GENELLEŞTİRİLMİŞ GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ İNCELENMESİ

Nihan ÇEBE

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2023

T.C.

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ İNCELENMESİ

(Examination of Fixed Points of Generalized Nonexpansive Mappings)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nihan ÇEBE

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Erzurum
Temmuz, 2023

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Nihan ÇEBE tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktalarının İncelenmesi" başlıklı çalışması 28 / 07/ 2023 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR *Atatürk Üniversitesi*	Aslı Islak İmzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. İsa YILDIRIM *Atatürk Üniversitesi*	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Veysel NEZİR *Kafkas Üniversitesi*	Aslı Islak İmzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan Ceyhun
Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksel Lisans Tezi olarak Prof. Dr. İsa YILDIRIM danışmanlığında sunulan "Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktalarının İncelenmesi" başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	**Tezin Benzerlik Oranı (%)**	**Maksimum Oran (%)**
Giriş	*0*	**30**
Kuramsal Temeller	*18*	**30**
Materyal ve Yöntem	*27*	**35**
Bulgular	*11*	**20**
Tartışma	*0*	**20**
Tezin Geneli	*23*	**25**

Not: *Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının* ***%5'den*** *büyük olmaması gerekir.*

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	**Tez Danışmanı**
Nihan ÇEBE	Prof. Dr. İsa YILDIRIM
17.7.2023	**17.7.2023**
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

***** Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunulan bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez çalışmamın her aşamasında bilgi, öneri ve tecrübeleriyle her türlü katkıyı ve desteği sağlayan değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. İsa YILDIRIM' a derin minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü öğrenim sürecimin her anında yanımda olup beni koşulsuz destekleyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Nihan ÇEBE

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ İNCELENMESİ

Nihan ÇEBE

Danışman: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Amaç: Bu çalışmada, lineer olmayan dönüşümler için daha genel bir sınıf oluşturarak bu dönüşüm sınıfının özelliklerini ve sabit noktaları ile ilgili bazı yakınsama sonuçlarının elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Yöntem: Bu çalışma, matematiksel ispat yöntemleri kullanılarak yapılmıştır.

Bulgular: Mevcut literatürdeki kaynaklardan hareketle ilk olarak genişlemeyen ve (C) şartını sağlayan dönüşüm sınıflarını içeren Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan dönüşüm sınıfı tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra yeni bir iterasyon metodu tanımlanarak, Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan dönüşümler için bazı güçlü ve zayıf yakınsama teoremleri ispatlanmıştır. Son olarak bu dönüşüm sınıfını sağlayan örnekler için literatürdeki iterasyon metotları ile bu çalışmada tanımlanan iterasyon metodunun farklı başlangıç değerleri ve farklı parametreler seçilerek mukayesesi incelenmiştir.

Sonuç: Literatür taramasından ve elde edilen sonuçlardan hareketle bu çalışmanın hangi çalışmalara yol gösterebileceği belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta, güçlü ve zayıf yakınsama, iterasyon metotları

Temmuz 2023, 82 sayfa

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

EXAMINITION OF FIXED POINT OF GENERALIZED NONEXPANSIVE MAPPINGS

Nihan ÇEBE

Supervisor: Prof. Dr. İsa YILDIRIM

Purpose: In this study, it is aimed to define a more general class for nonlinear mappings and to obtain some convergence results about the properties and fixed points of this mapping class.

Method: This study has been made using mathematical proof methods.

Findings: Based on the works in the existing literature, firstly, the mapping class satisfy Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ condition, which includes nonexpansive and satisfying (C) condition mapping classes, is introduced and some of its properties are given. Then, a new iteration method is defined and some strong and weak convergence theorems are proved for mappings satisfying the Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ condition. Finally, for the examples providing this mapping class, the comparison of the iteration methods in the literature and the iteration method defined in this study by choosing different initial values and different parameters were examined.

Results: Based on the literature review and the results obtained, it is stated which studies this study can lead to.

Keywords: generalized nonexpansive mappings, fixed point, strong and weak convergence, iteration methods

July 2023, 82 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU ii
TEŞEKKÜR iii
ÖZET iv
ABSTRACT v
İÇİNDEKİLER vi
TABLOLAR DİZİNİ vii
ŞEKİLLER DİZİNİ viii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ ix
GİRİŞ 1
KURAMSAL TEMELLER 3
    Genel Kavramlar 3
    Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktaları 7
MATERYAL VE METOT 11
    Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümlerin Temel Özellikleri 11
    Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümler İçin Sabit Noktalarının Varlığı 33
    Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümler İçin Yakınsama Teoremleri 39
ARAŞTIRMA BULGULARI 48
    Yakınsama Analizi 53
SONUÇLAR VE ÖNERİLER 67
KAYNAKLAR ..... **Hata! Yer işareti tanımlanmamış.**
ÖZGEÇMİŞ 71

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 1. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması 63
Tablo 2. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması 64
Tablo 3. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması 65
Tablo 4. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması 66

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. İterasyonların grafiği 1 63
Şekil 2. İterasyonların grafiği 2 63
Şekil 3. İterasyonların grafiği 3 64
Şekil 4. İterasyonların grafiği 4 64
Şekil 5. İterasyonların grafiği 5 65
Şekil 6. İterasyonların grafiği 6 65
Şekil 7. İterasyonların grafiği 7 66
Şekil 8. İterasyonların grafiği 8 66

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	: Boş küme
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$F(T)$	: T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$(X, \|.\|)$	: Normlu uzay
X'	: X in dual (eşlenik) uzayı
(X, τ)	: Topolojik uzay
$x_n \rightharpoonup x$	: Zayıf yakınsama
$x_n \to x$	: Kuvvetli yakınsama
$r(x, \{x_n\})$	: Asimptotik yarıçap
$A(D, \{x_n\})$	: Asimptotik merkez
$C[0, 1]$	: $\|f\| = \sup_{0 \le x \le 1} \|f(x)\|, f \in C[0,1]$
l^p	: $\{x = (x_i): \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty, 1 \le p \le \infty\}$

GİRİŞ

1912 yılında başlayan ve günümüze kadar gelen sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar göz önüne alındığında dönüşüm sınıflarının farklı genelleştirmeleri pek çok yazar tarafından çalışılmış ve bu alanda pek çok uygulamalarına değinilmiştir. Özellikle daraltan ve kesin daraltan gibi dönüşüm sınıflarının sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılan Picard iterasyonunun genişlemeyen dönüşüm ve bunların farklı genelleştirmeleri için yetersiz olması bu alandaki çalışmanın artmasına neden olmuştur. Buradan hareketle bu çalışmalar, genişlemeyen dönüşümlerin daha genel sınıflarının oluşturulması ve Picard iterasyonu yerine alternatif iterasyon metotlarının kurulması üzerine iki yönde gelişme göstermiştir.

2008 yılında Suzuki, genişlemeyen dönüşüm sınıfını kapsayan ve (C) şartı adı verilen bir dönüşüm tanımı vermiş ve bu dönüşüm sınıfları için bazı yakınsama sonuçları elde etmiştir (Suzuki 2008a). Bu dönüşüm sınıfı, genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olarak da bilinmektedir. Daha sonra Falset, Fuster ve Suzuki, Suzuki'nin tanımladığı genişlemeyen dönüşüm sınıfını genelleştirerek (C_λ) şartını sağlayan dönüşüm sınıfını ifade etmiş ve bu sınıfla ilgili bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamıştır. Yine aynı yazarlar (E_μ) şartını sağlayan dönüşüm sınıfını tanımlamış ve bu sınıfla ilgili sabit nokta sonuçlarına değinmişlerdir (Falset *et al.* 2011). 2017 yılında Pant ve Shukla, genelleştirilmiş α- genişlemeyen dönüşüm sınıfını tanımlamışlar ve bununla ilgili bazı sonuçlar elde etmişlerdir (Pant and Shukla 2017). 2018 yılında ise Patir, Goswami ve Mishra yukarıdaki dönüşüm sınıflarından daha genel olan $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ şartını sağlayan dönüşüm tanımını vermiş, bu dönüşümün sağladığı bazı özellikleri göstermiş ve farklı iterasyon metotlarının $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ şartını sağlayan dönüşümlerin sabit noktasına yakınsaması göstermişlerdir (Patir *et al*. 2018).

2016 yılında Sahu ve arkadaşları ile Thakur ve arkadaşlarının geliştirdikleri iterasyonların diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı şekilde daraltan dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığını kanıtlamıştır (Sahu *et al.* 2016; Thakur *et al.* 2016b). 2018 yılında Hussein ve arkadaşları K iterasyon metodunun üç adımlı Picard$-S$ ve iki adımlı S iterasyon metotlarından daha iyi olduğunu nümerik örneklerle ortaya koymuşlardır (Hussein *et al.* 2018). Bunlara ek olarak iterasyonların yakınsama hızı üzerine 2020 yılında Ali ve Ali ile Abdeljawad, 2021 yılında Ahmad ve arkadaşları, 2022 yılında ise Shukla ve arkadaşları yukarıda tanımlanan farklı genişlemeyen dönüşüm sınıfları için yeni iterasyon metotları ortaya koymuşlardır (Ali and Ali 2020; Abdeljawad *et al*. 2020; Ahmad *et al*. 2021; Shukla *et al*. 2022)

Yukarıdaki çalışmalardan hareketle bu tezde, genişlemeyen dönüşüm sınıfını ve (C) şartını sağlayan dönüşüm sınıfını kapsayan yeni bir dönüşümün tanımlanması ve bunlarla ilgili bazı sabit nokta sonuçlarının ifade edilmesi amaçlanmaktadır. Bu amaçla kuramsal temeller ve ilgili araştırmalar adlı bölümde, temel tanımlara yer verilmiştir. Materyal ve metot bölümünde ise genişlemeyen dönüşüm sınıfları için ilgili sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir. Bulgular bölümde ilk olarak (C) şartını sağlayan dönüşümlerden daha genel yeni bir genişlemeyen dönüşüm sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfın bazı özellikleri ispatlanmıştır. Daha sonra bu dönüşüm sınıfı ile ilgili bazı örneklere yer verilmiştir. Sonrasında ise düzgün konveks Banach uzaylarında literatürdeki mevcut iterasyonlardan daha etkili bir iterasyon metodu tanımlanarak bu dönüşüm sınıfı için bazı güçlü ve zayıf yakınsama sonuçları kanıtlanmıştır. Son olarak bu iterasyon ile literatürdeki diğer iterasyonlar arasındaki mukayese yeni tanımlanan dönüşüm sınıfını sağlayan nümerik örnekler üzerinde farklı başlangıç değeri ve farklı parametreler için karşılaştırılmıştır.

KURAMSAL TEMELLER

Tezin bu bölümünde, tezin oluşumunu sağlayan bazı önemli tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Genel Kavramlar

Tanım 1 (Topolojik Uzay): X boştan farklı bir küme ve τ ailesi ise X in kuvvet kümesinin herhangi bir alt ailesi olsun.

(i) $\emptyset$ ve X kümeleri τ nun elemanıdır.

(ii) τ ya ait sonlu veya sonsuz sayıdaki elemanların birleşimi yine τ nun elemanıdır. Yani

$$\forall J \subseteq I \ (J \ sonlu \ ya \ sonsuz) \ \forall i \in J \ için \ A_i \in \tau \Rightarrow \cup_{i \in j} A_i \in \tau.$$

(iii) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların kesişimi τ ailesine aittir. Yani,

$$\forall J \subseteq I \ (J \ sonlu) \ \forall i \in J \ için \ A_i \in \tau \Rightarrow \cap_{i \in j} A_i \in \tau.$$

Yukarıdaki aksiyomları sağlayan τ ailesine, X üzerinde topolojik yapı ya da topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir (Yüksel 2014).

Tanım 2 (Normlu Uzay): X bir vektör uzayı olsun ve $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü de her $x \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Bu taktirde $\|.\|$ dönüşümüne bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Berinde 2007).

Tanım 3 (Yakınsak Dizi): $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir x vektörü varsa (yani her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) $\{x_n\}$ dizisi x e a yakınsaktır denir (Bayraktar 2006).

Tanım 4 (Cauchy Dizisi): $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $m, n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise (yani verilen her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > n_0$ için

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa) $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Bayraktar 2006).

Tanım 5 (Tam Metrik Uzay): X metrik uzayındaki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsak ise, X uzayına tam metrik uzay denir (Maddox 1988).

Tanım 6 (Banach Uzay): Tam normlu uzaya Banach uzay denir (Maddox 1988).

Tanım 7 (Dual Uzay): X bir normlu uzayı olsun. X den $\mathbb{R}$ ye tanımlı tüm lineer sürekli dönüşümlerin kümesi, bir lineer uzay ve aynı zamanda bir normlu uzaydır. Bu uzaya X in dual uzayı denir ve X' ile gösterilir (Berinde 2007).

Tanım 8 (Kuvvetli Yakınsaklık): X bir normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun.

$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli veya güçlü yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir. Yani kuvvetli yakınsama, norma göre yakınsamadır (Yıldırım 2011).

Tanım 9 (Zayıf Yakınsaklık): X bir normlu uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun. Her $f \in X'$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir (Yıldırım 2011).

Tanım 10 (Kompakt Küme): (X, d) bir metrik uzay ve $D \subset X$ olsun. D kümesindeki her $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa D ye kompakt küme denir (Maddox 1989).

Tanım 11 (Konveks Küme): D kümesi, bir reel vektör uzayının alt kümesi olsun. D kümesinde alınan herhangi iki nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine bu kümede kalıyorsa D ye konveks küme denir (Bayraktar 2006).

Tanım 12 (Kesin Konveks Uzay): X bir normlu uzay ve her $x, y \in S_x = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ için $x \neq y$ olsun. Her $\lambda \in (0,1)$ için $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ şartı sağlanıyorsa X uzayına kesin konveks uzay denir (Berinde 2007).

Örnek 1: $X = \mathbb{R}^n$ uzayında aşağıdaki Öklid normunu düşünelim. Her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olsun. Dolayısıyla X uzayı kesin konvekstir (Gürsaç 2019).

Tanım 13 (Düzgün Konveks Uzay): X bir normlu uzay olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan $\forall x, y \in D$ için $\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa X e düzgün konveks uzay denir (Berinde 2007).

Her kesin konveks uzay, düzgün konveks uzayı kapsar.

Örnek 2: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. $\forall x, y \in H$ için paralelkenar kuralından,

$$\|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^2$$

dir. $x \neq y$ için $x, y \in B_H = \{x \in X: \|x\| < 1\}$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ olsun. Buradan

$$\|x+y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

elde edilir. $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. Bu durumda H düzgün konveks uzaydır (Yıldırım 2011).

Tanım 14 (UCED): Her $x, y \in X$ için $\| x \| \leq 1, \| y \| \leq 1$ ve $x - y \in \{tz: t \in [-2, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 2]\}$ olsun. Eğer $\| z \| = 1$, $z \in E$ ve $\varepsilon \in (0,2]$ için $\| x + y \| \leq 2(1-\delta)$ olacak şekilde $\delta := \delta(\varepsilon, z) > 0$ sayısı varsa X Banach uzayına her yönde düzgün konveks (kısaca UCED) denir (Karapınar and Taş 2011).

Eğer X uzayı UCED ise X kesin konvekstir fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3: Birim aralık üzerindeki tüm reel değerli sürekli fonksiyonların $C[0,1]$ uzayı,

$$\|f\| = sup\{|f(t)|\} + \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile tanımlansın. Bu durumda $C[0,1]$ uzayı, kesin konveks uzay olup UCED değildir (Garkavi 1962).

Tanım 15 (Yarı Kapalılık): X bir Banach uzayı, D, X in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: D \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer D içindeki sınırlı her $\{x_n\}$ dizisi $x^* \in D$ ye zayıf yakınsak ve Tx_n de 0 a kuvvetli yakınsak iken $Tx = 0$ ise T dönüşümüne 0 da yarı kapalı dönüşüm denir.

Tanım 16 (Güçlü Yarı Kapalılık): $T: D \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer D deki her (x_n) dizisi $z \in D$ ye güçlü yakınsıyorsa ve $x_n - Tx_n \to 0_x$ ise biz $I - T$ dönüşümüne 0_x te güçlü yarı kapalıdır deriz. Bu durumda $Tz = z$ olur (Falset *et al.* 2011).

Tanım 17 (Opial Şartı): X bir Banach uzayı, $x \in X$ ve (x_n) dizisi x elamanına zayıf yakınsayan bir dizi olmak üzere her $y \in X - \{x\}$ için

$$\lim_{n\to\infty} inf\|x_n - y\| \geq \liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\|$$

ise X Banach uzayı Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Yukarıdaki Opial şartı aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|.$$

Önerme 1: X Banach uzayın Opial koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart her $x \neq 0$ için

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ ve } \liminf_{n\to\infty}\|x_n\| = 1 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\| > 1$$

olmasıdır (Agarwal *et al.* 2009).

Tanım 18 (Sabit Nokta): D boştan farklı bir küme ve $T: D \to D$ dönüşümü verilsin. T dönüşümünün sabit noktalar kümesi $Fix(T) = \{x \in D: Tx = x\}$ dir. Kısaca $F(T)$ ya da F_T ile gösterilir.

Örnek 4: $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = \frac{x}{3} + 2$ şeklinde tanımlanan dönüşüm için $F(T) = \{3\}$ dür.

Tanım 19 (Çakışık Nokta): D boştan farklı bir küme ve $T, G: D \to D$ iki dönüşüm olsun. $x \in D$ için

(i) $Tx = x$ ise x e T operatörünün sabit noktası,

(ii) $Tx = Gx$ ise x e T ve G nin çakışma noktası,

(iii) $Tx = Gx = x$ ise x e T ve G nin ortak sabit noktası

denir (Roldán *et al.* 2015).

Örnek 5: $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = 2x + 6$ şeklinde tanımlanan dönüşüm için $F(T) = \{-6\}$ dır.

Örnek 6: $T, G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve bir dönüşüm olmak üzere $Tx = x^2 - 4$, $Gx = 2x - 1$ ise T ve G nin çakışma noktası $Ç.K. = \{-1{,}3\}$ dir.

Örnek 7: $T, G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve bir dönüşüm olmak üzere $Tx = x^2 - 7x + 9$ ve $Gx = x^2 + x - 9$ olmak üzere T ve G nin ortak sabit noktalar kümesi $F = F(T) \cap F(G) = \{3\}$ dür.

Tanım 20 (Zayıf Topoloji): X uzayı üzerindeki zayıf topoloji $\sigma(X, X')$, X' in öğelerini X üzerinde sürekli kılan en zayıf topoloji olarak tanımlanır ve $w = \sigma(X, X')$ ile gösterilir (Çalışkan 2013).

Tanım 21 (Zayıf Kapalı Küme): Eğer D alt kümesi zayıf topoloji içinde kapalı ise X Banach uzayının bir D alt kümesi zayıf kapalıdır (Agarwal *et al.* 2009).

Tanım 22 (Zayıf Kompakt Küme): X bir normlu uzay ve D, X in bıştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer D kümesi zayıf topolojiye göre kompakt ise D ye zayıf kompakt denir (Agarwal *et al*. 2009).

Tanım 23 (Lokal Zayıf Kompakt): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için $x \in U$ ve $U \subset K$ olacak şekilde $U \in \delta$ varsa (X, δ) topolojik uzayına lokal zayıf kompakt denir (López-Díaz *et al.* 2004).

Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Bu bölümde genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 24 (Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay ve D, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in D$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

ise $T: D \to D$ dönüşümüne genişlemeyen denir (Suzuki 2005).

Örnek 8: $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{5}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm, $\forall x, y \in X$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq \left\|\frac{x}{5} + \frac{1}{5} - \left(\frac{y}{5} + \frac{1}{5}\right)\right\| = \left\|\frac{x}{5} - \frac{y}{5}\right\| = \left\|\frac{x-y}{5}\right\| = \frac{1}{5}\|x - y\| \leq \|x - y\|$$

olduğundan T bir genişlemeyen dönüşümdür.

Örnek 9: $T: [0,4] \to [0,4]$, $T(x) = \begin{cases} 2.5, & x = 4 \\ 0, & x \neq 4 \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. $x = 4$ ve $y = 3.5$ için $\|Tx - Ty\| = 2.5 > 0.5 = \|x - y\|$ olduğundan T dönüşümü genişlemeyen dönüşüm değildir.

Teorem 1: D kümesi H Hilbert uzayının kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi ve $T: D \to D$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Berinde 2007).

Teorem 2: D, düzgün konveks bir Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: D \to D$ dönüşümü genişlemeyen olsun. O halde T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Berinde 2007).

Tanım 25 (Yarı Kompakt Dönüşüm): H Hilbert uzayı ve D Hilbert uzayının alt kümesi olmak üzere $T: D \to H$ dönüşümü verilsin. Eğer H daki her $\{x_n\}$ sınırlı dizisi için $\{Tx_n - x_n\}$ güçlü yakınsak iken $\{x_n\}$ dizisinin güçlü yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi varsa T dönüşümü yarı kompakt olarak adlandırılır (Berinde 2007).

Lemma 1: D, bir Hilbert uzayının sınırlı kapalı konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ genişlemeyen ve yarı kompakt bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin sabit noktalarının kümesi olan F_T boş olmayan konveks kümedir (Berinde 2007).

Aşağıdaki teorem, Krasnoselskij iterasyonu yardımıyla genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaması sonucunu içermektedir.

Teorem 3: D, bir Hilbert uzayın sınırlı kapalı konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ genişlemeyen ve yarı kompakt bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin sabit noktalarının kümesi olan F_T boş olmayan bir konveks kümedir. Ayrıca D de alınan herhangi bir x_0 ve $0 < \lambda < 1$ olmak üzere herhangi bir sabit λ sayısı için oluşturulan aşağıdaki Krasnoselskij iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, n = 0,1,2 \ldots \tag{2.1}$$

T nin sabit noktasına güçlü yakınsar (Berinde 2007).

Sonuç 1: X düzgün konveks Banach uzayı ve D, X in kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olmak üzere $T: D \to D$ genişlemeyen dönüşümü aşağıdaki iki koşuldan herhangi birini sağlasın:

(i) $(I-T)$ dönüşümü D deki kapalı kümeleri X teki kapalı kümelere dönüştürür.

(ii) T dönüşümü 0 da yarı kompakttır.

Böylece yukarıda (2.1) ile verilen Krasnoselskij iterasyonu $\{x_n\}$, T nin sabit noktasına güçlü yakınsar (Berinde 2007).

Not 1:

1) Sonuç 1 deki (i) ve (ii) koşulları birbirinden bağımsızdır.
2) Teorem 3 de T nin yarı kompakt olduğu varsayımını kaldırırsak, o zaman Krasnoselskij iterasyonu genel olarak artık güçlü bir şekilde yakınsamaz, ancak (en azından) zayıf bir şekilde sabit bir noktaya yakınsar. Gelecek teoremde buna yer verilmiştir (Berinde 2007).

Teorem 4 D kümesi H Hilbert uzayının sınırlı kapalı konveks alt kümesi, $T: D \to D$ genişlemeyen bir dönüşüm ve $F_T = \{p\}$ olsun. Bu durumda (2.1) ile verilen Krasnoselskij iterasyonu zayıf şekilde p ye yakınsar. Herhangi bir $x_0 \in C$ için,

$$U_\lambda^n x_o \rightharpoonup p$$

dir (Berinde 2007)

Not 2: Teorem 4 teki $F_T = \{p\}$ varsayımı daha genel bir sonuç elde etmek için şu şekilde değiştirilebilir (Berinde 2007).

Teorem 5: D, bir Hilbert uzayının sınırlı kapalı konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. D deki herhangi bir x_0 için Krasnoselskij iterasyonu T nin sabit noktasına zayıf yakınsar (Berinde 2007).

Tanım 26 (Quasi Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay ve D, E ' in boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere her $x \in D$ ve $z \in F(T)$ için

$$\|Tx - z\| \leq \|x - z\|$$

ise $T: D \to D$ dönüşümüne quasi genişlemeyen denir (Suzuki 2005).

Örnek 10: $T: [0,3] \to [0,3]$ dönüşümü için $T(x) = \begin{cases} 2, & x = 3 \\ 0, & x \neq 3 \end{cases}$ olarak tanımlansın. Açık olarak T dönüşümü $x = 0$ için sabit noktaya sahiptir ve sürekli değildir. Dolayısıyla genişlemeyen dönüşüm de değildir. Ayrıca her $x, y \in [0,4]$ için $\|T(x)\| \leq \|x\|$ olduğundan T dönüşümü quasi genişlemeyen dönüşüm olur.

Sabit noktalar kümesi boş kümeden farklı olan her genişlemeyen dönüşüm aynı zamanda bir quasi genişlemeyen dönüşümdür.

Lemma 2: X düzgün konveks bir Banach uzayı ve D ise X in bir alt kümesi olmak üzere $T: D \to X$ quasi genişlemeyen dönüşümü verilsin. T ye göre T_λ ortalama operatörü,

$$T_\lambda(x) = (1 - \lambda)x + \lambda Tx$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $x_0 \in D$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $\{T_\lambda^n(x_0)\}$ Krasnoselskij iterasyonu D de yer alıyorsa, T_λ dönüşümü x_0 da asimptotik regülerdir, yani,

$$\lim_{n \to \infty} \left[T_\lambda^n(x_0) - T_\lambda^{n+1}(x_0)\right] = 0$$

dır (Berinde 2007).

Lemma 3: X kesin konveks bir Banach uzayı ve D ise X in kapalı konveks alt kümesi olsun. $T: D \to X$ sürekli bir dönüşüm ve her $x \in D \backslash F_T$ ve $p \in F_T$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise F_T konveks kümedir (Berinde 2007).

Picard iterasyonun iki ardışık terimlerini içeren

$$\frac{1}{2}(x_n + Tx_n)$$

ortalama dizilerin yakınsaması üzerine ilk sonuçlar Krasnoselskij tarafından elde edilmiştir. Burada D, düzgün konveks Banach uzayın kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi ve $T : D \to D$ genişlemeyen ve kompakt bir dönüşüm ise (yani, T sürekli ve $T(D)$ göreceli kompakt ise),

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n)$$

şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Berinde 2007).

Schaefer, Krasnoselskij'in sonucunu $1/2$ sabitinin $\lambda \in (0,1)$ ile değiştirildiği duruma genişletmiş ve bu şekilde (2.1) ile tanımlanan genel Krasnoselskij iterasyonu için ilk sonucu elde etmiştir (Schaefer, 1957). Daha sonra, Edelstein önceki sonucu D nin kesin konveks olduğu duruma genişletmiştir (Edelstein 1966).

Browder ve Petryshyn, Krasnoselskij ve Schaefer'in sonuçlarını daha da ileri taşıyarak, asimptotik regüler olan ve $I - T$ nin sınırlı kapalı kümeleri kapalı kümelere dönüştürdüğü genişlemeyen $T : D \to D$ dönüşümü için Krasnoselskij (ve Picard) iterasyonlarının yakınsamasını araştırmışlardır (Browder 1967).

Krasnoselskij iterasyon metodunun zayıf yakınsaması ilk olarak Schaefer tarafından sürekli genişlemeyen dönüşüm sınıfı için kanıtlanmıştır (Schaefer 1957). Bu sonucun genel genişlemeyen dönüşümlere genişletilmesi, sırasıyla, Browder ve Petryshyn ve Opial tarafından iki aşamada gerçekleştirilmiştir (Browder 1966; Opial 1967).

D, kesin konveks X Banach uzayın kapalı bir konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ genişlemeyen bir dönüşüm ise, F_T kapalı ve konvekstir (Berinde 2007).

$X = \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_\infty = max\{|x|,|y|\}$ biçiminde verilmiş olsun ve $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü $T(x,y) = (x,|x|)$ ile verilmiş olsun. Bu durumda,

(i) T genişlemeyendir.

(ii) F_T konveks değildir (Berinde 2007).

MATERYAL VE METOT

Bu kısımda ilk olarak genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümlerin tanımları, bunlarla ilgili örnekler, bazı özellikler ve temel sonuçlar verilecektir.

Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümlerin Temel Özellikleri

Tanım 27: X bir normlu uzay ve D, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in D$ için

$$\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\| \text{ iken } \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

ise $T: D \to D$ dönüşümüne (C) şartını sağlıyor denir (Suzuki 2005).

Lemma 4: Her genişlemeyen dönüşüm (C) şartını sağlar (Suzuki 2008a).

Lemma 5: T dönüşümünün (C) şartını sağladığını ve bir sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda T bir quasi genişlemeyen dönüşümdür. (Suzuki 2008a)

Bazı sürekli olmayan dönüşümler de (C) şartını sağlayabilir. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir (Suzuki 2008a).

Örnek 11: T, [0,3] aralığında bir dönüşüm olmak üzere,

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T dönüşümü (C) şartını sağlar, fakat genişlemeyen bir dönüşüm değildir. (Suzuki 2008a)

Çözüm 11: $x < y$ ve $(x, y) \in ([0,3] \times [0,3]) \setminus ((2,3) \times \{3\})$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

olur. Eğer $x \in (2,3)$ ve $y = 3$ ise

$$\tfrac{1}{2}\|x - Tx\| = \tfrac{x}{2} > 1 > \|x - y\| \text{ ve } \tfrac{1}{2}\|y - Ty\| = 1 > \|x - y\|$$

elde edilir. Bu durumda T dönüşümü (C) şartını sağlar. Ancak T sürekli ve genişlemeyen değildir.

Lemma 6: X bir Banach uzayı ve D, X in kapalı bir alt kümesi olmak üzere, T dönüşümü (C) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F(T)$ kapalıdır. Ayrıca X kesin konveks ve D konveks ise $F(T)$ de ayrıca konvekstir (Suzuki 2008a).

İspat: $\{z_n\}$ dizisi $F(T)$ içinde $z \in D$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{2}\|z_n - Tz_n\| = 0 \leqslant \|z_n - z\|$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\|z_n - Tz\| &= \limsup_{n\to\infty}\|Tz_n - Tz\| \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\|z_n - z\| = 0\end{aligned}$$

dır. Yani $\{z_n\}$ dizisi Tz ye yakınsar. Dolayısıyla $Tz = z$ dir ve $F(T)$ kapalıdır. X in kesin konveks ve D nin de konveks olduğunu varsayalım. $\lambda \in (0,1)$ ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in F(T)$ için $z := \lambda x + (1-\lambda)y \in D$ dir. O halde,

$$\begin{aligned}\| x - y \| &\leqslant \| x - Tz \| + \| y - Tz \| = \| Tx - Tz \| + \| Ty - Tz \| \\ &\leqslant \| x - z \| + \| y - z \| = \| x - y \|\end{aligned}$$

dir. X in kesin konveksliğinden $Tz = \mu x + (1-\mu)y$ olacak şekilde $\mu \in [0,1]$ vardır. Çünkü,

$$(1-\mu) \| x - y \| = \| Tx - Tz \| \leqslant \| x - z \| = (1-\lambda) \| x - y \|$$

ve

$$\mu \| x - y \| = \| Ty - Tz \| \leqslant \| y - z \| = \lambda \| x - y \|,$$

için $1 - \mu \leqslant 1 - \lambda$ ve $\mu \leqslant \lambda$ dır. Bu da $\lambda = \mu$ anlamına gelir. Bu nedenle $z \in F(T)$ olur.

Lemma 7: X bir normlu uzay ve D, X in alt kümesi olmak üzere eğer T dönüşümü (C) şartını sağlıyorsa $x, y \in D$ için

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \|x - Tx\|$,

(ii) $\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$ $ya\ da$ $\frac{1}{2}\|Tx - T^2x\| \leq \|Tx - y\|$,

(iii) $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ $ya\ da$ $\|T^2x - Ty\| \leq \|Tx - y\|$ (Suzuki 2008a).

Lemma 8: T bir dönüşüm, X bir Banach uzay ve D, X in sınırlı konveks alt kümesi olsun. T dönüşümü (C) şartını sağlasın ve $x_1 \in D$ için D de ki $\{x_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{N}$ için,

$$x_{n+1} = \lambda Tx_n + (1-\lambda)x_n$$

şeklinde tanımlansın. Burada λ, $[1/2,1)$ aralığında bir reel sayıdır. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$$

olur (Suzuki 2008a).

Lemma 9: X bir normlu uzay ve D, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer T dönüşümü (C) şartını sağlıyorsa, her $x, y \in D$ için

$$\|x - Ty\| \leq 3\|Tx - x\| + \|x - y\|$$

dir (Suzuki 2008a).

2011 yılında Karapınar ve Taş, (C) şartının bazı genelleştirmelerini aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir.

Tanım 28: T, X Banach uzayının D alt kümesi üzerine bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in D$ için

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \| \quad \text{iken} \quad \| Tx - Ty \| \leq M(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne Suzuki-Ćirić-(C) şartını (kısaca, (SCC) şartını) sağlıyor denir.

Burada

$$M(x, y) = max\{\| x - y \|, \| x - Tx \|, \| Ty - y \|, \| Tx - y \|, \| x - Ty \|\}$$

dir. Ayrıca her $x, y \in D$ için,

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \| \quad \text{iken} \quad \| Tx - Ty \| \leq N(x, y)$$

eşitsizliği sağlanırsa T dönüşümü Suzuki-(KC) koşulunu (kısaca, (SKC) koşulunu) sağlar denir.

Burada

$$N(x, y) = max\left\{\| x - y \|, \frac{1}{2}[\| x - Tx \| + \| Ty - y \|], \frac{1}{2}[\| Tx - y \| + \| x - Ty \|]\right\}$$

dir (Karapınar and Taş 2011).

Tanım 29: T, bir X Banach uzayının D alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in D$ için T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar (Karapınar and Taş 2011).

(i) Kannan-Suzuki-(C) şartı (kısaca, (KSC) şartı),

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \| \quad \text{iken} \quad \| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{2}[\| Tx - x \| + \| y - Ty \|],$$

(ii) Chatterjea-Suzuki-(C) şartı (kısaca, (CSC) şartı),

$$\frac{1}{2}\parallel x-Tx\parallel\leq\parallel x-y\parallel \quad \text{iken} \quad \parallel Tx-Ty\parallel\leq\frac{1}{2}[\parallel Tx-y\parallel+\parallel x-Ty\parallel].$$

Önerme 2: Her genişlemeyen dönüşüm (SCC) şartını sağlar (Karapınar and Taş 2011).

İspat: T, bir X Banach uzayının D alt kümesi üzerinde genişlemeyen bir dönüşüm olsun, yani her $x,y\in D$ için $\parallel Tx-Ty\parallel\leq\parallel x-y\parallel$ dir. $\frac{1}{2}\parallel x-Tx\parallel\leq\parallel x-y\parallel$ olduğunu kabul edelim. Burada $M(x,y)=\parallel x-y\parallel$ alınırsa (SCC) koşulunun sağlandığı açıktır. Yani $\parallel Tx-Ty\parallel\leq M(x,y)=\parallel x-y\parallel$ dir. Diğer yandan, $M(x,y)\neq\parallel x-y\parallel$ için $\parallel x-y\parallel\leq M(x,y)$ olur. Buradan $\parallel Tx-Ty\parallel\leq\parallel x-y\parallel\leq M(x,y)$ için T nin (SCC) şartını sağladığı görülür.

Sonuç 2: Her genişlemeyen dönüşüm aşağıdaki şartları sağlar.

(A1) $\frac{1}{2}\parallel x-Tx\parallel\leq\parallel x-y\parallel$ iken $\parallel Tx-Ty\parallel\leq A_1(x,y)$ olur. Burada $A_1(x,y)=max\{\parallel x-y\parallel,\parallel Tx-x\parallel,\parallel Ty-y\parallel\}$

(A2) $\frac{1}{2}\parallel x-Tx\parallel\leq\parallel x-y\parallel$ iken $\parallel Tx-Ty\parallel\leq A_2(x,y)$ olur. Burada $A_2(x,y)=$ $\max\{\parallel x-y\parallel,\parallel Tx-y\parallel,\parallel Ty-x\parallel\}$ (Karapınar and Taş 2011).

Önerme 3: Her genişlemeyen dönüşüm (SKC) şartını sağlar (Karapınar and Taş 2011).

İspat: T, bir X Banach uzayının D alt kümesi üzerinde genişlemeyen bir dönüşüm, yani her $x,y\in D$ için $\parallel Tx-Ty\parallel\leq\parallel x-y\parallel$ olsun. $\frac{1}{2}\parallel x-Tx\parallel\leq\parallel x-y\parallel$ olduğunu kabul edelim. $N(x,y)=\parallel x-y\parallel$ olması durumunda $\parallel Tx-Ty\parallel\leq N(x,y)=\parallel x-y\parallel$ eşitsizliği elde edilir. Aksi durumda $N(x,y)\neq\parallel x-y\parallel$ için, $\parallel x-y\parallel\leq N(x,y)$ olur. Buradan $\parallel Tx-Ty\parallel\leq\parallel x-y\parallel\leq N(x,y)$ için T dönüşümünün (SKC) şartını sağladığı görülür.

Sonuç 3: Her genişlemeyen dönüşüm aşağıdaki şartları sağlar.

(A3) $\frac{1}{2}\parallel x-Tx\parallel\leq\parallel x-y\parallel$ iken $\parallel Tx-Ty\parallel\leq A_3(x,y)$

dir. Burada $A_3(x,y)=max\left\{\parallel x-y\parallel,\frac{1}{2}[\parallel Tx-x\parallel+\parallel Ty-y\parallel]\right\}$ dir.

(A4) $\frac{1}{2}\parallel x-Tx\parallel\leq\parallel x-y\parallel$ iken $\parallel Tx-Ty\parallel\leq A_4(x,y)$

dir. Burada $A_4(x,y) = max\left\{\| x-y \|, \frac{1}{2}[\| Tx-y \| + \| Ty-x \|]\right\}$ dir (Karapınar and Taş 2011).

Önerme 4: Bir T dönüşümü (SKC) koşulunu sağlıyorsa ve bir sabit noktaya sahipse bu durumda T dönüşümü quasi genişlemeyen bir dönüşümdür (Karapınar and Taş 2011).

İspat: T dönüşümü X Banach uzayın D alt kümesi üzerine bir dönüşüm olsun ve (SKC) koşulunu sağlasın. T nin bir sabit noktası olduğunu, yani $z \in F(T)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$0 = \frac{1}{2} \| z - Tz \| \leq \| z - y \| \quad \text{iken} \quad \| Tz - Ty \| \leq N(z,y)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} N(z,y) &= max\left\{\| z-y \|, \frac{1}{2}[\| z-Tz \| + \| Ty-y \|], \frac{1}{2}[\| Tz-y \| + \| z-Ty \|]\right\} \\ &= max\left\{\| z-y \|, \frac{1}{2}\| Ty-y \|, \frac{1}{2}(\| z-y \| + \| z-Ty \|)\right\}. \end{aligned}$$

Eğer $N(z,y) = \frac{1}{2}(\| z-y \| + \| z-Ty \|)$ ise bu durumda $\| z-Ty \| = \| Tz-Ty \| \leq N(z,y) = \frac{1}{2}(\| z-y \| + \| z-Ty \|)$ olur. Buradan $\| Tz-Ty \| = \| z-Ty \| \leq \| z-y \|$ elde edilir.

Eğer $N(z,y) = \| z-y \|$ ise ispat tamamlanır.

Eğer $N(z,y) = \frac{1}{2}\| Ty-y \| \leq [\| Ty-z \| + \| z-y \|]$ ise bu durumda

$$\| z-Ty \| = \| Tz-Ty \| \leq N(z,y) = \frac{1}{2}\| Ty-y \| \leq \frac{1}{2}[\| Ty-z \| + \| z-y \|]$$

olur. Böylece $\| z-Ty \| = \| Tz-Ty \| \leq \| z-y \|$ ile ispat tamamlanır.

Sonuç 4: T dönüşümü aşağıdaki şartlardan birini sağlıyorsa

(i) (A3) şartı
(ii) (A4) şartı
(iii) (KSC) şartı
(iv) (CSC) şartı

ve bu dönüşüm bir sabit noktaya sahipse, T dönüşümü quasi genişlemeyen dönüşümdür (Karapınar and Taş, 2011).

Örnek 12: S ve T, $[0,4]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlı iki dönüşüm olsun;

$$Tx = \begin{cases} 0 & , \ x \neq 4 \\ 1 & , \ x = 4 \end{cases}$$

ve

$$Sx = \begin{cases} 0 & , \ x \neq 4 \\ 3 & , \ x = 4. \end{cases}$$

Bu durumda,

(i) T dönüşümü hem (SCC) hem de (SKC) şartını sağlar. Fakat genişlemeyen dönüşüm değildir.

(ii) S quasi genişlemeyen dönüşümdür ve $F(S) \neq \emptyset$ dir. Fakat S dönüşümü (SKC) şartını sağlamaz (Karapınar and Taş 2011).

İspat:

(i) Eğer $x < y$ ve $(x,y) \in ([0,4] \times [0,4]) \setminus ((3,4) \times \{4\})$ ise bu durumda $\| Tx - Ty \| \leq M(x,y)$ ve $\| Tx - Ty \| \leq N(x,y)$ olur. Eğer $x \in (3,4)$ ve $y = 4$ ise bu durumda

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| = \frac{x}{2} > 1 > \| x - y \| \text{ ve } \frac{1}{2} \| y - Ty \| > 1 > \| x - y \|$$

olur. Buradan T dönüşümü (SCC) ve (SKC) şartlarını sağlar. T dönüşümü sürekli olmadığından, genişlemeyen değildir.

(ii) $F(S) = \{0\} \neq \emptyset$ ve S dönüşümünün quasi genişlemeyen olduğu açıktır. Çünkü,

$$\frac{1}{2} \| 4 - S4 \| = \frac{1}{2} \leq 1 = \| 4 - 3 \| \text{ ve } \| S4 - S3 \| = 3 > 2 = M(4,3)$$

dür. Buradan

$$M(4,3) = max \left\{ \begin{matrix} \| 4 - 3 \| = 1, \frac{1}{2} [\| 4 - S4 \| + \| S3 - 3 \|] = 2, \\ \frac{1}{2} [\| S3 - 4 \| + \| 3 - S4 \|] = 2 \end{matrix} \right\} = 2$$

olur, yani S dönüşümü (SKC) şartını sağlamaz.

Önerme 5: T, X Banach uzayın kapalı bir D alt kümesi üzerine (SKC) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in D$ için aşağıdakiler geçerlidir (Karapınar and Taş 2011).

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \| x - Tx \|$,

(ii) ya $\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \|$ ya da $\frac{1}{2}\|Tx - T^2x\| \leq \| Tx - y \|$,

(iii) ya $\| Tx - Ty \| \leq N(x, y)$ ya da $\|T^2x - Ty\| \leq N(Tx, y)$ olur.

Burada

$$N(x,y) = max\begin{Bmatrix} \| x - y \|, \frac{1}{2}[\| Tx - x \| + \| Ty - y \|], \\ \frac{1}{2}[\| Tx - y \| + \| Ty - x \|] \end{Bmatrix}$$

ve

$$N(Tx,y) = max\begin{Bmatrix} \| Tx - y \|, \frac{1}{2}[\|T^2x - Tx\| + \| Ty - y \|], \\ \frac{1}{2}[\|T^2x - y\| + \| Ty - Tx \|] \end{Bmatrix}.$$

2012 yılında Karapınar, Suzuki'nin (C) şartından ve yukarıdaki tanımlardan yola çıkarak aşağıdaki tanımlar vermiştir (Karapınar 2012b).

Tanım 30: T, X Banach uzayının D alt kümesi üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun.

i) Eğer her $x, y \in D$ için

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \| \text{ iken}$$
$$\| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{3}[\| x - y \| + \| Tx - x \| + \| y - Ty \|],$$

gerektirmesi sağlanıyorsa T dönüşümü (RSC) Reich-Suzuki-(C) şartını (kısaca, (RSC) şartını) sağlıyor denir.

ii) Eğer her $x, y \in D$ için

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \| \text{ iken}$$
$$\| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{3}[\| x - y \| + \| Tx - y \| + \| x - Ty \|],$$

gerektirmesi sağlanıyorsa T dönüşümü (RSCS) Reich-Chatterjea-Suzuki-(C) şartını (kısaca, $(RCSC)$ şartını) sağlıyor denir.

iii) Eğer her $x, y \in D$ için;

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \| \text{ iken}$$

$$\| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{5} [\| x - y \| + \| Tx - x \| + \| y - Ty \| + \| Tx - y \| + \| x - Ty \|]$$

gerektirmesi sağlanıyorsa T dönüşümü (HRSC) Hardy-Rogers-Suzuki-(C) şartını (kısaca, (HRSC) şartını) sağlıyor denir (Karapınar 2012b).

Önerme 6: Eğer T dönüşümü (RSC) şartını sağlıyorsa ve bir sabit noktaya sahipse, T dönüşümü quasi genişlemeyen bir dönüşümdür (Karapınar 2012b).

İspat: T dönüşümü X Banach uzayın D alt kümesi üzerine (RSC) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu yani $z \in F(T)$ olduğunu kabul edelim. Bu nedenle,

$$0 = \tfrac{1}{2} \| z - Tz \| \leq \| z - y \|$$

iken

$$\begin{aligned} \| Tz - Ty \| &\leq \frac{1}{3} [\| z - y \| + \| Tz - z \| + \| y - Ty \|] \\ &= \frac{1}{3} [\| z - y \| + \| y - Ty \|] \\ &\leq \frac{1}{3} [\| z - y \| + \| y - z \| + \| z - Ty \|] \\ &= \frac{1}{3} [2 \| y - z \| + \| Tz - Ty \|] \end{aligned}$$

dir. Böylece $\| z - Ty \| = \| Tz - Ty \| \leq \| z - y \|$ olur ve ispat tamamlanır.

Önerme 7: Eğer T dönüşümü (RCSC) koşulunu sağlıyorsa ve bir sabit noktaya sahipse, bu dönüşüm quasi genişlemeyen dönüşümdür (Karapınar 2012b).

İspat: T dönüşümü X Banach uzayın D alt kümesi üzerine (RCSC) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. T dönüşümünün bir sabit olduğunu yani $z \in F(T)$ olduğunu kabul edelim. $0 = \tfrac{1}{2} \| z - Tz \| \leq \| z - y \|$ iken,

$$\begin{aligned} \| Tz - Ty \| &\leq \frac{1}{3} [\| z - y \| + \| Tz - y \| + \| z - Ty \|] \\ &= \frac{1}{3} [2 \| y - z \| + \| Tz - Ty \|] \end{aligned}$$

olur. Buradan $\| z-Ty \|=\| Tz-Ty \| \leq \| z-y \|$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Önerme 8: Eğer T dönüşümü (HRSC) koşulunu sağlıyorsa ve bir sabit noktaya sahipse bu dönüşüm quasi genişlemeyendir (Karapınar 2012b).

İspat: T dönüşümü X Banach uzayın D alt kümesi üzerine (HRSC) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu yani $z \in F(T)$ olduğunu kabul edelim. Bu nedenle $0=\frac{1}{2}\| z-Tz \| \leq \| z-y \|$ iken,

$$
\begin{aligned}
\| Tz-Ty \| \leq & \frac{1}{5}[\| z-y \| +\| Tz-z \| \\
& +\| y-Ty \| +\| Tz-y \| +\| z-Ty \|] \\
& =\frac{1}{5}[2 \| z-y \| +\| y-Ty \| +\| z-Ty \|] \\
& \leq \frac{1}{5}[2 \| z-y \| +\| y-z \| +\| z-Ty \| +\| z-Ty \|] \\
& =\frac{1}{5}[3 \| y-z \| +2 \| Tz-Ty \|]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $\| z-Ty \|=\| Tz-Ty \| \leq \| z-y \|$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 9: T dönüşümü X Banach uzayın kapalı D alt kümesi üzerine bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü (RSC) koşulunu sağlıyorsa her $x, y \in D$ için aşağıdakiler geçerlidir;

(i) $\|Tx-T^2x\| \leq \| x-Tx \|$,

(ii) ya $\frac{1}{2}\| x-Tx \| \leq \| x-y \|$ ya da $\frac{1}{2}\|Tx-T^2x\| \leq \| Tx-y \|$,

(iii) ya $\| Tx-Ty \| \leq \frac{1}{3}[\| x-y \| +\| Tx-x \| +\| Ty-y \|]$ ya da

$\|T^2x-Ty\| \leq \frac{1}{3}[\| Tx-y \| +\|T^2x-Tx\|+\| Ty-y \|]$ dir (Karapınar 2012b).

Önerme 10: T dönüşümü X Banach uzayın kapalı D alt kümesi üzerine (RCSC) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in D$ için aşağıdakiler sağlanır;

(i) $\|Tx-T^2x\| \leq \| x-Tx \|$,

(ii) ya $\frac{1}{2}\| x-Tx \| \leq \| x-y \|$ ya da $\frac{1}{2}\|Tx-T^2x\| \leq \| Tx-y \|$,

(iii) ya $\| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{3}[\| x-y \| + \| Tx - x \| + \| Ty - y \|]$ ya da $\|T^2x - Ty\| \leq \frac{1}{3}[\| Tx - y \| + \|T^2x - y\| + \| Ty - Tx \|]$ dir (Karapınar 2012b).

Önerme 11: T dönüşümü X Banach uzayın kapalı D alt kümesi üzerine (HRSC) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in D$ için aşağıdakiler sağlanır;

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \| x - Tx \|$

(ii) ya $\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \|$ ya da $\frac{1}{2}\|Tx - T^2x\| \leq \| Tx - y \|$

(iii) ya $\| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{5}[\| x - y \| + \| Tx - x \| + \| Ty - y \| + \| Tx - y \| + \| Ty - x \|]$ ya da $\| T^2x - Ty \| \leq \frac{1}{5}[\| Tx - y \| + \|T^2x - Tx\| + \| Ty - y \| + \|T^2x - y\| + \| Ty - Tx \|]$ dir (Karapınar 2012b).

Tanım 31: X bir normlu uzay ve D, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $T: D \to X$ dönüşümü her $x, y \in D$ ve $\mu \geq 1$ için

$$\|x - Ty\| \leq \mu\|x - Tx\| + \|x - y\|$$

eşitsizliği sağlıyorsa T dönüşümü (E_μ) şartını sağlıyor denir. T dönüşümü bazı $\mu \geq 1$ değerleri için (E_μ) şartını sağladığında, T dönüşümü (E) şartını sağlıyor denir. $T: D \to X$ dönüşümü genişlemeyen bir dönüşüm ise (E_1) şartını sağladığı açıktır (Falset *et al.* 2011).

Lemma 10: (C) şartını sağlayan bir dönüşüm (E) şartını sağlar, fakat bunun tersi her zaman doğru değildir (Falset *et al.* 2011).

Örnek 13: $X = \mathbb{R}$ ve $D = [-1,1]$ kümesi üzerinde alışılmış norm tanımlı olsun. $T: D \to D$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1,0] \setminus \left\{\frac{-1}{4}\right\} \\ 0\,, & x = \frac{-1}{4} \\ \frac{-x}{4}\,, & x \in (0,1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $u = -1$ ve $v = \frac{-1}{4}$ için

$$\frac{1}{2}\|v - Tv\| = \frac{1}{2}\left\|-\frac{1}{4} - T(-\frac{1}{4})\right\| = \frac{1}{8} \leq \frac{3}{4} = \|u - v\|$$

olur. Ancak

$$\|Tu - Tv\| = 1 > \frac{3}{4} = \|u - v\|$$

dir. Dolayısıyla T dönüşümü (C) şartını sağlamamaktadır. T dönüşümünün (E) şartını sağladığı aşağıda gösterilecektir.

(i) $u, v \in [-1,0] \backslash \left(-\frac{1}{4}\right)$ için

$$\begin{aligned}\|u - Tv\| &\leq \|u - Tu\| + \|Tu - Tv\| \\ &\leq \|u - Tu\| + \|u - v\|.\end{aligned}$$

(ii) $u, v \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned}\|u - Tv\| &\leq \|u - Tu\| + \|Tu - Tv\| \\ &\leq \|u - Tu\| + \left|-\frac{u}{4} + \frac{v}{4}\right| \\ &\leq \|u - Tu\| + |u - v| \\ &= \|u - Tu\| + \|u - v\|.\end{aligned}$$

(iii) $u \in [-1,0] \backslash \left(-\frac{1}{4}\right)$ ve $v \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned}\|u - Tv\| &\leq \|u - Tu\| + \|Tu - Tv\| \\ &\leq \|u - Tu\| + \left|-u + \frac{v}{4}\right| \\ &\leq \|u - Tu\| + |-u - v| \quad (u \leq 0 \; ve \; v > 0 \text{ için}) \\ &= \|u - Tu\| + |u - v|.\end{aligned}$$

(iv) $u \in [-1,0] \backslash \left(-\frac{1}{4}\right)$ ve $v \in -\frac{1}{4}$ için

$$\begin{aligned}\|u - Tv\| = |u| &\leq 2|u| + \left|u + \frac{1}{4}\right| \\ &= \|u - Tu\| + \|u - v\|.\end{aligned}$$

(v) $u \in (0,1]$ ve $v \in -\frac{1}{4}$ için

$$\begin{aligned}\|u - Tv\| = |u| &\leq \frac{5}{4}|u| + \left|u + \frac{1}{4}\right| \\ &= \|u - Tu\| + \|u - v\|.\end{aligned}$$

Bu durumda T dönüşümü $\mu \geq 1$ için (E) koşulunu sağlar (Pant and Shukla 2017).

Lemma 11: $T: D \rightarrow X$ dönüşümü (E) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. T dönüşümü sabit bir noktaya sahip ise quasi genişlemeyendir (Falset *et al.* 2011).

Fakat yukarıdaki ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 14: $T:[-1,1] \to [-1,1]$,

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+|x|}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

dönüşümü verilsin. Burada 0 ın T dönüşümünün sabit noktası olduğu kontrol etmek kolaydır. Her $x \in [-1,1]$ için $|Tx| \leq |x|$ olup T dönüşümü $[-1,1]$ aralığında quasi genişlemeyendir**.**

Diğer yandan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$ ve $y_n = \frac{1}{2\pi n}$ alınırsa;

$$\frac{|x_n - Ty_n| - |x_n - y_n|}{|x_n - Tx_n|} = \frac{x_n - (y_n - x_n)}{|x_n - T\mathrm{x_n}|}$$

$$= \frac{x_n - (y_n - x_n)}{\frac{{x_n}^2}{1+x_n}}$$

$$= \frac{(1+x_n)(2-\frac{y_n}{x_n})}{x_n} \to +\infty$$

olur. Sonuç olarak, T dönüşümü (E) şartını $[-1,1]$ aralığında sağlamaz (Falset *et al.* 2011).

Önerme 12: $T: D \to X$ dönüşümü D üzerinde (E_α) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) Her $x \in D$ için $TD \subset D$ ise,

$$\|x - T^2x\| \leqslant (\alpha + 1) \parallel x - Tx \parallel.$$

(ii) Her $x, y \in D$ için $TD \subset D$ ise

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leqslant \alpha\|Tx - T^2x\| + \parallel Tx - y \parallel.$$

(iii) $r \in (0,1)$ için $T_r = rT + (1-r)I$ olarak tanımlanan $T_r: D \to X$ dönüşümü D üzerinde (E_α) şartını sağlar (Burada I birim dönüşümdür.) (Falset *et al.* 2011).

Tanım 32: X bir normlu uzay ve D, X in kapalı sınırlı ve konveks alt küme olsun. Eğer $T: D \to D$ genişlemeyen bir dönüşüm ise, $\|x_n - Tx_n\| \to 0$ olacak şekilde D kümesinde tanımlı bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. Bu diziye hemen hemen sabit nokta dizisi veya kısaca a.f.p.s denir (Falset *et al.* 2011).

Önerme 13: D, X in sınırlı bir alt kümesi olsun. $T: D \to D$ keyfi bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki ifadelerden en az biri geçerlidir (Falset *et al.* 2011).

(i) D de T dönüşümü için bir a.f.p.s. vardır.

(ii) T dönüşümü D üzerinde (E) şartını sağlar.

Teorem 6: X bir Banach uzayı D, X in boştan farklı bir alt kümesi ve $T: D \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T: D \to X$ dönüşümü;

(i) $x_n \to z \in D$ olmak üzere D de T dönüşümü için bir $\{x_n\}$ hemen hemen sabit nokta dizisi vardır,

(ii) T dönüşümü D üzerinde (E) şartını sağlar,

(iii) $(X, \|.\|)$ uzayı Opial şartını sağlar,

şartlarını sağlıyorsa bu durumda $Tz = z$ dir (Falset *et al.* 2011).

Lemma 12: X bir Banach uzayı, D, X in boş olmayan sınırlı bir alt kümesi ve $T: D \to D$ herhangi bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur.

(i) D kümesinde T dönüşümü için bir hemen hemen sabit nokta dizisi vardır.

(ii) T dönüşümü D kümesi üzerinde (E) şartını sağlar (Falset *et al.* 2011).

Sonuç 5: X Banach uzayı Opial şartını sağlasın ve D, X in boştan farklı zayıf kapalı bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T: D \to X$ dönüşümü D üzerinde (E) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümünün D de bir sabit noktasının olması için gerek ve yeter şart T dönüşümünün a.f.p.s. özelliğine sahip olmasıdır (Falset *et al.* 2011).

2011 yılında Falset, Fuster ve Suzuki (C) şartının bir genelleştirmesi olan (C_λ) şartını aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Tanım 33: X bir normlu uzay ve D, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T: D \to X$ dönüşümü her $x, y \in D$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$\lambda\|x - Tx\| \leq \|x - y\| \text{ ise } \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

şartını sağlıyorsa T dönüşümüne (C_λ) şartını sağlıyor denir. T dönüşümü;

(i) $\lambda = \frac{1}{2}$ için (C) şartını sağlar.

(ii) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ ise $\left(C_{\lambda_1}\right)$ şartı $\left(C_{\lambda_2}\right)$ şartını gerektirir.

Aşağıda örnek (ii) nin tersinin yanlış olduğunu gösterir (Falset *et al.* 2011).

Örnek 15: $T: [0,1] \to [0,1]$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \neq 1 \\ \dfrac{1+\lambda}{2+\lambda}, & x = 1 \end{cases}$$

dönüşümü verilsin. $0 < \lambda' < \lambda$ için T dönüşümü (C_λ) şartını sağlar ama $(C_{\lambda'})$ şartını sağlamaz. Ayrıca $\mu = (2+\lambda)/2$ için (E_μ) şartını sağlar (Falset *et al.* 2011).

Önerme 14: X bir normlu uzay ve D, X in bir alt kümesi olsun. $T: D \to X$ dönüşümü bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) şartını sağlıyorsa, her $r \in (\lambda, 1)$ için $T_r(x) = rTx + (1-r)x$ ile tanımlanan $T_r: D \to X$ dönüşümü $(C_{\frac{\lambda}{r}})$ şartını sağlar (Falset *et al.* 2011).

Lemma 13: D, X Banach uzayın bir alt kümesi olsun. $T: D \to X$ dönüşümü bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) şartını sağlasın ve $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümü için hemen hemen bir sabit nokta dizisi olsun. Bu durumda $\liminf_n \|x_n - y\| > 0$ olan her $y \in D$ için,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Ty\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

olur (Falset *et al.* 2011).

(C_λ) tipi genişlemeyen dönüşümlerin özelliklerinden biri de sabit nokta kümesinin yapısıyla ilgilidir. Yani Lemma 11 in ispatından hareketle şu ifadeye varılır: T dönüşümü, X Banach uzayın kapalı D alt kümesi üzerine bir dönüşüm olsun. Dönüşümün bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) koşulunu sağladığını varsayalım. Bu durumda $F(T)$ kapalıdır. Ayrıca, eğer X kesin konveks ise $F(T)$ de konvekstir (Falset *et al.* 2011).

Sonuç olarak, $\lambda \neq \frac{1}{2}$ için (C_λ) şartının (E) şartını gerektirip gerektirmediği bilinmiyor. Aksi taktirde bu durum Lipschitzian dönüşümler için sağlanır.

Lemma 14: $T: D \to X$ dönüşümü bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) şartını sağlayan $Lip\ (T)$ Lipschitz sabitli bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü $\mu = max[1, 1 + \lambda(Lip(T) - 1)]$ için (E_μ) şartını sağlar (Falset *et al.* 2011).

İspat: $Lip(T) \leq 1$ ise T dönüşümü (E_1) şartını sağladığı açıktır. $Lip(T) > 1$ için $\mu > 1$ olur. T dönüşümünün E_μ şartını sağlamadığını varsayalım. Bu durumda $x, y \in D$ için $\|x - Ty\| > \mu\|x - Tx\| + \|x - y\|$ olur. Sonuç olarak,

$$\mu\|x - Tx\| + \|x - y\| < \|x - Tx\| + Lip(T)\|x - y\|$$

dir.

Buradan

$$(\mu - 1)\|x - Tx\| < (Lip(T) - 1)\|x - y\|$$

olur. Ayrıca $(\mu - 1) = \lambda(Lip(T) - 1)$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\lambda\|x - Tx\| < \|x - y\|$$

elde edilir.

T dönüşümü (C_λ) şartını sağladığı için $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ dir. Bu durumda

$$\|x - Ty\| \leq \|x - Tx\| + \|Tx - Ty\| \leq \|x - Tx\| + \|x - y\|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Yukarıda tanımlanan genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıflarından hareketle 2017 yılında Pant ve Shukla, aşağıdaki genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşüm sınıfını tanımlamıştır.

Tanım 34: D, X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in D$ ve $\alpha \in [0,1)$ için $T: D \to D$ dönüşümü

$$\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$$

iken

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|Tx - y\| + \alpha\|Ty - x\| + (1 - 2\alpha)\|x - y\| \qquad (3.1)$$

gerektirmesini sağlıyorsa T ye genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşüm denir (Pant and Shukla 2017).

Aşağıda genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşümlerin bazı temel özellikleri ifade edilmiştir.

Önerme 15: (C) koşulunu sağlayan her dönüşüm, genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşümdür. Fakat tersi her zaman doğru değildir. (Pant and Shukla 2017)

$\alpha = 0$ değeri için genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşüm (C) koşulunu sağlayan bir dönüşüme indirgenir. Bu durumun tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 16: $D = [0,4]$, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi ve bu küme üzerinde alışılmış norm tanımlansın. $T: D \to D$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 4 \\ 2, & x = 4 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. $x \in \left(2, \frac{8}{3}\right]$ ve $y = 4$ için,

$$\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\| \text{ ve } \|Tx - Ty\| = 2 > \|x - y\|$$

T dönüşümü (C) şartını sağlamamaktadır. $x \in (2,3]$ ve $y = 4$ için

$$\frac{1}{2}\|y-Ty\| \leq \|x-y\| \text{ ve } \|Tx-Ty\| > \|x-y\|$$

T dönüşümü (C) şartını sağlamamaktadır. Bununla birlikte T dönüşümü $\alpha \geq \frac{1}{3}$ için genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşümdür (Pant and Shukla 2017).

Örnek 17: $D = \{(0,0), (2,0), (0,4), (4,0), (4,5), (5,4)\}$, $\mathbb{R}^2$ nin alt kümesi olsun. X üzerinde $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ şeklinde norm $\|.\|$ tanımlansın. Bu durumda $(X, \|.\|)$ bir Banach uzaydır. $T: D \to D$ dönüşümü

$$T: \begin{pmatrix} (0,0), (2,0), (0,4), (4,0), (4,5), (5,4) \\ (0,0), (0,0), (0,0), (2,0), (4,0), (0,4) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha \geq \frac{1}{5}$ ve $(x, y) \neq ((4,5), (5,4)$ için

$$\| Tx - Ty \| \leq \alpha \| Tx - y \| + \alpha \| Ty - x \| + (1 - 2\alpha) \| x - y \|$$

dir. $x = (4,5)$ ve $y = (5,4)$ olması durumunda

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| = \frac{1}{2} \| y - Ty \| = \frac{5}{2} > 2 = \| x - y \|$$

olur. Buradan T genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşümüdür (Pant and Shukla 2017).

Önerme 16: D, X Banach uzayın boş olmayan alt kümesi ve $T: D \to D$ dönüşümü sabit noktası $y \in D$ olan genelleştirilmiş α-genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü quasi genişlemeyen dönüşümdür (Pant and Shukla 2017).

İspat: $y \in F(T)$ ve $x \in D$ olsun. $\frac{1}{2} \| y - Ty \| = 0 \leq \| x - y \|$ olduğundan (3.1) den

$$\| Tx - y \| = \| Tx - Ty \| \leq \alpha \| Tx - y \| + \alpha \| Ty - x \| + (1 - 2\alpha) \| x - y \|$$

olur. Buradan,

$$(1 - \alpha) \| Tx - y \| \leq (1 - \alpha) \| x - y \|$$

dir. Bu durumda $(1 - \alpha) > 0$ olduğundan $\| Tx - y \| \leq \| x - y \|$ elde edilir.

Aşağıdaki Lemma, genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta kümesinin yapısıyla ilgilidir.

Lemma 15: D, X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: D \to D$ genelleştirilmiş α-genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere $F(T)$ kapalıdır. Ayrıca eğer E kesin konveks ve D konveks ise $F(T)$ de konvekstir (Pant and Shukla 2017).

Lemma 16: D, X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: D \to D$ genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşüm olmak üzere $x, y \in D$ için,

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \|x - Tx\|$,

(ii) ya $\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$ ya da $\frac{1}{2}\|Tx - T^2x\| \leq \|Tx - y\|$,

(iii) ya $Tx - Ty \leq \alpha\|Tx - y\| + \alpha\|x - Ty\| + (1 - 2\alpha)\|x - y\|$ ya da $\|T^2x - Ty\| \leq \alpha\|Tx - Ty\| + \alpha\|T^2x - y\| + (1 - 2\alpha)\|Tx - y\|$ dir (Pant and Shukla 2017).

Lemma 17: D, X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: D \to D$ genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşüm olmak üzere her $x, y \in D$ için,

$$\|x - Ty\| \leq \frac{(3 + \alpha)}{(1 - \alpha)}\|x - Tx\| + \|x - y\|$$

dir (Pant and Shukla 2017).

Tanım 35: $T: D \to D$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in D$ için

$$\frac{1}{2} \| x - T\mathrm{y} \| \leq \| x - y \| \text{ iken}$$

$$\| Tx - Ty \| \leq \alpha \| T\mathrm{x} - x \| + \alpha \| T\mathrm{y} - y \| + (1 - 2\alpha) \| x - y \|$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşüm denir (Pandey *et al.* 2018).

Lemma 18: D, X Banach uzayın boş olmayan alt kümesi ve $T: D \to D$ bir Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşümü olsun. Bu durumda her $x, y \in D$ için,

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \| x - Tx \|$,

(ii) ya $\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \|$ ya da $\frac{1}{2}\|Tx - T^2x\| \leq \| Tx - y \|$,

(iii) ya $\| Tx - Ty \| \leq \alpha \| Tx - x \| + \alpha \| y - Ty \| + (1 - 2\alpha) \| x - y \|$ ya da $\|T^2x - Ty\| \leq \alpha\|T^2x - Tx\| + \alpha \| Ty - y \| + (1 - 2\alpha) \| Tx - y \|$ dir (Pandey *et al*. 2018).

Lemma 19: D, X Banach uzayın boş olmayan alt kümesi ve $T: D \to D$ Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşümü olsun. Bu durumda her $x, y \in D$ için,

$$\| x - Ty \| \leq \left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right) \| x - Tx \| + \| x - y \|$$

dir (Pandey *et al.* 2018).

Aşağıda, Reich-Suzuki genişlemeyen ve genelleştirilmiş α-genişlemeyen dönüşümleri içeren genelleştirilmiş α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşüm sınıfı tanımlanmıştır.

Tanım 36: D, X Banach uzayın boş olmayan alt kümesi ve $T: D \to D$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in D$ için

$$\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - v \| \text{ iken } \| T\mathrm{x} - Tv \| \leq max\{P(x,v), Q(x,v)\}$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne genelleştirilmiş α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşüm denir. Burada

$$P(x,y) = \alpha \| Tx - x \| + \alpha \| Ty - y \| + (1-2\alpha) \| x - y \|$$

ve

$$Q(x,y) = \alpha \| Tx - y \| + \alpha \| Ty - x \| + (1-2\alpha) \| x - y \|$$

dir (Pandey *et al.* 2018).

Lemma 20: D, X Banach uzayın boş olmayan alt kümesi ve $T: D \to D$ genelleştirilmiş α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in D$ için,

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \| x - Tx \|$,

(ii) ya $\frac{1}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \|$ ya da $\frac{1}{2}\|Tx - T^2x\| \leq \| Tx - y \|$,

(iii) ya $\| Tx - Ty \| \leq max\{P(x,y), Q(x,y)\}$ ya da $\|T^2x - Ty\| \leq max\{P(Tx,y), Q(Tx,y)\}$

dir (Pandey *et al* 2018).

Sonuç 13: Reich-Suzuki tipi genişlemeyen dönüşümler, Suzuki genişlemeyen ve (3.1)-(3.4) ü sağlayan dönüşümlerden daha geneldir. Ayrıca Lemma 17, genelleştirilmiş bir α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşümün $\mu = \frac{(3+\alpha)}{(1-\alpha)}$ ile (E) şartını sağladığını göstermektedir. Bu nedenle genelleştirilmiş α-genişlemeyen, Reich-Suzuki tipi genişlemeyen ve genelleştirilmiş α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşümler de (E) şartını sağlayan dönüşüm sınıfına aittir (Pandey *et al*. 2018).

2019 yılında Atailia ve arkadaşları aşağıdaki genişlemeyen dönüşüm sınıfını ifade etmişlerdir:

Tanım 37: D, X Banach uzayın boştan farklı bir alt kümesi ve $T: D \to D$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\beta \parallel x - Tx \parallel \leq \parallel x - y \parallel$$

iken

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq \alpha_1 \parallel x - y \parallel + \alpha_2 (\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel) \\ + \alpha_3 (\parallel x - Ty \parallel + \parallel y - Tx \parallel)$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0,1]$ ve $\beta \in (0,1)$ varsa T dönüşümüne genelleştirilmiş Suzuki tipi daraltan dönüşüm denir (Atailia *et al.* 2019).

Aşağıdaki önerme, Tanım 37 de ifade edilen dönüşümün, genelleştirilmiş α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşüm sınıfını içerdiğini göstermektedir (Pant *et al.* 2021).

Önerme 17: Eğer $T: D \to D$ genelleştirilmiş Suzuki tipi daraltan ise ($\beta = \frac{1}{2}$ ile), T genelleştirilmiş bir α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşümdür (Pant *et al.* 2021).

İspat: T, genelleştirilmiş Suzuki tipi daraltan olduğu için,

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq \alpha_1 \parallel x - y \parallel + \alpha_2 (\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel) + \alpha_3 (\parallel x - Ty \parallel + \parallel y - Tx \parallel)$$

dir. Aşağıdaki iki durum göz önüne alındığında

(i) $(\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel) \geq (\parallel x - Ty \parallel + \parallel y - Tx \parallel)$ için,

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq \alpha_1 \parallel x - y \parallel + (\alpha_2 + \alpha_3)(\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel)$$

olur.

$\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$ alındığında $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \alpha_1 = 1 - 2\alpha$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik,

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq \alpha \parallel x - Tx \parallel + \alpha \parallel y - Ty \parallel + (1 - 2\alpha) \parallel x - y \parallel$$

halini alır.

(ii) $(\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel) < (\parallel x - Ty \parallel + \parallel y - Tx \parallel)$ için,

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq \alpha_1 \parallel x - y \parallel + (\alpha_2 + \alpha_3)(\parallel x - Ty \parallel + \parallel y - Tx \parallel)$$

dir. Yeniden $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$ ve $\alpha_1 = 1 - 2\alpha$ olarak alındığında,

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq \alpha \parallel x - Ty \parallel + \alpha \parallel y - Tx \parallel + (1 - 2\alpha) \parallel x - y \parallel$$

elde edilir. Buradan,

$$P(x,y) = \alpha \parallel Tx - x \parallel + \alpha \parallel Ty - y \parallel + (1-2\alpha) \parallel x - y \parallel$$

ve

$$Q(x,y) = \alpha \parallel Tx - y \parallel + \alpha \parallel Ty - x \parallel + (1-2\alpha) \parallel x - y \parallel$$

yazılır. Buradan şu sonuca varılır,

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq max\{P(x,y), Q(x,y)\}.$$

Bu nedenle, $T: D \to D$ genelleştirilmiş bir α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşümdür.

Aşağıdaki örnek, yukarıdaki ifadenin tersinin doğru olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 18: $D = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (0,5), (5,4)\}$ kümesi üzerinde $\mathbb{R}^2$ deki $\|\cdot\| := \|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ normu tanımlansın. Ayrıca $T: D \to D$ dönüşümü,

$$T: \begin{pmatrix} (0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (0,5), (5,4) \\ (0,0), (0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,0), (0,5) \end{pmatrix}$$

şeklinde verilsin. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \geq \frac{6}{10}$ için

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq max\{P(x,y), Q(x,y)\}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, T genelleştirilmiş α-Reich-Suzuki genişlemeyen dönüşümdür.

Bununla birlikte $x = (4,0)$ ve $y = (5,4)$ için

$$\beta \parallel x - Tx \parallel = \beta \leq \parallel x - y \parallel = 5, \text{ ve } \parallel Tx - Ty \parallel = 8$$

dir. Buradan,

$$\alpha_1 \parallel x - y \parallel + \alpha_2(\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel)$$

$$+ \alpha_3(\parallel x - Ty \parallel + \parallel y - Tx \parallel) = 5 - 3\alpha_2 + 5\alpha_3$$

olur. Böylece her $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0,1]$ için,

$$\parallel Tx - Ty \parallel > \alpha_1 \parallel x - y \parallel + \alpha_2(\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel) + \alpha_3(\parallel x - Ty \parallel + \parallel y - Tx \parallel)$$

yazılır. Bu nedenle T dönüşümü genelleştirilmiş Suzuki tipi bir daralma değildir (Pant *et al.* 2021).

Lemma 21: D, X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $\beta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere $T: D \to D$ dönüşümünün genelleştirilmiş Suzuki tipi bir daraltan olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\| x - Ty \| \leq \left(\frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3}{1 - \alpha_2 - \alpha_3} \right) \| x - Tx \| + \| x - y \|$$

olur (Pant *et al*. 2021).

Önerme 18: D, X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: D \to D$ genelleştirilmiş Suzuki tipi genelleştirilmiş bir daraltan olsun. Bu durumda T dönüşümü (E) şartını sağlar (Pant *et al*. 2021).

Tanım 38: X bir normlu uzay, D, X in boş olmayan bir kümesi ve $T: D \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in D$, $\gamma \in [0,1]$, $\mu \in [0, \frac{1}{2}]$ ve $2\mu \leq \gamma$ için

$$\gamma \|x - Tx\| \leq \|x - y\| + \mu \|y - Ty\|$$

iken

$$\|Tx - Ty\| \leq (1 - \gamma)\|x - y\| + \gamma(\|x - Ty\| + \|y - Tx\|)$$

gerektirmesi sağlanıyorsa T dönüşümü $(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlıyor denir. Burada $\gamma = \mu = 0$ alınırsa bu dönüşümün genişlemeyen bir dönüşüm olduğu görülür.

Ayrıca eğer T dönüşümü (C) şartını sağlıyorsa, $\gamma = \mu = 0$ için $(B_{\gamma,\mu})$ şartını da sağlar. Yani

$$\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\| \text{ ise } \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

olur. Buradan

$$\|Tx - Ty\| \leq (1 - \gamma)\|x - y\| + \mu(\|x - Ty\| + \|y - Tx\|)$$

yazılır. Fakat bu ifadenin tersi genellikle doğru değildir (Patir *et al*. 2018).

Örnek 19: $T: [0,2] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

dönüşümü verilsin. $x = 1{,}2$ ve $y = 2$ için $\frac{1}{2}\|Tx - x\| = 0.6 < 0.8 = \|x - y\|$ olur. Fakat $\|Tx - Ty\| = 1 \nless 0.8\|x - y\|$ dir. Dolayısıyla dönüşüm (C) şartını sağlamaz. Diğer yandan $x \neq 2$ ve $y \neq 2$ için T dönüşümünün $\gamma = 1$ ve $\mu = \frac{1}{2}$ için $(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağladığı açıktır.

$x \neq 2$ ve $y = 2$ için $\|Tx - Ty\| = 1$ ve

$$(1 - \gamma)\|x - y\| + \mu(\|x - Ty\| + \|y - Tx\|)$$

$$= \frac{1}{2}\|x - 1\| + 1 \; (\gamma = 1 \text{ ve } \mu = \frac{1}{2} \; için)$$

$$> 1 = \|Tx - Ty\|.$$

dir. $x = 2$ ve $y \neq 2$ için;

$$\|Tx - Ty\| = 1 < (1-\gamma)\|x - y\| + \mu(\|x - Ty\| + \|y - Tx\|)$$

$$(\gamma = 1 \text{ ve } \mu = \tfrac{1}{2} \text{ için})$$

olur. Ayrıca $x = 2$, $y = 2$ için T dönüşümünün $\gamma = 1$ ve $\mu = \frac{1}{2}$ olmak üzere $(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağladığı açıktır (Patir *et al*. 2018).

Aşağıdaki lemma $(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan T dönüşümünün aynı zamanda quasi genişlemeyen olduğunu göstermektedir.

Lemma 22: X bir normlu uzay ve D, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T: D \to X$ dönüşümü $(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlasın. $z \in F(T)$ ve her $x \in D$ için

$$\|z - Tx\| \leq \|z - x\|$$

dir (Patir *et al*. 2018).

Lemma 23: X bir normlu uzay ve D, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T: D \to D$ dönüşümü $(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlasın. Her $x, y \in D$ ve $c \in [0,1]$ için

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \|x - Tx\|$ dir.

(ii) Aşağıdaki (a) ve (b) den az biri sağlansın;

(a) $\frac{c}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$,

(b) $\frac{c}{2}\|Tx - T^2x\| \leq \|Tx - y\|$.

Bu durumda

(a) koşulu $\|Tx - Ty\| \leq \left(1 - \frac{c}{2}\right)\|x - y\| + \mu(\|x - Ty\| + \|y - Tx\|)$ eşitsizliğini,

(b) koşulu da $\|T^2x - Ty\| \leq \left(1 - \frac{c}{2}\right)\|Tx - y\| + \mu(\|Tx - Ty\| + \|y - T^2x\|)$

eşitsizliğini gerektirir. Ayrıca

$$\|x - Ty\| \leq (3 - c)\|x - Tx\| + \left(1 - \frac{c}{2}\right)\|x - y\|$$
$$+\mu(2\|x - Tx\| + \|x - Ty\| + \|y - Tx\| + 2\|Tx - T^2x\|)$$

(Patir *et al*. 2018).

Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümler İçin Sabit Noktalarının Varlığı

Bu kısımda yukarıda 1. Bölümde verilen genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının varlığı ile ilgili bazı sabit nokta teoremlerine yer verilecektir.

Yakın zamanda Suzuki aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır:

Teorem 7: (X, d) kompakt metrik uzay ve T, X üzerinde bir dönüşüm olsun. Ayrıca her $x, y \in X$ için $\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y)$ iken $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ şartı sağlansın. Bu durumda T nin tek sabit noktası vardır (Suzuki 2009).

Bu sonuç aşağıdaki iki teoreme dayanmaktadır:

Teorem 8: (X, d) kompakt metrik uzay ve T, X üzerinde bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ olmak üzere $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ ise T nin tek bir sabit noktası vardır (Edelstein 1966).

Teorem 9: $[0,1)$ den $(1/2,1]$ aralığına artan olmayan θ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq r \leq (\sqrt{5}-1)/2 \\ (1-r)r^{-2} & , (\sqrt{5}-1)/2 \leq r \leq 2^{-1/2} \\ (1+r)^{-1} & , 2^{-1/2} \leq r < 1. \end{cases}$$

Bu durumda (X, d) metrik uzayı için aşağıdakiler geçerlidir,

(i) X tamdır.

(ii) X üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan her T dönüşümünün bir sabit noktası vardır.

Her $x, y \in X$ için $\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y)$ iken $d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$ olacak şekilde $r \in [0,1)$ vardır (Suzuki 2008b).

Teorem 10: D, UCED Banach uzayı olan X nin zayıf kompakt konveks bir alt kümesi ve T, D üzerinde bir dönüşüm olsun. T nin (C) koşulunu sağladığını varsayalım. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Suzuki 2008b).

Teorem 11: X bir Banach uzay, T ve S dönüşümleri D küzerinde $T(D) \subset S(D)$ olacak şekilde kendi üzerine tanımlı dönüşümler olsun. Ayrıca $S(D)$ kümesi E Banach uzayın kapalı konveks alt kümesi olsun ve T dönüşümü (SKC) şartını sağlasın. $x_1 \in S(D)$ olmak üzere $T(D)$ içinde bir $\{x_n\}$ dizisi $Sx_{n+1} = \lambda Tx_n + (1-\lambda)Sx_n$ şeklinde tanımlansın. Burada λ, $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığındadır. $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Sx_n\| = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T ve S nin bir çakışık noktası vardır (Karapınar and Taş 2011).

Sonuç 6: X bir Banach uzay ve $T,S: D \to X$ dönüşümleri D üzerinde $T(D) \subset S(D)$ şartını sağlasın. Ayrıca $S(D)$, E Banach uzayın kapalı konveks alt kümesi olsun. $x_1 \in S(D)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T(D)$ içinde $Sx_{n+1} = \lambda Tx_n + (1-\lambda)Sx_n$ şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Burada λ, $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığındadır. $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Sx_n\| = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer S ve T dönüşümleri aşağıdakilerden birini sağlıyorsa:

$$\frac{1}{2} \| Sx - Tx \| \leq \| Sx - Sy \| \Rightarrow \| Tx - Ty \| \leq max \left\{ \begin{matrix} \| Sx - Sy \|, \\ \frac{1}{2} [\| Sx - Tx \| + \| Ty - Sy \|] \end{matrix} \right\},$$

$$\frac{1}{2} \| Sx - Tx \| \leq \| Sx - Sy \| \Rightarrow \| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{2} [\| Sx - Tx \| + \| Ty - Sy \|],$$

$$\frac{1}{2} \| Sx - Tx \| \leq \| Sx - Sy \| \Rightarrow \| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{2} [\| Tx - Sy \| + \| Sx - Ty \|],$$

bu durumda T ve S nin bir çakışık noktası vardır (Karapınar and Taş 2011).

Teorem 12: X bir Banach uzay ve $T,S: D \to X$ dönüşümleri $T(D) \subset S(D)$ şartını sağlasın ve $S(D)$, X Banach uzayın zayıf kapalı konveks ve Opial şartını sağlayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca her $x, y \in D$ için,

$$\frac{1}{2} \| Sx - Tx \| \leq \| Sx - Sy \| \Rightarrow \| Tx - Ty \| \leq N(Sx, Sy)$$

gerektirmesi sağlansın. Burada

$$N(Sx, Sy) = max \left\{ \begin{matrix} \| Sx - Sy \|, \frac{1}{2} [\| Sx - Tx \| + \| Ty - Sy \|], \\ \frac{1}{2} [\| Tx - Sy \| + \| Sx - Ty \|] \end{matrix} \right\}$$

dir. $x_1 \in S(D)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T(D)$ içinde $Sx_{n+1} = \lambda Tx_n + (1-\lambda)Sx_n$ şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Burada λ, $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığındadır. $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Sx_n\| = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T ve S nin bir çakışık noktası vardır (Karapınar and Taş 2011).

Teorem 13: D, UCED Banach uzayı olan X in zayıf kapalı konveks bir alt kümesi ve T dönüşümü D üzerine tanımlı olsun. Ayrıca T dönüşümü (SKC) koşulunu sağlasın. $x_1 \in D$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_{n+1} = \lambda Tx_n + (1-\lambda)x_n$ şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Burada λ, $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığındadır. $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Karapınar and Taş 2011).

Teorem 14: X bir Banach uzay ve $T,S: D \to X$ dönüşümleri $T(D) \subset S(D)$ şartını sağlasın. $S(D)$ kümesinin X Banach uzayın zayıf kapalı konveks ve Opial şartını sağlayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca her $x, y \in D$ için,

$$\frac{1}{2} \| Sx - Tx \| \leq \| Sx - Sy \|$$

iken

$$\| Tx - Ty \| \leq \frac{1}{3} [\| Sx - Sy \| + \| Tx - Sy \| + \| Sx - Ty \|]$$

olduğunu varsayalım. $T(D)$ içinde $x_1 \in S(D)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $Sx_{n+1} = \lambda Tx_n + (1 - \lambda)Sx_n$ şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Burada λ, $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığındadır. $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Sx_n\| = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda T ve S nin bir çakışık noktası vardır (Karapınar 2012b).

Bu alandaki bu gelişmelerden hareketle, 2012 yılında Karapınar, Suzuki, Edelstein ve Berinde'nin iyi bilinen sonuçlarını literatürdeki çok sayıda ilgili sonuca tamamlamak için birleştirdi.

Teorem 15: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ hemen hemen daraltan olsun. Yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + Ld(y, Tx)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $k \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri var olsun. Bu durumda $F(T) = \{x \in X: Tx = x\} \neq \emptyset$ (Berinde 2004).

Teorem 16: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ hemen hemen daraltan olsun. Yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) + Ld(x, Tx)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $k \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri var olsun. Bu durumda dönüşümün tek bir sabit noktası vardır (Berinde 2004).

Teorem 17: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ ve $L > 0$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2} d(x, Tx) < d(x, y)$$

iken

$$d(Tx, Ty) < \frac{1}{2}[d(Tx, x) + d(Ty, y)] + Lmax\{d(y, Tx), d(x, Ty), d(x, y)\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Karapınar 2012a).

Sonuç 7: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ ve $L > 0$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y)$$

iken

$$\Rightarrow d(Tx, Ty) < \frac{1}{2}[d(Tx, x) + d(Ty, y)] + Lmax\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, y)\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Karapınar 2012a).

Teorem 18: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ ve $L > 0$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y)$$
$$\Rightarrow d(Tx, Ty) < \frac{1}{2}[d(Tx, y) + d(Ty, x)] + Lmax\{d(y, Tx), d(x, Ty), d(x, y)\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Karapınar 2012a).

Teorem 19: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ ve $L > 0$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) < \frac{1}{3}[d(x, y) + d(Tx, x) + d(Ty, y)] + Lmax\{d(y, Tx), d(x, Ty), d(x, y)\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Karapınar 2012a).

Teorem 20 (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y)$$

iken

$$d(Tx, Ty) < \frac{1}{5}[d(x, y) + d(Tx, x) + d(Ty, y) + d(Tx, y) + d(Ty, x)]$$

$$+Lmax\{d(y, Tx), d(x, Ty), d(x, y)\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Karapınar 2012a).

Banach Teoremine göre, eğer X uzayı tam ise, her daraltan dönüşümün tek bir sabit noktası vardır ve bu nokta X in herhangi bir noktasındaki dönüşümün tekrarlı iterasyonunun limiti olarak elde edilebilir. Ancak genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olması gerekmez. X uzayı konveks bir yapıya sahip olduğunda bu tür dönüşümlerin sabit noktası olabilir. Daraltan ve genişlemeyen dönüşümlerle ilgili şartlarının daha genel şartlarla değiştirildiği çok farklı çalışmaları literatürde görebiliriz (Karapınar and Taş 2011; Greguš 1980; Bogin 1976; Ćirić 1993).

1976 yılında Bogin aşağıdaki sonucu kanıtlamıştır.

Teorem 21: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \qquad (3.2)$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $a \geq 0, b > 0, c > 0$ ve $a + 2b + 2c = 1$'dir. Bu durumda T nin tek bir sabit noktası vardır (Bogin 1976).

Bu sonuç 1993 yılında Ćirić ve 1989 yılında Li tarafından genelleştirilmiştir. Greguš, $c = 0$ ile (3.2) ve (3.3) ü sağlayan X üzerinde T dönüşüm sınıfını ele aldı ve aşağıdaki teoremi kanıtladı (Ćirić 1993; Bing-you 1989).

Teorem 22: D, bir X Banach uzayının boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in D$ için

$$\| Tx - Ty \| \leq a \| x - y \| + b(\| x - Tx \| + \| y - Ty \|) \qquad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $a > 0, b > 0$ sabitleri var olsun. Burada $a + 2b = 1$ dir. Bu durumda T nin tek bir sabit noktası vardır (Greguš 1980).

Aşağıdaki sonuç, Bogin'in teoreminin genelleştirmesidir.

Teorem 23: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun.

$$\frac{1}{2} d(x, Tx) \leq d(x, y)$$

iken

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \qquad (3.4)$$

$a \geq 0, b > 0, c > 0$ ve $a + 2b + 2c = 1$ dir. Bu durumda T nin tek bir sabit noktası vardır (Popescu 2011).

Örnek 20: $X = [-1,1]$ kümesi üzerinde alışılmış metrik tanımlansın ve $T: X \to X$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} -x & , x \in [0,3/4) \cup (3/4,1] \\ x/2 & , x \in [-1,0) \\ 0 & , x = 3/4 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

(i) T nin tek bir sabit noktası vardır.

(ii) T dönüşümü $a = 1/2, b = c = 1/8$ için (3.4) şartını sağlar yani,

$$d(x,Tx)/2 \le d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \le M(x,y),$$

dir. Burada $M(x,y) = \frac{1}{2}d(x,y) + \frac{1}{8}[d(x,Tx) + d(y,Ty) + d(x,Ty) + d(y,Tx)]$ dir.

(iii) T dönüşümü Suzuki'nin Teorem 9 daki koşulunu sağlamamaktadır.

(iv) T dönüşümü $a = 1/2, b = c = 1/8$ için Bogin'in (3.2) şartını sağlamaz (Popescu 2011).

Teorem 24: D, bir UCED X Banach uzayın boş olmayan zayıf kapalı konveks alt kümesi ve $T: D \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer,

a) T, D üzerinde (E) şartını sağlar ve

b) $inf\{\| x - Tx \| : x \in D\} = 0$

ise T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Falset *et al.* 2011).

Sonuç 8: X Banach uzayı Opial şartını sağlasın ve D, X in boştan farklı zayıf kapalı bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T: D \to X$ dönüşümü D üzerinde (E) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümünün D de bir sabit noktasının olması için gerek ve yeter şart T dönüşümünün hemen hemen sabit nokta dizisi özelliğine sahip olmasıdır (Falset *et al.* 2011).

Teorem 25: X bir Banach uzayı ve D, X in boştan farklı zayıf kapalı konveks bir alt kümesi olmak üzere eğer $T: D \to D$ dönüşümü

(i) T dönüşümü S üzerinde (C_λ) şartını sağlar,

(ii) $(X, \|.\|)$ Opial şartını sağlar,

(iii) $I - T$ dönüşümü 0_x te güçlü yarı kapalıdır,

şartlarını sağlıyorsa bu durumda $Tz = z$ dir (Falset *et al.* 2011).

Teorem 26: D, bir X Banach uzayın konveks bir alt kümesi olsun. $T: D \to D$ dönüşümü, bazı $\lambda \in (0,1)$ için (E) ve (C_λ) yı sağlayan bir dönüşüm olsun. Aşağıdakilerden herhangi birinin geçerli olduğunu varsayalım,

a) C zayıf kompaktır ve $(X, \|\cdot\|)$ Opial şartını sağlar.

b) C kompaktır.

c) C zayıf kompaktır ve X UCED dir.

Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir (Falset *et al.* 2011).

Teorem 27: X bir düzgün konveks Banach uzay ve D, X in zayıf kapalı konveks bir alt kümesi olmak üzere $T: D \to D$ dönüşümü $(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlasın. Bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir (Patir *et al.* 2018).

Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşümler İçin Yakınsama Teoremleri

Teorem 28: T, D üzerine bir dönüşüm ve D, X Banach uzayının kapalı konveks bir alt kümesi olsun. T dönüşümü (C) şartını sağlasın. D içinde $x_1 \in D$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere $x_{n+1} = \lambda T x_n + (1-\lambda)x_n$ şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Suzuki 2008a).

Teorem 29: T, D üzerine bir dönüşüm ve D, X Banach uzayının zayıf kapalı konveks ve Opial şartını sağlayan bir alt kümesi olsun. T dönüşümü (C) şartını sağlasın D içinde $x_1 \in D$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere $x_{n+1} = \lambda T x_n + (1-\lambda)x_n$ şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Suzuki 2008a).

2016 yılında Thakur, yukarıdaki teoremlerde geçen Krasnoselskij iterasyonlarından farklı olarak aşağıdaki iterasyonu (C) şartını sağlayan dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşmak için ifade etmiştir.

$$\begin{cases} x_1 & \in C, \\ x_{n+1} & = T y_n \\ y_n & = T\big((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z_n\big) \\ z_n & = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{3.5}$$

Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizis $(0,1)$ aralığında reel dizilerdir (Thakur *et al.* 2016a).

Aşağıda bu iterasyon yardımıyla elde edilmiş bazı sonuçlara yer verilecektir.

Lemma 24: D, X Banach uzayın boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve sabit noktalar kümesi boş kümeden farklı olan $T: D \to D$ dönüşümü (C) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $p \in F(T)$ ve (3.5) tarafından tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ vardır (Thakur *et al*. 2016a).

Teorem 30: D, düzgün konveks X Banach uzayın boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun ve $T: D \to D$ dönüşümü (C) şartını sağlasın. Rastgele seçilen $x_1 \in D$ için $\{x_n\}$ dizisi tüm $n \geq 1$ için (3.5) tarafından üretilsin. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri $0 < a \leq b < 1$

şartını sağlayan a, b için $[a, b]$ aralığındaki reel sayı dizileridir. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı ve $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ olmasıdır (Thakur *et al.* 2016a).

Teorem 31: D, Opial özelliğine sahip düzgün konveks bir X Banach uzayın boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun. T ve $\{x_n\}$, Teorem 30 daki gibi tanımlansın ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar (Thakur *et al.* 2016a).

Teorem 32: D, düzgün konveks bir X Banach uzayın boş olmayan kompakt konveks alt kümesi olsun. T ve $\{x_n\}$, Teorem 30 daki gibi tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına güçlü yakınsar (Thakur *et al.* 2016a).

Yukarıdaki kullanılan iterasyon metotlarından daha etkili bir iterasyon metodu tanımlamak için Ullah ve Arsad aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

"M iterasyon Metodu" olarak bilinen bu metot şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ z_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \\ y_n = T z_n \\ x_{n+1} = T y_n \end{cases} \tag{3.6}$$

(Ullah and Arsad 2018).

Ullah ve Arsad, bu metodu kullanarak aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Lemma 25: D, bir X Banach uzayın boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun ve $T: D \to D$ dönüşümü $F(T) \neq \emptyset$ ile Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. Rastgele seçilen $x_0 \in D$ için, $\{x_n\}$ dizisi (3.6) tarafından üretilsin. Bu durumda herhangi bir $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ mevcuttur (Ullah and Arsad 2018).

Teorem 33: D, bir X düzgün konveks Banach uzayın boş olmayan kapalı bir konveks ve Opial özelliğini sağlayan alt kümesi ve $T: D \to D$ dönüşümü $F(T) \neq \emptyset$ ile birlikte Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. Rastgele seçilen $x_0 \in D$ için, $\{x_n\}$ dizisi tüm $n \geq 1$ için (3.6) tarafından üretilsin ve $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri $0 < a \leq b < 1$ olacak şekilde a, b için $[a, b]$ aralığında reel sayı dizileri olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Ullah and Arsad 2018).

Teorem 34: D, bir X düzgün konveks Banach uzayın boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ dönüşümü Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. Rastgele seçilen $x_0 \in D$ için, $\{x_n\}$ dizisi tüm $n \geq 1$ için (3.6) tarafından üretilsin. Burada

$\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri $0 < a \leq b < 1$ olmak üzere a, b için $[a, b]$ aralığında reel sayı dizileridir. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Ullah and Arsad 2018).

Son zamanlarda, Sahu ve arkadaşları ile Thakur ve arkadaşları düzgün konveks Banach uzayında genişlemeyen dönüşümler için aşağıdaki aynı iterasyon şemasını tanıttı:

$$\begin{cases} x = x_1 \in C, \\ x_{n+1} = (1 - a_n)Tz_n + a_nTy_n, \\ y_n = (1 - b_n)z_n + b_nTz_n, \\ z_n = (1 - c_n)x_n + c_nTx_n, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Burada $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri $(0,1)$ aralığındadır. Yazarlar, bu iterasyonun diğer tüm iterasyonlardan daha hızlı şekilde daraltan dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığını kanıtladılar (Sahu *et al.* 2016; Thakur *et al.* 2016b).

Lemma 26: D, düzgün konveks bir X Banach uzayın boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: D \to D$, $F(T) \neq \emptyset$ ile Suzuki'nin genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (3.7) iterasyonuyla tanımlansın. Bu durumda tüm $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ vardır (Ali *et al.* 2019).

Lemma 27: D, düzgün konveks bir X Banach uzayın boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: D \to D$, Suzuki'nin genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (3.7) iterasyonu ile tanımlanan bir dizi olsun. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı ve $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ olmasıdır (Ali *et al.* 2019).

Teorem 35: D, düzgün konveks X Banach uzayın boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: D \to D$ Suzuki'nin genelleştirilmiş genişlemeyen bir dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ dizisi (3.7) iterasyonu ile tanımlanan bir dizi olsun. Ayrıca X in Opial şartını sağladığını varsayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar. (Ali *et al.* 2019)

Teorem 36: D, düzgün konveks bir X Banach uzayın boş olmayan, kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun. T dönüşümü ve $\{x_n\}$ dizisi Lemma 27 deki gibi tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Ali *et al.* 2019).

1974 yılında Senter ve Dotson aşağıdaki gibi tanımlanan (I) koşulunu sağlayan dönüşüm kavramını tanıtmıştır.

Tanım 39: Eğer her $r > 0$, her $x \in D$, $h(0) = 0$ ve $h(r) > 0$ olmak üzere, $d(x, Tx) \geq h(d(x, F(T)))$ şartını sağlayacak şekilde $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ azalmayan bir h fonksiyonu varsa T dönüşümü D üzerinde (I) şartını sağlıyor denir. Burada $d(x, F(T)) = \inf\{d(x, p): p \in F(T)\}$ dir (Senter and Dotson 1974).

Aşağıda (I) koşulu kullanılarak güçlü yakınsama sonucu ispatlanmıştır.

Teorem 37: D, düzgün konveks bir X Banach uzayın boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: D \to D$, (I) koşulunu sağlayan genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olsun. Buradan (3.7) iterasyonu ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Ali *et al.* 2019).

Teorem 38: T, bir X Banach uzayının D kompakt konveks alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun ve (SKC) koşulunu sağlasın. D içinde bir $\{x_n\}$ dizisi $x_1 \in D$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = \lambda T x_n + (1-\lambda)x_n$ olarak tanımlansın. Burada λ sabiti, $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığındadır. $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Karapınar and Taş 2011).

Sonuç 9: T, X Banach uzayının kompakt konveks bir D alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. D içinde bir $\{x_n\}$ dizisi $x_1 \in D$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = \lambda T x_n + (1-\lambda)x_n$ olarak tanımlansın. $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ olduğunu varsayalım. Eğer T aşağıdakilerden birini sağlıyorsa:

(1) (A3) şartı,

(2) (KSC) şartı,

(3) (CSC) şartı,

bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Karapınar and Taş 2011).

Sonuç 10: T, Opial özelliğine sahip bir X Banach uzayının D alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun ve aşağıdakilerden birini sağlasın:

(1) (A3) şartı,

(2) (KSC) şartı,

(3) (CSC) şartı.

Eğer $\{x_n\}$ dizisi z ye zayıf yakınsıyorsa ve $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ ise bu durumda $Tz = z$ olur. Yani $I - T$ sıfırda yarı kapalıdır (Karapınar and Taş 2011).

Teorem 39: T, Opial özelliğine sahip ve (SKC) şartını sağlayan bir X Banach uzayının zayıf kompakt konveks bir D alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. D içinde bir $\{x_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere $x_{n+1} = \lambda T x_n + (1-\lambda)x_n$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Karapınar and Taş 2011).

Sonuç 11: T, X Banach uzayının kompakt konveks alt kümesi olan D üzerinde bir dönüşüm olsun. D içinde bir $\{x_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere $x_{n+1} = \lambda T x_n +$

$(1-\lambda)x_n$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$ olduğunu varsayalım. Eğer T dönüşümü aşağıdakilerden birini sağlıyorsa:

1 $(RCSC)$ şartı,

2 (HRSC) şartı,

bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Karapınar 2012b).

Teorem 40: T, Opial özelliğine sahip ve (RSC) şartını sağlayan X Banach uzayının zayıf kompakt konveks D alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. D içinde bir $\{x_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere $x_{n+1} = \lambda Tx_n + (1-\lambda)x_n$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar (Karapınar 2012b).

Sonuç 12: T, Opial özelliğine sahip X Banach uzayının zayıf kompakt konveks bir D alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun ve aşağıdakilerden birini sağlasın,

1 (RSSC) şartı,

2 (HRSC) şartı.

D içinde bir $\{x_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere $x_{n+1} = \lambda Tx_n + (1-\lambda)x_n$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Karapınar 2012b).

Teorem 41: T, bir X Banach uzayın lokal zayıf kompakt konveks alt kümesi olan D üzerinde bir dönüşüm olsun. X in Opial koşulunu sağladığını, T nin bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) şartını sağladığını ve T nin bir sabit noktası olduğunu varsayalım. D de bir $\{x_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{N}$ ve $x_1 \in D$ için

$$x_{n+1} = \mu Tx_n + (1-\mu)x_n$$

şeklinde tanımlansın. Burada μ, $[\lambda, 1)$ aralığındadır. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar (Falset *et al*. 2011).

Teorem 42: D, düzgün konveks X Banach uzayın boş olmayan kapalı konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ genelleştirilmiş α-genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $\{x_n\}$ dizisi,

$$\begin{cases} x_1 \in K \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)T(x_n) + \beta_n T(y_n) \\ y_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T(x_n),\ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı ve $\lim_{n\to\infty}\|T(x_n) - x_n\| = 0$ olmasıdır (Pant and Shukla 2017).

Teorem 43: X düzgün konveks Banach uzayı ve K, T ve $\{x_n\}$ yukarıdaki teoremde ki gibi tanımlansın. Aşağıdaki koşullardan herhangi birinin geçerli olduğunu varsayalım:

(a) X, Opial'ın özelliğini sağlar;

(b) X in bir Fréchet diferansiyel normu vardır ve $I - T$ sıfırda yarı kapalıdır.

Eğer $F(T) \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Pant and Shukla 2017).

Teorem 44: D bir X Banach uzayının boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ dönüşümü $F(T) \neq \emptyset$ ile genelleştirilmiş α-genişlemeyen olsun. Ayrıca $\{x_n\}$ dizisi (3.8) deki gibi tanımlansın. Eğer $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına güçlü bir şekilde yakınsar (Pant and Shukla 2017).

Teorem 45: D, Opial özelliğine sahip X Banach uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun. T, D üzerinde $(B_{\gamma,\mu})$ koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi

(i) $\{x_n\}$, z ye zayıf yakınsar.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$,

şartlarını sağlıyorsa bu durumda $Tz = z$ olur (Mishra *et al.* 2018).

Örnek 21: l^p lineer uzayının bir D alt kümesi aşağıdaki gibi verilsin

$$D = \left\{\{x_n\} \in l^p : |x_1| \leq \frac{1}{2}, x_j = 0\ \forall j \neq 1\right\}.$$

$\{a_n\}$ dizisi ise

$$a_1 = \left\{\frac{1}{2}, 0,0,0 \dots\right\},\ a_2 = \left\{\frac{2}{3}, 0,0, \dots\right\}\ \cdots\ a_{n+1} = \left\{\frac{n}{n+1}, 0,0 \dots\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\{a_n\}$ dizisi $z = \{1,0,0 \dots\}$ ye yakınsar. $T: D \longrightarrow D$ dönüşümü $T(\{a_n\}) = T(\{x_1, 0,0 \dots\}) = \{x_1^2, 0,0 \dots\}$ ile tanımlansın.

$X_1 = \{x_1, 0,0 \dots\}, Y_1 = \{y_1, 0,0 \dots\} \in D$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned}\|TX_1 - TY_1\|_p &= \|\{x_1^2 - y_1^2, 0,0, \dots\}\|_p \\ &= |x_1^2 - y_1^2| \\ &\leq (|x_1| + |y_1|)|x_1 - y_1| \\ &\leq |x_1 - y_1| = \|X_1 - Y_1\|_p\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, T genişlemeyendir ve dolayısıyla $(B_{\gamma,\mu})$ koşulunu sağlar.

Tekrar,

$$\lim_{n\to\infty}\|TX_n - X_n\|_p = \lim_{n\to\infty}\left\|\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right), 0,0 \ldots \ldots\right\}\right\|_p$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)\right|$$
$$= 0$$

yazılır. Böylece, Teorem 45 in tüm koşulları sağlanmış olur. Dolayısıyla, $Tz = z$ dir ($z = \{1,0,0\ldots\}$, T nin bir sabit noktasıdır.) (Mishra *et al*. 2018).

Teorem 46: D, Opial özelliğine sahip X Banach uzayın zayıf kompakt konveks bir alt kümesi ve T, D üzerinde $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ şartını sağlayan bir dönüşüm olsun ve aşağıdaki gibi tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi olsun

$$x_{n+1} = \lambda T x_n + (1-\lambda)x_n.$$

Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar (Mishra *et al.* 2018).

2018 yılında Mishra, aşağıdaki Mann iterasyon şemasının yakınsaması ile ilgili bazı sonuçlar vermiştir.

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ y_n = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n)x_n, \\ x_{n+1} = \beta_n T y_n + (1-\beta_n)y_n. \end{cases} \tag{3.9}$$

Lemma 28: D, bir X Banach uzayın boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi ve T, D üzerinde $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $\{x_n\}$ dizisi yukarıdaki (3.9) tarafından tanımlansın. Bu durumda $z \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - z\|$ mevcuttur (Mishra *et al.* 2018).

Teorem 47: D, bir X Banach uzayın boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi ve T, D üzerinde $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. $\{x_n\}$ dizisi yukarıdaki (3.9) tarafından tanımlansın. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı ve $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$ olmasıdır (Mishra *et al.* 2018).

Aynı yazarlar tarafından daha sonra aşağıdaki genişletilmiş Picard-Mann hibrit iterasyon şeması ele alınmıştır:

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ y_n = (1-b_n)x_n + b_n T x_n, \\ z_n = (1-a_n)x_n + a_n T y_n, \\ x_{n+1} = T z_n. \end{cases} \tag{3.10}$$

Lemma 29: T, X Banach uzayının boş olmayan kapalı ve konveks bir D alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. $x_0 \in D$, $0 < a_n, b_n < 1$ olmak üzere (3.10) iterasyon şeması ile D de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Bu durumda her $z \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|$ limiti vardır (Mishra *et al.* 2018).

Teorem 48: T, düzgün konveks X Banach uzayın boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi D üzerinde bir dönüşüm olsun. T, D üzerinde $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ şartını sağlasın. $0 < a_n, b_n < 1$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = k(\neq 0)$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi D de (3.10) iterasyon şeması ile tanımlansın. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı ve $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ olmasıdır (Mishra *et al.* 2018).

Geçtiğimiz yıllarda Hussain ve arkadaşları K iterasyon metodu olarak adlandırılan aşağıdaki yeni iterasyon metodunu tanımlamışlardır:

$$\begin{cases} x_1 \in D \\ y_n = (1-b_n)x_n + b_n T x_n, \\ z_n = T\big((1-a_n)Tx_n + a_n T y_n\big), \\ x_{n+1} = T z_n, n \geq 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Burada $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri (0,1) aralığındadır (Hussein *et al.* 2018).

Bu yazarlar yukarıdaki iterasyon metodunu kullanarak Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfı için bazı zayıf ve güçlü yakınsama sonuçlarını kanıtlamışlardır. Ayrıca, K iterasyon metodunun üç adımlı Picard$-S$ ve iki adımlı S iterasyon sürecinden daha iyi olduğunu nümerik örneklerle göstermişlerdir (Ullah *et al.* 2020).

Teorem 49: D, Opial özelliğine sahip bir düzgün konveks Banach uzayı X in boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve $T: D \to D$, $F(T) \neq \emptyset$ ile $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda (3.11) tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ nin bir elemanına zayıf yakınsar (Ullah *et al.* 2020).

Teorem 50: D, düzgün konveks Banach uzayı X in boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer $F(T) \neq \emptyset$ ve $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ ise (3.11) tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına güçlü yakınsar (Ullah *et al.* 2020).

Teorem 51: D, düzgün konveks Banach uzayı X in boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve $T: D \to D$ $F(T) \neq \emptyset$ ile $\left(B_{\gamma,\mu}\right)$ şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\{x_n\}$

dizisi (3.11) tarafından tanımlansın. Eğer T dönüşümü (I) koşulunu sağlıyorsa, $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına güçlü yakınsar (Ullah *et al*. 2020).

ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, ilk olarak (C) şartını sağlayan yeni bir genişlemeyen dönüşüm sınıfı tanımlayacağız ve bu sınıfın bazı özelliklerini vereceğiz. Bu sınıf (C) şartını sağlayan dönüşümlerden daha geneldir ve $(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan dönüşüm sınıfından bağımsızdır. İkinci olarak, yeni bir iterasyon algoritması tanımlayacağız ve düzgün konveks Banach uzaylarında bu dönüşüm sınıfı için bazı zayıf ve güçlü yakınsama sonuçlarını ispatlayacağız. Son olarak, tanımladığımız dönüşüm sınıfı için örnekler vererek ele aldığımız iterasyon metotları ile literatürdeki diğer iterasyon metotlarının karşılaştırmasını bu örnekler üzerinde göstereceğiz. Burada elde ettiğimiz sonuçlar bir makale haline getirilerek uygun bir dergiye gönderilmiştir.

Tezin farklı kısımlarında değindiğimiz literatür çalışmalarından hareketle şimdi aşağıdaki temel sonuçlarımızı ifade edeceğiz. Bunun için ilk olarak aşağıdaki dönüşüm sınıfını oluşturacağız.

Tanım 40 : D kümesi, X Banach uzayın boş olmayan bir alt kümesi ve $\gamma \in (0,1]$ ve $\mu \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ için $2\mu \leq \gamma$ olsun. $T: D \longrightarrow X$ dönüşümü D deki tüm x, y için,

$$\gamma \parallel x - Tx \parallel \leq \parallel x - y \parallel + \mu \parallel y - Ty \parallel$$

iken

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq (1-\gamma) \parallel x - y \parallel + \mu(\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel)$$

ise bu dönüşüm D üzerinde Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlıyor denir. Notasyonları biraz daha basitleştirmek için Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını bundan sonra kısaca (SB) şartı şeklinde ifade edeceğiz.

Bu sınıf $\gamma = \mu = 0$ için genişlemeyen dönüşüm sınıfını içerir. Ayrıca, eğer bir dönüşüm (C) şartını sağlıyorsa, o zaman $\gamma = \mu = 0$ için (SB) şartını sağlayacaktır. (C) şartı için

$$\frac{1}{2} \parallel x - Tx \parallel \leq \parallel x - y \parallel \Rightarrow \parallel Tx - Ty \parallel \leq \parallel x - y \parallel$$

olur ve buradan $\gamma = \mu = 0$ için

$$\parallel Tx - Ty \parallel \leq (1-\gamma) \parallel x - y \parallel + \mu(\parallel x - Tx \parallel + \parallel y - Ty \parallel)$$

olduğu açıktır.

Aşağıdaki örnekte bunun tersinin doğru olmadığını göstereceğiz.

Örnek 22: $T: [3,6] \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü

$$T(x)=\begin{cases}5 & ,x\neq 6\\ 4 & ,x=6\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Dönüşümün tanım kümesinden $x=5.1$ ve $y=6$ elemanlarını alalım. Bu durumda,

$$\frac{1}{2}|Tx-x|=0.05<0.9=|x-y|$$

olur.

Diğer yandan $|Tx-Ty|=1\nless 0.9=|x-y|$ dir. Bu nedenle, T dönüşümü (C) şartını sağlamaz.

Bir diğer durumu göz önüne alalım. Yani $x\neq 6$ ve $y\neq 6$ olsun. T dönüşümünün $\gamma=1$ ve $\mu=\frac{1}{2}$ için (SB) şartını sağladığı açıktır.

Şimdi ise $x\neq 6, y=6$ olduğu varsayalım. Buradan,

$$|Tx-Ty|=1$$

ve

$$\begin{aligned}&(1-\gamma)|x-y|+\mu(|x-Tx|+|y-Ty|\\&=\frac{1}{2}(|x-5|+2)\quad\left(\gamma=1,\mu=\frac{1}{2}\text{ için}\right)\\&>1=|Tx-Ty|\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $x=6$ ve $y\neq 6$ alınırsa,

$$\begin{aligned}|Tx-Ty|=1&<(1-\gamma)|x-y|+\mu(|x-Tx|+|y-Ty|\\&=\tfrac{1}{2}(2+|y-5|)\ \left(\gamma=1,\mu=\tfrac{1}{2}\text{ için}\right)\end{aligned}$$

yazılır.

Son olarak $x=2$ ve $y=2$ alınırsa, T dönüşümü $\gamma=1$ ve $\mu=\frac{1}{2}$ için (SB) şartını sağlar.

Aşağıdaki lemmada (SB) şartını sağlayan bir T dönüşümünün aynı zamanda quasi-genişlemeyen bir dönüşüm olduğu gösterilmiştir.

Lemma 30 : D kümesi, X Banach uzayınn boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $T: D \longrightarrow X$ dönüşümü (SB) şartını sağlasın. Eğer z noktası T dönüşümünün D deki bir sabit noktası ise, o zaman tüm $x \in D$ için,

$$\| Tx - Tz \| \leq \| x - z \|$$

dir.

İspat: T dönüşümü (SB) şartını sağladığı için

$$\gamma \| z - Tz \| = 0 \leq \| z - x \| + \mu \| x - Tx \|$$

olur. Yine aynı şart kullanılarak

$$\begin{aligned} \| Tx - Tz \| &\leq (1-\gamma) \| z - x \| + \mu(\| x - Tx \| + \| z - Tz \|) \\ &= (1-\gamma) \| z - x \| + \mu \| x - Tx \| \\ &\leq (1-\gamma) \| z - x \| + \mu(\| x - z \| + \| z - Tx \|) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \| Tx - Tz \| &\leq \left(\frac{1-\gamma+\mu}{1-\mu}\right) \| x - z \| \\ &\leq \| x - z \| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece T dönüşümünün quasi genişlemeyen olduğu görülür.

Aşağıda (SB) şartını sağlayan dönüşümlerin bazı temel özellikleri verilmiştir.

Önerme 19: D kümesi, X Banach uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T: D \longrightarrow D$ dönüşümü D üzerinde (SB) şartını sağlasın. Her $x, y \in D$ ve $c \in (0,1]$ için,

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \| x - Tx \|$ dir.

(ii) Aşağıdaki (a) ve (b) maddelerinden en az biri sağlanır.

(a) $\frac{c}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \|$,

(b) $\frac{c}{2} \|Tx - T^2x\| \leq \| Tx - y \|$.

Eğer yukarıdaki (a) şartı sağlanırsa

$$\| Tx - Ty \| \leq \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| x - y \| + \mu(\| x - Tx \| + \| y - Ty \|),$$

(b) şartı sağlanırsa

$$\|T^2x - Ty\| \leq \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| Tx - y \| + \mu(\| T^2x - Ty \| + \|y - Ty\|),$$

eşitsizlikleri geçerli olur.

$$\text{(iii)} \parallel x - Ty \parallel \leq (3-c) \parallel x - Tx \parallel + \left(1 - \frac{c}{2}\right) \parallel x - y \parallel + \mu(2 \parallel x - Tx \parallel$$

$$+ \parallel x - Ty \parallel + \parallel y - Tx \parallel + 2\|Tx - T^2x\|)$$

dir.

İspat: (i) Her $x \in D$ için,

$$\gamma \parallel x - Tx \parallel \leq \parallel x - Tx \parallel + \mu\|Tx - T^2x\|$$

dir. Buradan (SB) şartında y yerine Tx yazıldığında,

$$\begin{aligned} \|Tx - T^2x\| &\leq (1-\gamma) \parallel x - Tx \parallel + \mu(\|x - Tx\| + \|Tx - T^2x\|) \\ &\leq (1 - \gamma + \mu) \parallel x - Tx \parallel + \mu\|Tx - T^2x\| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned} \|Tx - T^2x\| &\leq \frac{1 - \gamma + \mu}{1 - \mu} \parallel x - Tx \parallel \\ &\leq \parallel x - Tx \parallel \end{aligned}$$

olmasını gerektirir.

(ii) Bu eşitsizliklerin tersinin doğru olduğunu kabul edelim Yani her $x, y \in D$ için

$$\frac{c}{2} \parallel x - Tx \parallel > \parallel x - y \parallel \text{ ve } \frac{c}{2}\|Tx - T^2x\| > \parallel Tx - y \parallel$$

olduğunu varsayalım. Buradan,

$$\begin{aligned} \parallel x - Tx \parallel &\leq \parallel x - y \parallel + \parallel y - Tx \parallel \\ &< \frac{c}{2} \parallel x - Tx \parallel + \frac{c}{2}\|Tx - T^2x\| \\ &\leq \frac{c}{2} \parallel x - Tx \parallel + \frac{c}{2} \parallel x - Tx \parallel \\ &\leq \parallel x - Tx \parallel \end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\parallel x - Tx \parallel < \parallel x - Tx \parallel,$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde (ii) deki (a) ve (b) eşitsizliklerinden en az biri doğrudur.

(iii) Üçgen eşitsizliğinden

$$\parallel x - Ty \parallel \leq \parallel x - Tx \parallel + \parallel Tx - Ty \parallel$$

yazılır. Eğer (ii) deki (a) geçerli ise,

$$\| x - Ty \| \leq \| x - Tx \| + \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| x - y \| + \mu(\| x - Tx \| + \| y - Ty \|)$$

$$\leq (3 - c) \| x - Tx \| + \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| x - y \|$$

$$+\mu(2 \| x - Tx \| + \| x - Ty \| + \| y - Tx \| + 2\|Tx - T^2x\|)$$

olur.

Eğer (ii) deki (b) geçerli ise,

$$\| x - Ty \| \leq \| x - Tx \| + \|Tx - T^2x\| + \|T^2x - Ty\|$$

$$\leq \| x - Tx \| + \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| Tx - x \| + \mu(\| x - Tx \| + \|Tx - T^2x\|)$$

$$+ \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| Tx - y \| + \mu(\|Tx - T^2x\| + \|y - Ty\|)$$

$$= (3 - c) \| x - Tx \| + \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| x - y \|$$

$$+\mu(\|x - Tx\| + 2\|Tx - T^2x\| + \|y - Tx\| + \|Tx - x\| + \| x - Ty \|)$$

$$= (3 - c) \| x - Tx \| + \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| x - y \|$$

$$+\mu(2 \| x - Tx \| + \| x - Ty \| + \| y - Tx \| + 2\|Tx - T^2x\|)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıda verdiğimiz (SB) şartını sağlayan dönüşüm tanımından hareketle şimdi aşağıdaki ikinci tanımı ifade edeceğiz.

Tanım 41: D kümesi, X Banach uzayın boş olmayan bir alt kümesi ve $\gamma \in (0,1]$ ve $\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $2\mu \leq \gamma$ olsun. Eğer $T: D \longrightarrow X$ dönüşümü D deki her x, y için,

$$\gamma \| x - Tx \| \leq \| x - y \| + \mu \| y - Ty \|$$

iken

$$\| Tx - Ty \| \leq max\{P_\gamma(x, y), Q_\gamma(x, y)\},$$

gerektirmesini sağlıyorsa T dönüşümü D üzerinde genelleştirilmiş Suziki-($B_{\gamma,\mu}$) şartını sağlıyor denir. Burada

$$P_\gamma(x, y) = (1 - \gamma) \| x - y \| + \mu(\| x - Tx \| + \| y - Ty \|)$$

ve

$$Q_\gamma(x, y) = (1 - \gamma) \| x - y \| + \mu(\| x - Ty \| + \| y - Tx \|)$$

dir.

Önerme 20: D kümesi X Banach uzayın boş olmayan bir alt kümesi ve $T: D \longrightarrow D$ dönüşümü D üzerinde genelleştirilmiş (SB) şartını sağlasın. Böylece her $x, y \in D$ ve $c \in (0,1]$ için,

(i) $\|Tx - T^2x\| \leq \| x - Tx \|$ dir.

(ii) Aşağıdaki eşitsizliklerden en az biri sağlanır:

(a) $\frac{c}{2} \| x - Tx \| \leq \| x - y \|$,

(b) $\frac{c}{2} \|Tx - T^2x\| \leq \| Tx - y \|$.

Eğer yukarıdaki (a) şartı sağlanırsa

$$\| Tx - Ty \| \leq max\left\{P_{\frac{c}{2}}(x,y), Q_{\frac{c}{2}}(x,y)\right\}$$

ve eğer (b) şartı sağlanırsa

$$\|T^2x - Ty\| \leq max\left\{P_{\frac{c}{2}}(Tx,y), Q_{\frac{c}{2}}(Tx,y)\right\}$$

dir.

(iii) $\| x - Ty \| \leq (3 - c) \| x - Tx \| + \left(1 - \frac{c}{2}\right) \| x - y \| + \mu(2 \| x - Tx \|$

$$+\| x - Ty \| + \| y - Tx \| + 2\|Tx - T^2x\|).$$

İspat: Bu ispat, Lemma 31 in ispatından benzer şekilde elde edilir.

Yakınsama Analizi

Aşağıda, bu bölümde kullanılacak bazı iterasyon metotları, tanımlar ve ilgili lemmalar yer almaktadır.

T, X normlu uzayının boş olmayan konveks bir D alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x_1 \in D$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq (0,1]$ için,

• Ali ve Ali (Ali and Ali 2020)

$$\begin{cases} z_n = T\big((1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n\big) \\ y_n = Tz_n \\ x_{n+1} = Ty_n \end{cases} \tag{4.1}$$

• Ahmad *et al.* (Ahmad *et al.* 2021)

$$\begin{cases} z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \\ y_n = (1-\alpha_n)T z_n + \alpha_n T^2 z_n \\ x_{n+1} = T y_n \end{cases} \tag{4.2}$$

• Abdeljawad *et al.* (Abdeljawad *et al.* 2020)

$$\begin{cases} z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \\ y_n = T z_n, \\ x_{n+1} = T\big((1-\alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n\big), \end{cases} \tag{4.3}$$

• Shukla *et al.* (Shukla *et al.* 2022)

$$\begin{cases} y_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \\ x_{n+1} = T^k y_n \end{cases} \tag{4.4}$$

burada k sabit bir doğal sayıdır.

Tanım 42: X bir Banach uzayı ve D kümesi X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Ayrıca $\{x_n\}$ dizisinin X de sınırlı bir dizi olduğunu kabul edelim. Her $x \in X$ için,

(i) $r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \|x - x_n\|$ ifadesine $\{x_n\}$ dizisinin x te asimptotik yarıçapı,

(ii) $r(D,\{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}) : x \in D\}$ ye $\{x_n\}$ dizisinin D ye göre asimptotik yarıçapı,

(iii) $A(D,\{x_n\}) = \{x \in C : r(x, \{x_n\}) = r(D, \{x_n\})\}$ ye ise $\{x_n\}$ dizisinin D ye göre asimptotik merkezi denir.

Eğer X uzayı düzgün konveks ise $A(D, \{x_n\})$ kümesi tek noktadan oluşur. Ayrıca $A(D, \{x_n\})$, D kümesinin konveks ve zayıf kompakt olması şartıyla boş olmayan konveks bir kümedir (Takahashi, 2000 ; Agarwal *et al.* 2009).

Lemma 31: X düzgün konveks bir Banach uzayı ve $\{\alpha_n\}$ tüm $n \geq 1$ için $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir dizi olsun. Ayrıca X deki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri ise aşağıdaki koşulları sağlasın: bazı $d \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq d$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq d$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty}\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n y_n\|=d.$$

Bu taktirde $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$ olur (Schu 1991).

Yukarıdaki ve literatürdeki iterasyon metotları dikkate alınarak, bu bölümde yeni bir iterasyon metodu tanımlayacağız ve düzgün konveks Banach uzaylarda (SB) şartını sağlayan dönüşümler için bazı zayıf ve güçlü yakınsama sonuçlarını ispatlayacağız. Ayrıca (SB) şartını sağlayan bir dönüşüm için, ifade ettiğimiz iterasyon metodu ile diğer iterasyon metotlarının farklı başlangıç değerleri ve farklı dizi seçimlerine bağlı olarak karşılaştırılması sunulacaktır.

İterasyon metodumuz aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} z_n=T^k\big((1-\beta_n)x_n+\beta_n T(x_n)\big) \\ y_n=T^k\Big((1-\alpha_n)T^{k-1}(z_n)+\alpha_n T^k(z_n)\Big) \\ x_{n+1}=T^k y_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığındadır ve k sabit bir doğal sayıdır.

Lemma 32: D kümesi, X Banach uzayın boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun ve T dönüşümü D kümesi üzerinde $F(T)\neq\emptyset$ ile (SB) şartını sağlasın. Eğer $\{x_n\}$ dizisi (4.5) ile tanımlanırsa, bu durumda her $q\in F(T)$ için $lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|$ limiti vardır.

İspat: q nun T nin bir sabit noktası olduğunu varsayalım. (4.5) ve Lemma 30 dan

$$\begin{aligned} \|z_n-q\| &= \|T^k[(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n]-q\| \\ &= \|T^k[(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n]-T^k q\| \\ &\leq \|(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n-q\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n-q\|+\beta_n\|Tx_n-q\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n-q\|+\beta_n\|x_n-q\|\leq\|x_n-q\|, \end{aligned} \tag{4.6}$$

ve

$$\begin{aligned} \|y_n-q\| &= \|T^k[(1-\alpha_n)T^{k-1}z_n+\alpha_n T^k z_n]-q\| \\ &= \|T^k[(1-\alpha_n)T^{k-1}z_n+\alpha_n T^k z_n]-T^k q\| \\ &\leq \|(1-\alpha_n)T^{k-1}z_n+\alpha_n T^k z_n-q\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|z_n-q\|+\alpha_n\|T^k z_n-q\| \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|z_n - q\| + \alpha_n\|z_n - q\| \leq \|z_n - q\|$$

elde edilir. Tekrar (4.5) ve Lemma 30 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &= \|T^k y_n - q\| \\ &= \|T^k y_n - T^k q\| \\ &\leq \|y_n - q\| \end{aligned} \tag{4.8}$$

yazılır. Eğer (4.6), (4.7) ve (4.8) i birleştirirsek

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| \leq \|y_n - q\| &\leq \|z_n - q\| \\ &\leq \|x_n - q\| \end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. Bu nedenle, $\{\|x_n - q\|\}$ alttan sınırlı ve artmayan bir dizidir. Dolayısıyla her $q \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ limiti vardır.

Teorem 52: D kümesi, düzgün konveks X Banach uzayının boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun. Ayrıca T dönüşümünün D kümesi üzerinde $F(T) \neq \emptyset$ ile (SB) şartını sağladığını varsayalım ve $\{x_n\}$ dizisi (4.5) deki gibi tanımlansın. T nin sabit noktalar kümesinin boş kümeden farklı olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı ve $lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$ olmasıdır.

İspat: $F(T) \neq \emptyset$ ve $q \in F(T)$ olsun. Lemma 32 den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ var olduğunu ve $\{x_n\}$ dizisnin alttan sınırlı olduğunu biliyoruz. Varsayalım ki,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\| = l \tag{4.10}$$

olsun. (4.6) ve (4.10) dan,

$$\limsup_{n\to\infty}\|z_n - q\| \leq \limsup_{n\to\infty}\|x_n - q\| = l \tag{4.11}$$

elde edilir. Lemma 30 ve (4.11) kullanılırsa,

$$\limsup_{n\to\infty}\|Tx_n - q\| \leq \limsup_{n\to\infty}\|x_n - q\| = l \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.5) den,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &= \|T^k y_n - q\| \\ &\leq \|y_n - q\| \\ &= \|T^k[(1-\alpha_n)T^{k-1}z_n + \alpha_n T^k z_n] - q\| \\ &\leq \|(1-\alpha_n)T^{k-1}z_n + \alpha_n T^k z_n - q\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|z_n - q\| + \alpha_n\|z_n - q\| \\ &\leq \|z_n - q\| \end{aligned} \tag{4.13}$$

olur. Bu nedenle,

$$l \leq \limsup_{n\to\infty} \|z_n - q\| \tag{4.14}$$

dur. (4.11) ve (4.14) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n\to\infty} \|z_n - q\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|T^k[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n] - q\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n - q\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(1-\beta_n)(x_n - q) + \beta_n(T x_n - q)\| \\ &= \lim_{n\to\infty} [(1-\beta_n)\|x_n - q\| + \beta_n \|T x_n - q\|] \\ &\leq \lim_{n\to\infty} [(1-\beta_n)\|x_n - q\| + \beta_n \|x_n - q\|] \\ &= l \end{aligned}$$

yazılır. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \|(1-\beta_n)(x_n - q) + \beta_n(T x_n - q)\| = l \tag{4.15}$$

olur. (4.11), (4.12), (4.15) ve Lemma 31 den,

$$\lim_{n\to\infty} \|T x_n - x_n\| = 0 \tag{4.16}$$

elde edilir. Aksine $q \in A(D, \{x_n\})$ olduğunu kabul edelim. Önerme 19 (i) ve (iii) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tq\| &\leq \limsup_{n\to\infty} \Big[(3-c) \| x_n - T x_n \| + \left(1 - \tfrac{c}{2}\right) \| x_n - q \| \\ &\quad + \mu(2 \| x_n - T x_n \| + \| x_n - Tq \| + \| q - T x_n \| \\ &\quad + 2\|T x_n - T^2 x_n\|)] \\ &\leq (3-c)\limsup_{n\to\infty} \| x_n - T x_n \| + \left(1 - \tfrac{c}{2}\right) \limsup_{n\to\infty} \| x_n - q \| \\ &\quad + \mu(2\limsup_{n\to\infty} \| x_n - T x_n \| + \limsup_{n\to\infty} \| x_n - Tq \| \\ &\quad + \limsup_{n\to\infty}(\| q - x_n \| + \|x_n - T x_n\|) + 2\limsup_{n\to\infty}\|x_n - T x_n\| \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Bu ise

$$(1-\mu)\limsup_{n\to\infty}\|x_n - Tq\| \leq \left(1-\frac{c}{2}+\mu\right)\limsup_{n\to\infty} \| x_n - q \|$$

anlamına gelir. Bu durumda,

$$2\mu \leq \gamma = \tfrac{c}{2} \text{ için } \frac{1-\frac{c}{2}+\mu}{1-\mu} \leq 1$$

den

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - Tq\| \leq \left(\frac{1-\frac{c}{2}+\mu}{1-\mu}\right)\limsup_{n\to\infty} \| x_n - q \|$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \| x_n - q \|,$$

olur yani, $r(Tq,\{x_n\}) \leq r(q,\{x_n\})$ dir. Bu nedenle $Tq \in A(D,\{x_n\})$ dir. D düzgün konveks Banach uzay olduğundan $Tq = q$ olur.

Teorem 53: D kümesi, Opial özelliğine sahip X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve T dönüşümü, D kümesi üzerinde (SB) şartını sağlayan kendi üzerine dönüşüm olsun. Eğer X içindeki $\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa

(i) $\{x_n\}$ dizisi q ya zayıf yakınsar,

(ii) $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0,$

bu durumda $Tq = q$ dur.

İspat*:* Önerme 20 (ii) de $\gamma = \frac{c}{2}, c \in (0,1]$ için

$$\gamma\|x_n - Tx_n\| \leq \|x_n - q\| \leq \|x_n - q\| + \mu \| q - Tq \|$$

olur. Dolayısıyla, (SB) şartından,

$$\|Tx_n - Tq\| \leq (1-\gamma)\|x_n - q\| + \mu(\|x_n - Tx_n\| + \|q - Tq\|)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|x_n - Tq\| &\leq \|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tq\| \\
&\leq \|x_n - Tx_n\| + (1-\gamma)\|x_n - q\| \\
&+\mu(\|x_n - Tx_n\| + \|q - Tq\|) \\
&\leq (1-\gamma)\|x_n - q\| + \mu\|x_n - Tx_n\| \\
&+\mu(\|q - x_n\| + \|x_n - Tq\|)
\end{aligned}$$

olur ve

$$(1-\mu)\|x_n - Tq\| \leq (1+\mu)\|x_n - Tx_n\| + (1-\gamma+\mu)\|x_n - q\| \tag{4.18}$$

yazılır. $n \longrightarrow \infty$ için limit alınır ve (ii) kullanılırsa,

$$\|x_n - Tq\| \leq \frac{1-\gamma+\mu}{1-\mu}\|x_n - q\|$$
$$\leq \|x_n - q\|$$

elde edilir. Bu durumda

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n - Tq\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|x_n - q\| \tag{4.19}$$

dur. Varsayalım ki $Tq \neq q$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi q ya zayıf yakınsadığından, Opial özelliğinden dolayı

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n - q\| < \liminf_{n\to\infty}\|x_n - Tq\|,$$

olur ve bu (4.19) ile çelişir. Bu nedenle $Tq = q$ dur.

Teorem 54: D kümesi, Opial özelliğine sahip düzgün konveks X Banach uzayının boştan farklı kapalı konveks alt kümesi olsun. $T: D \longrightarrow D$ dönüşümü, $F(T) \neq \emptyset$ için (SB) şartını sağlıyorsa, (4.5) ten elde dilen $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: Teorem 52 den, $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğunu ve $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$ olduğunu biliyoruz. X düzgün konveks olduğundan yansıyandır. Böylece, $x_{n_i} \rightharpoonup q_1 \in D$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi mevcuttur. Teorem 53 ü kullanarak $q_1 \in F(T)$ elde ederiz. Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin q_1 noktasına zayıf yakınsadığını göstereceğiz. Bunun tersini kabul edelim, yani $\{x_n\}$ dizisi q_1 e zayıf yakınsak olmasın. O zaman, $\{x_n\}$ dizisinin $q_2 \neq q_1$ olacak şekilde ve $q_2 \in D$ ye zayıf yakınsayan bir $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Yine Teorem 53 ü kullanarak $q_2 \in F(T)$ olduğunu söyleyebiliriz. Lemma 32 ve Opial özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - q_1\| = \lim_{i\to\infty}\|x_{n_i} - q_1\| < \lim_{i\to\infty}\|x_{n_i} - q_2\|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\|x_n - q_2\| = \lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - q_2\right\|$$
$$< \lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - q_1\right\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - q_1\|$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani, $q_1 = q_2$ olur ve $\{x_n\}$ dizisi $q_1 \in F(T)$ ye zayıf yakınsar.

Teorem 55: D kümesi, düzgün konveks X Banach uzayın boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: D \longrightarrow D$ dönüşümü $F(T) \neq \emptyset$ ile (SB) şartını sağlasın ve $\{x_n\}$ dizisi (4.5) teki gibi tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin $F(T)$ nin bir elemanına yakınsaması için gerek ve yeter şart $liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ veya $limsup_{n\to\infty}$ $d(x_n, F(T)) = 0$ olmasıdır.

İspat: Teoremdeki gereklilik şartı açıktır. Tersine, $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ ve $q \in F(T)$ olduğunu varsayalım. Lemma 32 yi kullanarak, her $q \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ limitinin olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olur. Şimdi, $\{x_n\}$ dizisinin D de bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(f)) = 0$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ olmak üzere, her $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, F(T)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise

$$inf\{\|x_n - q\|: q \in F(T)\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

anlamına gelir. Yani, $inf\{\|x_{n_0} - q\|: q \in F(T)\} < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Bu nedenle $\|x_{n_0} - q\| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $q \in F(T)$ vardır. O halde $m, n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - y_n\| &\leq \|x_{n+m} - q\| + \|x_n - q\| \\ &\leq \|x_{n_0} - q\| + \|x_{n_0} - q\| = 2\|x_{n_0} - q\| < \varepsilon\end{aligned}$$

yazılır. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin D de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. D kümesi, X Banach uzayın kapalı alt kümesi olduğundan, $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ olacak şekilde bir $p \in D$ noktası vardır. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olduğundan $d(p, F(T)) = 0$ elde edilir. $F(T)$ nin kapalılığı, Lemma 30 dan gelir. Dolayısıyla $p \in F(T)$ olur.

Şimdi (I) şartını kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 56: D kümesi, düzgün konveks X Banach uzayın boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: D \longrightarrow D$ dönüşümü $F(T) \neq \emptyset$ için (SB) şartını sağlasın ve $\{x_n\}$ dizisi (4.5) teki gibi tanımlansın. Eğer T dönüşümü (I) şartını sağlarsa $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ nin bir elemanına güçlü yakınsar.

İspat: Teorem 52 den

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$$

olduğunu biliyoruz. Böylece, (I) şartını kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$$

elde ederiz. Teorem 55 in hipotezindeki şartlar sağlandığından, $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktasına güçlü yakınsar.

Son olarak, (SB) şartını sağlayan ancak (C) şartını sağlamayan bir dönüşüm örneği vereceğiz. Verilen örnekte, yeni iterasyon yöntemi olan (4.5) in diğer iterasyon yöntemlerine göre daha kullanışlı olduğunu gösterilecektir.

Örnek 23: Alışılmış norm ile verilen $X = \mathbb{R}$ ve $D = [5,7]$ olsun. $T: D \longrightarrow D$ dönüşümü her $x \in C$ için,

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{3x+6}{4}, & x \in [5,7) \\ \quad 6 \quad , & x = 7 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $x = 6{,}8$ ve $y = 7$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|x - Tx| &= \frac{1}{2}|6{,}8 - 6{,}6| = 0{,}1 \\ &< |x - y| = 0{,}2 \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan,

$$|Tx - Ty| = 0{,}6 > 0{,}2 = |x - y|$$

dir. Dolayısıyla T dönüşümü (C) şartını sağlamaz.

Şimdi T dönüşümünün $\gamma = 1$ ve $\mu = \frac{3}{4}$ için (SB) şartını sağladığını göstereceğiz.

1. Durum: $x, y \in [5,7)$ için,

$$\begin{aligned} &(1-\gamma)|x-y| + \mu(|x - Tx| + |y - Ty|) \\ &= \tfrac{3}{4}\left(\left|x - \tfrac{3x+6}{4}\right| + \left|y - \tfrac{3y+6}{4}\right|\right) \\ &= \tfrac{3}{4}\left(\left|\tfrac{x-6}{4}\right| + \left|\tfrac{y-6}{4}\right|\right) \\ &\geq \tfrac{3}{4}\left|\tfrac{x-y}{4}\right| \\ &= |Tx - Ty| \end{aligned}$$

dir.

2. Durum: $x \in [5,7)$ ve $y = 7$ için,

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{3x+6}{4} - 6\right| = 3\left|\frac{x-6}{4}\right|$$

ve

$$5 \leq x < 7 \Rightarrow \frac{-1}{4} \leq \frac{x-6}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{x-6}{4}\right| \leq \frac{1}{4}$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemleri birleştirirsek

$$|Tx - Ty| = 3\left|\frac{x-6}{4}\right| \leq \frac{3}{4}$$

yazılır. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} &(1-\gamma)|x-y| + \mu(|x-Tx| + |y-Ty|) \\ &= \tfrac{3}{4}\left(\left|x - \tfrac{3x+6}{4}\right| + |7-6|\right) \\ &= \tfrac{3}{4}\left|\tfrac{x-6}{4}\right| + \tfrac{3}{4} \\ &\geq |Tx - Ty| \end{aligned}$$

olur.

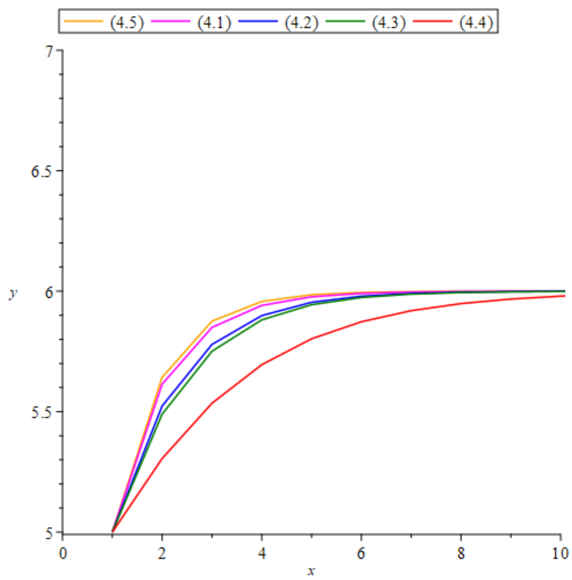
3. Durum: $x = y = 7$ için,

$$\begin{aligned} &(1-\gamma)|x-y| + \mu(|x-Tx| + |y-Ty|) \\ &= \tfrac{3}{4}(|7-6| + |7-6|) \\ &\geq 0 = |Tx - Ty| \end{aligned}$$

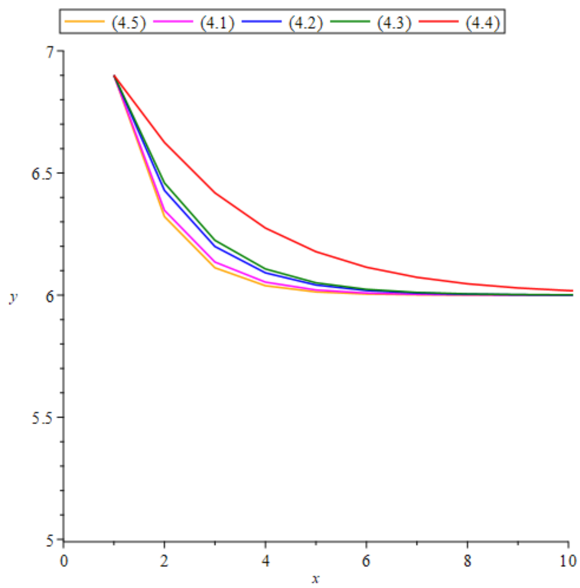
dir. Dolayısıyla T dönüşümü $(SB_{1,3/4})$ şartını sağlar.

Tablo 1. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması

İterasyonlar	Başlangıç Noktaları	
$\alpha_n = \frac{i}{(i+2)^{\frac{10}{9}}}$ $\beta_n = \frac{1}{(i+4)^{\frac{2}{3}}}$	$x_1 = 5$ ($Şekil 1$)	$x_1 = 6.9$ ($Şekil 2$)
$k = 1$ için (4.5) iterasyonu	$x_2 = 5.642650772$	$x_2 = 6.321614305$
	$x_{50} = 5.999999999$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{63} = 6.000000000$	$x_{74} = 6.000000000$
(4.1) iterasyonu	$x_2 = 5.614194805$	$x_2 = 6.347224675$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 6.000000002$
(4.2) iterasyonu	$x_2 = 5.523534363$	$x_2 = 6.428819074$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{108} = 6.000000000$	$x_{200} = 6.000000001$
(4.3) iterasyonu	$x_2 = 5.489630159$	$x_2 = 6.459332856$
	$x_{50} = 5.999999997$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{58} = 5.999999999$	$x_{200} = 5.999999998$
$k = 1$ için (4.4) iterasyonu	$x_2 = 5.305318009$	$x_2 = 6.625213791$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 6.000000002$



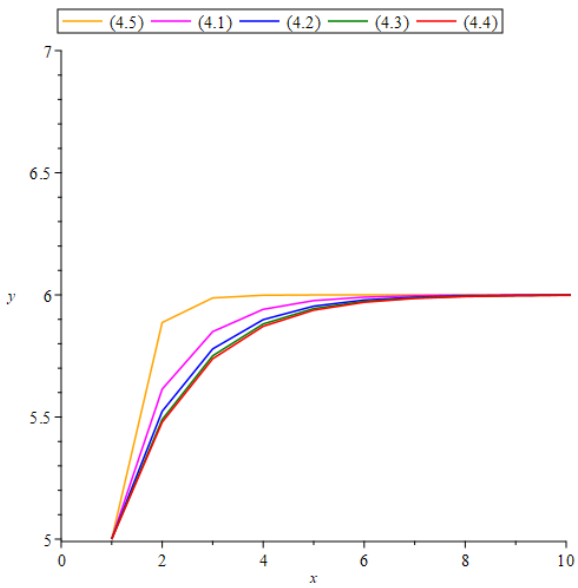
Şekil 1. İterasyonların grafiği 1



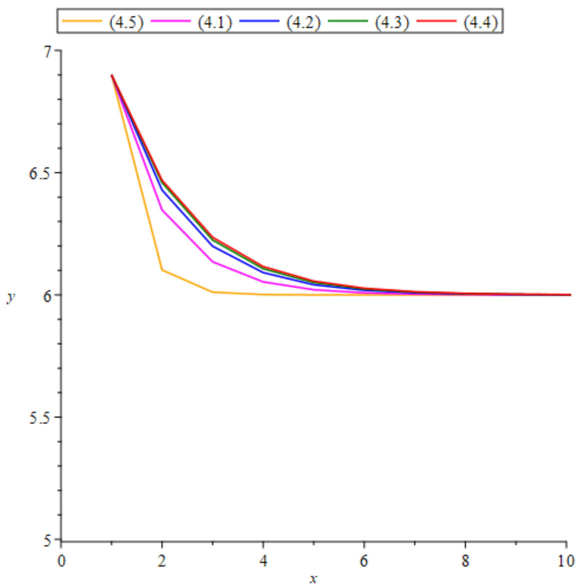
Şekil 2. İterasyonların grafiği 2

Tablo 2. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması

İterasyonlar	Başlangıç Noktaları	
$\alpha_n = \frac{i}{(i+2)^{\frac{10}{9}}}$ $\beta_n = \frac{1}{(i+4)^{\frac{2}{3}}}$	$x_1 = 5$ $(Şekil3)$	$x_1 = 6.9$ $(Şekil4)$
$k = 2$ için (4.5) iterasyonu	$x_2 = 5.886932470$	$x_2 = 6.101760776$
	$x_{46} = 6.000000000$	$x_{50} = 6.000000002$
		$x_{51} = 6.000000000$
(4.1) iterasyonu	$x_2 = 5.614194805$	$x_2 = 6.347224675$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 6.000000002$
(4.2) iterasyonu	$x_2 = 5.523534363$	$x_2 = 6.428819074$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{72} = 6.000000000$	$x_{200} = 6.000000001$
(4.3) iterasyonu	$x_2 = 5.489630159$	$x_2 = 6.459332856$
	$x_{50} = 5.999999997$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 5.999999998$
$k = 2$ için (4.4) iterasyonu	$x_2 = 5.478988507$	$x_2 = 6.468910344$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 6.000000002$



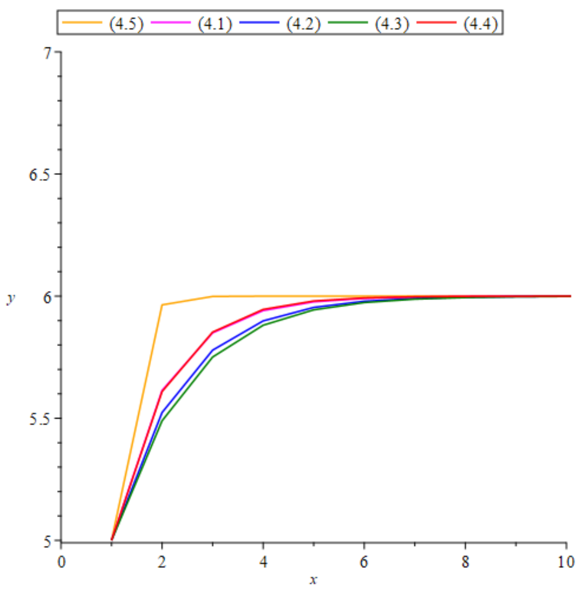
Şekil 3. İterasyonların grafiği 3



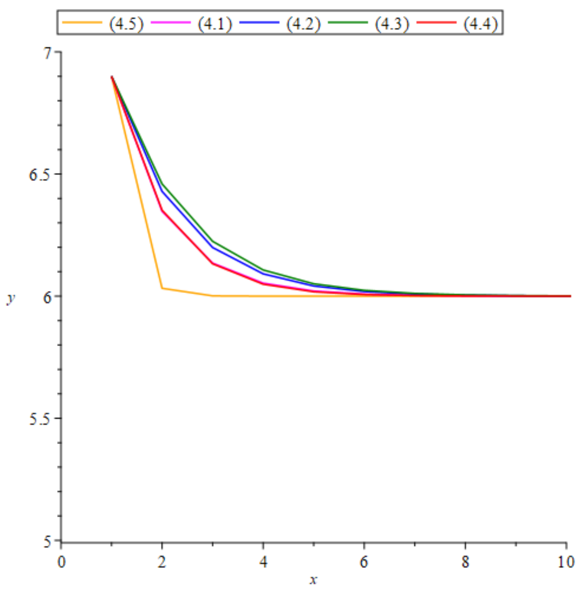
Şekil 4. İterasyonların grafiği 4

Tablo 3. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması

İterasyonlar	Başlangıç Noktaları	
$\alpha_n = \frac{i}{(i+2)^{\frac{10}{9}}}$ $\beta_n = \frac{1}{(i+4)^{\frac{2}{3}}}$	$x_1 = 5$ $(Şekil5)$	$x_1 = 6.9$ $(Şekil6)$
$k = 3$ için (4.5) iterasyonu	$x_2 = 5.964224727$	$x_2 = 6.032197745$
	$x_{50} = 6.000000000$	$x_{50} = 6.000000001$
		$x_{62} = 6.000000000$
(4.1) iterasyonu	$x_2 = 5.614194805$	$x_2 = 6.347224675$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 6.000000002$
(4.2) iterasyonu	$x_2 = 5.523534363$	$x_2 = 6.428819074$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{72} = 6.000000000$	$x_{200} = 6.000000001$
(4.3) iterasyonu	$x_2 = 5.489630159$	$x_2 = 6.459332856$
	$x_{50} = 5.999999997$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 5.999999998$
$k = 3$ için (4.4) iterasyonu	$x_2 = 5.609241380$	$x_2 = 6.351682758$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000001$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 6.000000001$



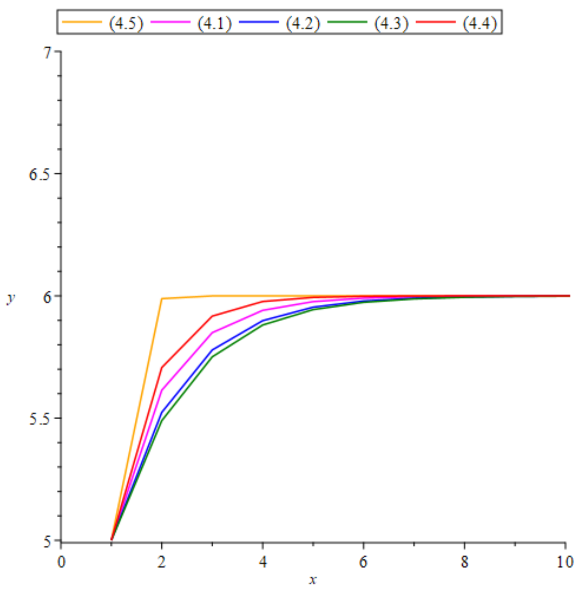
Şekil 5. İterasyonların grafiği 5



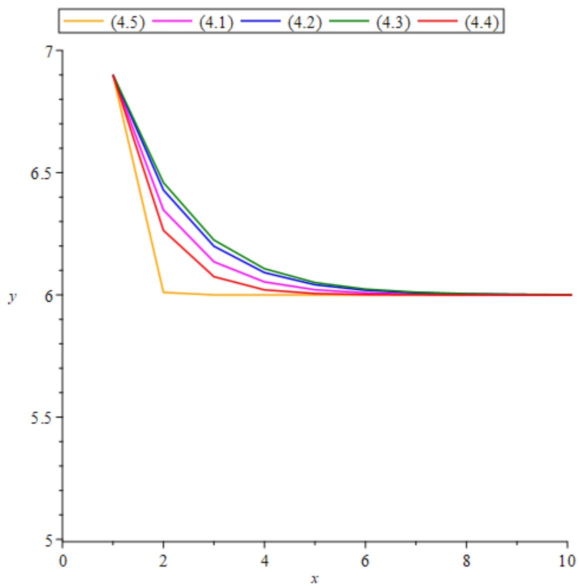
Şekil 6. İterasyonların grafiği 6

Tablo 4. İterasyon Hızlarının Karşılaştırılması

İterasyonlar	Başlangıç Noktaları	
$\alpha_n = \frac{i}{(i+2)^{\frac{10}{9}}}$ $\beta_n = \frac{1}{(i+4)^{\frac{2}{3}}}$	$x_1 = 5$ $(Şekil 7)$	$x_1 = 6.9$ $(Şekil 8)$
$k = 4$ için (4.5) iterasyonu	$x_2 = 5.988680480$	$x_2 = 6.010187568$
	$x_6 = 6.000000000$	$x_{50} = 6.000000001$
		$x_{62} = 6.000000000$
(4.1) iterasyonu	$x_2 = 5.614194805$	$x_2 = 6.347224675$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 6.000000002$
(4.2) iterasyonu	$x_2 = 5.523534363$	$x_2 = 6.428819074$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{72} = 6.000000000$	$x_{200} = 6.000000001$
(4.3) iterasyonu	$x_2 = 5.489630159$	$x_2 = 6.459332856$
	$x_{50} = 5.999999997$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 5.999999998$
$k = 4$ için (4.4) iterasyonu	$x_2 = 5.706931035$	$x_2 = 6.263762068$
	$x_{50} = 5.999999998$	$x_{50} = 6.000000002$
	$x_{200} = 5.999999998$	$x_{200} = 6.000000002$



Şekil 7. İterasyonların grafiği 7



Şekil 8. İterasyonların grafiği 8

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, genişlemeyen ve (C) şartını sağlayan dönüşüm sınıflarını kapsayan daha genel bir dönüşüm sınıfı ifade edilmiş ve bu sınıf Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan dönüşüm olarak adlandırılmıştır. Önce bu dönüşüm sınıfının temel özellikleri verilmiş ve daha sonra literatürdeki iterasyon metotlarından daha etkili olan yeni bir iterasyon metodu tanımlanarak bu dönüşüm sınıfı için bazı zayıf ve güçlü yakınsama teoremleri kanıtlanmıştır. Son olarak ise Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan dönüşümler için nümerik örnekler verilerek iterasyonların mukayesesi yapılmıştır. Bu çalışmadan hareketle, araştırmacılar için aşağıdaki öneriler ifade edilmiştir:

1) Bu tezde ifade edilen iterasyon metodundan hareketle daha etkili bir iterasyon metodunun Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımı incelenebilir. Ayrıca farklı nümerik örnekler üzerinden iterasyonların karşılaştırılması yapılabilir.
2) Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan dönüşüm sınıfından daha genel bir sınıf oluşturularak bunun özellikleri ve diğer dönüşüm sınıfları ile olan bağlantıları araştırılabilir.
3) Çok değerli Suzuki-$(B_{\gamma,\mu})$ şartını sağlayan dönüşüm sınıfı tanımlanarak bu sınıf için bazı temel özellikler ve yakınsama teoremleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T., Ullah, K., & Ahmad, J., 2020. Iterative Algorithm for Mappings Satisfying $(B_{\gamma,\mu})$ Condition. Journal of Function Spaces, 2020, 1-7.

Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications.Vol. 6, New York, Springer

Ahmad, J., Ullah, K., Arshad, M., & Ma, Z., 2021. A new iterative method for Suzuki mappings in Banach spaces. Journal of Mathematics, 2021, 1-7.

Ali, J., & Ali, F., 2020. A new iterative scheme to approximating fixed points and the solution of a delay differential equation. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 21(9), 2151-2163.

Ali, J., Ali, F., & Kumar, P., 2019. Approximation of fixed points for Suzuki's generalized non-expansive mappings. Mathematics, 7(6), 522.

Atailia, S., Redjel, N., Dehici, A., 2019. Some fixed point results for generalized contractions of Suzuki type in Banach spaces. J. Fixed Point Theory Appl., 21, 1-16.

Bayraktar, M., 2006. Fonksiyonel analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.

Berinde, V., 2004. Approximation fixed points of weak contractions using the Picard iteration. Nonlinear Anal. Forum, 9(1), 43-53.

Berinde,V., 2007. Iterative approximation of fixed points, Second edition. Lecture Notes in Mathematics, 1912. Springer, Romania.

Bing-you, L., 1989. Fixed point theorems of nonexpansive mappings in convex metric spaces, Appl. Math. Mech. 10, 183-188.

Bogin, J., 1967. A generalization of a fixed point theorem of Goebel, Kirk and Shimi, Canad. Math. Bull., 19, 7-12.

Browder, F. E., & Petryshyn, W., 1966. The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces.

Browder, F. E., & Petryshyn, W. V., 1967. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 20(2), 197-228.

Ćirić, Lj.B., 1993. On some discontinuous fixed point mappings in convex metric spaces, Czechoslovak Math. J., 43 (118), 319-326.

Çalışkan, B., 2013. Banach Örgüleri İçin Operatörlerin Kompakt Olmama Ölçüleri (Doctoral dissertation, İstanbul Kültür Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü/Matematik Bilgisayar Anabilim Dalı)

Edelstein, M., 1966. A remark on a theorem of MA Krasnoselski. Amer. Math. Monthly, 73, 509-510.

Falset, J.G., Fuster, E.L., Suzuki, T., 2011. Fixed point theory for a class of generalised non-expansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 375(1), 185–195.

Garkavi, A. L., 1962. On the optimal net and best cross-section of a set in a normed space. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat, 26(1), 87-106.

Greguš, M., 1980. A fixed point theorem in Banach spaces, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. A (5) 17, 193-198.

Gürsaç, N., 2019, Banach uzaylarında accerative operatörlerin sıfırlarının incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Hussain, N., Ullah, K., Arshad, M., 2018. Fixed point approximation of Suzuki generalized nonexpansive mappings via new faster iteration process, J. Nonlinear Convex Anal., 19 (8), 1383-1393.

Karapınar, E., Taş, K., 2011. Generalized (C)-conditions and related fixed point theorems. Computers & mathematics with applications, 61(11), 3370-3380.

Karapınar, E., 2012a. Edelstein type fixed point theorems. Fixed Point Theory and Applications, (1), 1-12.

Karapinar, E., 2012b. Remarks on Suzuki (C)-condition. Dynamical systems and methods, 227-243.

López-Díaz, M., Gil, M. Á., Grzegorzewski, P., Hryniewicz, O., Lawry, J., Breuckmann, T. K., ... & Aygün, H., 2004. About Weakly Locally Compact Spaces. In Soft Methodology and Random Information Systems (pp. 638-644). Springer Berlin Heidelberg.

Maddox, I.J., 1988. Elements of Functional Analysis, CUP Archive.

Maddox, I.J., 1989. Elements of functional analysis, Cambridge University Press, Second Edition.

Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bulletin of the American Mathematical Society, 73(4), 591-597.

Pandey, R., Pant R.; Rakocevic, V., Shukla, R., 2018. Approximating fixed points of a general class of nonexpansive mappings in Banach spaces with applications, 1422-6383.

Pant, R., Shukla, R., 2017. Approximating fixed points of generalized α-nonexpansive mappings in Banach spaces. Numerical Functional Analysis and Optimization, 38(2), 248-266.

Pant, R., Patel, P., Shukla, R., & De la Sen, M., 2021. Fixed point theorems for nonexpansive type mappings in Banach spaces. Symmetry, 13(4), 585.

Patir, B., Goswami, N., & Mishra, V. N., 2018. Some results on fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings. Fixed point theory and applications, 2018, 1-18.

Popescu, O., 2011. Two generalizations of some fixed point theorems. Computers & Mathematics with Applications, 62(10), 3912-3919.

Roldán-López-de-Hierro, A. F., Karapınar, E., Roldán-López-de-Hierro, C., & Martínez-Moreno, J., 2015. Coincidence point theorems on metric spaces via simulation functions. Journal of computational and applied mathematics, 275, 345-355.

Sahu, V.K., Pathak, H.K., Tiwari, R., 2016. Convergence theorems for new iteration scheme and comparison results. Aligarh Bull. Math., 35, 19-42.

Schaefer, H., 1957. Uber die Methode sukzessive. Approximationen. Iber. Deutch. Math. Verein., 59, 131-140.

Schu, J., 1991. Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 43(1), 153-159.

Senter, H. F., & Dotson, W., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings. Proceedings of the American Mathematical Society, 44(2), 375-380.

Shukla, R., Pant, R., & Sinkala, W., 2022. A General Picard-Mann Iterative Method for Approximating Fixed Points of Nonexpansive Mappings with Applications. Symmetry, 14(8), 1741.

Suzuki, T., 2008a. Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings. Journal of mathematical analysis and applications, 340(2), 1088-1095.

Suzuki, T., 2005. Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces. Fixed Point Theory and Applications, (1), 1-21.

Suzuki, T., 2008b. A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, Proc. Amer. Math. Soc., 136 ,1861-1869.

Suzuki, T., 2009. A new type of fixed point theorem in metric spaces, Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl, 71 (11), 5313-5317.

Takahashi, W., 2000. Nonlinear functional analysis. Fixed Point Theory and its Applications, Yokohoma Publishers, Yokohoma.

Thakur, B. S., Thakur, D., & Postolache, M., 2016a. A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings. Applied Mathematics and Computation, 275, 147-155.

Thakur, B.S., Thakur, D., Postolache, M., 2016b. New iteration scheme for approximating fixed point of nonexpansive mappings. Filomat, 30, 2711-2720.

Ullah, K., & Arshad, M., 2018. Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process. Filomat, 32(1), 187-196.

Ullah, K., Hussain, N., Ahmad, J., & Arshad, M., 2020. Approximation of fixed points for a class of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces. Thai Journal of Mathematics, 18(3), 1149-1159.

Yildirim, I., 2011, Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktaları için yeni yaklaşım metotları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Yüksel, Ş., 2014. Genel topoloji (No. 109). Eğitim Yayınevi.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Nihan ÇEBE
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Nevzat Karabağ Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans:	Atatürk Üniversitesi, Eğitim Fakültesi
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2023)
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	İyi
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
1. Fixed Point Approximations for a New Class of Nonlinear Operators in Banach Spaces with an Application, Yildirim, I., Çebe, N., Ahmad, J., Gönderildi (2023).	