



**ARİTMETİK TOPLANABİLME
VE ARİTMETİK YAKINSAKLIK**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim BOZTEPE

Danışman

Prof. Dr. Erdiç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ARİTMETİK TOPLANABİLME
VE ARİTMETİK YAKINSAKLIK**

İbrahim BOZTEPE

Danışman

Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

TEZ ONAY SAYFASI

İbrahim BOZTEPE tarafından hazırlanan “Aritmetik Toplanabilme ve Aritmetik Yakınsaklık” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 13/07/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR

Başkan : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi,
Cumhuriyet Sosyal Bilimler MYO

Üye : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Şükrü TORTOP
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
..... / / 2023 tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahim EROL

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13/07/2023

İbrahim BOZTEPE

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

ARİTMETİK TOPLANABİLME
VE ARİTMETİK YAKINSAKLIK

İbrahim BOZTEPE
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdiç DÜNDAR

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez çalışmasındaki konunun matematik alanındaki önemini ve konu ile ilgili yapılan çalışmaları özetleyen literatür bilgisi sunulmuştur. İkinci bölümde, matematik literatüründe iyi bilinen ve tez çalışmasında yararlanılan bazı temel tanımlar ve kavramlar not edilmiştir. Üçüncü bölümde, aritmetik toplanabilir diziler uzayı, aritmetik toplanabilir sınırlı diziler uzayı ve aritmetik yakınsak diziler uzayı ile ilgili temel kavramlar verilerek bu kavramlar arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ve ispatları verilmiştir. Dördüncü bölümde, aritmetik toplanabilme ve çarpan dizi kavramları kullanılarak bir dizi uzayı tanıtılmış ve bu uzayla ilgili bazı önemli özellikleri inceleyen teoremler ve ispatları verilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise, tez çalışması süresince faydalanılan ve literatürde mevcut olan kaynaklar listelenmiştir.

2023, v + 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Aritmetik yakınsaklık, Aritmetik toplanabilme, Çarpan dizi.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

ARITHMETICAL SUMMABILITY
AND ARITHMETICAL CONVERGENCE

İbrahim BOZTEPE

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Erdiñ DÜNDAR

This thesis consists of five main chapters.

In the first part, the literature information that summarizes the importance of the subject in the thesis in the field of mathematics and the studies on the subject is presented. In the second part, some basic definitions and concepts that are well known in the mathematics literature and used in the thesis are noted. In the third chapter, basic concepts about arithmetic summable sequence space, arithmetic summable bounded sequence space and arithmetic convergent sequence space are given, and theorems examining the relationships between these concepts and their proofs are given. In the fourth chapter, a sequence space is introduced by using the concepts of arithmetic summability and multiplier sequence, and theorems and proofs that examine some important properties of this space are given.

In the fifth chapter, which is the last chapter, the sources used during the thesis study and available in the literature are listed.

2023, v + 44 pages

Keywords: Arithmetical convergence, Arithmetical summability, Multiplier sequences.

TEŐEKKÖR

Bu araştırmanın konusunun verilmesi, alışmaların y nlendirilmesi, sonuların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım sayın Prof. Dr. Erdin DÜNDAR a, yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda  neri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teőekk r ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teőekk r ederim.

 brahim BOZTEPE
Afyonkarahisar 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Temel Tanım ve Kavramlar.....	3
2.2 Möbius Matrisi, Ters ve Transpozu.....	5
3. ARİTMETİK TOPLANABİLME	7
3.1 Aritmetik Toplanabilme.....	7
3.2 Periyodik Dizilerin Bir Alt Cebiri Olarak Aritmetik Yakınsak Diziler Uzayı	8
3.3 Aritmetik Yakınsak Dizilerin Dual Uzayı	16
3.4 AS ve AS nin AC ve BAS ile İlişkisi	20
3.5 AS^* ve AS_0^*	25
4. ARİTMETİK TOPLANABİLİRLİK VE ÇARPAN DİZİLER	34
4.1 Aritmetik Yakınsak Diziler Uzayı	34
4.2 Çarpan Diziler Uzayı	36
5. KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ.....	44

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar kümesi
$k n$	k, n yi böler veya n, k nın bir katıdır
$\sum_{k n} x_k$	$k, 1$ ve n dahil olmak üzere n yi bölen tam sayıların üzerinde değişirken tüm x_k sayılarının sonlu toplamı
$\langle m, n \rangle$	İki tam sayı m ve n nin en büyük ortak böleni
AC	Aritmetik yakınsak dizilerin uzayı
AS	Aritmetik toplanabilir dizilerin uzayı
BAS	$\sup\{ \sum_{k n} f(k) : n = 1, 2, \dots\} < \infty$ şartını sağlayan tüm f dizilerinin uzayı
AS^*	AS nin dual uzayı
AS_0^*	Sonunda 0 olan dizilerin φ uzayının AS^* daki kapanışı
$Q_n f = g$	$g(i) = f(\langle n, i \rangle)$ tarafından tanımlanan dizi
$Q_{n_k} f = g$	$g(i) = f(\text{maks}_k \langle n, i \rangle)$ tarafından tanımlanan dizi
$\{A_\Gamma\}$	Matrislerin sayılamayan kümesi
$\Delta(f)$	Köşegen matris
$\omega(k)$	k nın asal çarpanlarının sayısı
$\ E_k\ $	$f \in AS$ dizileri üzerinde $ f(k) $ değerlerinin maksimumu
$\Omega(n)$	n tam sayısının asalların farklı kuvvetlerine çarpanlara ayrılması $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^m k_i$
$2^{\omega(k)}$	AS üzerindeki koordinat $E_k(f) = f(k)$ fonksiyonelinin normu

1. GİRİŞ

Yakınsaklık, aritmetik yakınsaklık ve aritmetik toplanabilme kavramları, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi alanının önemli kavramlarından olup, son zamanlarda birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Tez konusu ile ilgili temel olan kavramlar birçok bilim insanı tarafından çalışılmıştır. Yapılan bu çalışmalar tez çalışmasının daha iyi anlaşılması açısından incelenmiştir. Banach (1932) ve Dunford ve Schwartz (1958) lineer operatörleri incelemişlerdir. Hardy ve Wright (1960) sayılar teorisi ile ilgili kavramları tanıtmışlardır. Berg ve Wilansky (1962) ve Berg (1963) periyodik, hemen hemen periyodik ve yarı-periyodik diziler ve yarı-periyodik dizilerin cebirini çalışmışlardır. Leindler (1965) genel ortogonal serilerinin la Vallee-Pousin toplanabilmesi hakkında inceleme yapmıştır. Berg (1966) yarı-periyodik diziler uzayının konjuge uzayını çalışmıştır. Milutin (1966) kuvvet sürekliliği kompaktları üzerinde sürekli fonksiyonların uzaylarının izomorfizmleri üzerine inceleme yapmıştır. Goes ve Goes (1970) sınırlı varyasyon dizileri ve Fourier katsayı dizilerini incelemişlerdir. Siddiqi (1971) hemen hemen periyodik dizilerin sonsuz matris toplamı kavramını tanıtmıştır. Ruckle (1972) dizi uzaylarında topolojileri incelemiştir. Jimenez (1985) yarı-periyodik dizi uzaylarının çarpanlarını incelemiştir. Schwarz ve Spilker (1994) aritmetik fonksiyonlar ve aritmetik fonksiyonların temel ve analitik özellikleri ile hemen hemen periyodik özelliklerini incelemişlerdir. Haukkanen, Wang ve Sillanpää (1997) Smith determinantı üzerine inceleme yapmışlardır. Tripathy ve Mahanta (2004) çarpan dizileriyle ilişkili vektör değerli dizi sınıfları üzerine incelemeler yapmışlardır. Altınışık, Tuglu ve Haukkanen (2007) karşılama ve birleştirme matrislerinin determinantı ve tersini incelemişlerdir. Haukkanen ve Tossavainen (2008) çift fonksiyonlar yardımıyla aritmetik fonksiyonların yaklaşımı üzerine çalışmalar yapmışlardır. Tóth ve Haukkanen (2011) r -çift fonksiyonların ayırık Fourier dönüşümü özelliklerini incelemişlerdir.

Tezimizin üçüncü bölümünde, Ruckle (2012) tarafından yapılan çalışmadaki aritmetik toplanabilen diziler uzayı (AS), aritmetik toplanabilen sınırlı diziler uzayı (BAS) ve aritmetik yakınsak diziler uzayı (AC) ile ilgili temel kavramlar verilerek bu kavramlar arasındaki ilişkileri inceleyen özellikler incelenmiştir. Bu anlamda, ilk olarak periyodik

dizilerin bir alt cebiri olarak aritmetik yakınsak diziler uzayı ilgili teoremler, önermeler ve ispatları verilmiştir. Daha sonra aritmetik yakınsak dizilerin dual uzayı kavramı tanıtılmış olup bu uzayla ilgili bazı önemli teorem, önerme ve ispatları verilmiştir. Ayrıca, AS ve AS nin AC ve BAS ile ilişkisi incelenmiştir. Bu bölümde son olarak AS* ve AS₀* kavramları ile ilgili teoremler ve önermeler ispatlarıyla açıklanmıştır.

Tezimizin dördüncü bölümünde ise, Yaying ve Hazarika (2012) tarafından yapılan çalışmadaki aritmetik toplanabilme ve çarpan dizi kavramları kullanılarak tanıtılan bir dizi uzayı ve bu uzayla ilgili bazı önemli özellikleri inceleyen teoremler ve ispatları verilmiştir. Bu anlamda ilk olarak, her aritmetik yakınsak bir dizinin sınırlı olduğu gösterilmiştir. AC uzayındaki her dizinin Cauchy şartını sağladığı ispatlanmıştır. Daha sonra, çarpan dizileri kullanarak aritmetik yakınsak dizi uzayı ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, eğer (x_n) ve (y_n) , $(AC(\Lambda)$, AS, ve $AS(\Lambda)$) uzaylarında herhangi iki dizi ise, bu durumda $(x_n \pm y_n)$ de $(AC(\Lambda)$, AS, ve $AS(\Lambda)$) uzaylarında bir dizi olduğu her bir uzay için sırasıyla ispatlanmıştır. Bu bölümde $(x_k) \in AC(\Lambda)$ ve her k için $n_k, n_k | n_{k+1}$ olacak şekilde tam sayıların bir dizisi ise, bu durumda $(y_k) = (\lambda_{n_k} x_{n_k})$ dizisine yakınsadığı gösterilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında yararlanılan bazı temel kavramlar verilmiştir. Literatürde iyi bilinen doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ gibi temel kavramlar burada verilmeyecektir.

2.1 Temel Tanım ve Kavramlar

Öncelikle metrik uzay, sınırlı dizi ve yakınsak dizi kavramları not edilecektir.

Tanım 2.1.1 $\mathcal{V}$ boştan farklı bir küme olsun.

$$\mu : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$ için

$$\text{M1. } \mu(v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2,$$

$$\text{M2. } \mu(v_1, v_2) = \mu(v_2, v_1),$$

$$\text{M3. } \mu(v_1, v_3) \leq \mu(v_1, v_2) + \mu(v_2, v_3)$$

şartlarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{V}$ de bir metrik ve $(\mathcal{V}, \mu)$ ikilisine de metrik uzay denir (Bayraktar 2006).

Bu tez çalışması boyunca $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ uzayı üzerinde

$$\mu(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$$

biçiminde tanımlanan mutlak değer metriği göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.1.2 Tanım kümesi $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ doğal sayılar kümesi olan her fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi veya reel sayı dizisi ya da reel dizi denir. Yani reel terimli bir dizi

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyondur. Genel terimi x_k olan bir dizi $(x_k) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ biçiminde gösterilir (Balcı 1999).

Tez çalışmasında aksi belirtilmediği sürece (x_k) dizisini reel sayı dizisi olarak ele alacağız.

Tanım 2.1.3 (x_k) bir dizi ve $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $k > n_0$ olduğunda

$$|x_k - \mathcal{L}| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyor ise (x_k) dizisi, $\mathcal{L}$ sayısına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \mathcal{L} \text{ veya } x_k \rightarrow \mathcal{L}$$

biçiminde gösterilir. Herhangi bir sayıya yakınsayan diziye yakınsak dizi denir. Yakınsak olmayan diziye ise ıraksak dizi denir (Balcı 1999).

Tanım 2.1.4 Eğer her k doğal sayısı için

$$|x_k| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı bulunabiliyor ise (x_k) dizisine sınırlı dizi denir. Tüm sınırlı reel veya kompleks dizilerin kümesi ℓ^∞ ile gösterilir (Balcı 1999).

Şimdi sonlu toplam, periyodik dizi ve dual uzay tanımları verilecektir.

Tanım 2.1.5 $\mathbb{N}$ de bir (x_k) dizisi ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k|n} x_k$$

gösterimi k , 1 ve n dahil olmak üzere n yi bölen tam sayıların üzerinde değişirken tüm x_k sayılarının sonlu toplamı anlamına gelir. Genel olarak $k|n$ yi “ k , n yi böler” veya “ n , k nın bir katıdır” anlamında yazılır. İki tam sayı m ve n nin en büyük ortak bölenini belirtmek için $\langle m, n \rangle$ sembolü kullanılır (Yaying ve Hazarika 2017).

Tanım 2.1.6 Bir $x = (x_k)$ dizisi ve tüm $k \in \mathbb{N}$ için $x_{k+n} = x_k$ olacak şekilde bir n tam sayısı varsa x dizisine periyodik denir. Bu şartı sağlayan en küçük n tam sayısına ise x dizisinin periyodu denir. P ile tüm periyodik dizilerin lineer uzayı ve QP ile tüm sınırlı dizilerin ℓ^∞ uzayında P nin kapanışı gösterilir (Yaying ve Hazarika 2017).

Tanım 2.1.7 X ve Y aynı cisim üzerinde iki normlu uzay olsun. $B(X, Y)$ ile X den Y nin içine olan tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesini gösterelim. $B(X, Y)$,

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x \text{ ve } (aT)(x) = aTx$$

işlemleri ile bir vektör uzayı olup daha önce tanımlanan operatör normu ile bir normlu uzayıdır. Hatta Y uzayının Banach olması durumunda $B(X, Y)$ uzayı da bir Banach uzayıdır. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonların (yani, $Y = \mathbb{R}$ veya $Y = \mathbb{C}$) uzayına ise X in dual uzayı (sürekli dual) denir ve X' ile gösterilir (Bayraktar 2006).

2.2 Möbius Matrisi, Ters ve Transpozu

Şimdi Ruckle (2012) tarafından yapılan makalede verilen Möbius matrisi, tersi ve transpozu kavramları not edilecektir.

i, j nin böleni ise $w_{i,j} = 1$ ve aksi halde $w_{i,j} = 0$ olan $[w_{i,j}]$ alt üçgensel matrisi W ile gösterilsin. Böylece

$$g(n) = \sum_{k|n} f(k)$$

demek, yan yana getirmenin sıradan matris çarpımını ifade ettiği $g = Wf$ demeye eşdeğer olduğu açıktır. W nin tersini tanımlamak için ise $\mu(1) = 1$, eğer $p_1, p_2, \dots, p_k$ farklı asal sayılar ise $\mu(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k) = (-1)^k$ ve n nin uygun bir kare çarpanı varsa $\mu(n) = 0$ ile bir dizi olarak tanımlanan $\mu(n)$ Möbius fonksiyonu kullanılır. Möbius Ters Teoremi, eğer

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

ise, bu durumda

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

olduğunu ifade eder (Hardy ve Wright 1960, s. 236). Böylece M , $i|j$ ve aksi takdirde 0 olmak üzere i . satırında ve j . sütununda elamanı $\mu\left(\frac{j}{i}\right)$ olan matris ise, Möbius Ters Teoremi, eğer $g = Wf$ ise o zaman $f = Mg$ veya eşdeğer olarak M nin tersinin W olduğunu belirtir. W ve M nin transpoz matrisleri W^T ve M^T biçiminde yazılır. Bu matris çiftleri birbirinin tersidir. Alt üçgensel olan W ve M tüm dizilere

uygulanabilirken transpozları mutlak toplanabilen dizilere uygulanır (çünkü elemanlar kümesi sınırlıdır), ancak tüm dizilere zorunlu değildir.

Aşağıdaki diyagram, ℓ^1 (mutlak yakınsak diziler) uzayı, ℓ^∞ (sınırlı diziler) uzayı ve inceleyeceğimiz uzayları ve bunların birbiriyle olan ilişkilerini özetlemektedir.

Çift ok $\Rightarrow$ bir matris eşlemesini çevreler; tek ok $\rightarrow$ dualiteyi belirtir ve $\subset$ kesin dahil etme anlamına gelir.

$$\begin{array}{ccccc}
 \ell^1 & \Rightarrow & W^T & \Rightarrow & AS_0^* \subset AS^* \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \ell^\infty & \Rightarrow & M & \Rightarrow & BAS \\
 \cup & & & & \cup \\
 AC & \Rightarrow & M & \Rightarrow & AS \rightarrow AS^*
 \end{array}$$

3. ARİTMETİK TOPLANABİLME

Bu bölümde, Ruckle (2012) tarafından yapılan makaledeki tanım, teorem ve lemmalar ispatlarıyla birlikte not edilecektir.

3.1 Aritmetik Toplanabilme

Bu kısımda, öncelikle aritmetik toplanabilme tanımı verilecektir.

Tanım 3.1.1 $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir f dizisi verilsin. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için bir n tam sayısı vardır öyle ki her m tam sayısı için

$$\left| \sum_{k|m} f(k) - \sum_{k|\langle m, n \rangle} f(k) \right| < \varepsilon$$

ise, bu durumda f ye aritmetik toplanabilirdir denir. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için bir n tam sayısı vardır öyle ki her m tam sayısı için

$$|g(m) - g(\langle m, n \rangle)| < \varepsilon$$

ise, bu durumda g ye aritmetik yakınsaktır denir.

Bir f dizisi aritmetik toplanabilirdir ancak ve ancak $g(n) = \sum_{k|n} f(k)$ ile tanımlanan g dizisi aritmetik yakınsaktır fakat g dizisi alışılmış anlamda yakınsak değildir ve aslında periyodiktir.

Aşağıda verilen uzaylar çalışılacaktır.

AC: Aritmetik yakınsak diziler uzayı.

AS: Aritmetik toplanabilir diziler uzayı.

BAS: $\sup\{|\sum_{k|n} f(k)| : n = 1, 2, \dots\} < \infty$ şartını sağlayan tüm f dizilerinin uzayı.

AS*: **AS** nin dual uzayı. Bu ise x' , **AS** üzerindeki tüm sürekli doğrusal fonksiyoneller üzerinde değişirken ve $e_i, j \neq i$ için $e_i(i) = 1$ ve $e_i(j) = 0$ olacak şekilde bir dizi olmak üzere $f(i) = x'(e_i)$ biçiminde tanımlanan tüm f dizilerinin uzayı demektir.

AS*₀: Sonunda 0 olan dizilerin φ uzayının **AS*** daki kapanışı.

3.2 Periyodik Dizilerin Bir Alt Cebiri Olarak Aritmetik Yakınsak Diziler Uzayı

Tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$f(k + n) = f(k)$$

olacak şekilde bir n sayısı varsa, f dizisine periyodiktir denir. Bu özelliği sağlayan en küçük n tam sayısına f nin periyodu denir. P ile tüm periyodik dizilerin lineer uzayı ve QP ile tüm sınırlı dizilerin ℓ^∞ uzayında P nin kapanışı gösterilir. P ve QP uzayları Berg (1963), Berg ve Wilansky (1962), Berg (1966) ve Jimenez (1985) tarafından ele alınmıştır. $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı periyodik dizilerin lineer uzayından $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı olanlara kadar bir izomorfizm, $\mathbb{Z}$ ye genişleme ve $\mathbb{N}$ ye kısıtlama ile belirlenir. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlanan periyodik dizilerin yararlı bir özelliği $f(1)$ i dizinin bir periyodunun ilk değeri olarak kabul ederseniz o zaman, pozitif j için $f(j)$ j modülü n konumunda bulunan değeri belirtirken, pozitif olmayan j için $f(j)$ $n - j$ modülü n konumunda bulunan değeri belirtir. Bu özellik, aşağıdakiler vasıtasıyla QP uzayına aktarılır.

Önerme 3.2.1 Eğer $f \in QP(\mathbb{Z})$ ise, bu durumda her bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n! - i) = f(-i) \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n!) = f(0)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: f nin periyodu p olmak üzere $n \geq p$ olduğunda

$$f(n! - i) = f(-i)$$

olduğundan, tüm $f \in P$ için limit elde edilir. P , QP de yoğun olduğundan formül QP nin tümüne genişletilebilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n! - i) \quad \text{ve} \quad f(-i)$$

fonksiyonellerinin her ikisi de sınırlı ve dolayısıyla süreklidir.

QP deki bir f dizisi, eğer $\mathbb{Z}$ ye uzantısı için

$$f(i) = f(-i)$$

ise simetrik olarak adlandırılacaktır. Bizim için özellikle ilgi çekici olan

$$d_n(j) = \begin{cases} 1; & n|j \text{ ise} \\ 0; & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $\mathbb{N}$ üzerinde $n = 1, 2, \dots$ için tanımlanan d_n periyodik dizilerinin kümesini kurmaktır. Tanımlarından, W nin sütunları olan bu dizilerin aritmetik yakınsak ve simetrik olduğu açıktır.

Aritmetik bir f fonksiyonu, tüm k için

$$f(k) = f(\langle k, n \rangle)$$

ise çift $\text{mod}(m)$ dir. Bu nedenle Tanım 3.1.1 den, bir dizi bazı n ler için çift $\text{mod}(n)$ olan tüm dizilerin uzayının düzgün kapanışındaysa aritmetik yakınsaktır. Bu tür diziler yakın zamanda Haukkanen ve Tossavainen (2008), Schwarz ve Spilker (1994) ve Toth ve Haukkanen (2011) tarafından ele alınmıştır.

Herhangi bir diziden, **AC** de bir dizi (gerçekte çift modülü n olan bir dizi) türetmenin doğal ve basit bir yolu vardır.

Önerme 3.2.2 Eğer f herhangi bir dizi ve n herhangi bir tam sayı ise, bu durumda

$$g(i) = f(\langle n, i \rangle)$$

tarafından tanımlanan $Q_n f = g$ dizisi **AC** dedir ve

$$\sup_i |g(i)| \leq \sup_i |f(i)|$$

dir. Her bir Q_n , ℓ^∞ dan **AC** ye sürekli doğrusal bir iz düşümdür. Her bir m, n tam sayı çifti için

$$Q_m Q_n = Q_{\langle m, n \rangle}$$

ve dolayısıyla m ve n aralarında asal ise her bir i için $g(i) = f(1)$ olmak üzere

$$Q_m Q_n f = Q_1 f = g$$

elde edilir.

İspat: Tüm m için

$$g(m) = f(\langle n, m \rangle) = g(\langle n, m \rangle)$$

olduğundan $Q_n f = g$ eşitliği **AC** dedir. Diğer ifadelerin ispatları da açık şekilde rutindir.

Q_n iz düşümleri ilginç yakınsama özelliklerine sahiptir.

Önerme 3.2.3 Eğer f , $\mathbf{AC}$ de herhangi bir dizi ve her bir k için $n_k | n_{k+1}$ olacak şekilde n_k tam sayıların herhangi bir dizisi ise, bu durumda $Q_{n_k}f$, $\mathbf{AC}$ de

$$g(i) = f(\text{maks}_k < i, n_k >)$$

dizisine yakınsar.

İspat: $Q_{n_k}f$ dizisi düzgün sınırlı ve her bir d_m için

$$Q_{n_k}d_m = \begin{cases} 0; & <m, n_k> < m \text{ ise} \\ d_m; & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olur. Böylece $Q_{n_k}f$, $\mathbf{AC}$ de düzgün sınırlılık ilkesi ile kendisinin açık olarak noktasal limiti olan g ye yakınsaktır.

Teorem 3.2.1 f , $\mathbf{AC}$ de bir dizi ve her bir k için $n_k | n_{k+1}$ ve $m_k | m_{k+1}$ olacak şekilde n_k ve m_k iki tam sayı dizisi olsun. Bu durumda, her bir $f \in \mathbf{AC}$ için

$$\lim Q_{n_k}f = \lim Q_{m_k}f$$

eşitliği geçerli olması için gerek ve yeter şart her bir p asal sayısı ve her bir h tam sayısı için $p^h | n_k$ olacak şekilde n_k vardır gerek ve yeter şart $p^h | m_1$ olacak şekilde m_1 vardır.

İspat: $M(i) = \text{maks}_k < i, n_k >$ dizisi çarpımsaldır (Hardy ve Wright 1960, s. 53). i_1, i_2 nin aralarında asal olduğunu ve

$$M(i_1) = < i_1, n_{k_1} >, \quad M(i_2) = < i_2, n_{k_2} >$$

olduğunu varsayalım. $n_{k_1} | n_{k_1}$ olduğundan dolayı $n_{k_1} \leq n_{k_2}$ ise, bu durumda

$$< i_1, n_{k_1} > = < i_1, n_{k_2} >$$

ve böylece,

$$M(i_1 i_2) = < i_1 i_2, n_k > = < i_1, n_k > < i_2, n_k > \leq M(i_1, i_2)$$

olduğunda

$$M(i_1)M(i_2) = < i_1, n_{k_2} > < i_2, n_{k_2} > = < i_1 i_2, n_{k_2} > \leq M(i_1 i_2)$$

dir.

Her p asal ve her h tam sayısı için s ; h den küçük veya ona eşit en büyük tam sayı olmak üzere

$$M(p^h) = p^s$$

dir öyle ki p^s bazı n_k ları böler. Koşul geçerli ise, bu durumda bir asal sayının her kuvveti için

$$\text{maks}_k \langle p^s, n_k \rangle = \text{maks}_k \langle p^s, m_k \rangle$$

ve böylece her tam sayı için

$$\text{maks}_k \langle i, n_k \rangle = \text{maks}_k \langle i, m_k \rangle$$

olup her bir $f \in \mathbf{AC}$ için

$$\lim Q_{n_k} f = \lim Q_{m_k} f$$

dir. Eğer g ,

$$g(i) = \begin{cases} 1; & p^h | i \text{ ise} \\ 0; & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

biçiminde bir dizi ise, bu durumda

$$\lim Q_{n_k} g = \begin{cases} g; & p^h | n_k \text{ ise} \\ 0; & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olur. Çünkü $i < p^s$ için

$$\langle p^s, n_k \rangle < \langle p^s \rangle \text{ ve } g(i) = 0$$

dir. Bu da koşulun gerekli olduğunu gösterir.

İz düşüm koşulundan, Teorem 3.2.1 gösterir ki $\lim Q_{n_i} f$ formunun iz düşümleri

$$\varphi = \{p^k: p \text{ bir asal sayı ve bazı } i \text{ ler için } p^k | n_i \text{ dir.}\}$$

kümesi tarafından tamamen hesaplanır. Böylece

$$\lim Q_{n_i} f = Q_{\varphi} f$$

yazılır.

Bir sonraki teorem, $\mathbf{AC}$ uzayının temel özelliklerini özetler.

Teorem 3.2.2 (a) Eğer bir f dizisi aritmetik yakınsak ise, bu durumda her bir $\varepsilon > 0$ için periyodik bir g dizisi vardır öyle ki her bir i için

$$|f(i) - g(i)| < \varepsilon$$

dir. Böylece $\mathbf{AC}$, QP nin kapalı bir alt cebiridir.

(b) $\mathbf{AC}$ deki yalnız yakınsak olan diziler sabit dizilerdir.

(c) $f \in \mathbf{AC}$ ve n_k , tüm k için $n_k | n_{k+1}$ olacak şekilde bir tam sayı dizisi ise, bu durumda $g(k) = f(n_k)$ dizisi yakınsaktır.

(d) $f \in \mathbf{AC}$ ve q_k , ortak çarpanı olmayan artan bir tam sayı dizisi ise, bu durumda $h(k) = f(q_k)$ dizisi $f(1)$ e yakınsar.

(e) Her periyodik aritmetik yakınsak f dizisi, d_n dizilerinin bir lineer birleşimidir.

(f) Periyodik aritmetik yakınsak dizilerin uzayı, P nin uygun bir alt uzayıdır ve QP de $\mathbf{AC}$ simetrik dizilerin uygun kapalı bir alt cebiridir.

İspat: (a) Aritmetik yakınsamanın tanımı gereği, her bir i için

$$|f(i) - f(<i, n >)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n tam sayısı vardır.

$$g(i) = f(<i, n >)$$

dizisini tanımlayalım.

$$<i + n, n > = <i, n >$$

olduğundan, g dizisi en fazla n periyodu ile periyodiktir. $\mathbf{AC}$ nin bir cebir olduğu ve düzgün topolojide kapalı olduğu yaklaşım ile ilgili rutin bir araştırmadır ve ispatı tamamlarız.

(b) Sadece yakınsak periyodik diziler (a) gereğince sabittir.

(c) $\varepsilon > 0$ verilsin ve bir m alalım öyle ki her bir i için

$$|f(i) - f(<i, m >)| < \varepsilon$$

olsun. $k \geq K$ için

$$<m, n_k > = <m, n_{k+1} >$$

olacak şekilde bir K alalım. Böylece, $i, j \geq K$ için

$$\begin{aligned}
|g(i) - g(j)| &= |f(n_i) - f(n_j)| \\
&= |f(n_i) - f(\langle n_i, m \rangle) - f(n_j) + f(\langle n_i, m \rangle)| \\
&\leq |f(n_i) - f(\langle n_i, m \rangle)| + |-f(n_j) + f(\langle n_i, m \rangle)| \\
&= |f(n_i) - f(\langle n_i, m \rangle)| + |f(n_j) - f(\langle n_j, m \rangle)| \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle g Cauchy koşulunu sağlar, böylece yakınsar.

(d) $\varepsilon > 0$ verilsin ve bir m alalım öyle ki her bir i için

$$|f(i) - f(\langle i, m \rangle)| < \varepsilon$$

olsun. q_k tam sayılarının ortak çarpanı olmadığından,

$$\langle m, q_k \rangle > 1$$

olan tüm k ların kümesi sonludur. Dolayısıyla $k \geq K$ için

$$\langle m, q_k \rangle = 1$$

olacak şekilde K vardır. Bu

$$\begin{aligned}
|f(1) - h(k)| &= |f(1) - f(q_k)| \\
&= |f(\langle m, q_k \rangle) - f(q_k)| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

anlamına gelir.

(e) f periyodik olduğundan yalnızca sonlu sayıda değer alır. Böylece $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki eğer

$$|f(i) - f(j)| < \varepsilon$$

ise

$$f(i) = f(j)$$

olur. f aritmetik yakınsak olduğundan, bir m tam sayısı vardır öyle ki her bir i için

$$|f(i) - f(\langle i, m \rangle)| < \varepsilon$$

olup bu ise her bir i için

$$f(i) = f(\langle i, m \rangle)$$

anlamına gelir. g , her bir i için

$$g(i) = g(\langle i, m \rangle)$$

özelliğine sahip başka bir dizi ise, bu durumda $f + g$ aynı özelliğe sahiptir.

$1 = m_1 < m_2 \dots < m_s = m$ ile artan düzende m nin tüm bölenlerinin dizisi olsun. $m_i | j$ olduğundan d_{m_i} fonksiyonu

$$d_{m_i}(j) = d_{m_i}(<j, m>)$$

özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart

$$m_i | <j, m>$$

dir. Böylece, fonksiyonların dizisi

$$f_1 = f - f(1)d_1$$

ve genel olarak

$$f_{i+1} = f_i - f_i(m_i)d_{m_i}$$

tarafından tanımlanır öyle ki tümü

$$f_i(j) = f_i(<j, m>)$$

özelliğine sahiptir. Her bir i için

$$f_s(m_i) = 0$$

olduğundan, f_s sıfır dizisidir. f_s den f ye tersine doğru çalışmak, f nin d_{m_i} dizilerinin lineer birleşimi olduğunu gösterir.

(f) d_i nin $\mathbb{Z}$ ye uzantısı,

$$d_i(n_i) = \begin{cases} 1; & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ için} \\ 0; & i, k \text{ nin bir çarpanı değilse} \end{cases}$$

ile periyodik bir dizidir. Bu dizilerin tümü, her i, j için

$$d_i(-j) = d_i(j)$$

koşulunu sağlar. Bu lineer bir koşul olduğundan ve tüm d_i lerin kümesi, periyodik aritmetik yakınsak dizilerin uzayı için cebirsel bir baz olduğundan, tüm böyle g ler için geçerli olan koşulu izler. d_i nin açıklığı $\mathbf{AC}$ de yoğun olduğundan ve koordinat fonksiyonları sürekli olduğundan koşul tüm $f \in \mathbf{AC}(\mathbb{Z})$ için elde edilir. $\mathbf{AC}$ de olmayan bir simetrik periyodik dizi örneği oluşturmak için, ilk beş a_1, a_2, a_2, a_1, a_5 terimine sahip beş periyod dizisinin simetrik olduğu, ancak aritmetik yakınsak bir periyod dizisinin ilk beş a_1, a_1, a_1, a_1, a_5 terimine sahip olması gözlemlenir.

Teorem 3.2.3 Sonlu bir S kümesi için eğer

$$f = \sum_{i \in S} a_i d_i$$

ve hiç bir $a_i \neq 0$ ise, bu durumda f nin periyodu n dir, $\{i: i \in S\}$ nin en küçük ortak katıdır ve k nın bir çarpanı olan bir $i \in S$ yoksa $f(k) = 0$ dır.

İspat: S nin herhangi bir elemanı yoksa ispat açıktır. S , $n - 1$ elemana sahip iken önermenin doğru olduğunu kabul edelim ve S , n elemana sahip olduğunda önermenin doğru olduğunu gösterelim. S , n elemana sahip olsun ve S nin en büyük elemanı olarak h yi alalım. Eğer

$$g = \sum_{i \in S|h} a_i d_i$$

ise, bu durumda

$$f = g + a_h d_h$$

için ve tüm j ler için

$$f(jk) = g(jk) + a_h$$

ve aksi halde

$$h(i) = g(i)$$

dir. n' , $\{i: i \in S|h\}$ nin en küçük ortak katını gösterebilir. Eğer i , h ın katı değilse

$$h(i + n) = g(i + n) = g(i) = h(i)$$

olur, çünkü n' , n nin bir çarpanıdır ve h , $i + n$ yi bölmez. i , h ın katı ise

$$h(i + n) = g(i + n) + a_h = g(i) + a_h = h(i)$$

dir, çünkü n' , n nin bir çarpanıdır ve h , $i + n$ yi böler. f nin periyodu kesin olarak n dir, çünkü f , n de $\sum a_i$ değerini alır ama n' de almaz.

Önerme 3.2.4 Her bir f dizisi için a_i katsayıları vardır öyle ki her bir k için

$$f(k) = \sum_{j=1}^k a_j d_j(k)$$

dir. Böylece, tüm dizilerin uzayı ω için (d_j) bir baz olup, koordinatsal yakınsama topolojisini verir.

İspat: $a_1 = f(1)$ olsun ve $k \leq n$ için

$$f(k) = \sum_{j=1}^k a_j d_j(k)$$

yı sağlayan $a_k: k \leq n$ bulunursa,

$$a_{n+1} = f(n+1) - \sum_{j=1}^n a_j d_j(n+1)$$

olur. $j < n+1$ için

$$d_{n+1}(j) = 0$$

olduğundan, $\{a_k: k \leq n\}$ bulunur ki $k \leq n+1$ için

$$f(k) = \sum_{j=1}^k a_j d_j(k)$$

sağlanır. ($Q_n' f$ nin f ye yakınsak olduğu görülebilir.)

3.3 Aritmetik Yakınsak Dizilerin Dual Uzayı

Bu bölümde, **AC** nin dual uzayı açıklanacak ve açıklama, **AC** gibi QP nin $C[0,1]$ cebirine göre izomorfik olduğunu göstermek için kullanılacak.

$0 < q \leq p$ olan her p, q tam sayı çifti ve bazı k tam sayıları için $b_{p,q}$ dizisi

$$b_{p,q}(j) = \begin{cases} 1; & j = q + kp \text{ ise} \\ 0; & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her bir p için $\{b_{p,q}: q = 1, 2, \dots, p\}$ dizileri, p periyoduna sahip dizilerin alt uzayı için bir baz oluşturur. Bir periyodu p olan dizi ayrıca her h pozitif tam sayısı için hp periyoduna sahip olduğundan,

$$b_{p,q} = \sum_{k=0}^{h-1} b_{hp,q+kp}$$

dir. QP , ℓ^∞ un ayrılabilir kapalı bir alt uzayı olduğundan A bir matris olmak üzere, sürekli lineer fonksiyonların

$$F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j A(n, j) f(j)$$

biçiminde temsil edilebileceği bilinmektedir (Banach 1932, s. 68-72). Berg (1966) bu soruyu yanıtladı ve Jimenez (1985) aynı soruyu P üzerindeki sürekli lineer fonksiyoneller için yanıtladı. QP üzerinde sürekli lineer fonksiyonellerin gösterimi matrislerin belirlenmesine eşdeğer olup QP yi yakınsak dizilerin c uzayına eşler (Siddiqi 1971). Aşağıdaki teorem bu üç çalışmanın sonuçlarını birleştiren QP dual uzayı için doğrudan bir açıklamadır.

Teorem 3.3.1 $A = A(i, j)$ matrisi için aşağıdaki üç ifade eşdeğerdir:

(a) A matrisi

$$F(f) = \lim_n \sum_j A(n, j) f(j)$$

formülü ile QP üzerinde sürekli doğrusal bir F fonksiyoneli belirler.

(b) A matrisi aşağıdaki şartları sağlar:

(1)

$$\sup_n \left\{ \sum_j |A(n, j)| \right\} < \infty$$

(2) Her m ve her $0 \leq k < m$ için

$$\lim_n \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A(n, mj + k) \right\}$$

limiti vardır.

(c) A matrisi QP yi c ye eşler.

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b): Bir $A(n, .)$ satır

$$F_n(f) = \sum_j A(n, j) f(j)$$

ile QP üzerinde bir fonksiyonel tanımlamak için gerek ve yeter şart

$$F_n = \sum_j |A(n, j)| < \infty$$

olmasıdır. Eğer (F_n) dizisi zayıf yakınsar ise, bu durumda sınırlıdır. Dolayısıyla (1) şartı sağlanır. $b_{m,k}$ de fonksiyonelin değeri

$$\lim_n \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A(n, mj + k) \right\}$$

olduğundan (2) nin gerekliliği elde edilir.

$(b) \Rightarrow (c)$: A matrisi (1) ve (2) koşullarını sağlıyor ise, bu durumda her bir $f \in QP$ için

$$\sum_j A(n, j) f(j)$$

mevcuttur ve

$$g(n) = \sum_j A(n, j) f(j)$$

biçiminde tanımlanan g dizisi yakınsar.

$(c) \Rightarrow (a)$: A matrisi QP yi c ye eşler ise, bu durumda

$$F_n(f) = \sum_j A(n, j) f(j)$$

ile QP üzerinde tanımlanan fonksiyoneller QP üzerinde düzgün sınırlıdır ve her bir $b_{m,k}$ için yakınsar ve böylece her bir $f \in QP$ için yakınsarlar.

$b_{m,k}$ yerine d_n dizilerini kullanarak **AC** için karşılık gelen sonuç elde edilebilir.

Teorem 3.3.2 $A = A(i, j)$ matrisi için aşağıdaki üç ifade denktir:

(a) A matrisi **AC** üzerinde

$$F(f) = \lim_n \sum_j A(n, j) f(j)$$

ile sürekli bir lineer F fonksiyoneli belirler.

(b) A matrisi aşağıdaki şartları sağlar:

(1)

$$\sup_n \left\{ \sum_j |A(n, j)| \right\} < \infty .$$

(2) Her bir m için

$$\lim_n \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A(n, mj) \right\}$$

limiti mevcuttur.

(c) A matrisi QP yi c ye eşler.

QP de bir fonksiyonel belirleyen her matris açık olarak $\mathbf{AC}$ de bir fonksiyonel belirler. $\mathbf{AC}$ de matrisler tarafından tanımlanan fonksiyoneller tek olarak belirlenmez. Bununla birlikte $\mathbf{AC}$ cebirinde Milutin Teoremini uygulamamıza izin veren sayılamayan sayıda farklı "nokta" fonksiyonel vardır.

Önerme 3.3.1 Γ , 0 ve 1 lerin sonsuz bir dizisi ve asal sayılar dizisi

$$2 = p_1 < p_2 < \dots$$

olsun.

$$s(0) = 1 \text{ ve } \Gamma(k) = 1$$

ise

$$s(k) = s(k - 1)p_k$$

aksi takdirde

$$s(k) = s(k - 1)$$

olan bir s tam sayılar dizisi tanımlansın. İlk satırı 0 ve

$$p_k \leq i < p_{k+1} \text{ ise } A_{\Gamma}(i, s(k)) = 1$$

aksi takdirde

$$A_{\Gamma}(i, j) = 0$$

olacak şekilde bir A_{Γ} matrisi tanımlansın. Matrislerin sayılamayan kümesi $\{A_{\Gamma}\}$, $\mathbf{AC}$ üzerindeki farklı fonksiyonelleri belirler.

İspat: m bazı k lar için $s(k)$ yi böler ise, her bir m için

$$\sum_{j=1}^{\infty} A(n, mj)$$

sonuç olarak 1 dir ve aksi halde her zaman 0 dır. Eğer bu tür sonsuz iki Γ_1, Γ_2 dizileri farklı ise, bu durumda belirlenen matrisler tarafından tanımlanan fonksiyoneller ilk $\Gamma_1(i) \neq \Gamma_2(i)$ için ilk dizi d_{p_i} üzerinde farklılık gösterir.

Milutin Teoreminden (Milutin 1966) bir sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.1 **AC** uzayları $C[0,1]$ e izomorfiktir.

3.4 AS ve AS nin AC ve BAS ile İlişkisi

Eğer f, φ de bir dizi ise, (f dizilerin uzayıdır öyle ki $j > N_f$ için $f(j) = 0$ olacak şekilde N_f vardır) bu durumda f aritmetik toplanabilir ve

$$g(n) = \sum_{k|n} f(k)$$

biçiminde tanımlanan g dizisi aritmetik yakınsaktır ve P de bir dizidir. g için eşdeğer bir ifade

$$g = \sum_k f(k) d_k$$

dır.

W matrisinin sütunları P uzayında olduğundan, $W(\varphi)$ nin P nin uygun bir alt uzayıdır ve $W(\mathbf{AS})$, **AC** nin bir alt uzayıdır. $W(\mathbf{AS})$ nin **AC** nin tamamında olduğunu göstermek için W nin tersi olan M matrisi kullanılır ve Möbius İnverson Teoremi aşağıdaki teoremi verir (Hardy ve Wright 1960, s. 236).

Teorem 3.4.1 (a) Bir $f \in P$ dizisinin $W(\varphi)$ ye ait olması için gerek ve yeter koşul $i \geq n$ için

$$\sum_{j|i} \mu\left(\frac{i}{j}\right) f(j) = 0$$

olacak şekilde n nin var olmasıdır.

(b) Eğer f , **AS** de bir dizi ise, bu durumda

$$g(n) = \sum_{k|n} f(k)$$

ile tanımlanan g dizisi aritmetik yakınsak, **AC** de bir dizi ve f den g ye dönüşümü **AS** den **AC** ye bire bir izometrik bir eşlemedir.

(c) Eğer f , **BAS** ta bir dizi ise, bu durumda Wf , ℓ^∞ da bir dizidir ve eğer g , ℓ^∞ da bir dizi ise, bu durumda Mg , **BAS** da bir dizidir. Bu nedenle,

$$\|f\| = \|Wf\|_\infty$$

normu ile **BAS**, ℓ^∞ a izometriktir ve **AS**, **BAS** da φ nin kapanışıdır.

Tüm dizileri **AC** ye eşleyen Q_n eşlemesine benzer şekilde tüm dizileri $\varphi \subset \mathbf{AS}$ ye eşleyen R_n eşlemesidir.

Teorem 3.4.2 Eğer f , herhangi bir dizi ve n herhangi bir tam sayı ise, bu durumda $i|n$ ise $g(i) = f(i)$ ve $i \nmid n$ ise $g(i) = 0$ olarak tanımlanan $R_n f = g$ dizisi φ dedir ve

$$\sup_m \left| \sum_{i|m} g(i) \right| \leq \sup_m \left| \sum_{i|m} f(i) \right|$$

dir. Her bir R_n , **BAS** tan **AS** ye sürekli lineer iz düşümdür. Her bir m, n tam sayıları çifti için

$$R_m R_n = R_{\langle m, n \rangle}$$

ve böylece eğer m ve n aralarında asal ise,

$$g(1) = f(1) \text{ ve } i > 1 \text{ için } g(i) = 0$$

olmak üzere

$$R_m R_n f = R_1 f = g$$

dir. Eğer f , **AS** deki herhangi bir dizi ve n_k , her bir k için $n_k | n_{k+1}$ olacak şekilde tam sayıların herhangi bir dizisi ise, bu durumda $R_{n_k} f$, **AS** de

$$g(i) = f(\max_k \langle i, n_k \rangle)$$

olan bir g dizisine yakınsar.

İspat: İlk iki iddianın ispatları rutindir. Üçüncü iddiayı doğrulamak için $R_{n_k} f$ dizisinin düzgün sınırlı olduğunu ve her bir e_m için

$$R_{n_k} e_m = \begin{cases} 0; & \langle m, n_k \rangle < m \text{ ise} \\ e_m; & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olduğunu görelim. Bu nedenle $R_{n_k} f$, **AS** de Düzgün Sınırlılık İlkesi ile noktasal limitine yakınsar ki bu açıkça g dir.

Teorem 3.4.3 f , **AS** de bir dizi ve her bir k için $n_k | n_{k+1}$ ve $m_k | m_{k+1}$ olacak şekilde n_k ve m_k iki tam sayı dizisi olsun. Bu durumda, her bir $f \in \mathbf{AS}$ için

$$\lim R_{n_k} f = \lim R_{m_k} f$$

eşit olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şart sağlanır ise geçerlidir:

Her bir p asal sayısı ve her bir h tam sayısı için $p^h | n_k$ olacak şekilde n_k vardır gerek ve yeter şart $p^h | m_1$ olacak şekilde m_1 vardır.

İspat: $M(i) = \max_k \langle i, n_k \rangle$ dizisi çarpımsaldır (Hardy ve Wright 1960, s. 53). Eğer koşul geçerli ise, bu durumda bir asal sayının her kuvveti için

$$\max_k \langle p^s, n_k \rangle = \max_k \langle p^s, m_k \rangle$$

böylece her tam sayı için

$$\max_k \langle i, n_k \rangle = \max_k \langle i, m_k \rangle$$

dir ki her bir $f \in \mathbf{AS}$ için

$$\lim R_{n_k} f = R_{m_k} f$$

dir. Eğer $p^h | n_k$ ise, bu durumda $R_{n_k} e_{p^h} = e_{p^h}$ diğer durumda $R_{n_k} e_{p^h} = 0$ sıfırdır. Dolayısıyla koşul gereklidir.

Böylece $\lim R_{n_i} f$ formunun iz düşümleri tamamen

$$\phi = \{p^k : p \text{ bir asal sayıdır ve } p^k \text{ bazı } i \text{ ler için } n_i \text{ yi böler}\}$$

kümesi tarafından belirlenir. Böylece,

$$\lim R_{n_i} f = R_\phi f$$

elde edilir.

Önerme 3.4.1 $\ell^1 \subset \mathbf{AS}$ ancak $\mathbf{AS}$, ℓ^∞ tarafından kapsanmaz.

İspat: İlk kapsama açıktır. $\mathbf{AS}$ de olan ancak ℓ^∞ da olmayan bir diziyi bulmak için önce

$\omega(n)$ ve $\Omega(n)$ olmak üzere iki diziyi aşağıdaki gibi tanımlayalım:

n tam sayısının farklı asal kuvvetlerine çarpanlara ayrılması

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$$

ise

$$\omega(n) = m$$

ve

$$\Omega(n) = \sum_{i=1}^m k_i$$

tanımlayalım ve

$$\omega(1) = \Omega(1) = 0$$

olsun. (Bakınız Hardy ve Wright 1960, s. 354). Eğer m ve n aralarında asal iki tam sayılar ise, bu durumda

$$\omega(m+n) = \omega(m) + \omega(n)$$

ve

$$\Omega(m+n) = \Omega(m) + \Omega(n)$$

dir. Böylece

$$f(n) = (-1)^{\Omega(n)} 2^{\omega(n)}$$

tarafından tanımlanan dizi, iki çarpımsal dizilerin sonucu olan çarpımsaldır. Açıkça f sınırlı değildir. f nin $\mathbf{BAS}$ ta olduğunu göstermek için ilki f çarpımsaldır, böylece

$$g(m) = \sum_{n|m} f(n)$$

ile tanımlanan g dizisi de çarpımsaldır (Hardy ve Wright 1960).

Bir asal p için

$$g(p^k) = f(1) + f(p) + f(p^2) + \dots + f(p^k) = 1 - 2 + 2 - \dots + (-1)^k 2 = (-1)^k$$

dir böylece her n için

$$|g(n)| = 1$$

böylece $f \in \mathbf{BAS}$ dir. **AS** de sınırsız bir dizi oluşturmak için $p_1 p_2 \dots p_{2n}$ asallarının ilk $2n$ nin ürünü (k_n) olmak üzere

$$h_n = (R_{k_n} - R_{k_{n-1}})f$$

olsun. Bu durumda,

$$\|h_n\|_{\mathbf{BAS}} \leq \|R_{k_{n-1}}f\|_{\mathbf{BAS}} + \|R_{k_n}f\|_{\mathbf{BAS}} \leq 2$$

fakat

$$h_n(k_n) = 4^n$$

dir. Her bir h_n , φ de olduğundan ve sıfırdan farklı ortak koordinatlara sahip olmadığından

$$\sum_n 2^{-n} h_n$$

AS de bir diziye mutlak yakınsar fakat ℓ^∞ da değildir.

Sonraki iki sonuç, **AS** nin alt uzaylarının altta yatan koordinatlarının doğası ile ayırt edilen özellikleriyle ilgilidir.

Teorem 3.4.4 Kabul edelim ki (n_i) , elamanları aralarında asal olan artan bir dizidir. Eğer f , bazı i ler için $j = n_i$ olmadıkça $f(j) = 0$ olacak şekilde bir dizi ise, bu durumda $f \in \mathbf{BAS}$ dir gerek ve yeter şart $f \in \ell^1$ dir. Böylece, f de **AS** dedir.

İspat: Eğer $f \in \ell^1$ ise, o zaman f açıkça **AS** dedir. Şimdi $f \in \mathbf{BAS}$ olduğunu kabul edelim. İlk olarak f nin reel değerli dizilerden oluştuğunu varsayalım.

$$M = \{n_i : f(n_i) > 0\}$$

alınsın. Eğer

$$\sum_{j \in M} f(j) = \infty$$

ise, bu durumda

$$\sup \left\{ \sum_{i \in H} f(i) : H, M \text{ nin sonlu alt kümesidir} \right\}$$

kümesi sonsuzdur. Fakat H deki sayılar aralarında asal olduğundan

$$N = \prod_{k \in H} k$$

sayısının tek çarpanı H deki sayılardır. Bu demektir ki

$$\left\{ \sum_{i \in H} f(i) : H, M \text{ nin sonlu alt kümesidir} \right\} = \sum_{i|N} f(i)$$

böylece f , **BAS** da olamaz. Benzer şekilde

$$\sum \{f(j) : f(j) < 0\}$$

nın $-\infty$ olmadığını iddia edebiliriz. Son olarak

$$\max\{|a|, |b|\} \leq |a + bi| \leq |a| + |b|$$

eşitsizliğini, karmaşık bir dizinin **BAS** da olduğunu doğrulamak için kullanabiliriz gerek ve yeter şart gerçek ve sanal kısımları da **BAS** dadır.

Teorem 3.4.5 p bir asal sayı ise, bu durumda her $f \in \mathbf{BAS}$ için

$$\sup_n \left| \sum_{i=1}^n f(p^i) \right| < \infty$$

ve her $f \in \mathbf{AS}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(p^n)$$

yakınsar.

İspat: İlk sonuç, **BAS** ın tanımından ikinci sonuç ise limitin her $f \in \varphi$ için var olduğu gerçeğinden açıktır ve φ , **AS** de yoğundur.

3.5 $\mathbf{AS}^*$ ve $\mathbf{AS}_0^*$

$\mathbf{AS}$, $C[0,1]$ uzayına izomorfik olduğundan $\mathbf{AS}^*$, $C[0,1]$ in dual uzayına izomorfiktir, yani $[0,1]$ üzerindeki düzgün sürekli ve toplamsal ölçümlerdir (Dunford ve Schwartz 958). Bununla birlikte birincil ilgi alanımız bir dizi uzayı olarak $\mathbf{AS}^*$ ın doğası olacaktır.

Lemma 3.5.1 Eğer $f \in \varphi$ ise, bu durumda

$$\sup \left\{ \left| \sum_i f(i)g(i) \right| : \|g\|_{\mathbf{AS}} \leq 1 \right\} = \|M^T f\|_{\ell^1} = \sum_i \left| \sum_j \mu\left(\frac{j}{i}\right) f(j) \right|$$

dir.

İspat: $\|g\|_{\mathbf{AS}} \leq 1$ ise, bu durumda

$$\|Wg\|_{\ell^\infty} = \sup_i \left| \sum_{j|i} g(j) \right| \leq 1$$

öyle ki

$$\begin{aligned} \left| \sum_i f(i)g(i) \right| &= \left| \sum_i f(i)((MWg)(i)) \right| = \left| \sum_i (M^T f)(i)((Wg)(i)) \right| \\ &\leq \|M^T f\|_{\ell^1} \|Wg\|_{\ell^\infty} \\ &\leq \|M^T f\|_{\ell^1} \end{aligned}$$

dir. $f \in \varphi$ olduğundan, $M^T f$ dizisi φ dedir çünkü M^T nin sütunları φ dedir. $i > n$ için

$$M^T f(i) = 0$$

olacak şekilde bir n olduğunu kabul edelim ve $|h(i)| \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir h dizisi alalım ve her $i \leq n$ için

$$h(i)M^T f(i) = |M^T f(i)|$$

olsun. m , $1 \leq i \leq n$ tam sayılarının en küçük ortak katı ve $x = Q_m h$ olsun. Bu durumda h , **AC** dedir,

$$\|x\|_{\mathbf{AS}} = 1 \text{ ve } \langle M^T f, x \rangle = \sum |M^T f(i)|$$

dir.

Teorem 3.5.1 Aşağıdaki ifadeler bir f dizisi için birbirine denktir:

(a) f , **AS**^{*} dadır.

(b) Bir A matrisi vardır öyle ki

$$\sup_n \left\{ \sum_j |A(n, j)| \right\} < \infty$$

ve her bir k için

$$\lim_n \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A(n, kj) \right\}$$

limit vardır ve $f(k)$ ya eşittir.

(c) $\{M^T R_n f : n = 1, 2, \dots\}$, ℓ^1 in sınırlı bir alt kümesidir.

(d) $\{M^T R_n f : n \in A\}$, bazı tam sayıların kümesi A için ℓ^1 in sınırlı bir alt kümesidir öyle ki her m tam sayısı için $m|n$ olacak şekilde $n \in A$ vardır.

(e) Her bir $g \in \mathbf{AS}$ için

$$h(i) = f(i)g(i)$$

biçiminde tanımlanan

$$h = fg$$

çarpım dizisi $\mathbf{AS}$ dedir.

(f) Her bir $g \in \mathbf{BAS}$ için

$$h(i) = f(i)g(i)$$

biçiminde tanımlanan

$$h = fg$$

çarpım dizisi $\mathbf{BAS}$ dadır.

(g) $\Delta(f)$, köşegen f ile köşegen matrisi gösteriyor ise böylece

$$\Delta(f)(i, j) = \begin{cases} f(i) & i = j \text{ ise,} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

dır ve $A = W \Delta(f) M$ matrisinin satırları

$$\sup_i \sum_j |A(i, j)| < \infty$$

koşulunu sağlar.

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$ Doğrudan Teorem 3.2.2 den açıktır. F ,

$$F(e_k) = f(k)$$

olacak şekilde bir fonksiyonel ve A ,

$$G(g) = F(Mg) \text{ (bileşke)}$$

biçiminde tanımlanan **AC** üzerindeki fonksiyoneli belirleyen herhangi bir matris ise, bu durumda

$$F(e_k) = F(Md_k) = \lim_n \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A(n, km) \right\}$$

dir.

$(a) \Rightarrow (c)$: Eğer F_n , her bir $g \in \mathbf{AS}$ için

$$F_n(g) = \sum_{i|n} f(i)g(i)$$

biçiminde tanımlanan bir fonksiyonel ise, bu durumda Lemma 3.5.1 den

$$\left| \sum_{i|n} f(i)g(i) \right| = \left| \sum_{i|n} f(i)(R_n g)(i) \right| \leq \|R_n g\| \|f\| \leq \|f\| \|g\|$$

öyle ki $\{R_n f : n = 1, 2, \dots\}$ zayıf sınırlı ve böylece sınırlıdır. M dönüşümü, $\mathbf{AS}^*$ ın göreceli topolojisine sahip φ den ℓ^1 e bir izometridir dolayısıyla (c) geçerlidir.

$(c) \Rightarrow (d)$ Açıktır.

$(d) \Rightarrow (a)$: (d) sağlanır ise, bu durumda $\{R_n f\}$, $\mathbf{AS}^*$ da sınırlı bir dizidir. F_n , her bir $g \in \mathbf{AS}$ için

$$F_n(g) = \sum_i (R_n f)(i)g(i)$$

olan fonksiyoneli gösterebiliriz.

$$\sum_i (R_n f)(i)g(i) = \sum_{i|n} f(i)g(i) = \sum_i f(i)(R_n g)(i)$$

olduğundan, $F(R_n g)$ nin sınırlı olduğu anlaşılır. Ancak $R_n g$, $\mathbf{AS}$ de g ye yakınsar böylece $\mathbf{AS}$ üzerinde sürekli doğrusal bir F fonksiyoneli vardır öyle ki her bir i için

$$F(g) = \lim_n f(R_n g) \text{ ve } F(e_i) = \lim_n f(R_n e_i) = f(i)$$

yani $f \in \mathbf{AS}^*$ dır.

(a) $\Rightarrow$ (e):

$$Eg = \lim_{n!} \sum_{k|n!} g(k)$$

formülü ile $\mathbf{AS}$ üzerinde tanımlanan fonksiyonel, $g \in \varphi$ için

$$Eg = \sum_i g(i)$$

özelliğine sahiptir yani E , $\mathbf{AS}$ üzerinde bir toplamdır. Eğer f , $\mathbf{AS}$ nin bir çarpanı ise, bu durumda

$$F(g) = E(fg)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonel

$$F(e_i) = f(e_i)$$

özelliğine sahiptir yani $f \in \mathbf{AS}^*$ dır.

(e) $\Rightarrow$ (c): $f \in \mathbf{AS}^*$ ve $g \in \mathbf{AS}$ ise burada her i için

$$F(e_i) = f(i)$$

dir. Her bir n için

$$\left| \sum_{i|n} f(i)g(i) \right| = |F(R_n g)| \leq \|F\| \|R_n g\| = \|F\| \|g\|$$

dir.

(e) $\Rightarrow$ (f): Tüm $g \in \mathbf{BAS}$ için $fg \in \mathbf{BAS}$ ise, bu durumda $\mathbf{BAS}$ tan $\mathbf{BAS}$ a

$$g \rightarrow fg$$

biçiminde tanımlanan diyagonal dönüşüm Kapalı Grafik Teoremi gereğince süreklidir.

Dönüşüm altındaki φ nin görüntüsü φ olduğundan, $\mathbf{AS}$ nin görüntüsünün φ nin tamlaması yani, $\mathbf{AS}$ olduğu sonucu ortaya çıkar.

(f) $\Rightarrow$ (e), (e) $\Rightarrow$ (c) nin ispatına benzerdir. Çünkü $R_n g$, φ dedir, dolayısıyla $\mathbf{AS}$ dedir.

$(f), (g)$ ye denktir: M, ℓ^∞ u **BAS** a eşler ve $W, \mathbf{BAS}$ ı ℓ^∞ a eşler. Eğer $f, \mathbf{AS}^*$ da ise, bu durumda $\Delta(f), \mathbf{BAS}$ ı **BAS** a eşler böylece $W\Delta(f)M, \ell^\infty$ u kendine eşler, bu da verilen koşulu sağlar. $W\Delta(f)M, \ell^\infty$ u kendi içine eşler ise, bu durumda $g \in \mathbf{BAS}$ için $Wg \in \ell^\infty$ böylece

$$W\Delta(f)MWg = W\Delta(f)g$$

ℓ^∞ dadır ve sonuç olarak

$$MW\Delta(f)g = \Delta(f)g = fg \in \mathbf{BAS}$$

dır.

(a) ve (e) nin denkliği şu anlamdadır: **AS**, bir toplam uzaydır (Ruckle 1972). Çünkü her koordinatta 1 değerine sahip e dizisini açıkça içerir. Bu aynı zamanda $\mathbf{AS}^*$ ın koordinatsal yakınsama açısından bir cebir olduğu anlamına gelir.

Önerme 3.5.1 $\omega(k)$, k nın asal çarpanlarının sayısı olmak üzere, **AS** üzerindeki

$$E_k(f) = f(k)$$

koordinat fonksiyonelinin normu $2^{\omega(k)}$ dır.

İspat: Tanımdan $\|E_k\|, f \in \mathbf{AS}$ dizileri üzerinde $|f(k)|$ değerlerinin maksimumudur öyle ki

$$\|f\| = \|Mf\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i|n} f(i) \right| : n = 1, 2, \dots \right\} \leq 1$$

dir. $\varphi, \mathbf{AS}$ de yoğun olduğundan $f \in \varphi$ nin supremunu düşünebiliriz. Möbius Ters Çevirme Teoremine göre

$$f(k) = \sum_{n|k} \mu\left(\frac{k}{n}\right) (Mf)(n) = \sum_{n|k} \mu\left(\frac{k}{n}\right) \left(\sum_{i|n} f(i) \right)$$

dir. Her bir n için

$$\left| \sum_{i|n} f(i) \right| \leq 1$$

olduğundan

$$|f(k)| \leq \sum_{n|k} \left| \mu\left(\frac{k}{n}\right) \right| = 2^{\omega(k)}$$

elde edilir (Hardy ve Wright 1960).

$g(k)$ nın maksimum olduğu φ de bir g dizisi elde etmek için ilk olarak Önerme 3.3.1 in ispatında

$$f(n) = \mu(n).2^{\omega(n)}$$

biçiminde tanımlanan f dizisini kullanılır. Bu durumda, $g = R_k f$ alınır.

Önerme 3.5.2 f, ℓ^1 uzayı üzerinde değişirken $\mathbf{AS}_0^*$ uzayı

$$g(n) = \sum_{n|i} f(i)$$

biçimindeki tüm g dizilerinden oluşur. Böylece

$$\mathbf{AS}_0^* = W^T \ell^1$$

ve $\mathbf{AS}_0^*$ üzerindeki BK topolojisi ℓ^1 e izomorfiktir.

İspat: W matrisi, $\mathbf{AS}$ den $\mathbf{AC}$ ye bir izometri belirler. Bu T matrisinin dual operatörü (mutlaka bir matris değildir), $\mathbf{AC}$ nin dual uzayı olan $\mathbf{AC}^*$ dan $\mathbf{AS}$ nin dual uzayı olan $\mathbf{AS}^*$ a bir izometri belirler. φ deki bir f dizisi

$$\sum |f(i)|$$

normuna sahip

$$\langle f, g \rangle = \sum f(i) g(i)$$

ile $\mathbf{AC}$ üzerinde sürekli bir doğrusal fonksiyonel belirler. Bu fonksiyonelin $d_n, n = 1, 2, \dots$ üzerindeki değeri

$$\sum_{n|i} f(i)$$

dir. Bu W^T nin φ üzerindeki T eşlemesiyle çakıştığı anlamına gelir ve ℓ^1 in göreceli topolojisine sahip φ uzayını $\mathbf{AS}^*$ ın göreceli topolojisine veya eşdeğeri olarak $\mathbf{AS}_0^*$ topolojisine sahip φ üzerine eşler. W^T nin tüm ℓ^1 e genişlemesi $W^T \ell^1$ dir ki böylece iddia geçerlidir.

$\mathbf{AC}^*$ bir cebir olduğundan, önceki sonuç aşağıdaki sonuca sahiptir.

Sonuç 3.5.1 Eğer f ve g , ℓ^1 de ise, bu durumda ℓ^1 de bir tek h dizisi vardır öyle ki her bir k için

$$\left(\sum_{k|i} f(i)\right)\left(\sum_{k|i} g(i)\right) = \left(\sum_{k|i} h(i)\right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: f ve g , ℓ^1 de olduğundan

$$\left(\sum_{k|i} f(i)\right) \text{ ve } \left(\sum_{k|i} g(i)\right)$$

dizileri $\mathbf{AS}_0^*$ dadır, öyle ki

$$\left(\left(\sum_{k|i} f(i)\right)\left(\sum_{k|i} g(i)\right)\right)$$

çarpımı da $\mathbf{AS}_0^*$ da olup, böylece ℓ^1 de çarpımı belirleyen bir tek h vardır.

Ancak ℓ^1 deki her dizi böyle bir ayrışımaya yol açmaz çünkü $\mathbf{AS}_0^*$, ℓ^1 i içermez. Teorem 3.3.4 ün “dual” sonucu bir sonraki teoremden verilmiştir.

Teorem 3.5.2 Kabul edelim ki (n_i) , elamanları aralarında asal olan artan bir tam sayı dizisi olsun. Eğer f sınırlı bir dizi ise, bu durumda $\mathbf{AS}^*$ da her bir i için

$$g(n_i) = f(i)$$

olacak şekilde bir g dizisi vardır. Eğer f , 0 a yakınsayan bir dizi ise, bu durumda $\mathbf{AS}_0^*$ da her bir i için

$$g(n_i) = f(i)$$

olacak şekilde bir g dizisi vardır.

İspat: Teorem 3.3.4 e göre, $i \notin \{n_j\}$ ise $h(i) = 0$ olan $\mathbf{AS}$ deki h dizilerin uzayı ℓ^1 e izomorfiktir. Bu uzayda sürekli lineer bir x fonksiyoneli var olduğunu gerektirir öyle ki

$$x(e_{n_i}) = f(i)$$

dir. Eğer y , tüm $\mathbf{AS}$ de x in bir genişlemesi ise, g yi tüm i ler için

$$g(i) = y(e_i)$$

ile tanımlanan dizi olarak alınsın. 0 a yakınsayan bir dizi için $\mathbf{AS}_0^*$ ın $\mathbf{AS}$ deki e_i nin kapanışı olduğu gerçeği kullanılarak, böylece $\mathbf{AS}_0^*$, n_j üzerinde 0 a yakınsak olan dizileri içerir.

Yukarıdaki teoremin ikinci ifadesinin yeniden ifadesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.5.3 Eğer (n_i) , elamanları aralarında asal olan artan bir tam sayı dizisi ve f , 0 a yakınsayan bir dizi ise, bu durumda ℓ^1 de her bir i için

$$f(n_i) = \sum_{n_i|k} g(k)$$

olacak şekilde bir g dizisi vardır.

Örneğin, P çarpımı ile farklı asal sayılar $i = 1, p_1, p_2, \dots, p_k$ için $f(i) = 1$ ve $i > P$ için $f(i) = 0$ olan f dizisi, $g(P) = 1$ ve aksi takdirde $g(i) = 0$ olan g dizisi tarafından üretilir.

4. ARİTMETİK TOPLANABİLİRLİK VE ÇARPAN DİZİLER

Bu bölümde, Yaying ve Hazarika (2012) tarafından yapılan makaledeki tanım, teorem ve lemmalar ispatlarıyla birlikte not edilecektir.

4.1 Aritmetik Yakınsak Diziler Uzayı

Bu bölümde, aritmetik yakınsak dizi uzayının temel özellikleri incelenecek ve bu uzayla ilgili bazı ilginç sonuçlar verilecektir.

Öncelikle aritmetik yakınsak dizilerin uzayı olan **AC** uzayı

$$\mathbf{AC} = \{(x_m): \varepsilon > 0, \text{ her } m \text{ ve bir } n \text{ tam sayısı için, } |x_m - x_{\langle m,n \rangle}| < \varepsilon\}$$

biçiminde verilsin.

Teorem 4.1.1 Aritmetik yakınsak olan her dizi sınırlıdır.

İspat: Teoremin ispatı açıktır.

Teorem 4.1.2 Eğer (x_m) ve (y_m) herhangi iki aritmetik yakınsak dizi ise, bu durumda

(i) $(x_m \pm y_m)$ dizileri de aritmetik yakınsaktır.

(ii) $(x_m y_m)$ dizisi de aritmetik yakınsaktır.

İspat: (i) (x_m) ve (y_m) , **AC** uzayında diziler olduğundan $\varepsilon > 0$, her m ve bir n tam sayısı için

$$|x_m - x_{\langle m,n \rangle}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad |y_m - y_{\langle m,n \rangle}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu açıktır. Şimdi her m ve bir n tam sayısı için

$$\begin{aligned} |(x_m \pm y_m) - (x_{\langle m,n \rangle} \pm y_{\langle m,n \rangle})| &= |(x_m - x_{\langle m,n \rangle}) \pm (y_m - y_{\langle m,n \rangle})| \\ &\leq |x_m - x_{\langle m,n \rangle}| + |y_m - y_{\langle m,n \rangle}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $(x_m \pm y_m)$ nin **AC** uzayında olduğunu gösterir.

(ii) Yakınsak olan (x_m) ve (y_m) dizileri sınırlıdır. Dolayısıyla, K_1 ve K_2 pozitif sayıları vardır öyle ki her m için

$$|x_m| \leq K_1 \text{ ve } |y_m| \leq K_2$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu durumda, bir n tam sayısı ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} |x_m y_m - x_{\langle m,n \rangle} y_{\langle m,n \rangle}| &= |x_m (y_m - y_{\langle m,n \rangle}) + y_{\langle m,n \rangle} (x_m - x_{\langle m,n \rangle})| \\ &\leq |x_m| |y_m - y_{\langle m,n \rangle}| + |y_{\langle m,n \rangle}| |x_m - x_{\langle m,n \rangle}| \\ &\leq K_1 |y_m - y_{\langle m,n \rangle}| + |y_{\langle m,n \rangle}| |x_m - x_{\langle m,n \rangle}| \end{aligned}$$

elde edilir. Yine $\varepsilon > 0$ ve her m için

$$|x_m - x_{\langle m,n \rangle}| < \frac{\varepsilon}{2|y_{\langle m,n \rangle}|} \text{ ve } |y_m - y_{\langle m,n \rangle}| < \frac{\varepsilon}{2K_1}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece, bir n tam sayısı ve $\varepsilon > 0$ için

$$|(x_m \pm y_m) - (x_{\langle m,n \rangle} \pm y_{\langle m,n \rangle})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.3 AC uzayındaki her dizi Cauchy şartını sağlar.

İspat: (x_m) , AC uzayında herhangi bir dizi olsun.

$\Rightarrow (x_m)$ aritmetik yakınsaktır.

$\Rightarrow \varepsilon > 0$ olacak şekilde her m ve bazı n tam sayısı için

$$|x_m - x_{\langle m,n \rangle}| < \varepsilon$$

olsun. Her $m, n \geq K$ için, $\langle m, j \rangle = \langle n, j \rangle$ olacak şekilde bir K alınsın. Bu durumda, $\varepsilon > 0$, her $m, n \geq K$ ve bir j tam sayısı için

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{\langle m,j \rangle} + x_{\langle m,j \rangle} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{\langle m,j \rangle}| + |x_{\langle m,j \rangle} - x_n| \\ &= |x_m - x_{\langle m,j \rangle}| + |x_n - x_{\langle m,j \rangle}| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_m) Cauchy şartını sağlar.

Teorem 4.1.4 Eğer (x_n) , $x_n \geq 0$, her n ve bir m tam sayısı için $x_{\langle m,n \rangle}$ ye aritmetik yakınsak ise, bu durumda $x_{\langle m,n \rangle} \geq 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $x_{\langle m,n \rangle} < 0$ olsun. Şimdi $(x_n) \in \mathbf{AC}$ olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir m tam sayısı vardır, öyle ki her n için

$$|x_n - x_{\langle m,n \rangle}| < \varepsilon$$

olup,

$$x_{\langle m,n \rangle} - \varepsilon < x_n < x_{\langle m,n \rangle} + \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi $\varepsilon = -\frac{x_{\langle m,n \rangle}}{2}$ seçelim, böylece her n ve bir m tam sayısı için

$$x_{\langle m,n \rangle} + \frac{x_{\langle m,n \rangle}}{2} < x_n < x_{\langle m,n \rangle} - \frac{x_{\langle m,n \rangle}}{2}$$

olup,

$$x_n < \frac{x_{\langle m,n \rangle}}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Her n ve bir m tam sayısı için

$$x_{\langle m,n \rangle} < 0 \Rightarrow x_n < 0$$

olduğundan böylece bir çelişki elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

4.2 Çarpan Diziler Uzayı

Ruckle (2012), aritmetik toplanabilir dizilerin uzayını

$$\mathbf{AS} = \left\{ (x_k) : \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ ve her } m \text{ için, } \left| \sum_{k|m} x_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} x_k \right| < \varepsilon \right\}$$

biçiminde tanımladı.

$\lambda = (\lambda_m)$, pozitif reel sayıların artan bir dizisi olsun, öyle ki

$$\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1, \lambda_1 = 1, \lambda_m \rightarrow \infty (m \rightarrow \infty)$$

dir (Leindler 1965). Çarpan dizisini kullanarak yeni dizi uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{AC}(\Lambda) = \{ (x_m) : \varepsilon > 0, \text{ her } m \text{ ve bir } n \text{ tam sayısı için, } |\lambda_m x_m - \lambda_{\langle m,n \rangle} x_{\langle m,n \rangle}| < \varepsilon \}$$

ve

$$\mathbf{AS}(\Lambda) = \left\{ (x_m) : \varepsilon > 0, \text{ her } m \text{ ve bir } n \text{ tam sayısı için, } \left| \sum_{k|m} \lambda_k x_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} \lambda_k x_k \right| < \varepsilon \right\}.$$

Teorem 4.2.1 Eğer (x_m) ve (y_m) , $\mathbf{AC}(\Lambda)$ uzayında herhangi iki dizi ise, bu durumda $(x_m \pm y_m)$ toplam dizisi de $\mathbf{AC}(\Lambda)$ uzayındadır.

İspat: (x_m) ve (y_m) , $\mathbf{AC}(\Lambda)$ uzayında iki dizi olsun, bu durumda $\varepsilon > 0$, her m ve bir n tam sayısı için

$$|\lambda_m x_m - \lambda_{\langle m,n \rangle} x_{\langle m,n \rangle}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } |\lambda_m y_m - \lambda_{\langle m,n \rangle} y_{\langle m,n \rangle}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu açıktır. Böylece her m ve bir n tam sayısı için

$$\begin{aligned} & |\lambda_m (x_m \pm y_m) - \lambda_{\langle m,n \rangle} (x_{\langle m,n \rangle} \pm y_{\langle m,n \rangle})| \\ &= |(x_m \lambda_m - \lambda_{\langle m,n \rangle} x_{\langle m,n \rangle}) \pm (\lambda_m y_m - \lambda_{\langle m,n \rangle} y_{\langle m,n \rangle})| \\ &\leq |\lambda_m x_m - \lambda_{\langle m,n \rangle} x_{\langle m,n \rangle}| + |\lambda_m y_m - \lambda_{\langle m,n \rangle} y_{\langle m,n \rangle}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2 $x = (x_k)$ herhangi bir dizi ve n bir tam sayı ise, bu durumda

$$y_i = \frac{1}{\lambda_i} x_{\langle n,i \rangle}$$

ile tanımlanan

$$Q_n x = y$$

dizisi, $\mathbf{AC}(\Lambda)$ uzayındadır.

İspat: Her m ve bir n tam sayısı için

$$\langle n, \langle m, n \rangle \rangle = \langle n, m \rangle = \langle m, n \rangle$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |\lambda_m y_m - \lambda_{\langle m,n \rangle} y_{\langle m,n \rangle}| &= \left| \lambda_m \frac{1}{\lambda_m} x_{\langle n,m \rangle} - \lambda_{\langle m,n \rangle} \frac{1}{\lambda_{\langle m,n \rangle}} x_{\langle n, \langle m,n \rangle \rangle} \right| \\ &= |x_{\langle m,n \rangle} - x_{\langle m,n \rangle}| = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.3 $x = (x_k) \in \mathbf{AC}(\Lambda)$ ve her k için $n_k, n_k | n_{k+1}$ olacak şekilde tam sayıların bir dizisi ise, bu durumda

$$(y_k) = (\lambda_{n_k} x_{n_k})$$

dizisi yakınsar.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin ve $m \in \mathbb{N}$ olsun öyle ki her i için

$$|\lambda_i x_i - \lambda_{\langle i, m \rangle} x_{\langle i, m \rangle}| < \varepsilon$$

olduğu açıktır. Tüm $k \geq K$ için

$$\langle m, n_k \rangle = \langle m, n_{k+1} \rangle$$

olacak şekilde K alalım. Böylece, her $i, j \geq K$ için

$$\begin{aligned} |y_i - y_j| &= |\lambda_{n_i} x_{n_i} - \lambda_{n_j} x_{n_j}| = |\lambda_{n_i} x_{n_i} - \lambda_{\langle n_i, m \rangle} x_{\langle n_i, m \rangle} + \lambda_{\langle n_i, m \rangle} x_{\langle n_i, m \rangle} - \lambda_{n_j} x_{n_j}| \\ &\leq |\lambda_{n_i} x_{n_i} - \lambda_{\langle n_i, m \rangle} x_{\langle n_i, m \rangle}| + |\lambda_{n_j} x_{n_j} - \lambda_{\langle n_i, m \rangle} x_{\langle n_i, m \rangle}| \\ &= |\lambda_{n_i} x_{n_i} - \lambda_{\langle n_i, m \rangle} x_{\langle n_i, m \rangle}| + |\lambda_{n_j} x_{n_j} - \lambda_{\langle n_j, m \rangle} x_{\langle n_j, m \rangle}| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (y_k) , Cauchy şartını sağlar ve böylece yakınsar.

Teorem 4.2.4 $(x_n) \in \mathbf{AC}(\Lambda)$ ve q_k , ortak çarpanı olmayan artan bir tam sayı dizisi ise, bu durumda

$$(h_k) = (\lambda_{q_k} x_{q_k})$$

dizisi $\lambda_1 x_1$ e yakınsar.

İspat: (x_n) , $\mathbf{AC}(\Lambda)$ da bir dizidir öyle ki verilen bir $\varepsilon > 0$, her n ve bir m tam sayısı için,

$$|\lambda_n x_n - \lambda_{\langle m, n \rangle} x_{\langle m, n \rangle}| < \varepsilon$$

olduğu açıktır. q_k , tam sayılarının ortak çarpanı olmadığından

$$\langle m, q_k \rangle > 1$$

olan tüm k lerin kümesi sonludur böylece $k \geq K$ için

$$\langle m, q_k \rangle = 1$$

olacak şekilde bir K vardır. Böylece, her $k \geq K$ için $\langle m, q_k \rangle = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} |\lambda_1 x_1 - h_k| &= |\lambda_1 x_1 - \lambda_{q_k} x_{q_k}| \\ &= |\lambda_{q_k} x_{q_k} - \lambda_{\langle m, q_k \rangle} x_{\langle m, q_k \rangle}| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.5 (x_n) ve (y_n) iki dizi öyle ki

(i) Her n için $x_n \leq y_n$ ve

(ii) Aritmetik olarak $x_n \rightarrow x_{\langle n, m_1 \rangle}$ ve $y_n \rightarrow y_{\langle n, m_2 \rangle}$

ise, bu durumda

$$x_{\langle n, m_1 \rangle} \leq y_{\langle n, m_2 \rangle}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Kabul edelim ki

$$x_{\langle n, m_1 \rangle} > y_{\langle n, m_2 \rangle}$$

olsun.

$$x_{\langle n, m_1 \rangle} - y_{\langle n, m_2 \rangle} = 3\varepsilon$$

olarak alınsın öyle ki $y_{\langle n, m_2 \rangle}$ ve $x_{\langle n, m_1 \rangle}$ in komşulukları sırasıyla

$$(y_{\langle n, m_2 \rangle} - \varepsilon, y_{\langle n, m_2 \rangle} + \varepsilon) \text{ ve } (x_{\langle n, m_1 \rangle} - \varepsilon, x_{\langle n, m_1 \rangle} + \varepsilon)$$

ayrıktır. Şimdi aritmetik olarak

$$x_n \rightarrow x_{\langle n, m_1 \rangle} \text{ ve } y_n \rightarrow y_{\langle n, m_2 \rangle}$$

olduğundan, $\varepsilon > 0$ için

i) her n ve bir m_1 tam sayısı için

$$x_{\langle n, m_1 \rangle} - \varepsilon < x_n < x_{\langle n, m_1 \rangle} + \varepsilon,$$

ii) her n ve bir m_2 tam sayısı için

$$y_{\langle n, m_2 \rangle} - \varepsilon < y_n < y_{\langle n, m_2 \rangle} + \varepsilon$$

olduğu açıktır.

$$m = \langle m_1, m_2 \rangle$$

olsun. Böylece

$$x_n \in (x_{\langle m, n \rangle} - \varepsilon, x_{\langle m, n \rangle} + \varepsilon) \text{ ve } y_n \in (y_{\langle m, n \rangle} - \varepsilon, y_{\langle m, n \rangle} + \varepsilon)$$

olup, sonuç olarak her n için

$$x_{\langle n, m \rangle} > y_{\langle n, m \rangle}$$

olduğundan

$$y_n < x_n$$

dir öyle ki bu da her n için

$$x_n \leq y_n$$

gerçeği ile çelişir.

Teorem 4.2.6 Eğer (x_n) ve (y_n) , **AS** uzayında herhangi iki dizi ise, bu durumda $(x_n \pm y_n)$ de **AS** uzayında bir dizidir.

İspat: (x_n) ve (y_n) , **AS** uzayında olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$, her n ve bir m tam sayısı için

$$\left| \sum_{k|n} x_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} x_k \right| < \varepsilon$$

ve

$$\left| \sum_{k|n} y_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} y_k \right| < \varepsilon$$

olduğu açıktır. Şimdi

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k|n} (x_k \pm y_k) - \sum_{k|\langle m,n \rangle} (x_k \pm y_k) \right| &= \left| \left(\sum_{k|n} x_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} x_k \right) \pm \left(\sum_{k|n} y_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} y_k \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k|n} x_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} x_k \right| + \left| \sum_{k|n} y_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} y_k \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.7 Eğer (x_n) ve (y_n) , **AS**(Λ) uzayında herhangi iki dizi ise, bu durumda $(x_n \pm y_n)$ de **AS**(Λ) uzayında bir dizidir.

İspat: (x_n) ve (y_n) , **AS**(Λ) de olduğundan, verilen bir $\varepsilon > 0$, her n ve bir m tam sayısı için

$$\left| \sum_{k|n} \lambda_k x_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} \lambda_k x_k \right| < \varepsilon$$

ve

$$\left| \sum_{k|n} \lambda_k y_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} \lambda_k y_k \right| < \varepsilon$$

olduğu açıktır. Şimdi

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k|n} \lambda_k (x_k \pm y_k) - \sum_{k|\langle m,n \rangle} \lambda_k (x_k \pm y_k) \right| \\
&= \left| \left(\sum_{k|n} \lambda_k x_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} \lambda_k x_k \right) \pm \left(\sum_{k|n} \lambda_k y_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} \lambda_k y_k \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{k|n} \lambda_k x_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} \lambda_k x_k \right| + \left| \sum_{k|n} \lambda_k y_k - \sum_{k|\langle m,n \rangle} \lambda_k y_k \right| \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.



5. KAYNAKLAR

- Altınışık E, Tuglu N, Haukkanen P, 2007, Determinant and inverse of meet and join matrices, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2007, Article ID 37580.
- Balcı M, 2016, Matematik Analiz-I, Palme Yayınevi, Ankara.
- Banach S, 1932, Theorie des Opérations Linéaires, Warsaw.
- Bayraktar M, 2006, Fonksiyonel Analiz, Pegem Akademi Yayınevi, Ankara.
- Berg I D, 1963, The algebra of semiperiodic sequences, Michigan Mathematical Journal, 10, 237-239.
- Berg I D, Wilansky A, 1962, Periodic, almost periodic and semi-periodic sequences, Michigan Mathematical Journal, 9, 263-268.
- Berg I D, 1966, The conjugate space of the space of semiperiodic sequences, Michigan Mathematical Journal, 13, 293-297.
- Dunford N, Schwartz J T, 1958, Linear Operators, Interscience Publishers.
- Goes G, Goes S, 1970, Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients, Mathematische Zeitschrift, 118, 93-102.
- Ruckle W H, 1972, Topologies on sequences spaces, Pacific Journal of Mathematics, 42, 235-249.
- Ruckle W H, 2012, Arithmetical summability, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 396, 741-748.
- Hardy G H, Wright E M, 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Edition, Oxford.
- Haukkanen P, Wang J, Sillanpää J, 1997, On Smith's determinant, Linear Algebra and its Applications, 258, 251-269.

- Haukkanen P, Tossavainen T, 2008, Approximation of arithmetical functions by even functions, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 10(1), 51-63.
- Jimenez M N, 1985, Multipliers on the space of semiperiodic sequences, Transactions of The American Mathematical Society, 291, 801-811.
- Leindler L, 1965, Über die la Vallée-Pousinsche Summierbarkeit Allgemeiner Orthogonalreihen, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 16, 375-387.
- Milutin A A, 1966, Isomorphisms of spaces of continuous functions on compacts of power continuum, Teoria Funct.(Kharkov), 2, 150-156 (in Russian).
- Schwarz W, Spilker J, 1994, Arithmetical functions, An introduction to elementary and analytic properties of arithmetic functions and to some of their almost-periodic properties, in: London Mathematical Society Lecture Note Series, Volume, 184, Cambridge University Press, Cambridge.
- Siddiqi J A, 1971, Infinite matrices summing every almost periodic sequence, Pacific Journal of Mathematics, 39, 235-251.
- Tóth, Haukkanen P, 2011, The discrete Fourier transform of even functions, Acta University Sapientiae, Mathematica, 3(1), 5-25.
- Tripathy B C, Mahanta S, 2004, On class of vector valued sequence associated with multiplier sequences, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 20(3), 487-498.