



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sunullah KARABUDAK

DANIŞMAN

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

AKSARAY, 2023

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 202342401 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Sunullah KARABUDAK tarafından hazırlanan “**B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OYBİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Yunus ATALAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Akdeniz Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 24/05/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Sunullah KARABUDAK



TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenim süresi boyunca sabrıyla bana destek olan, zamanını benimle paylaşan ve akademik olarak beni daha ileri taşıyacağına inanarak birikimini bana aktaran danışman öğretmenim Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK' a teşekkür ederim. Ayrıca, lisansüstü öğrenim süresince bilgi, birikim ve tecrübelerini bana aktaran Doç. Dr. Samet MALDAR ve Doç. Dr. Yunus ATALAN öğretmenlerime de teşekkür ederim.

Dünya üzerinde beni en çok seven insanlar olan, her zaman yanımda olduklarını bildiğim, verdikleri emeklerin her zerresine ne kadar teşekkür etsem az olacağını bildiğim anneme ve babama, ilk arkadaşlarım olan canım kardeşlerime ve eşime teşekkürlerimi sunuyorum.

Bana desteklerini her zaman hissettiğim yakın arkadaşlarıma, çalışma arkadaşlarıma ve öğrencilerime teşekkür ederim.

Sunullah KARABUDAK
AKSARAY, 2023

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KONVEKSLİK KAVRAMI VE BAZI SOYUT KONVEKSLİK KAVRAMLARI İLE BAZI SOYUT KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİ	4
2.1 Konveks Kümeler ve Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Kavramlar.....	4
2.2 Soyut Konvekslik ile İlgili Temel Kavramlar	6
2.3 Bazı Soyut Konvekslik Çeşitleri	7
2.4 B-konveks Kümeler ve Fonksiyonlar.....	8
3. KESİRLİ İNTEGRALLER	11
4. HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ	14
4.1 Klasik Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri	14
4.2 B-konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler	15
5. B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN TRAPEZOİDAL EŞİTSİZLİKLER VE KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ	17
5.1 Trapezoidal Eşitsizlikler.....	17
5.2 Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegral Eşitsizlikleri	22
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	37
6.1 Sonuçlar.....	37
6.2 Öneriler.....	37
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ.....	42

YÜKSEK LİSANS TEZİ
B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ

Sunullah KARABUDAK

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖZET

Matematiğin önemli alanlarından birisi olan konveks analizin alt dallarından birisi de soyut konveks analizdir. Bu tezde öncelikle temel olarak konveks analiz ve soyut konveks analiz bilgileri verilmiştir. Ardından, soyut konvekslik çeşitleri ve üzerinde çalışılacak olan B-konvekslikten bahsedilmiştir. Daha sonra ise kesirli integral çeşitleri ve üzerinde çalışılacak olan genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integrali tanımlanmıştır. Bu kesirli integral operatörleri ile verilen Hermite-Hadamard eşitsizliklerine de tezde yer verilmiştir.

Bu tezde ana araştırma bulguları olarak iki şeye değinilecektir. Bunlardan ilki türevinin mutlak değeri B-konveks olan fonksiyonlar için trapezoidal bir eşitsizliği kanıtlamak olacaktır. İkincisi ise B-konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integrali kullanarak Hermite-Hadamard eşitsizliğini ifade etmek olacaktır. Bunların yanı sıra, son olarak bu eşitsizliklerin bazı uygulamaları verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Soyut Konvekslik, B-konvekslik, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Kesirli İntegral, Riemann-Liouville Kesirli İntegrali, Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegrali.

Mayıs, 2023; 43 sayfa

M.Sc. THESIS

FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR B-CONVEX FUNCTIONS

Sunullah KARABUDAK

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ABSTRACT

One of the subfield of convex analysis, which is one of the important areas of mathematics, is abstract convex analysis. In this thesis, primarily convex analysis and abstract convex analysis information are given mainly. Afterwards, abstract convexity types and B-convexity to be studied are mentioned. Then, the fractional integral types and the generalized Riemann-Liouville fractional integral to be studied are introduced. Hermite-Hadamard inequalities via these fractional integral operators are also included in the thesis.

In this thesis, two items are mentioned as the main research findings. The first would be to prove a trapezoidal inequality for a function whose absolute value of derivative is B-convex. The second one is to express the Hermite-Hadamard inequality using the generalized Riemann-Liouville fractional integral for B-convex functions. Besides, some applications of these inequalities are given finally.

Keywords: Convexity, Abstract Convexity, B-convexity, Hermite-Hadamard Inequality, Fractional Integral, Riemann-Liouville Fractional Integral, Generalized Riemann-Liouville Fractional Integral

May,2023; 43 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Konveks Olan ve Olmayan Kümeler.....	4
Şekil 2.2 Konveks Fonksiyon	5
Şekil 2.3 $U = \{(x, y) 1 \leq x \leq 3 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4\}$ kümesi	9



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\sup$	supremum
$\max$	maksimum
$\vee$	Koordinatlara göre maksimum
$\Gamma(\alpha)$	Gamma fonksiyonu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu öklid uzayı
$\overline{\mathbb{R}}$	Reel sayılar kümesinin kapanışı
$\mathbb{R}_+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+^n$	$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$
$\forall$	Her
$\emptyset$	Boş küme
■	İspatın bittiğini gösterir



1. GİRİŞ

İnsanlık tarihinin en eski bilimlerinden birisi matematiktir. İnsanların düşünlerine yön veren ve onu biçimlendiren matematik, medeniyetlerin gelişmesinde önemli olmuştur. Matematik sözcüğü, M.Ö. 550 yıllarında, Pisagor okulu içinde, ilk kez dile getirilmiştir. M.Ö. 380 yıllarında ise Platon’la literatüre girmiştir. Sözcük anlamı “öğrenilmesi gereken şey” olarak bilinir. Bu anlama gelen matematiğin ilk kullanımının ise daha eskiye dayandığı düşünülmektedir. İlk olarak, Mısır ve Mezopotamya’da matematiğin kullanıldığı söylenmektedir. Zamanı kaydetmeye çalışmada, ticarete, yıldızların konumlarında, doğada kısacası her yerde matematiği kullanmışlardır. Zaman geçtikçe matematiğin kullanıldığı alanlar giderek artmıştır. Mühendislik, tıp, ekonomi, bilişim, teknoloji, sanat gibi alanlar matematikle harmanlanarak daha da etkin bir hale gelmiştir. Matematik kendi içinde alt bilim dallarına ayrılarak, çalışma alanları kendi içinde daha da spesifik hale gelmiştir.

Alt çalışma alanlarının en önemlilerinden birisi de konveks analizdir. Özellikle son zamanlarda bu alanda yapılan çalışmalar daha da hızlanmıştır. Bu çalışmalarla, konvekslik kavramının hem günlük hayattaki hem de bilimsel çalışmalardaki kayda değer uygulamalarının varlığı önemini oldukça arttırmıştır. Optimizasyon Teorisi [1], Eşitsizlikler Teorisi [2], Matematiksel Ekonomi [3,4], Yöneylem Araştırması [5] gibi konveks analizin uygulama alanları hem teorik hem de pratik olarak büyük bir ilgi çekmektedir.

Klasik konveksliğin genelleştirilmesi ile soyut konveksliğe geçiş yapılır [6]. Bu geçiş ile elde edilen soyut konvekslik türlerinden birisi de B-konveksliktir [7].

$U \subseteq \mathbb{R}_+^n$ kümesi için $\forall x, y \in U$ ve $\beta \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\beta x \vee y \in U \quad (1.1)$$

oluyorsa U kümesine B-konveks küme denir [7].

$C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi B-konveks küme olmak üzere, $f: C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu; $\forall x, y \in C$ ve $\beta \in [0, 1]$ için,

$$f(x \vee \beta y) \leq f(x) \vee \beta f(y) \quad (1.2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir [8].

Küme teorisi, fonksiyonlar ve ekonomi üzerine yapılan çalışmaların geliştirilmesine B-konvekslik büyük bir katkı sağlamaktadır [7,9,10,11].

Kesirli türev ve kesirli integral ilk olarak 17. yüzyılda ortaya çıkmıştır ve bunların gelişmesinde ilk adımı Riemann ve Liouville atmıştır [12]. Daha sonra devamında Hadamard kendi isminde bir kesirli integral ve türev tanımlamıştır [13]. Son zamanlarda ise kesirli operatörler üzerine çalışmalar hız kazanmış ve pek çok kesirli operatör tanımı geliştirilerek ifade edilmiştir [14,15]. Bu çalışmaya konu olacak olan geliştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integrali bazı kesirli integrallerin bir geliştirilmesidir ve çok sayıda çalışmaya konu olmuştur [14,16,17,18,19]. Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $0 < a < b < \infty$, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen f fonksiyonu ve $\alpha > 0$ için,

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanan integrale α . mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanan integrale ise α . mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali denir [20].

Matematiğin her alanında kullanılan ve çok büyük bir öneme sahip olan teorilerden birisi de Eşitsizlikler Teorisidir [2]. Eşitsizlikler birçok matematikçi için heyecan verici gizemleri içinde barındırdığından yeni çalışmalarda kullanımı her geçen gün daha da artmaktadır. Jensen [21], Cauchy-Hölder, Hermite-Hadamard [22,23,24], Fejer [25] adlarıyla bilinen eşitsizlikler matematikte önemli yer edinmişlerdir ve bilimsel olarak kullanılan eşitsizliklerin başında gelmektedir [9,10,15,26,27]. B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi verilmiştir.

$f: [a, b] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ B-konveks fonksiyonu verilsin. f $[a, b]$ kapalı aralığında integrellenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \begin{cases} f(a) & , f(a) \geq f(b) \\ \frac{b((f(a))^2 + (f(b))^2) - 2af(a)f(b)}{2(b-a)f(b)} & , f(a) < f(b) \end{cases} \quad (1.5)$$

eşitsizliği sağlanır [8].

Tez çalışmamız altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Bu bölümde içerik ve tez ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konvekslik kavramı bunların soyutlaştırılması ve bazı soyut konvekslik çeşitleri verilmiştir. Bu soyut konvekslik çeşitlerinden tezimizin sonuç ve bulgularına temel oluşturan B-konveks küme ve fonksiyonların üzerinde ayrıntılı şekilde durulmuştur. Tez çalışmasının üçüncü bölümünde üzerinde çalışılan kesirli integrallerden bahsedilerek gerekli tanımlar verilmiştir. Dördüncü bölümde Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni bir versiyonu ile ilgili çalışmalar gerçekleştireceğimizden onunla ilgili bilgiler verilecektir. Beşinci bölümde ise bizim kendi ispat ve sonuçlarımız ile bunların uygulamaları verilecektir. Bu ispat ve sonuçlar B-konveks fonksiyonlar için trapezoidal eşitsizlikler ve kesirli integral eşitsizlikleri ile bunlardan elde edilen uygulamalardır. Tezin son bölümünde ise sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

2. KONVEKSLİK VE SOYUT KONVEKSLİK KAVRAMLARI İLE BAZI SOYUT KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİ

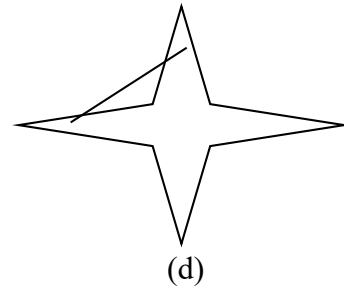
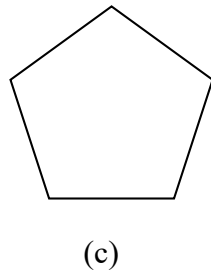
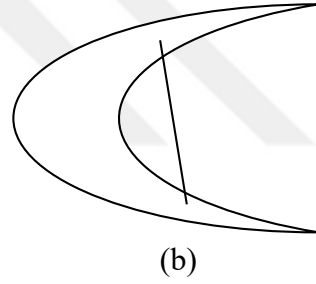
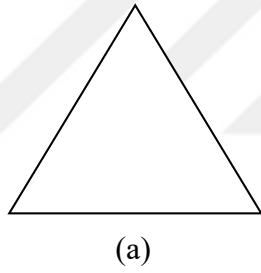
Bu bölümde ilk olarak klasik konvekslik ve soyut konvekslikle ilgili temel bilgilere değinilecektir. Sonra soyut konvekslik çeşitlerinden B-konvekslikle ilgili tanımlar ve gerekli bilgiler verilecektir.

2.1 Konveks Kümeler ve Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 [21] $C \subset \mathbb{R}^n$ ve $C \neq \emptyset$ olsun. $\forall x, y \in C$ ve $\beta \in [0, 1]$ için

$$\beta x + (1 - \beta)y \in C \quad (2.1)$$

sağlanıyorsa C kümesine konveks küme denir. Başka bir deyişle C kümesinin içinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası C kümesinin içinde kalıyorsa, C kümesine konvekstir denir. Konveks olmayan kümeler ise konkav kümeler denir.



Şekil 2.1 Konveks Olan ve Olmayan Kümeler

Yukarıda Şekil 2.1 de verilen (a) ve (c) kümeleri konveks küme iken (b) ve (d) kümeleri konkav kümelerdir.

Teorem 2.1.1 [21] $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. C kümesinin konveks küme olması için gerek ve yeter şart $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in C, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \geq 0$ ve $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 1$ için,

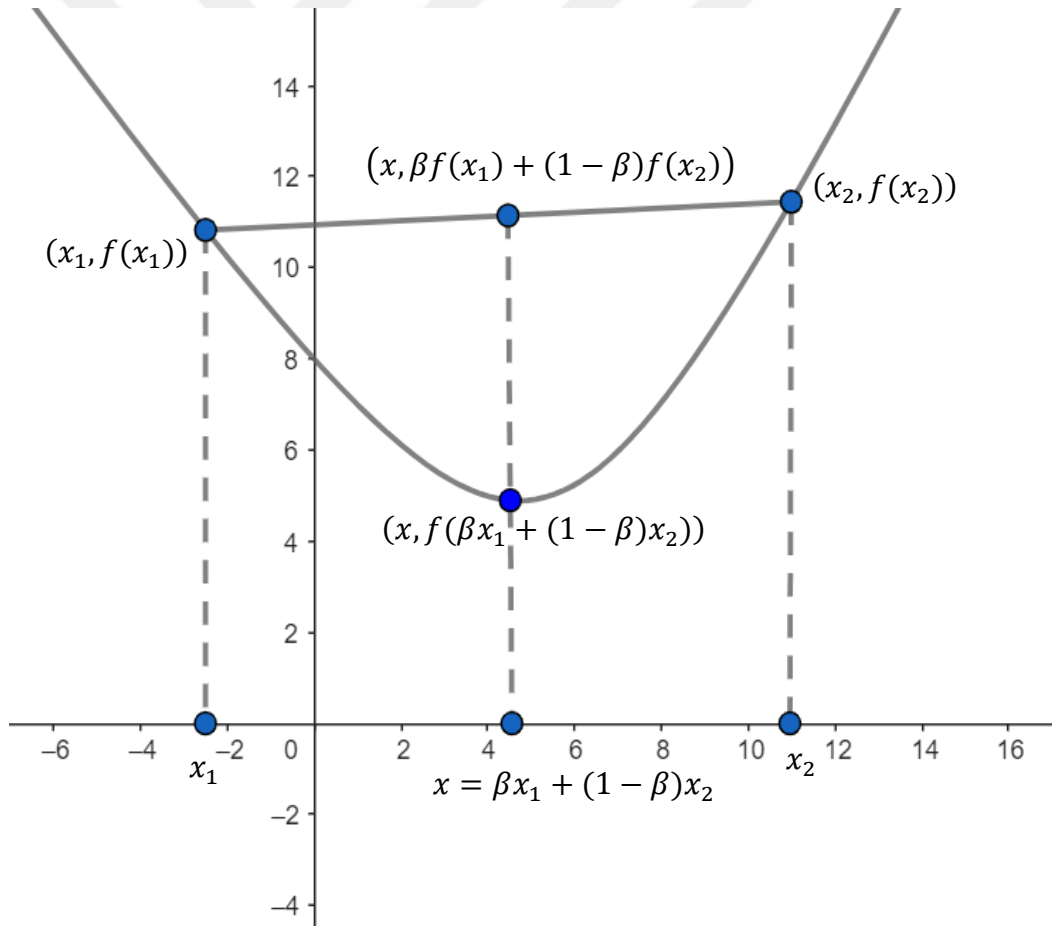
$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \in C \quad (2.2)$$

şartının sağlanmasıdır.

Tanım 2.1.2 [21] $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi konveks küme olsun. $f: C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu; $x, y \in C$ ve $\beta \in [0, 1]$ için,

$$f(\beta x + (1 - \beta)y) \leq \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.



Şekil 2.2 Konveks Fonksiyon

Şekil 2.2 de verilen fonksiyon konveks fonksiyondur. Gerçekten x_1 ve x_2 noktalarının $x = \beta x_1 + (1 - \beta)x_2$ konveks kombinasyonunun fonksiyon altındaki görüntüsü $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarının $\beta f(x_1) + (1 - \beta)f(x_2)$ konveks kombinasyonundan küçük kalır.

Teorem 2.1.2 (Jensen Eşitsizliği) [21] $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart

$$f(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n) \leq \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2) + \dots + \beta_n f(x_n) \quad (2.4)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \geq 0$ iken $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 1$ dir.

2.2 Soyut Konvekslik ile İlgili Temel Kavramlar

Konvekslik kavramı temel olarak aşağıdaki biçimlerde soyutlaştırılır.

Tanım 2.2.1 [6] H, X kümesi üzerinde tanımlı sonlu fonksiyonların bir kümesi ve $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Eğer H nin

$$f(x) = \sup\{h(x): x \in X, h \in U\} \quad (2.5)$$

olacak şekilde bir U alt kümesi varsa, f fonksiyonu H ye göre soyut konvekstir (H -konvekstir) denir. Burada H fonksiyonlar sınıfına elemanter fonksiyonlar ailesi denir.

$H = \emptyset$ olması durumunda $f(x) = -\infty$ olarak kabul edilecektir.

Bu yöntemden başka “Topolojik Soyut Konvekslik” ve “Fonksiyonel Soyut Konvekslik” isimli soyutlaştırma yöntemleri de vardır.

Tanım 2.2.2 (Topolojik Soyut Konvekslik) [6] X bir vektör uzay, $C \subset X$ olsun. $\forall m \geq 2$ tamsayısı için $V_m \subset \mathbb{R}^m$ kümesini alalım. Bir $\Phi_m: C^m \times V_m \rightarrow C$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Eğer $U \subset C$ için,

$$(x_1, \dots, x_m \in U, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in V_m) \Rightarrow \Phi_m(x_1, \dots, x_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in U, m = 2, 3, \dots$$

U kümesine Φ_m fonksiyonlar ailesine göre soyut konvekstir denir.

Tanım 2.2.3 (Fonksiyonel Soyut Konvekslik) [6] X bir vektör uzay, $C \subset X$ ve L de $\ell: C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer $U \subset C$ olmak üzere, $\forall x \notin U$ noktası L den bir fonksiyon ile U kümesinden ayrılabilir ise, yani öyle bir $\ell \in L$ vardır ki $\ell(x) > \sup \ell(u)$ ise, U kümesine L ye göre soyut konveks küme denir.

2.3 Bazı Soyut Konvekslik Çeşitleri

Tanım 2.3.1 (s-konveks Küme) [28] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. Her $x, y \in C$ ve $\lambda, \mu \geq 0$ için $\lambda^s + \mu^s = 1$ olmak üzere $\lambda x + \mu y \in C$ şartlarını sağlayan C kümesine s-konveks küme denir.

Tanım 2.3.2 (Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar) [29] $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0, 1]$ ve C s-konveks küme olmak üzere $\forall x, y \in C$ ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda^s + \mu^s = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^s f(x) + \mu^s f(y) \quad (2.6)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.3.3 (İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar) [30] $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0, 1]$ ve C konveks küme olmak üzere $\forall x, y \in C$ ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^s f(x) + \mu^s f(y) \quad (2.7)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.3.4 (Üçüncü Anlamda s-konveks Fonksiyonlar) [31] $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0, 1]$ ve C s-konveks küme olmak üzere $\forall x, y \in C$ ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda^s + \mu^s = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y) \quad (2.8)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna üçüncü anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.3.5 (Dördüncü Anlamda s-konveks Fonksiyonlar) [32] $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0, 1]$ ve C konveks küme olmak üzere $\forall x, y \in C$ ve $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y) \quad (2.9)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.3.6 (p-konveks Küme) [33] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $0 < p \leq 1$ olsun. Her $x, y \in C$ ve $\lambda, \mu \geq 0$ için $\lambda^p + \mu^p = 1$ olmak üzere $\lambda x + \mu y \in C$ şartlarını sağlayan C kümesine p-konveks küme denir.

Tanım 2.3.7 (p-konveks Fonksiyonlar) [34] $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $p \in (0, 1]$ ve U p-konveks küme olmak üzere $\forall x, y \in U$ ve $\lambda, \mu \geq 0, \lambda^p + \mu^p = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y) \quad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna p-konveks fonksiyon denir.

2.4 B-konveks Kümeler ve Fonksiyonlar

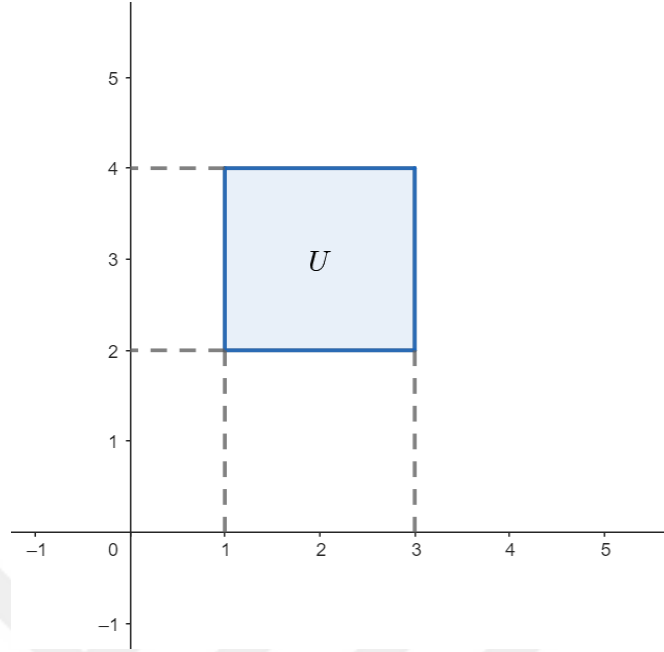
B-konvekslik de soyut konvekslik çeşitlerinden biridir. Ekonomi üzerine uygulamaları olan, ayrıca matematiksel anlamda da birçok çalışmaya konu olmuş olan B-konveks kümeler ve B-konveks fonksiyonlar bu bölümde ifade edilip, örneklendirilecektir. Ardından da bu tezde B-konveks fonksiyonlar için çeşitli eşitsizlikler ispat edilecektir.

Tanım 2.4.1 [7] $U \subseteq \mathbb{R}_+^n$ kümesi için $\forall x, y \in U$ ve $\beta \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\beta x \vee y \in U \quad (2.11)$$

oluyorsa U kümesine B-konveks küme denir. Burada $\vee$ koordinatlara göre maksimum demektir.

Örnek 2.4.1 $U = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$ kümesi B-konvektir.



Şekil 2.3 $U = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ ve } 2 \leq y \leq 4\}$ kümesi

Yukarıda Şekil 2.3 ile verilen küme B-konveks bir kümedir. Gerçekten,

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U$ ve $\beta \in [0, 1]$ için

$$\beta(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (\beta x_1 \vee x_2, \beta y_1 \vee y_2)$$

olur. Buradan

- (i) $x_1 < x_2$ ise $\beta x_1 \vee x_2 = x_2$
- (ii) $x_1 \geq x_2$ ise $\beta x_1 \vee x_2 = \begin{cases} x_2, & \beta x_1 < x_2 \\ \beta x_1, & \beta x_1 \geq x_2 \end{cases}$
- (iii) $y_1 < y_2$ ise $\beta y_1 \vee y_2 = y_2$
- (iv) $y_1 \geq y_2$ ise $\beta y_1 \vee y_2 = \begin{cases} y_2, & \beta y_1 < y_2 \\ \beta y_1, & \beta y_1 \geq y_2 \end{cases}$

elde edilir. Dolayısıyla, küme üzerindeki şartların sağlandığı görülmektedir. Böylece gerçekten U kümesinin B-konveks bir küme olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.4.1 [7] $U \subseteq \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere $k \geq 2$ ve $x_1, \dots, x_k \in U$ olsun. $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$ ve $\max\{\beta_1, \dots, \beta_k\} = 1$ için

$$\bigvee_{i=1}^k \beta_i x_i \in U \quad (2.12)$$

oluyorsa U kümesi B-konveks kümedir.

Tanım 2.4.2 [8] $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi B-konveks küme olsun. $f: C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu; $\forall x, y \in C$ ve $\beta \in [0, 1]$ için,

$$f(x \vee \beta y) \leq f(x) \vee \beta f(y) \quad (2.13)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir.

Örnek 2.4.2 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $\beta \in [0, 1]$ için,

$$f(x \vee \beta y) \leq f(x) \vee \beta f(y) \quad (2.14)$$

eşitsizliği

- $x \vee \beta y = x$ ise $f(x \vee \beta y) = x^2 \leq x^2 \vee \beta y^2 = f(x) \vee \beta f(y)$
- $x \vee \beta y = \beta y$ ise $f(x \vee \beta y) = \beta^2 y^2 \leq \beta y^2 \leq x^2 \vee \beta y^2 = f(x) \vee \beta f(y)$

şeklinde sağlandığından $f(x) = x^2$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

Teorem 2.4.3 (B-konveks Fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği) [8] $U \subseteq \mathbb{R}_+^n$ ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu verilsin. U kümesi B-konveks küme ve $i = 1, \dots, k$ olmak üzere; $\forall x_i \in U, \beta_i \in [0, 1]$ ve $\max_{i=1, \dots, k} \{\beta_i\} = 1$ için

$$f\left(\bigvee_{i=1}^k \beta_i x_i\right) \leq \bigvee_{i=1}^k \beta_i f(x_i) \quad (2.15)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

3. KESİRLİ İNTEGRALLER

Bu bölümde tezde kullanılan bazı kesirli integral çeşitlerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.1 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) [20] $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $0 < a < b < \infty$, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen f fonksiyonu ve $\alpha > 0$ için,

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan integrale α . mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan integrale ise α . mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali denir. Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonudur ve $\alpha > 0$ için,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$J_{a+}^0 f(x) = J_{b-}^0 f(x) = f(x) \quad (3.4)$$

olur.

Tanım 3.2 (Hadamard Kesirli İntegrali) [13] $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $0 < a < b < \infty$, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen f fonksiyonu ve $\alpha > 0$ için,

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad x > a \quad (3.5)$$

$$J_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad x < b \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanan integrallere sırasıyla sağ ve sol Hadamard kesirli integrali denir.

Genelleştirilmiş kesirli Riemann-Liouville integral operatörünü tanımlamak için ilk olarak aşağıdaki fonksiyonlar sınıfı ifade edilecektir.

$\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonu, $\alpha \geq 0$ için $\varphi(r)r^\alpha$ artan ve $\beta \geq 0$ için $\frac{\varphi(r)}{r^\beta}$ azalan olmak üzere,

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt < \infty \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{A_1} \leq \frac{\varphi(s)}{\varphi(r)} \leq A_1, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{s}{r} \leq 2 \quad (3.8)$$

$$\frac{\varphi(r)}{r^2} \leq A_2 \frac{\varphi(s)}{s^2}, \quad s \leq r \quad (3.9)$$

$$\left| \frac{\varphi(r)}{r^2} - \frac{\varphi(s)}{s^2} \right| \leq A_3 |r - s| \frac{\varphi(r)}{r^2}, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{s}{r} \leq 2 \quad (3.10)$$

şartlarını sağlasın, burada $A_1, A_2, A_3 > 0$ ve $r, s > 0$ dır [15]. M, bu φ fonksiyonlar ailesinin kümesi olarak işaretlensin.

Tanım 3.3 (Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) [15]

$f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varphi \in M$ fonksiyonları verilsin. $0 < a < b < \infty$, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen f fonksiyonu için

$${}_a^+ I_\varphi f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(x-t)}{x-t} f(t) dt, \quad x > a \quad (3.11)$$

$${}_b^- I_\varphi f(x) = \int_x^b \frac{\varphi(t-x)}{t-x} f(t) dt, \quad x < b \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanan integrallere sırasıyla sağ ve sol Genelleştirilmiş Riemann-

Liouville kesirli integrali denir.

Yukarıda verilen (3.11) ve (3.12) de $\varphi(t) = t$ alınırsa Riemann integraline ulaşılır. Eğer, (3.11) ve (3.12) eşitliklerinde $\varphi(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ yazılırsa Riemann-Liouville kesirli integraline, yine bu eşitliklerde $\varphi(t) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} t^{\frac{\alpha}{k}}$ yazılırsa k -Riemann-Liouville kesirli integraline ulaşılmış olur. (3.11) ve (3.12) eşitliklerinde sırasıyla

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t(x-t)^s (x^{s+1} - t^{s+1})^{\alpha-1} \quad (3.13)$$

ve

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t(t-x)^s (t^{s+1} - x^{s+1})^{\alpha-1} \quad (3.14)$$

yazılırsa Katugampola kesirli integrali elde edilir. $\varphi(t)$ yerine $t(x-t)^{\alpha-1}$ yazılırsa Conformable kesirli integraline ulaşılır. (3.11) ve (3.12) eşitliklerinde sırasıyla

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\left[\log \left(\frac{x}{x-t} \right) \right]^{\alpha-1}}{x-t} \quad (3.15)$$

ve

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t \frac{\left[\log \left(\frac{t-x}{x} \right) \right]^{\alpha-1}}{t-x} \quad (3.16)$$

yazılırsa Hadamard kesirli integrali elde edilir. Son olarak genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integrallerinde $\varphi(t)$ yerine $\frac{t}{\alpha} e^{\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} t\right)}$ yazılırsa exponential Kernel kesirli integrali elde edilir [15].

4. HERMITE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

4.1 Klasik Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Konveks fonksiyonlar için verilen en temel eşitsizliklerden olan Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Tanım 4.1.1 [10] $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu verilsin.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (4.1)$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirilmeleri ve iyileştirmeleri de pek çok çalışmaya konu olmuştur. Bu iyileştirilme çalışmalardan birine örnek olarak aşağıdaki teorem verilebilir. Bu eşitsizliği ifade edebilmek için öncelikle (4.2) denkleğini veren lemma verilmelidir.

Lemma 4.1.1 [26] $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensellenebilir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. f' fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilirse

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \quad (4.2)$$

eşitliği sağlanır.

Bu lemma yardımı ile aşağıdaki trapezoid eşitsizliğin verilmesi mümkündür.

Teorem 4.1.1 [26] $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensellenebilir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|) \quad (4.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2 B-konveks Fonksiyonlar için Bazı Eşitsizlikler

Bu bölümde B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ve bu eşitsizliğin Riemann-Liouville kesirli integrali ile gösterilen formu ifade edilecektir.

Teorem 4.2.1 (B-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri)

[10] $f: [a, b] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ B-konveks fonksiyonu verilsin. f , $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \begin{cases} f(a) & , f(a) \geq f(b) \\ \frac{b \left((f(a))^2 + (f(b))^2 \right) - 2af(a)f(b)}{2(b-a)f(b)} & , f(a) < f(b) \end{cases} \quad (4.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

B-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrali ile ifade edilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ise aşağıdaki teoremlerde verilmektedir.

Teorem 4.2.2 [13] $f: [a, b] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ verilsin. f , $[a, b]$ kapalı aralığında B-konveks ve integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$J_{a^+}^\alpha f(b) \leq \begin{cases} \frac{f(a)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & , 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ \frac{(\alpha+1)f(a)(f(b))^\alpha(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha} + \frac{b^\alpha(f(b)-f(a))^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha} & , \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(b-a)^\alpha f(b)(\alpha a + b)}{b\Gamma(\alpha+2)} & , 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.3 [13] $f: [a, b] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ verilsin. f $[a, b]$ kapalı aralığında B-konveks ve integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$J_b^\alpha f(a) \leq \begin{cases} \frac{f(a)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & , \quad 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ \frac{(b-a)^\alpha (f(b))^{\alpha+1} (\alpha b + a)}{b\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha} \\ + \frac{(bf(a) - af(b))^{\alpha+1}}{b\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha} & , \quad \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(b-a)^\alpha f(b)(\alpha b + a)}{b\Gamma(\alpha+2)} & , \quad 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

5. B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN TRAPEZOİDAL EŞİTSİZLİKLER VE KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, bu tezde elde edilen yeni eşitsizlikler ve bu eşitsizlikler ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

İki başlık altında ifade edilecek olan eşitsizliklerden ilk kısımdakiler Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin bir çeşit iyileştirilmesi olan trapezoidal bir eşitsizliğin B-konveks fonksiyonlar için bir biçiminin kanıtlanması olacaktır. İkinci kısımda ise B-konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri ile verilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ve bunların sonuçları olarak klasik ve Riemann-Liouville kesirli integrali içeren yeni eşitsizlikler ispat edilecektir.

5.1 Trapezoidal Eşitsizlikler

Lemma 5.1.1 $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer f' fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} f(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ = af'(a) - \frac{b}{b-a} \int_0^1 (b - \max\{a, \lambda b\}) f'(\max\{a, \lambda b\}) d\lambda \end{aligned} \quad (5.1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat f' fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilir olduğundan, $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki integrali ele alabiliriz.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (b - \max\{a, \lambda b\}) f'(\max\{a, \lambda b\}) d\lambda \\ = \int_0^{\frac{a}{b}} (b - a) f'(a) d\lambda + \int_{\frac{a}{b}}^1 (b - \lambda b) f'(\lambda b) d\lambda \\ = \frac{a}{b} (b - a) f'(a) - \frac{b-a}{b} f(a) + \int_{\frac{a}{b}}^1 f(\lambda b) d\lambda \\ = \frac{a}{b} (b - a) f'(a) - \frac{b-a}{b} f(a) + \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx \end{aligned} \quad (5.2)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (b - \max\{a, \lambda b\}) f'(\max\{a, \lambda b\}) d\lambda \\
&= \frac{a}{b} (b - a) f'(a) - \frac{b-a}{b} f(a) + \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{b-a}{b} f(a) - \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx \\
&= \frac{a}{b} (b - a) f'(a) - \int_0^1 (b - \max\{a, \lambda b\}) f'(\max\{a, \lambda b\}) d\lambda
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
& f(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\
&= a f'(a) - \frac{b}{b-a} \int_0^1 (b - \max\{a, \lambda b\}) f'(\max\{a, \lambda b\}) d\lambda
\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. ■

Teorem 5.1.1 $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere, eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında B-konveks bir fonksiyon ise

$$\left| f(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \begin{cases} \frac{3a+b}{2} |f'(a)| & , \quad 1 \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|} \\ \frac{(6ab-9a^2)|f'(a)|(|f'(b)|)^2 + b^2(|f'(b)|)^3}{6(b-a)(|f'(b)|)^2} \\ + \frac{3b^2(|f'(a)|)^2|f'(b)| - b^2(|f'(a)|)^3}{6(b-a)(|f'(b)|)^2} & , \quad \frac{a}{b} \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|} < 1 \\ \frac{6ab|f'(a)||f'(b)| + 3b^2(|f'(a)|)^2 + (a^2+ab+b^2)(|f'(b)|)^2}{6b|f'(b)|} & , \quad 0 \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|} < \frac{a}{b} \end{cases} \tag{5.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat f diferansiyellenebilir ve f' fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilir olduğundan Lemma 5.1.1 sağlanır. Buna göre

$$\begin{aligned}
& \left| f(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \int_0^1 |b - \max\{a, \lambda b\}| |f'(\max\{a, \lambda b\})| d\lambda \\
& \leq a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \int_0^1 |b - \max\{a, \lambda b\}| |\max\{f'(a), \lambda f'(b)\}| d\lambda
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \int_0^1 |b - \max\{a, \lambda b\}| |\max\{f'(a), \lambda f'(b)\}| d\lambda \quad (5.7)$$

ifadesindeki integralinin çözümü için aşağıdaki üç durum incelenmelidir.

(i) $1 \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|}$ olması durumunda

$$\begin{aligned}
& a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \int_0^1 |b - \max\{a, \lambda b\}| |\max\{f'(a), \lambda f'(b)\}| d\lambda \\
& = a|f'(a)| - \frac{b}{b-a} \left(\int_0^{\frac{a}{b}} |b - a| |f'(a)| d\lambda + \int_{\frac{a}{b}}^1 |b - \lambda b| |f'(a)| d\lambda \right) \\
& = a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left(\frac{a}{b} (b-a) |f'(a)| + \left(b - \frac{b}{2} - a + \frac{a^2}{2b} \right) |f'(a)| \right) \\
& = a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left(\frac{a}{b} (b-a) |f'(a)| + \frac{b}{2} |f'(a)| + \frac{a^2 - 2ab}{2b} |f'(a)| \right) \\
& = a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left(\frac{a}{b} (b-a) |f'(a)| + \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{2b} |f'(a)| \right) \\
& = a|f'(a)| + a|f'(a)| + \frac{b-a}{2} |f'(a)| \\
& = \frac{3a+b}{2} |f'(a)| \quad (5.8)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

$$(ii) \frac{a}{b} \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|} < 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
& a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \int_0^1 |b - \max\{a, \lambda b\}| |\max\{f'(a), \lambda f'(b)\}| d\lambda \\
&= a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left(\int_0^{\frac{a}{b}} |b-a| |f'(a)| d\lambda + \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{f'(a)}{f'(b)}} |b-\lambda b| |f'(a)| d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{f'(a)}{f'(b)}}^1 |b-\lambda b| |\lambda f'(b)| d\lambda \right) \\
&= a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left(\int_0^{\frac{a}{b}} (b-a) |f'(a)| d\lambda + \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{f'(a)}{f'(b)}} (b-\lambda b) f'(a) d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{f'(a)}{f'(b)}}^1 (b-\lambda b) \lambda f'(b) d\lambda \right) \\
&= a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left(\frac{a}{b} (b-a) |f'(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{b|f'(a)|}{|f'(b)|} - \frac{b(|f'(a)|)^2}{2(|f'(b)|)^2} - a + \frac{a^2}{2b} \right) |f'(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{3} - \frac{b(|f'(a)|)^2}{2(|f'(b)|)^2} + \frac{b(|f'(a)|)^3}{3(|f'(b)|)^3} \right) |f'(b)| \right) \\
&= a|f'(a)| + a|f'(a)| + \frac{b^2(|f'(a)|)^2}{(b-a)|f'(b)|(b)} - \frac{b^2(|f'(a)|)^3}{2(b-a)(|f'(b)|)^2} \\
&\quad + \frac{a^2-2ab}{2(b-a)} |f'(a)| + \frac{b^2}{6(b-a)} f'(b) - \frac{b^2(|f'(a)|)^2}{2(b-a)|f'(b)|} \\
&\quad + \frac{b^2(|f'(a)|)^3}{3(b-a)(|f'(b)|)^2} \\
&= 2a|f'(a)| + \frac{2b^2(|f'(a)|)^2|f'(b)| - b^2(|f'(a)|)^3}{2(b-a)(|f'(b)|)^2} + \frac{a^2-2ab}{2(b-a)} |f'(a)| \\
&\quad + \frac{b^2}{6(b-a)} f'(b) + \frac{2b^2(|f'(a)|)^3 - 3b^2(|f'(a)|)^2|f'(b)|}{6(b-a)(|f'(b)|)^2} \\
&= \frac{2ab-3a^2}{2(b-a)} |f'(a)| + \frac{b^2}{6(b-a)} |f'(b)| + \frac{3b^2(|f'(a)|)^2|f'(b)| - b^2(|f'(a)|)^3}{6(b-a)(|f'(b)|)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(6ab - 9a^2)|f'(a)|(|f'(b)|)^2 + b^2(|f'(b)|)^3}{6(b-a)(|f'(b)|)^2} \\
&\quad + \frac{3b^2(|f'(a)|)^2|f'(b)| - b^2(|f'(a)|)^3}{6(b-a)(|f'(b)|)^2}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

bulunur.

$$(iii) \ 0 \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|} < \frac{a}{b} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned}
&a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \int_0^1 |b - \max\{a, \lambda b\}| |\max\{f'(a), \lambda f'(b)\}| d\lambda \\
&= a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left(\int_0^{\frac{f'(a)}{f'(b)}} |b - a| |f'(a)| d\lambda + \int_{\frac{f'(a)}{f'(b)}}^{\frac{a}{b}} |b - a| |\lambda f'(b)| d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{a}{b}}^1 |b - \lambda b| |\lambda f'(b)| d\lambda \right) \\
&= a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left(\int_0^{\frac{f'(a)}{f'(b)}} (b-a) |f'(a)| d\lambda + \int_{\frac{f'(a)}{f'(b)}}^{\frac{a}{b}} (b-a) \lambda |f'(b)| d\lambda \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{a}{b}}^1 (b-\lambda b) \lambda |f'(b)| d\lambda \right) \\
&= a|f'(a)| + \frac{b}{b-a} \left((b-a) \frac{(|f'(a)|)^2}{|f'(b)|} + (b-a) \frac{a^2}{2b^2} |f'(b)| \right. \\
&\quad \left. - (b-a) \frac{(|f'(a)|)^2}{2|f'(b)|} + \frac{b}{6} f'(b) - \left(\frac{a^2}{2b} - \frac{a^3}{3b^2} \right) |f'(b)| \right) \\
&= a|f'(a)| + \frac{b(|f'(a)|)^2}{|f'(b)|} + \frac{a^2|f'(b)|}{2b} - \frac{b(|f'(a)|)^2}{2|f'(b)|} + \frac{b^2|f'(b)|}{6(b-a)} \\
&\quad - \frac{(3a^2b - 2a^3)|f'(b)|}{6b(b-a)} \\
&= a|f'(a)| + \frac{b(|f'(a)|)^2}{2|f'(b)|} + \frac{(3a^2b - 3a^3 + b^3 - 3a^2b + 2a^3)|f'(b)|}{6b(b-a)} \\
&= a|f'(a)| + \frac{b(|f'(a)|)^2}{2|f'(b)|} + \frac{(b^3 - a^3)|f'(b)|}{6b(b-a)} \\
&= a|f'(a)| + \frac{b(|f'(a)|)^2}{2|f'(b)|} + \frac{(a^2 + ab + b^2)|f'(b)|}{6b}
\end{aligned}$$

$$= \frac{6ab|f'(a)||f'(b)| + 3b^2(|f'(a)|)^2 + (a^2 + ab + b^2)(|f'(b)|)^2}{6b|f'(b)|} \quad (5.10)$$

olur. Buradan

$$\left| f(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \begin{cases} \frac{3a+b}{2} |f'(a)| & , 1 \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|} \\ \frac{(6ab-9a^2)|f'(a)|(|f'(b)|)^2 + b^2(|f'(b)|)^3}{6(b-a)(|f'(b)|)^2} \\ + \frac{3b^2(|f'(a)|)^2|f'(b)| - b^2(|f'(a)|)^3}{6(b-a)(|f'(b)|)^2} & , \frac{a}{b} \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|} < 1 \\ \frac{6ab|f'(a)||f'(b)| + 3b^2(|f'(a)|)^2 + (a^2 + ab + b^2)(|f'(b)|)^2}{6b|f'(b)|} & , 0 \leq \frac{|f'(a)|}{|f'(b)|} < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (5.11)$$

eşitsizliği elde edilir. ■

5.2 Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 5.2.1 $f: [a, b] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ B-konveks fonksiyonu ve $\varphi \in M$ integrallenebilir fonksiyonu verilsin. $0 < a < b < \infty$ olmak üzere $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen f fonksiyonu için

$${}_a I_{\varphi} f(b) \leq \begin{cases} f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt & , 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ f(a) \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + f(b) \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \varphi(t) dt & , \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(af(b)-bf(a))^2}{2bf(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + f(b) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt & , 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (5.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat f fonksiyonu B-konveks fonksiyon olduğundan;

$a, b \in \mathbb{R}_+, a < b$ ve $\beta \in [0, 1]$ için

$$f(\max\{a, \beta b\}) \leq \max\{f(a), \beta f(b)\} \quad (5.13)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı

$$\frac{\varphi(b - \max\{a, \beta b\})}{b - \max\{a, \beta b\}} \quad (5.14)$$

çarpılarak $[0, 1]$ aralığında integrallenirse

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi(b - \max\{a, \beta b\})}{b - \max\{a, \beta b\}} f(\max\{a, \beta b\}) d\beta \\ \leq \int_0^1 \frac{\varphi(b - \max\{a, \beta b\})}{b - \max\{a, \beta b\}} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \end{aligned} \quad (5.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafı

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi(b - \max\{a, \beta b\})}{b - \max\{a, \beta b\}} f(\max\{a, \beta b\}) d\beta \\ = \int_0^{\frac{a}{b}} \frac{\varphi(b - a)}{b - a} f(a) d\beta + \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(b - \beta b)}{b - \beta b} f(\beta b) d\beta \\ = \frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b - a)}{b - a} + \frac{1}{b} \int_a^b \frac{\varphi(b - t)}{b - t} f(t) dt \\ = \frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b - a)}{b - a} + \frac{1}{b} ({}_a I_\varphi f(b)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

biçiminde elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafında bulunan

$$\int_0^1 \frac{\varphi(b - \max\{a, \beta b\})}{b - \max\{a, \beta b\}} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \quad (5.17)$$

integralinin çözümü için aşağıdaki üç durum incelenir.

(i) $1 \leq \frac{f(a)}{f(b)}$ olması durumunda

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi(b - \max\{a, \beta b\})}{b - \max\{a, \beta b\}} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \\ = \int_0^{\frac{a}{b}} \frac{\varphi(b - a)}{b - a} f(a) d\beta + \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(b - \beta b)}{b - \beta b} f(a) d\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{f(a)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&= \frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{f(a)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt
\end{aligned} \tag{5.18}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{1}{b} ({}_a^+ I_\varphi f(b)) &\leq \frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{f(a)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
{}_a^+ I_\varphi f(b) &\leq f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt
\end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir.

(ii) $\frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1$ ise

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\varphi(b - \max\{a, \beta b\})}{b - \max\{a, \beta b\}} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \\
&= \int_0^{\frac{a}{b}} \frac{\varphi(b-a)}{b-a} f(a) d\beta + \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{f(a)}{f(b)}} \frac{\varphi(b-\beta b)}{b-\beta b} f(a) d\beta + \int_{\frac{f(a)}{f(b)}}^1 \frac{\varphi(b-\beta b)}{b-\beta b} \beta f(b) d\beta \\
&= \frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{f(a)}{b} \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{\varphi(t)}{t} (b-t) dt \\
&= \frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{f(a)}{b} \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&\quad - \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \varphi(t) dt
\end{aligned} \tag{5.20}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{1}{b} ({}_a^+ I_\varphi f(b)) \\
&\leq \frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{f(a)}{b} \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&\quad + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{\varphi(t)}{t} dt - \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_a I_\varphi f(b) &\leq f(a) \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + f(b) \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&\quad - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \varphi(t) dt
\end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir.

(iii) $0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b}$ iken

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\varphi(b - \max\{a, \beta b\})}{b - \max\{a, \beta b\}} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \\
&= \int_0^{\frac{f(a)}{f(b)}} \frac{\varphi(b-a)}{b-a} f(a) d\beta + \int_{\frac{f(a)}{f(b)}}^{\frac{a}{b}} \frac{\varphi(b-a)}{b-a} \beta f(b) d\beta + \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(b-\beta b)}{b-\beta b} \beta f(b) d\beta \\
&= \frac{(f(a))^2}{f(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{a^2 f(b)}{2b^2} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} - \frac{(f(a))^2}{2f(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} \\
&\quad + \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} (b-t) dt \\
&= \frac{(f(a))^2}{f(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{a^2 f(b)}{2b^2} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} - \frac{(f(a))^2}{2f(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} \\
&\quad + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt - \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt \\
&= \frac{a^2 (f(b))^2 + b^2 (f(a))^2}{2b^2 f(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&\quad - \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt
\end{aligned} \tag{5.22}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{af(a)}{b} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{1}{b} ({}_a I_\varphi f(b)) \\
&\leq \frac{a^2 (f(b))^2 + b^2 (f(a))^2}{2b^2} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&\quad - \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
({}_a I_\varphi f(b)) &\leq \frac{(af(b) - bf(a))^2}{2bf(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + f(b) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&\quad - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt
\end{aligned} \tag{5.24}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$${}_a I_\varphi f(b) \leq \begin{cases} f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt & , 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ f(a) \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + f(b) \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \varphi(t) dt & , \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(af(b) - bf(a))^2}{2bf(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + f(b) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt & , 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \tag{5.25}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 5.2.1 Teorem 5.2.1 koşulları altında $\varphi(t) = t$ alınırsa (4.4) ile ifade edilen B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

İspat Gerçekten; (5.12) eşitsizliğinde ${}_a I_\varphi f(b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ olur ve eşitsizliğin sağ kısmı için ise,

(i) $1 \leq \frac{f(a)}{f(b)}$ olması durumunda

$$\begin{aligned}
f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt &= f(a) \int_0^{b-a} dt \\
&= f(a)(b-a)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

elde edilir.

(ii) $\frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1$ ise

$$\begin{aligned}
& f(a) \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + f(b) \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{\varphi(t)}{t} dt - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \varphi(t) dt \\
&= f(a) \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} dt + f(b) \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} dt - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} t dt \\
&= (b-a)f(a) - \frac{bf(a)(f(b)-f(a))}{f(b)} + b(f(b)-f(a)) \\
&\quad - \frac{b^2 f(b)(f(b)-f(a))^2}{2b(f(b))^2} \\
&= bf(a) - af(a) - bf(a) + \frac{b(f(a))^2}{f(b)} + bf(b) - bf(a) - \frac{bf(b)}{2} + bf(a) \\
&\quad - \frac{b(f(a))^2}{2f(b)} \\
&= \frac{2b(f(a))^2 + 2b(f(b))^2 - 2af(a)f(b) - b(f(b))^2}{2f(b)} \\
&= \frac{b(f(a) + f(b))^2 - 2af(a)f(b)}{2f(b)} \tag{5.27}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b}$ iken

$$\begin{aligned}
& \frac{(af(b) - bf(a))^2}{2bf(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + f(b) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt \\
&= \frac{(af(b) - bf(a))^2}{2bf(b)} + f(b) \int_0^{b-a} dt - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} t dt \\
&= \frac{(af(b) - bf(a))^2}{2bf(b)} + (b-a)f(b) - \frac{(b-a)^2 f(b)}{2b} \\
&= \frac{(af(b) - bf(a))^2 + 2b(b-a)(f(b))^2 - (b-a)^2 (f(b))^2}{2bf(b)} \\
&= \frac{b^2 (f(b))^2 - 2abf(a)f(b) + b^2 (f(a))^2}{2bf(b)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{b(f(a) + f(b))^2 - 2af(a)f(b)}{2f(b)} \quad (5.28)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq \begin{cases} f(a) & , f(a) \geq f(b) \\ \frac{b((f(a))^2 + (f(b))^2) - 2af(a)f(b)}{2(b-a)f(b)} & , f(a) < f(b) \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. ■

Sonuç 5.2.2 Teorem 5.2.1 de $\varphi(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa B-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrali içeren aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir.

$$J_{a+}^\alpha f(b) \leq \begin{cases} \frac{f(a)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & , 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ \frac{(\alpha+1)f(a)(f(b))^\alpha(b-a)^\alpha + b^\alpha(f(b)-f(a))^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha} & , \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(af(b)-bf(a))^2(b-a)^{\alpha-1}}{2bf(b)\Gamma(\alpha)} + \frac{(b-a)^\alpha f(b)(\alpha a+b)}{b\Gamma(\alpha+2)} & , 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (5.29)$$

İspat (i) $1 \leq \frac{f(a)}{f(b)}$ olması durumunda

$$\begin{aligned} f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt &= f(a) \int_0^{b-a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \\ &= \frac{f(a)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned} \quad (5.30)$$

elde edilir.

(ii) $\frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1$ ise

$$\begin{aligned} &f(a) \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + f(b) \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{\varphi(t)}{t} dt - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \varphi(t) dt \\ &= f(a) \int_{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})}^{b-a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt + f(b) \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b(1-\frac{f(a)}{f(b)})} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(a)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{f(a)b^\alpha(f(b)-f(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)(f(b))^\alpha} + \frac{f(b)b^\alpha(f(b)-f(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)(f(b))^\alpha} \\
&\quad - \frac{f(b)b^{\alpha+1}(f(b)-f(a))^{\alpha+1}}{b(\alpha+1)\Gamma(\alpha)(f(b))^{\alpha+1}} \\
&= \frac{(\alpha+1)f(a)(f(b))^\alpha(b-a)^\alpha + b^\alpha(f(b)-f(a))^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha} \tag{5.31}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b}$ iken

$$\begin{aligned}
&\frac{(af(b)-bf(a))^2}{2bf(b)} \cdot \frac{\varphi(b-a)}{b-a} + f(b) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt \\
&= \frac{(af(b)-bf(a))^2}{2bf(b)} \cdot \frac{(b-a)^\alpha}{(b-a)\Gamma(\alpha)} + f(b) \int_0^{b-a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt - \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dt \\
&= \frac{(af(b)-bf(a))^2(b-a)^{\alpha-1}}{2bf(b)\Gamma(\alpha)} + \frac{f(b)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{f(b)(b-a)^{\alpha+1}}{b(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{(af(b)-bf(a))^2(b-a)^{\alpha-1}}{2bf(b)\Gamma(\alpha)} + \frac{(\alpha+1)bf(b)(b-a)^\alpha - \alpha f(b)(b-a)^{\alpha+1}}{b(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{(af(b)-bf(a))^2(b-a)^{\alpha-1}}{2bf(b)\Gamma(\alpha)} + \frac{(b-a)^\alpha f(b)(\alpha a + b)}{b\Gamma(\alpha+2)} \tag{5.32}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$J_{a+}^\alpha f(b) \leq \begin{cases} \frac{f(a)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, & 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ \frac{(\alpha+1)f(a)(f(b))^\alpha(b-a)^\alpha + b^\alpha(f(b)-f(a))^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha}, & \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(af(b)-bf(a))^2(b-a)^{\alpha-1}}{2bf(b)\Gamma(\alpha)} + \frac{(b-a)^\alpha f(b)(\alpha a + b)}{b\Gamma(\alpha+2)}, & 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \tag{5.33}$$

eşitsizliği sağlanır. ■

Teorem 5.2.2 $f: [a, b] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ B-konveks fonksiyonu ve $\varphi \in M$ integrallenebilir fonksiyonu verilsin. $0 < a < b < \infty$ olmak üzere $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen f fonksiyonu için

$${}_b-I_\varphi f(a) \leq \begin{cases} f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt & , 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ f(a) \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{af(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt & \\ -\frac{f(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \varphi(t) dt & , \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{af(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt & , 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (5.34)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat f B-konveks fonksiyon olduğundan;

$a, b \in \mathbb{R}_+, a < b$ ve $\beta \in [0, 1]$ için

$$f(\max\{a, \beta b\}) \leq \max\{f(a), \beta f(b)\} \quad (5.35)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı

$$\frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} \quad (5.36)$$

çarpılarak tanımlı olduğu $\left[\frac{a}{b}, 1\right]$ aralığında β ya göre integrallenirse

$$\int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} f(\max\{a, \beta b\}) d\beta \leq \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \quad (5.37)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.37) eşitsizliğin sol tarafı

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} f(\max\{a, \beta b\}) d\beta &= \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} f(\beta b) d\beta \\ &= \frac{1}{b} \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(t - a)}{t - a} f(t) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b} ({}_b I_{\varphi} f(a)) \quad (5.38)$$

bulunur. (5.37) eşitsizliğin sağ tarafında bulunan

$$\int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \quad (5.39)$$

integralinin çözümü için ise aşağıdaki üç durum incelenir.

(i) $1 \leq \frac{f(a)}{f(b)}$ olması durumunda

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta &= \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} f(a) d\beta \\ &= \frac{f(a)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \end{aligned} \quad (5.40)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{b} ({}_b I_{\varphi} f(a)) \leq \frac{f(a)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \quad (5.41)$$

$${}_b I_{\varphi} f(a) \leq f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \quad (5.42)$$

elde edilir.

(ii) $\frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1$ ise

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \\ &= \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{f(a)}{f(b)}} \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} f(a) d\beta + \int_{\frac{f(a)}{f(b)}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} \beta f(b) d\beta \\ &= \frac{f(a)}{b} \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)} - a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b^2} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)} - a}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} (t + a) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(a)}{b} \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{af(b)}{b^2} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&\quad + \frac{f(b)}{b^2} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \varphi(t) dt
\end{aligned} \tag{5.43}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b} ({}_b I_\varphi f(a)) &\leq \frac{f(a)}{b} \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{af(b)}{b^2} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&\quad + \frac{f(b)}{b^2} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \varphi(t) dt \\
{}_b I_\varphi f(a) &\leq f(a) \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{af(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b}$ iken

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} \max\{f(a), \beta f(b)\} d\beta \\
&= \int_{\frac{a}{b}}^1 \frac{\varphi(\beta b - a)}{\beta b - a} \beta f(b) d\beta \\
&= \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} (t + a) dt \\
&= \frac{af(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt
\end{aligned} \tag{5.44}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{b} ({}_b I_\varphi f(a)) \leq \frac{af(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b^2} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt \tag{5.45}$$

$${}_b I_\varphi f(a) \leq \frac{af(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt \tag{5.46}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$${}_b-I_\varphi f(a) \leq \begin{cases} f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt & , 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ f(a) \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{af(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt & \\ -\frac{f(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \varphi(t) dt & , \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{af(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt & , 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (5.47)$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 5.2.3 Teorem 5.2.2 de $\varphi(t) = t$ alınırsa B-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \begin{cases} f(a) & , 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ \frac{b((f(a))^2 + (f(b))^2) - 2af(a)f(b)}{2(b-a)f(b)} & , \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(b^2 - a^2)f(b)}{2b} & , 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (5.48)$$

İspat Teorem 5.2.2'deki eşitsizlikte ilk olarak

(i) $1 \leq \frac{f(a)}{f(b)}$ olması durumu incelendiğinde,

$$\begin{aligned} f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt &= f(a) \int_0^{b-a} dt \\ &= f(a)(b-a) \end{aligned} \quad (5.49)$$

elde edilir.

(ii) $\frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1$ olması durumunda ise,

$$f(a) \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{af(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \varphi(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= f(a) \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} dt + \frac{af(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} dt + \frac{f(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} t dt \\
&= f(a) \left(\frac{bf(a)}{f(b)} - a \right) + \frac{a(b-a)f(b)}{b} - \frac{af(b)}{b} \left(\frac{bf(a)}{f(b)} - a \right) + \frac{(b-a)^2 f(b)}{2b} \\
&\quad - \frac{f(b)}{2b} \left(\frac{bf(a)}{f(b)} - a \right)^2 \\
&= \frac{b(f(a))^2}{f(b)} - af(a) + \frac{(b^2 - a^2)f(b)}{2b} - af(a) + \frac{a^2 f(b)}{b} - \frac{b(f(a))^2}{2f(b)} + af(a) \\
&\quad - \frac{a^2 f(b)}{2b} \\
&= \frac{bf(b)}{2} + \frac{b(f(a))^2}{2f(b)} - af(a) \\
&= \frac{b(f(a) + f(b))^2 - 2af(a)f(b)}{2f(b)} \tag{5.50}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b}$ iken

$$\begin{aligned}
&\frac{af(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt \\
&= \frac{af(b)}{b} \int_0^{b-a} dt + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} t dt \\
&= \frac{a(b-a)f(b)}{b} + \frac{(b-a)^2 f(b)}{2b} \\
&= \frac{(b^2 - a^2)f(b)}{2b} \tag{5.51}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \begin{cases} f(a) & , 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ \frac{b((f(a))^2 + (f(b))^2) - 2af(a)f(b)}{2(b-a)f(b)} & , \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(b^2 - a^2)f(b)}{2b} & , 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases} \tag{5.52}$$

eşitsizliği sağlanır. ■

Sonuç 5.2.4 Teorem 5.2.2 koşulları altında $\varphi(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa (4.6) ile ifade edilen B-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrali ile ifade edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

İspat Gerçekten; (5.34) eşitsizliğinde ${}_b-I_\varphi f(a) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ ve eşitsizliğin sağ kısmı için ise,

(i) $1 \leq \frac{f(a)}{f(b)}$ olması durumunda

$$\begin{aligned} f(a) \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt &= f(a) \int_0^{b-a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \\ &= \frac{f(a)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned} \quad (5.53)$$

elde edilir.

(ii) $\frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1$ ise

$$\begin{aligned} &f(a) \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{af(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \varphi(t) dt \\ &= f(a) \int_0^{\frac{bf(a)}{f(b)}-a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt + \frac{af(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt + \frac{f(b)}{b} \int_{\frac{bf(a)}{f(b)}-a}^{b-a} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dt \\ &= \frac{f(a)(bf(a) - af(b))^\alpha}{(f(b))^\alpha \Gamma(\alpha+1)} + \frac{af(b)(b-a)^\alpha}{b\Gamma(\alpha+1)} - \frac{af(b)(bf(a) - af(b))^\alpha}{b(f(b))^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad + \frac{f(b)(b-a)^{\alpha+1}}{b(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} - \frac{f(b)(bf(a) - af(b))^{\alpha+1}}{b(\alpha+1)(f(b))^\alpha \Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{(b-a)^\alpha (f(b))^{\alpha+1} (\alpha b + a) + (bf(a) - af(b))^{\alpha+1}}{b\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha} \end{aligned} \quad (5.54)$$

elde edilir.

(iii) $0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b}$ iken

$$\begin{aligned}
& \frac{af(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \varphi(t) dt \\
&= \frac{af(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt + \frac{f(b)}{b} \int_0^{b-a} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dt \\
&= \frac{af(b)(b-a)^\alpha}{b\Gamma(\alpha+1)} + \frac{f(b)(b-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)b\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{a(\alpha+1)(b-a)^\alpha f(b) + \alpha(b-a)^{\alpha+1} f(b)}{b\Gamma(\alpha+2)} \\
&= \frac{(b-a)^\alpha f(b)(\alpha b + a)}{b\Gamma(\alpha+2)} \tag{5.55}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$J_b^\alpha f(a) \leq \begin{cases} \frac{f(a)(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & , \quad 1 \leq \frac{f(a)}{f(b)} \\ \frac{(b-a)^\alpha (f(b))^{\alpha+1} (\alpha b + a) + (bf(a) - af(b))^{\alpha+1}}{b\Gamma(\alpha+2)(f(b))^\alpha} & , \quad \frac{a}{b} \leq \frac{f(a)}{f(b)} < 1 \\ \frac{(b-a)^\alpha f(b)(\alpha b + a)}{b\Gamma(\alpha+2)} & , \quad 0 \leq \frac{f(a)}{f(b)} < \frac{a}{b} \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. ■

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında B-konveks fonksiyonlar için geçerli, yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir. Bunun için klasik konvekslikte var olan bir lemmanın B-konveks fonksiyonlardaki karşılığı bulunmuştur. (Lemma 5.1.1) Daha sonra ise elde edilen bu lemma yardımıyla trapezoidal bir eşitsizlik elde edilmiştir. (Teorem 5.1.1)

Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren durumu B-konveks fonksiyonlar için (Teorem 5.2.1) ispat edilmiştir. Bu eşitsizlik genelleştirilmiş sağ Riemann-Liouville kesirli integrale aittir. Elde edilen bu eşitsizlikten ortaya çıkan ve eşitsizliğin gerçekten bir genelleştirme olduğunun da kanıtı halinde olan sonuçlar ise Sonuç 5.2.1 ve Sonuç 5.2.2 ile verilmiştir. İlk olarak, Sonuç 5.2.1 ile B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin elde edildiği gösterilir. Sonuç 5.2.2’de ise B-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrali içeren yeni bir Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Aynı şekilde, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralini içeren ikinci formu Teorem 5.2.2 ile ifade edilmiştir. Elde edilen bu eşitsizlikten ortaya çıkan sonuçlar Sonuç 5.2.3 ve Sonuç 5.2.4 ile verilmiştir. Bulunan özel sonuçlardan ilki Sonuç 5.2.3’de bahsedilen, B-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrali içeren Hermite-Hadamard tipli yeni bir eşitsizliktir. Sonuç 5.2.4 ise B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni bir eşitsizlik içermektedir.

6.2 Öneriler

Bu tezde temel alınan ve fonksiyonlar için bir integral eşitlik veren temel lemma farklı durumlarda da elde edilebilir. Bununla birlikte de ortaya çıkan trapezoidal eşitsizliğin başka sonuçlara evrildiği görülecektir.

Genelleştirilmiş kesirli Riemann-Liouville kesirli integrali pek çok kesirli integralin bir genellemesidir. Tezde birkaç durum incelenerek bununla ilgili çalışmalar ifade edilmiştir. Ancak, bu genelleştirilmiş kesirli integralde kullanılan φ fonksiyonu yerine tanımdan da görüldüğü üzere farklı ve yeni fonksiyonlar yazılarak başka kesirli integraller ve eşitsizlikler elde edilebilir. Böylece, B-konveks fonksiyonlar için yeni kesirli integraller içeren eşitsizlikler elde edilebilir. Ayrıca elde edilmiş daha önceki

sonuçlar ile çakıştığı da gösterilerek eşitsizliklerin doğruluğu kanıtlanabilir.

Tezdeki bulgular B-konveks fonksiyonlar için üretilmiştir. Elde edilen tüm bu veriler bu konuda yeni ve popüler bir diğer soyut konvekslik çeşidi olan B^{-1} -konveks fonksiyonlar içinde çalışılabilir. Bununla birlikte, bu tarzda çalışmalar daha pek çok soyut konveks fonksiyonlar için genelleştirilebilir.



KAYNAKLAR

1. Boyd, S. ve Vandenberghe, L., 2004. Convex optimization, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
2. Beckenbach, E. F. ve Bellman, R., 1961. Inequalities, Springer, Berlin.
3. Niculescu, C. P. ve Persson, L. - E., 2006. Convex functions and their applications A contemporary approach, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York.
4. Pečarić, J., Proschan, F. ve Tong, Y. L., 1992. Convex functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc, San Diego.
5. Rubinov, A. M. ve Kutateladze, S. S., 1972. Minkowski duality and its applications, Russian Mathematical Surveys, 27, 3, 137-191.
6. Rubinov, A., 2000. Abstract Convexity and global optimization, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht-London.
7. Bricc, W. ve Horvath, C. D., 2004. B-convexity, Optimization, 53, 103-127.
8. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2018. Some important properties of B-convex functions, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 19, 4, 669-680.
9. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2017. Fractional integrals inequalities for B-convex Functions, Creative Mathematics Inform, 26, 3, 345-351.
10. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2017. Hermite-Hadamard inequalities for B-convex and B^{-1} -convex Functions, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 8, 1, 225-233.
11. Adilov, G. ve Rubinov, A., 2006. B-convex sets and functions, Numerical Functional Analysis and Optimization, 27, 3-4, 237-257.
12. Ceyda, Ç., 2019. Kesirli İntegral Eşitsizlikleri, Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
13. Yesilce, I., 2019. Inequalities for B-convex functions via generalized fractional integral, Journal of Inequalities and Applications, 194.
14. Katugampola, U.N., 2011. New approach to a generalized fractional integral, Applied Mathematics and Computations, 218, 3, 860-865.
15. Sarikaya, M.Z. ve Ertuğral, F., 2020. On the generalized Hermite-Hadamard inequalities, Mathematics and Computer Science Series, 47, 1, 193-213.
16. Sarikaya, M.Z. ve Yildirim, H., 2007. On generalization of the riesz potential, Indian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 3, 2, 231-235.

17. Mubeen, S. ve Habibullah, G.M., 2012. k -fractional integrals and application, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 7, 2, 89-94.
18. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh M., 2014. A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70.
19. Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M. ve Torebek, B. T., 2019. Hermite–Hadamard, Hermite–Hadamard–Fejér, Dragomir–Agarwal and Pachpatte type inequalities for convex functions via new fractional integrals, Journal of Computational and Applied Mathematics, 353, 120-129.
20. Kilbas, A.A., Marichev, O.I. ve Samko, S.G., 1993. Fractional integrals and derivatives, Theory and Applications, Gordon & Breach, Switzerland.
21. Rockafellar, R., Tyrrell, 1970. Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
22. Hadamard, J., 1893. Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction consideree par Riemann, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 58, 171-215.
23. Hermite, C., 1883. Sur deux limites d'une integrale define, Mathesis, 3, 82.
24. Dragomir, S. S. ve Pearce, C. E. M., 2000. Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications, RGMIA Monographs, Victoria University.
25. Fejer L., 1906. Über die fourierreihen, II, Math, Naturwiss Anz. Ungar. Akad. Wiss, 24, 369–390.
26. Sarikaya M.Z., Set E., Yaldiz H. ve Başak N. 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Mathematical and Modelling 57, 2403-2407.
27. Adilov, G., 2011. Increasing co-radiant functions and Hermite-Hadamard type inequalities, Mathematical Inequalities and Applications. 14, 45-60.
28. Kemal S., Sezer S., Tınaztepe G. ve Adilov G., 2021. s -convex functions in the third Sense, Korean Journal of Mathematics, 29, 3, 593-602.
29. Singer, I., 1997. Abstract convex analysis, Wiley-Interscience Publication, New York.
30. Hudzik, H. ve Maligranda, L., 1994. Some remarks on s -convex functions, Aequationes Mathematicae, 48, 100-111.
31. Eken, Z., Sezer, S., Tınaztepe, G. ve Adilov, G., 2021. s -convex functions in the fourth sense and some of their properties, Konuralp Journal of Mathematics, 9, 2, 260-267.

32. Iscan, I., 2016. Hermite-Hadamard type inequalities for p -convex functions, International Journal of Analysis and Application 11, 2, 137-145.
33. Bayoumi A., 2003. Foundation of complex analysis in non locally convex spaces, Mathematics Studies Elsevier, North Holland.
34. Sezer, S., Eken, Z., Tınaztepe, G. ve Adilov, G., 2021. p -convex functions and some of their properties, Numerical Functional Analysis and Optimization, 42, 4, 443-459.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Sunullah KARABUDAK

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2004-2008

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2020-2023

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Milli Eğitim Bakanlığı - Matematik Yazar 24/01/2022 - ...
2. Konya Kulu Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi – Öğretmen 28/06/2019 - ...
3. Konya Ilgın Argıthanı Milli Eğitim Vakfı ÇPAL - Müdür Yardımcısı 10/09/2018 - 28/06/2019
4. Konya Kulu Şeyh Edebali Anadolu Lisesi – Öğretmen 22/02/2016 - 07/09/2018
5. Konya Özel Çağdaş İstanbul Boğaziçi Temel Lisesi – Öğretmen 18/09/2015 - 08/02/2016
6. Konya Özel Çağdaş İstanbul Boğaziçi Dershanesi – Öğretmen 11/02/2015 - 20/08/2015
7. Konya Özel Çağdaş İstanbul Boğaziçi Dershanesi - Uzman Öğretici 13/12/2014 - 10/02/2015
8. Konya Özel Konya Anadolu Dershanesi - Uzman Öğretici 16/10/2014 - 30/11/2014
9. Konya Özel Çağdaş İstanbul Boğaziçi Dershanesi - Uzman Öğretici 05/10/2011 - 11/08/2014
10. Konya Özel Profesyonel Eğitim Merkezi Dershanesi - Uzman Öğretici 01/10/2009 - 31/05/2010
11. Konya Özel Konya Anadolu Dershanesi - Uzman Öğretici 07/10/2008 - 19/06/2009
12. Milli Eğitim Bakanlığı - Başarı Belgesi 17/01/2022
13. Milli Eğitim Bakanlığı - Başarı Belgesi 01/06/2022

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Yeşilce Işık, I. ve Karabudak, S. 2023. Some New Fractional Integral Inequalities For B-convex Functions, 4. International Cappadocia Scientific Research Congress, Nevşehir, Bildiriler Kitabı, 633.

