



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA FARKLI ÇATILARA GÖRE FONKSİYONLARIN
TEKİLLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DURMUŞ ÜNVER

NİSAN 2023

DURMUŞ ÜNVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NİSAN 2023

**ÖKLİD UZAYINDA FARKLI ÇATILARA GÖRE FONKSİYONLARIN
TEKİLLİKLERİ**

Durmuş ÜNVER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Durmuş ÜNVER tarafından hazırlanan “Öklid Uzayında Farklı Çatlara Göre Fonksiyonların Tekillikleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Ergin BAYRAM

Matematik Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 24/04/2023

Juri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Ümit YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Durmuş ÜNVER

24/04/2023

ÖKLİD UZAYINDA FARKLI ÇATILARA GÖRE FONKSİYONLARIN TEKİLLİKLERİ (Yüksek Lisans Tezi)

Durmuş ÜNVER

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
NİSAN -2023

ÖZET

Diferansiyel hesapla doğrudan ilgili olan tekillik teorisinin geometri ve dolayısıyla geometrik ruhun yol gösterici bir ışık olduğu matematiğin tüm dalları, fizik ve diğer disiplinlerle çok fazla ilgisi olduğu kesindir.

Bir çok geometrici, üç boyutlu Öklid uzayında jenerik diferansiyel geometriyi ve tekillikleri incelemekle ilgilenmişlerdir. Tekilliği incelemenin temel noktası, bir eğri veya yüzey üzerinde tanımlanan reel değerli karesel uzaklık ve yükseklik fonksiyonlarını tanımlamaktır. Extrinsic diferansiyel geometrinin klasik değişmezleri, bu iki fonksiyonun tekillikleri olarak ele alınabilir. Ayrıca tekillik teorisi ile ilgili bazı iyi yaklaşımlar Öklid Geometri, afin geometri, Galile Geometrisi ve Minkowski geometrisinde bulunabilir.

Bu tezde üç boyutlu Öklid uzayında uzay eğrileri üzerindeki uzaklık ve dayanak fonksiyonları kavramını tanıtıldı. Bu fonksiyonlar yardımıyla yüzeyin jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgilerinin tekillikleri için karakterizasyonlar verildi.

Sonuç olarak, bir yüzeyin jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgilerinin tekillikleri ile yukarıdaki fonksiyonlar için tekillik teorisinin temel tekniklerinin uygulamaları olarak Öklid hareket grubu altında bir eğrinin diferansiyel geometrik değişmezleri arasında bir ilişki kuruldu.

Sayfa Adedi : 58
Anahtar Kelimeler : Öklid uzayı, Eğriler, Singülerlik Teorisi.
Danışman : Doç. Dr. Tefik ŞAHİN

SINGULARITIES OF FUNCTIONS ACCORDING TO DIFFERENT FRAMES IN
EUCLIDEAN SPACE

(M. Sc. Thesis)

Durmuş ÜNVER

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April-2023

ABSTRACT

Singularity theory, being a direct descendant of differential calculus, is certain to have a great deal of interest to say about geometry and therefore about all the branches of mathematics, physics and other disciplines where the geometrical spirit is a guiding light.

Several geometers were interested in studying the singularities and generic differential geometry in three-dimensional Euclidean space. The main point of studying singularity is defining real-valued functions such as Euclidean squared- distance function and Euclidean height function defined on a curve or on a surface. The classical invariants of extrinsic differential geometry can be treated as singularities of these two functions. Also, some good approximations related to singularity theory in Euclidean Geometry, affine geometry, Galilean Geometry and Minkowski Geometry can be found.

In this thesis we introduce the concept of distance and height functions on space curves in three-dimensional Euclidean space. With the help of these functions, characterizations are given for the singularities of geodesic, asymptotic and curvature lines of a surface.

As a result, a relation is established between the geodesic, asymptotic and curvature line singularities of a surface and the differential geometric invariants of a curve under the Euclidean motion group as applications of the basic techniques of singularity theory for the above functions.

Page Number : 58
Keywords : Euclidean Space, Curves, Singularity Theory.
Supervisor : Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösterici olan, her türlü desteği ile yanımda olan, bilgi birikiminden faydalandığım ve öğrencisi olmaktan gurur duyduğum tez danışmanım sayın Doç. Dr. Tefik Şahin'e teşekkür ederim.

Çok kıymetli bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI hocama ayrıca teşekkür ederim.

Bunun yanında tez savunmama katılarak kritik noktalarda yapıcı eleştiriler getirerek tezin son halini almasını sağlayan değerli hocalarım Doç. Dr. Zehra Özdemir ile Doç. Dr. Ergin Bayram'a teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak bu süreçte ve hayatımın her alanında; aldığım kararlarda her zaman yanımda olan ve desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen, sevgili eşim Yonca ÜNVER'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEMLER	7
2.1. Tekillik Teorisi İle İlgili Bazı Temel Kavramlar	7
3. BULGULAR	14
3.1. Öklid Uzayında Darboux Çatısına Göre Karesel Uzaklık ve Dayanak Fonksiyonları ile Tekillikleri	14
3.1.1. Öklid uzayında Darboux çatısına göre jeodezik bir eğri için karesel uzaklık fonksiyonunun tekilliği	14
3.1.2. Öklid uzayında Darboux çatısına göre jeodezik bir eğri için dayanak fonksiyonunun tekilliği	22
3.1.3. Öklid uzayında Darboux çatısına göre asimptotik bir eğri için karesel uzaklık fonksiyonunun tekilliği	28
3.1.4. Öklid uzayında Darboux çatısına göre asimptotik bir eğri için dayanak fonksiyonunun tekilliği	34
3.2. Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Karesel Uzaklık ve Dayanak Fonksiyonları ile Tekillikleri	40
3.2.1. Öklid uzayında Bishop çatısına göre bir eğrinin karesel uzaklık fonksiyonunun tekilliği	40

3.2.2. Öklid uzayında Bishop çatısına göre bir eğrinin dayanak fonksiyonunun tekilliği	47
4. SONUÇ	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	58



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Bileşke Fonksiyon	7



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
α	Birim hızlı regüler eğri
M	Öklid uzayında bir yüzey
T	Eğrinin teğeti
n	Yüzeyin normali
Q	$Q = T \times n$
κ_g	Jeodezik eğrilik fonksiyonu
κ_n	Asimptotik eğrilik fonksiyonu
τ_g	Jeodezik burulma fonksiyonu
\mathbb{R}	Reel Sayılar kümesi
I	Reel Sayılar üzerinde bir açık aralık
\mathbb{R}^n	n boyutlu reel uzay
F	Karesel uzaklık fonksiyonu
f	Bir değişkenli uzaklık fonksiyonu
H	Dayanak fonksiyonu
h	Bir değişkenli dayanak fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bu tezde Öklid uzayında yüzey üzerinde eğrilerin tekilliklerini inceleyeceğimizden dolayı, bu bölümde Öklid uzayının bazı cebirsel özelliklerini vereceğiz.

1.1 Tanım $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A kümesine V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay denir.

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$,

(ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Burada $P, Q \in A$ için $f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$ şeklinde gösterilir. P noktasına \overrightarrow{PQ} vektörünün başlangıç noktası, Q noktasına da bitiş (uç) noktası denir (Hacısalıhoğlu H., 1982: 270).

1.2 Tanım \mathbb{R}^n kümesi reel sıralı n -lilerin kümesidir. Yani $\mathbb{R}^n = \{(p_1, \dots, p_n) \mid p_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}$.

\mathbb{R}^n kümesinin elemanları hem kümenin noktalarını hem de bu noktalara karşılık gelen konum vektörlerini gösterir.

\mathbb{R}^n kümesi üzerinde bir iç işlem olarak toplama işlemi

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ve} \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere,

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n)$$

şeklinde ve \mathbb{R}^n kümesi üzerinde bir dış işlem olarak skalerle çarpma işlemi de $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\lambda \mathbf{p} = (\lambda p_1, \dots, \lambda p_n)$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonuç : \mathbb{R}^n kümesi bu işlemlere göre \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Sonuç : \mathbb{R}^n kümesi \mathbb{R}^n vektör uzayıyla birleşen bir afin uzaydır.

1.3 Tanım $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ bir vektör olmak üzere \mathbf{v} vektörünün normu veya

büyüklüğü $\|\mathbf{v}\|$ notasyonu ile gösterilip,

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}$$

şeklindedir (Anton H., 2010)

1.4 Tanım \mathbb{R}^n kümesinde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ noktaları verilsin. Bu durumda \mathbf{u} ve \mathbf{v} noktaları arasındaki uzaklık $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ile gösterilip

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

şeklindedir (Anton H., 2010).

1.5 Tanım \mathbb{R}^n vektör uzayında $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ve $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ vektörleri verilsin. Bu vektörlerin skaler çarpımları (veya noktasal çarpımları) $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ ile gösterilip

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \sum_{j=1}^n p_j q_j$$

şeklindedir, Bu çarpım bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma Öklid iç çarpım denir (Anton H., 2010).

Sonuç : \mathbb{R}^n kümesi \mathbb{R}^n vektör uzayıyla birleşen bir afin uzayı olup, aynı zamanda \mathbb{R}^n vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlandığından dolayı \mathbb{R}^n afin uzayına bir Öklid uzayı denir (Hacısalıhoğlu H., 1982: 270).

1.6 Tanım M yüzeyi \mathbb{R}^3 Öklid uzayında bir regüler yüzey ve $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ olsun. Bu durumda

$$h, f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle \text{ ve } f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{v}\|^2.$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlara sırasıyla \mathbf{v} vektörüne göre dayanak fonksiyonu ve karesel uzaklık fonksiyonu denir (Gray A., 2006)

1.7 Tanım $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$$

diferansiyellenebilir fonksiyonuna (yani koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilir) uzayda bir eğri denir. Burada $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlarına α eğrisinin Öklidyen koordinat

fonksiyonları denir (O'Neill B., 1966: 411).

1.8 Tanım $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eğrisi \mathbb{R}^3 uzayında bir eğri olsun. I aralığındaki her t sayısı için α eğrisinin t değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektör

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)}$$

şeklindedir. Bu vektör aynı zamanda $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörüdür. Hız vektörünün normu ise eğrinin ilgili noktadaki hızıdır. Ayrıca bir eğrinin hız vektörü her t değeri için sıfırdan farklıysa eğriye regüler eğri denir (O'Neill B., 1966: 411).

1.9 Tanım $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. Eğer $h : J \rightarrow I$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise bu durumda

$$\beta = \alpha(h) : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

bileşke fonksiyonuda diferansiyellenebilir bir fonksiyon olup bu fonksiyona α nın h tarafından elde edilen yeni parametrisasyonu denir. Bu parametrik gösterimler aynı eğrinin farklı parçalarını gösterebilir (O'Neill B., 1966: 411).

1.10 Tanım Fizikte, hareketli bir parçacığın almış aldığı yol, parçacığın hızının zamana göre integralidir. Sonuç olarak eğrinin $t = a$ dan $t = b$ ye α eğrisinin yay uzunluğu

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

şeklindedir (O'Neill B., 1966: 411)

Aşağıda ispatını vermeyeceğimiz temel diferansiyel geometride iyi bilinen bir teoremi vereceğiz.

1.1 Teorem Eğer α eğrisi \mathbb{R}^3 uzayında bir regüler eğri ise, bu durumda β birim hızlı olacak şekilde α parametrik gösteriminden elde edilmiş β parametrik gösterimi vardır (O'Neill B., 1966: 411).

1.11 Tanım $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi üzerinde bir Y vektör alanı, I aralığındaki her bir t elde edilen $\alpha(t)$ noktasına bir $Y(t)$ tanjant vektörü karşılık getiren fonksiyondur (O'Neill B., 1966: 411).

1.12 Tanım $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Yani her $s \in I$ için $\|\beta'(s)\| = 1$ olsun. Bu durumda β üzerinde $T(s) = \beta'(s)$ vektör alanına birim teğet vektör alanı denir.

Birim teğet vektör alanının türevi yani $T'(s) = \beta''(s)$ vektör alanı \mathbb{R}^3 uzayında eğrinin

dönmesini ölçer. $T'(s)$ vektör alanına β eğrisinin eğrilik vektör alanı denir (O'Neill B., 1966: 411)

Sonuç $\langle T, T \rangle = 1$ eşitliğinden türev alındığında; $2\langle T', T \rangle = 0$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla T' vektör alanı her zaman T vektör alanına ortogondur, yani β eğrisine normaldir.

1.13 Tanım Eğrilik vektör alanının normuyla tanımlanan reel değerli fonksiyona β eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ ile gösterilip her $s \in I$ için

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

şeklindeir. κ fonksiyonu $\forall s \in I$ için β eğrisinin dönmesinin ölçüsünü verir (O'Neill B., 1966: 411).

1.14 Tanım β eğrisi üzerinde $N(s) = T'(s)/\kappa(s)$ vektör alanına β eğrisinin asal normal vektör alanı denir. Ayrıca $B(s) = T(s) \times N(s)$ vektör alanına β eğrisinin binormal vektör alanı denir (O'Neill B., 1966: 411).

1.2 Yardımcı Teorem β eğrisi \mathbb{R}^3 Öklid uzayında birim hızlı ve $\kappa > 0$ olan bir eğri olsun. Bu durumda β eğrisi üzerinde $T, N,$ ve B vektör alanları birim vektör alanları olup her bir noktada birbirlerine ortogonal olan vektör alanlarıdır (O'Neill B., 1966: 411).

1.15 Tanım β eğrisi üzerinde tanımlı $\{T, N, B\}$ ortonormal kümesine β eğrisinin Frenet çatı alanı denir (O'Neill B., 1966: 411).

1.3 Teorem (Frenet formülleri). Eğer $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri ve $\kappa > 0$ olmak üzere, bu durumda

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

şeklindeir. Bu denklemlere β eğrisinin Frenet denklemleri denir. Burada τ fonksiyonuna β eğrisinin burulma fonksiyonu denir (O'Neill B., 1966: 411)

1.16 Tanım Bir koordinat yaması $\chi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde tanımlı fonksiyon bire-bir ve regüler bir dönüşüme bir koordinat yaması denir. Burada D kümesi \mathbb{R}^2 uzayında bir açık kümedir. Eğer χ koordinat yaması için

$$\chi^{-1} : \chi(D) \rightarrow D$$

fonksiyonu var ve süreklirse bu durumda, χ koordinat yamasına has koordinat yaması adı verilir (O'Neill B., 1966: 411).

1.17 Tanım \mathbb{R}^3 uzayının bir M alt kümesi için M kümesinin her \mathbf{p} noktası için görüntüsü \mathbf{p} nin M kümesinde kalan en az bir komşuluğunu içeren bir has koordinat yaması varsa, bu durumda M kümesi \mathbb{R}^3 uzayında bir yüzeydir (O'Neill B., 1966: 411)

1.18 Tanım Eğer $\chi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklindeki regüler bir dönüşümün görüntüsü M yüzeyi üzerindeyse bu durumda χ dönüşümüne M kümesinde ki $\chi(D)$ bölgesinin bir parametrizasyonu denir (O'Neill B., 1966: 411)

1.19 Tanım $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin bir χ parametrizasyonu verilsin. Bu durumda yüzey üzerinde birim normal vektör alanı

$$n = \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|}$$

şeklindeir.

1.4 Yardımcı Teorem Eğer α eğrisi $\alpha : I \rightarrow M$ şeklinde M yüzeyinin bir χ parametrizasyonun $\chi(D)$ görüntüsündeysen bu durumda

$$\alpha(t) = \chi(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \text{ her } t,$$

olacak şekilde her t için; bir tek α_1, α_2 differensiyellenebilir fonksiyonlar vardır. Bu durumda kısaca

$$\alpha = \chi(\alpha_1, \alpha_2)$$

şeklindedir.

Bir M yüzeyi üzerinde bir α eğrisi verilsin. Bu eğri üzerinde $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı dışında, eğrinin her noktasında ikinci bir çatı daha vardır. T vektör alanı eğrinin birim teğet vektör alanı ve n birim vektör alanıdır yüzeyin her noktasında tanımlı birim normal vektör alanı olsun. Bu durumda $Q = n \times T$ vektör alanı hem T ve hem de n vektör alanlarına diktir. Ayrıca T ve n vektör alanları birim vektör alanları olduklarından Q vektör alanı da bir birim vektör alanıdır. Dolayısıyla $\{T, Q, n\}$ kümesi eğri üzerinde hareketli bir çatı alanıdır.

1.20 Tanım M bir yüzey ve α eğrisi yüzey üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda $\{T, Q, n\}$ çatısına Darboux çatısı veya teğet-normal çatı alanı denir (Gray A., 2006).

1.5 Teorem M bir yüzey ve α eğrisi M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda Darboux veya teğet-normal çatı alanını oluşturan vektör alanlarının türev denklemleri matris for-

munda;

$$\begin{bmatrix} T \\ Q \\ n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Q \\ n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\kappa_g, \kappa_n,$ ve τ_g sırasıyla jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik burulma fonksiyonlarıdır. Ayrıca bu eğrilikler arasında

$$\kappa^2 = \langle T', T' \rangle = \kappa_g^2 + \kappa_n^2,$$

şeklinde bir ilişki bulunmaktadır. Burada κ^2 ifadesi, α eğrisinin karesel eğriliğidir.



2. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu ünite; tezde bir yöntem olarak kullanılan tekillik teorisi ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

2.1. Tekillik Teorisi İle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Fonksiyonların tekilliklerini incelemek bazen çok zor hatta olanaksız olabilir. Bu gibi durumlarda bu fonksiyonlar yerine, bunlarla aynı tip tekilliğe sahip olan daha basit fonksiyonlarla çalışabiliriz. Bu ise fonksiyonlar arasında tanımlanan eşdeğerlikle mümkün kılınabilir.

2.1 Tanım $U_i, i = 1, 2$ reel sayılar kümesinde iki açık alt küme olmak üzere;

$$f_i : U_i, t_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Burada U_i, t_i sembolü; bu fonksiyonların noktalarının bir t_i komşuluğunda tanımlandığını gösterir. Eğer

$$h : V_1 \longrightarrow V_2$$

fonksiyonu bir diffeomorfizm (parametre değişimi) ve

$$\forall t \in V_1$$

için;

$$h(t_1) = t_2, f_1(t) = f_2(h(t)) - c$$

olacak şekilde $t_i \in V_i$ olan $V_i \subset U_i$ açık komşulukları ve bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı varsa; t_1 noktası komşuluğunda f_1 fonksiyonu, t_2 noktası komşuluğunda f_2 fonksiyonuna **eşdeğerdirler** (veya **sağ eşdeğerdirler**) denir (Bruce ve Giblin, 1992: 321).

Bu durumda t_1 noktası komşuluğunda f_1 fonksiyonu bir parametre değişimi ve sabit farkıyla t_2 noktası komşuluğunda f_2 fonksiyonundan elde edilebilir. Ayrıca fonksiyonlar arasındaki eşdeğerlik bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu tanım şema ile gösterilebilir.

$$\begin{array}{ccc} U_1 \supset V_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow \\ U_2 \supset V_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \end{array}$$

Şekil 2.1. Bileşke Fonksiyon

Fonksiyonlar arasındaki eşdeğerliği belirleme kriteri için aşağıdaki teoremin önemi büyüktür.

2.1 Teorem $f : \mathbb{R}, t_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon ve $k \geq 0$ bir tamsayı olsun. Eğer $1 \leq k \leq p$ olan tüm p sayıları için;

$$f^{(p)}(t_0) = 0, f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$$

ise t_0 noktası komşuluğundaki f fonksiyonu, 0 noktası komşuluğundaki

$$g : \mathbb{R}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, g(t) = \pm t^{k+1}$$

fonksiyonuna sağ-eşdeğerdir.

Burada g fonksiyonunun işareti, $f^{(k+1)}(t_0)$ değerinin pozitif veya negatif olmasına göre sırasıyla (+) veya (-) işaretini alır.

Kanıt (Bruce ve Giblin, 1992: 321). □

2.2 Yardımcı Teorem Hadamard Lemması

$f : \mathbb{R}, t_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon ve $k \geq 0$ bir tamsayı olsun. Eğer $1 \leq k \leq p$ olan tüm p sayıları için;

$$f^{(p)}(t_0) = 0$$

olsun. Bu durumda;

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t)$$

olacak şekilde $f_1 : \mathbb{R}, t_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu vardır. Eğer $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ şeklinde ise $f_1(t_0) \neq 0$ şeklindedir.

Kanıt (Bruce ve Giblin, 1992: 321). □

2.2 Tanım A_k Tekilliği

$f : \mathbb{R}, t_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu $\pm t^{k+1}$ fonksiyonuna sağ eşdeğer olsun. *Tanım* 2.1 ve *Teorem* 2.1 den dolayı $1 \leq k \leq p$ olan tüm p sayıları için; $f^{(p)}(t_0) = 0$ $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ olur. Bu durumda $k \geq 0$ için f fonksiyonuna t_0 noktasında A_k Tekilliğine sahiptir denir. (Bruce ve Giblin, 1992: 321).

2.3 Tanım Bir Fonksiyonun Jeti

$f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün (diferansiyellenebilir) fonksiyonunun bir t_0 noktası komşuluğundaki

Taylor serisi;

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + \dots$$

şeklindedir. Burada t yerine $t + t_0$ yazıldığında, fonksiyonun Taylor serisi;

$$f(t + t_0) = f(t_0) + t f'(t_0) + t^2 f''(t_0) + \dots + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + \dots$$

elde edilir. Bu durumda $k \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere;

$$J^k f(t_0) = t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t_0)$$

polinomuna f fonksiyonunun t_0 noktasındaki k -jeti denir (Bruce ve Giblin, 1992: 321).

2.4 Tanım Dallanmalar-Unfoldindgs

Bir f fonksiyonunu içeren fonksiyonların ailesine, f fonksiyonun dallanmaları denir (Bruce ve Giblin, 1992: 321).

Örneğin $f(t) = t^5$ fonksiyonun en genel dallanması

$$F(t, x_1, x_2, x_3) = t^5 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t$$

şeklindedir. Burada t^4 terimi uygun bir dönüşümle yok edilebileceğinden yazılmamıştır.

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde düzgün bir fonksiyon olsun. Bu F fonksiyonunu aşağıdaki gibi iki fonksiyon ailesi belirtir.

i) Buna göre ilk fonksiyon ailesi;

$$F_x : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, F_x(t) = F(t, x_1, \dots, x_r)$$

şeklinde olup r -parametrelili, 1-değişkenli bir fonksiyon ailesidir.

ii) İkinci fonksiyon ailesi de;

$$F_t : \mathbb{R}^r, x_0 \rightarrow \mathbb{R}, F_t(x) = F(t, x_1, \dots, x_r)$$

şeklinde olup 1-parametrelili, r -değişkenli bir fonksiyon ailesidir. Eğer

$$F_x : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = F_x(t) = F(t, x_1, \dots, x_r)$$

şeklinde yazıldığında F fonksiyonuna, f fonksiyonunun 1-değişkenli r -parametrelili dallan-

ması denir (Bruce ve Giblin, 1992:321).

Sonuç Bir t_0 noktasında A_k singülerliğine sahip olan her $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, bu t_0 noktasının komşuluğunda $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonlarından birine indirgenebilir (eşdeğerdir).

Kanıt Teorem 2.1 ve Tanım 2.2 den açıktır. □

2.5 Tanım (p)-Versal Dallanma

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_1 t + x_2 t^2 + s + x_{k-1} t^{k-1}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon ailesine; t_0 noktasında $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonunun bir (p)- versal dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992: 321). F fonksiyonunun (p)-versal dallanma olmasıyla ilgili kriterlerden biri matris kriteridir.

2.3 Teorem (p)-Versallik İçin Matris Kriteri

$$F_x : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, F_x(t) = F(t, x_1, \dots, x_r)$$

eşitliğiyle tanımlanan F fonksiyonu, bir t_0 noktası komşuluğunda A_k tekillliğine sahip olan bir f fonksiyonunun bir dallanması olsun ($k \geq 1$).

Bu durumda $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının $(k-1)$. dereceden jetleri;

$$J^k f(t_0) = t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t_0)$$

eşitliğinden

$$J^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) = \alpha_{1i} t + \alpha_{2i} t^2 + \dots + \alpha_{(k-1)i} t^{(k-1)}, i = 1, \dots, r$$

şeklinde olmak üzere; F fonksiyon ailesinin, f fonksiyonunun bir (p)-versal dallanması olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının;

$$J^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) = \alpha_{1i} t + \alpha_{2i} t^2 + \dots + \alpha_{(k-1)i} t^{(k-1)}, i = 1, \dots, r$$

eşitliğiyle verilen $(k-1)$. dereceden jetlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin, $((k-1) \times r)$ tipindeki $\alpha = (\alpha_{ji})$ katsayılar matrisinin rankının $(k-1)$ sayısına eşit olmasıdır.

Kanıt (Bruce ve Giblin, 1992: 321). □

2.6 Tanım Versal Dallanma

$$G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_1 + x_2 t + s + x_k t^{k-1}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon ailesine; t_0 noktasında $g(t) = \pm t^{k+1}$ fonksiyonunun bir versal dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992: 321). F fonksiyonunun versal dallanma olmasıyla ilgili kriterlerden biri matris kriteridir:

2.4 Teorem Versallik İçin Matris Kriteri

$$F_x : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, F_x(t) = F(t, x_1, \dots, x_r)$$

eşitliğiyle tanımlanan F fonksiyonu, bir t_0 noktası komşuluğunda A_k -tekilliği sahip olan bir f fonksiyonunun dallanması olsun ($k \geq 1$). Bu durumda $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının t_0 noktasındaki sabit ile birlikte $(k-1)$. dereceden jetleri;

$$J^k f(t_0) = t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t_0)$$

eşitliğinden

$$J^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} t + \alpha_{2i} t^2 + \dots + \alpha_{(k-1)i} t^{(k-1)}, i = 1, \dots, r$$

şeklinde olmak üzere; F fonksiyon ailesinin, f fonksiyonunun bir versal dallanma olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ fonksiyonlarının

$$J^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} t + \alpha_{2i} t^2 + \dots + \alpha_{(k-1)i} t^{(k-1)}, i = 1, \dots, r$$

eşitliğiyle verilen $(k-1)$. dereceden jetlerinin oluşturduğu lineer denklem sisteminin, $(k \times r)$ tipindeki $\alpha = (\alpha_{ji})$ katsayılar matrisinin rankının k sayısına eşit olmasıdır.

Kanıt (Bruce ve Giblin, 1992: 321). □

2.7 Tanım

$$F_x : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, F_x(t) = F(t, x_1, \dots, x_r)$$

denkleminle tanımlanan 1-değişkenli, r -parametrelili F fonksiyon ailesi ele alınsın:

i)

$$D_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r : F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin zarfı veya diskriminantı denir.

ii)

$$R_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r : F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, t \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin sırt (regresyon) kümesi denir.

iii)

$$S_F = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r : \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \right\}$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin (t, x) noktasındaki tekil kümesi denir.

iv)

$$B_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r : \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, t \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin ayrışım (bifurcation) kümesi denir (Bruce ve Giblin, 1992: 321).

Sonuç i) A_1 - tekilliğine sahip olan noktalar zarf kümesindedirler fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Çünkü zarfın singüler noktaları A_1 singülerliğine sahip değildir. A_1 tekilliğine sahip olan noktalar zarfın regüler noktaları yani sırt noktası olmayan zarf noktalarıdır.

ii) A_2 - tekilliğini sağlayan noktalar, F fonksiyonun sırt(regresyon) noktaları kümesinde bulunurlar.

iii) Eğer zarf ve sırt noktaları için, $F = 0$ şartı kaldırılırsa, bulunan noktaların kümesi sırasıyla tekil ve ayrışım kümeleri olur.

Kanıt Tanım 2.7 de verilen kümeler için *Tanım 2.2* kullanılırsa ispat açıktır. \square

2.5 Teorem

$$F_x : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = F_x(t) = F(t, x_1, \dots, x_r)$$

eşitliğiyle tanımlanan $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon ailesi, bir t_0 noktasında A_k - tekilliğine sahip olan bir f fonksiyonunun r -parametrelili bir dallanması olsun ($k \geq 1$).

(1) F fonksiyon ailesi bir (p)-versal dallanma olsun. Bu durumda;

- (a) $k = 2$ için, B_F ayrışım kümesi; $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.
- (b) $k = 3$ için, B_F ayrışım kümesi; $C \times \mathbb{R}^{r-2}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.
- (c) $k = 4$ için, B_F ayrışım kümesi; $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

(2) F fonksiyon ailesi bir versal dallanma olsun. Bu durumda;

- (a) $k = 1$ için, D_F diskriminant kümesi; $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.
- (b) $k = 2$ için, D_F diskriminant kümesi; $C \times \mathbb{R}^{r-2}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.
- (c) $k = 3$ için, D_F diskriminant kümesi; $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$ kümesine lokal olarak diffeomorftur.

Burada $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ köşeli (ordinary cusp) eğrisi ve

$$SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$$

parametrik denklemlerle belli olan kırılma kuyruğu (swallowtail) yüzeyidir.



3. BULGULAR

3.1. Öklid Uzayında Darboux Çatısına Göre Karesel Uzaklık ve Dayanak Fonksiyonları ile Tekillikleri

Öklid uzayında bir M yüzeyinin üzerinde bulunan bir eğriye bağlı olarak tanımlanan karesel uzaklık ve dayanak fonksiyonlarının tekilliklerini inceliyoruz.

Bunun için gerekli ardışık türevlerin sıfır olma koşullarını ifade etmeliyiz.

Bunun için ise genel eğri olma durumundan hareket edip daha sonra özel durumlara geçiş yapabiliriz.

Fakat eğriliklerin sıfır olma özel durumlarını en başta kullanmak hesaplamaları kolaylaştıracağından özel eğrilerin tekilliklerini araştırdık.

3.1 Tanım : $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık $M \subset E^3$ yönlendirilebilir bir yüzey ve M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı **jeodezik** bir eğri ve u , M yüzeyi üzerinde sabit bir nokta olsun. Bu eğri için $\forall s \in I$ noktasındaki Darboux Çatısı $\{T(s), Q(s), n(s)\}$ olmak üzere;

$$F : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(s, u) = \langle \alpha(s) - u, \alpha(s) - u \rangle$$

şeklinde tanımlı iki parametrelili düzgün fonksiyonların ailesi olarak $F(s, u)$ fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde karesel uzaklık fonksiyonu denir. u sabit bir nokta olduğu için $f(s) = F(s, u)$ olarak yazılabilir.

3.1.1. Öklid uzayında Darboux çatısına göre jeodezik bir eğri için karesel uzaklık fonksiyonunun tekilliği

3.1 Teorem : $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı jeodezik bir eğri olsun. $\forall s \in I$ noktasında Darboux çatısı $\{T(s), Q(s), n(s)\}$ ve karesel uzaklık fonksiyonu $F(s, u) = \langle \alpha(s) - u, \alpha(s) - u \rangle$ olmak üzere;

$$(1) f'(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda Q(s) + \mu n(s)$$

$$(2) f'(s) = f''(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda Q(s) - \frac{1}{\kappa_n(s)} n(s)$$

$$(3) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \frac{-\kappa'_n(s)}{\kappa_n^2(s) \tau_g(s)} Q(s) - \frac{1}{\kappa_n(s)} n(s)$$

$$(4) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = f^{(4)}(s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa_n''(s)\kappa_n(s)\tau_g(s) = \kappa_n^2(s)\tau_g^3(s) + 2(\kappa_n'(s))^2\tau_g(s) + \kappa_n(s)\kappa_n'(s)\tau_g'(s)$$

$$\alpha(s) - u = \frac{-\kappa_n(s)'}{\kappa_n(s)^2\tau_g(s)}Q(s) - \frac{1}{\kappa_n(s)}n(s)$$

$$(5) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = f^{(4)}(s) = f^{(5)}(s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \kappa_n''''(s)\kappa_n^2(s)\tau_g = & 5\kappa_n'(s)\kappa_n^2(s)\tau_g^3(s) + 3\kappa_n^3(s)\tau_g'(s)\tau_g^2(s) + 6\kappa_n(s)(\kappa_n'(s))^2\tau_g'(s) \\ & + 6(\kappa_n'(s))^3\tau_g(s) + \kappa_n'(s)\kappa_n^2(s)\tau_g''(s), \end{aligned}$$

$$\kappa_n''(s)\kappa_n(s)\tau_g(s) = \kappa_n^2(s)\tau_g^3(s) + 2(\kappa_n'(s))^2\tau_g(s) + \kappa_n(s)\kappa_n'(s)\tau_g'(s),$$

$$\alpha(s) - u = \frac{-\kappa_n(s)'}{\kappa_n(s)^2\tau_g}Q(s) - \frac{1}{\kappa_n(s)}n(s)$$

koşulları sağlar.

Kanıt : Öklid uzayında Darboux çatisı için $\{T', Q', n'\}$ türev formülleri

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ Q(s) \\ n(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g(s) & \kappa_n(s) \\ -\kappa_g(s) & 0 & \tau_g(s) \\ -\kappa_n(s) & -\tau_g(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ Q(s) \\ n(s) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada eğrimiz jeodezik bir eğri olduğundan κ_g fonksiyonel olarak sıfır olacağından, jeodezik eğri için Frenet Formülleri;

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa_n(s)n(s) \\ Q'(s) &= \tau_g(s)n(s) \\ n'(s) &= -\kappa_n(s)T(s) - \tau_g(s)Q(s) \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde olur. Ardışık türevlerde terimler çoğaldıkça parametreyi yazmak işlemleri uzatacağından aşağıdaki türevlerde parametreye yer verilmemiştir.

Şimdi karesel uzaklık fonksiyonunun sırası ile türevlerini bulalım.

$$f = \langle \alpha - u, \alpha - u \rangle$$

türevini aldığımızda;

$$f' = \langle \alpha', \alpha - u \rangle + \langle \alpha - u, \alpha' \rangle$$

burada iç çarpımın değişme özelliği kullanıldığında;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle \quad (3.2)$$

şeklinde bulunur.

3.2 denkleminin türevi alındığında;

$$\frac{1}{2}f'' = \langle T', \alpha - u \rangle + \langle T, \alpha' \rangle$$

elde edilir. Burada 3.1 Frenet türev formülleri kullanıldığında;

$$\frac{1}{2}f'' = \kappa_n \langle n, \alpha - u \rangle + 1 \quad (3.3)$$

olarak bulunur.

3.3 denkleminin türevi alındığında;

$$\frac{1}{2}f''' = \kappa_n' \langle n, \alpha - u \rangle + \kappa_n \langle n', \alpha - u \rangle + \underbrace{\kappa_n \langle n, \alpha' \rangle}_0$$

3.1 formülleri uygulandığında;

$$\frac{1}{2}f''' = \kappa_n' \langle n, \alpha - u \rangle + \kappa_n \langle \kappa_n T - \tau_g Q, \alpha - u \rangle$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\frac{1}{2}f''' = \kappa_n' \langle n, \alpha - u \rangle - \kappa_n^2 \langle T, \alpha - u \rangle - \kappa_n \tau_g \langle Q, \alpha - u \rangle \quad (3.4)$$

olarak bulunur.

3.4 denkleminin türevi alındığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(4)} &= \kappa_n'' \langle n, \alpha - u \rangle + \kappa_n' \langle n', \alpha - u \rangle + \underbrace{\kappa_n' \langle n, \alpha' \rangle}_0 - 2\kappa_n \kappa_n' \langle T, \alpha - u \rangle - \kappa_n^2 \langle T', \alpha - u \rangle \\ &- \underbrace{\kappa_n^2 \langle T, \alpha' \rangle}_1 - \kappa_n' \tau_g \langle Q, \alpha - u \rangle - \kappa_n \tau_g' \langle Q, \alpha - u \rangle - \kappa_n \tau_g \langle Q', \alpha - u \rangle + \kappa_n \tau_g \underbrace{\langle Q, \alpha' \rangle}_0 \end{aligned}$$

3.1 formülleri uygulandığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(4)} &= \kappa_n'' \langle n, \alpha - u \rangle + \kappa_n' \langle -\kappa_n T - \tau_g Q, \alpha - u \rangle - 2\kappa_n' \kappa_n \langle T, \alpha - u \rangle \\ &- \kappa_n^2 \langle \kappa_n n, \alpha - u \rangle - \kappa_n^2 - (\kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g') \langle Q, \alpha - u \rangle - \kappa_n \tau_g \langle \tau_g n, \alpha - u \rangle \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıp benzer ifadeler bir araya toplandığında;

$$\frac{1}{2}f^{(4)} = (\kappa_n'' - \kappa_n^3 - \kappa_n \tau_g^2) \langle n, \alpha - u \rangle - (2\kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g') \langle Q, \alpha - u \rangle - 3\kappa_n \kappa_n' \langle T, \alpha - u \rangle - \kappa_n^2 \quad (3.5)$$

olarak bulunur.

3.5 denkleminin türevi alındığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(5)} &= [\kappa_n''' - 3\kappa_n' \kappa_n^2 - \kappa_n' \tau_g^2 - 2\kappa_n \tau_g' \tau_g] \langle n, \alpha - u \rangle + [\kappa_n'' - \kappa_n^3 - \kappa_n \tau_g^2] [\langle n', \alpha - u \rangle + \underbrace{\langle n, \alpha' \rangle}_0] \\ &- [2\kappa_n'' \tau_g + 3\kappa_n' \tau_g' + \kappa_n \tau_g''] \langle Q, \alpha - u \rangle - [2\kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g'] [\langle Q', \alpha - u \rangle + \underbrace{\langle Q, \alpha' \rangle}_0] \\ &- [3\kappa_n'' \kappa_n + 3(\kappa_n')^2] \langle T, \alpha - u \rangle - 3\kappa_n' \kappa_n [\langle T', \alpha - u \rangle + \underbrace{\langle T, \alpha' \rangle}_1] - 2\kappa_n' \kappa_n \end{aligned}$$

3.1 formülleri uygulandığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(5)} &= [\kappa_n'' - 3\kappa_n' \kappa_n^2 - \kappa_n' \tau_g^2 - 2\kappa_n \tau_g' \tau_g] \langle n, \alpha - u \rangle + [\kappa_n'' - \kappa_n^3 - \kappa_n \tau_g^2] \langle -\kappa_n T - \tau_g Q, \alpha - u \rangle \\ &- [2\kappa_n'' \tau_g + 3\kappa_n' \tau_g' + \kappa_n \tau_g''] \langle Q, \alpha - u \rangle - [2\kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g'] \cdot \langle \tau_g n, \alpha - u \rangle \\ &- [3\kappa_n'' \kappa_n + 3(\kappa_n')^2] \langle T, \alpha - u \rangle - 3\kappa_n' \kappa_n [\langle \kappa_n n, \alpha - u \rangle + 1] - 2\kappa_n' \kappa_n \end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıp benzer ifadeler bir araya toplandıığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(5)} = & [\kappa_n''' - 6\kappa_n'\kappa_n^2 - 3\kappa_n'\tau_g^2 - 3\kappa_n\tau_g'\tau_g] \langle n, \alpha - u \rangle \\ & - [3\kappa_n''\tau_g - \kappa_n^3\tau_g - \kappa_n\tau_g^3 + 3\kappa_n'\tau_g' + \kappa_n\tau_g''] \langle Q, \alpha - u \rangle \\ & - [4\kappa_n''\kappa_n - \kappa_n^4 - \kappa_n^2\tau_g^2 + 3(\kappa_n')^2] \langle T, \alpha - u \rangle - 5\kappa_n'\kappa_n \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir.

(1) \Rightarrow): Kabul edelim ki $f' = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle$$

eşitliği;

$$\langle T, \alpha - u \rangle = 0$$

olur. Dolayısıyla $T \perp \alpha - u$ denir. Buradan;

$$\alpha - u = \lambda Q + \mu n \quad (3.7)$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır.

\Leftarrow): Kabul edelim ki $\alpha - u = \lambda Q + \mu n$ olsun;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle$$

ifadesinde yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \lambda Q + \mu n \rangle$$

elde edilir. Buradan

$$f' = 0$$

olarak bulunur.

(2) \Rightarrow): kabul edelim ki $f' = f'' = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f'' = \kappa_n \langle n, \alpha - u \rangle + 1$$

ifadesi artık

$$\kappa_n \langle n, \alpha - u \rangle + 1 = 0$$

olarak bulunur. Burada 3.1 Frenet Formülleri ve 3.7 kullanıldığında;

$$\mu \kappa_n + 1 = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\mu = \frac{-1}{\kappa_n}$$

olarak bulunur. 3.7 de yerine yazıldığında;

$$\alpha - u = \lambda Q - \frac{1}{\kappa_n} n \quad (3.8)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow): Kabul edelim ki $\alpha - u = \lambda Q - \frac{1}{\kappa_n} n$ olsun

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle$$

ifadesinde yerine yazıldığında 3.7 kullanıldığında;

$$f' = 0$$

olarak bulunur ve

$$\frac{1}{2}f'' = \kappa_n \langle n, \alpha - u \rangle + 1$$

ifadesinde yerine yazılıp 3.1 kullanıldığında;

$$f'' = 0$$

olarak bulunur.

(3) \Rightarrow): Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = 0$ olsun

$$\frac{1}{2}f''' = \kappa_n' \langle n, \alpha - u \rangle - \kappa_n^2 \langle T, \alpha - u \rangle - \kappa_n \tau_g \langle Q, \alpha - u \rangle$$

ifadesi bu durumda;

$$\kappa_n' \underbrace{\langle n, \alpha - u \rangle}_{\frac{-1}{\kappa_n}} - \kappa_n^2 \underbrace{\langle T, \alpha - u \rangle}_0 - \kappa_n \tau_g \underbrace{\langle Q, \alpha - u \rangle}_\lambda = 0$$

3.7 eşitliği kullanıldığında;

$$\frac{-1}{\kappa_n} \kappa_n' - \lambda \kappa_n \tau_g = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\lambda = \frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g}$$

olarak bulunur. 3.7 de yerine yazıldığında;

$$\alpha - u = \frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g} Q - \frac{1}{\kappa_n} n \quad (3.9)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow): $\alpha - u = \frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g} Q - \frac{1}{\kappa_n} n$ kabul edildiğinde; $f' = f'' = f''' = 0$ olacağı açıktır.

(4) \Rightarrow): Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2} f^{(4)} = [\kappa_n'' - \kappa_n^3 - \kappa_n \tau_g^2] \langle n, \alpha - u \rangle - [2\kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g'] \langle Q, \alpha - u \rangle - 3\kappa_n' \kappa_n \langle T, \alpha - u \rangle - \kappa_n^2$$

ifadesi bu durumda 3.9 denkleminde yararlanıldığında;

$$\frac{-1}{\kappa_n} \kappa_n'' - \frac{-1}{\kappa_n} \kappa_n^3 - \frac{-1}{\kappa_n} \kappa_n \tau_g^2 - 2 \frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g} \kappa_n \tau_g - \frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g} \kappa_n \tau_g' - \kappa_n^2 = 0$$

olarak bulunur. Burada gerekli işlemler yapıldığında;

$$-\kappa_n'' \kappa_n \tau_g + \kappa_n^4 \tau_g + \kappa_n^2 \tau_g^3 + 2 (\kappa_n')^2 \tau_g + \kappa_n \kappa_n' \tau_g' - \kappa_n^4 \tau_g = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\kappa_n'' \kappa_n \tau_g = \kappa_n^2 \tau_g^3 + 2 (\kappa_n')^2 \tau_g + \kappa_n \kappa_n' \tau_g' \quad (3.10)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow): $\kappa_n'' \kappa_n \tau_g = \kappa_n^2 \tau_g^3 + 2(\kappa_n')^2 \tau_g + \kappa_n \kappa_n' \tau_g'$ ve $\alpha - u = \frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g} Q - \frac{1}{\kappa_n} n$ kabul edildiğinde $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = 0$ olacağı açıktır.

(5) \Rightarrow): Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = f^{(5)} = 0$ olsun;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f^{(5)} &= [\kappa_n''' - 6\kappa_n' \kappa_n^2 - 3\kappa_n' \tau_g^2 - 3\kappa_n \tau_g' \tau_g] \langle n, \alpha - u \rangle \\ &\quad - [3\kappa_n'' \tau_g - \kappa_n^3 \tau_g - \kappa_n \tau_g^3 + 3\kappa_n' \tau_g' + \kappa_n \tau_g''] \langle Q, \alpha - u \rangle \\ &\quad - [4\kappa_n'' \kappa_n - \kappa_n^4 - \kappa_n^2 \tau_g^2 + 3(\kappa_n')^2] \langle T, \alpha - u \rangle - 5\kappa_n' \kappa_n \end{aligned}$$

ifadesi bu durumda;

$$\begin{aligned} &[\kappa_n''' - 6\kappa_n' \kappa_n^2 - 3\kappa_n' \tau_g^2 - 3\kappa_n \tau_g' \tau_g] \underbrace{\langle n, \alpha - u \rangle}_{\frac{-1}{\kappa_n}} \\ &- [3\kappa_n'' \tau_g - \kappa_n^3 \tau_g - \kappa_n \tau_g^3 + 3\kappa_n' \tau_g' + \kappa_n \tau_g''] \underbrace{\langle Q, \alpha - u \rangle}_{\frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g}} \\ &- [4\kappa_n'' \kappa_n - \kappa_n^4 - \kappa_n^2 \tau_g^2 + 3(\kappa_n')^2] \underbrace{\langle T, \alpha - u \rangle}_0 - 5\kappa_n' \kappa_n = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. 3.8 denkleminde yararlanıldığında;

$$\begin{aligned} &[\kappa_n''' - 6\kappa_n' \kappa_n^2 - 3\kappa_n' \tau_g^2 - 3\kappa_n \tau_g' \tau_g] \left(\frac{-1}{\kappa_n}\right) \\ &- [3\kappa_n'' \tau_g - \kappa_n^3 \tau_g - \kappa_n \tau_g^3 + 3\kappa_n' \tau_g' + \kappa_n \tau_g''] \left(\frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g}\right) - 5\kappa_n' \kappa_n = 0 \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapıldığında;

$$\kappa_n''' \kappa_n^2 \tau_g = 2\kappa_n' \kappa_n^2 \tau_g^3 + 3\kappa_n^3 \tau_g' \tau_g^2 + 3\kappa_n'' \kappa_n' \kappa_n \tau_g + 3\kappa_n (\kappa_n')^2 \tau_g' + \kappa_n' \kappa_n^2 \tau_g''$$

olarak bulunur. 3.10 denkleminde yararlanıldığında;

$$\kappa_n''' \kappa_n^2 \tau_g = 5\kappa_n' \kappa_n^2 \tau_g^3 + 3\kappa_n^3 \tau_g' \tau_g^2 + 6\kappa_n (\kappa_n')^2 \tau_g' + 6(\kappa_n')^3 \tau_g + \kappa_n' \kappa_n^2 \tau_g'' \quad (3.11)$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow : $\kappa_n''' \kappa_n^2 \tau_g = 5\kappa_n' \kappa_n^2 \tau_g^3 + 3\kappa_n^3 \tau_g' \tau_g^2 + 6\kappa_n (\kappa_n')^2 \tau_g' + 6(\kappa_n')^3 \tau_g + \kappa_n' \kappa_n^2 \tau_g''$,
 $\kappa_n''(s) \kappa_n(s) \tau_g(s) = \kappa_n^2(s) \tau_g^3(s) + 2(\kappa_n'(s))^2 \tau_g(s) + \kappa_n(s) \kappa_n'(s) \tau_g'(s)$ ve $\alpha - u = \frac{-\kappa_n'}{\kappa_n^2 \tau_g} Q - \frac{1}{\kappa_n} n$
kabul edildiğinde $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = f^{(5)} = 0$ olacağı açıktır. \square

3.2 Tanım : $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık $M \subset E^3$ yönlendirilebilir bir yüzey ve M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı bir eğri ve u , M yüzeyi üzerinde bir birim vektör olsun. Bu eğri için $\forall s \in I$ noktasındaki Darboux Çatısı $\{T(s), Q(s), n(s)\}$ olmak üzere;

$$H : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(s, u) = \langle \alpha(s), u \rangle$$

şeklinde tanımlı iki parametrelili düzgün fonksiyonların ailesi olarak $H(s, u)$ fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde dayanak fonksiyonu denir. u bir vektör olduğu için $h(s) = H(s, u)$ olarak yazılabilir.

3.1.2. Öklid uzayında Darboux çatısına göre jeodezik bir eğri için dayanak fonksiyonunun tekliği

3.2 Teorem : $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı jeodezik bir eğri olsun. $\forall s \in I$ noktasında Darboux çatısı $\{T(s), Q(s), n(s)\}$ ve dayanak fonksiyonu $H(s, u) = \langle \alpha(s), u \rangle$ olmak üzere;

$$(1) h'(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s)$$

$$(2) h'(s) = h''(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s), \quad \kappa_n(s) = 0$$

$$(3) h'(s) = h''(s) = h'''(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n, \quad \kappa_n(s) = \kappa_n'(s) = 0$$

$$(4) h'(s) = h''(s) = h'''(s) = h^{(4)}(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s), \quad \kappa_n(s) = \kappa_n'(s) = \kappa_n''(s) = 0$$

$$(5) h'(s) = h''(s) = h'''(s) = h^{(4)}(s) = h^{(5)}(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s),$$

$$\kappa_n(s) = \kappa_n'(s) = \kappa_n''(s) = \kappa_n'''(s) = 0$$

koşulları sağlar.

Kanıt : Öklid uzayında Darboux çatısı için $\{T', Q', n'\}$

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ Q(s) \\ n(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g(s) & \kappa_n(s) \\ -\kappa_g(s) & 0 & \tau_g(s) \\ -\kappa_n(s) & -\tau_g(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ Q(s) \\ n(s) \end{pmatrix}$$

yardımıyla hesaplanıyor fakat eğrimiz jeodezik bir eğri olduğundan κ_g fonksiyonel olarak sıfır olduğundan

$$T'(s) = \kappa_n(s)n(s)$$

$$Q'(s) = \tau_g(s)n(s)$$

$$n'(s) = -\kappa_n(s)T(s) - \tau_g(s)Q(s)$$

şeklinde olur. Ardışık türevlerde terimler çoğaldıkça parametreyi yazmak işlemleri uzatacağından aşağıdaki türevlerde parametreye yer verilmemiştir.

Şimdi dayanak fonksiyonunun sırası ile türevlerini bulalım

$$h = \langle \alpha(s), u \rangle$$

türevini aldığımızda

$$h' = \langle \alpha', u \rangle \quad (3.12)$$

şeklinde bulunur.

3.12 denkleminin türevi alındığında;

$$h'' = \langle T', u \rangle$$

elde edilir. 3.1 Frenet türev formülleri kullanıldığında;

$$h'' = \kappa_n \langle n, u \rangle \quad (3.13)$$

olarak bulunur.

3.13 denkleminin türevi alındığında;

$$h''' = \kappa_n' \langle n, u \rangle + \kappa_n \langle -\kappa_n T - \tau_g Q, u \rangle$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$h''' = -\kappa_n^2 \langle T, u \rangle - \kappa_n \tau_g \langle Q, u \rangle + \kappa_n' \langle n, u \rangle \quad (3.14)$$

olarak bulunur.

3.14 denkleminin türevi alındığında;

$$h^{(4)} = -2\kappa_n \kappa_n' \langle T, u \rangle - \kappa_n^2 \langle T', u \rangle [-\kappa_n' \tau_g - \kappa_n \tau_g'] \langle Q, u \rangle - \kappa_n \tau_g \langle Q', u \rangle + \kappa_n'' \langle n, u \rangle + \kappa_n' \langle n', u \rangle$$

olarak bulunur. Burada 3.1 denklemleri kullanıldığında;

$$h^{(4)} = -2\kappa_n \kappa_n' \langle T, u \rangle - \kappa_n^2 \langle \kappa_n n, u \rangle [-\kappa_n' \tau_g - \kappa_n \tau_g'] \langle Q, u \rangle \\ - \kappa_n \tau_g \langle \tau_g n, u \rangle + \kappa_n'' \langle n, u \rangle + \kappa_n' \langle -\kappa_n T - \tau_g Q, u \rangle$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$h^{(4)} = -3\kappa_n \kappa_n' \langle T, u \rangle - [\kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g' + \kappa_n \tau_g] \langle Q, u \rangle - [\kappa_n^3 + \kappa_n \tau_g^2 - \kappa_n''] \langle n, u \rangle \quad (3.15)$$

olarak bulunur.

3.15 denkleminin türevi alındığında;

$$h^{(5)} = [-3(\kappa_n')^2 - 3\kappa_n \kappa_n''] \langle T, u \rangle - 3\kappa_n \kappa_n' \langle \kappa_n n, u \rangle \\ - [\kappa_n'' \tau_g + \kappa_n' \tau_g' + \kappa_n' \tau_g' + \kappa_n' \tau_g' + \kappa_n \tau_g'] \langle Q, u \rangle \\ - [\kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g' + \kappa_n \tau_g] \langle \tau_g n, u \rangle \\ - [3\kappa_n' \kappa_n^2 + \kappa_n' \tau_g^2 + 2\kappa_n \tau_g' \tau_g - \kappa_n'''] \langle n, u \rangle \\ - [\kappa_n^3 + \kappa_n \tau_g^2 - \kappa_n''] \langle -\kappa_n T - \tau_g Q, u \rangle$$

olarak bulunur. Burada 3.1 denklemleri kullanılıp gerekli işlemler yapıldığında;

$$h^{(5)} = [-3(\kappa_n')^2 - 3\kappa_n \kappa_n'' + \kappa_n^2 \tau_g^2 - \kappa_n \kappa_n''] \langle T, u \rangle \\ - [2\kappa_n'' \tau_g + 2\kappa_n' \tau_g' + \kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g' - \kappa_n^3 \tau_g - \kappa_n \tau_g^3] \langle Q, u \rangle \\ - [6\kappa_n^2 \kappa_n' + 2\kappa_n' \tau_g^2 + 3\kappa_n \tau_g' \tau_g + \kappa_n \tau_g^2 - \kappa_n'''] \langle n, u \rangle \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir.

(1) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = 0$ olsun;

$$h' = \langle T, u \rangle$$

eşitliği;

$$\langle T, u \rangle = 0$$

olur. Dolayısıyla $T \perp u$ denir. Buradan;

$$u = \lambda Q + \mu n \quad (3.17)$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $u = \lambda Q + \mu n$ olsun;

$$h' = \langle T, u \rangle$$

eşitliği bu durumda;

$$h' = \langle T, \lambda Q + \mu n \rangle$$

olarak yazılabilir. Frenet Denklemlerinden yararlanıldığında ve iç çarpımın özelliği kullanıldığında;

$$h' = 0$$

olarak bulunur.

(2) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = 0$ olsun;

$$h'' = \langle T', u \rangle$$

eşitliği bu durumda;

$$\langle T', u \rangle = 0$$

olur. Burada 3.1 denklemleri kullanıldığında;

$$\kappa_n \langle n, u \rangle = 0$$

ve burada 3.17 kullanıldığında;

$$\kappa_n \mu = 0$$

bulunur. Buradan;

$$\kappa_n = 0 \quad (3.18)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $u = \lambda Q + \mu n$ ve $\kappa_n = 0$ olsun;

$$h' = 0$$

olduğu açıktır.

$$h'' = \langle T', u \rangle$$

3.1 denklemleri kullanıldığında;

$$h'' = \kappa_n \langle n, u \rangle$$

elde edilir. Buradan;

$$h'' = 0$$

olarak bulunur.

(3) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = 0$ olsun;

$$h''' = -\kappa_n^2 \langle T, u \rangle - \kappa_n \tau_g \langle Q, u \rangle + \kappa_n' \langle n, u \rangle$$

eşitliği bu durumda;

$$-\kappa_n^2 \langle T, u \rangle - \kappa_n \tau_g \langle Q, u \rangle + \kappa_n' \langle n, u \rangle = 0$$

olarak yazılır. 3.18 denklemini kullanıldığında;

$$\mu \kappa_n' = 0$$

olarak bulunur. Buradan;

$$\kappa_n' = 0 \tag{3.19}$$

olarak bulunur.

\Leftarrow) : $u = \lambda Q + \mu n$ ve $\kappa_n = \kappa_n' = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = 0$ olacağı açıktır.

(4) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = 0$ olsun;

$$h^{(4)} = -3\kappa_n \kappa_n' \langle T, u \rangle - [\kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g' + \kappa_n \tau_g] \langle Q, u \rangle - [\kappa_n^3 + \kappa_n \tau_g^2 - \kappa_n''] \langle n, u \rangle$$

olarak bulunur. Burada 3.18 ve 3.19 kullanıldığında;

$$\mu \kappa_n'' = 0$$

olur. Buradan;

$$\kappa_n'' = 0 \quad (3.20)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow) : $u = \lambda Q + \mu n$ ve $\kappa_n = \kappa_n' = \kappa_n'' = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = 0$ olacağı açıktır.

(5) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = h^{(5)} = 0$ olsun;

$$\begin{aligned} h^{(5)} = & \left[-3 (\kappa_n')^2 - 3\kappa_n \kappa_n'' + \kappa_n^4 + \kappa_n^2 \tau_g^2 - \kappa_n \kappa_n' \right] \langle T, u \rangle \\ & - \left[2\kappa_n'' \tau_g + 2\kappa_n' \tau_g' + \kappa_n' \tau_g + \kappa_n \tau_g' - \kappa_n^3 \tau_g - \kappa_n \tau_g^3 \right] \langle Q, u \rangle \\ & - \left[6\kappa_n^2 \kappa_n' + 2\kappa_n' \tau_g^2 + 3\kappa_n \tau_g' \tau_g + \kappa_n \tau_g^2 - \kappa_n''' \right] \langle n, u \rangle \end{aligned}$$

burada 3.18, 3.19 ve 3.20 denklemleri kullanılırsa;

$$\mu \kappa_n''' = 0$$

olur. Buradan;

$$\kappa_n''' = 0 \quad (3.21)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow) : $u = \lambda Q + \mu n$ ve $\kappa_n = \kappa_n' = \kappa_n'' = \kappa_n''' = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = h^{(5)} = 0$ olacağı açıktır.

□

3.3 Tanım : $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık $M \subset E^3$ yönlendirilebilir bir yüzey ve M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı **asimptotik** bir eğri ve u , M yüzeyi üzerinde sabit bir nokta olsun. Bu eğri için $\forall s \in I$ noktasındaki Darboux Çatısı $\{T(s), Q(s), n(s)\}$ olmak üzere;

$$F : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(s, u) = \langle \alpha(s) - u, \alpha(s) - u \rangle$$

şeklinde tanımlı iki parametrelı düzgün fonksiyonların ailesi olarak $F(s, u)$ fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde karesel uzaklık fonksiyonu denir. u sabit bir nokta olduğu için $f(s) = F(s, u)$ olarak yazılabilir.

3.1.3. Öklid uzayında Darboux çatısına göre asimptotik bir eğri için karesel uzaklık fonksiyonunun tekilliği

3.3 Teorem : $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı asimptotik bir eğri olsun. $\forall s \in I$ noktasında Darboux çatısı $\{T(s), Q(s), n(s)\}$ ve karesel uzaklık fonksiyonu $F(s, u) = \langle \alpha(s) - u, \alpha(s) - u \rangle$ olmak üzere;

$$(1) f'(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda Q(s) + \mu n(s)$$

$$(2) f'(s) = f''(s, u) = 0 \Leftrightarrow \alpha - u = -\frac{1}{\kappa_g(s)} Q(s) + \mu n(s)$$

$$(3) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = -\frac{1}{\kappa_g(s)} Q(s) + \frac{\kappa'_g(s)}{\kappa_g^2(s) \tau_g(s)} n(s)$$

$$(4) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = f^{(4)}(s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \kappa_g''(s) \kappa_g(s) \tau_g(s) &= \kappa_g^2(s) \tau_g^3(s) + 2 (\kappa'_g(s))^2 \tau_g(s) + \kappa_g(s) \kappa'_g(s) \tau'_g(s) \\ \alpha(s) - u &= -\frac{1}{\kappa_g(s)} Q(s) + \frac{\kappa'_g(s)}{\kappa_g^2(s) \tau_g(s)} n(s) \end{aligned}$$

$$(5) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = f^{(4)}(s) = f^{(5)}(s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \kappa_g'''(s) \kappa_g^2(s) \tau_g(s) &= 5 \kappa'_g(s) \kappa_g^2(s) \tau_g^3(s) + 3 \kappa_g^3(s) \tau'_g(s) \tau_g^2(s) + 6 \kappa_g(s) (\kappa'_g(s))^2 \tau'_g(s) \\ &+ 6 (\kappa'_g(s))^3 \tau_g(s) + \kappa'_g(s) \kappa_g^2(s) \tau_g''(s) \end{aligned}$$

$$\kappa_g''(s) \kappa_g(s) \tau_g(s) = \kappa_g^2(s) \tau_g^3(s) + 2 (\kappa'_g(s))^2 \tau_g(s) + \kappa_g(s) \kappa'_g(s) \tau'_g(s)$$

$$\alpha(s) - u = -\frac{1}{\kappa_g(s)} Q(s) + \frac{\kappa'_g(s)}{\kappa_g^2(s) \tau_g(s)} n(s)$$

koşulları sağlanır.

Kanıt : Öklid uzayında Darboux çatısı için $\{T', Q', n'\}$

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ Q(s) \\ n(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g(s) & \kappa_n(s) \\ -\kappa_g(s) & 0 & \tau_g(s) \\ -\kappa_n(s) & -\tau_g(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ Q(s) \\ n(s) \end{pmatrix}$$

yardımla hesaplanıyor fakat eğrimiz asimptotik bir eğri olduğundan κ_n fonksiyonel olarak sıfır olduğundan

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_g Q \\ Q' &= -\kappa_g Q + \tau_g n \\ n' &= -\tau_g Q \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde olur. Ardışık türevlerde terimler çoğaldıkça parametreyi yazmak işlemleri uzatacağından aşağıdaki türevlerde parametreye yer verilmemiştir.

Şimdi karesel uzaklık fonksiyonunun sırası ile türevlerini bulalım.

$$f = \langle \alpha - u, \alpha - u \rangle$$

türevini aldığımızda;

$$f' = \langle \alpha', \alpha - u \rangle + \langle \alpha - u, \alpha' \rangle$$

burada iç çarpımın değişme özelliği kullanıldığında

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle \quad (3.23)$$

şeklinde bulunur.

3.23 denkleminin türevi alındığında;

$$\frac{1}{2}f'' = \langle T', \alpha - u \rangle + \langle T, T \rangle$$

olarak bulunur. 3.22 denklemleri ve iç çarpımın özelliği kullanıldığında;

$$\frac{1}{2}f'' = \kappa_g \langle Q, \alpha - u \rangle + 1 \quad (3.24)$$

olarak bulunur. 3.24 denkleminin türevi alındığında;

$$\frac{1}{2}f''' = \kappa_g' \langle Q, \alpha - u \rangle + \kappa_g \langle Q', \alpha - u \rangle + \langle Q, \alpha' \rangle$$

elde edilir. Burada 3.22 denklemleri ve iç çarpımın özelliği kullanıldığında;

$$\frac{1}{2}f''' = \kappa'_g \langle Q, \alpha - u \rangle - \kappa_g^2 \langle T, \alpha - u \rangle + \kappa_g \tau_g \langle n, \alpha - u \rangle \quad (3.25)$$

olarak bulunur.

3.25 denkleminin türevi alındığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(4)} = & \kappa_g'' \langle Q, \alpha - u \rangle + \kappa'_g \langle Q', \alpha - u \rangle + \kappa'_g \langle Q, \alpha' \rangle \\ & - 2\kappa'_g \kappa_g \langle T, \alpha - u \rangle - \kappa_g^2 \langle T', \alpha - u \rangle - \kappa_g^2 \langle T, T \rangle \\ & + (\kappa'_g \tau_g + \kappa_g \tau'_g) \langle n, \alpha - u \rangle + \kappa_g \tau_g \langle n', \alpha - u \rangle + \kappa_g \tau_g \langle n, \alpha' \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. 3.22 denklemleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(4)} = & \kappa_g'' \langle Q, \alpha - u \rangle - \kappa_g \kappa'_g \langle T, \alpha - u \rangle + \kappa'_g \tau_g \langle n, \alpha - u \rangle \\ & - 2\kappa'_g \kappa_g \langle T, \alpha - u \rangle - \kappa_g^3 \langle Q, \alpha - u \rangle - \kappa_g^2 \\ & (+\kappa'_g \tau_g + \kappa_g \tau'_g) \langle n, \alpha - u \rangle - \kappa_g \tau_g^2 \langle Q, \alpha - u \rangle \end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığına;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(4)} = & [\kappa_g'' - \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2] \langle Q, \alpha - u \rangle - 3\kappa_g \kappa'_g \langle T, \alpha - u \rangle \\ & [2\kappa'_g \tau_g + \tau'_g \kappa_g] \langle n, \alpha - u \rangle - \kappa_g^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

olarak bulunur. 3.26 denkleminin türevi alındığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(5)} = & [\kappa_g''' - 3\kappa'_g \kappa_g^2 - \kappa'_g \tau_g^2 - 2\kappa_g \tau_g \tau'_g] \langle Q, \alpha - u \rangle \\ & - [\kappa_g'' \kappa_g - \kappa_g^4 - \kappa_g^2 \tau_g^2] \langle T, \alpha - u \rangle + [\kappa_g'' \tau_g - \tau_g \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^3] \langle n, \alpha - u \rangle \\ & - [3(\kappa'_g)^2 - 3\kappa_g \kappa_g''] \langle T, \alpha - u \rangle - 3\kappa_g^2 \kappa'_g \langle Q, \alpha - u \rangle \\ & + [2\kappa_g'' \tau_g + 3\kappa'_g \tau'_g + \kappa_g \tau_g''] \langle n, \alpha - u \rangle \\ & - [2\kappa'_g \tau_g^2 + \tau'_g \kappa_g \tau_g] \langle Q, \alpha - u \rangle - 5\kappa_g \kappa'_g \end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapıp 3.22 denklemleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(5)} = & [\kappa_g''' - 6\kappa'_g \kappa_g^2 - 3\kappa'_g \tau_g^2 - 3\kappa_g \tau_g \tau'_g] \langle Q, \alpha - u \rangle \\ & - [\kappa_g'' \kappa_g - \kappa_g^4 - \kappa_g^2 \tau_g^2 + 3(\kappa'_g)^2 + 3\kappa_g \kappa_g''] \langle T, \alpha - u \rangle \\ & [3\kappa_g'' \tau_g - \kappa_g^3 \tau_g - \kappa_g \tau_g^3 + 3\kappa'_g \tau'_g + \tau'_g \kappa_g] \langle n, \alpha - u \rangle - 5\kappa_g \kappa'_g \end{aligned} \quad (3.27)$$

olarak bulunur.

(1) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f' = \langle \alpha', \alpha - u \rangle$$

eşitliği

$$\langle T, \alpha - u \rangle = 0$$

olur. Dolayısıyla $T \perp \alpha - u$ denir. Buradan

$$\alpha - u = \lambda Q + \mu n \quad (3.28)$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $\alpha - u = \lambda Q + \mu n$ olsun;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle$$

ifadesinde yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \lambda Q + \mu n \rangle$$

elde edilir. Buradan

$$f' = 0$$

olarak bulunur.

(2) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = f'' = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f'' = \kappa_g \langle Q, \alpha - u \rangle + 1$$

ifadesi artık;

$$\kappa_g \langle Q, \alpha - u \rangle + 1 = 0$$

olarak bulunur. Buradan 3.22 denklemleri ve 3.28 kullanıldığında;

$$\lambda \kappa_g + 1 = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\lambda = -\frac{1}{\kappa_g}$$

olarak bulunur. 3.28 de yerine yazıldığında;

$$\alpha - u = -\frac{1}{\kappa_g}Q + \mu n \quad (3.29)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $\alpha - u = -\frac{1}{\kappa_g}Q + \mu n$ olsun;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle$$

ifadesinde yerine yazıldığında 3.28 kullanıldığında;

$$f' = 0$$

olarak bulunur ve

$$\frac{1}{2}f'' = \kappa_g \langle Q, \alpha - u \rangle + 1$$

ifadesinde yerine yazıldığında 3.22 denklemini kullanıldığında;

$$f'' = 0$$

olarak bulunur.

(3) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f''' = \kappa_g' \langle Q, \alpha - u \rangle - \kappa_g^2 \langle T, \alpha - u \rangle + \kappa_g \tau_g \langle n, \alpha - u \rangle$$

ifadesi bu durumda;

$$\underbrace{\kappa_g' \langle Q, \alpha - u \rangle}_{-\frac{1}{\kappa_g}} - \underbrace{\kappa_g^2 \langle T, \alpha - u \rangle}_0 + \underbrace{\kappa_g \tau_g \langle n, \alpha - u \rangle}_\mu = 0$$

olarak yazılır. Buradan;

$$-\frac{1}{\kappa_g} \kappa_g' + \mu \kappa_g \tau_g = 0$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$\mu = \frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2 \tau_g}$$

olarak bulunur. Bu durumda 3.29 de yerine yazıldığında;

$$\alpha - u = -\frac{1}{\kappa_g}Q + \frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2 \tau_g}n \quad (3.30)$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow) : $\alpha - u = -\frac{1}{\kappa_g}Q + \frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2 \tau_g}n$ kabul edildiğinde $f' = f'' = f''' = 0$ olacağı açıktır.

(4) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f^{(4)} = [\kappa_g'' - \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2] \langle Q, \alpha - u \rangle - 3\kappa_g \kappa_g' \langle T, \alpha - u \rangle$$

ifadesi bu durumda 3.30 denkleminde yararlanıldığında;

$$0 = [\kappa_g'' - \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2] \frac{-1}{\kappa_g} + [2\kappa_g' \tau_g + \tau_g' \kappa_g] \frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2 \tau_g} - \kappa_g^2$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$-\kappa_g \kappa_g'' \tau_g + \kappa_g^4 \tau_g + \kappa_g^2 \tau_g^3 + 2(\kappa_g')^2 \tau_g + \kappa_g \kappa_g' \tau_g' - \kappa_g^4 \tau_g = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\kappa_g'' \kappa_g \tau_g = \kappa_g^2 \tau_g^3 + 2(\kappa_g')^2 \tau_g + \kappa_g \kappa_g' \tau_g' \quad (3.31)$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow) : $\kappa_g'' \kappa_g \tau_g = \kappa_g^2 \tau_g^3 + 2(\kappa_g')^2 \tau_g + \kappa_g \kappa_g' \tau_g'$ ve $\alpha - u = -\frac{1}{\kappa_g}Q + \frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2 \tau_g}n$ kabul edildiğinde $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = 0$ olacağı açıktır.

(5) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = f^{(5)} = 0$ olsun;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(5)} &= [\kappa_g''' - 6\kappa_g' \kappa_g^2 - 3\kappa_g' \tau_g^2 - 3\kappa_g \tau_g \tau_g'] \langle Q, \alpha - u \rangle \\ &\quad - [\kappa_g'' \kappa_g - \kappa_g^4 - \kappa_g^2 \tau_g^2 + 3(\kappa_g')^2 + 3\kappa_g \kappa_g''] \langle T, \alpha - u \rangle \\ &\quad [3\kappa_g'' \tau_g - \kappa_g^3 \tau_g - \kappa_g \tau_g^3 + 3\kappa_g' \tau_g' + \tau_g'' \kappa_g] \langle n, \alpha - u \rangle - 5\kappa_g' \kappa_g \end{aligned}$$

ifadesi bu durumda;

$$\begin{aligned}
& [\kappa_g''' - 6\kappa_g'\kappa_g^2 - 3\kappa_g'\tau_g^2 - 3\kappa_g\tau_g\tau_g'] \underbrace{\langle Q, \alpha - u \rangle}_{-\frac{1}{\kappa_g}} \\
& - [\kappa_g''\kappa_g - \kappa_g^4 - \kappa_g^2\tau_g^2 + 3(\kappa_g')^2 + 3\kappa_g\kappa_g''] \underbrace{\langle T, \alpha - u \rangle}_0 \\
& [3\kappa_g''\tau_g - \kappa_g^3\tau_g - \kappa_g\tau_g^3 + 3\kappa_g'\tau_g' + \tau_g''\kappa_g] \underbrace{\langle n, \alpha - u \rangle}_{\frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2\tau_g}} - 5\kappa_g'\kappa_g = 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. 3.30 denkleminde yararlanıldığında;

$$\begin{aligned}
& [\kappa_g''' - 6\kappa_g'\kappa_g^2 - 3\kappa_g'\tau_g^2 - 3\kappa_g\tau_g\tau_g'] \left(\frac{-1}{\kappa_g}\right) \\
& + [3\kappa_g'\tau_g - \kappa_g^3\tau_g - \kappa_g\tau_g^3 + 3\kappa_g'\tau_g' + \tau_g''\kappa_g] \left(\frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2\tau_g}\right) - 5\kappa_g'\kappa_g = 0
\end{aligned}$$

gerekli işlemler yapıldığında;

$$\kappa_g'''\kappa_g^2\tau_g = +2\kappa_g'\kappa_g^2\tau_g^3 + 3\tau_g^2\kappa_g^3\tau_g' + 3\kappa_g''\kappa_g'\kappa_g\tau_g + 3(\kappa_g')^2\tau_g'\kappa_g + \kappa_g^2\kappa_g'\tau_g''$$

elde edilir. 3.31 denkleminde yararlanıldığında;

$$\kappa_g'''\kappa_g^2\tau_g = 5\kappa_g'\kappa_g^2\tau_g^3 + 3\kappa_g^3\tau_g^2\tau_g' + 6(\kappa_g')^3\tau_g + 6(\kappa_g')^2\tau_g'\kappa_g + \kappa_g^2\kappa_g'\tau_g'' \quad (3.32)$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow : $\kappa_g'''\kappa_g^2\tau_g = 5\kappa_g'\kappa_g^2\tau_g^3 + 3\kappa_g^3\tau_g^2\tau_g' + 6(\kappa_g')^3\tau_g + 6(\kappa_g')^2\tau_g'\kappa_g + \kappa_g^2\kappa_g'\tau_g''$,
 $\kappa_g''(s)\kappa_g(s)\tau_g(s) = \kappa_g^2(s)\tau_g^3(s) + 2(\kappa_g'(s))^2\tau_g(s) + \kappa_g(s)\kappa_g'(s)\tau_g'(s)$ ve $\alpha - u = -\frac{1}{\kappa_g}Q + \frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2\tau_g}n$
kabul edildiğinde $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = f^{(5)} = 0$ olacağı açıktır.

□

3.1.4. Öklid uzayında Darboux çatısına göre asimptotik bir eğri için dayanak fonksiyonunun tekliği

3.4 Teorem : $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı asimptotik bir eğri olsun. $\forall s \in I$ noktasında Darboux çatısı $\{T(s), Q(s), n(s)\}$ ve dayanak fonksiyonu $H(s, u) = \langle \alpha(s), u \rangle$ olmak üzere;

$$(1) h(s)' = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s)$$

$$(2) h'(s) = h''(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s), \quad \kappa_g(s) = 0$$

$$(3) h'(s) = h''(s) = h'''(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s), \quad \kappa_g(s) = \kappa_g'(s) = 0$$

$$(4) h'(s) = h''(s) = h'''(s) = h^{(4)}(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s), \quad \kappa_g(s) = \kappa_g'(s) = \kappa_g''(s) = 0$$

$$(5) h'(s) = h''(s) = h'''(s) = h^{(4)}(s) = h^{(5)}(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda Q(s) + \mu n(s), \\ \kappa_g(s) = \kappa_g'(s) = \kappa_g''(s) = \kappa_g'''(s) = 0$$

koşulları sağlanır.

Kanıt : Öklid uzayında Darboux çatısı için $\{T', Q', n'\}$

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ Q(s) \\ n(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g(s) & \kappa_n(s) \\ -\kappa_g(s) & 0 & \tau_g(s) \\ -\kappa_n(s) & -\tau_g(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ Q(s) \\ n(s) \end{pmatrix}$$

yardımıyla hesaplanıyor fakat eğrimiz asimptotik bir eğri olduğundan κ_n fonksiyonel olarak sıfır olacağından

$$T'^{(s)} = \kappa_g(s)Q(s)$$

$$Q'(s) = -\kappa_g(s)Q(s) + \tau_g(s)n(s)$$

$$n'(s) = -\tau_g(s)Q(s)$$

şeklinde olur. Ardışık türevlerde terimler çoğaldıkça parametreyi yazmak işlemleri uzatacağından aşağıdaki türevlerde parametreye yer verilmemiştir.

Şimdi dayanak fonksiyonunun sırası ile türevlerini bulalım.

$$h = \langle \alpha(s), u \rangle$$

türevini aldığımızda;

$$h' = \langle \alpha', u \rangle \quad (3.33)$$

olarak bulunur.

3.33 denkleminin türevi alındığında;

$$h'' = \langle T', u \rangle$$

elde edilir. 3.22 Frenet denklemleri kullanıldığında

$$h'' = \kappa_g \langle n, u \rangle \quad (3.34)$$

olarak bulunur.

3.34 denkleminin türevi alındığında;

$$h''' = \kappa'_g \langle Q, u \rangle + \kappa_g \langle -\kappa_g T + \tau_g n, u \rangle$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$h''' = -\kappa_n^2 \langle T, u \rangle + \kappa_n \tau_g \langle n, u \rangle + \kappa'_n \langle Q, u \rangle \quad (3.35)$$

olarak bulunur.

3.35 denkleminin türevi alındığında;

$$h^{(4)} = \kappa''_g \langle Q, u \rangle + \kappa'_g \langle Q', u \rangle - 2\kappa_g \kappa'_g \langle T, u \rangle - \kappa_g^2 \langle T', u \rangle + (\kappa'_g \tau_g + \kappa_g \tau'_g) \langle n, u \rangle + \kappa_g \tau_g \langle n', u \rangle$$

olarak bulunur. 3.22 denklemleri kullanıldığında;

$$h^{(4)} = [\kappa''_g - \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2] \langle Q, u \rangle + [2\kappa'_g \tau_g + \kappa_g \tau'_g] \langle n, u \rangle - 3\kappa_g \kappa'_g \langle T, u \rangle \quad (3.36)$$

olarak bulunur.

3.36 denkleminin türevi alındığında;

$$\begin{aligned} h^{(5)} = & [\kappa''_g - 3\kappa'_g \kappa_g^2 - \kappa'_g \tau_g^2 - 2\kappa_g \tau_g \tau'_g] \langle Q, u \rangle \\ & + (\kappa''_g - \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2) \langle Q', u \rangle + (2\kappa''_g \tau_g + 3\kappa'_g \tau'_g + \kappa_g \tau''_g) \langle n, u \rangle \\ & + [2\kappa'_g \tau_g + \kappa_g \tau'_g] \langle n', u \rangle - [3(\kappa'_g)^2 + 3\kappa_g \kappa''_g] \langle T, u \rangle - 3\kappa_g \kappa'_g \langle T', u \rangle \end{aligned}$$

olarak bulunur. 3.22 denklemleri kullanılıp gerekli işlemler yapıldığında;

$$\begin{aligned} h^{(5)} = & [\kappa'''_g - 6\kappa'_g \kappa_g^2 - 3\kappa'_g \tau_g^2 - 3\kappa_g \tau'_g \tau_g] \langle Q, u \rangle \\ & + [3\kappa''_g \tau_g - \kappa_g^3 \tau_g - \kappa_g \tau_g^3 + 3\kappa'_g \tau'_g + \kappa_g \tau''_g] \langle n, u \rangle \\ & - [4\kappa''_g \kappa_g - \kappa_g^4 - \kappa_g^2 \tau_g^2 + 3(\kappa'_g)^2] \langle T, u \rangle \end{aligned} \quad (3.37)$$

şeklinde elde edilir.

(1) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = 0$ olsun;

$$h' = \langle T, u \rangle$$

eşitliği

$$\langle T, u \rangle = 0$$

olur. Dolayısıyla $T \perp u$ denir. Buradan;

$$u = \lambda Q + \mu n \quad (3.38)$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $u = \lambda Q + \mu n$ olsun;

$$h' = \langle T, u \rangle$$

eşitliği bu durumda;

$$h' = \langle T, \lambda Q + \mu n \rangle$$

olarak yazılır. Frenet Denklemlerinden yararlanıldığına ve iç çarpımın özelliği kullanıldığında;

$$h' = 0$$

olarak bulunur.

(2) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = 0$ olsun;

$$h'' = \kappa_g \langle Q, u \rangle$$

eşitliği bu duruma;

$$\kappa_g \langle Q, u \rangle = 0$$

olur. Burada 3.38 kullanıldığında;

$$\lambda \kappa_g = 0$$

bulunur. Buradan;

$$\kappa_g = 0 \quad (3.39)$$

elde edilir.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $u = \lambda Q + \mu n$ ve $\kappa_g = 0$ olsun;

$$h' = 0$$

olduğu açıktır.

$$h'' = \langle T', u \rangle$$

3.22 denklemleri kullanıldığında;

$$h'' = \kappa_g \langle Q, u \rangle$$

elde edilir. buradan;

$$h'' = 0$$

olarak bulunur.

(3) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = 0$ olsun;

$$h''' = \kappa_g' \langle Q, u \rangle - \kappa_g^2 \langle T, u \rangle + \kappa_g \tau_g \langle n, u \rangle$$

eşitliği bu duruma;

$$\kappa_g' \langle Q, u \rangle - \kappa_g^2 \langle T, u \rangle + \kappa_g \tau_g \langle n, u \rangle = 0$$

olarak yazılır. Burada 3.38 ve 3.39 kullanıldığında;

$$\lambda \kappa_g' = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\kappa_g' = 0 \tag{3.40}$$

olarak bulunur.

\Leftarrow) : $u = \lambda Q + \mu n$ ve $\kappa_g = \kappa_g' = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = 0$ olacağı açıktır.

(4) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = 0$ olsun;

$$h^{(4)} = [\kappa_g'' - \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2] \langle Q, u \rangle + [2\kappa_g' \tau_g + \kappa_g \tau_g'] \langle n, u \rangle - 3\kappa_g \kappa_g' \langle T, u \rangle$$

denklemleri artık;

$$[\kappa_g'' - \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2] \langle Q, u \rangle + [2\kappa_g' \tau_g + \kappa_g \tau_g'] \langle n, u \rangle - 3\kappa_g \kappa_g' \langle T, u \rangle = 0$$

olarak yazılabilir. Burada 3.38, 3.39 ve 3.40 denklemleri kullanıldığında;

$$\lambda \kappa_g'' = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\kappa_g'' = 0 \quad (3.41)$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow) : $u = \lambda Q + \mu n$ ve $\kappa_g = \kappa_g' = \kappa_g'' = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = 0$ olacağı açıktır.

(5) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = h^{(5)} = 0$ olsun;

$$\begin{aligned} h^{(5)} = & [\kappa_g''' - 6\kappa_g' \kappa_g^2 - 3\kappa_g' \tau_g^2 - 3\kappa_g \tau_g \tau_g'] \langle Q, u \rangle \\ & + [3\kappa_g'' \tau_g - \kappa_g^3 \tau_g - \kappa_g \tau_g^3 + 3\kappa_g \tau_g' + \kappa_g \tau_g''] \langle n, u \rangle \\ & - [4\kappa_g'' \kappa_g - \kappa_g^4 - \kappa_g^2 \tau_g^2 + 3(\kappa_g')^2] \langle T, u \rangle \end{aligned}$$

burada 3.38, 3.39, 3.40 ve 3.41 denklemleri kullanılırsa;

$$\lambda \kappa_g''' = 0$$

elde edilir. Buradan;

$$\kappa_g''' = 0 \quad (3.42)$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow) : $u = \lambda Q + \mu n$ ve $\kappa_g = \kappa_g' = \kappa_g'' = \kappa_g''' = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = h^{(5)} = 0$ olacağı açıktır.

□

3.2. Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Karesel Uzaklık ve Dayanak Fonksiyonları ile Tekillikleri

3.4 Tanım : 3 boyutlu Öklid uzayında $\{T, M_1, M_2, k_1, k_2\}$ kümesinde; $\{T, M_1, M_2\}$ α eğrisinin Bishop çatısı ve $\{k_1, k_2\}$ ise α eğrisinin Bishop Çatısına göre birinci ve ikinci eğrilik fonksiyonları olarak adlandırılıyor.

Bishop çatısının türev fonksiyonları ise;

$$\begin{pmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

ile verilmiştir. (Bishop 1975)

3.2.1. Öklid uzayında Bishop çatısına göre bir eğrinin karesel uzaklık fonksiyonunun tekilliği

3.5 Teorem : $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\forall_s \in I$ noktasında Bishop çatısı $\{T(s), M_1(s), M_2(s)\}$ ve Tanım 3.1 verilen karesel uzaklık fonksiyonu $F(s, u) = \langle \alpha(s) - u, \alpha(s) - u \rangle$ olmak üzere;

$$(1) f'(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s) \text{ olacak şekilde } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$(2) f'(s) = f''(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s), \quad \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = -1$$

$$(3) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s), \quad \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = -1, \\ \lambda k_1'(s) + \mu k_2'(s) = 0$$

$$(4) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = f^{(4)}(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s), \\ \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = -1, \quad \lambda k_1'(s) + \mu k_2'(s) = 0, \quad \lambda k_1''(s) + \mu k_2''(s) = 0$$

$$(5) f'(s) = f''(s) = f'''(s) = f^{(4)}(s) = f^{(5)}(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s), \\ \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = -1, \quad \lambda k_1'(s) + \mu k_2'(s) = 0, \quad \lambda k_1''(s) + \mu k_2''(s) = 0, \\ \lambda k_1'''(s) + \mu k_2'''(s) = 0$$

koşulları sağlar.

Kanıt : Öklid uzayında Bishop çatısı için $\{T', M_1', M_2'\}$

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ M_1(s) \\ M_2(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_1(s) & k_2(s) \\ -k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_2(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ M_1(s) \\ M_2(s) \end{pmatrix}$$

yardımla;

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_1(s)M_1(s) + k_2(s)M_2(s) \\ M_1'(s) &= -k_1(s)T(s) \\ M_2'(s) &= -k_2(s)T(s) \end{aligned} \quad (3.43)$$

şeklinde olur. Ardışık türevlerde terimler çoğaldıkça parametreyi yazmak işlemleri uzatacağından aşağıdaki türevlerde parametreye yer verilmemiştir.

Şimdi karesel uzaklık fonksiyonunun sırası ile türevlerini bulalım.

$$f = \langle \alpha - u, \alpha - u \rangle$$

türevini aldığımızda;

$$f' = \langle \alpha', \alpha - u \rangle + \langle \alpha - u, \alpha' \rangle$$

burada iç çarpımın değişme özelliği kullanıldığında;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle \quad (3.44)$$

olarak bulunur.

3.44 denkleminin türevi alındığında;

$$\frac{1}{2}f'' = \langle T', \alpha - u \rangle + \langle T, \alpha' \rangle$$

3.43 denklemlerinden yararlanıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında;

$$\frac{1}{2}f'' = k_1 \langle M_1, \alpha - u \rangle + k_2 \langle M_2, \alpha - u \rangle + 1 \quad (3.45)$$

olarak bulunur.

3.45 denkleminin türevi alındığında ;

$$\frac{1}{2}f''' = k_1' \langle M_1, \alpha - u \rangle + k_1 \langle M_1', \alpha - u \rangle + k_1 \langle M_1, \alpha' \rangle + k_2' \langle M_2, \alpha - u \rangle + k_2 \langle M_2', \alpha - u \rangle + k_2 \langle M_2, \alpha' \rangle$$

elde edilir.3.43 denklemleri kullanılıp gerekli işlemler yapıldığında;

$$\frac{1}{2}f''' = - [k_1^2 + k_2^2] \langle T, \alpha - u \rangle + k_1' \langle M_1, \alpha - u \rangle + k_2' \langle M_2, \alpha - u \rangle \quad (3.46)$$

olarak bulunur.

3.46 denkleminin türevi alındığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(4)} = & - 2 [k_1'k_1 + k_2'k_2] \langle T, \alpha - u \rangle - [k_1^2 + k_2^2] [\langle T', \alpha - u \rangle + \langle T, T \rangle] \\ & + k_1'' \langle M_1, \alpha - u \rangle + k_1' \langle M_1', \alpha - u \rangle + k_1' \langle M_1, \alpha' \rangle \\ & + k_2'' \langle M_2, \alpha - u \rangle + k_2' \langle M_2', \alpha - u \rangle + k_2' \langle M_2, \alpha' \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. 3.43 denklemleri kullanıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(4)} = & - 3 [k_1k_1' + k_2k_2'] \langle T, \alpha - u \rangle \\ & + [k_1'' - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \langle M_1, \alpha - u \rangle \\ & + [k_2'' - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \langle M_2, \alpha - u \rangle - (k_1^2 + k_2^2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

olarak bulunur.

3.47 denkleminin türevi alındığında;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f^{(5)} = & -3 [k_1''k_1 + (k_1')^2 + k_2''k_2 + (k_2')^2] \langle T, \alpha - u \rangle \\
& -3 [k_1k_1' + k_2k_2'] [\langle T', \alpha - u \rangle + \langle T, \alpha' \rangle] \\
& + [k_1''' - k_1'(k_1^2 + k_2^2) - 2k_1(k_1k_1' + k_2k_2')] \langle M_1, \alpha - u \rangle \\
& + [k_1'' - k_1(k_1^2 + k_2^2)] [\langle M_1', \alpha - u \rangle + \langle M_1, \alpha' \rangle] \\
& + [k_2''' - k_2'(k_1^2 + k_2^2) - 2k_2(k_1k_1' + k_2k_2')] \langle M_2, \alpha - u \rangle \\
& + [k_2'' - k_2(k_1^2 + k_2^2)] [\langle M_2', \alpha - u \rangle + \langle M_2, \alpha' \rangle] \\
& - 2 [k_1'k_1 + k_2'k_2]
\end{aligned}$$

elde edilir. 3.43 denklemleri kullanıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f^{(5)} = & - [4k_1''k_1 + 3(k_1')^2 + 4k_2''k_2 + 3(k_2')^2 - (k_1^2 + k_2^2)] \langle T, \alpha - u \rangle \\
& + [k_1''' - k_1'(k_1^2 + k_2^2) - 5k_1(k_1k_1' + k_2k_2')] \langle M_1, \alpha - u \rangle \\
& + [k_2''' - k_2'(k_1^2 + k_2^2) - 5k_2(k_1k_1' + k_2k_2')] \langle M_2, \alpha - u \rangle \\
& - 5 [k_1'k_1 + k_2'k_2]
\end{aligned} \tag{3.48}$$

şeklinde elde edilir.

(1) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle$$

ifadesi bu durumda;

$$\langle T, \alpha - u \rangle = 0$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $T \perp (\alpha - u)$ buradan;

$$(\alpha - u) = \lambda M_1 + \mu M_2 \tag{3.49}$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $(\alpha - u) = \lambda M_1 + \mu M_2$ olsun;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle$$

ifadesi bu durumda

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \lambda M_1 + \mu M_2 \rangle$$

olarak yazılabilir. Burada 3.43 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$f' = 0$$

olarak bulunur.

(2) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = f'' = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f'' = k_1 \langle M_1, \alpha - u \rangle + k_2 \langle M_2, \alpha - u \rangle + 1$$

ifadesi bu durumda 3.43 ve 3.49 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$k_1 \underbrace{\langle M_1, \alpha - u \rangle}_{\lambda} + k_2 \underbrace{\langle M_2, \alpha - u \rangle}_{\mu} + 1 = 0$$

olarak yazılabilir. Buradan;

$$\lambda k_1 + \mu k_2 = -1 \quad (3.50)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $\lambda k_1 + \mu k_2 = -1$ olsun;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \alpha - u \rangle$$

ifadesi 3.49 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$\frac{1}{2}f' = \langle T, \lambda M_1 + \mu M_2 \rangle$$

elde edilir. Burada 3.43 denklemlerinden yararlanılarak;

$$f' = 0$$

olarak bulunur.

$$\frac{1}{2}f'' = k_1 \langle M_1, \alpha - u \rangle + k_2 \langle M_2, \alpha - u \rangle + 1$$

ifadesi 3.49 denkleminde yararlanıldığında;

$$\frac{1}{2}f'' = k_1 \langle M_1, \lambda M_1 + \mu M_2 \rangle + k_2 \langle M_2, \lambda M_1 + \mu M_2 \rangle + 1$$

olarak yazılabilir. 3.43 denklemlerinden yararlanıldığında ve $\lambda k_1 + \mu k_2 = -1$ yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{2}f'' = 0$$

olarak bulunur.

(3) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = 0$ olsun;

$$\frac{1}{2}f''' = - [k_1^2 + k_2^2] \langle T, \alpha - u \rangle + k_1' \langle M_1, \alpha - u \rangle + k_2' \langle M_2, \alpha - u \rangle$$

denklemini bu durumda

$$- [k_1^2 + k_2^2] \underbrace{\langle T, \alpha - u \rangle}_0 + k_1' \underbrace{\langle M_1, \alpha - u \rangle}_\lambda + k_2' \underbrace{\langle M_2, \alpha - u \rangle}_\mu = 0$$

olarak yazılır. 3.43 ve 3.49 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$\lambda k_1' + \mu k_2' = 0 \quad (3.51)$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow) : $(\alpha - u) = \lambda M_1 + \mu M_2$, $\lambda k_1 + \mu k_2 = -1$ ve $\lambda k_1' + \mu k_2' = 0$ kabul edildiğinde $f' = f'' = f''' = 0$ olacağı açıktır.

(4) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = 0$ olsun;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{(4)} = & -3 [k_1 k_1' + k_2 k_2'] \langle T, \alpha - u \rangle + [k_1'' - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \langle M_1, \alpha - u \rangle \\ & + [k_2'' - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \langle M_2, \alpha - u \rangle - (k_1^2 + k_2^2) \end{aligned}$$

ifadesi bu durumda;

$$\begin{aligned}
& -3 [k_1 k'_1 + k_2 k'_2] \underbrace{\langle T, \alpha - u \rangle}_0 + [k''_1 - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \underbrace{\langle M_1, \alpha - u \rangle}_\lambda \\
& + [k''_2 - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \underbrace{\langle M_2, \alpha - u \rangle}_\mu - (k_1^2 + k_2^2) = 0
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. 3.43 denkleminde yararlanıldığında;

$$[k''_1 - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \lambda + [k''_2 - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \mu - (k_1^2 + k_2^2) = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$-\underbrace{[\lambda k_1 + \mu k_2 + 1]}_0 (k_1^2 + k_2^2) + \lambda k''_1 + \mu k''_2 = 0$$

olarak yazılabilir. 3.49 denkleminde yararlanıldığında;

$$\lambda k''_1 + \mu k''_2 = 0$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow) : $(\alpha - u) = \lambda M_1 + \mu M_2$, $\lambda k_1 + \mu k_2 = -1$, $\lambda k'_1 + \mu k'_2 = 0$ ve $\lambda k''_1 + \mu k''_2 = 0$ kabul edildiğinde $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = 0$ olacağı açıktır.

(5) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = f^{(5)} = 0$ olsun;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} f^{(5)} &= - [4k''_1 k_1 + 3(k'_1)^2 + 4k''_2 k_2 + 3(k'_2)^2 - (k_1^2 + k_2^2)] \langle T, \alpha - u \rangle \\
&+ [k'''_1 - k'_1(k_1^2 + k_2^2) - 5k_1(k_1 k'_1 + k_2 k'_2)] \langle M_1, \alpha - u \rangle \\
&+ [k'''_2 - k'_2(k_1^2 + k_2^2) - 5k_2(k_1 k'_1 + k_2 k'_2)] \langle M_2, \alpha - u \rangle \\
&- 5 [k'_1 k_1 + k'_2 k_2]
\end{aligned}$$

ifadesi bu durumda;

$$\begin{aligned}
& - [4k_1''k_1 + 3(k_1')^2 + 4k_2''k_2 + 3(k_2')^2 - (k_1^2 + k_2^2)] \underbrace{\langle T, \alpha - u \rangle}_0 \\
& + [k_1''' - k_1'(k_1^2 + k_2^2) - 5k_1(k_1k_1' + k_2k_2')] \underbrace{\langle M_1, \alpha - u \rangle}_\lambda \\
& + [k_2''' - k_2'(k_1^2 + k_2^2) - 5k_2(k_1k_1' + k_2k_2')] \underbrace{\langle M_2, \alpha - u \rangle}_\mu \\
& - 5 [k_1'k_1 + k_2'k_2] = 0
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$\lambda k_1''' + \mu k_2''' - \underbrace{(\lambda k_1' + \mu k_2')}_0 (k_1^2 + k_2^2) - 5 \underbrace{[\lambda k_1 + \mu k_2 + 1]}_0 [k_1'k_1 + k_2'k_2]$$

elde edilir. Burada 3.43, 3.49, 3.50 ve 3.51 denlemleri kullanıldığında;

$$\lambda k_1''' + \mu k_2''' = 0$$

olarak elde edilir.

\Leftrightarrow : $(\alpha - u) = \lambda M_1 + \mu M_2$, $\lambda k_1 + \mu k_2 = -1$, $\lambda k_1' + \mu k_2' = 0$, $\lambda k_1'' + \mu k_2'' = 0$ ve $\lambda k_1''' + \mu k_2''' = 0$ kabul edildiğinde $f' = f'' = f''' = f^{(4)} = f^{(5)} = 0$ olacağı açıktır.

□

3.2.2. Öklid uzayında Bishop çatısına göre bir eğrinin dayanak fonksiyonunun tekilliği

3.6 Teorem : $\alpha : I \rightarrow M$ regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\forall_s \in I$ noktasında Bishop çatısı $\{T(s), M_1(s), M_2(s)\}$ ve Tanım 3.2 verilen dayanak fonksiyonu $H(s, u) = \langle \alpha(s), u \rangle$ olmak üzere;

$$(1) h'(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s) \text{ olacak şekilde } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$(2) h'(s) = h''(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s), \quad \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = 0$$

$$(3) h'(s) = h''(s) = h'''(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s), \quad \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = 0, \\ \lambda k_1'(s) + \mu k_2'(s) = 0$$

$$(4) \quad h'(s) = h''(s) = h'''(s) = h^{(4)}(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s), \quad \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = 0, \\ \lambda k_1'(s) + \mu k_2'(s) = 0, \quad \lambda k_1''(s) + \mu k_2''(s) = 0$$

$$(5) \quad h'(s) = h''(s) = h'''(s) = h^{(4)}(s) = h^{(5)}(s) = 0 \Leftrightarrow u = \lambda M_1(s) + \mu M_2(s) , \\ \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = 0, \quad \lambda k_1'(s) + \mu k_2'(s) = 0, \quad \lambda k_1''(s) + \mu k_2''(s) = 0, \lambda k_1'''(s) + \mu k_2'''(s) = 0$$

koşulları sağlanır.

Kanıt : Öklid uzayında Bishop çatısı için $\{T', M_1', M_2'\}$

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ M_1(s) \\ M_2(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_1(s) & k_2(s) \\ -k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_2(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ M_1(s) \\ M_2(s) \end{pmatrix}$$

yardımıyla;

$$T'(s) = k_1(s)M_1(s) + k_2(s)M_2(s)$$

$$M_1'(s) = -k_1(s)T(s)$$

$$M_2'(s) = -k_2(s)T(s)$$

şeklinde olur. Ardışık türevlerde terimler çoğaldıkça parametreyi yazmak işlemleri uzatacağından aşağıdaki türevlerde parametreye yer verilmemiştir.

Şimdi dayanak fonksiyonun sırası ile türevlerini bulalım.

$$h = \langle \alpha, u \rangle$$

türevini aldığımızda;

$$h' = \langle T, u \rangle \tag{3.52}$$

olarak bulunur.

3.52 denkleminin türevi alındığında;

$$h'' = \langle T', u \rangle$$

3.43 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$h'' = \langle k_1 M_1 + k_2 M_2, u \rangle$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$h'' = k_1 \langle M_1, u \rangle + k_2 \langle M_2, u \rangle \quad (3.53)$$

olarak bulunur.

3.53 denkleminin türevi alındığında;

$$h''' = k_1' \langle M_1, u \rangle + k_1 \langle M_1', u \rangle + k_2' \langle M_2, u \rangle + k_2 \langle M_2', u \rangle$$

3.43 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$h''' = k_1' \langle M_1, u \rangle + k_1 \langle -k_1 T, u \rangle + k_2' \langle M_2, u \rangle + k_2 \langle -k_2 T, u \rangle$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$h''' = -(k_1^2 + k_2^2) \langle T, u \rangle + k_1' \langle M_1, u \rangle + k_2' \langle M_2, u \rangle \quad (3.54)$$

olarak bulunur.

3.54 denkleminin türevi alındığında;

$$h^{(4)} = -2(k_1' k_1 + k_2' k_2) \langle T, u \rangle - (k_1^2 + k_2^2) \langle T', u \rangle \\ + k_1'' \langle M_1, u \rangle + k_1' \langle M_1', u \rangle + k_2'' \langle M_2, u \rangle + k_2' \langle M_2', u \rangle$$

3.43 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$h^{(4)} = -2(k_1' k_1 + k_2' k_2) \langle T, u \rangle - (k_1^2 + k_2^2) \langle k_1 M_1 + k_2 M_2, u \rangle \\ + k_1'' \langle M_1, u \rangle + k_1' \langle -k_1 T, u \rangle + k_2'' \langle M_2, u \rangle + k_2' \langle -k_2 T, u \rangle$$

gerekli işlemler yapıldığında;

$$h^{(4)} = -3 [k'_1 k_1 + k'_2 k_2] \langle T, u \rangle + [k''_1 - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \langle M_1, u \rangle + [k''_2 - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \langle M_2, u \rangle \quad (3.55)$$

olarak bulunur.

3.55 denkleminin türevi alındığında;

$$\begin{aligned} h^{(5)} = & -3 [k''_1 k_1 + (k'_1)^2 + k''_2 k_2 + (k'_2)^2] \langle T, u \rangle \\ & -3 [k_1 k'_1 + k_2 k'_2] \langle T', u \rangle \\ & + [k'''_1 - k'_1(k_1^2 + k_2^2) - 2k_1(k_1 k'_1 + k_2 k'_2)] \langle M_1, u \rangle \\ & + [k''_1 - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \langle M'_1, u \rangle \\ & + [k'''_2 - k'_2(k_1^2 + k_2^2) - 2k_2(k_1 k'_1 + k_2 k'_2)] \langle M_2, u \rangle \\ & + [k''_2 - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \langle M'_2, u \rangle \end{aligned}$$

3.43 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$\begin{aligned} h^{(5)} = & -3 [k''_1 k_1 + (k'_1)^2 + k''_2 k_2 + (k'_2)^2] \langle T, u \rangle \\ & -3 [k_1 k'_1 + k_2 k'_2] \langle k_1 M_1 + k_2 M_2, u \rangle \\ & + [k'''_1 - k'_1(k_1^2 + k_2^2) - 2k_1(k_1 k'_1 + k_2 k'_2)] \langle M_1, u \rangle \\ & + [k''_1 - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \langle -k_1 T, u \rangle \\ & + [k'''_2 - k'_2(k_1^2 + k_2^2) - 2k_2(k_1 k'_1 + k_2 k'_2)] \langle M_2, u \rangle \\ & + [k''_2 - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \langle -k_2 T, u \rangle \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapıldığında;

$$\begin{aligned} h^{(5)} = & -[4k''_1 k_1 + 3(k'_1)^2 + 4k''_2 k_2 + 3(k'_2)^2 - (k_1^2 + k_2^2)] \langle T, u \rangle \\ & + [k'''_1 - k'_1(k_1^2 + k_2^2) - 5k_1(k_1 k'_1 + k_2 k'_2)] \langle M_1, u \rangle \\ & + [k'''_2 - k'_2(k_1^2 + k_2^2) - 5k_2(k_1 k'_1 + k_2 k'_2)] \langle M_2, u \rangle \end{aligned} \quad (3.56)$$

olarak bulunur.

(1) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = 0$ olsun;

$$h' = \langle T, u \rangle$$

ifadesi artık

$$\langle T, u \rangle = 0$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $T \perp u$ buradan;

$$u = \lambda M_1 + \mu M_2 \quad (3.57)$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $u = \lambda M_1 + \mu M_2$ olsun

$$h' = \langle T, u \rangle$$

ifadesi bu durumda;

$$h' = \langle T, \lambda M_1 + \mu M_2 \rangle$$

olarak yazılır burada 3.43 denklemleri kullanıldığında;

$$h' = 0$$

olarak bulunur.

(2) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = 0$ olsun;

$$h'' = k_1 \langle M_1, u \rangle + k_2 \langle M_2, u \rangle$$

ifadesi bu durumda;

$$k_1 \underbrace{\langle M_1, \alpha - u \rangle}_{\lambda} + k_2 \underbrace{\langle M_2, \alpha - u \rangle}_{\mu} = 0$$

elde edilir. Burada 3.43 ve 3.57 denklemleri kullanıldığında;

$$\lambda k_1 + \mu k_2 = 0 \quad (3.58)$$

olarak bulunur.

\Leftarrow) : Kabul edelim ki $u = \lambda M_1 + \mu M_2$ ve $\lambda k_1 + \mu k_2 = 0$ olsun;

$$h' = \langle T, u \rangle$$

eşitliği 3.57 eşitliği kullanıldığında;

$$h' = \langle T, \lambda M_1 + \mu M_2 \rangle$$

olarak yazılır. 3.43 denklemleri kullanıldığında;

$$h' = 0$$

olarak bulunur.

$$h'' = k_1 \langle M_1, u \rangle + k_2 \langle M_2, u \rangle$$

eşitliği 3.57 denklemini kullanıldığında;

$$h'' = k_1 \langle M_1, \lambda M_1 + \mu M_2 \rangle + k_2 \langle M_2, \lambda M_1 + \mu M_2 \rangle$$

olarak yazılır. Burada 3.43 denklemleri kullanıldığında;

$$h'' = \lambda k_1 + \mu k_2$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$h'' = 0$$

olarak bulunur.

(3) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = 0$ olsun;

$$h''' = -(k_1^2 + k_2^2) \langle T, u \rangle + k_1' \langle M_1, u \rangle + k_2' \langle M_2, u \rangle$$

denklemini bu durumda

$$-(k_1^2 + k_2^2) \underbrace{\langle T, u \rangle}_0 + k_1' \underbrace{\langle M_1, u \rangle}_\lambda + k_2' \underbrace{\langle M_2, u \rangle}_\mu = 0$$

olarak yazılır. Burada 3.43 ve 3.57 denklemleri kullanıldığında;

$$\lambda k'_1 + \mu k'_2 = 0 \quad (3.59)$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow) : $u = \lambda M_1 + \mu M_2$, $\lambda k_1 + \mu k_2 = 0$ ve $\lambda k'_1 + \mu k'_2 = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = 0$ olacağı açıktır.

(4) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = 0$ olsun;

$$h^{(4)} = -3 [k'_1 k_1 + k'_2 k_2] \langle T, u \rangle + [k''_1 - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \langle M_1, u \rangle + [k''_2 - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \langle M_2, u \rangle$$

denklemini bu durumda;

$$-3 [k'_1 k_1 + k'_2 k_2] \underbrace{\langle T, u \rangle}_0 + [k''_1 - k_1(k_1^2 + k_2^2)] \underbrace{\langle M_1, u \rangle}_\lambda + [k''_2 - k_2(k_1^2 + k_2^2)] \underbrace{\langle M_2, u \rangle}_\mu = 0$$

olarak yazılabilir. 3.43 ve 3.57 denklemlerinden yararlanıldığında;

$$\lambda k''_1 + \mu k''_2 - \underbrace{(\lambda k_1 + \mu k_2)}_0 (k_1^2 + k_2^2) = 0$$

elde edilir. 3.58 denklemini kullanıldığında;

$$\lambda k''_1 + \mu k''_2 = 0 \quad (3.60)$$

\Leftrightarrow) : $u = \lambda M_1 + \mu M_2$, $\lambda k_1 + \mu k_2 = 0$, $\lambda k'_1 + \mu k'_2 = 0$ ve $\lambda k''_1 + \mu k''_2 = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = 0$ olacağı açıktır.

(5) \Rightarrow) : Kabul edelim ki $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = h^{(5)} = 0$ olsun;

$$\begin{aligned}
h^{(5)} = & - [4k_1''k_1 + 3(k_1')^2 + 4k_2''k_2 + 3(k_2')^2 - (k_1^2 + k_2^2)] \langle T, u \rangle \\
& + [k_1''' - k_1'(k_1^2 + k_2^2) - 5k_1(k_1k_1' + k_2k_2')] \langle M_1, u \rangle \\
& + [k_2''' - k_2'(k_1^2 + k_2^2) - 5k_2(k_1k_1' + k_2k_2')] \langle M_2, u \rangle
\end{aligned}$$

denklemini bu durumda;

$$\begin{aligned}
& - [4k_1''k_1 + 3(k_1')^2 + 4k_2''k_2 + 3(k_2')^2 - (k_1^2 + k_2^2)] \underbrace{\langle T, u \rangle}_0 \\
& + [k_1''' - k_1'(k_1^2 + k_2^2) - 5k_1(k_1k_1' + k_2k_2')] \underbrace{\langle M_1, u \rangle}_\lambda \\
& + [k_2''' - k_2'(k_1^2 + k_2^2) - 5k_2(k_1k_1' + k_2k_2')] \underbrace{\langle M_2, u \rangle}_\mu = 0
\end{aligned}$$

olarak yazılır. 3.43 ve 3.57 denkelemleri kullanıldığında;

$$\lambda k_1''' + \mu k_2''' - \underbrace{(\lambda k_1' + \mu k_2')}_0 (k_1^2 + k_2^2) - 5 \underbrace{(\lambda k_1 + \mu k_2)}_0 (k_1k_1' + k_2k_2') = 0$$

olarak yazılır. Burada 3.58 ve 3.59 denklemleri kullanıldığında;

$$\lambda k_1''' + \mu k_2''' = 0 \tag{3.61}$$

olarak bulunur.

\Leftrightarrow) : $u = \lambda M_1 + \mu M_2$, $\lambda k_1 + \mu k_2 = 0$, $\lambda k_1' + \mu k_2' = 0$, $\lambda k_1'' + \mu k_2'' = 0$ ve $\lambda k_1''' + \mu k_2''' = 0$ kabul edildiğinde $h' = h'' = h''' = h^{(4)} = h^{(5)} = 0$ olacağı açıktır.

□

4. SONUÇ

Bu çalışmada Öklid uzayında bulunan bir yüzeydeki jeodezik ve asimptotik eğrilerin karesel uzaklık ve dayanak fonksiyonlarının singülerlikleri üzerine çalışılmıştır. Dayanak fonksiyonlarının birbiri ile benzerlikleri, karesel uzaklık fonksiyonlarının ise birbiri ile benzemezlikleri görüldü. Dolayısıyla Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3, Teorem 3.4, Teorem 3.5 ve Teorem 3.6 ile literatüre katkı sunulduğu düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Arnold, V. I., Gusein-Zade, S. M. ve Varchenko, A. N., (1986). *Singularities of Differentiable Maps vol. I*. Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 382.
- Banchoff, T. , Gaffney, T. ve McCrory, C., (1982). Cusps of Gauss Mappings. *Research Notes in Mathematics* , 26(2), 55.
- Bruce, J. W. , Giblin ve P. J. , Gibson, C. G. , (1981). On caustics of plane curves. *Amer. Math. Monthly*, 88(9), 651 – 667.
- Bruce, J. W. ve Giblin, P. J., (1983). Generic geometry. *Amer. Math. Monthly*, 90(8), 529 – 545.
- Bruce, J. W. ve Giblin, P. J., (1992). *Curves and Singularities(second editions)*.(2nd edition) New York: Cambridge Univ. Press., 321.
- Do Carmo, M. P., (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey: Prentice-Hall, 503.
- Fidal, D. L., (1984a). The existance of sextactik point. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* , 96(3),433 – 436.
- Fidal, D. L. Giblin, P. J., (1984b). Generic 1-parameter families of caustic by reflection in the plane. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* , 96(3), 425 – 432.
- Hacısalıhoğlu, H. H., (1982). *Diferensiyel geometri* Ankara: I. İnönü üniv., Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 270.
- Hacısalıhoğlu, H. H., (1998). *Dönüşümler ve Geometriler* Ankara: Ankara üniv., Fen Fakültesi yayınlar1, Erdem matbaa,326.
- Anton, H. ve Rorres, C. , (2013). *Elementary Linear Algebra*(11th edition) New York: Wiley
- Abbena, E., Salamon, S., Gray, A., (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*(3rd edition). New York: Chapman and Hall/CRC
- Izumiya, S., Katsumi, H. ve Yamasaki, T., (1999). The Rectifying developable and the spherical darbox image of a space curve. *Banach center Publications* 50(1), 137 – 149.
- Izumiya, S., Pei, D. ve Sano, T., (2000a). The Lightcone Gauss map and The Light-cone developable of a spacelike curve in Minkowski 3-Space. *Glasgow Math. J.* , 42(1),75 – 89.
- Mond, D., (1989). Singularities of the tangent developable surface of a space curve. *The Quarterly Journal of Mathematics* , 40(1), 79 – 91.
- O’Neill, B., (1966). *Elementary Differantial Geometry*(revised 2nd edition). London: Academic Press Newyork 411.
- Pei, D. ve Sano, T., (2000b). The Focal Developable and the Binormal Indicatrix of a Non-lightlike Curve in Minkowski 3-space. *Tokyo J. Math.* , 23(1), 211 – 225.
- Spivak, M., (1975). *Calculus on Manifold*. New York: Addison-Wesley Publishing Company,

145.

Thom, R., (1975). *Structural Stability and Morphogenesis*. (W.A. Benjamin, Reading, translated from the French edition of 1972) , Massachusetts: CRC Press.

Wall, C. T. C., (1976). *Geometric Properties of Generic Differentiable Manifolds, in Geometry and Topology III. Lecture Notes in Math.* Berlin: SpringerVerlag 597 s.

Yaglom, I. M., (1979). *A Simple Non-Euclidean Geometry and Physical Basis*. Newyork: SpringerVerlag, 307.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Durmuş ÜNVER

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Matematik Öğretmenliği	2017

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2018- 2021	MEB/Siverek Mustafa Kemal Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2021- 2022	MEB/Siverek Molla Ramazan AİL	Matematik Öğretmeni
2022-	MEB/ Celaliye Mübeccel Hayrettin Gazioğlu MTAL	Matematik Öğretmeni Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Ünver, D. & Şahin, T. (2022). 3-Boyutlu Öklid Uzayında Singülerlikler Üzerine.
III. International Conference On Global Practice Of Multidisciplinary Scientific Studies.
15-17 November 2022, Turkish Republic of Northern Cyprus