) \\ &\leq t f(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konkav ve $A = \{x : f(x) > 0\}$ olmak üzere $g : A \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{f(x)}$

biçiminde tanımlanan g , A' da konvektir.

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan ve konveks ve $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da konveks bir fonksiyon olsun.

Bu takdirde, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$h(x) = (f \circ g)(x)$ olarak tanımlanan h bileşke fonksiyonu da konveksdir. Gerçekten

$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(g(x))$ olmak üzere $x = ta - (1-t)b$, ve buradan

$$\begin{aligned} h(tx_1 + (1-t)x_2) &= f(g(tx_1 + (1-t)x_2)) \\ &\leq f(tg(x_1) + (1-t)g(x_2)) \\ &= tf((g(x_1) + (1-t)f((g(x_2))) \\ &= th(x_1) + (1-t)h(x_2). \end{aligned}$$

4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks ve K uygun matris olmak üzere $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = Kx + L$ formunda bir konveks fonksiyon olsun. $h(x) = f(g(x))$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
g(tx + (1-t)y) &= K(tx + (1-t)y) + L \\
&= tKx + (1-t)Ky + L
\end{aligned}$$

olup;

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= f(g(tx + (1-t)y)) \\
&= f(tKx + (1-t)Ky + L) \\
&= f(tKx + (1-t)Ky + L + tL - tL) \\
&= f(t(Kx + L) + (1-t)Ky + (1-t)L) \\
&= f(t(Kx + L) + (1-t)Ky + L) \\
&\leq tf(Kx + L) + (1-t)f(Ky + L) \\
&= tf(g(x)) + (1-t)f(g(x))
\end{aligned}$$

olduğundan $h = f(g(x))$ konveks fonksiyondur. Yani afın dönüşüm konveks fonksiyon altındaki görüntüsünde konvektir.

Tanım 2.7. (Üçgen Eşitsizliği) $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$$

ve tümevarım yöntemiyle,

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$$

eşitsizlikleri sağlanır [75].

Tanım 2.8. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.2. (Ortalama Değer Teoremi) $f, [a, b]$ aralığında sürekli ve (a,b) de diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

Teorem 2.3. (İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi) $f, [a, b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

Tanım 2.9. E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir L sayısı için $f(x) > L$ olan $x \in E$ değerlerin kümesi ölçülebilirse f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 2.4. (Lebesgue İntegralinin Varlık Teoremi) Sonlu ölçümlü E kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise Lebesgue integrali vardır.

Tanım 2.10. (Jensen Eşitsizliği) $f, [a, b]$ aralığında konveks fonksiyon $t_i \in [0,1]$ için

$\sum_{i=1}^n t_i$ ve $\forall x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

Bu eşitsizlikte özel olarak $t_1 = t_2 = t_3 = \dots t_n = \frac{1}{n}$ alınarak tekrar düzenleme yapılırsa

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

elde edilir.

$f, [a, b]$ aralığında konveks fonksiyon $t_i \in [0,1]$ için $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ olduğunda $\forall x \in [a, b]$ için indüksiyonla

$$\begin{aligned} & f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{n-1} x_{n-1} + t_n x_n) \\ &= f\left((1 - t_n) \left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right) + t_n x_n\right) \\ &\leq (1 - t_n) f\left((1 - t_n) \left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right)\right) + t_n f(x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 - t_n)f \left\{ \frac{t_1}{\leq (1 - t_n)} f(x_1) + \cdots + \frac{t_{n-1}}{\leq (1 - t_n)} f(x_{n-1}) \right\} + t_n f(x_n) \\ &= t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \end{aligned}$$

olduğu görülür [76].

Tanım 2.11. (Dirichlet Formülü) $\psi_1 = [a, b]$, $\psi_2 = [c, d]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x, y)$, ψ_1, ψ_2 üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y) dx \right) dy$$

şeklindeki eşitliğe Dirichlet formülü denir [79].

Tanım 2.12. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = L_p = \left\{ f: \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad \|f\|_\infty = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.13. (Abel İntegral Denklemi) $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \tau)^{\alpha-1} \psi(\tau) d\tau, \quad x > 0$$

ifadesine Abel İntegral Denklemi denir [77].

Tanım 2.14. (Fubini Teoremi) $f(x, y)$ fonksiyonunun $a < x < b, c < y < d$ aralıklar üzerinde ölçülebilir olmak üzere

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

dir [77].

Tanım 2.15. (Hölder Eşitsizliği) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n - lisi$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

a. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

b. $p < 0$ ve $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [78].

Tanım 2.16. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir [75].

Tanım 2.17. (Cauch Eşitsizliği) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ reel veya kompleks sayıların n – lisi olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

veya

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq |x|_2 |y|_2$$

dir.

Tanım 2.18. (Cauchy -Schwarz Eşitsizliği) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen fonksiyonlar ve λ sabiti için

$$\int_a^t f(x)dx = \lambda \int_a^t g(x)dx, \quad t \in [a, b]$$

ilişkisi mevcut ise

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_a^b [g(x)]^2 dx \right)$$

sağlanır. Bu eşitsizliğe Cauchy -Schwarz Eşitsizliği adı verilir.

Tanım 2.19. (Minkovski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω_1 ve Ω_2 kümeleri üzerinde ölçülebilir $f(x, y)$ fonksiyonu için,

$$\left\{ \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) \right)^p dy \right\}^{1/p} \leq \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy$$

eşitsizliğine Minkovski eşitsizliği ya da genelleştirilmiş Minkovski eşitsizliği denir [75].

Teorem 2.5. (Young Eşitsizliği) $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, kesin olarak artan, $\varphi(0) = 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = +\infty$, özelliklerine sahip bir fonksiyon ve $\varphi^{-1} = \Psi$ olsun. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\alpha \varphi(u) du, \quad \Psi(\alpha) = \int_0^\alpha \Psi(u) du$$

denirse her $x, y \in [0, +\infty)$ için

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y)$$

dır. Eşitlik sadece $y = \varphi(x)$ olması halinde geçerlidir [81].

Teorem 2.6. (Ostrowski Eşitsizliği) $f: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 da diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f \in [a, b]$ olacak şekilde I sınırlı olsun. Burada $a < b$ ve $a, b \in I$ dır. Eğer $|f(x)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \leq M(b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir [80].

2.2. KESİRLİ İNTEGRALLER

Bu alt bölümde ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integral tanımının elde edilişi verilecek, daha sonra literatürdeki bazı kesirli integral tanımları sunulacaktır.

Riemann-Liouville kesirli integral operatörünü elde etmek için ilk olarak n-katlı

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \quad (2.1)$$

integralini ele alalım. Bu integralde integrasyon sırasını ve buna bağlı sınırları

değiştirelim.

Bunun için

$$\begin{aligned}
 \alpha < \sigma_1 < x & \quad \sigma_2 < \sigma_1 < x & (2.2) \\
 \alpha < \sigma_1 < \sigma_2 & \quad \sigma_2 < \sigma_1 < x \\
 & \quad , \dots , & \quad , \dots , \\
 \alpha < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \quad \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\
 \alpha < \sigma_n < \sigma_{n-1} & \quad \alpha < \sigma_n < x
 \end{aligned}$$

sınırlı değişimleri altında (2.19) ifadesi

$$\begin{aligned}
 & \int_{\alpha}^x \int_{\alpha}^{\sigma_1} \int_{\alpha}^{\sigma_2} \dots \int_{\alpha}^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \\
 & = \int_{\alpha}^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x \dots \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır (2.3) ifadesinin sağ tarafı terim terim hesaplanırsa,

$$\int_{\alpha}^x \int_{\alpha}^{\sigma_1} \int_{\alpha}^{\sigma_2} \dots \int_{\alpha}^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^x f(\sigma_n) (x - \sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \quad (2.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ Oluşu kullanılırsa

$$\int_{\alpha}^x \int_{\alpha}^{\sigma_1} \int_{\alpha}^{\sigma_2} \dots \int_{\alpha}^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{\alpha}^x f(\sigma_n) (x - \sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \quad (2.5)$$

yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki n pozitif bir tamsayıdır. Gamma fonksiyonu tam sayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n nin tamsayı olmaması durumunda (2.5) eşitsizliğin sağ yanı için aşağıdaki kesirli Riemann-Liouville integral operatörünün tanımı verilebilir.

Tanım 2.20. (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) $f(x) \in L_1 [a, b]$ olsun. Bu durumda

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a < x \quad (2.6)$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b \quad (2.7)$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α . mertebeden sırasıyla sağ ve sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri denir. Burada $J_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x)$ ve $J_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x)$ dir [66].

Tanım 2.21. (ρ -Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) $f \in L_1 [a, b]$ olmak üzere

$$I_{\rho}^{\alpha} f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau, \quad x > a, \quad \rho > -1 \quad (2.8)$$

$$I_{\rho}^{\alpha} f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\tau^{\rho+1} - x^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau, \quad b > x, \quad \rho > -1 \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanan eşitliklere $\alpha > 0$ için α . mertebeden sırasıyla sağ ve sol taraflı genelleştirilmiş ρ -Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri denir [67].

Tanım 2.22. (h -Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri) $f \in L [a, b]$, $h(x)$ de $[a, \infty)$ aralığı üzerinde azalmayan pozitif monoton ve aynı zamanda $h'(x)$ de (a, ∞) aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda olmak üzere $h(x)$ fonksiyonuna göre bir $f(x)$ fonksiyonunun h sol ve sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

$$(I_{a+;h}^{\alpha} f)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)h'(t)}{(h(x)-h(t))^{1-\alpha}} dt, \quad (x > a, \quad \alpha > 0) \quad (2.10)$$

$$(I_{b-;h}^{\alpha} f)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)h'(t)}{(h(t)-h(x))^{1-\alpha}} dt, \quad (b > x, \quad \alpha > 0) \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$(I_{a+;h}^0 f)(x) = (I_{b-;h}^0 f)(x) = f(x) \quad (2.12)$$

eşitlikleri vardır [68]. Burada $h(x) = x$ seçilirse klasik Riemann-Liouville Kesirli

İntegral formülleri ve $h(x) = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ seçilirse de ρ -Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri elde edilir.

Tanım 2.23. (h, k -Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri) $f \in L [a, b]$ ve $h(x)$, $[a, \infty)$ aralığı üzerinde azalmayan pozitif monoton ve aynı zamanda $h'(x)$ de (a, ∞) aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda $k > 0$ olmak üzere $h(x)$ fonksiyonuna göre bir $f(x)$ fonksiyonunun h, k sol ve sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

$$({}_k I_{a+;h}^{\alpha} f)x = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)h'(t)}{(h(x)-h(t))^{1-\frac{\alpha}{k}}} dt, \quad (x > a, \quad \alpha > 0) \quad (2.13)$$

$$({}_k I_{b-;h}^\alpha f)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)h'(t)}{(h(x)-h(t))^{1-\frac{\alpha}{k}}} dt, \quad (b > x, \alpha > 0) \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$({}_k I_{a+;h}^0 f)(x) = ({}_k I_{b-;h}^0 f)(x) = f(x) \quad (2.15)$$

eşitlikleri vardır [69]. Burada $k = 1$ ve $h(x) = x$ seçilirse klasik kesirli integral formülleri, $k = 1$ ve $h(x) = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ seçilirse de ρ -Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri ve $k = 1$ seçilirse h -Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri elde edilir.

Tanım 2.24. (Wely Kesirli İntegrali) Wely'in kesirli integral tanımları ileriye doğru integrasyon ve geriye doğru integrasyon olmak üzere sırasıyla

$$\begin{aligned} {}_x W_\infty^\alpha[f(x)] &= ({}_x I_\infty^\alpha)f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.16)$$

ve

$$\begin{aligned} {}_{-\infty} W_x^\alpha[f(x)] &= ({}_{-\infty} I_x^\alpha)f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır [70].

Tanım 2.25. (Chen Kesirli İntegrali) Chen'in kesirli integral tanımı sol taraflı integral ve sağ taraflı integral olmak üzere sırasıyla

$$({}_c I_c^\alpha)f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad x > c \quad (2.18)$$

ve

$$({}_c I_c^\alpha)f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^c (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad x < c \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilmiştir [70].

Tanım 2.26. (Kober Kesirli İntegrali) Kober kesirli integrali tanımı ise sol taraflı kesirli integral

$$I_{1,\eta}^\alpha[f(x)] = \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (\xi - x)^{\alpha-1} \xi^\eta f(\xi) d\xi \quad (2.20)$$

ve sağ taraflı kesirli integral

$$I_{1,\eta}^{\alpha}[f(x)] = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (\xi - x)^{\alpha-1} \xi^{-\alpha-\eta} f(\xi) d\xi \quad (2.21)$$

olarak tanımlanır [70].

Tanım 2.27. (Erdelyi Kesirli İntegrali) Sırasıyla Erdelyi sol ve sağ kesirli integralleri

$$I_{\sigma,\eta}^{\alpha}[f(x)] = \frac{\sigma x^{\sigma(-\alpha-\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (\xi^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} \xi^{\sigma\eta+\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (2.22)$$

ve

$$I_{\sigma,\eta}^{\alpha}[f(x)] = \frac{\sigma x^{\sigma\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (\xi^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} \xi^{\sigma(1-\alpha-\eta)} f(\xi) d\xi \quad (2.23)$$

dir [70].

Tanım 2.28. (Hilfer k-kesirli İntegral) Hilfer k-kesirli integral ise

$$I_k^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^x (x - \xi)^{\frac{\alpha}{k-1}} f(\xi) d\xi \quad (2.24)$$

şeklindedir [70].

Kesirli integraller hakkında daha fazla bilgi için [66], [68], [71] nolu kitaplara bakılabilir.



3. KOORDİNATLAR ÜZERİNDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD'IN EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde S.S. DRAGOMİR tarafından elde edilen düzlemde koordinatlar üzerinde tanımlanan konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliği ve bu eşitsizlik için bazı uygulamalar verilmiştir.

3.1. GİRİŞ

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I aralığında tanımlı konveks fonksiyon ve $a < b$; $a, b \in I$ olmak üzere reel sayılar olsun. Aşağıdaki eşitsizlik

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (3.1)$$

Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Bazı ortalama eşitsizlikler f nin uygun değerleri için (3.1) 'den türetilebileceğine dikkat edilsin. Makalede [10] (ayrıca bkz. [11] ve [9]) Hadamard'ın sonucuyla bağlantılı aşağıdaki dönüşüm olarak kabul edilir,

$$H: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, H(t) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx.$$

H nin özellikleri aşağıdaki gibi alınsın:

(i) H , konveks ve monoton azalandır.

(ii) H nin sınırları,

$$\sup_{t \in [0,1]} H(t) = H(1) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

ve

$$\inf_{t \in [0,1]} H(t) = H(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

dir.

Hadamard eşitsizliğiyle de yakından bağlantılı bir başka dönüşümde şudur [11] (ayrıca bkz. [9]),

$$F : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, F(t) := \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y) dx dy .$$

Bu dönüşümün özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) F konveks ve monotondur; $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde artmaz ve $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ üzerinde azalmaz.

(ii) F; $\frac{1}{2}$ elemanına göre simetriktir, yani

$$\text{her } t \in [0,1] \text{ için } F(t) = F(1-t)$$

dır.

(iii) F nin sınırları

$$\sup_{t \in [0,1]} F(t) = F(0) = F(1) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ve

$$\inf_{t \in [0,1]} F(t) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(b-a)^2} = \int_a^b \int_a^b \left(\frac{x+y}{2}\right) dx dy \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

dır.

(iv) Aşağıdaki eşitsizlik,

$$t \in [0,1] \text{ için } F(t) \geq \max\{H(t), H(1-t)\}$$

vardır.

Bu bölümde; Hadamard eşitsizliğine benzer bir eşitsizlik verilecektir, bu eşitsizlik ile $\mathbb{R}^2$ de koordinatlar üzerinde konveks dönüşümleri alınacaktır. Ayrıca, H ve F dönüşümlerine benzer bazı dönüşümler ele alınacak olup ana özellikleri oluşturulacaktır.

En son düzeltmeler, muadiller, genellemeler ve yeni Hadamard tipi eşitsizlikler için [16]-[12] ve [14]-[15] makalelerine ve [13] kitabına bakınız.

3.2. HADAMARD'IN EŞİTSİZLİĞİ

$a < b$ ve $c < d$ olacak şekilde $\mathbb{R}^{2'}$ de iki boyutlu $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ aralığı ele alınsın. Bir f fonksiyonu $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, bazı kısmi dönüşümler $f_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(u) := f(u, y)$ ve $f_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(v) := f(x, v)$ ise tüm $y \in [c, d]$ ve $x \in [a, b]$ için tanımlandığı yerde konvektir.

Aşağıdaki eşitsizlik, tüm $(x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)z, \lambda y + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(z, w) \quad (3.2)$$

$f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ 'de konveks olduğunu hatırlayalım.

Koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için genel bir tanım aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Bu tanım Dragomir tarafından [17]'de şu şekilde tanımlandı.

Tanım 3.1. Tüm $t, s \in [0, 1]$ ve $(x, y), (u, v) \in \Delta$ için aşağıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned} & f(tx + (1 - t)y, su + (1 - s)w) \\ & \leq tsf(x, u) + s(1 - t)f(y, u) + t(1 - s)f(x, w) + (1 - t)(1 - s)f(y, w) \end{aligned}$$

geçerliyse, $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$, Δ üzerinde koordinatlara göre konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

Lemma 3.1. Her konveks dönüşüm $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatları üzerinde konvektir, ancak tersi genellikle doğru değildir.

İspat: Farz edelim ki $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ 'da konveks. $f_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(v) := f(x, v)$ alalım. O halde tüm $\lambda \in [0, 1]$ ve $v, w \in [c, d]$ için

$$\begin{aligned} f_x(\lambda v + (1 - \lambda)w) &= f(x, \lambda v + (1 - \lambda)w) \\ &= f(\lambda x + (1 - \lambda)x, \lambda v + (1 - \lambda)w) \\ &\leq \lambda f(x, v) + (1 - \lambda)f(x, w) \\ &= \lambda f_x(v) + (1 - \lambda)f_x(w) \end{aligned}$$

f'_x 'in konveksliğini gösterir.

$f_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(u) := f(u, y)$, $[a, b]$ üzerinde ve tüm $y \in [c, d]$ için konveks olması durumunda da aynısı geçerlidir. Şimdi $f_0(x, y) = xy$ tarafından verilen $f_0 : [0, 1]^2 \rightarrow$

$[0, \infty)$ dönüşümü alınsın. f 'nin koordinatlarda konveks olduğu ancak $[0,1]^2$ 'de konveks olmadığı açıktır. Gerçekten eğer $(u, 0), (0, w) \in [0,1]^2$ ve $\lambda \in [0,1]$ ise,

$$f(\lambda(u, 0) + (1 - \lambda)(0, w)) = f(\lambda u, (1 - \lambda)w) = \lambda(1 - \lambda)xw$$

ve

$$\lambda f(u, 0) + (1 - \lambda)f(0, w) = 0$$

olur. Böylece tüm $\lambda \in (0,1)$; $u, w \in (0,1)$ için f 'nin $[0,1]^2$ 'de konveks olmadığını gösteren

$$f(\lambda(u, 0) + (1 - \lambda)(0, w)) > \lambda f(u, 0) + (1 - \lambda)f(0, w)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Teorem 3.1. $f: \Delta = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerindeki koordinatlarda konveks olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlikler,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\ & \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \right] \\ & \leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} \end{aligned} \tag{3.3}$$

vardır.

İspat. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda konveks olduğundan her $x \in [a, b]$ için $g_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_x(y) = f(x, y)$ dönüşümü $[c, d]$ üzerinde konvektir. O halde Hadamard eşitsizliğine (3.1) göre,

$$g_x\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d g_x(y) dy \leq \frac{g_x(c) + g_x(d)}{2}, \quad x \in [a, b]$$

olur. Yani,

$$f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(x, y) dy \leq \frac{f(x, c) + f(x, d)}{2}, \quad x \in [a, b]$$

dir. Bu eşitsizliğin $[a, b]$ üzerinde integralini alındığında,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(c-d)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir.

$g_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_y(x) := f(x, y)$ dönüşümü için de benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(c-d)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

olduğu bulunur. Eşitsizliklerden (3.4) ve (3.5)'i toplayarak, (3.3)'teki ikinci ve üçüncü eşitsizlik elde edilir. Hadamard eşitsizliğine göre, ayrıca (3.3)'de ilk eşitsizliği veren

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy$$

eşitsizliklerine ulaşılır.

Son olarak, aynı eşitsizlikle ilgili olarak aşağıdaki sonuçlar yazılır;

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx \leq \frac{f(a, c) + f(b, c)}{2},$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx \leq \frac{f(a, d) + f(b, d)}{2},$$

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy \leq \frac{f(a, c) + f(a, d)}{2},$$

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \leq \frac{f(b, c) + f(b, d)}{2}.$$

Bunlar taraf tarafa toplanılırsa (3.3)'teki son eşitsizlik elde edilir. Eğer (3.3) 'de $f(x) = xy$ seçersek; o zaman (3.3)'de eşitlik olur, bu da (3.3)'ün sağlandığını gösterir.

3.3. HADAMARD EŞİTSİZLİĞİYLE İLGİLİ BAZI DÖNÜŞÜMLER

Şimdi yukarıdaki gibi bir $f : \Delta = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü için, $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki dönüşümü alınsın,

$$H(t, s) := \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}, sy + (1-s)\frac{c+d}{2}\right) dx dy.$$

Bu eşitsizliğin özellikleri aşağıdaki teoremden belirtilmiştir.

Teorem 3.2. $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde konveks olsun. Buradan

(i) H dönüşümü, $[0, 1]^2$ üzerinde konvektir.

(ii) Sınırları;

$$\sup_{(t,s) \in [0,1]^2} H(t, s) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = H(0, 0),$$

$$\inf_{(t,s) \in [0,1]^2} H(t,s) = f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) = H(1,1)$$

dir.

(iii) H dönüşümü, koordinatlar üzerinde monoton azalmayandır.

İspat. (i) $s \in [0,1]$ olsun. Sonra $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta = 1$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} H(\alpha t_1 + \beta t_2, s) &= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \\ &\times \int_a^b \int_c^d f\left((\alpha t_1 + \beta t_2)x + [1 - (\alpha t_1 + \beta t_2)]\frac{a+b}{2}, sy + (1-s)\frac{c+d}{2}\right) dx dy \\ &= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f\left(\alpha \left(t_1 x + \left(1 - t_1\right)\frac{a+b}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(t_2 x + \left(1 - t_2\right)\frac{a+b}{2}\right), sy + (1-s)\frac{c+d}{2}\right) dx dy \\ &\leq \alpha \cdot \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f\left(t_1 x + (1 - t_1)\frac{a+b}{2}, sy + (1-s)\frac{c+d}{2}\right) dx dy \\ &\quad + \beta \cdot \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f\left(t_2 x + (1 - t_2)\frac{a+b}{2}, sy + (1-s)\frac{c+d}{2}\right) dx dy \\ &= \alpha H(t_1, s) + \beta H(t_2, s) \end{aligned}$$

olur. Eğer $t \in [0,1]$, her $s_1, s_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta = 1$ için

$$H(t, \alpha s_1 + \beta s_2) \leq \alpha H(t, s_1) + \beta H(t, s_2)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(ii) f konveks olduğundan, integraller için Jensen eşitsizliğine göre

$$H(t, s) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}, sy + (1-s)\frac{c+d}{2}\right) dy \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(tx \\
&+ (1-t) \frac{a+b}{2}, \frac{d-c}{2} \int_c^d \left[sy + (1-s) \frac{c+d}{2} \right] dy) dx \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(tx + (1-t) \frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \left[tx + (1-t) \frac{a+b}{2}\right], \frac{c+d}{2}\right) dx \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)
\end{aligned}$$

olur. Koordinatlardaki H nin konveksliğine göre,

$$\begin{aligned}
H(t, s) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(tx + (1-t) \frac{a+b}{2}, y\right) dy \right. \\
&\quad \left. + (1-s) \cdot \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(tx + (1-t) \frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) dy \right] dx \\
&\leq s \cdot \frac{1}{d-c} \int_c^d \left[t \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, y) dx dy \right. \\
&\quad \left. + (1-t) \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dx \right] dy \\
&\quad + (1-s) \cdot \frac{1}{d-c} \int_c^d \left[t \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \right. \\
&\quad \left. + (1-t) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right] dy \\
&= st \cdot \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\
&\quad + s(1-t) \cdot \frac{1}{d-c} \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
&\quad + (1-s)t \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + (1-s)(1-t) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, Hadamard eşitsizliğine göre

$$f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

Ve

$$f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

eşitsizliklerine ulaşılır. Buradan, integralini alarak aşağıdaki sonuç elde edilir,

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

ve

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Yukarıdaki eşitsizliği kullanarak,

$$\begin{aligned} & H(t, s) \\ & \leq [st + s(1-t) + (1-s)t \\ & + (1-s)(1-t)] \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \\ & = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy, \quad (s, t) \in [0, 1]^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece (ii)'deki ikinci sınır da ispatlanır.

(iii) Öncelikle,

$$\text{her } (t, s) \in [0, 1]^2 \text{ için } H(t, s) \geq H(0, s) \quad (3.6)$$

olduğu gösterilecektir. Hadamard eşitsizliğine göre, $\text{her } (t, s) \in [0, 1]^2$ için

$$\begin{aligned} H(t, s) & \geq \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \left[tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right] dx, sy + (1-s)\frac{c+d}{2}\right) dy \\ & = \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, sy + (1-s)\frac{c+d}{2}\right) dy = H(0, s) \end{aligned}$$

olur. Şimdi $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ olsun. Her $s \in [0,1]$ için $H(\cdot, s)$ dönüşümü konveksliğe göre,

$$\frac{H(t_2, s) - H(t_1, s)}{t_2 - t_1} \geq \frac{H(t_1, s) - H(0, s)}{t_1} \geq 0$$

vardır. Son eşitsizlik için (3.6) kullanıldığına dikkat ediniz.

Teorem 3.3. $f: \Delta = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde konveks olsun. O halde,

(i) H dönüşümü, Δ üzerinde konvektir.

(ii) $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = H(t, t)$ dönüşümü tanımlansın. O halde h konvektir; $[0,1]$ üzerinde monoton azalmayandır ve sınırları,

$$\sup_{t \in [0,1]} h(t) = h(1) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

ve

$$\inf_{t \in [0,1]} h(t) = h(0) = f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$$

dır.

İspat.

(i) $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in [0,1]^2$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta = 1$ olsun. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} & H(\alpha(t_1, s_1) + \beta(t_2, s_2)) \\ &= H(\alpha t_1 + \beta t_2, \alpha s_1 + \beta s_2) \\ &= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \\ &\times \int_a^b \int_c^d f\left(\alpha\left(t_1 x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}, s_1 y + (1-s_1)\frac{c+d}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta\left(t_2 x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}, s_2 y + (1-s_2)\frac{c+d}{2}\right)\right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha \cdot \frac{1}{(b-a)(d-c)} \\
&\times \int_a^b \int_c^d f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}, s_1y + (1-s_1)\frac{c+d}{2}\right) dx dy \\
&\quad + \beta \cdot \frac{1}{(b-a)(d-c)} \\
&\times \int_a^b \int_c^d f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}, s_2y + (1-s_2)\frac{c+d}{2}\right) dx dy \\
&= \alpha H(t_1, s_1) + \beta H(t_2, s_2)
\end{aligned}$$

eşitsizlik, H'nin $[0,1]^2$ 'de konveks olduğunu gösterir.

(ii) $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta = 1$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
h(\alpha t_1, \beta t_2) &= H(\alpha t_1 + \beta t_2, \alpha t_1 + \beta t_2) \\
&= H(\alpha(t_1, t_1) + \beta(t_2, t_2)) \\
&\leq \alpha H(t_1, t_1) + \beta H(t_2, t_2) \\
&= \alpha h(t_1) + \beta h(t_2)
\end{aligned}$$

buradan, h nin $[0,1]$ 'de konveks olduğunu gösterir.

Yukarıdaki teoremle gerekli sınırları ispatlayan,

$$h(t) = H(t, t) \geq H(0,0) = f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right), t \in [0,1]$$

Ve

$$h(t) = H(t, t) \leq H(1,1) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy, \quad t \in [0,1]$$

ulaşılır.

Şimdi $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ olsun. O halde h nin konveksliği ile,

$$\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} \geq \frac{h(t_1) - h(0)}{t_1} \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

4. KOORDİNATLAR ÜZERİNDE İKİ KONVEKS FONKSİYONUN ÇARPIMI İÇİN HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde M. A. LATİF ve M. ALOMARİ tarafından elde edilen düzlem üzerinde iki konveks fonksiyonun çarpımı için Hadamard eşitsizlikleri verilmiştir.

4.1. GİRİŞ

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun ve $a < b$ ile $a, b \in I$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

konveks dönüşüm için Hadamard eşitsizliği olduğu bir önceki bölümde gösterildi. Dragomir [17], $\mathbb{R}^2$ üzerinde konveks fonksiyonlar için Hadamard türünün aşağıdaki benzer eşitsizliğini vermiştir.

Teorem 4.1. $f: \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon olsun. O halde,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\ &\leq \frac{f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d)}{4} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dır. [18]'de Pachpatte, konveks fonksiyonların çarpımı için iki Hadamard tipli eşitsizlik kurmuştur.

Teorem 4.2. $a < b$ için $[a, b]$ üzerinde $f, g: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ konveks fonksiyonlar olsun. O halde,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{3}M(a, b) + \frac{1}{6}N(a, b) \quad (4.2)$$

ve

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx + \frac{1}{6}M(a,b) + \frac{1}{3}N(a,b) \quad (4.3)$$

olur. Buradan,

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b) \text{ ve } N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Bu bölümün temel amacı, yukarıda son teoremden verilenler gibi yeni Hadamard eşitsizlikleri oluşturmaktır. Şimdilik $\mathbb{R}^2$ düzleminde koordinatlar üzerinde konveks fonksiyonlar için bakılır.

4.2. ÖN SONUÇLAR

$\mathbb{R}^2$ 'de $a < b$ ve $c < d$ ile iki boyutlu bir $\Delta =: [a, b] \times [c, d]$ aralığı ele alınsın. Aşağıdaki eşitsizlik,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)z, \alpha y + (1 - \alpha)w) \leq \alpha f(x, y) + (1 - \alpha)f(z, w)$$

tüm $(x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için geçerliyse $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün Δ üzerinde konveks olduğu söylenir.

Koordinatlara göre konveks fonksiyon olarak adlandırılan konveks fonksiyonlar için bir değişiklik, Dragomir tarafından [17]'de şu şekilde tanımlandı,

Bir fonksiyonun $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerindeki koordinatlarda konveks olduğu söylenir ise tüm $x \in [a, b], y \in [c, d]$ tanımlandığı yerde kısmi dönüşümler $f_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y(u) = f(u, y)$ ve $f_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(v) = f(x, v)$ konvektir.

Koordinatlara göre konveks fonksiyon için genel bir tanım aşağıdaki gibi ifade edilebilir olduğunu yukarıdaki bölümde açıklandı. Tüm $t, s \in [0, 1]$ ve $(x, y), (u, v) \in \Delta$ için aşağıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned} & f(tx + (1 - t)y, su + (1 - s)w) \\ & \leq tsf(x, u) + s(1 - t)f(y, u) + t(1 - s)f(x, w) + (1 - t)(1 - s)f(y, w) \end{aligned}$$

geçerliyse, $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$, Δ üzerinde koordinatlara göre konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

Açıkça, her konveks fonksiyon koordine edilmiş konvektir. Ayrıca, konveks olmayan koordinatlara göre konveks fonksiyon vardır (bakınız [17]).

Benzer şekilde, aşağıdaki Lemmayı kullanarak f fonksiyonunun koordinatlara göre konveks olup olmadığı belirlenebilir.

Lemma 4.1. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ olsun. Eğer f , Δ üzerinde iki kez türevlenebilen koordineli konveks fonksiyon ise ancak ve ancak $f_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $f_y(u) = f(u, y)$ ve $f_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(v) = f(x, v)$, $f_x'' \geq 0$ ve $f_y'' \geq 0$ olur.

İspat. Bir değişkenli konveksliğin temel özelliklerinin kullanıldığı oldukça açıktır.

Önerme 4.1. $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ ve $\alpha \geq 0$ üzerinde koordinatlara göre iki konveks fonksiyon ise, o zaman $f + g$ ve αf Δ üzerinde koordinatlara göre konvektir.

İspat. Tanım 4.1'den doğrudan anlaşılır.

Önerme 4.2. Eğer $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlara göre iki konveks fonksiyon ise o halde (fg) , Δ üzerinde koordinatlara göre konvektir.

İspat.

$$\begin{aligned}
& f(\alpha x + (1 - \alpha)y, \beta u + (1 - \beta)v)g(\alpha x + (1 - \alpha)y, \beta u + (1 - \beta)v) \\
& \leq [\alpha\beta f(x, u) + \alpha(1 - \beta)f(x, v) + (1 - \alpha)\beta f(y, u) + (1 - \alpha)(1 - \beta)f(y, v)] \\
& \times [\alpha\beta g(x, u) + \alpha(1 - \beta)g(x, v) + (1 - \alpha)\beta g(y, u) + (1 - \alpha)(1 - \beta)g(y, v)] \\
& \leq \alpha^2\beta^2 f(x, u)g(x, u) + \alpha^2(1 - \beta)^2 f(x, v)g(x, v) \\
& + (1 - \alpha)^2\beta^2 f(y, u)g(y, u) + (1 - \alpha)^2(1 - \beta)^2 f(y, v)g(y, v) \\
& + \alpha^2\beta(1 - \beta)[f(x, u)g(x, u) + f(x, v)g(x, v)] \\
& + \alpha\beta^2(1 - \alpha)[f(x, u)g(x, u) + f(y, u)g(y, u)] \\
& + \alpha\beta(1 - \alpha)(1 - \beta)[f(x, v)g(x, v) + f(y, u)g(y, u) \\
& + f(x, u)g(x, u) + f(y, v)g(y, v)] \\
& + \alpha(1 - \alpha)(1 - \beta)^2[f(x, v)g(x, v) + f(y, v)g(y, v)] \\
& + \beta(1 - \alpha)^2(1 - \beta)[f(y, v)g(y, v) + f(y, u)g(y, u)] \\
& = [\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta(1 - \beta) + \alpha\beta^2(1 - \alpha) + \alpha\beta(1 - \alpha)(1 - \beta)]f(x, u)g(x, u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[\alpha^2(1-\beta)^2 + \alpha^2\beta(1-\beta) + \alpha(1-\alpha)(1-\beta)^2 \\
& \quad + \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)]f(x,v)g(x,v) \\
& +[(1-\alpha)^2\beta^2 + \alpha\beta^2(1-\alpha) + \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta) \\
& \quad + \beta(1-\alpha)^2(1-\beta)]f(y,u)g(y,u) \\
& + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\beta)^2 + \beta(1-\alpha)^2(1-\beta) \\
& \quad + \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)]f(y,v)g(y,v) \\
& = \alpha\beta f(x,u)g(x,u) + \alpha(1-\beta)f(x,v)g(x,v) \\
& + (1-\alpha)\beta f(y,u)g(y,u) + (1-\alpha)(1-\beta)f(y,v)g(y,v)
\end{aligned}$$

ve bu nedenle (fg) , Δ üzerinde koordinatlara göre konvektir.

Teorem 4.3. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlara göre konveks fonksiyon olsun ancak ve ancak birbirinden farklı $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ için $x_1 < x_2 < x_3$ olacak şekilde ve birbirinden farklı $y_1, y_2, y_3 \in [c, d]$ için öyle ki $y_1 < y_2 < y_3$ ise,

$$\begin{aligned}
& (x_3 - x_2)[(y_3 - y_2)f(x_1, y_1) + (y_2 - y_1)f(x_1, y_3)] \\
& + (x_2 - x_1)[(y_3 - y_2)f(x_3, y_1) + (y_2 - y_1)f(x_3, y_3)] \\
& - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)f(x_2, y_2) \geq 0
\end{aligned}$$

olur.

İspat. $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ öyle ki $x_1 < x_2 < x_3$ ve $y_1, y_2, y_3 \in [c, d]$ öyle ki $y_1 < y_2 < y_3$ olsun. $\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, $x_2 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_3$ ve $\beta = \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}$, $y_2 = \beta y_1 + (1 - \beta)y_3$ olarak belirlenir. Öyleyse

$$\begin{aligned}
f(x_2, y_2) &= f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_3, \beta y_1 + (1 - \beta)y_3) \\
&\leq \alpha\beta f(x_1, y_1) + \alpha(1 - \beta)f(x_1, y_3) \\
&\quad + \beta(1 - \alpha)f(x_3, y_1) + (1 - \alpha)(1 - \beta)f(x_3, y_3) \\
&= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} f(x_1, y_1) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} f(x_1, y_3) \\
&\quad + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} f(x_3, y_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} f(x_3, y_3)
\end{aligned}$$

olur. Ve burada

$$\begin{aligned}
& (x_3 - x_2)[(y_3 - y_2)f(x_1, y_1) + (y_2 - y_1)f(x_1, y_3)] \\
& + (x_2 - x_1)[(y_3 - y_2)f(x_3, y_1) + (y_2 - y_1)f(x_3, y_3)] \\
& - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)f(x_2, y_2) \geq 0
\end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3. ANA SONUÇLAR

Bu bölümde, koordinatlara göre konveks fonksiyonun çarpımı için Hadamard eşitsizlikleri elde edilecektir.

Teorem 4.4. $f, g : \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerindeki koordinatlarda $a < b$, $c < d$ olan konveks fonksiyonlar olsun. O halde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y)g(x, y)dydx \\
& \leq \frac{1}{9}L(a, b, c, d) + \frac{1}{18}M(a, b, c, d) + \frac{1}{36}N(a, b, c, d)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

dır. Burada,

$$\begin{aligned}
L(a, b, c, d) &= f(a, c)g(a, c) + f(b, c)g(b, c) + f(a, d)g(a, d) + f(b, d)g(b, d), \\
M(a, b, c, d) &= f(a, c)g(a, d) + f(a, d)g(a, c) + f(b, c)g(b, d) + f(b, d)g(b, c) \\
&+ f(b, c)g(a, c) + f(b, d)g(a, d) + f(a, c)g(b, c) + f(a, d)g(b, d)
\end{aligned}$$

ve

$$N(a, b, c, d) = f(b, c)g(a, d) + f(b, d)g(a, c) + f(a, c)g(b, d) + f(a, d)g(b, c).$$

İspat. $f, g : \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, Δ üzerindeki koordinatlarda $a < b$, $c < d$ olan konveks fonksiyonlar olduğundan, bu nedenle kısmi dönüşümleri $f_y : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $f_y(x) = f(x, y)$, $g_y : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $g_y(x) = g(x, y)$, $f_x : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$, $f_x(y) = f(x, y)$ ve $g_x : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$, $g_x(y) = g(x, y)$ tüm $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ için sırasıyla $[a, b]$ ve $[c, d]$ üzerinde konvekstir. Şimdi (4.3)'ü $[c, d]$ üzerinde $f_x(y)g_x(y)$ 'ye uygulayarak şu elde edilir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{d-c} \int_c^d f_x(y) g_x(y) dy &\leq \frac{1}{3} [f_x(c) g_x(c) + f_x(d) g_x(d)] \\ &+ \frac{1}{6} [f_x(c) g_x(d) + f_x(d) g_x(c)] \end{aligned}$$

Yani

$$\begin{aligned} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(x, y) g(x, y) dy &\leq \frac{1}{3} [f(x, c) g(x, c) + f(x, d) g(x, d)] \\ &+ \frac{1}{6} [f(x, c) g(x, d) + f(x, d) g(x, c)] \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde integral alınırsa ve her iki tarafı $(b - a)$ 'ya bölünürse,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dy dx \\ &\leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, c) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, d) dx \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, d) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, c) dx \right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

olur. Şimdi (4.5)'in R.H.S üzerindeki her bir integrale (4.3) tekrar uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, c) dx &\leq \frac{1}{3} [f(a, c) g(a, c) + f(b, c) g(b, c)] \\ &+ \frac{1}{6} [f(a, c) g(b, c) + f(b, c) g(a, c)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, d) dx &\leq \frac{1}{3} [f(a, d) g(a, d) + f(b, d) g(b, d)] \\
&+ \frac{1}{6} [f(a, d) g(b, d) + f(b, d) g(a, d)] \\
\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, d) dx &\leq \frac{1}{3} [f(a, c) g(a, d) + f(b, c) g(b, d)] \\
&+ \frac{1}{6} [f(a, c) g(b, d) + f(b, c) g(a, d)] \\
\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, c) dx &\leq \frac{1}{3} [f(a, d) g(a, c) + f(b, d) g(b, c)] \\
&+ \frac{1}{6} [f(a, d) g(b, c) + f(b, d) g(a, c)]
\end{aligned}$$

olur, (4.5)'deki bu eşitsizliklerin sağlaması

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dy dx &\leq \frac{1}{9} [f(a, c) g(a, c) + f(b, c) g(b, c)] \\
&+ \frac{1}{18} [f(a, c) g(b, c) + f(b, c) g(a, c)] \\
&+ \frac{1}{9} [f(a, d) g(a, d) + f(b, d) g(b, d)] \\
&+ \frac{1}{18} [f(a, d) g(b, d) + f(b, d) g(a, d)] \\
&+ \frac{1}{18} [f(a, c) g(a, d) + f(b, c) g(b, d)] \\
&+ \frac{1}{36} [f(a, c) g(b, d) + f(b, c) g(a, d)] \\
&+ \frac{1}{18} [f(a, d) g(a, c) + f(b, d) g(b, c)] \\
&+ \frac{1}{36} [f(a, d) g(b, c) + f(b, d) g(a, c)]
\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle (4.5) ile istenen sonuç (4.4) elde edilir. Benzer şekilde $f_y(x)g_y(x)$ için $[a, b]$ üzerinde (4.3) uygulanırsa aynı sonuç elde edilir.

Teorem 4.5. $f, g : \Delta = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, $a < b, c < d$ olacak şekilde Δ koordinatları üzerinde konveks fonksiyon olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
& 4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y)g(x, y)dydx \\
& \quad + \frac{5}{36}L(a, b, c, d) + \frac{7}{36}M(a, b, c, d) + \frac{2}{9}N(a, b, c, d)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. Burada $L(a, b, c, d)$, $M(a, b, c, d)$ ve $N(a, b, c, d)$ Teorem 4.4'teki gibidir.

İspat. Şimdi (4.3)'ü $2f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$ 'ye uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right)g\left(x, \frac{c+d}{2}\right)dx \\
& \quad + \frac{1}{6}\left[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)g\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)g\left(b, \frac{c+d}{2}\right)\right] \\
& \quad + \frac{1}{3}\left[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)g\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)g\left(a, \frac{c+d}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) & \leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right)g\left(\frac{a+b}{2}, y\right)dy \\
& \quad + \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)g\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)g\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\right] \\
& \quad + \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)g\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)g\left(\frac{a+b}{2}, c\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) toplanır ve her iki tarafı 2 ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
8f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right)g\left(x, \frac{c+d}{2}\right)dx \\
&\quad + \frac{2}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right)g\left(\frac{a+b}{2}, y\right)dy \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[2f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)g\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + 2f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)g\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{3} \left[2f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)g\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + 2f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)g\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[2f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)g\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right. \\
&\quad \left. + 2f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)g\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{3} \left[2f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)g\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right. \\
&\quad \left. + 2f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)g\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. Parantez içindeki her bir terime (4.3) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
2f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)g\left(a, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y)g(a, y)dy \\
&\quad + \frac{1}{6} [f(a, c)g(a, c) + f(a, d)g(a, d)] \\
&\quad + \frac{1}{3} [f(a, c)g(a, d) + f(a, d)g(a, c)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)g\left(b, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y)g(b, y)dy \\
&\quad + \frac{1}{6} [f(b, c)g(b, c) + f(b, d)g(b, d)] \\
&\quad + \frac{1}{3} [f(b, c)g(b, d) + f(b, d)g(b, c)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)g\left(b, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y)g(b, y)dy \\
&+ \frac{1}{6} [f(a, c)g(b, c) + f(a, d)g(b, d)] \\
&+ \frac{1}{3} [f(a, c)g(b, d) + f(a, d)g(b, c)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)g\left(a, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y)g(a, y)dy \\
&+ \frac{1}{6} [f(b, c)g(a, c) + f(b, d)g(a, d)] \\
&+ \frac{1}{3} [f(b, c)g(b, d) + f(b, d)g(a, c)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)g\left(\frac{a+b}{2}, c\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c)g(x, c)dx \\
&+ \frac{1}{6} [f(a, c)g(a, c) + f(b, c)g(b, c)] \\
&+ \frac{1}{3} [f(a, c)g(b, c) + f(b, c)g(a, c)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)g\left(\frac{a+b}{2}, d\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d)g(x, d)dx \\
&+ \frac{1}{6} [f(a, d)g(a, d) + f(b, d)g(b, d)] \\
&+ \frac{1}{3} [f(a, d)g(b, d) + f(b, d)g(a, d)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)g\left(\frac{a+b}{2}, d\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c)g(x, d)dx \\
&+ \frac{1}{6}[f(a, c)g(a, d) + f(b, c)g(b, d)] \\
&+ \frac{1}{3}[f(a, c)g(b, d) + f(b, c)g(a, d)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)g\left(\frac{a+b}{2}, c\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d)g(x, c)dx \\
&+ \frac{1}{6}[f(a, d)g(a, c) + f(b, d)g(b, c)] \\
&+ \frac{1}{3}[f(a, d)g(b, c) + f(b, d)g(a, c)]
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikleri (4.9)'da yerine konulursa ve sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned}
8f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right)g\left(x, \frac{c+d}{2}\right)dx \\
&+ \frac{2}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right)g\left(\frac{a+b}{2}, y\right)dy \\
&+ \frac{1}{6} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y)g(a, y)dy + \frac{1}{6} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y)g(b, y)dy \\
&+ \frac{1}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y)g(b, y)dy + \frac{1}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y)g(a, y)dy \\
&+ \frac{1}{6} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c)g(x, c)dx + \frac{1}{6} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d)g(x, d)dx \\
&+ \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c)g(x, d)dx + \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d)g(x, c)dx
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{18}L(a, b, c, d) + \frac{1}{9}M(a, b, c, d) + \frac{2}{9}N(a, b, c, d) \quad (4.10)$$

elde edilir. Şimdi (4.3)'ü $2f\left(\frac{a+b}{2}, y\right)g\left(\frac{a+b}{2}, y\right)$ ye uygulanırsa, $[c, d]$ üzerinde integrali alınır ve her iki tarafı $(d - c)$ 'ye bölünürse,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) g\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dy dx \\ & + \frac{1}{6} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) g(a, y) dy + \frac{1}{6} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) g(b, y) dy \\ & + \frac{1}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) g(b, y) dy + \frac{1}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) g(a, y) dy \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Şimdi (4.3)'ü $2f\left(x, \frac{c+d}{2}\right)g\left(x, \frac{c+d}{2}\right)$ ye uygulanırsa, $[a, b]$ üzerinde integrali alınır ve her iki tarafı da $(b - a)$ 'ya bölünürse,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) g\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\ & \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dy dx \\ & + \frac{1}{6} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, c) dx + \frac{1}{6} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, d) dx \\ & + \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, d) dx + \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, c) dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.10) ve (4.11) eklenirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{b-a} \int_c^d f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) g\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\
& + \frac{2}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) g\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \leq \frac{2}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dy dx \\
& + \frac{1}{6} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) g(a, y) dy + \frac{1}{6} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) g(b, y) dy \\
& + \frac{1}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) g(b, y) dy + \frac{1}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) g(a, y) dy \\
& + \frac{1}{6} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, c) dx + \frac{1}{6} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, d) dx \\
& + \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, d) dx + \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, c) dx
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olur. Böylece (4.10) ve (4.13)'dan,

$$\begin{aligned}
& 8f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{2}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dx dy \\
& + \frac{1}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) g(a, y) dy + \frac{1}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) g(b, y) dy \\
& + \frac{2}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) g(b, y) dy + \frac{2}{3} \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) g(a, y) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, c) dx + \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, d) dx \\
& + \frac{2}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) g(x, d) dx + \frac{2}{3} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) g(x, c) dx \\
& + \frac{1}{18} L(a, b, c, d) + \frac{1}{9} M(a, b, c, d) + \frac{2}{9} N(a, b, c, d)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olur. (4.12)'deki integrallerin her birine (4.3) kullanılırsa ve sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned}
& 8f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{2}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dy dx \\
& + \frac{5}{18} L(a, b, c, d) + \frac{7}{18} M(a, b, c, d) + \frac{4}{9} N(a, b, c, d)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Her iki tarafı 2'ye bölünürse,

$$\begin{aligned}
& 4f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) g(x, y) dx dy \\
& + \frac{5}{36} L(a, b, c, d) + \frac{7}{36} M(a, b, c, d) + \frac{2}{9} N(a, b, c, d)
\end{aligned}$$

(4.5)'dir ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

5. KOORDİNATLARDA KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde M. Z. SARIKAYA, E. SET, M. E. ÖZDEMİR ve S. S. DARAGOMİR tarafından elde edilen koordinatlar üzerinde 2-değişkenli konveks fonksiyonların bazı Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikleri verilmiştir.

5.1. KOORDİNATLARA GÖRE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Bu kısımda, koordinatlar üzerinde 2 değişkenli konveks fonksiyonlar için verilen (3.3) Hadamard eşitsizliğindeki 3. ve 4. eşitsizlikler arasındaki ilişkiyi verecek olan yeni eşitsizlikler verilecektir. Bu eşitsizliklerin elde edilmesi için kullanılacak olan aşağıdaki özdeşlik ile başlanılacak.

Lemma 5.1. $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde $\mathbb{R}^{2'}$ 'de $a < b$ ve $c < d$ ile kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L(\Delta)$ ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir,

$$\begin{aligned} & \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right] \\ & = \frac{(b-a)(d-c)}{4} \int_0^1 \int_0^1 (1-2t)(1-2s) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (ta + (1-t)b, sc \\ & \quad + (1-s)d) dt ds. \end{aligned} \tag{5.1}$$

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 (1-2s)(1-2t) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) dt ds \\
&= \int_0^1 (1-2s) \left\{ (1-2t) \frac{1}{a-b} \frac{\partial f}{\partial s} (ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{a-b} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s} (ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) dt \right\} ds \\
&= \int_0^1 (1-2s) \left\{ -\frac{1}{a-b} \frac{\partial f}{\partial s} (a, sc + (1-s)d) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{a-b} \frac{\partial f}{\partial s} (b, sc + (1-s)d) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{a-b} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s} (ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) dt \right\} ds \\
&= \frac{1}{b-a} \left\{ \int_0^1 (1-2s) \left(\frac{\partial f}{\partial s} (a, sc + (1-s)d) + \frac{\partial f}{\partial s} (b, sc + (1-s)d) \right) ds \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^1 \int_0^1 (1-2s) \frac{\partial f}{\partial s} (ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) dt ds \right\}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir. Böylece yine (5.2)'nin sağ tarafındaki kısımlar için yine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (1-2s) \left(\frac{\partial f}{\partial s} (a, sc + (1-s)d) + \frac{\partial f}{\partial s} (b, sc + (1-s)d) \right) ds \\
&\quad - 2 \int_0^1 \int_0^1 (1-2s) \frac{\partial f}{\partial s} (ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) dt ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-2s) \frac{(f(a, sc + (1-s)d) + f(b, sc + (1-s)d))}{c-d} \Big|_0^1 \\
&\quad + \frac{2}{c-d} \int_0^1 (f(a, sc + (1-s)d) + f(b, sc + (1-s)d)) ds \\
&\quad - 2 \int_0^1 \left\{ (1-2s) \frac{f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d)}{c-d} \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{c-d} \int_0^1 f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds \right\} dt \\
&\quad = -\frac{f(a, c) + f(b, c)}{c-d} - \frac{f(a, d) + f(b, d)}{c-d} \\
&\quad + \frac{2}{c-d} \int_0^1 (f(a, sc + (1-s)d) + f(b, sc + (1-s)d)) ds \\
&\quad - 2 \int_0^1 \left\{ -\frac{f(ta + (1-t)b, c)}{c-d} - \frac{f(ta + (1-t)b, d)}{c-d} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{c-d} \int_0^1 f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds \right\} dt \\
&\quad = \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{(d-c)} \\
&\quad + \frac{4}{(d-c)} \int_0^1 \int_0^1 f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds dt \\
&\quad - \frac{2}{(d-c)} \left\{ \int_0^1 (f(a, sc + (1-s)d) + f(b, sc + (1-s)d)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 (f(ta + (1-t)b, c) + f(ta + (1-t)b, d)) dt \right\}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

olur. Burada $t, s \in [0,1]^2$ için $x = ta + (1-t)b$ ve $y = sc + (1-s)d$ değişken değişimi kullanılırsa ve (5.2)'de (5.3) yazılırsa $\frac{(b-a)(d-c)}{4}$ ile ispatı tamamlanarak (5.1)

elde edilir.

Teorem 5.1. $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun, $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde $\mathbb{R}^{2'}$ 'de $a < b$ ve $c < d$ olacak şekilde kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$, Δ üzerinde konveks fonksiyon ise,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \\ & \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|}{4} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right] \quad (5.4)$$

dir.

İspat. Lemma 5.1'den,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4} \\ & \times \int_0^1 \int_0^1 |(1-2t)(1-2s)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right| dt ds. \end{aligned}$$

$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlara göre konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4} \\
& \times \int_0^1 \left[\int_0^1 |(1-2t)(1-2s)| \left\{ t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right| \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right| \right\} dt \right] ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, yukarıdaki eşitsizlikteki integral hesaplanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |1-2t| \left\{ t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right| + (1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right| \right\} dt \\
& = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t) \left\{ t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right| + (1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right| \right\} dt \\
& + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1) \left\{ t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right| + (1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right| \right\} dt \\
& = \frac{1}{4} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right| \right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece şunlar elde edilir,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16}
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^1 |1-2s| \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right| \right\} ds .$$

(5.5)

Diğer integral için benzer bir yol, $f: \Delta \rightarrow R$, Δ üzerinde konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |1-2s| \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right| \right\} ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2s) \left\{ s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| \right\} ds \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2s) \left\{ s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right\} ds \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (2s-1) \left\{ s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| \right\} ds \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (2s-1) \left\{ s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right| \right\} ds \\ &= \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|}{4} \end{aligned}$$

(5.6)

ulaşılır. Böylece (5.5) ve (5.6) eşitsizlikleri ile (5.4) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.2. $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun. $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde $\mathbb{R}^{2'}$ 'de $a < b$ ve $c < d$ olacak şekilde kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$, $q > 1$ olacak şekilde Δ üzerindeki koordinatlarda konveks bir fonksiyon ise, o zaman şu eşitsizlik;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} \right. \\
& \left. + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
& \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, d) \right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right] \quad (5.7)$$

olur ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat. Lemma 5.1'den,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4} \\
& \times \int_0^1 \int_0^1 |(1-2t)(1-2s)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right| dt ds
\end{aligned}$$

olur. Çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılırsa; $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlara göre konvektir. O halde,

$$\left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-2t)(1-2s)|^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

dur. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$; Δ üzerindeki koordinatlarda konveks bir fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right|^q \\ \leq t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right|^q + (1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right|^q$$

ve

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right|^q \\ \leq ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \\ + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\ \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\ \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left\{ ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \right. \\ \left. \left. + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right\} dt ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(b-a)(d-c)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\ \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(b, d) \right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur.

Teorem 5.3. $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun. $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde $\mathbb{R}^2$ 'de $a < b$ ve $c < d$ olacak şekilde kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$, $q \geq 1$ olacak şekilde Δ üzerindeki koordinatlarda konveks bir fonksiyon ise, o zaman şu eşitsizlik elde edilir,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \\ & \quad \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

buradan

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, c) + f(x, d)] dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d [f(a, y) + f(b, y)] dy \right] \quad (5.8)$$

dir.

İspat. Lemma 5.1'den,

$$\left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4}$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 |(1-2t)(1-2s)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right| dt ds$$

olur. Çift katlı integraller için ortalama güç eşitsizliği kullanılırsa; $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlara göre konvektir. O halde,

$$\left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-2t)(1-2s)| dt ds \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-2t)(1-2s)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$, Δ üzerindeki koordinatlarda konveks bir fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ için

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right|^q$$

$$\leq t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, sc + (1-s)d) \right|^q + (1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, sc + (1-s)d) \right|^q$$

ve

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right|^q$$

$$\leq ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q +$$

$$(1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-2t)(1-2s)| \left\{ ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right\} dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikteki integral hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |1-2t| \left(ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \\ & \quad \left. + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right) dt \\ & = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t) \left(ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \\ & \quad \left. + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right) dt \\ & + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1) \left(ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \\ & \quad \left. + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q}{24} + \frac{(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q}{24} \\
&+ \frac{5s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q}{24} + \frac{5(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q}{24} \\
&+ \frac{5s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q}{24} + \frac{5(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q}{24} \\
&+ \frac{s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q}{24} + \frac{(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q}{24} \\
&= \frac{s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q}{4} \\
&+ \frac{s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx - A \right| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \\
&\left[\int_0^1 |1-2s| \left(s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right) ds \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

olur. Diğer integral içinde benzer şekilde, $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ üzerinde koordinatlara göre konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |1-2s| \left(s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right) ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2s) \left(s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right) ds \\
&+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (2s-1) \left(s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q \right) ds \\
&= \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q}{24} + \frac{5 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q}{24} + \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q}{24} + \frac{5 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q}{24} \\
&+ \frac{5 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q}{24} + \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q}{24} + \frac{5 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q}{24} + \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q}{24} \\
&= \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b, d) \right|^q}{4} \tag{5.10}
\end{aligned}$$

ulaşılır. (5.9) ve (5.10) eşitsizlikleri ile (5.8) eşitsizliği elde edilir.

Açıklama 5.1. $\frac{1}{4} < \frac{1}{(p+1)^{\frac{2}{p}}} < 1$ ise $p > 1$ olduğundan, Teorem 5.3'te verilen sonuç,

Teorem 5.2'de verilenden daha iyidir.

6. TÜREVLENEBİLİR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde M. A. LATİF ve S. S. DRAGOMİR tarafından elde edilen türevlenebilir konveks fonksiyonlar için bazı yeni eşitsizlikler verilmiştir.

6.1. GİRİŞ

Yakın tarihli bir makalede [26], Sarıkaya ve ark. $\mathbb{R}^2$ de türevlenebilir koordinatlara göre konveks fonksiyonlar için (3.3)'deki orta ve en sağdaki terimler arasındaki farkın tahminini veren bazı yeni eşitsizlikleri kanıtladı. Bu bölümde, [26]'da verilen kavramdan hareketle, $\mathbb{R}^2$ de türevlenebilir konveks fonksiyonlar için (3.3)'deki orta ve en soldaki terimler arasında tahmini veren bazı yeni eşitsizlikleri kanıtlanacaktır.

6.2. ANA SONUÇLAR

Aşağıdaki Lemma ana sonuçları oluşturmada önemli bir rol oynar,

Lemma 6.1. $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ ve $c < d$ olacak şekilde $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde kısmi türevlenebilir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \in L(\Delta)$ ise, O halde;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ & - \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\ & = (b-a)(d-c) \int_0^1 \int_0^1 K(t, s) \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds dt, \end{aligned}$$

vardır. Buradan,

$$K(t, s) = \begin{cases} ts, & (t, s) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \\ t(s-1), & (t, s) \in [0, \frac{1}{2}] \times (\frac{1}{2}, 1] \\ s(t-1), & (t, s) \in (\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \\ (t-1)(s-1), & (t, s) \in (\frac{1}{2}, 1] \times (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (6.1)$$

olur.

İspat.

$$\begin{aligned} & (b-a)(d-c) \int_0^1 \int_0^1 K(t, s) \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds dt \\ &= (b-a)(d-c) \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} ts \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds dt \\ &+ (b-a)(d-c) \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 t(s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds dt \\ &+ (b-a)(d-c) \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} s(t-1) \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds dt \\ &+ (b-a)(d-c) \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)(s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b, sc \\ &\quad + (1-s)d) ds dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (6.2)$$

olur. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned}
I_1 &= (b-a)(d-c) \int_0^{\frac{1}{2}} t \left[\int_0^{\frac{1}{2}} s \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds \right] dt \\
&= \frac{1}{4} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(ta + (1-t)b, \frac{c+d}{2}\right) dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}, sc + (1-s)d\right) ds \\
&\quad + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) ds dt
\end{aligned} \tag{6.3}$$

elde edilir. (6.3)'te, $(t, s) \in [0,1]^2$ için $x = ta + (1-t)b$ ve $y = sc + (1-s)d$ değişken değiştirmeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{4} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{1}{2(b-a)} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\
&\quad - \frac{1}{2(d-c)} \int_{\frac{c+d}{2}}^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \int_{\frac{c+d}{2}}^d f(x, y) dy dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde parçalara göre entegrasyon ile,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{4} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{1}{2(b-a)} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\
&\quad - \frac{1}{2(d-c)} \int_c^{\frac{c+d}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \int_c^{\frac{c+d}{2}} f(x, y) dy dx, \\
I_3 &= \frac{1}{4} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{1}{2(b-a)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2(d-c)} \int_{\frac{c+d}{2}}^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \int_{\frac{c+d}{2}}^d f(x, y) dy dx$$

ve

$$I_4 = \frac{1}{4} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{1}{2(b-a)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx$$

$$- \frac{1}{2(d-c)} \int_c^{\frac{c+d}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \int_c^{\frac{c+d}{2}} f(x, y) dy dx.$$

olur. (6.2)'deki I_1, I_2, I_3 ve I_4 değişken değiştirmesi, (6.1)'i verir.

Teorem 6.1. $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ ve $c < d$ olacak şekilde $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde kısmi türevlenebilir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \right|$, Δ üzerindeki koordinatlarda konveks ise aşağıdaki eşitsizlik,

$$\left| \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{16}.$$

$$\left[\frac{\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right|}{4} \right]$$

vardır. Buradan,

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy. \quad (6.4)$$

İspat. Lemma 6.1'den,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \right| \\
& \leq (b-a)(d-c) \int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b \right. \\
& \quad \left. + sc + (1-s)d) \right| ds dt
\end{aligned} \tag{6.5}$$

elde edilir. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \right|$, Δ üzerindeki koordinatlarda konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t)b + sc + (1-s)d) \right| \\
& \leq ts \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right| + t(1-s) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right| \\
& \quad + s(1-t) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right| + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right|
\end{aligned} \tag{6.6}$$

olur. (6.6), (6.5)'te yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \right| \\
& \leq (b-a)(d-c) \int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| \left[\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right| ts + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right| t(1-s) \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right| s(1-t) + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right| (1-t)(1-s) \right] ds dt \\
& = (b-a)(d-c) \\
& \quad \times \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} ts \left[\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right| ts + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right| t(1-s) + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right| s(1-t) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right| (1-t)(1-s) \right] ds dt \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-s) \left[\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right| ts + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right| t(1-s) + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right| s(1-t) \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right| (1-t)(1-s) \right] ds dt \\
& + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} s(1-t) \left[\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right| ts + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right| t(1-s) \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right| s(1-t) \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right| (1-t)(1-s) \right] ds dt \\
& + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)(1-s) \left[\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right| ts + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right| t(1-s) \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right| s(1-t) \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right| (1-t)(1-s) \right] ds dt \} \tag{6.7}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini verir. (6.7)'deki her bir integrali değerlendirip sadeleştirilirse (6.4) elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 6.2. $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ ve $c < d$ olacak şekilde $\Delta := [a, b] \times [c, d]$

üzerinde kısmi türevlenebilir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \right|^q$, Δ üzerindeki koordinatlarda konveks ve $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \right| \\
& \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}}.
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(b, d) \right|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \quad (6.8)$$

Burada A,

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy.$$

İspat. Lemma 6.1'den,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \right| \\ & \leq (b-a)(d-c) \int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right| ds dt \end{aligned} \quad (6.9)$$

olur. Şimdi çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right| ds dt \\ & \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)|^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1-s)d) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

elde edilir. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \right|^q$, Δ üzerinde konveks olduğundan;

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right|^q ds dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \left[ts \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + s(1-t) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right|^q \right] ds dt \\
&= \frac{\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right|^q}{4} \\
&\hspace{15cm} (6.11)
\end{aligned}$$

vardır. Ayrıca şu fark edilir,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)|^p ds dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} t^p s^p ds dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^p (1-s)^p ds dt \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} s^p (1-t)^p ds dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p (1-s)^p ds dt \\
&= \frac{4}{(p+1)^2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2(p+1)} \\
&\hspace{15cm} (6.12)
\end{aligned}$$

Böylece (6.10)'da (6.11) ve (6.12) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right| ds dt \\
&\leq \frac{1}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \left[\frac{\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.9) da ki son eşitsizliği kullanmak bize (6.8)'i verir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 6.3. $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ ve $c < d$ olacak şekilde $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde kısmi türevlenebilir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \right|^q$, Δ üzerindeki koordinatlarda konveks ve $q \geq 1$, ise aşağıdaki eşitsizlik,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(d-c)}{16} \left[\frac{\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(b, d) \right|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (6.13)$$

olur. Burada A,

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy.$$

İspat. Lemma 6.1'i kullanarak,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx + f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - A \right| \\ & \leq (b-a)(d-c) \int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right| ds dt. \end{aligned} \quad (6.14)$$

elde edilir. Ortalama güç eşitsizliği ile,

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(t, s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right| ds dt$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| ds dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(\frac{1}{16} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1-s)d) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \right|^q$ 'in Δ üzerinde konveks olduğu kullanılırsa şu elde edilir,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right|^q \\
& = ts \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right|^q + s(1-t) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right|^q \\
& \quad + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right|^q.
\end{aligned}$$

Ve dolayısıyla buradan,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right|^q ds dt \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| \left[ts \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + s(1-t) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right|^q + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right|^q \right] ds dt \\
& = \frac{1}{64} \left[\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(b, d) \right|^q \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle (6.15),

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)| \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(ta + (1-t), sc + (1-s)d) \right| ds dt \\
& \leq \frac{1}{16} \left[\frac{\left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (a, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (a, d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (b, c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (b, d) \right|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

olur. (6.16)'nın (6.14)'de yerine konulması ile (6.13) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Açıklama 6.1. $p > 1$ olacak şekilde $2^p > p + 1$ ise buna göre

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2(p+1)\frac{1}{p}}$$

olduğundan aşağıdaki eşitsizlik,

$$\frac{1}{16} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} < \frac{1}{2(p+1)\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{2(p+1)\frac{1}{p}} = \frac{1}{4(p+1)\frac{2}{p}}$$

elde edilir ve sonuç olarak Teorem 6.2'deki sabitte bir düzeltme elde edilir.

7. KOORDİNATLARDA KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENİŞLETİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, koordinatlarda konveks fonksiyonlar için önemli bir eşitsizlik elde edilecektir ve bu eşitsizliklerin bir sonucu olarak, Riemann-Liouville kesirli integral ve logaritmik integral için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri verilmiştir. Bu çalışmada elde edilen eşitsizlikler, daha önceki çalışmalarda verilen bazı sonuçların genelleştirilmesini sağlar.

7.1. GİRİŞ

C. Hermite ve J. Hadamard tarafından keşfedilen Hermite-Hadamard eşitsizliği bkz. örn., [24], [27, s.137]), geometrik bir yorum ve birçok uygulama ile konveks fonksiyonlar teorisindeki en iyi kurulmuş eşitsizliklerden biridir. Bu eşitsizlikler eğer; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, reel sayıların I aralığında ve $a < b$ olacak şekilde $a, b \in I$ ise, o halde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği vardır. f konkav ise her iki eşitsizlik de ters yönde geçerlidir. Hermite-Hadamard eşitsizliğinin konvekslik kavramının bir inceltilmiş hali olarak görülebileceğini ve bunun Jensen eşitsizliğinden kolayca çıktığını görüyoruz. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği son yıllarda yeniden ilgi gördü ve dikkate değer çeşitlilikte iyileştirmeler ve genellemeler üzerinde çalışıldı (bakınız örneğin, [28], [29]-[30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37]).

Koordinatlarda konveks fonksiyonlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Şimdi $\mathbb{R}^2$ 'de $a < b$ ve $c < d$ olan bir iki boyutlu $\Delta =: [a, b] \times [c, d]$ aralığı ele alınsın. Aşağıdaki eşitsizlik,

$$f(tx + (1-t)z, ty + (1-t)w) \leq tf(x, y) + (1-t)f(z, w)$$

Her $(x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $t \in [0, 1]$ için geçerliyse, $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün Δ üzerinde

konveks olduğu söylenir. Bir $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, $f_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(u) = f(u, y)$ ve $f_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(v) = f(x, v)$ kısmi dönüşümleri tüm $x \in [a, b]$ ve $y \in [c, d]$ için tanımlandığı yerde konveks ise, Δ üzerindeki koordinatlarda olduğu söylenir (bkz. [8]).

Tanım 7.1. Bir $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t, s \in [0, 1]$ ve $(x, y), (u, w) \in \Delta$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerliyse f, Δ üzerindeki koordinatlarda konvektir;

$$\begin{aligned} & f(tx + (1-t)y, su + (1-s)w) \\ & \leq tsf(x, u) + s(1-t)f(y, u) + t(1-s)f(x, w) \\ & \quad + (1-t)(1-s)f(y, w). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Açıkça, her konveks fonksiyon koordinatlarda konveksdir. Ayrıca koordinatlarda konveks olmayan, konveks fonksiyon vardır (bkz., [8]). Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili birkaç yeni sonuç için $\mathbb{R}^2$ üzerindeki koordinatlarda bazı konveks fonksiyonlar için ([38], [39], [40], [52], [43], [44]-[45], [46], [47], [48], [49], [50], [51])'a bakınız.

Şimdi, iki değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrallerinin tanımları verilecektir.

Tanım 7.2. $f \in L_1([a, b] \times [c, d])$ olsun. Riemann-Liouville kesirli integralleri $\mathcal{J}_{a+, c+}^{\alpha, \beta}$, $\mathcal{J}_{a+, d-}^{\alpha, \beta}$, $\mathcal{J}_{b-, c+}^{\alpha, \beta}$ ve $\mathcal{J}_{b-, d-}^{\alpha, \beta}$ şu şekilde tanımlanır,

$$\mathcal{J}_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{\alpha-1} (y-s)^{\beta-1} f(t, s) ds dt, \quad x > a, \quad y > c,$$

$$\mathcal{J}_{a+, d-}^{\alpha, \beta} f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_y^d (x-t)^{\alpha-1} (s-y)^{\beta-1} f(t, s) ds dt, \quad x > a, \quad y < d,$$

$$\mathcal{J}_{b-, c+}^{\alpha, \beta} f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \int_c^y (t-x)^{\alpha-1} (y-s)^{\beta-1} f(t, s) ds dt, \quad x < b, \quad y > c,$$

ve

$$\mathcal{J}_{b-, d-}^{\alpha, \beta} f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \int_y^d (t-x)^{\alpha-1} (s-y)^{\beta-1} f(t, s) ds dt, \quad x < b, \quad y < d.$$

[46]. Yukarıdaki tanımlara benzer şekilde,

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} f(x, c) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, c) dt, \quad x > a,$$

$$\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} f(x, d) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, d) dt, \quad x > a,$$

$$\mathcal{J}_{c+}^{\beta} f(a, y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_c^y (y-s)^{\beta-1} f(a, s) ds, \quad y > c,$$

ve

$$\mathcal{J}_{d-}^{\beta} f(b, y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_y^d (s-y)^{\beta-1} f(b, s) ds, \quad y < d.$$

integralleri verilebilir. ([38], [41], [42], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [49], [50], [60], [61]-[62])’deki Riemann-Liouville kesirli integralleri aracılığıyla bir ve iki değişkenli fonksiyonlar için bazı güncel Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri bulunabilir. Bu bölümde sunulan sonuçlar [8] ve [46]’da verilenlerin genişletilmesini sağlamaktadır.

[63]’de Zabandan, Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ile ilgili aşağıdaki önemli eşitsizlikleri vermiş ve bu eşitsizliklerin özel durumları ile ilgili birkaç eşitsizlik vermiştir.

Teorem 7.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ üzerinde pozitif bir konveks fonksiyon olsun ve $h: [0,1] \rightarrow$ pozitif bir fonksiyon olsun, öyle ki $h \in ([0,1])$ dir. O halde aşağıdaki eşitsizlik

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2I_h(b-a)} \int_a^b \left[h\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + h\left(\frac{b-x}{b-a}\right) \right] f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (7.2)$$

olur. Burada,

$$I_h = \int_0^1 h(t) dt$$

olarak tanımlanır.

7.2. ANA SONUÇLAR

Bu bölüm boyunca aşağıdaki semboller kullanılacaktır,

$$H_1(x) = h_1\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + h_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

$$H_2(y) = h_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) + h_2\left(\frac{y-c}{d-c}\right)$$

ve

$$I_{h_1} = \int_0^1 h_1(t)dt \text{ ve } I_{h_2} = \int_0^1 h_2(s)ds.$$

Bu kısımda koordinatlar üzerinde 2 değişkenli konveks fonksiyonları kullanarak aşağıdaki eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 7.2. $f: \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$ ve $f \in L_1(\Delta)$, $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerinde konveks olsun. Ve $h_1, h_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in L([0, 1])$ olacak şekilde iki pozitif fonksiyon olsun. O halde,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{4I_{h_1}I_{h_2}(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d H_1(x) H_2(y) f(x, y) dy dx \\ &\leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4} \end{aligned} \quad (7.3)$$

vardır.

İspat. (7.1)'ye $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$, $u = sc + (1-s)d$, $w = (1-s)c + sd$ ve $t = s = \frac{1}{2}$ ile,

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{4} [f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) + f(ta + (1-t)b, (1-s)c + sd) \\ &\quad + f((1-t)a + tb, sc + (1-s)d) + f((1-t)a + tb, (1-s)c + sd)] \end{aligned} \quad (7.4)$$

bulunur. Böylece, (7.4)'ün her iki tarafı $h_1(t) h_2(s)$ ile çarpılırsa ve (t, s) 'ye göre $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \int_0^1 \int_0^1 h_1(t) h_2(s) ds dt \\
& \leq \frac{1}{4} \left[\int_0^1 \int_0^1 h_1(t) h_2(s) [f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \right. \\
& \quad \left. + f(ta + (1-t)b, (1-s)c + sd)] ds dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 h_1(t) h_2(s) [f((1-t)a + tb, sc + (1-s)d) \right. \\
& \quad \left. + f((1-t)a + tb, (1-s)c + sd)] ds dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Değişken değişimi kullanılırsa, ilk eşitsizliğin ispatlandığı;

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \int_0^1 \int_0^1 h_1(t) h_2(s) ds dt \\
& \leq \frac{1}{4(b-a)(d-c)} \left\{ \int_a^b \int_c^d h_1\left(\frac{b-x}{b-a}\right) h_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) f(x, y) dy dx \right. \\
& \quad + \int_a^b \int_c^d h_1\left(\frac{b-x}{b-a}\right) h_2\left(\frac{y-c}{d-c}\right) f(x, y) dy dx \\
& \quad + \int_a^b \int_c^d h_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) h_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) f(x, y) dy dx \\
& \quad \left. + \int_a^b \int_c^d h_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) h_2\left(\frac{y-c}{d-c}\right) f(x, y) dy dx \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (7.3)'teki ikinci eşitsizliğin ispatı için f nin Δ üzerinde bir konveks fonksiyon olması durumunda, (7.1)'i $x = a, y = b, u = c$ ve $w = d$ ile kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) \\
& \leq tsf(a, c) + s(1-t)f(b, c) + t(1-s)f(a, d) \\
& + (1-t)(1-s)f(b, d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(ta + (1-t)b, (1-s)c + sd) \\
& \leq t(1-s)f(a, c) + (1-t)(1-s)f(b, c) + tsf(a, d) \\
& + (1-t)sf(b, d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f((1-t)a + tb, sc + (1-s)d) \\
& \leq (1-t)sf(a, c) + stf(b, c) + (1-t)(1-s)f(a, d) \\
& + t(1-s)f(b, d)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& f((1-t)a + tb, (1-s)c + sd) \\
& \leq (1-t)(1-s)f(a, c) + t(1-s)f(b, c) + (1-t)sf(a, d) \\
& + tsf(b, d)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler toplanılırsa,

$$\begin{aligned}
& f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) + f(ta + (1-t)b, (1-s)c + sd) \\
& + f((1-t)a + tb, sc + (1-s)d) + f((1-t)a + tb, (1-s)c + sd) \\
& \leq f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d)
\end{aligned} \tag{7.5}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Daha sonra, (7.5)'in her iki tarafını $h_1(t) h_2(s)$ ile çarpılırsa ve

(t, s)'ye göre $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 h_1(t) h_2(s) [f(ta + (1-t)b, sc + (1-s)d) + f(ta + (1-t)b, (1-s)c + sd) \\
& + f((1-t)a + tb, sc + (1-s)d) + f((1-t)a + tb, (1-s)c + sd)] ds dt \\
& \leq [f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d)] \int_0^1 \int_0^1 h_1(t) h_2(s) ds dt
\end{aligned}$$

olur. Burada değişken değişimi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4(b-a)(d-c)} \left\{ \int_a^b \int_c^d h_1\left(\frac{b-x}{b-a}\right) h_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) f(x,y) dy dx \right. \\
& + \int_a^b \int_c^d h_1\left(\frac{b-x}{b-a}\right) h_2\left(\frac{y-c}{d-c}\right) f(x,y) dy dx \\
& + \int_a^b \int_c^d h_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) h_2\left(\frac{d-y}{d-c}\right) f(x,y) dy dx \\
& \left. + \int_a^b \int_c^d h_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) h_2\left(\frac{y-c}{d-c}\right) f(x,y) dy dx \right\} \\
& \leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4} \int_0^1 \int_0^1 h_1(t) h_2(s) ds dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Açıklama 7.1. Teorem 7.2'de,

(i) $[0,1]$ üzerinde $h_1(t) = t, h_2(s) = s$ seçersek, Sarıkaya ve Yıldız tarafından [28]'de kanıtlanan;

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \\
& \leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}, \tag{7.6}
\end{aligned}$$

eşitsizliği olur.

(ii) $[0,1]$ üzerinde $h_1(t) = t^{\alpha-1}$ ($\alpha > 0$), $h_2(s) = s^{\beta-1}$ ($\beta > 0$) seçilirse; O halde (7.3) eşitsizliği Sarıkaya tarafından [46]'da kanıtlanan kesirli integral eşitsizlikleri,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} \left[\mathcal{J}_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f(b,d) + \mathcal{J}_{a+,d-}^{\alpha,\beta} f(b,c) + \mathcal{J}_{b-,c+}^{\alpha,\beta} f(a,d) \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{J}_{b-,d-}^{\alpha,\beta} f(a,c) \right] \\
& \leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 7.1. $[0,1]$ üzerinde $h_1(t) = (-\ln t)^{\alpha-1}$ ($\alpha > 0$), $h_2(s) = (-\ln s)^{\beta-1}$ ($\beta > 0$) ile Teorem 7.2 varsayımı altında, aşağıdaki logaritmik integral eşitsizlikleri,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(b-a)(d-c)} \\
& \quad \times \int_a^b \int_c^d \left[\left[\ln\left(\frac{b-a}{b-x}\right) \right]^{\alpha-1} + \left[\ln\left(\frac{b-a}{x-a}\right) \right]^{\alpha-1} \right] \\
& \quad \times \left[\left[\ln\left(\frac{d-c}{d-y}\right) \right]^{\beta-1} + \left[\ln\left(\frac{d-c}{y-c}\right) \right]^{\beta-1} \right] f(x,y) dy dx \\
& \leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

elde edilir.

Sonuç 7.2. $f: \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_1(\Delta)$ ve $0 \leq a < b, 0 \leq c < d$ olacak şekilde $\mathbb{R}^{2'}$ de $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerindeki koordinatlarda konveks olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4(b-a)(d-c)} \\
&\times \int_a^b \int_c^d \left[\left[\ln \left(\frac{b-a}{b-x} \right) \right] + \left[\ln \left(\frac{b-a}{x-a} \right) \right] \right] \\
&\times \left[\left[\ln \left(\frac{d-c}{d-y} \right) \right] + \left[\ln \left(\frac{d-c}{y-c} \right) \right] \right] f(x,y) dy dx \\
&\leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}.
\end{aligned}
\tag{7.8}$$

olur.

İspat. (7.6) dan,

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \\
&= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \left\{ \int_a^{\frac{a+b}{2}} \int_c^{\frac{c+d}{2}} f(x,y) dy dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \int_{\frac{c+d}{2}}^d f(x,y) dy dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \int_c^{\frac{c+d}{2}} f(x,y) dy dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \int_{\frac{c+d}{2}}^d f(x,y) dy dx \right\}
\end{aligned}
\tag{7.9}$$

elde edilir. (7.9)'un sağ tarafının ilk integrali $x = \frac{a+t}{2}$ ve $y = \frac{c+s}{2}$ değişkenleri değiştirilirse; (7.6) eşitsizliği kullanılarak ve Fubini Teoreminden,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \int_c^{\frac{c+d}{2}} f(x,y) dy dx = \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d f\left(\frac{a+t}{2}, \frac{c+s}{2}\right) ds dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\frac{1}{(t-a)(s-c)} \int_a^t \int_c^s f(x,y) dy dx \right) ds dt \\
&= \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\int_x^b \int_y^d \frac{1}{(t-a)(s-c)} ds dt \right) f(x,y) dy dx \\
&= \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\ln \frac{b-a}{x-a} \right) \left(\ln \frac{d-c}{y-c} \right) f(x,y) dy dx.
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde sırasıyla (7.9)'un sağ tarafının diğer integrallerinde

$$x = \frac{a+t}{2} \text{ ve } y = \frac{d+s}{2}, x = \frac{b+t}{2} \text{ ve } y = \frac{c+s}{2}, x = \frac{b+t}{2} \text{ ve } y = \frac{d+s}{2}$$

değişken değişimi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}} \int_{\frac{c+d}{2}}^d f(x,y) dy dx = \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d f\left(\frac{a+t}{2}, \frac{d+s}{2}\right) ds dt \\
&\leq \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\frac{1}{(t-a)(d-s)} \int_a^t \int_s^d f(x,y) dy dx \right) ds dt \\
&= \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\ln \frac{b-a}{x-a} \right) \left(\ln \frac{d-c}{d-y} \right) f(x,y) dy dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+b}{2}}^b \int_c^{\frac{c+d}{2}} f(x,y) dy dx = \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d f\left(\frac{b+t}{2}, \frac{c+s}{2}\right) ds dt \\
&\leq \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\frac{1}{(b-t)(s-c)} \int_t^b \int_c^s f(x,y) dy dx \right) ds dt \\
&= \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\ln \frac{b-a}{b-x} \right) \left(\ln \frac{d-c}{y-c} \right) dy dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{a+b}{2}}^b \int_{\frac{c+d}{2}}^d f(x,y) dy dx &= \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d f\left(\frac{b+t}{2}, \frac{d+s}{2}\right) ds dt \\
&\leq \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\frac{1}{(b-t)(d-s)} \int_t^b \int_s^d f(x,y) dy dx \right) ds dt \\
&= \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d \left(\ln \frac{b-a}{b-x} \right) \left(\ln \frac{d-c}{d-y} \right) f(x,y) dy dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda hesaplanan integralleri (7.9) da yerine yazılırsa ve $\alpha = \beta = 2$ için (7.7)'nin son eşitsizliği kullanılırsa, (7.8) eşitsizliklerinin ispatı olarak;

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \\
&\leq \frac{1}{4(b-a)(d-c)} \left\{ \int_a^b \int_c^d \left(\ln \frac{b-a}{x-a} \right) \left(\ln \frac{d-c}{y-c} \right) f(x,y) dy dx \right. \\
&\quad + \int_a^b \int_c^d \left(\ln \frac{b-a}{x-a} \right) \left(\ln \frac{d-c}{d-y} \right) f(x,y) dy dx \\
&\quad + \int_a^b \int_c^d \left(\ln \frac{b-a}{b-x} \right) \left(\ln \frac{d-c}{y-c} \right) f(x,y) dy dx \\
&\quad \left. + \int_a^b \int_c^d \left(\ln \frac{b-a}{b-x} \right) \left(\ln \frac{d-c}{d-y} \right) f(x,y) dy dx \right\} \\
&\leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 7.3. $f: \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_1(\Delta)$ ve $0 \leq a < b, 0 \leq c < d$ olacak şekilde $\mathbb{R}^{2'}$ de $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ üzerindeki koordinatlarda konveks olsun ve $h_1, h_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$; $h_1, h_2 \in L([0,1])$ olacak şekilde iki pozitif fonksiyon olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{4I_{h_1}(b-a)} \int_a^b H_1(x) f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{4I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y) f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \leq \frac{1}{4I_{h_1}I_{h_2}(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d H_1(x)H_2(y)f(x,y)dydx \\
& \leq \frac{1}{8I_{h_1}(b-a)} \left[\int_a^b H_1(x)f(x,c)dx + \int_a^b H_1(x)f(x,d)dx \right] \\
& \quad + \frac{1}{8I_{h_2}(d-c)} \left[\int_c^d H_2(y)f(a,y)dy + \int_c^d H_2(y)f(b,y)dy \right] \\
& \leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ konveks olduğundan her $x \in [a, b]$ için $[c, d]$ üzerinde $g_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_x(y) = f(x, y)$ dönüşümlerinin konveks olduğu sonucu çıkar. Daha sonra (7.2) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$g_x\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{2I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y)g_x(y)dy \leq \frac{g_x(c) + g_x(d)}{2}, \quad x \in [a, b].$$

Yani, her $x \in [a, b]$ için;

$$\begin{aligned}
f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) & \leq \frac{1}{2I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y)f(x,y)dy \\
& \leq \frac{f(x,c) + f(x,d)}{2}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

dir. Burada (7.11)'in her iki tarafı $\frac{1}{2I_{h_1}(b-a)}H_1(x)$ ile çarpılırsa ve x 'e göre $[a, b]$ üzerinde integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2I_{h_1}(b-a)} \int_a^b H_1(x) f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\
& \leq \frac{1}{4I_{h_1}I_{h_2}(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d H_1(x)H_2(y)f(x,y)dydx \\
& \leq \frac{1}{4I_{h_1}(b-a)} \left[\int_a^b H_1(x)f(x,c)dx + \int_a^b H_1(x)f(x,d)dx \right]
\end{aligned} \tag{7.12}$$

elde edilir.

$g_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_y(x) = f(x, y)$ dönüşümü için benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y) f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \leq \frac{1}{4I_{h_1}I_{h_2}(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d H_1(x)H_2(y)f(x,y)dydx \\
& \leq \frac{1}{4I_{h_1}(d-c)} \left[\int_c^d H_2(y)f(a,y)dy + \int_c^d H_2(y)f(b,y)dy \right]
\end{aligned} \tag{7.13}$$

vardır. (7.12) ve (7.13) eşitsizlikleri toplanırsa, (7.10)'da ikinci ve üçüncü eşitsizlikleri veren şu eşitsizlik,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2I_{h_1}(b-a)} \int_a^b H_1(x) f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{2I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y) f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
& \leq \frac{1}{2I_{h_1}I_{h_2}(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d H_1(x)H_2(y)f(x,y)dydx \\
& \leq \frac{1}{4I_{h_1}(b-a)} \left[\int_a^b H_1(x)f(x,c)dx + \int_a^b H_1(x)f(x,d)dx \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4I_{h_2}(d-c)} \left[\int_c^d H_2(y) f(a, y) dy + \int_c^d H_2(y) f(b, y) dy \right]$$

elde edilir. Şimdi (7.2)'deki ilk eşitsizlik kullanılarak şunlar elde edilir;

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{2I_{h_1}(b-a)} \int_a^b H_1(x) f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{2I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y) f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy.$$

Ek olarak, (7.10)'daki ilk eşitsizliği veren,

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{4I_{h_1}(b-a)} \int_a^b H_1(x) f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{4I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y) f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy$$

vardır.

Son olarak, (7.2)'deki ikinci eşitsizlik kullanılarak ve (7.10)'da ki son eşitsizliği toplam olarak veren aşağıdaki eşitsizlik,

$$\frac{1}{2I_{h_1}(b-a)} \int_a^b H_1(x) f(x, c) dx \leq \frac{f(a, c) + f(b, c)}{2}$$

$$\frac{1}{2I_{h_1}(b-a)} \int_a^b H_1(x) f(x, d) dx \leq \frac{f(a, d) + f(b, d)}{2}$$

$$\frac{1}{2I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y) f(a, y) dy \leq \frac{f(a, c) + f(a, d)}{2}$$

ve

$$\frac{1}{2I_{h_2}(d-c)} \int_c^d H_2(y) f(b, y) dy \leq \frac{f(b, c) + f(b, d)}{2}$$

vardır.

Açıklama 7.2. Teorem (7.3)'te $h_1(t) = t, h_2(s) = s, [0,1]$ üzerinde ise, o halde (7.10)'daki eşitsizlikler, Dragomir [8] tarafından ispatlanan aşağıdaki eşitsizlik olur,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \right] \\
& \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\
& \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, c) dx \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, d) dx + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(a, y) dy + \frac{1}{d-c} \int_c^d f(b, y) dy \right] \\
& \leq \frac{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)}{4}.
\end{aligned}$$

Açıklama 7.3. Teorem (7.3)'te $h_1(t) = t^{\alpha-1} (\alpha > 0), h_2(s) = s^{\beta-1} (\beta > 0), [0,1]$ üzerinde ise o zaman (7.10) eşitsizlikleri Sarıkaya tarafından [29]'da kanıtlanan,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
& \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} \left[J_{a+}^\alpha f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + J_{b-}^\alpha f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right] \\
& \quad + \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} \left[J_{c+}^\beta f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + J_{d-}^\beta f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right] \\
& \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta} [J_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f(b, d) + J_{a+,d-}^{\alpha,\beta} f(b, c) + J_{b-,c+}^{\alpha,\beta} f(a, d) \\
& \quad + J_{b-,d-}^{\alpha,\beta} f(a, c)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b,c) + J_{a+}^\alpha f(b,d) + J_{b-}^\alpha f(a,c) + J_{b-}^\alpha f(a,d)] \\
&+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^\beta} [J_{c+}^\beta f(a,d) + J_{c+}^\beta f(b,d) + J_{d-}^\beta f(a,c) + J_{d-}^\beta f(b,c)] \\
&\leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

kesirli integral eşitsizlikleri haline gelir.

Sonuç 7.3. $[0,1]$ üzerinde $h_1(t) = (-\ln t)^{\alpha-1}$ ($\alpha > 0$), $h_2(s) = (-\ln s)^{\beta-1}$ ($\beta > 0$) ile Teorem 7.3 varsayımı altında,

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{4I_{h_1}(b-a)} \int_a^b \left[\left[\ln\left(\frac{b-a}{b-x}\right) \right]^{\alpha-1} + \left[\ln\left(\frac{b-a}{x-a}\right) \right]^{\alpha-1} \right] f\left(x, \frac{c+d}{2}\right) dx \\
&+ \frac{1}{4I_{h_2}(d-c)} \int_c^d \left[\left[\ln\left(\frac{d-c}{d-y}\right) \right]^{\beta-1} + \left[\ln\left(\frac{d-c}{y-c}\right) \right]^{\beta-1} \right] f\left(\frac{a+b}{2}, y\right) dy \\
&\leq \frac{1}{4I_{h_1}I_{h_2}(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d \left[\left[\ln\left(\frac{b-a}{b-x}\right) \right]^{\alpha-1} + \left[\ln\left(\frac{b-a}{x-a}\right) \right]^{\alpha-1} \right] \\
&\quad \times \left[\left[\ln\left(\frac{d-c}{d-y}\right) \right]^{\beta-1} + \left[\ln\left(\frac{d-c}{y-c}\right) \right]^{\beta-1} \right] f(x,y) dy dx \\
&\leq \frac{1}{8I_{h_1}(b-a)} \int_a^b \left[\left[\ln\left(\frac{b-a}{b-x}\right) \right]^{\alpha-1} + \left[\ln\left(\frac{b-a}{x-a}\right) \right]^{\alpha-1} \right] [f(x,c) + f(x,d)] dx \\
&+ \frac{1}{8I_{h_2}(d-c)} \int_c^d \left[\left[\ln\left(\frac{d-c}{d-y}\right) \right]^{\beta-1} + \left[\ln\left(\frac{d-c}{y-c}\right) \right]^{\beta-1} \right] [f(a,y) + f(b,y)] dy \\
&\leq \frac{f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

logaritmik integral eşitsizlikleri elde edilir.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma, koordinatlarda konveks fonksiyonlar için önemli bir eşitsizliği ortaya koymayı amaçlamaktadır. Bu eşitsizlik, Riemann-Liouville kesirli integral ve logaritmik integral için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin bir genişlemesi olarak görülebilir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, daha önceki çalışmalarda verilen sonuçların genelleştirilmesini de içermektedir. Bu nedenle, bu çalışma, matematiksel analiz ve sayısal analiz alanında çalışan araştırmacılar için önemli bir kaynak olabilir.

Özellikle, bu tür matematiksel analiz çalışmaları, geniş bir uygulama alanına sahiptir. Matematiksel fizik, mühendislik, istatistik gibi alanlarda da kullanılabilmektedir. Bu nedenle, bu tür matematiksel analiz çalışmalarının sonuçları, bu alanlarda çalışan araştırmacılar için de yararlı olabilir.

9. KAYNAKLAR

- [1] T. L. Heath, “The works of Archimedes,” *Courier Corporation*, 2002.
- [2] S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, “Quasi-convex functions and hadamard’s inequality,” *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 57(3):377–385, 1998.
- [3] A. M. Fink, “Hadamard’s inequality for log-concave functions,” *Mathematical and Computer Modelling*, 32(5-6):625–629, 2000.
- [4] M. Z. Sarıkaya and D. Kılıçer, “On the extension of Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinated convex mappings,” *Turkish Journal of Mathematics* 45(6):2731-2745, 2021.
- [5] I. Iscan, “Hermite-hadamard type inequalities for harmonically convex functions,” *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6):935–942, 2014.
- [6] F. Qi and B. Xi, “Some integral inequalities of simpson type for ga-convex functions,” *Georgian mathematical journal*, 20(4):775–788, 2013.
- [7] Y. Zhang, T. Du, H. Wang, and Y. Shen, “Different types of quantum integral inequalities via (alfa;m)-convexity,” *Journal of Inequalities and Applications*, 1–24, 2018.
- [8] S. S. Dragomir, “On Hadamards inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, 4: 775-788, 2001.
- [9] S. S. Dragomir, “On Hadamard's inequality for convex functions,” *Math. Balkanica* 6, 215-222. MR 934:26033, 1992.
- [10] S. S. Dragomir, “A mapping in connection to Hadamard's inequality,” *An Ostro. Akad. Wiss. Math.-Natur (Wien)*, 128, 17-20. MR 93h: 26032. ZBL No. 747: 26015, 1991.
- [11] S. S. Dragomir, “Two mappings in connection to Hadamard's inequality,” *J. Math.*

Anal. Appl., 167 (1992), 49-56. MR 93m: 26038. ZBL No. 758: 26014.

- [12] S. S. Dragomir, D. Barbu and C. Buşe, “A Probabilistic argument for the convergence of some sequences associated to Hadamard's inequality,” *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica*, 38, 29-34, 1993.
- [13] D. S. Mitrinovic, J. E. Pečarić and A. M. Fink, “Classical and New Inequalities in Analysis,” *Kluwer Academic Publishers*, 1993.
- [14] J. E. Pečarić and S. S. Dragomir, “On some integral inequalities for convex functions,” *Bull. Mat. Inst. Pol. Iasi*, 36, 19-23. MR 93i: 26019. ZBL No. 765: 26008, 1990.
- [15] J. E. Pečarić and S. S. Dragomir, “A generalisation of Hadamard's inequality for isotonic linear functionals,” *Rodovi Math. (Sarajevo)*, 7, 103-107. MR 93k: 26026. ZBL No. 738: 26006, 1991.
- [16] S. S. Dragomir, “Two refinements of Hadamard's inequalities,” *Coll. Pap. of the Fac. of Sci. Kragujevac (Yugoslavia)*, 11, 23-26. ZBL No. 729: 26017, 1990.
- [17] S. S. Dragomir, “On Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, 5, 775 – 788, 2001.
- [18] B. G. Pachpatte, “On some inequalities for convex functions,” *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 6(E), 2003.
- [19] M. Alomari and M. Darus, “Co-ordinated s-convex function in the first sense with some Hadamard-type inequalities,” *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 3 (32), 1557-1567, 2008.
- [20] M. E. Ozdemir, E. Set and M. Z. Sarikaya, “New some Hadamard's type inequalities for co-ordinated m-convex and (α, m) -convex functions,” *RGMIA, Res. Rep. Coll.*, 13, Supplement, Article 4, 2010.
- [21] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, “Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications,” *Academic Press*, New York, 1991.
- [22] M. Alomari, M. Darus, and S. S. Dragomir, “Inequalities of Hermite-Hadamard's type for functions whose derivatives absolute values are quasi-convex,” *RGMIA Res Rep Collect.* 12(suppl. 14), 2009.

- [23] C. E. M. Pearce and J. E. Pečarić, “Inequalities for differentiable mappings with applications to special means and quadrature formula,” *Appl Math Lett.* 13, 51–55, 2000.
- [24] S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications,” *RGMIA Monographs*, Victoria University, 2000.
- [25] M. A. Latif and M. Alomari, “Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates,” *Int Math Forum*, 4(47):2327–2338, 2009.
- [26] M. Z. Sarikaya, E. Set, M.E. Özdemir and S. S. Dragomir, “Some new Hadamard’s type inequalities for co-ordinated convex functions,” *Journal of Inequalities and Applications*, 2012.
- [27] S. Peng, W. Wei and J. R. Wang, “On the Hermite-Hadamard inequalities for convex functions via Hadamard fractional integrals,” *Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics*, 29 (1): 55-75, 2014.
- [28] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz and N. Basak, “Hermite -Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities,” *Mathematical and Computer Modelling*, 57: 2403-2407, 2013.
- [29] F. Chen, “A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions,” *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 935020, 1-6, 2013.
- [30] S. S. Dragomir, J. Pečarić and L. E. Persson, “Some inequalities of Hadamard type,” *Soochow Journal of Mathematics*, 21: 335-341, 1995.
- [31] U. S. Kirmacı, M. K. Bakula, M. E. Özdemir, and J. Pečarić, “Hadamard-type inequalities for s-convex functions,” *Applied Mathematics and Computation*, 193: 26-35, 2007.
- [32] B. G. Pachpatte, “On some inequalities for convex functions,” *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications*, 6 (E): 1-9, 2003.
- [33] Z. Pavić, “Improvements of the Hermite-Hadamard inequality,” *Journal of Inequalities and Applications*, (1): 1-11, 2015.
- [34] K. L. Tseng and S. R. Hwang, “New Hermite-Hadamard inequalities and their

- applications,” *Filomat*, 30 (14): 3667- 3680, 2016.
- [35] G. S. Yang and K. L. Tseng, “On certain integral inequalities related to Hermite-Hadamard inequalities,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 239: 180-187, 1999.
- [36] G. S. Yang and M. C. Hong, “A note on Hadamard’s inequality,” *Tamkang Journal of Mathematics*, 28: 33-37, 1997.
- [37] G. Zabandan, “An extension and refinement of Hermite-Hadamard inequality and related results,” *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 11 (2): 379-390, 2020.
- [38] A. Akkurt, M. Z. Sarikaya, B. Budak and H. Yildirim, “On the Hadamard’s type inequalities for co-ordinated convex functions via fractional integrals,” *Journal of King Saud University-Science*, 29: 380-387, 2017.
- [39] M. Alomari and M. Darus, “The Hadamards inequality for s-convex function of 2-variables on the coordinates,” *International Journal of Mathematical Analysis*, 2(13): 629-638, 2008.
- [40] M. K. Bakula, “An improvement of the Hermite-Hadamard inequality for functions convex on the coordinates,” *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 11 (1): 1-7, 2014.
- [41] S. Belarbi and Z. Dahmani, “On some new fractional integral inequalities,” *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics (JIPAM)*, 10 (3): 1-12, 2009.
- [42] F. Chen, “On Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex functions on the coordinates via Riemann-Liouville fractional integrals,” *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 248710, 1-8, 2014.
- [43] M. A. Latif, “Hermite-Hadamard type inequalities for GA-convex functions on the co-ordinates with applications,” *Proceedings of the Pakistan Academy of Science*, 52 (4): 367-379, 2015.
- [44] M. E. Ozdemir, C. Yildiz and A. O. Akdemir, “On the co-ordinated convex functions,” *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8 (3): 1085-1091, 2014.
- [45] M. E. Ozdemir, M. A. Latif and A. O. Akdemir, “On some Hadamard-type inequalities for product of two h-convex functions on the co-ordinates,” *Turkish*

Journal of Science, 1: 41-58, 2016.

- [46] M. Z. Sarikaya, "On the Hermite-Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex function via fractional integrals," *Integral Transforms and Special Functions*, 25 (2): 134-147, 2014.
- [47] D. Y. Wang, K. L. Tseng and G. S. Yang, "Some Hadamard's inequalities for co-ordinated convex functions in a rectangle from the plane," *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11: 63-73, 2007.
- [48] B. Y. Xi, J. Hua and F. Qi, "Hermite-Hadamard type inequalities for extended s-convex functions on the co-ordinates in a rectangle," *Journal of Applied Analysis*, 20 (1): 1-17, 2014.
- [49] H. Yaldiz, M. Z. Sarikaya and Z. Dahmani, "On the Hermite-Hadamard-Fejer-type inequalities for co-ordinated convex functions via fractional integrals," *International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, 7 (2): 205-215, 2017.
- [50] M. E. Yıldırım, A. Akkurt and H. Yıldırım, "Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinated $(\alpha_1, m_1) - (\alpha_2, m_2)$ -convex functions via fractional integrals," *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 4 (1): 48-63, 2016.
- [51] M. Z. Sarikaya, E. Set, M. E. Ozdemir and S. S. Dragomir, "New some Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions," *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 28 (2): 137-152, 2012.
- [52] M. A. Latif and M. Alomari, "Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates," *International Mathematical Forum*, 4 (47): 2327-2338, 2009.
- [53] F. A. Chen, "Note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals," *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33: 299-306, 2014.
- [54] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, "Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications," *Academic Press*, Boston, 1992.
- [55] M. Z. Sarikaya and H. Budak, "Generalized Hermite-Hadamard type integral inequalities for fractional integrals," *Filomat*, 30 (5): 1315-1326, 2016.
- [56] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz and N. Basak, "Hermite -Hadamard's inequalities

- for fractional integrals and related fractional inequalities,” *Mathematical and Computer Modelling*, 57: 2403-2407, 2013.
- [57] M. Z. Sarikaya and H. Ogunmez, “On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration,” *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012: Article ID 428983, 10 pages, 2012.
- [58] E. Set, M. E. Ozdemir and S. S. Dragomir, “On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions,” *Journal of Inequalities and Applications*, 9: 1-9, 2010.
- [59] J. R. Wang, X. Li and C. Zhu, “Refinements of Hermite-Hadamard type inequalities involving fractional integrals,” *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 20: 655-666, 2013.
- [60] M. Z. Sarikaya and H. Yaldiz, “On weighted Montgomery identities for Riemann-Liouville fractional integrals,” *Konuralp Journal of Mathematics*, 1 (1) 48-53, 2013.
- [61] P. O. Mohammed, “On new trapezoid type inequalities for h -convex functions via generalized fractional integral,” *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 6: 125-128, 2018.
- [62] F. Qi, P. O. Mohammed, J. C. Yao and Y. H. Yao, “Generalized fractional integral inequalities of Hermite-Hadamard type for (α, m) -convex functions,” *Journal of Inequalities and Applications*, (1): 1-17, 2019.
- [63] G. Zabandan, “An extension and refinement of Hermite-Hadamard inequality and related results,” *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 11 (2): 379-390, 2020.
- [64] M. Balcı, *Matematik Analiz*, 7. Baskı, İstanbul, Türkiye: Sürat Üniversite Yayınları, 2012.
- [65] J. Pečarić, F. Proschan and T. L. Tong, “Convex functions, partial orderings, and statistical applications,” *Academic Press Inc.*, 4th ed., vol. 187, pp. 1-43, New York, USA, 1992.
- [66] A. Kilbas, “Theory and applications of fractional differential equations,” 2006.
- [67] U. N. Katugampola, “A new fractional derivative with classical properties,” preprint

arXiv:1410.6535, 2014.

- [68] I. Podlubny, “Fractional differential equations, vol. 198 of mathematics in science and engineering,” 1999.
- [69] A. Akkurt, M. E. Yildirim, and H. Yildirim, “On some integral inequalities for (k, h) -riemann-liouville fractional integral,” *New Trends in Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 2, p. 138, 2016.
- [70] E. C. De Oliveira and J. A. Tenreiro Machado, “A review of definitions for fractional derivatives and integral,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, 2014.
- [71] K. S. Miller and B. Ross, “An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations,” New York, USA: Wiley, 1993.
- [72] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1, 2000.
- [73] J. Pečarić, F. Proschan and Y.L. Tong, “Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications,” *Academic Press, Inc*, 1992.
- [74] C. Niculescu and L. E. Persson, “Convex Functions and Their Applications,” *A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media, Inc*, 2006.
- [75] D. S. Mitrinović, J.E. Pečarić and A.M. Fink, “Classical and New Inequalities in Analysis,” *Kluwer Academic Publishers*, London: Dordrecht, 1993.
- [76] L. Fejer, “Über die Fourierreihen,” *II. Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss.*, vol. 24, pp. 369-390, 1906 (Hungarian).
- [77] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, “Fractional Integrals and Derivatives,” *Theory and Applications. USA: Gordon and Breach Science Publishers*, (1993).
- [78] D. S. Mitrinović, “Analytic Inequalities,” *Springer-Verlag*, Berlin, 1970.
- [79] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, “Fractional integrals and derivatives,” *Gordon and Breach Science Publishers*, Switzerland, vol. 1, 1993

- [80] A. Ostrowski, "Über die absolutabweichung einer differentiierbaren funktion von ihrem integralmittelwert." *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 10, pp. 226–227, 1937.
- [81] W. H. Young, "On classes of summable functions and their Fourier series," *Proc. Roy. Soc.*, vol. 87, pp. 225-229, 1912.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Dilşatnur Kılıçer

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2023
Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2020
Lise		Sefaköy Anadolu Lisesi	2014

TEZDEN ÇIKAN YAYIN(LAR) M. Z. Sarıkaya and D. Kilicer, On the extension of Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinated convex mappings, Turkish Journal of Mathematics 45.6 (2021): 2731-2745.