



T.C.  
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-ŞİFT BALANS SAYILARI ÜZERİNE BAZI CEBİRSEL  
ÖZDEŞLİKLER

Esra ÖZER

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ

Haziran, 2023

İSTANBUL

Bu çalışma 20.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

### Tez Jürisi

Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ (Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Prof.Dr. Yusuf ZEREN  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi

Dr.Öğr.Üyesi Sevilay DEMİR SAĞLAM  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca çok değerli katkılarıyla beni yönlendiren; bilgisi ve tecrübesiyle bana yol gösteren kıymetli hocam Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ'ye sonsuz teşekkür ederim.

Bu süreçte cömert ve samimi bir şekilde benimle deneyimini paylaşan, bana yardım eden Selin SARI ERYILMAZ'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca bana maddi ve manevi destek olan annem Sıdıka Zeynep SARIGÜL'e ve Melahat KURTYEMEZ hocama teşekkür ederim.

Hedeflerim ve yapabileceklerim konusunda beni her zaman yüreklendiren sevgili eşim Anıl ÖZER'e teşekkür ederim.

Haziran, 2023

Esra ÖZER

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
TABLO LİSTESİ .....	vi
SİMGE VE KISALTIMA LİSTESİ .....	vii
ÖZET .....	ix
SUMMARY .....	1
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. GENEL KISIMLAR</b> .....	<b>7</b>
2.1. ÖN BİLGİLER .....	7
2.2. BALANS VE LUCAS-BALANS SAYILARI .....	9
2.3. HEMEN HEMEN BALANS SAYILARI .....	20
2.4. ŞİFT BALANS SAYILARI .....	26
<b>3. MALZEME VE YÖNTEM</b> .....	<b>31</b>
<b>4. BULGULAR</b> .....	<b>32</b>
4.1. 3-ŞİFT BALANS SAYILARI .....	32
4.1.1. 3-Şift Balans Sayılarının Bazı Cebirsel Özellikleri .....	32
4.1.2. 3-Şift Balans Sayılarını Üreten Fonksiyonlar .....	40
4.1.3. Balans Sayılarını 3-Şift Balans Sayıları ile Üreten Fonksiyonlar .....	44
4.2. 3-ŞİFT BALANS SAYILARI İLE BALANS VE LUCAS-BALANS SAYILARI ARASINDAKİ BAZI ÖZDEŞLİKLER .....	46
4.3. 3-ŞİFT BALANS SAYILARI İLE HEMEN HEMEN BALANS SAYILARI ARASINDAKİ BAZI ÖZDEŞLİKLER .....	48
4.4. 3-ŞİFT LUCAS-BALANS SAYILARI .....	50
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ</b> .....	<b>54</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>55</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>57</b>

## TABLO LİSTESİ

	<b>Sayfa No</b>
<b>Tablo 1.1:</b> Tavşan Çifti Sayısı. ....	1
<b>Tablo 4.1:</b> 3-Şift Balans Sayılarının İlk On Terimi. ....	37



## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$T_n$	: $n$ . üçgensel sayı
$B_n$	: $n$ . balans sayısı
$F_n$	: $n$ . Fibonacci sayısı
$L_n$	: $n$ . Lucas sayısı
$C_n$	: $n$ . Lucas-balans sayısı
$b_n$	: $n$ . kobalans sayısı
$c_n$	: $n$ . Lucas-kobalans sayısı
$B_n(k)$	: $n$ . $k$ -şift balans sayısı
$B_n(3)$	: $n$ . 3-şift balans sayısı
$CB_n(3)$	: $n$ . 3-şift Lucas-balans sayısı
$U_n$	: $n$ . $A_1$ -balans sayısı
$V_n$	: $n$ . $A_2$ -balans sayısı

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### 3-ŞİFT BALANS SAYILARI ÜZERİNE BAZI CEBİRSEL ÖZDEŞLİKLER

Esra ÖZER

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ

Bu tez çalışmasında, balans sayılarını veren Diofant denklemde birtakım düzenlemeler yapılmak suretiyle elde edilen Diofant denklem kullanılarak oluşturulan şift balans sayıları incelenmiştir. Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bu çalışmada kullanılan tam sayı dizilerinin tanımları ve bazı cebirsel özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde, balans, Lucas-balans, hemen hemen balans ve şift balans sayıları ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bu çalışmada kullanılan kaynaklara ve çalışmanın oluşmasında yararlanılan yöntemlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, 3-şift balans sayıları üzerine ayrıntılı bir inceleme yapılarak bu sayılara ait özgün cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca 3-şift Lucas-balans sayıları tanımlanarak bu sayılarla ilgili birtakım cebirsel özelliklere yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, elde edilen bulguların değerlendirilmesi yapılmıştır.

Haziran 2023, 67 sayfa.

**Anahtar kelimeler:** Balans sayıları, hemen hemen balans sayıları, şift balans sayıları.

## SUMMARY

### M.Sc. THESIS

#### SOME ALGEBRAIC IDENTITIES ON 3-SHIFT BALANCING NUMBERS

Esra ÖZER

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ

In this thesis, the shift balancing numbers created by using the Diophantine equation obtained by making some adjustments in the Diophantine equation that gives the balancing numbers are examined. This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the definitions and some algebraic properties of integer sequences used in this study are given.

In the second chapter, basic definitions and theorems about balancing numbers, Lucas-balancing numbers, almost balancing numbers and shift balancing numbers are given.

In the third chapter, the sources used in this study and the methods used in the formation of the study are given.

In the fourth chapter, a detailed examination of 3-shift balancing numbers are made and the original algebraic identities of these numbers are obtained. In addition, 3-shift Lucas-balancing numbers are defined and some algebraic properties related to these numbers are given.

In the fifth chapter, the findings obtained are also evaluated.  
June 2023, 67 pages.

**Keywords:** Balancing numbers, almost balancing numbers, shift balancing numbers.

## 1. GİRİŞ

Pisa'da doğan Leonardo Fibonacci, yaşadığı dönemde (1170-1250) yaptığı çalışmalarla Avrupa'nın en önemli matematikçilerinden biri olmuştur. Matematik çalışmaları dışında yaşantısı hakkında ayrıntılı bilgi sahibi olamadığımız Fibonacci'nin en çok bilinen çalışması Liber Abaci (1202) kitabıdır. Fibonacci, bu kitabında, Hint-Arap rakamlarını, 10'lu sayı sistemini ve dört işlemi anlatmıştır. Böylece Avrupa, Hint-Arap rakamlarıyla tanışmıştır. Fibonacci, bir diğer çalışması olan Liber Quadratorum (1225) kitabında, Diofant Denklemler üzerine araştırmalar yapmıştır ve bu araştırmalar Sayılar Kuramı'na oldukça katkı sağlamıştır. Bunun yanı sıra Fibonacci, Liber Abaci kitabında, tavşan problemi olarak ortaya koyduğu problemin neticesinde elde ettiği tam sayı dizisi ile tanınmaktadır. Bu problem şudur: Kapalı bir alana konulan biri dişi ve diğeri erkek olacak şekilde bir çift tavşan olduğu varsayalım. Hiçbir tavşanın ölmediği ve doğan tavşanların bir ay sonra üreyebilecek erginliğe ulaşip bu ayı takip eden ayın sonunda ürettiği kabul edilirse, bir yılın sonunda bu ortamda bulunan tavşan çifti sayısı nedir?

**Tablo 1.1:** Tavşan Çifti Sayısı.

Ay	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tavşan Çifti Sayısı	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Yukarıdaki tablodan görüleceği üzere,  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  şeklinde devam eden bu diziyeye Fibonacci'nin adı verilmiştir ve bu dizi tam sayı dizileri içerisinde önemli bir yere sahip olmuştur. Fibonacci dizisini incelemeye önce, tam sayı dizilerinden bahsederken sıklıkla kullanılan terimler olan rekürans bağıntısı ve Binet formülü tanımını verelim.

$c_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) ler reel sayılar ve  $c_k \neq 0$  olmak üzere,  $k$ . mertebeden sabit katsayılı bir lineer homojen rekürans bağıntısı,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

dır [1]. Başlangıç değerleri ve rekürans bağıntısı bilindiğinde bir tam sayı dizisinin bütün terimleri belirlenebilir.

Binet formülü ise tam sayı dizilerinin karakteristik denkleminin kökleri yardımı ile elde edilir ve dizinin  $n$ . teriminin elde edilmesinde kolaylık sağlar.

Şimdi bu bilgiler ışığında Fibonacci dizisini inceleyelim.

$F_n$ ,  $n$ . Fibonacci sayısı ve  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  olmak üzere, Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısı,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

dir [2].

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup bu karakteristik denklemin kökleri  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  ile gösterilirse,  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ve  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  dir. Buradan, Fibonacci dizisinin Binet formülü,

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

dir [3].

Fibonacci dizisi gibi ünlü olan bir başka tam sayı dizisi de Fransız matematikçi Eduard Lucas tarafından tanımlanan Lucas dizisidir. Lucas dizisi ile Fibonacci dizisinin rekürans bağıntıları aynı fakat başlangıç koşulları farklıdır.

$L_n$ ,  $n$ . Lucas sayısı ve  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$  olmak üzere, Lucas dizisinin rekürans bağıntısı,

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

dir. Lucas dizisinin Binet formülü ise,  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ve  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere,

$$L_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$$

dir.

Fibonacci ve Lucas dizilerinden başka pek çok tam sayı dizisi vardır. Bu tezde

yararlanacağımız tam sayı dizilerinden ikisi, üçgensel sayı ve kare üçgensel sayı dizileridir.  $n$  bir pozitif tam sayı olmak üzere  $\frac{n(n+1)}{2}$  şeklinde yazılabilen sayılara üçgensel sayı ve bu sayıların oluşturduğu diziye üçgensel sayı dizisi denir [4].

$T_n$ ,  $n$ . üçgensel sayı ve  $T_1 = 1$  olmak üzere, üçgensel sayı dizisinin rekürans bağıntısı,

$$T_{n+1} = T_n + (n + 1) \quad (n \geq 1)$$

dir. Üçgensel sayılara örnek olarak 1, 3, 6, 10 sayıları verilebilir.

Tam kare olan üçgensel sayılara kare üçgensel sayı ve bu sayıların oluşturduğu diziye kare üçgensel sayı dizisi denir [4].

$S_n$ ,  $n$ . kare üçgensel sayı ve  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 36$  olmak üzere, kare üçgensel sayı dizisinin rekürans bağıntısı,

$$S_{n+1} = 34S_n - S_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2)$$

dir. Kare üçgensel sayılara örnek olarak, 1, 36, 1225 sayıları verilebilir.

Behera ve Panda [5] tarafından tanımlanan, üçgensel ve kare üçgensel sayılar ile doğrudan ilişkili olan, balans sayılarını inceleyelim. Balans sayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$n$  ve  $r$  pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r)$$

Diofant denklemini sağlayan  $n$  sayısına balans sayısı,  $r$  sayısına ise  $n$  balans sayısına karşılık gelen balansır (dengeleyici) denir.

$B_n$ ,  $n$ . balans sayısı ve  $B_1 = 1$ ,  $B_2 = 6$  olmak üzere, balans sayı dizisinin rekürans bağıntısı,

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

dir [4].

Balans sayılarına bağılı olarak Lucas-balans sayıları, Ray [4] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$B_n$ ,  $n$ . balans sayısı olmak üzere,  $C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$  sayısına  $n$ . Lucas-balans sayısı denir.

Panda ve Ray [6], balans sayılarının gerçeklediğı Diofant denkleme benzer başka bir Diofant denklem kullanılarak elde edilen kobalans sayılarını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

$n$  ve  $r$  pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r)$$

Diofant denklemini sağılayan  $n$  sayısına kobalans sayısı,  $r$  sayısına ise  $n$  kobalans sayısına karşılık gelen kobalansır denir.

$b_n$ ,  $n$ . kobalans sayısı ve  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 2$  olmak üzere, kobalans sayı dizisinin rekürans bağıntısı,

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2)$$

dir [6].

Kobalans sayılarına bağılı olarak Lucas-kobalans sayıları, Ray [4] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$b_n$ ,  $n$ . kobalans sayısı olmak üzere,  $c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$  sayısına  $n$ . Lucas-kobalans sayısı denir.

Balans sayıları üzerine pek çok farklı çalışma mevcuttur. Liptai [7] çalışmasında Lucas sayı dizisi içinde balans sayısı olmadığını kanıtlamıştır. Kovács, Liptai ve Olajos [8],  $(a, b)$  balans sayılarını tanımlamışlar ve bu sayılar ile ilgili çeşitli teoremler elde etmişlerdir. Dash, Ota ve Dash [9],  $t$ -balans sayılarını tanımlayarak bu sayıların cebirsel özelliklerini incelemişlerdir. Panda ve Davala [10], mükemmel balans sayıları ile ilgili çalışmalarında, balans sayı dizisindeki mükemmel sayıları araştırmışlardır. Rout and Panda [11],  $k$ -boşluk balans sayılarını detaylı incelemişlerdir.

Panda ve Panda [12] nın, balans sayı dizisi ile ilişkili olarak tanımlamış oldukları bir başka tam sayı dizisi hemen hemen balans sayı dizisidir ve tanımını aşağıdaki gibidir:

$n$  bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$|\{(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r)\} - \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\}| = 1 \quad (1.1)$$

Diofant denklemini sağlayan  $n$  sayısına hemen hemen balans sayısı,  $r$  pozitif tam sayısına ise  $n$  hemen hemen balans sayısına karşılık gelen hemen hemen balansır denir.

(1.1) Diofant denklemi, aşağıdaki gibi iki Diofant denklem halinde yazılabilir:

$$\{(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r)\} - \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\} = 1 \quad (1.2)$$

$$\{(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r)\} - \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\} = -1 \quad (1.3)$$

(1.2) Diofant denklemini sağlayan  $n$  pozitif tam sayısına birinci türden hemen hemen balans sayısı denir ve  $A_1$ -balans sayısı olarak ifade edilir;  $r$  pozitif tam sayısına ise, birinci türden hemen hemen balansır denir ve  $A_1$ -balansır olarak ifade edilir.

(1.3) Diofant denklemini sağlayan  $n$  pozitif tam sayısına ikinci türden hemen hemen balans sayısı denir ve  $A_2$ -balans sayısı olarak ifade edilir;  $r$  pozitif tam sayısına ise, ikinci türden hemen hemen balansır denir ve  $A_2$ -balansır olarak ifade edilir.

Daha sonra Rayaguru, Davala ve Panda [13], çift balans sayılarını tanımlamışlar ve bu sayıların balans sayılarıyla ilişkilerini göstererek birtakım cebirsel özdeşlikler elde etmişlerdir. Çift balans sayılarının tanımını aşağıdaki gibidir:

$k$  sabit bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(k+1) + (k+2) + \cdots + (x-1) = (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+r)$$

Diofant denklemini sağlayan  $x$  pozitif tam sayısına  $k$ -çift balans sayısı,  $r$  pozitif tam sayısına da  $x$   $k$ -çift balans sayısına karşılık gelen  $k$ -çift balansır denir.

Bu tezin genel kısımlar bölümünde, tezin oluşturulmasında yararlanılan bazı ön bilgiler verildikten sonra, balans sayıları, Lucas-balans sayıları, hemen hemen balans sayıları tanımları verilmiş ve bu sayılara ait birtakım cebirsel bağıntılar gösterilmiştir. Daha sonra, literatüre 2020 yılında girmiş olan çift balans sayılarının tanımı verilmiş ve  $k = 1, 2, 3$  değerleri için çift balans sayılarını veren Diofant denklemin çözüm sınıfları gösterilmiştir.

Tezin bulgular bölümünde ise 3-çift balans sayıları ele alınmıştır. Bu sayılar ile ilgili özgün teoremler elde edilmiş ve 3-çift balans sayılarını üreten fonksiyonlar bulunmuştur. 3-çift balans sayıları ile balans sayıları, Lucas-balans sayıları ve hemen hemen balans sayıları arasında birtakım cebirsel ilişkiler elde edilmiştir. Ayrıca 3-çift balans sayılarına bağlı olarak 3-çift Lucas-balans sayıları tanımlanmış ve 3-çift Lucas-balans sayıları için geçerli olan birtakım cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir.

## 2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde, tezin bulgular kısmında elde edilen teoremlerin ispatlarında kullanacağımız bazı tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

### 2.1. ÖN BİLGİLER

Bu alt bölümde, gerek bu bölümün diğer kısımlarında gerekse bulgular bölümünde kullanılan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.1.1.**  $d$  tam kare olmayan bir pozitif tam sayı,  $k$  bir tam sayı olmak üzere,  $x^2 - dy^2 = \mp 1$  şeklindeki Diofant denkleme Pell Denklemi,  $x^2 - dy^2 = k$  denklemine ise genel Pell Denklemi denir [14].

$x^2 - dy^2 = 1$  denklemi incelendiğinde, pozitif ve tam kare olmayan her  $d$  değeri için  $(\mp 1, 0)$  bu denklemi gerçeklediğinden bu çözüme aşikar çözüm denir. Bir Pell denkleminin aşikar çözümü olmayan en küçük  $(x, y)$  pozitif tam sayı çözümüne denklemin temel çözümü denir ve denklemin diğer tüm tam sayı çözümleri, temel çözüm kullanılarak bulunur.

**Teorem 2.1.1.**  $x^2 - dy^2 = 1$  Pell denkleminin temel çözümü,  $(\alpha, \beta)$  olsun. O halde,  $(x_1, y_1) = (\alpha, \beta)$  ve Pell denkleminin tüm çözümleri,  $n \geq 1$  için  $(x_n, y_n)$  olmak üzere,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (\alpha + \beta\sqrt{d})^n$$

dir [15].

**Teorem 2.1.2.**  $x$  ve  $y$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $(x_n, y_n)$ ,  $x^2 - dy^2 = (-1)^n$  Pell denkleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu taktirde,  $(x_1, y_1) = (\alpha, \beta)$  Pell denkleminin temel çözümü olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \geq 2)$$

dir [15].

**Teorem 2.1.3.**  $x^2 - dy^2 = 1$  Pell denkleminin temel çözümü  $(\alpha, \beta)$  ve  $x^2 - dy^2 = k$  denkleminin temel çözümü  $(u, v)$  olsun.  $k > 0$  olmak üzere,

$$0 < |u| \leq \sqrt{\frac{k(\alpha+1)}{2}} \quad \text{ve} \quad 0 \leq v \leq \beta \sqrt{\frac{k}{2(\alpha+1)}}$$

dir [15].

**Teorem 2.1.4.**  $x^2 - dy^2 = 1$  Pell denkleminin temel çözümü,  $(\alpha, \beta)$  ve  $x^2 - dy^2 = k$  denkleminin temel çözümü,  $(u, v)$  olsun.  $k < 0$  olmak üzere,

$$0 \leq |u| \leq \sqrt{\frac{|k|(\alpha-1)}{2}} \quad \text{ve} \quad 0 < v \leq \beta \sqrt{\frac{|k|}{2(\alpha-1)}}$$

dir [15].

**Teorem 2.1.5.**  $x^2 - dy^2 = N$  genel Pell denkleminin bir  $K$  sınıfının temel çözümü  $u_1 + v_1\sqrt{d}$  ve  $x^2 - dy^2 = 1$  Pell denkleminin temel çözümü ise  $x_1 + y_1\sqrt{d}$  olsun.  $n$  pozitif bir tam sayı ve  $x^2 - dy^2 = N$  genel Pell denkleminin  $K$  sınıfına ait tüm pozitif tam sayı çözümleri  $u_n + v_n\sqrt{d}$  olmak üzere,

$$u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{d} = (u_1 + v_1\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

dir [16].

## 2.2. BALANS VE LUCAS-BALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, balans ve Lucas-balans sayılarının tanımları, Binet formülleri ve rekürans bağıntıları verilmiştir. Bu sayıların sağladıkları bazı cebirsel özdeşlikler ve bu sayılar arasındaki birtakım cebirsel ilişkiler gösterilmiştir.

**Tanım 2.2.1.**  $n$  ve  $r$  pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \quad (2.1)$$

Diofant denklemini sağlayan  $n$  sayısına balans sayısı,  $r$  sayısına ise  $n$  balans sayısına karşılık gelen balansır (dengeleyici) denir [5].

(2.1) Diofant denklemi düzenlenirse,

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r} \quad (2.2)$$

elde edilir. Böylece, ardışık iki üçgensel sayının toplamı olarak yazılabilen üçgensel sayılar ile balans sayıları arasında bir ilişki olduğu görülür.

(2.2) eşitliği düzenlenirse,

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \quad (2.3)$$

elde edilir. Böylece, balans sayılarının kare üçgensel sayıların karekökü olarak ifade edilebileceği görülür.

(2.3) denklemi  $r$  ye göre çözümlerse,

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \quad (2.4)$$

bulunur [4].

(2.4) eşitliğinden aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 2.2.1.**  $n$  pozitif tam sayısının balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul  $8n^2 + 1$  sayısının bir tam kare olmasıdır [4].

(2.1) Diofant denklemini sağlayan en küçük sayının 6 olduğu açık olmakla birlikte, Behera ve Panda,  $n = 1$  için,  $8n^2 + 1$  sayısı bir tam kare olduğundan 1 sayısının da bir balans sayısı olarak kabul edilebileceğini ifade etmişlerdir [5].

**Teorem 2.2.1.**  $B_n$ ,  $n$ . balans sayısı,  $\alpha_1 = 3 + \sqrt{8}$  ve  $\alpha_2 = 3 - \sqrt{8}$  olmak üzere, balans sayılarının Binet formülü,

$$B_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{2\sqrt{8}}$$

dir [4].

**İspat.**  $x$  bir balans sayısı olsun. O halde, Sonuç 2.2.1 den,  $8x^2 + 1 = y^2$  olacak şekilde bir  $y$  pozitif tam sayısı vardır. Bu eşitlik düzenlenirse,  $y^2 - 8x^2 = 1$  Pell denklemi elde edilir. Bu denklemin temel çözümü  $x = 1$ ,  $y = 3$  olmak üzere, Teorem 2.1.1 den denklemin genel çözümü,

$$y_n + x_n\sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^n \quad (2.5)$$

dir. (2.5) ten,

$$y_n - x_n\sqrt{8} = (3 - \sqrt{8})^n \quad (2.6)$$

elde edilir.

(2.5) ve (2.6) eşitliklerinden,

$$x_n = \frac{(3 + \sqrt{8})^n - (3 - \sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}$$

elde edilir. Buradan,

$$B_n = \frac{(3 + \sqrt{8})^n - (3 - \sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}$$

dir. Böylece,  $\alpha_1 = 3 + \sqrt{8}$  ve  $\alpha_2 = 3 - \sqrt{8}$  olmak üzere, balans sayılarının Binet formülü,

$$B_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{2\sqrt{8}}$$

dir.

**Teorem 2.2.2.**  $B_n$ ,  $n$ . balans sayısı ve  $B_1 = 1$  ve  $B_2 = 6$  olmak üzere, balans sayı dizisinin rekürans bağıntısı,

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 2.2.1 den,

$$\begin{aligned} B_{n+1} + B_{n-1} &= \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{2\sqrt{8}} + \frac{\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{\alpha_1^n(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2^n(\alpha_1 + \alpha_2)}{2\sqrt{8}} \\ &= 6B_n \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

elde edilir.

**Teorem 2.2.3.**  $B_n$ ,  $n$ . balans sayısı olmak üzere,

$$B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1} \quad (n \geq 2)$$

dir [4].

**İspat.** İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 2$  için  $B_2^2 = 1 + B_1B_3 = 36$  olduğundan iddia doğrudur.  $n = k$  için iddia doğru olsun.

Şimdi,  $n = k + 1$  için iddianın doğru olduğunu gösterelim. Teorem 2.2.2 den,

$$\begin{aligned} B_{k+1}^2 &= B_{k+1}B_{k+1} \\ &= (6B_k - B_{k-1})B_{k+1} \\ &= 6B_kB_{k+1} - B_{k-1}B_{k+1} \\ &= 6B_kB_{k+1} - B_k^2 + 1 \\ &= B_k(6B_{k+1} - B_k) + 1 \\ &= B_kB_{k+2} + 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, iddianın  $n = k + 1$  için doğru olduğu gösterilmiş olur.

**Teorem 2.2.4.** Herhangi  $m$  ve  $n$  pozitif tam sayıları için,

$$B_{m+n} = B_m B_{n+1} - B_{m-1} B_n$$

dir [4].

**İspat.** İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 1$  için,  $B_{m+1} = B_m B_2 - B_{m-1} B_1 = 6B_m - B_{m-1}$  olduğundan iddia doğrudur.  $n \leq k$  için iddia doğru olsun. Şimdi,  $n = k + 1$  için iddianın doğru olduğunu gösterelim. Teorem 2.2.2 den,

$$\begin{aligned} B_{m+k+1} &= 6B_{m+k} - B_{m+k-1} \\ &= 6(B_m B_{k+1} - B_{m-1} B_k) - (B_m B_k - B_{m-1} B_{k-1}) \\ &= B_m(6B_{k+1} - B_k) - B_{m-1}(6B_k - B_{k-1}) \\ &= B_m B_{k+2} - B_{m-1} B_{k+1} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, iddianın  $n = k + 1$  için doğru olduğu gösterilmiş olur.

**Sonuç 2.2.2.** Herhangi bir  $n$  pozitif tam sayısı için,

$$\begin{aligned} i) \quad B_{2n-1} &= B_n^2 - B_{n-1}^2 \\ ii) \quad B_{2n} &= B_n(B_{n+1} - B_{n-1}) \end{aligned}$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 2.2.3 ve Teorem 2.2.4 ten,

$$\begin{aligned} B_{2n-1} &= B_{n-1} B_{n+1} - B_{n-2} B_n \\ &= (B_n^2 - 1) - (B_{n-1}^2 - 1) \\ &= B_n^2 - B_{n-1}^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.4 ten,

$$\begin{aligned} B_{2n} &= B_n B_{n+1} - B_{n-1} B_n \\ &= B_n (B_{n+1} - B_{n-1}) \end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 2.2.5.**  $x$  bir balans sayısı olmak üzere,

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$$

$x$  sayısından hemen sonra gelen balans sayısıdır [4].

**İspat.**  $x$  bir balans sayısı olsun,  $f(x)$  fonksiyonunun bir balans sayısı olduğunu gösterelim. Sonuç 2.2.1 den  $8x^2 + 1$  bir tam karedir. Eğer,

$$8f(x)^2 + 1 = 8(3x + \sqrt{8x^2 + 1})^2 + 1$$

ifadesinin bir tam kare olduğu gösterilirse  $f(x)$  sayısının bir balans sayısı olduğu gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned} 8f(x)^2 + 1 &= 8(3x + \sqrt{8x^2 + 1})^2 + 1 \\ &= 8(9x^2 + 8x^2 + 1 + 6x\sqrt{8x^2 + 1}) + 1 \\ &= 136x^2 + 9 + 48x\sqrt{8x^2 + 1} \\ &= (8x + 3\sqrt{8x^2 + 1})^2 \end{aligned}$$

olduğundan  $8f(x)^2 + 1$  sayısının tam kare olduğu gösterilmiş olur. Sonuç olarak,  $f(x)$  bir balans sayısıdır.

Şimdi  $f(x)$  balans sayısının,  $x$  sayısından hemen sonra gelen balans sayısı olduğunu gösterelim.

Teorem 2.2.2 den,

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= 6B_n - B_{n-1} \\ &= 3B_n + (3B_n - B_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

yazılır. Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} (3B_n - B_{n-1})^2 &= 9B_n^2 + B_{n-1}^2 - 6B_nB_{n-1} \\ &= 9B_n^2 + B_{n-1}^2 - (B_{n+1} + B_{n-1})B_{n-1} \\ &= 9B_n^2 - B_{n-1}B_{n+1} \\ &= 9B_n^2 - B_n^2 + 1 \\ &= 8B_n^2 + 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,  $3B_n - B_{n-1} = \sqrt{8B_n^2 + 1}$  yazılabilir. Böylece, (2.7) eşitliğinden,

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

elde edilir.  $B_n = x$  olarak alınırsa,

$$B_{n+1} = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$$

elde edilir ve böylece  $f(x) = B_{n+1}$  olduğu gösterilmiş olur.

**Teorem 2.2.6.**  $x$  bir balans sayısı olmak üzere,

$$g(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 1}$$

$x$  sayısından hemen önce gelen balans sayısıdır [4].

**İspat.**  $x$  bir balans sayısı olsun,  $g(x)$  fonksiyonunun bir balans sayısı olduğunu gösterelim.

Sonuç 2.2.1 den  $8x^2 + 1$  bir tam karedir. Eğer,

$$8g(x)^2 + 1 = 8(3x - \sqrt{8x^2 + 1})^2 + 1$$

ifadesinin bir tam kare olduğu gösterilirse  $g(x)$  sayısının bir balans sayısı olduğu gösterilir.

$$\begin{aligned}
8g(x)^2 + 1 &= 8(3x - \sqrt{8x^2 + 1})^2 + 1 \\
&= 8(9x^2 + 8x^2 + 1 - 6x\sqrt{8x^2 + 1}) + 1 \\
&= 8(17x^2 + 1 - 6x\sqrt{8x^2 + 1}) + 1 \\
&= 136x^2 + 9 - 48x\sqrt{8x^2 + 1} \\
&= (8x - 3x\sqrt{8x^2 + 1})^2
\end{aligned}$$

olduğundan  $8g(x)^2 + 1$  sayısının tam kare olduğu gösterilmiş olur. Sonuç olarak,  $g(x)$  bir balans sayısıdır.

Şimdi  $g(x)$  balans sayısının  $x$  sayısından hemen önce gelen balans sayısı olduğunu gösterelim.

$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$  fonksiyonunda  $x$  balans sayısı yerine  $g(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 1}$  balans sayısını yazalım.

$$\begin{aligned}
f(3x - \sqrt{8x^2 + 1}) &= 3(3x - \sqrt{8x^2 + 1}) + \sqrt{8(3x - \sqrt{8x^2 + 1})^2 + 1} \\
&= 9x - 3\sqrt{8x^2 + 1} + \sqrt{(-8x + 3\sqrt{8x^2 + 1})^2} \\
&= 9x - 3\sqrt{8x^2 + 1} - 8x + 3\sqrt{8x^2 + 1} \\
&= x
\end{aligned}$$

$x = B_n$  olarak alınırsa,  $f(g(B_n)) = B_n$  ve buradan da  $g(B_n) = B_{n-1}$  elde edilir. Böylece,

$$B_{n-1} = 3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

olduğu gösterilmiş olur.

**Tanım 2.2.2.**  $x$  bir balans sayısı olmak üzere,  $\sqrt{8x^2 + 1}$  sayısına Lucas-balans sayısı denir.  $n$ . Lucas-balans sayısı  $C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$  ile gösterilir [4].

**Teorem 2.2.7.**  $C_n, n$ . Lucas-balans sayısı ve  $C_1 = 3, C_2 = 17$  olmak üzere, Lucas-balans sayı dizisinin rekürans bağıntısı,

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 2.2.5 ten,

$$\begin{aligned} C_{n+1}^2 &= 8(3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1})^2 + 1 \\ &= 8(17B_n^2 + 6B_n\sqrt{8B_n^2 + 1} + 1) + 1 \\ &= 136B_n^2 + 48B_n\sqrt{8B_n^2 + 1} + 9 \\ &= (3\sqrt{8B_n^2 + 1} + 8B_n)^2 \\ &= (3C_n + 8B_n)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$C_{n+1} = 3C_n + 8B_n \quad (2.8)$$

yazılır. Teorem 2.2.6 dan,

$$\begin{aligned} C_{n-1}^2 &= 8(3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1})^2 + 1 \\ &= 8(17B_n^2 - 6B_n\sqrt{8B_n^2 + 1} + 1) + 1 \\ &= 136B_n^2 - 48B_n\sqrt{8B_n^2 + 1} + 9 \\ &= (3\sqrt{8B_n^2 + 1} - 8B_n)^2 \\ &= (3C_n - 8B_n)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$C_{n-1} = 3C_n - 8B_n \quad (2.9)$$

yazılır. (2.8) ve (2.9) eşitliklerinden,

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$$

elde edilir.

**Teorem 2.2.8.**  $C_n$ ,  $n$ . Lucas-balans sayısı ve  $\alpha_1 = 3 + \sqrt{8}$ ,  $\alpha_2 = 3 - \sqrt{8}$  olmak üzere, Lucas-balans sayılarının Binet formülü,

$$C_n = \frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n}{2}$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 2.2.5 ten,  $C_n = B_{n+1} - 3B_n$  olup Teorem 2.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{2\sqrt{8}} - 3 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{\alpha_1^n(\alpha_1 - 3) - \alpha_2^n(\alpha_2 - 3)}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{(\alpha_1^n + \alpha_2^n)\sqrt{8}}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 2.2.9.**  $m$  ve  $n$  pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$i) \quad B_{m+n} = B_m C_n + C_m B_n$$

$$ii) \quad C_{m+n} = C_m C_n + 8B_m B_n$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.8 den,

$$C_n + \sqrt{8}B_n = \alpha_1^n \tag{2.10}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \alpha_1^n \alpha_1^m &= (C_n + \sqrt{8}B_n)(C_m + \sqrt{8}B_m) \\ &= C_m C_n + \sqrt{8}C_m B_n + \sqrt{8}B_m C_n + 8B_m B_n \\ &= C_m C_n + \sqrt{8}(B_m C_n + C_m B_n) + 8B_m B_n \end{aligned}$$

elde edilir.

(2.10) dan,

$$\alpha_1^{m+n} = C_{m+n} + \sqrt{8}B_{m+n}$$

olduğundan,

$$C_{m+n} + \sqrt{8}B_{m+n} = C_m C_n + \sqrt{8}(B_m C_n + C_m B_n) + 8B_m B_n$$

bulunur. Böylece,  $C_{m+n} = C_m C_n + 8B_m B_n$  ve  $B_{m+n} = B_m C_n + C_m B_n$  elde edilir.

**Sonuç 2.2.3.**  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$i) \quad B_{2n} = 2B_n C_n$$

$$ii) \quad C_{2n} = C_n^2 + 8B_n^2$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 2.2.9 i) ve ii) de  $m = n$  alınırsa,

$$B_{2n} = 2B_n C_n \quad \text{ve} \quad C_{2n} = C_n^2 + 8B_n^2$$

elde edilir.

**Teorem 2.2.10.**  $m, n$  pozitif tam sayılar ve  $m > n$  olmak üzere,

$$i) \quad B_{m-n} = B_m C_n - C_m B_n$$

$$ii) \quad C_{m-n} = C_m C_n - 8B_m B_n$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.8 den,

$$C_n - \sqrt{8}B_n = \alpha_2^n \tag{2.11}$$

elde edilir. Buradan ve  $\alpha_2^{-n} = \alpha_1^n$  eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \alpha_2^{m-n} &= \alpha_2^m \alpha_1^n \\ &= (C_m - \sqrt{8}B_m)(C_n + \sqrt{8}B_n) \\ &= C_m C_n - 8B_m B_n - \sqrt{8}(B_m C_n - C_m B_n) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2.11) den,

$$\alpha_2^{m-n} = C_{m-n} - \sqrt{8}B_{m-n}$$

olduğundan,

$$C_{m-n} - \sqrt{8}B_{m-n} = C_m C_n - 8B_m B_n - \sqrt{8}(B_m C_n - C_m B_n)$$

bulunur. Böylece,  $C_{m-n} = C_m C_n - 8B_m B_n$  ve  $B_{m-n} = B_m C_n - C_m B_n$  elde edilir.

**Teorem 2.2.11.**  $n, r$  pozitif tam sayılar ve  $n > r$  olmak üzere,

$$B_{n+r}B_{n-r} = (B_n + B_r)(B_n - B_r)$$

dir [4].

**İspat.** Teorem 2.2.9 i) ve Teorem 2.2.10 i) den,

$$\begin{aligned} B_{n+r}B_{n-r} &= (B_n C_r + C_n B_r)(B_n C_r - C_n B_r) \\ &= B_n^2 C_r^2 - C_n^2 B_r^2 \\ &= B_n^2 (8B_r^2 + 1) - (8B_n^2 + 1)B_r^2 \\ &= B_n^2 - B_r^2 \\ &= (B_n + B_r)(B_n - B_r) \end{aligned}$$

elde edilir.

### 2.3. HEMEN HEMEN BALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, Panda ve Panda [12] nın hemen hemen balans sayıları üzerine yaptıkları çalışmada yer alan birtkım tanım ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 2.3.1.**  $n, r$  pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$|\{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+r)\} - \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\}| = 1 \quad (2.12)$$

Diofant denklemini sağlayan  $n$  sayısına hemen hemen balans sayısı,  $r$  sayısına ise  $n$  hemen hemen balans sayısına karşılık gelen hemen hemen balansır denir.

(2.12) Diofant denklemi aşağıdaki gibi iki Diofant denklem şeklinde yazılabilir:

$$\{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+r)\} - \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\} = 1 \quad (2.13)$$

$$\{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+r)\} - \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\} = -1 \quad (2.14)$$

(2.13) Diofant denklemini sağlayan  $n$  sayısına birinci türden hemen hemen balans sayısı,  $r$  sayısına ise, birinci türden hemen hemen balansır denir. Birinci türden hemen hemen balans sayıları  $A_1$ -balans sayıları olarak da adlandırılır.

(2.14) Diofant denklemini sağlayan  $n$  sayısına ikinci türden hemen hemen balans sayısı,  $r$  sayısına ise, ikinci türden hemen hemen balansır denir. İkinci türden hemen hemen balans sayıları  $A_2$ -balans sayıları olarak da adlandırılır.

(2.13) Diofant denklemi düzenlenirse,

$$n^2 + 1 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) denklemi  $r$  ye göre çözümlerse,

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+9}}{2} \quad (2.16)$$

bulunur.

(2.16) eşitliğinden aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 2.3.1.**  $n$  pozitif tam sayısının bir  $A_1$ -balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul  $8n^2 + 9$  sayısının tam kare olmasıdır.

(2.13) Diofant denklemi için yukarıda yapılan benzer işlemler (2.14) Diofant denklemi için de yapılırsa,

$$n^2 - 1 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.17) denklemi  $r$  ye göre çözümlürse,

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 - 7}}{2} \quad (2.18)$$

bulunur.

(2.18) eşitliğinden aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 2.3.2.**  $n > 2$  olmak üzere  $n$  pozitif tam sayısının bir  $A_2$ -balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul  $8n^2 - 7$  sayısının tam kare olmasıdır.

**Teorem 2.3.1.**  $8x^2 + 9 = y^2$  Diofant denkleminin pozitif tam sayı çözümleri  $n \geq 1$  olmak üzere,  $x = 3B_n$  ve  $y = 3C_n$  dir.

**İspat.**  $x > 2$  olmak üzere,  $x$  bir  $A_1$ -balans sayısı olsun. Sonuç 2.3.1 den  $8x^2 + 9 = y^2$  olacak şekilde pozitif bir  $y$  tam sayısı vardır.

$x \equiv 0 \pmod{3}$  tür. Çünkü  $x \equiv \mp 1 \pmod{3}$  olursa  $8x^2 + 9 \equiv -1 \pmod{3}$  ve buradan da  $y^2 \equiv -1 \pmod{3}$  elde edilir. Bu ise  $-1$  in modülo 3 kuadratik non-rezidü olmasıyla çelişir. O halde,  $x \equiv 0 \pmod{3}$  ve sonuç olarak  $y \equiv 0 \pmod{3}$  tür. Böylece,  $u$  ve  $v$  pozitif tam sayılar olmak üzere,  $x = 3u$  ve  $y = 3v$  yazılabilir.

$8x^2 + 9 = y^2$  den  $8u^2 + 1 = v^2$  elde edilir. O halde, Sonuç 2.2.1 den  $u$  sayısı bir balans sayısı ve  $v$  sayısı bir Lucas-balans sayısıdır. Sonuç olarak  $n \geq 0$  için,

$$x = 3B_n \quad \text{ve} \quad y = 3C_n$$

dir.

Tezin bundan sonraki kısmında,  $n$ .  $A_1$ -balans sayısı  $U_n$ ,  $n$ .  $A_2$ -balans sayısı  $V_n$  ile gösterilecektir. Yukarıdaki teorem ile tüm  $A_1$ -balans sayılarının  $U_n = 3B_n$  formunda verilebileceği görülür.

**Sonuç 2.3.3.**  $U_n, n$ .  $A_1$ -balans sayısı ve  $\alpha_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $\alpha_2 = 3 - 2\sqrt{2}$  olmak üzere,  $A_1$ -balans sayılarının Binet formülü,

$$U_n = 3 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{4\sqrt{2}}$$

dir.

$U_n = 3B_n$  olduğundan, balans sayılarının Binet formülü kullanılarak kolayca elde edilir.

**Teorem 2.3.2.**  $U_n, n$ .  $A_1$ -balans sayısı ve  $U_0 = 0$ ,  $U_1 = 3$  olmak üzere,  $A_1$ -balans sayılarının rekürans bağıntısı,

$$U_{n+1} = 6U_n - U_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

dir.

**İspat.**  $U_n = 3B_n$  olduğundan, balans sayılarının rekürans bağıntısı kullanılarak kolayca elde edilir.

**Teorem 2.3.3.**  $8x^2 - 7 = y^2$  Diofant denkleminin çözümleri, pozitif tam sayılarda iki sınıf oluşturur.  $n \geq 1$  olmak üzere, ilk çözüm sınıfı  $(x, y) = (B_n - 2B_{n-1}, C_n - 2C_{n-1})$  ve ikinci çözüm sınıfı  $(x, y) = (2B_n - B_{n-1}, 2C_n - C_{n-1})$  dir.

**İspat.**  $x$  bir  $A_2$ -balans sayısı olmak üzere, Sonuç 2.3.2 den  $8x^2 - 7 = y^2$  olacak şekilde pozitif bir  $y$  tam sayısı vardır. Bu eşitlik düzenlenirse,  $y^2 - 8x^2 = -7$  genel Pell denklemi elde edilir.  $y^2 - 8x^2 = 1$  Pell denkleminin temel çözümü  $(3, 1)$  ve  $y^2 - 8x^2 = -7$  genel Pell denkleminin temel çözümleri ise  $(1, 1)$  ve  $(5, 2)$  olduğundan Teorem 2.1.5 ten birinci çözüm sınıfı için genel çözüm,

$$y_n + \sqrt{8}x_n = (1 + \sqrt{8})(3 + \sqrt{8})^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (2.19)$$

ve ikinci çözüm sınıfı için genel çözüm,

$$y'_n + \sqrt{8}x'_n = (5 + 2\sqrt{8})(3 + \sqrt{8})^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (2.20)$$

şeklindedir. (2.19) ve (2.20) eşitliklerinden,

$$x_n = \frac{(3 + \sqrt{8})^n + (3 - \sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}} - 2 \frac{(3 + \sqrt{8})^{n-1} + (3 - \sqrt{8})^{n-1}}{2\sqrt{8}}$$

$$y_n = \frac{(3 + \sqrt{8})^n + (3 - \sqrt{8})^n}{2} - 2 \frac{(3 + \sqrt{8})^{n-1} + (3 - \sqrt{8})^{n-1}}{2}$$

$$x'_n = 2 \frac{(3 + \sqrt{8})^n - (3 - \sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}} - \frac{(3 + \sqrt{8})^{n-1} - (3 - \sqrt{8})^{n-1}}{2\sqrt{8}}$$

$$y'_n = 2 \frac{(3 + \sqrt{8})^n + (3 - \sqrt{8})^n}{2} - \frac{(3 + \sqrt{8})^{n-1} + (3 - \sqrt{8})^{n-1}}{2}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitlikler, balans ve Lucas-balans sayılarının Binet formülleri kullanılarak düzenlenirse,

$$x_n = B_n - 2B_{n-1} \quad , \quad y_n = C_n - 2C_{n-1} \quad (2.21)$$

$$x'_n = 2B_n - B_{n-1} \quad , \quad y'_n = 2C_n - C_{n-1} \quad (2.22)$$

elde edilir.

(2.21), (2.22) eşitliklerinden  $V_{2n-1} = B_n - 2B_{n-1}$  ve  $V_{2n} = 2B_n - B_{n-1}$  alınıp Teorem 2.2.6 kullanılarak,

$$V_{2n-1} = 2C_n - 5B_n \quad (2.23)$$

$$V_{2n} = C_n - B_n \quad (2.24)$$

elde edilir.

**Sonuç 2.3.4.**  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$V_{2n+1} = C_n + B_n$$

dir.

**İspat.** (2.23), Teorem 2.2.5 ve Teorem 2.2.6 kullanılarak,

$$\begin{aligned} V_{2n+1} &= 2C_{n+1} - 5B_{n+1} \\ &= 2(3B_{n+1} - B_n) - 5B_{n+1} \\ &= B_{n+1} - 2B_n \\ &= C_n + B_n \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 2.3.4.**  $x$  bir  $A_1$ -balans sayısı olmak üzere,

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 9}$$

$x$  sayısından hemen sonra gelen  $A_1$ -balans sayısıdır.

**İspat.**  $y$  bir balans sayısı olsun. Teorem 2.2.5 ten  $y$  sayısından hemen sonra gelen balans sayısı  $3y + \sqrt{8y^2 + 1}$  dir.  $x$  bir  $A_1$ -balans sayısı olsun. O halde,  $x = 3y$  yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 3x + \sqrt{8x^2 + 9} &= 9y + \sqrt{72y^2 + 9} \\ &= 3(3y + \sqrt{8y^2 + 1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 2.3.5.**  $V_n, n$ .  $A_2$ -balans sayısı ve  $V_0 = 1, V_1 = 1, V_2 = 2, V_3 = 4$  olmak üzere,  $A_2$ -balans sayılarının rekürans bağıntısı,

$$V_{n+2} = 6V_n - V_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

dir.

**Teorem 2.3.6.**  $n$  pozitif bir tam sayı ve  $\alpha_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \alpha_2 = 3 - 2\sqrt{2}$  olmak üzere,

$$V_{2n} = \frac{(2\sqrt{2} - 1)\alpha_1^n + (2\sqrt{2} + 1)\alpha_2^n}{4\sqrt{2}}$$

$$V_{2n-1} = \frac{(2\sqrt{2} + 1)\alpha_1^{n-1} - (2\sqrt{2} - 1)\alpha_2^{n-1}}{4\sqrt{2}}$$

dir.

**İspat.** Balans ve Lucas-balans sayılarının Binet formülleri kullanılarak kolayca elde edilir.

**Teorem 2.3.7.**  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$U_n = 2V_{2n} - V_{2n-1}$$

dir.

Ayrıca,

$$B_n = \frac{2V_{2n} - V_{2n-1}}{3}$$

$$C_n = \frac{5V_{2n} - V_{2n-1}}{3}$$

tür.

**İspat.** (2.23) ve (2.24) eşitliklerinden,

$$B_n = \frac{2V_{2n} - V_{2n-1}}{3} \quad \text{ve} \quad C_n = \frac{5V_{2n} - V_{2n-1}}{3}$$

elde edilir.  $U_n = 3B_n$  olduğundan,

$$U_n = 2V_{2n} - V_{2n-1}$$

bulunur.

## 2.4. ŞİFT BALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, Rayaguru, Davala ve Panda [13] nın şift balans sayıları üzerine araştırmalarını içeren çalışmada yer alan tanım ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 2.4.1.**  $k$  sabit bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(k+1) + (k+2) + \cdots + (x-1) = (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+r) \quad (2.25)$$

Diofant denklemini sağlayan  $x$  pozitif tam sayısına  $k$ -şift balans sayısı ve  $r$  pozitif tam sayısına da  $k$ -şift balansır denir.

(2.25) Diofant denkleminde,

$$(x-1)x - k(k+1) = (x+r)(x+r+1) - x(x+1) \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.26) denklemini  $r$  ye göre çözümlerse,

$$r = \frac{-(2x+1) + \sqrt{8x^2 - 4k^2 - 4k + 1}}{2} \quad (2.27)$$

bulunur.

(2.27) eşitliğinden aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 2.4.1.**  $x$  sayısının bir  $k$ -şift balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul  $8x^2 - 4k^2 - 4k + 1$  sayısının bir tam kare olmasıdır.

**Teorem 2.4.1.**  $k \geq 1$  olmak üzere,

$$(k+1) + (k+2) + \cdots + (x-1) = (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+r)$$

Diofant denklemini sağlayan  $x$  değerlerinin ait olduğu çözüm sınıfları birden fazla olabilir. Bu çözüm sınıflarından iki tanesi,

$$kC_i + (2k-1)B_i \quad \text{ve} \quad kC_{i+1} - (2k-1)B_{i+1} \quad (i \geq 1)$$

dir.

**İspat.**  $x$  bir  $k$ -şift balans sayısı olsun. Sonuç 2.4.1 den  $8x^2 - 4k^2 - 4k + 1$  sayısı bir tam karedir. O halde,

$$(2k-1)^2 x^2 \equiv k^2(8x^2 - 4k^2 - 4k + 1) \pmod{4k^2 + 4k - 1}$$

yazılabilir. Buradan,

$$(2k-1)x \equiv \pm k\sqrt{8x^2 - 4k^2 - 4k + 1} \pmod{4k^2 + 4k - 1} \quad (2.28)$$

elde edilir. (2.28) den,  $\frac{(2k-1)x+k\sqrt{8x^2-4k^2-4k+1}}{4k^2+4k-1}$  veya  $\frac{(2k-1)x-k\sqrt{8x^2-4k^2-4k+1}}{4k^2+4k-1}$  sayıları birer doğal sayıdır.

$$8 \left[ \frac{(2k-1)x \pm k\sqrt{8x^2 - 4k^2 - 4k + 1}}{4k^2 + 4k - 1} \right]^2 + 1 = \left[ \frac{8kx \pm (2k-1)\sqrt{8x^2 - 4k^2 - 4k + 1}}{4k^2 + 4k - 1} \right]^2$$

olduğundan

$$\frac{8kx + (2k-1)\sqrt{8x^2 - 4k^2 - 4k + 1}}{4k^2 + 4k - 1} \quad \text{ya da} \quad \frac{8kx - (2k-1)\sqrt{8x^2 - 4k^2 - 4k + 1}}{4k^2 + 4k - 1}$$

sayısı bir Lucas-balans sayısıdır. O halde,  $C = \sqrt{8B^2 + 1}$  olmak üzere,

$$C = \frac{8kx \pm (2k-1)\sqrt{8x^2 - 4k^2 - 4k + 1}}{4k^2 + 4k - 1}$$

yazılabilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde,

$$[8kx - (4k^2 + 4k - 1)C]^2 = (2k-1)^2(8x^2 - 4k^2 - 4k + 1)$$

bulunur. Buradan,

$$8x^2 - 16Ckx + (4k^2 + 4k - 1)C^2 + (4k^2 - 4k + 1) = 0$$

kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklem  $x$  e göre çözüldüğünde,

$$x = kC \pm (2k-1)B$$

elde edilir.

Ayrıca,

$$8[kC \pm (2k-1)B]^2 - 4k^2 - 4k + 1 = [8Bk \pm (2k-1)C]^2$$

olup  $8[kC \pm (2k-1)B]^2 - 4k^2 - 4k + 1$  sayısının bir tam kare sayı olduğu görülür.

Böylece,  $i \geq 1$  için,  $k$ -şift balans sayılarının gerçekleştiği Diofant denklemin iki çözüm sınıfı sırasıyla,

$$kC_i + (2k-1)B_i \quad \text{ve} \quad kC_{i+1} - (2k-1)B_{i+1}$$

olur .

Şimdi  $k = 1, 2, 3$  için  $k$ -şift balans sayıları ile ilgili temel bilgilere yer verelim.

### 1-Şift Balans Sayıları

(2.25) Diofant denklemi  $k = 1$  için yeniden düzenlenirse,

$$\{(x+1) + (x+2) + \dots + (x+r)\} - \{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (x-1)\} = -1$$

elde edilir. Bu Diofant denklemini sağlayan  $x$  pozitif tam sayısına 1-şift balans sayısı,  $r$  pozitif tam sayısına ise 1-şift balansır denir.

Elde edilen bu Diofant denklem, (2.14) Diofant denklemiyle aynıdır. Dolayısıyla 1-şift balans sayılarından oluşan dizinin  $A_2$ -balans sayılarından oluşan dizi ile çakıştığı görülür. 1-şift balans sayılarının çözüm sınıfları,

$$B_i - 2B_{i-1} \quad \text{ve} \quad 2B_i - B_{i-1} \quad (i \geq 1)$$

dir. Sonuç 2.3.4 ve (2.24) ten,

$$\{C_i + B_i, C_{i+1} - B_{i+1} : i \geq 1\}$$

kümesi, 1-şift balans sayılarından oluşan dizinin tüm terimlerini verir.

## 2-Şift Balans Sayıları

(2.25) Diofant denklemi  $k = 2$  için yeniden düzenlenirse,

$$3 + 4 + \cdots + (x - 1) = (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (x + r)$$

elde edilir. Bu Diofant denklemini sağlayan  $x$  pozitif tam sayısına 2-şift balans sayısı,  $r$  pozitif tam sayısına ise 2-şift balansır denir.

Aşağıdaki örnekler 9, 16, 52 sayılarının 2-şift balans sayısı ve 3, 6, 21 sayılarının da bu 2-şift balans sayılarına karşılık gelen 2-şift balansır olduklarını gösterir.

$$(1) \quad 3 + 4 + \cdots + 8 = 10 + 11 + 12$$

$$(2) \quad 3 + 4 + \cdots + 15 = 17 + 18 + \cdots + 22$$

$$(3) \quad 3 + 4 + \cdots + 51 = 53 + 54 + \cdots + 73$$

$x$  bir 2-şift balans sayısı ise Sonuç 2.4.1 den  $8x^2 - 23$  sayısı bir tam karedir.

Teorem 2.4.1 den 2-şift balans sayılarının gerçekleştiği Diofant denklemin çözüm sınıfları,

$$2C_i + 3B_i \quad \text{ve} \quad 2C_{i+1} - 3B_{i+1} \quad (i \geq 1)$$

dir.

## 3-Şift Balans Sayıları

(2.25) Diofant denklemi  $k = 3$  için yeniden düzenlenirse,

$$4 + \cdots + (x - 1) = (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (x + r)$$

elde edilir. Bu Diofant denklemini sağlayan  $x$  pozitif tam sayısına 3-şift balans sayısı,  $r$  pozitif tam sayısına ise 3-şift balansır denir.

Aşağıdaki örnek, 14 sayısının bir 3-şift balans sayısı ve 5 sayısının ise bu 3-şift balans sayısına karşılık gelen bir 3-şift balansır olduğunu göstermektedir.

$$4 + 5 + \cdots + 13 = 15 + 16 + \cdots + 19$$

3-şift balans sayılarına ait Diofant denklemi sağlayan en küçük pozitif tam sayı 14 tür.

$x$  bir 3-şift balans sayısı ise Sonuç 2.4.1 den  $8x^2 - 47$  sayısı bir tam karedir.

Teorem 2.4.1 den 3-şift balans sayılarının gerçekleştiği Diofant denklemin çözüm sınıfları,

$$3C_i + 5B_i \quad \text{ve} \quad 3C_{i+1} - 5B_{i+1} \quad (i \geq 1)$$

dir.

### 3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, kaynaklar kısmında belirtilen kitap ve makalelerden faydalanılmıştır. Bulgular bölümündeki ispatlarda, Ray [4], Panda ve Panda [12] nın çalışmalarında kullanılan tekniklerden yararlanılmıştır. Balans ve Lucas-balans sayıları arasındaki ilişkilerden yola çıkılarak 3-şift balans sayıları kullanılmak suretiyle, 3-şift Lucas-balans sayıları tanımlanmıştır. Rayaguru, Davala ve Panda [13] nın çalışmalarındaki teoremler ışığında 3-şift balans ve 3-şift Lucas-balans sayıları için geçerli olan özgün teoremler elde edilmiştir.

## 4. BULGULAR

Bu bölümde, 3-şift balans sayıları incelenmiş ve bu sayılarla ilgili elde edilen teorem ve sonuçlar sunulmuştur. Tek ve çift indisli bir 3-şift balans sayısının, kendisinden hemen önce veya hemen sonra gelen tek ve çift indisli 3-şift balans sayısı kullanılarak bulunabileceği gösterilmiştir. Balans sayılarını kullanarak 3-şift balans sayılarını üreten fonksiyonlar elde edilmiştir. Tek ve çift indisli 3-şift balans sayıları ile birinci ve ikinci türden hemen hemen balans sayıları arasında birtakım cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir. 3-şift balans sayılarına benzer şekilde, tek ve çift indisli 3-şift Lucas-balans sayıları tanımlanmıştır ve bu sayılarla ilgili bazı cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir.

Tezin bu kısmında,  $n$ . 3-şift balans sayısı  $B_n(3)$  ile gösterilmiştir.

### 4.1. 3-ŞİFT BALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, 3-şift balans sayıları ile ilgili özgün teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

#### 4.1.1. 3-Şift Balans Sayılarının Bazı Cebirsel Özellikleri

Bu kısımda, ilk olarak 3-şift balans sayıların gerçeklediği Diofant denklemin çözüm sınıfları elde edilmiştir. Daha sonra 3-şift balans sayılarının birtakım cebirsel özellikleri incelenmiştir.

**Teorem 4.1.1.1.** 3-şift balans sayılarının gerçeklediği Diofant denklemin tam olarak iki tane çözüm sınıfı vardır. Bu çözüm sınıfları,

$$\{3C_n + 5B_n, \quad 3C_{n+1} - 5B_{n+1} : n \geq 1\}$$

dir.

**İspat.**  $x$  bir 3-şift balans sayısı olsun. O halde, Sonuç 2.4.1 den,  $8x^2 - 47 = y^2$  olacak şekilde pozitif bir  $y$  tam sayısı vardır. Buradan,  $y^2 - 8x^2 = -47$  genel Pell denklemi elde edilir. Böylece 3-şift balans sayılarını elde etmeye dair yapılan bu araştırma,  $y^2 - 8x^2 = -47$  genel Pell denkleminin çözüm sınıflarını bulmaya dönüşür.

O halde bu denklemin genel çözümleri  $(u_n, v_n)$  olmak üzere, bu çözümleri bulalım.

$y^2 - 8x^2 = 1$  Pell denkleminin temel çözümü  $3 + \sqrt{8}$  dir. Teorem 2.1.4 ten,

$$0 < v \leq \frac{1}{2}\sqrt{47} \quad \text{ve} \quad 0 \leq |u| \leq \sqrt{47}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizliklerden  $u$  ve  $v$  sayılarının alabileceği değerler,

$u = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 5, \mp 6$  ve  $v = 1, 2, 3$  şeklinde bulunur. Bu değerlerden  $(5, 3)$  ve  $(-5, 3)$  değerleri,  $y^2 - 8x^2 = -47$  genel Pell denklemini sağlar. O halde, bu denklemin genel çözümü Teorem 2.1.5 ten,

$$u_n + v_n\sqrt{8} = (5 + 3\sqrt{8})(3 + \sqrt{8})^n$$

$$u'_n + v'_n\sqrt{8} = (-5 + 3\sqrt{8})(3 + \sqrt{8})^n$$

şeklindedir.

$\alpha_1 = 3 + \sqrt{8}$  ve  $\alpha_2 = 3 - \sqrt{8}$  olmak üzere,

$$u_n + v_n\sqrt{8} = (5 + 3\sqrt{8})\alpha_1^n$$

$$u_n - v_n\sqrt{8} = (5 - 3\sqrt{8})\alpha_2^n$$

eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{8}v_n &= (5 + 3\sqrt{8})\alpha_1^n - (5 - 3\sqrt{8})\alpha_2^n \\ &= 5\alpha_1^n + 3\sqrt{8}\alpha_1^n - 5\alpha_2^n + 3\sqrt{8}\alpha_2^n \\ &= 5(\alpha_1^n - \alpha_2^n) + 3\sqrt{8}(\alpha_1^n + \alpha_2^n) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} v_n &= 5\frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{2\sqrt{8}} + 3\sqrt{8}\frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n}{2\sqrt{8}} \\ &= 5B_n + 3C_n \end{aligned}$$

yazılır.

Benzer şekilde,

$$u'_n + v'_n \sqrt{8} = (-5 + 3\sqrt{8})\alpha_1^n$$

$$u'_n - v'_n \sqrt{8} = (-5 - 3\sqrt{8})\alpha_2^n$$

eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{8}v_{n'} &= (-5 + 3\sqrt{8})\alpha_1^n - (-5 - 3\sqrt{8})\alpha_2^n \\ &= -5\alpha_1^n + 3\sqrt{8}\alpha_1^n + 5\alpha_2^n + 3\sqrt{8}\alpha_2^n \\ &= -5(\alpha_1^n - \alpha_2^n) + 3\sqrt{8}(\alpha_1^n + \alpha_2^n) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} v_{n'} &= -5 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{2\sqrt{8}} + 3\sqrt{8} \frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n}{2\sqrt{8}} \\ &= -5B_n + 3C_n \end{aligned}$$

yazılır.

Böylece, 3-şift balans sayılarının gerçekleştiği Diofant denklemin iki çözüm sınıfı,

$$3C_n + 5B_n \quad \text{ve} \quad 3C_{n+1} - 5B_{n+1}$$

dir.

**Sonuç 4.1.1.1.** Çift ve tek indisli 3-şift balans sayıları,

$$B_{2n}(3) = 3C_n + 5B_n \quad (n \geq 0)$$

$$B_{2n+1}(3) = 3C_{n+1} - 5B_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

ile gösterilir.

(2.25) Diofant denklemini sağlayan en küçük 3-şift balans sayılarının 14 ve 21 olduğu açık olmakla birlikte,  $n = 3$  ve  $n = 4$  için,  $8n^2 - 47$  sayısı bir tam kare olduğundan 3 ve 4 sayıları da 3-şift balans sayısı olarak kabul edilebilir.

3-şift balans sayıları, aşağıda verilen dördüncü mertebeden rekürans bağıntısını gerçekleştir.

**Teorem 4.1.1.2.**  $B_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift balans sayısı,  $B_0(3) = 3$ ,  $B_1(3) = 4$ ,  $B_2(3) = 14$  ve  $B_3(3) = 21$  olmak üzere, 3-şift balans sayılarının rekürans bağıntısı,

$$B_n(3) = 6B_{n-2}(3) - B_{n-4}(3) \quad (n \geq 4)$$

dir.

**İspat.** İspat, sırasıyla 3-şift balans sayı dizisinin çift ve tek indisli terimleri için ayrı ayrı yapılır. Sonuç 4.1.1.1, Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.7 den,

$$\begin{aligned} B_{2n}(3) + B_{2n-4}(3) &= 3C_n + 5B_n + 3C_{n-2} + 5B_{n-2} \\ &= 3(C_n + C_{n-2}) + 5(B_n + B_{n-2}) \\ &= 3(6C_{n-1}) + 5(6B_{n-1}) \\ &= 6(3C_{n-1} + 5B_{n-1}) \\ &= 6B_{2n-2}(3) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$B_{2n}(3) = 6B_{2n-2}(3) - B_{2n-4}(3) \quad (4.1)$$

yazılır. Böylece, 3-şift balans sayı dizisinin çift indisli terimleri için rekürans bağıntısının sağlandığı gösterilmiş olur.

Şimdi, 3-şift balans sayı dizisinin tek indisli terimleri için ispata devam edelim. Sonuç 4.1.1.1, Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.7 den,

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(3) + B_{2n-3}(3) &= 3C_{n+1} - 5B_{n+1} + 3C_{n-1} - 5B_{n-1} \\ &= 3(C_{n+1} + C_{n-1}) - 5(B_{n+1} + B_{n-1}) \\ &= 3(6C_n) - 5(6B_n) \\ &= 6(3C_n - 5B_n) \\ &= 6B_{2n-1}(3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$B_{2n+1}(3) = 6B_{2n-1}(3) - B_{2n-3}(3) \quad (4.2)$$

yazılır.

Aşağıdaki teorem ile 3-şift balans sayılarının Binet formülü verilmiştir.

**Teorem 4.1.1.3.**  $B_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift balans sayısı ve  $\alpha_1 = 3 + \sqrt{8}$ ,  $\alpha_2 = 3 - \sqrt{8}$  olmak üzere,

$$B_{2n}(3) = \frac{\alpha_1^n(5 + 3\sqrt{8}) - \alpha_2^n(5 - 3\sqrt{8})}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$B_{2n+1}(3) = \frac{\alpha_1^n(9 + 4\sqrt{8}) - \alpha_2^n(9 - 4\sqrt{8})}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

dir.

**İspat.** Sonuç 4.1.1.1, Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.8 den,

$$\begin{aligned} B_{2n}(3) &= 3 \frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n}{2} + 5 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{3\sqrt{8}\alpha_1^n + 3\sqrt{8}\alpha_2^n + 5\alpha_1^n - 5\alpha_2^n}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{\alpha_1^n(5 + 3\sqrt{8}) - \alpha_2^n(5 - 3\sqrt{8})}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{\alpha_1^n(5 + 3\sqrt{8}) - \alpha_2^n(5 - 3\sqrt{8})}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Sonuç 4.1.1.1, Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.8 den,

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(3) &= 3 \frac{\alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1}}{2} - 5 \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{3\sqrt{8}\alpha_1^{n+1} + 3\sqrt{8}\alpha_2^{n+1} - 5\alpha_1^{n+1} + 5\alpha_2^{n+1}}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{\alpha_1^{n+1}(-5 + 3\sqrt{8}) - \alpha_2^{n+1}(-5 - 3\sqrt{8})}{2\sqrt{8}} \\ &= \frac{\alpha_1^n(9 + 4\sqrt{8}) - \alpha_2^n(9 - 4\sqrt{8})}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.1.4.**  $B_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift balans sayısını göstermek üzere,

$$B_n^2(3) = B_{n-2}(3)B_{n+2}(3) - 47 \quad (n \geq 2)$$

dir.

**İspat.** İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 2$  için,  $B_2^2(3) = B_0(3)B_4(3) - 47 = 196$  olduğundan iddia doğrudur.  $n \leq k$  için, iddia doğru olsun. Şimdi  $n = k + 1$  için, iddianın doğru olduğunu gösterelim. Teorem 4.1.1.2 den,

$$\begin{aligned} B_{k+1}^2(3) &= (6B_{k-1}(3) - B_{k-3}(3))B_{k+1}(3) \\ &= 6B_{k-1}(3)B_{k+1}(3) - B_{k-3}(3)B_{k+1}(3) \\ &= 6B_{k-1}(3)B_{k+1}(3) - B_{k-1}^2(3) - 47 \\ &= B_{k-1}(3)(6B_{k+1}(3) - B_{k-1}(3)) - 47 \\ &= B_{k-1}(3)B_{k+3}(3) - 47 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, iddianın  $n = k + 1$  için doğru olduğu gösterilmiş olur.

Aşağıdaki tabloda tek ve çift indisli 3-şift balans sayılarının ilk 10 terimi verilmiştir.

**Tablo 4.1:** 3-Şift Balans Sayılarının İlk On Terimi.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_{2n}(3)$	3	14	81	472	2751	16.034	93.453	544.684	3.174.651	18.503.222
$B_{2n+1}(3)$	4	21	122	711	4144	24.153	140.774	820.491	4.782.172	27.872.541

Tablo 4.1 den gözlemlenebileceği üzere, aşağıdaki iki teorem verilebilir:

**Teorem 4.1.1.5.**  $n$  tek pozitif tam sayı olmak üzere,  $B_{2n}(3)$  çift pozitif tam sayı ve  $B_{2n+1}(3)$  tek pozitif tam sayıdır.

**İspat.**  $n$  tek pozitif tam sayı olsun. O halde,  $n = 2k + 1$  olacak şekilde  $k$  pozitif tam sayısı vardır. Sonuç 4.1.1.1, Teorem 2.2.5, Sonuç 2.2.3 i) den,

$$\begin{aligned} B_{4k+2}(3) &= 3B_{2k+2} - 4B_{2k+1} \\ &= 2(3B_{k+1}C_{k+1} - 2B_{2k+1}) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,  $B_{2n}(3) = B_{4k+2}(3)$  olduğundan  $B_{2n}(3)$  sayısının çift pozitif tam sayı olduğu gösterilmiş olur.

Benzer şekilde, Sonuç 4.1.1.1 ve Sonuç 2.2.3 i) den,

$$B_{4k+3}(3) = 3C_{2k+2} - 10B_{k+1}C_{k+1}$$

elde edilir. Her  $k \geq 0$  için  $C_k$  tek pozitif tam sayı olduğundan  $B_{4k+3}(3)$  sayısı tek pozitif tam sayıdır. Böylece,  $B_{2n+1}(3) = B_{4k+3}(3)$  eşitliğinden  $B_{2n+1}(3)$  sayısının tek pozitif tam sayı olduğu gösterilmiş olur. .

**Teorem 4.1.1.6.**  $n$  çift pozitif tam sayı olmak üzere,  $B_{2n}(3)$  tek pozitif tam sayı ve  $B_{2n+1}(3)$  çift pozitif tam sayıdır.

**İspat.**  $n$  çift pozitif tam sayı olsun. O halde,  $n = 2k$  olacak şekilde bir  $k$  pozitif tam sayısı vardır. Sonuç 4.1.1.1 ve Sonuç 2.2.3 i) den,

$$B_{4k}(3) = 3C_{2k} + 10B_kC_k$$

elde edilir.

Her  $k \geq 0$  için  $C_k$  tek pozitif tam sayı olduğundan  $B_{4k}(3)$  sayısı tek pozitif tam sayıdır. Böylece,  $B_{2n}(3) = B_{4k}(3)$  eşitliğinden  $B_{2n}(3)$  sayısının tek pozitif tam sayı olduğu gösterilmiş olur. Benzer şekilde, Sonuç 4.1.1.1, Teorem 2.2.5 ve Sonuç 2.2.3 i) den,

$$\begin{aligned} B_{4k+1}(3) &= 3B_{2k+2} - 14B_{2k+1} \\ &= 2(3B_{k+1}C_{k+1} - 7B_{2k+1}) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,  $B_{2n+1}(3) = B_{4k+1}(3)$  olduğundan  $B_{2n+1}(3)$  sayısının çift pozitif tam sayı olduğunu gösterilmiş olur.



### 4.1.2. 3-Şift Balans Sayılarını Üreten Fonksiyonlar

Bu kısımda, 3-şift balans sayılarını üreten fonksiyonlar ile ilgili araştırmalar yapılmış ve 3-şift balans sayılarını üreten birtakım fonksiyonlar elde edilmiştir.

**Teorem 4.1.2.1.**  $y$  çift indisli 3-şift balans sayısı olmak üzere  $h(y) = 3y - \sqrt{8y^2 - 47}$  fonksiyonu  $y$  den bir önceki çift indisli 3-şift balans sayısını,  $\tilde{h}(y) = 3y + \sqrt{8y^2 - 47}$  fonksiyonu ise  $y$  den bir sonraki çift indisli 3-şift balans sayısını verir. Benzer şekilde,  $y$  tek indisli 3-şift balans sayısı olmak üzere  $h(y) = 3y - \sqrt{8y^2 - 47}$  fonksiyonu  $y$  den bir önceki tek indisli 3-şift balans sayısını,  $\tilde{h}(y) = 3y + \sqrt{8y^2 - 47}$  fonksiyonu ise  $y$  den bir sonraki tek indisli 3-şift balans sayısını verir.

**İspat.**  $y$  herhangi bir çift indisli 3-şift balans sayısı olsun. Sonuç 4.1.1.1 kullanılarak,  $y = B_{2n}(3) = 3C_n + 5B_n$  yazılır. Teorem 4.1.1.2 den,

$$B_{2n+2}(3) = 3B_{2n}(3) + (3B_{2n}(3) - B_{2n-2}(3))$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} (3B_{2n}(3) - B_{2n-2}(3))^2 &= 9B_{2n}^2(3) + B_{2n-2}^2(3) - 6B_{2n}(3)B_{2n-2}(3) \\ &= 9B_{2n}^2(3) + B_{2n-2}^2(3) - (B_{2n+2}(3) + B_{2n-2}(3))B_{2n-2}(3) \\ &= 9B_{2n}^2(3) - B_{2n-2}(3)B_{2n+2}(3) \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Sonuç 4.1.1.1 den,

$$B_{2n-2}(3)B_{2n+2}(3) = (3C_{n-1} + 5B_{n-1})(3C_{n+1} + 5B_{n+1})$$

yazılır.

Teorem 2.2.3, Sonuç 2.2.3 ve Teorem 2.2.9 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B_{2n-2}(3)B_{2n+2}(3) &= 9(C_{2n} - 8B_{n+1}B_{n-1}) + 15B_{2n} + 25B_{n+1}B_{n-1} \\
&= 9C_{2n} - 72B_{n+1}B_{n-1} + 15B_{2n} + 25B_{n+1}B_{n-1} \\
&= 9C_{2n} + 15B_{2n} - 47B_{n+1}B_{n-1} \\
&= 9C_{2n} + 15B_{2n} - 47(B_n^2 - 1) \\
&= 9(C_n^2 + 8B_n^2) + 15(2B_nC_n) - 47B_n^2 + 47 \\
&= (3C_n + 5B_n)^2 + 47
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Sonuç 4.1.1.1, (4.3) ve (4.4) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(3B_{2n}(3) - B_{2n-2}(3))^2 &= 9B_{2n}^2(3) - (3C_n + 5B_n)^2 - 47 \\
&= 9B_{2n}^2(3) - B_{2n}^2(3) - 47 \\
&= 8B_{2n}^2(3) - 47
\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$B_{2n-2}(3) = 3B_{2n}(3) - \sqrt{8B_{2n}^2(3) - 47} \tag{4.5}$$

elde edilir. Böylece,  $h(y) = 3y - \sqrt{8y^2 - 47}$  fonksiyonunun  $B_{2n-2}(3)$  sayısını, yani  $y = B_{2n}(3)$  sayısından bir önceki çift indisli 3-şift balans sayısını verdiği gösterilmiş olur.

Şimdi  $\tilde{h}$  fonksiyonun inceleyelim. (4.5) ve Teorem 4.1.1.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B_{2n+2}(3) &= 3B_{2n}(3) + 3B_{2n}(3) - B_{2n-2}(3) \\
&= 3B_{2n}(3) + \sqrt{8B_{2n}^2(3) - 47}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,  $\tilde{h}(y) = 3y + \sqrt{8y^2 - 47}$  fonksiyonunun  $B_{2n+2}(3)$  sayısını, yani  $y = B_{2n}(3)$  sayısından bir sonraki çift indisli 3-şift balans sayısını verdiği gösterilmiş olur.

Şimdi,  $y$  nin herhangi bir tek indisli 3-şift balans sayısı olduğu durumu inceleyelim.

Sonuç 4.1.1.1 kullanılarak,  $y = B_{2n+1}(3) = 3C_{n+1} - 5B_{n+1}$  yazılır. Teorem 4.1.1.2 den,

$$B_{2n+3}(3) = 3B_{2n+1}(3) + (3B_{2n+1}(3) - B_{2n-1}(3))$$

bulunur.

Buradan,

$$\begin{aligned}
(3B_{2n+1}(3) - B_{2n-1}(3))^2 &= 9B_{2n+1}^2(3) + B_{2n-1}^2(3) - 6B_{2n+1}(3)B_{2n-1}(3) \\
&= 9B_{2n+1}^2(3) + B_{2n-1}^2(3) - (B_{2n+3}(3) + B_{2n-1}(3))B_{2n-1}(3) \\
&= 9B_{2n+1}^2(3) - B_{2n-1}(3)B_{2n+3}(3)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. Sonuç 4.1.1.1 den,

$$B_{2n-1}(3)B_{2n+3}(3) = (3C_n - 5B_n)(3C_{n+2} - 5B_{n+2})$$

yazılır. Teorem 2.2.3, Sonuç 2.2.3 ve Teorem 2.2.10 ii) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B_{2n-1}(3)B_{2n+3}(3) &= 9C_nC_{n+2} - 15B_nC_{n+2} - 15B_{n+2}C_n + 25B_nB_{n+2} \\
&= 9C_nC_{n+2} - 15B_{2n+2} + 25B_nB_{n+2} \\
&= 9(C_{n+1}^2 + 8B_{n+1}^2 - 8B_nB_{n+2}) - 15(2B_{n+1}C_{n+1}) + 25B_nB_{n+2} \\
&= 9C_{n+1}^2 + 25B_{n+1}^2 - 30B_{n+1}C_{n+1} + 47 \\
&= (3C_{n+1} - 5B_{n+1})^2 + 47
\end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Sonuç 4.1.1.1, (4.6) ve (4.7) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(3B_{2n+1}(3) - B_{2n-1}(3))^2 &= 9B_{2n+1}^2(3) - (3C_{n+1} - 5B_{n+1})^2 - 47 \\
&= 9B_{2n+1}^2(3) - B_{2n+1}^2(3) - 47 \\
&= 8B_{2n+1}^2(3) - 47
\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$B_{2n-1}(3) = 3B_{2n+1}(3) - \sqrt{8B_{2n+1}^2(3) - 47} \tag{4.8}$$

elde edilir. Böylece,  $h(y) = 3y - \sqrt{8y^2 - 47}$  fonksiyonunun  $B_{2n-1}(3)$  sayısını, yani  $y = B_{2n+1}(3)$  sayısından bir önceki tek indisli 3-şift balans sayısını verdiği gösterilmiş olur.

Şimdi,  $\tilde{h}$  fonksiyonunu inceleyelim. (4.8) ve Teorem 4.1.1.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B_{2n+3}(3) &= 3B_{2n+1}(3) + 3B_{2n+1}(3) - B_{2n-1}(3) \\
&= 3B_{2n+1}(3) + \sqrt{8B_{2n+1}^2(3) - 47}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece,  $\tilde{h}(y) = 3y + \sqrt{8y^2 - 47}$  fonksiyonunun  $B_{2n+3}(3)$  sayısını, yani  $y = B_{2n+1}(3)$  sayısından bir sonraki tek indisli 3-şift balans sayısını verdiği gösterilmiş olur.

Bu kısımda son olarak, çift indisli 3-şift balans sayılarını ve tek indisli 3-şift balans sayılarını üreten fonksiyonlar ile ilgili aşağıdaki sonuca yer verilmiştir. Bu sonuç, Lucas-balans sayılarının tanımı ve Sonuç 4.1.1.1 kullanılarak elde edilmiştir.

**Sonuç 4.1.2.1.**  $x$  bir balans sayısı olmak üzere,

$$\alpha(x) = 5x + 3\sqrt{8x^2 + 1}$$

$$\beta(x) = -5x + 3\sqrt{8x^2 + 1}$$

fonksiyonlarından  $\alpha(x)$  fonksiyonu, çift indisli 3-şift balans sayılarını;  $\beta(x)$  fonksiyonu, tek indisli 3-şift balans sayılarını üreten fonksiyonlardır.

### 4.1.3. Balans Sayılarını 3-Şift Balans Sayıları ile Üreten Fonksiyonlar

Bu kısımda, 3-şift balans sayıları kullanılarak balans sayılarını üreten fonksiyonlar elde edilmiştir.

**Teorem 4.1.3.1.**  $y$  tek indisli bir 3-şift balans sayısı olmak üzere,

$$g(y) = \frac{5y + 3\sqrt{8y^2 - 47}}{47}$$

bir balans sayısıdır.

**İspat.**  $x$  bir balans sayısı olmak üzere, Sonuç 4.1.2.1 den,

$$\beta(x) = -5x + 3\sqrt{8x^2 + 1}$$

fonksiyonu tek indisli bir 3-şift balans sayısıdır.  $y = \beta(x)$  olarak alınırsa,

$$y^2 + 25x^2 + 10xy = 72x^2 + 9$$

olup buradan,

$$47(y^2 + 25x^2 + 10xy) = 47(72x^2 + 9)$$

yazılır. Bu son eşitlikten,

$$9(8y^2 - 47) = (-5y + 47x)^2$$

elde edilir. Böylece,

$$x = \frac{5y + 3\sqrt{8y^2 - 47}}{47}$$

bulunur. O halde,  $\beta^{-1}(y) = x$  ve  $x$  bir balans sayısı olduğundan  $g(y) = \beta^{-1}(y)$  bir balans sayısıdır.

**Teorem 4.1.3.2.**  $y$  çift indisli bir 3-şift balans sayısı olmak üzere,

$$f(y) = \frac{-5y + 3\sqrt{8y^2 - 47}}{47}$$

bir balans sayısıdır.

**İspat.**  $x$  bir balans sayısı olmak üzere, Sonuç 4.1.2.1 den,

$$\alpha(x) = 5x + 3\sqrt{8x^2 + 1}$$

fonksiyonu çift indisli bir 3-şift balans sayısıdır.  $y = \alpha(x)$  olarak alınırsa,

$$y^2 + 25x^2 - 10xy = 72x^2 + 9$$

olup buradan,

$$47(y^2 + 25x^2 - 10xy) = 47(72x^2 + 9)$$

yazılır. Bu son eşitlikten,

$$9(8y^2 - 47) = (5y + 47x)^2$$

elde edilir. Böylece,

$$x = \frac{-5y + 3\sqrt{8y^2 - 47}}{47}$$

bulunur. O halde,  $\alpha^{-1}(y) = x$  ve  $x$  bir balans sayısı olduğundan  $f(y) = \alpha^{-1}(y)$  bir balans sayısıdır.

## 4.2. 3-ŞİFT BALANS SAYILARI İLE BALANS VE LUCAS-BALANS SAYILARI ARASINDAKİ BAZI ÖZDEŞLİKLER

Bu alt bölümde, 3-şift balans sayılarının balans ve Lucas-balans sayıları ile ilişkileri incelenmiş ve bu sayılar arasında bazı cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir.

**Teorem 4.2.1.**  $B_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift balans sayısı ve  $B_n$ ,  $n$ . balans sayısı olmak üzere,

$$B_{2n}(3) = B_{n+1}B_0(3) - B_nB_1(3) \quad (n \geq 0)$$

$$B_{2n+1}(3) = B_{n+1}B_1(3) - B_nB_0(3) \quad (n \geq 0)$$

dir.

**İspat.** Teorem 2.2.5 ve Sonuç 4.1.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} B_{2n}(3) &= 3(B_{n+1} - 3B_n) + 5B_n \\ &= 3B_{n+1} - 4B_n \\ &= B_{n+1}B_0(3) - B_nB_1(3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.6 ve Sonuç 4.1.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(3) &= 3(3B_{n+1} - B_n) - 5B_{n+1} \\ &= 4B_{n+1} - 3B_n \\ &= B_{n+1}B_1(3) - B_nB_0(3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremler balans ve Lucas-balans sayılarının 3-şift balans sayıları cinsinden yazılışını gösterir.

**Teorem 4.2.2.**  $B_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift balans sayısı ve  $C_n$ ,  $n$ . Lucas-balans sayısı olmak üzere,

$$C_n = \frac{B_{2n}(3) + B_{2n-1}(3)}{6} \quad (n \geq 1)$$

dır.

**İspat.** Sonuç 4.1.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} B_{2n}(3) + B_{2n-1}(3) &= (3C_n + 5B_n) + (3C_n - 5B_n) \\ &= 6C_n \end{aligned}$$

ve buradan da,

$$C_n = \frac{B_{2n}(3) + B_{2n-1}(3)}{6}$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.1.** Herhangi bir çift indisli 3-şift balans sayısının kendisinden bir önceki tek indisli 3-şift balans sayısı ile toplamı daima çifttir. Benzer şekilde, herhangi bir tek indisli 3-şift balans sayısının kendisinden bir sonraki çift indisli 3-şift balans sayısı ile toplamı daima çifttir.

**Teorem 4.2.3.**  $B_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift balans sayısı ve  $B_n$ ,  $n$ . balans sayısı olmak üzere,

$$B_n = \frac{B_{2n}(3) - B_{2n-1}(3)}{10} \quad (n \geq 1)$$

dir.

**İspat.**

$$\begin{aligned} B_{2n}(3) - B_{2n-1}(3) &= (3C_n + 5B_n) - (3C_n - 5B_n) \\ &= 10B_n \end{aligned}$$

ve buradan da,

$$B_n = \frac{B_{2n}(3) - B_{2n-1}(3)}{10}$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.2.** Herhangi bir çift indisli 3-şift balans sayısının kendisinden bir önceki tek indisli 3-şift balans sayısı ile farkı daima çifttir. Benzer şekilde, herhangi bir tek indisli 3-şift balans sayısının kendisinden bir sonraki 3-şift balans sayısı ile farkı daima çifttir.

### 4.3. 3-ŞİFT BALANS SAYILARI İLE HEMEN HEMEN BALANS SAYILARI ARASINDAKİ BAZI ÖZDEŞLİKLER

Bu alt bölümde, 3-şift balans sayıları ile hemen hemen balans sayıları arasında elde edilen cebirsel özdeşliklere yer verilmiştir.

**Teorem 4.3.1.**  $B_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift balans sayısı ve  $U_n$ ,  $n$ .  $A_1$ -balans sayısı olmak üzere,

$$B_{2n}(3) = \frac{5U_n + 3\sqrt{8U_n^2 + 9}}{3}$$

$$B_{2n+1}(3) = \frac{-5U_{n+1} + 3\sqrt{8U_{n+1}^2 + 9}}{3}$$

tür.

**İspat.** Teorem 2.3.1 ve Sonuç 4.1.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{5U_n + 3\sqrt{8U_n^2 + 9}}{3} &= \frac{5(3B_n) + 3\sqrt{8(3B_n)^2 + 9}}{3} \\ &= \frac{15B_n + 9\sqrt{8B_n^2 + 1}}{3} \\ &= 5B_n + 3C_n \\ &= B_{2n}(3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.1 ve Sonuç 4.1.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{-5U_{n+1} + 3\sqrt{8U_{n+1}^2 + 9}}{3} &= \frac{-5(3B_{n+1}) + 3\sqrt{8(3B_{n+1})^2 + 9}}{3} \\ &= \frac{-15B_{n+1} + 9\sqrt{8B_{n+1}^2 + 1}}{3} \\ &= -5B_{n+1} + 3C_{n+1} \\ &= B_{2n+1}(3) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.3.2.**  $B_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift balans sayısı ve  $V_n$ ,  $n$ .  $A_2$ -balans sayısı olmak üzere,

$$B_{2n}(3) = \frac{25V_{2n} - 8V_{2n-1}}{3}$$

$$B_{2n+1}(3) = \frac{5V_{2n+2} + 2V_{2n+1}}{3}$$

dir.

**İspat.** Sonuç 4.1.1.1 ve Teorem 2.3.7 den,

$$\begin{aligned} B_{2n}(3) &= 3C_n + 5B_n \\ &= 3\frac{5V_{2n} - V_{2n-1}}{3} + 5\frac{2V_{2n} - V_{2n-1}}{3} \\ &= \frac{25V_{2n} - 8V_{2n-1}}{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1.1 ve Teorem 2.3.7 kullanılarak,

$$\begin{aligned} B_{2n+1}(3) &= 3C_{n+1} - 5B_{n+1} \\ &= 3\left(\frac{5V_{2n+2} - V_{2n+1}}{3}\right) - 5\left(\frac{2V_{2n+2} - V_{2n+1}}{3}\right) \\ &= \frac{5V_{2n+2} + 2V_{2n+1}}{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.4. 3-ŞİFT LUCAS-BALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, 3-şift Lucas-balans sayıları tanımlanmış ve 3-şift Lucas-balans sayıları ile ilgili bazı cebirsel özdeşlikler verilmiştir.

Tezin bu kısmında  $n$ . 3-şift Lucas-balans sayısı  $CB_n(3)$  ile gösterilmiştir.

**Tanım 4.4.1.**  $x$  bir 3-şift balans sayısı olmak üzere,  $\sqrt{8x^2 - 47}$  sayısına 3-şift Lucas-balans sayısı denir.  $n$ . 3-şift Lucas-balans sayısı  $CB_n(3) = \sqrt{8B_n(3)^2 - 47}$  ile gösterilir.

Teorem 4.1.3.1 ve Teorem 4.1.3.2 de,  $y$  bir 3-şift balans sayısı olduğunda,  $f(y)$  ve  $g(y)$  değerlerinin birer balans sayısı olduğu gösterilmiştir. Bu fonksiyonlar 3-şift Lucas-balans sayılarının tanımına göre yeniden düzenlenirse,

$$f(B_{2n}(3)) = \frac{-5B_{2n}(3) + 3CB_{2n}(3)}{47}$$

$$g(B_{2n+1}(3)) = \frac{5B_{2n+1}(3) + 3CB_{2n+1}(3)}{47}$$

elde edilir.

**Teorem 4.4.1.**  $CB_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift Lucas-balans sayısı,  $CB_0(3) = 5$ ,  $CB_1(3) = 9$ ,  $CB_2(3) = 39$  ve  $CB_3(3) = 59$  olmak üzere, 3-şift Lucas-balans sayılarının rekürans bağıntısı,

$$CB_n(3) = 6CB_{n-2}(3) - CB_{n-4}(3) \quad (n \geq 4)$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.1.2.1 den,

$$\begin{aligned} CB_{2n}^2(3) &= 8B_{2n}^2(3) - 47 \\ &= 8(3B_{2n-2}(3) + \sqrt{8B_{2n-2}^2(3) - 47})^2 - 47 \\ &= 136B_{2n-2}^2(3) - 423 + 48B_{2n-2}(3)\sqrt{8B_{2n-2}^2(3) - 47} \\ &= (3\sqrt{8B_{2n-2}^2(3) - 47} + 8B_{2n-2}(3))^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan,

$$CB_{2n}(3) = 3CB_{2n-2}(3) + 8B_{2n-2}(3) \quad (4.9)$$

elde edilir. Teorem 4.1.2.1 den,

$$\begin{aligned} CB_{2n-4}^2(3) &= 8B_{2n-4}^2(3) - 47 \\ &= 8(3B_{2n-2}(3) - \sqrt{8B_{2n-2}^2(3) - 47})^2 - 47 \\ &= 136B_{2n-2}^2(3) - 423 - 48B_{2n-2}(3)\sqrt{8B_{2n-2}^2(3) - 47} \\ &= (3\sqrt{8B_{2n-2}^2(3) - 47} - 8B_{2n-2}(3))^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$CB_{2n-4}(3) = 3CB_{2n-2}(3) - 8B_{2n-2}(3) \quad (4.10)$$

yazılabilir.

(4.9) ve (4.10) eşitliklerinden,

$$CB_{2n}(3) = 6CB_{2n-2}(3) - CB_{2n-4}(3)$$

yazılır. Böylece, 3-şift Lucas-balans sayı dizisinin çift indisli terimleri için rekürans bağıntısı elde edilmiş olur.

3-şift Lucas-balans sayı dizisinin tek indisli terimleri için Teorem 4.1.2.1 den,

$$\begin{aligned} CB_{2n-3}^2(3) &= 8B_{2n-3}^2(3) - 47 \\ &= 8(3B_{2n-1}(3) - \sqrt{8B_{2n-1}^2(3) - 47})^2 - 47 \\ &= 136B_{2n-1}^2(3) - 423 - 48B_{2n-1}(3)\sqrt{8B_{2n-1}^2(3) - 47} \\ &= (3\sqrt{8B_{2n-1}^2(3) - 47} - 8B_{2n-1}(3))^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$CB_{2n-3}(3) = 3CB_{2n-1}(3) - 8B_{2n-1}(3) \quad (4.11)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2.1 den,

$$\begin{aligned}
 CB_{2n+1}^2(3) &= 8B_{2n+1}^2(3) - 47 \\
 &= 8(3B_{2n-1}(3) + \sqrt{8B_{2n-1}^2(3) - 47})^2 - 47 \\
 &= 136B_{2n-1}^2(3) - 423 + 48B_{2n-1}(3)\sqrt{8B_{2n-1}^2(3) - 47} \\
 &= (3\sqrt{8B_{2n-1}^2(3) - 47} + 8B_{2n-1}(3))^2
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$CB_{2n+1}(3) = 3CB_{2n-1}(3) + 8B_{2n-1}(3) \quad (4.12)$$

elde edilir.

(4.11) ve (4.12) eşitliklerinden,

$$CB_{2n+1}(3) = 6CB_{2n-1}(3) - CB_{2n-3}(3)$$

yazılır. Böylece, 3-şift Lucas-balans sayı dizisinin tek indisli terimleri için rekürans bağıntısı elde edilmiş olur.

Buradan, 3-şift Lucas-balans sayılarının rekürans bağıntısı,

$$CB_n(3) = 6CB_{n-2}(3) - CB_{n-4}(3)$$

elde edilir.

**Teorem 4.4.2.**  $CB_n(3)$ ,  $n$ . 3-şift Lucas-balans sayısı,  $B_n$ ,  $n$ . balans sayısı ve  $C_n$ ,  $n$ . Lucas-balans sayısı olmak üzere,

$$CB_{2n}(3) = 24B_n + 5C_n \quad (n \geq 0)$$

$$CB_{2n+1}(3) = 24B_{n+1} - 5C_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

dir.

**İspat.** İlk olarak  $CB_{2n}(3) = 24B_n + 5C_n$  özdeşliğinin ispatını tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 1$  için,  $CB_2(3) = 24B_1 + 5C_1 = 39$  olduğundan iddia doğrudur.  $n \leq k$  için iddia doğru olsun. Şimdi,  $n = k + 1$  için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

Teorem 4.4.1, Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.7 den,

$$\begin{aligned}
 CB_{2k+2}(3) &= 6CB_{2k}(3) - CB_{2k-2}(3) \\
 &= 6(24B_k + 5C_k) - (24B_{k-1} + 5C_{k-1}) \\
 &= 24(6B_k - B_{k-1}) + 5(6C_k - C_{k-1}) \\
 &= 24B_{k+1} + 5C_{k+1}
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, iddianın  $n = k + 1$  için doğru olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi,  $CB_{2n+1}(3) = 24B_{n+1} - 5C_{n+1}$  özdeşliğinin ispatını tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 1$  için,  $CB_3(3) = 24B_2 - 5C_2 = 59$  olduğundan iddia doğrudur.  $n \leq k$  için iddia doğru olsun. Şimdi,  $n = k + 1$  için iddianın doğru olduğunu gösterelim. Teorem 4.4.1, Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.7 den,

$$\begin{aligned}
 CB_{2k+3}(3) &= 6CB_{2k+1}(3) - CB_{2k-1}(3) \\
 &= 6(24B_{k+1} - 5C_{k+1}) - (24B_k - 5C_k) \\
 &= 24(6B_{k+1} - B_k) - 5(6C_{k+1} - C_k) \\
 &= 24B_{k+2} - 5C_{k+2}
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, iddianın  $n = k + 1$  için doğru olduğu gösterilmiş olur.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, 3-şift balans sayılarının gerçekleştiği Diofant denklemin çözüm sınıfları incelenmiş ve buradan yola çıkılarak 3-şift balans sayıları ile ilgili birtakım cebirsel özellikler verilmiştir.

Bu tez çalışmasının diğer bir kısmında ise, herhangi bir çift indisli 3-şift balans sayısını bir önceki ve bir sonraki çift indisli 3-şift balans sayısına dönüştüren fonksiyonlar bulunmuştur. Benzer şekilde, herhangi bir tek indisli 3-şift balans sayısını bir önceki ve bir sonraki tek indisli 3-şift balans sayısına dönüştüren fonksiyonlar elde edilmiştir.

Ayrıca, 3-şift balans sayıları ile balans ve Lucas-balans sayıları arasında bazı cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir. Balans sayılarını 3-şift balans sayılarına, 3-şift balans sayılarını ise balans sayılarına dönüştüren fonksiyonlar elde edilmiştir. Diğer taraftan, 3-şift balans sayıları ile hemen hemen balans sayıları arasındaki ilişkiler incelenmiş, bu ilişkilere dair birtakım cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir.

Bunlara ek olarak, 3-şift Lucas-balans sayıları tanımlanmış, bu sayılar ile ilgili bazı cebirsel özdeşlikler verilmiştir.

Elde edilen bulgular üç kısma bölünerek ifade edilebilir. İlk kısımda, 3-şift balans sayıları araştırılarak birtakım cebirsel özdeşlikler elde edilmiş ve bu sayıları üreten fonksiyonlar bulunmuştur. İkinci kısımda, 3-şift balans sayılarının balans sayıları, Lucas-balans sayıları ve hemen hemen balans sayıları ile cebirsel ilişkileri incelenmiştir. Son kısımda ise, 3-şift Lucas-balans sayıları tanımlanmış ve bu sayılarla ilgili bazı cebirsel özdeşlikler verilmiştir.

Daha sonraki çalışmalarda,  $k$  pozitif tam sayısının farklı değerleri için şift balans sayıları incelenebilir ve elde edilecek olan özdeşlikler arasındaki ilişkiler üzerine çalışılabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Koshy, T., 2001, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, Canada, ISBN: 0-471-39969-8 .
- [2] Vajda, S., 1989, *Fibonacci Lucas Numbers, and the Golden Section*, Ellis Horwood Limited, West Sussex, ISBN: 0-7458-0715-1.
- [3] Hoggatt Jr., V.E., 1969, *Fibonacci and Lucas numbers*, Houghton Mifflin Company.
- [4] Ray, P.K., 2009, *Balancing and Cobalancing Numbers*, Thesis(PhD), Department of Mathematics National Institute of Technology.
- [5] Behera, A. and Panda, G.K., *On the Square Roots of Triangular Numbers*, Fib. Quart., 37 (1999), 98 - 105.
- [6] Panda, G.K. and Ray, P.K., 2005, *Cobalancing Numbers and Cobalancers*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 8, 1189-2000.
- [7] Liptai, K., 2006, *Lucas Balancing Numbers*, Commun. Math., 14(1), 43–47.
- [8] Kovács, T., Liptai, K. and Olajos, P., 2010, *On (a,b)-Balancing Numbers*, Publ. Math. Debrecen, 77(3).
- [9] Dash, K.K., Ota, R.S. and Dash, S., 2012, *t-Balancing Numbers*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(2012), 1999–2012.
- [10] Panda, G.K., and Davala, R.K., 2015, *Perfect Balancing Numbers*, Fibonacci Quart., 53(3), 261–264.
- [11] Panda, G.K. and Rout, S.S., 2015, *k-Gap Balancing Numbers*, Periodica Mathematica Hungarica, 70(1), 109-121.
- [12] Panda, G.K., and Panda, A.K., 2015, *Almost Balancing Numbers*, J. Ind. Math. Soc., 82(3-4), 147–156.
- [13] Rayaguru, S.G., Davala, R.K. and Panda, G.K., 2020, *Shift Balancing Numbers*, Journal of the Indian Math. Soc. Vol. 87, Nos. (1 - 2), (2020), 131–136.
- [14] Mollin, R.A., 2008, *Fundamental Number Theory with Applications*, 2nd edn. Discrete Mathematics and Its Applications. Chapman Hall/CRC, Boca Raton.
- [15] Koshy, T., 2014, *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*, Springer, New York, ISBN 978-1-4614-8488-2.
- [16] NAGELL, T., 1981, *Introduction to Number Theory*, Chelsea Publishing Company, New York.



**ÖZGEÇMİŞ**

<b>Kişisel Bilgiler</b>	
Adı Soyadı	Esra ÖZER

<b>Eğitim Bilgileri</b>	
<b>Lisans</b>	
Üniversite	Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2011

