

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİMDALI**

**QUASI-PROXIMITY UZAYLAR KATEGORİSİNDE  
NOKTADA,  $T_0$ ,  $T_1$  OBJELER, KAPALI, BAĞLANTILI VE  
KOMPAKT OBJELER**

**Hazırlayan  
Şeyma ASLAN**

**Danışman  
Prof. Dr. Muammer KULA**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2023  
KAYSERİ**



**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİMDALI**

**QUASI-PROXIMITY UZAYLAR KATEGORİSİNDE  
NOKTADA,  $T_0$ ,  $T_1$  OBJELER, KAPALI, BAĞLANTILI VE  
KOMPAKT OBJELER  
(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hazırlayan  
Şeyma ASLAN**

**Danışman  
Prof. Dr. Muammer KULA**

**Ağustos 2023  
KAYSERİ**

## **BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK**

Bu yapılan çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Şeyma ASLAN



**“Quasi-Proximity Uzaylar Kategorisinde Noktada,  $T_0$ ,  $T_1$  Objeler, Kapalı, Bağlantılı ve Kompakt Objeler”** adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

**Hazırlayan**  
Şeyma ASLAN

**Danışman**  
Prof. Dr. Muammer KULA



**Matematik Anabilim Dalı Başkanı**

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca bana hiçbir desteğini esirgemeyen, her koşulda sabırlı olup her zaman yanımda olan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Muammer KULA'ya teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca her daim yanımda olan annem Sibel ASLAN'a, bana bu dünyada iyiliği en güzel şekilde öğretip hayatıma kattığı için babam Bayram ASLAN'a, benim için bu hayatta en değerli şeyin bir abla olduğunu bana öğrettiği için kardeşim Seval ASLAN'a ve bu tezi yazarken desteğini, sabrını ve zamanını ayırıp bana yardımcı olan sınıf arkadaşım İrem SARAÇ'a çok teşekkür ederim.

Yüksek Lisans eğitim süreci ve bu tez çalışması boyunca maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu TÜBİTAK'a katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Şeyma ASLAN

Ağustos 2023, KAYSERİ

# QUASI-PROXIMITY UZAYLAR KATEGORİSİNDE NOKTADA, $T_0$ , $T_1$ OBJELER, KAPALI, BAĞLANTILI VE KOMPAKT OBJELER

Şeyma ASLAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2023

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Muammer KULA

## ÖZET

Çeşitli makalelerde, Quasi-Proximity uzayların topolojik kategorisinde değişik ayırma aksiyomları, (kuvvetli) kapalılık, bağlantılılık gibi kavramlar verilmiştir. Bu tezde de, Quasi-Proximity uzayların topolojik kategorisi ile ilgili makalede verilmiş olan noktada çeşitli ayırma aksiyomları,  $p$  de  $T_1$ ,  $p$  de  $\bar{T}_0$ , (kuvvetli) kapalılık, bağlantılılık, kompaktlık gibi kavramları incelemektir. Bunlara ilave olarak genel anlamda (başkalarının verdiği) kapalılık kavramı ile bizim verdiğimiz (kuvvetli) kapalılık kavramları arasında ilişkileri bu tezde ele almaktır.

**Anahtar Kelimeler:** Topolojik Kategori, Quasi-Proximity Uzay, Ayırma, Kapalılık, Bağlantılılık, Kompakt Objeler.

**$T_0, T_1$  OBJECTS AT  $p$ , CLOSED, CONNECTED AND COMPACT OBJECTS IN  
THE QUASI-PROXIMITY SPACES CATEGORY**

**Şeyma ASLAN**

**Erciyes University, Institute of Natural and Applied Sciences**

**Master's Thesis, August 2023**

**Supervisor: Prof. Dr. Muammer KULA**

**ABSTRACT**

In various articles, we characterized various topological notions such as separation, closedness, connectedness in the category of quasi-proximity spaces. In this paper, we obtain more general results such as  $\bar{T}_0$  at  $p$ ,  $T_1$  at  $p$ , (strongly) closedness, connectedness, compactness for quasi-proximity spaces and furthermore, we investigate the relationship between the notion of closedness in usual sense and the notion of (strongly) closedness (in our sense) in quasi-proximity spaces.

**Keywords:** Topological Category, Quasi-Proximity Space, Separation, Closedness, Connectedness, Compact Objects.

## İÇİNDEKİLER

### QUASI-PROXIMITY UZAYLAR KATEGORİSİNDE NOKTADA, $T_0$ , $T_1$ OBJELER, KAPALI, BAĞLANTILI VE KOMPAKT OBJELER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK .....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	iii
KABUL VE ONAY .....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT.....	vii
İÇİNDEKİLER .....	viii
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	xii
GİRİŞ .....	1

## 1. BÖLÜM

### TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

1.1. Bazı Temel Tanımlar .....	5
1.2. Topolojik Fanktorlar .....	8
1.3. Topolojik Kategoriler .....	9
1.4. Ayırma Aksiyomları.....	11
1.5. Bağıntı Uzayları.....	12

## 2. BÖLÜM

### TOPOLOJİK KATEGORİLERDE QUASI-PROXIMITY UZAYLARDA KAPALILIK VE KUVVETLİ KAPALILIK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

2.1. $p$ 'de Eğik Eksen ve Katlama Dönüşümleri .....	16
2.2. Kapalılık.....	20
2.3. Topolojik Kategorilerde Bir Nuktada Ayırma Aksiyomları.....	20
2.4. Quasi Proximity Uzaylar .....	20

### 3. BÖLÜM

#### BİR NOKTADA $T_0$ VE $T_1$ QUASI-PROXİMİTY UZAYLARI

3.1. Bir Nuktada $T_0$ Ve $T_1$ Quasi-Proximity Uzayları .....	24
----------------------------------------------------------------	----

### 4. BÖLÜM

#### (KUVVETLİ) KAPALI VE (KUVVETLİ) AÇIK ALT UZAYLAR

4.1. QPROX Kategorisinde Wedge Çarpım .....	29
4.2. QPROX Kategorisinde Kapalılık .....	29

### 5. BÖLÜM

#### BAĞLANTILILIK VE KOMPAKTLIK

5.1. Bağlantılılık Ve Kompaktlık .....	32
----------------------------------------	----

### 6. BÖLÜM

#### SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

6.1. Sonuç Ve Değerlendirme .....	35
-----------------------------------	----

KAYNAKLAR .....	36
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ.....	39
---------------	----

## KISALTMALAR VE SİMGELER

<b>SET</b>	: Kümeler kategorisi
<b>TOP</b>	: Topolojik uzaylar kategorisi
$\mathcal{U}$	: Fanktor
$\mathcal{E}$	: Kategori
$\text{Ob}(\mathcal{E})$	: Objeler sınıfı
$\text{Mor}(\mathcal{E})$	: Morfizmler sınıfı
<b>REL</b>	: Bağıntı uzayları kategorisi
<b>RREL</b>	: Yansımali bağıntı uzayları kategorisi
$A_p$	: $p$ de temel eksen dönüşümü
$S_p$	: $p$ de Skewed eksen dönüşümü
$\nabla_p$	: $p$ de katlama dönüşümü
<b>PROX</b>	: Proximity uzaylar kategorisi
<b>QPOX</b>	: Quasi Proximity uzaylar kategorisi
<b>PBORN</b>	: Prebornolojik uzaylar kategorisi

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1	Başlangıç Kaldırma.....	10
Şekil 1.2	Bitiş Kaldırma .....	10
Şekil 1.3	$T_0$ Uzayı.....	11
Şekil 1.4	$T_1$ Uzayı .....	12
Şekil 2.1	$p$ noktasında wedge çarpımı .....	16
Şekil 2.2	$p$ de Temel eksen dönüşümü .....	18
Şekil 2.3	$p$ de Eğik (Skewed) eksen dönüşümü .....	18
Şekil 2.4	$p$ de Katlama (Fold) dönüşümü .....	19

## GİRİŞ

Kategori alanında çalışmamızın en önemli nedenlerimizden bir tanesi değişik farklı branşlarda çalışanlar arasında ilişkiler kurulmasının yanında bağımsız yapılar kullanılarak eski problemlerin çözümlerine yardımcı olmasıdır. Kategori teorisinin Jeoloji, malzeme, fizik, bilgisayar gibi birçok bilim alanlarında uygulamaları vardır. Bunlardan öncelikle olarak moleküler biyolojide DNA ve RNA kodları ile ilgili, astronomide ise uzay gözlemlerinde, coğrafi bilgi sistemlerinde, bir metro hattı planlama gibi ulaşım haritaları üretmesinde kullanılmaktadır. Kategori teorisinin diğer birçok önemli uygulamaları ve bu bahsedilen uygulamalar [1] de verilmiştir.

Topolojik kategoriler, matematiksel nesnelere topoloji adı verilen bir yapı üzerinde nasıl çalıştığını inceleyen bir dal olan kategoriler teorisine aittir. Topoloji, geometriye ve sürekliliğe dayalı bir alan olup, nesnelere şekil, boyut ve uzaklıkla ilgili özelliklerini ele alır.

Topolojik kategorilerin temelinde "morfizmler" denilen dönüşümler bulunur. Bu morfizmler, topolojik uzaylar arasında yapıları koruyan dönüşümlerdir. Örneğin, bir topolojik uzayı başka bir topolojik uzaya dönüştüren süreklilik özelliğine sahip işlevler, morfizmler olarak ele alınır.

Topolojik kategoriler, topolojik uzaylar ve süreklilikle ilgili farklı yapılar arasındaki ilişkileri inceleyerek matematiksel analiz, cebir ve geometri gibi diğer alanlarla bağlantılar kurar. Bu sayede, farklı matematiksel yapılar arasındaki benzerlikler ve farklılıklar daha iyi anlaşılabilir ve matematiksel teorilerin daha geniş kapsamlı sonuçları elde edilebilir.

Kategori ve topolojik kategori arasındaki farklar şunlardır:

### 1. Kategori:

- Kategori, matematikte nesnelerin ve aralarındaki morfizmlerin oluşturduğu soyut bir yapıdır.
- Nesneler, bir kategoride temsil edilen matematiksel yapıları ifade ederken, morfizmler nesneler arasındaki dönüşümleri temsil eder.
- Kategoriler teorisi, matematiksel nesneler ve onların arasındaki ilişkileri incelemek için genel bir çerçeve sağlar.
- Bir kategoride, nesneler arasında belirli bir kompozisyon işlemi vardır ve morfizmalar bu kompozisyon işleminin birimi ve ilişkileri koruyan dönüşümleri olmalıdır.

### 2. Topolojik Kategori:

- Topolojik kategori, kategori teorisinin özel bir alt alanıdır ve matematiksel nesnelerin topoloji adı verilen bir yapı üzerinde nasıl çalıştığını inceler.
- Topolojik kategorilerde nesneler genellikle topolojik uzayları ifade ederken, morfizmler sürekli fonksiyonları temsil eder.
- Morfizmler, bir topolojik uzayı başka bir topolojik uzaya dönüştüren sürekli fonksiyonlar olmalıdır ve bu dönüşümler topolojik özellikleri korumalıdır.
- Topolojik kategoriler, özellikle topolojik uzaylar ve süreklilikle ilgili yapılar üzerine odaklanır ve matematiksel analiz, geometri ve diğer alanlarda önemli uygulamalara sahiptir.

$X$  kümesi üzerinde Quasi-Proximity kavramı Efremovich tarafından 1950 de tanıtılmıştır [8].

“ $A$ ,  $B$ ’ye yakındır” şeklindeki quasi-proximity bağıntısını  $X$  in alt kümeleri üzerinde ikili ilişki olarak tanıtmıştır. 1941’de Wallace [9, 10] tarafından ”Kümelerin Ayrılması (Seperation of Sets)” ile ilgili bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışma quasi-proximity (yarı-yakınlık) kavramının ilkel şekli olarak değerlendirilebilir. İlk yapılan çalışmaların büyük bir kısmı Smirnov ([18, 19]) tarafından yapılmıştır. Quasi-proximity uzaylar ile ilgili bütün ön bilgilerimiz ve daha bir çok bilgi bunun içinde bulunabilir [20]. Daha sonraki yıllarda Leader [21] , Lodato [22] ve Pervin [23] gibi bazı yazarlar Efremovich' in quasi-proximity aksiyomlarından daha zayıf aksiyomlarla çalışmışlardır. Baran, topolojik uzaylardaki çeşitli ayırma aksiyomlarını kümeler üzerindeki değişik topolojik

kategorilerde genelde ayırma aksiyomlarını vermiştir [5]. Baran, ayırma aksiyomlarını bir  $p$  de, yani yerel (local) olarak tanımlamıştır (bkz. [5, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]).

Baran [4] da  $T_0, T_1, T_2, T_{3\frac{1}{2}}, T_4, T_5$ , kapalılık ve [7] da kompaktlık kavramlarını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletmiştir. Bu genişlemeleri bu kavramların topolojide bahsedilen Urysohn Lemması, Urysohn Metrikleşme Teoremi, Tietze Genişleme Teoremi v.b. gibi teoremlerde bulunmaları ve kapalılık kavramı ile tanımlanabilen bağlantılılık ve kompaktlık kavramlarını topolojik kategorilere genişletmektir.

Quasi proximity uzayları, genellikle topolojik uzaylara kıyasla daha esnek bir yapıya sahiptir ve daha az şartla tanımlanabilir. Topolojik uzaylardaki "açık küme" kavramı yerine "yakınlık sistemi" kavramı kullanılır. Yakınlık sistemi, bir nesnenin yakınlık ilişkisine göre diğer nesnelerle ne kadar yakın olduğunu belirler. Yakınlık sistemi, yakınlığın simetrik, yansıma, transitif olma gibi özellikleri taşımasını sağlayan belirli koşulları karşılar.

Özetle, quasi proximity uzayları, nesnelere arasındaki "quasi yakınlık" ilişkisini tanımlamak için kullanılan daha geniş kapsamlı bir matematiksel yapıdır. Topolojik uzaylara benzerlik gösterirken daha esnek ve az yapısal koşula sahiptir

Bu tezin amacı, [11-13] makalelerini referans alarak, Quasi-Proximity uzayların topolojik kategorilerde özellikle [13] makalesinde verilen, quasi-proximity uzayların topolojik kategorisinde çeşitli ayırma aksiyomları, (kuvvetli) kapalılık, bağlantılılık gibi kavramları incelemektir. Bunlara ilave olarak [13] makalesinde verilmiş olan quasi-proximity uzayların topolojik kategorisinde noktada çeşitli ayırma aksiyomları, (kuvvetli) kapalılık, bağlantılılık, kompaktlık gibi kavramları ile genel anlamda (başkalarının verdiği) kapalılık kavramı ile bizim verdiğimiz (kuvvetli) kapalılık kavramları [13] arasında ilişkileri bu tezde ele almaktır. Ayrıca [11-13] proximity uzayların topolojik kategorisindeki çeşitli ayırma aksiyomları, (kuvvetli) kapalılık, bağlantılılık gibi kavramları ile Quasi-Proximity uzayların topolojik kategorisindeki bu kavramlar arasındaki ilişkileri analiz etmektir.

Bu tezde yer alan bölümlerin detayları aşağıda verilmiştir.

1. **Bölümde**, tezin konusu ile ilgili bazı temel tanımlar verilmiştir.
2. **Bölümde**, topolojik kategorilerde quasi proximity uzaylarda kapalılık ve kuvvetli kapalılık ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.
3. **Bölümde**, quasi proximity uzaylarda  $p$  de  $\overline{T_0}$  ve  $T_1$  objelerinin karakterizasyonu verilmiştir.
4. **Bölümde**, quasi proximity uzayların topolojik kategorisinde çeşitli ayırma aksiyomlarını, (kuvvetli) kapalılık, (kuvvetli) açıklık gibi kavramlarla quasi proximity uzayların topolojik kategorisinde bu kavramlar arasındaki ilişkilerine değinilmiştir.
5. **Bölümde**, quasi proximity uzayların topolojik kategorisinde (kuvvetli) bağlantılı ve (kuvvetli) kompakt objelerin tanımlarına değinilmiştir.

# 1. BÖLÜM

## TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanacağımız bazı temel kategori tanımları ve topolojik kavramlara yer verilmiştir.

### 1.1. Bazı Temel Tanımlar

**Tanım 1.1.1: (Kategori)** ([14]) objelerin sınıfı  $Ob(\varepsilon)$  ve her  $A, B \in Ob(\varepsilon)$  objeleri için  $A$  dan  $B$  ye morfizmlerin sınıfı  $\varepsilon(A, B)$  için,  $Mor(\varepsilon) = \cup \varepsilon(A, B)$  olsun.  $Mor(\varepsilon)$  üzerinde her  $A, B, C \in Ob(\varepsilon)$  için

$$o: \varepsilon(A, B) \times \varepsilon(B, C) \longrightarrow \varepsilon(A, C)$$

$$(f, g) \longrightarrow g \circ f$$

kısmi işlemi tanımlanan yapı aşağıdaki şartları sağlarsa **kategori** denir.

- (i) Her bir  $A \in Ob(\varepsilon)$  için  $1_A : A \rightarrow A$  birim morfizmi vardır öyle ki her  $f : A \rightarrow B$  morfizmi için  $f \circ 1_A = f$  ve her  $g : B \rightarrow A$  morfizmi için  $1_A \circ g = g$  dir.
- (ii)  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$  için  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  dir.

**Örnek 1.1.2:** Objeleri  $A, B, C$  gibi kümeler, morfizmleri kümeler arasındaki fonksiyonlar ve kısmi işlem ise fonksiyonlar arasındaki bileşke olarak tanımlanan sınıf bir kategori belirtir.

(i) Her  $A$  kümesi için birim morfizim  $1_A : A \rightarrow A$  birim fonksiyonu ifade eder. Ayrıca her  $f : A \rightarrow B$  fonksiyonu için  $f \circ 1_A = f$  ve her  $g : B \rightarrow A$  fonksiyonu için  $1_A \circ g = g$  eşitliği sağlanır ve bu kategori **SET** ile gösterilir.

(ii)  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  ve  $h : C \rightarrow D$  fonksiyonlar olmak üzere  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  eşitliği sağlandığı için birleşme özelliği vardır

**Örnek 1.1.3:** Objeleri  $(X, \mathcal{T}), (Y, \delta), (Z, \sigma)$ ... gibi topolojik uzaylar olsun. Morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmi işlem ise fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlanan yapı kategoridir.

(i)  $(X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  için  $1_X : X \rightarrow X$  birim fonksiyonu mevcut olup sürekli dir. Her  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \delta)$  için  $f \circ 1_X = f$  ve her  $g : (Y, \delta) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  için  $1_X \circ g = g$  eşitliği sağlanır ve bu kategori **TOP** ile gösterilir.

(ii)  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \delta), g : (Y, \delta) \rightarrow (Z, \sigma)$  ve  $h : (Z, \sigma) \rightarrow (T, \varphi)$  olmak üzere  $f; g$  ve  $h$  fonksiyonları sürekli olduğundan bu fonksiyonların bileşkeleri de sürekli dir ve  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  eşitliği sağlandığından birleşme özelliği vardır.

**Tanım 1.1.4:**  $\mathcal{E}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $\mathcal{D}$  ye  $\mathcal{E}$  nin alt kategorisi denir.

(1)  $Ob(\mathcal{D}) \subset Ob(\mathcal{E})$  dir.

(2) Her bir  $A, B \in Ob(\mathcal{D})$  için  $\mathcal{D}(A, B) \subseteq \mathcal{E}(A, B)$  dir.

(3)  $\mathcal{D}$  morfizmlerin bileşke işlemi,  $\mathcal{E}$  deki morfizmlerin bileşkesi ile eşdeğ erdir.

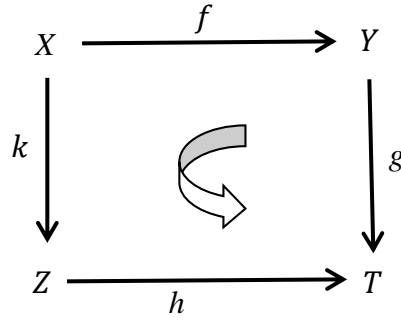
(4) Her  $A \in Ob(\mathcal{D})$  için  $\mathcal{D}$  deki  $1_A$  morfizmi,  $\mathcal{E}$  deki birim morfizmine eşdeğ erdir.

Her  $A, B \in Ob(\mathcal{D})$  obje ikilisi için  $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{E}(A, B)$  ise  $\mathcal{D}$  ye **dolu alt kategori**,  $Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{E})$  ise  $\mathcal{D}$  kategorisine **geniş alt kategori** denir [14].

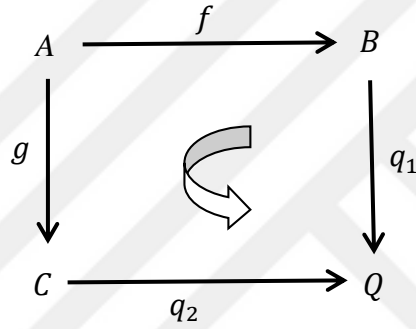
**Tanım 1.1.5 (Başlangıç Objesi):**  $\mathcal{E}$  bir kategori olmak üzere  $A \in Ob(\mathcal{E})$  olsun. Her  $X \in Ob(\mathcal{E})$  için  $\mathcal{E}(A, X)$  sınıfı tek morfizme sahip ise  $A$  objesine  $\mathcal{E}$  kategorisinin başlangıç (initial) objesi denir [16, 17].

**Tanım 1.1.6 (Bitiş Objesi):**  $\mathcal{E}$  bir kategori ve  $A \in Ob(\mathcal{E})$  olsun. Her  $X \in Ob(\mathcal{E})$  için  $\mathcal{E}(X, A)$  sınıfı tek morfizme sahip ise  $A$  objesine  $\mathcal{E}$  kategorisinin bitiş (final) objesi denir [16, 17].

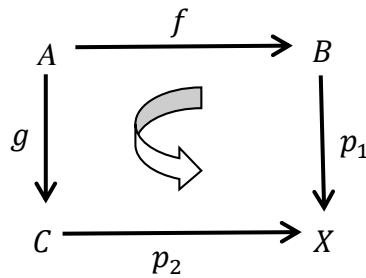
**Tanım 1.1.7 (Değişmeli Diyagram):** Bir  $\mathcal{E}$  kategorisinde morfizmlerin bir diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.  $g \circ f = h \circ k$  ise değişmeli diyagram denir [16, 17].



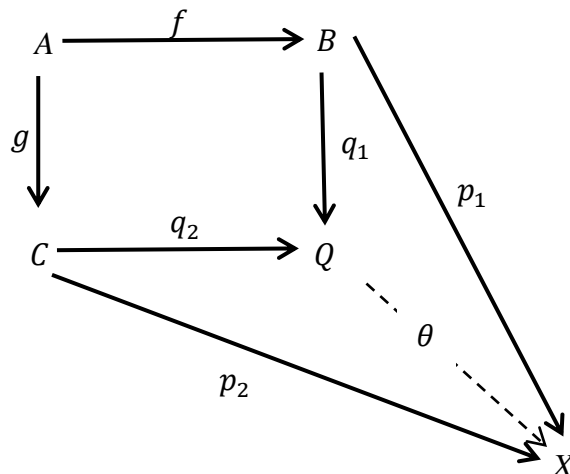
**Tanım 1.1.8 (Pushout Diyagramı):** Bir  $\mathcal{E}$  kategori ve  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : A \rightarrow C$  iki morfizm olmak üzere  $Q \in \text{Ob}(\mathcal{E})$  ve  $q_1 : B \rightarrow Q$ ,  $q_2 : C \rightarrow Q$  morfizmleri için,



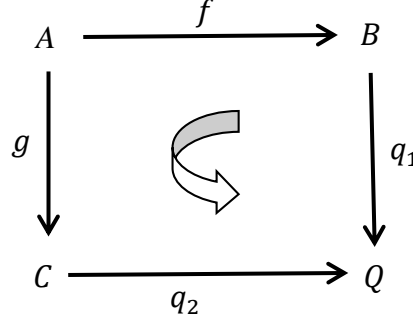
değişmeli ( $q_1 f = q_2 g$ ) diyagramı verilsin. Eğer herhangi bir  $X \in \text{Ob}(\mathcal{E})$  için



değişmeli ( $p_1 f = p_2 g$ ) diyagramı verildiğinde,



diyagramı değişmeli ise, yani  $\theta q_1 = p_1$  ve  $\theta q_2 = p_2$  olacak şekilde tek  $\theta : Q \rightarrow X$  varsa



diyagramına  $f$  ve  $g$  nin **pushout diyagramı** denir.

## 1.2 Topolojik Fanktorlar

**Tanım 1.2.1 (Fanktor):** ([14])  $\mathcal{E}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri için  $\mathcal{E}$  nin her  $A$  objesini  $\mathcal{D}$  nin  $F(A)$  objesine,  $\mathcal{E}$  nin her  $f : A \rightarrow B$  ni  $\mathcal{D}$  nin  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$  ne dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan  $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  ye **fanktor** denir.

(i) Her  $A \in Ob(\mathcal{E})$  için  $F(1_A) = 1_{F(A)}$  dır.

(ii) Her  $A, B, C \in Ob(\mathcal{E})$  için  $f : A \rightarrow B$  ve  $g : B \rightarrow C$  verilsin.  $\mathcal{E}$  de  $g \circ f$  tanımlı olmak üzere  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  dir.

**Tanım 1.2.2 (Belirli Fanktor):** ([14])  $\mathcal{E}$  ve  $\mathcal{D}$  kategoriler ve  $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  olsun.

(1) Her  $A, B \in Ob(\mathcal{E})$  ve her  $f : F(A) \rightarrow F(B)$  için  $F(g) = f$  olacak şekilde en az bir  $g : A \rightarrow B$  varsa  $F$  ye **dolu** denir.

(2)  $A, B \in Ob(\mathcal{E})$  ve her  $f, g : A \rightarrow B$  için  $F(f) = F(g)$  iken  $f = g$  oluyorsa  $F$  ye **düzenli (faithful)** denir.

(3)  $f : A \rightarrow A$  için  $F(f) = 1_{F(A)}$  ve  $f$  izomorfizm iken  $f = 1_A$  oluyorsa  $F$  ye **amnestik fanktor** dur.

(4)  $F$  düzenli ve amnestik ise  $F$  ye **belirli (concrete)** denir.

(5)  $B \in Ob(\mathcal{D})$  için  $F^{-1}(B) = \{A \in Ob(\mathcal{E}) \mid F(A) = B\}$  bir küme ise  $F$  ye **küçük demetlere sahip** tir.

**Tanım 1.2.3:** ([14]) **TOP** da her  $(X, \mathcal{T})$  topolojik uzayını,  $\mathcal{U}(X, \mathcal{T}) = X$  yani üzerindeki topoloji yapısını bırakarak  $\mathcal{U}(f) = f$  dönüştüren fanktoruna **unutkan fanktor** denir.

**Tanım 1.2.4:** ([14]) **SET** de her  $X$  kümesini, üzerine diskre topoloji yapısını ekleyerek  $(X, P(X))$  diskre topolojik uzayına  $\mathcal{D}: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$  dönüşümüne **diskre fanktor** denir.

**Tanım 1.2.5:** ([14]) **SET** de  $(X, \{\emptyset, X\})$  indiskre obje ve her bir  $f: X \rightarrow Y$  ni topolojik uzaylar arasındaki  $\mathcal{D}^*(f) = f: (X, \{\emptyset, X\}) \rightarrow (Y, \{\emptyset, Y\})$  fonksiyonuna çeviren  $\mathcal{D}^*: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$  ya fanktor **indiskre fanktor** denir.

**Tanım 1.2.6:** ([14])  $\mathcal{E}$  ve  $\mathcal{D}$  kategoriler ve  $F, G: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  fanktorlar olsun. Her  $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{E})$  yi  $\mathcal{D}$  nin bir  $\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A)$  ne dönüştüren bir  $\alpha: \mathbf{Ob}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Mor}(\mathcal{D})$  verilsin.  $\mathcal{E}$  deki her  $f: A \rightarrow B$  morfizmi için

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\
 F(f) \downarrow & \curvearrowright & \downarrow G(f) \\
 F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B)
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise  $\alpha$  ya  $F$  den  $G$  ye **doğal dönüşüm** dır ve  $\alpha: F \rightarrow G$  şeklinde gösterilir.

### 1.3 Topolojik Kategoriler

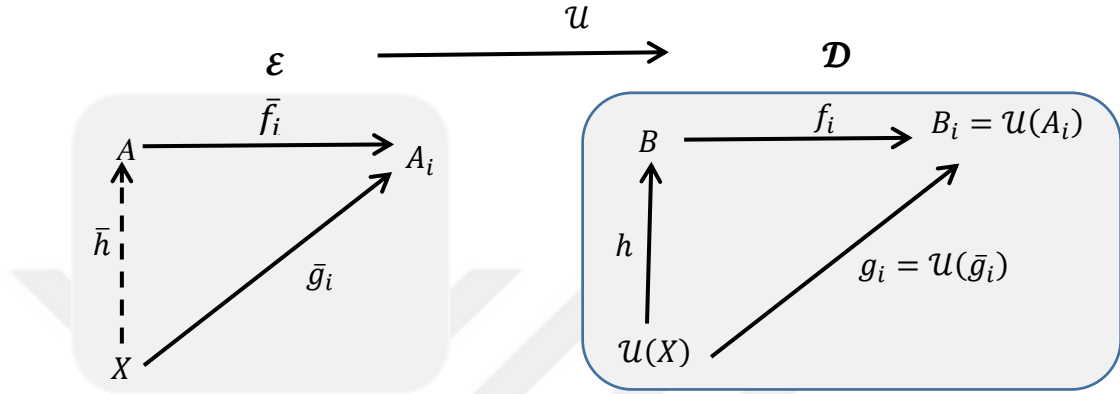
**Tanım 1.3.1 (Kaynak):**  $\mathcal{E}$  kategori ve  $I$  indis kümesi için her  $i \in I$  için  $A$  ve  $A_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{E})$  için  $f_i: A \rightarrow A_i$  verilsin.  $(A, (f_i)_{i \in I})$  ye bir **kaynak (source)** denir [16].

**Tanım 1.3.2 (Kavşak):**  $\mathcal{E}$  kategori ve  $I$  bir indis kümesi olmak üzere  $\forall i \in I$  için  $A$  ve  $A_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{E})$  olmak üzere  $f_i: A_i \rightarrow A$  verilsin.  $((f_i)_{i \in I}, A)$  **kavşak (sink)** denir [16].

**Tanım 1.3.3 (Başlangıç ve Bitiş Kaldırma):** ([15])  $\mathcal{E}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri ve  $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  bir fanktoru verilsin.

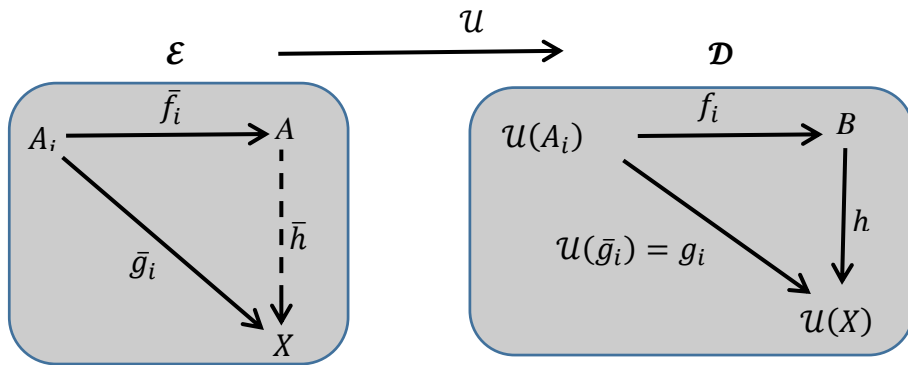
(i) Herhangi bir  $i \in I$  için  $A_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{E})$  ve  $f_i: B \rightarrow B_i = \mathcal{U}(A_i)$  leri  $\mathcal{D}$  de bir  $\mathcal{U}$  –kaynağı olsun.  $\{f_i\}_{i \in I}$  ailesinin bir başlangıç kaldırmasının **(initial lift)**  $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{E})$ ,  $\mathcal{U}(A) = B$  ve  $\mathcal{U}(\bar{f}_i) = f_i$  olacak şekilde  $\bar{f}_i: A \rightarrow A_i$  olması için şu şartlar sağlanmalıdır:

$\bar{g}_i: X \rightarrow A_i$ , nin bir ailesi ve  $\mathcal{U}(\bar{g}_i) = g_i$  olmak üzere her  $i \in I$  için  $f_i \circ h = g_i$  olacak şekilde bir  $h: \mathcal{U}(X) \rightarrow B$  varsa her  $i \in I$  için  $\bar{f}_i \circ \bar{h} = \bar{g}_i$  olacak şekilde en az bir  $\bar{h}: X \rightarrow A$  vardır. Eğer  $\bar{f}_i: A \rightarrow A_i$  başlangıç kaldırma ise  $A$  daki yapıya  $\bar{f}_i$  lere  $A_i$  lerden elde edilen yapı denir.



Şekil 1.1. Başlangıç Kaldırma

(ii) Herhangi bir  $i \in I$  için  $A_i \in Ob(\varepsilon)$  ve  $f_i: \mathcal{U}(A_i) = B_i \rightarrow B$  leri  $D$  de bir  $\mathcal{U}$  -kavşağı olsun.  $\{f_i\}_{i \in I}$  nin bitiş kaldırmasının (**final lift**)  $A \in Ob(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{U}(A) = B$  ve  $\mathcal{U}(\bar{f}_i) = f_i$  olacak şekilde  $\bar{f}_i: A_i \rightarrow A$  morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır:  $\bar{g}_i: A_i \rightarrow X$ ,  $\varepsilon$  de morfizmlerin bir ailesi ve  $\mathcal{U}(\bar{g}_i) = g_i$  olmak üzere her  $i \in I$  için  $h \circ f_i = g_i$  olacak şekilde bir  $h: B \rightarrow \mathcal{U}(X)$  varsa  $\forall i \in I$  için  $\bar{h} \circ \bar{f}_i = \bar{g}_i$  olacak şekilde en az bir  $\bar{h}: A \rightarrow X$  vardır.



Şekil 1.2 Bitiş Kaldırma

$\bar{f}_i : A_i \rightarrow A$  bir bitiş kaldırma ise  $A$  daki yapıya  $\bar{f}_i$  ler tarafından  $A_i$  den elde edilen yapı denir.

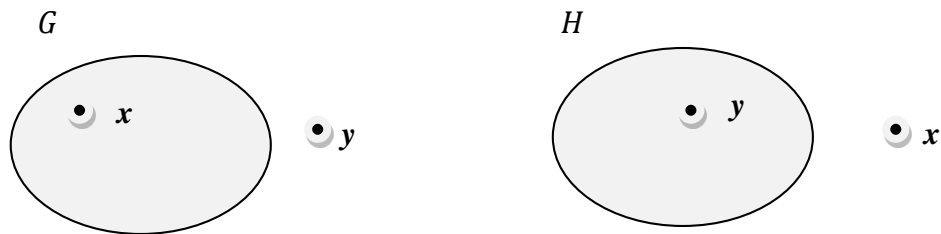
**Not 1.3.4:** Topolojik kategorilerde keyfi bir  $\mathcal{U}$  – kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı, keyfi  $\mathcal{U}$  – kavşağının bitiş kaldırmasının varlığına denktir.

**Tanım 1.3.5 (Topolojik Kategori):** ([16])  $\mathcal{E}$  ve  $\mathcal{D}$  kategorileri ve  $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  fanktoru verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise  $\mathcal{U}$  ya **topolojik fanktor** veya  $\mathcal{E}$  kategorisine  $\mathcal{D}$  de **topolojik kategori** denir.

- (i)  $\mathcal{U}$  belirlidir.
- (ii)  $\mathcal{U}$  küçük demetlere sahiptir.
- (iii) Her  $\mathcal{U}$  – kaynağı bir başlangıç kaldırmaya sahiptir.

#### 1.4. Ayırma Aksiyomları

**Tanım 1.4.1 ( $T_0$  Uzayı):**  $(X, \mathcal{T})$  bir topolojik uzayı için farklı her  $y, x \in X$  için  $y \notin G$  olacak şekilde  $x$  in bir  $G$  açığı veya  $x \notin H$  olacak şekilde  $y$  nin bir  $H$  açığı vardır [14].



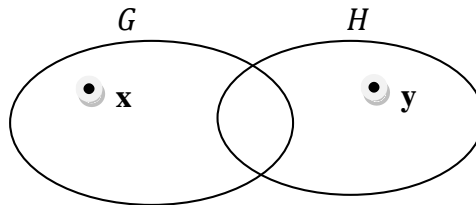
Şekil 1.3.  $T_0$  Uzayı

**Önerme 1.4.2:**  $T_0$  uzayının alt uzayı da  $T_0$  dır [14].

**İspat:**  $(X, \mathcal{T})$  uzayı  $T_0$  ve  $A \subseteq X$  olsun. Farklı  $a, b \in A$  verilsin.  $X$  uzayı  $T_0$  olduğundan  $b \notin G$  olacak şekilde  $a$  nın  $X$  de  $G$  açığı vardır. Buradan  $H = A \cap G$ ,  $a$  nın  $A$  da açık olup  $b \notin H$  dır.

**Teorem 1.4.3:**  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$  topolojik uzayların bir sınıfı ve  $X = \prod_{i \in I} X_i$  çarpım uzayı olsun. Her bir  $X_i$  uzayı  $T_0$  dır  $\Leftrightarrow X$  çarpım uzayı  $T_0$  dır [14].

**Tanım 1.4.4 ( $T_1$  Uzayı):**  $(X, \mathcal{T})$  farklı  $x, y \in X$  için  $x \in G, y \notin G$  ve  $y \in H, x \notin H$  olacak şekilde  $G$  ve  $H$  açıkları vardır [14].



Şekil 1.4.  $T_1$  Uzayı

Burada  $G$  ve  $H$  nin ayrık olmasının gerekli olmadığına dikkat edelim.

**Önerme 1.4.5:**  $T_1$  olan herhangi bir topolojik uzay  $T_0$  dır, tersi genelde doğru değildir [14].

**Önerme 1.4.6:** Bir  $T_1$  uzayının her alt uzayı da  $T_1$  dir.

**İspat:**  $(X, \mathcal{T})$  bir  $T_1$  topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Farklı  $a, b \in A$  için  $(X, \mathcal{T})$  nun  $T_1$  olmasından  $b \notin G, a \in G$  ve  $a \notin H, b \in H$  şeklinde  $G$  ve  $H$  açık kümeleri vardır.  $G \cap A$  ve  $H \cap A$  kümeleri  $A$  da açık olup  $a \in G \cap A, b \notin G \cap A$  ve  $a \notin H \cap A, b \in H \cap A$  dir. Sonuç olarak,  $(A, \mathcal{T}_A)$  alt uzayı  $T_1$  uzayıdır [14].

**Teorem 1.4.7:**  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$  topolojik uzayların sınıfı ve  $X = \prod_{i \in I} X_i$  çarpımı üzerindeki çarpım topolojisi  $\mathcal{T}$  olsun. Her bir  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  uzayı  $T_1$  dır  $\Leftrightarrow (X, \mathcal{T})$  çarpım uzayı  $T_1$  dir [14].

## 1.5. Bağlı Uzayları

**Tanım 1.5.1:**  $A$  küme olmak üzere  $R, A$  üzerinde bağıntı olsun. Bu takdirde  $(A, R)$  ye bağıntı uzayı denir.  $(A, R), (A_1, R_1)$  bağıntı uzayları olmak üzere,  $f: (A, R) \rightarrow (A_1, R_1)$  dönüşümü;  $f: A \rightarrow A_1$  fonksiyon ve her  $a, b \in A$  için  $a R b$  olduğunda  $f(a) R_1 f(b)$  dir. Objeleri bağıntı uzayları, morfizmleri de bu şekildeki dönüşümlerden oluşan kategoriye **bağıntı uzaylar kategorisi** denir ve **REL** ile gösterilir.

**Tanım 1.5.2:**  $\mathbf{B}$  küme ve  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{B}$  de yansıma bağıntısı olsun.  $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$  ye yansımalı bağıntı uzayı denir.  $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ ,  $(\mathbf{B}_1, \mathbf{R}_1)$  yansımalı bağıntı uzayları olmak üzere  $f: (\mathbf{B}, \mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{B}_1, \mathbf{R}_1)$  morfizmi;  $f: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_1$  fonksiyon ve her  $a, b \in \mathbf{B}$  için  $a \mathbf{R} b$  olduğunda  $f(a) \mathbf{R}_1 f(b)$  dir. Objeleri yansımalı bağıntı uzayları ve morfizmleri sürekli fonksiyonlardan oluşan sınıf yansımalı **bağıntı uzayları kategorisidir** ve **RREL** ile gösterilir [2, 17].

**Not 1.5.3:**  $\mathcal{E} = \mathbf{RREL}$  için,

1. (i)  $(A, S), (A, R) \in Ob(\mathcal{E})$  için  $f, g: (A, R) \rightarrow (A, S)$  ve  $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$  olsun.  $\mathcal{U}(f) = f$  ve  $\mathcal{U}(g) = g$  den  $f = g$  dir yani  $\mathcal{U}$  faithfuldur.  $f: (A, R) \rightarrow (A, S)$  için  $\mathcal{U}(f) = f = 1_A: A \rightarrow A$  ve  $f$  izomorfizm olsun. Her  $a, b \in A$  için  $a \mathbf{R} b$  ise  $f$  sürekliliğinden  $f(a) \mathbf{S} f(b)$  olur.

$\mathcal{U}(f) = f = 1_A$  olduğundan  $1_A(a) \mathbf{S} 1_A(a)$  dir. Buradan  $a \mathbf{S} b$  olur. Dolayısıyla  $R \subset S$  dir.  $f^{-1}: (A, S) \rightarrow (A, R)$  olsun.  $a \mathbf{S} b$  ise  $\mathcal{U}(f^{-1}) = f^{-1} = 1_A$  süreklilikten  $f^{-1}(a) \mathbf{R} f^{-1}(b)$  dir.  $1_A(a) \mathbf{R} 1_A(a)$  yazılır ki  $a \mathbf{R} b$  dir. Buradan  $S \subset R$  dir. Böylece  $R = S$  olur ki buradan  $\mathcal{U}$  nun amnestik olur.

(ii)  $\mathcal{U}^{-1}(A) = \{(A, R): \mathcal{U}(A, R) = A, R \subset A^2\} \subset P(A^2)$  dir.  $P(A^2)$  bir küme olduğundan  $\mathcal{U}^{-1}(A)$  bir kümedir.

(iii)  $(A_i, R_i) \in Ob(\mathcal{E})$  için  $\{f_i: A \rightarrow \mathcal{U}(A_i, R_i) = A_i, i \in I\}$  kaynağı  $R = \{(a, b): f_i(a) \mathbf{R}_i f_i(b), \text{ her } i \in I\}$  dir.

$\mathcal{E} = \mathbf{RREL}$  olsun. Her  $i \in I$  için  $f_i(a) \in A_i$ ,  $(A_i, R_i) \in \mathbf{RREL}$  den  $f_i(a) \mathbf{R}_i f_i(a)$  dir.  $R$  nin tanımından dolayı  $a \mathbf{R} a$  olur.

$f_i: (A, R) \rightarrow (A_i, R_i)$ ,  $f_i: A \rightarrow A_i$  nin başlangıç kaldırmasıdır. Her  $(B, S) \in Ob(\mathcal{E})$ ,  $(A_i, R_i) \in Ob(\mathcal{E})$  ve  $\mathcal{E}$  de  $h_i: (B, S) \rightarrow (A_i, R_i)$  morfizm ailesi için en az bir  $k: B \rightarrow A$  vardır ve  $\mathcal{U}(f_i) \circ k = h_i$  dir.  $k$  nın sürekli olduğunu gösterelim. Her  $a, b \in B$  için  $a \mathbf{S} b$  ise  $h_i$  lerin sürekliliğinden  $h_i(a) \mathbf{R}_i h_i(b)$  dir.  $\mathcal{U}(f_i) \circ k = h_i$  den  $f_i k(a) \mathbf{R}_i f_i k(b)$  olur.  $R$  den  $k(a) \mathbf{R} k(b)$  dir.  $\mathcal{E} = \mathbf{RREL}$  topolojik kategoridir [2, 17].

2.  $(A, R)$  diskre objedir.  $\Leftrightarrow$  her  $a, b \in A$  için  $b \mathbf{R} a \Leftrightarrow b = a$  dir.

3.  $f_i: (A_i, R_i) \rightarrow (A, R)$  epimorfizminin bitiş kaldırmasıdır  $\Leftrightarrow$  her  $a, b \in A$  için  $a R b$  dir  $\Leftrightarrow$  en az bir  $k \in I$  ve  $d, c \in A_k$  ikilisi vardır ve  $f_k(d) = b$ ,  $f_k(c) = a$  ve  $c R_i d$  dir.
4.  $\mathcal{U}$  normalleştirilmiştir. Boş ve tek nokta kümesinde tek bir bağıntı vardır.  $\mathcal{U}^{-1}(\emptyset)$  da  $R = \emptyset$  tek bağıntıdır.  $\mathcal{U}^{-1}(\{a\})$  da  $R \neq \emptyset$  yani  $R = \{a\}^2$  dir.



## 2. BÖLÜM

### TOPOLOJİK KATEGORİLERDE QUASI-PROXİMİTY UZAYLARDA KAPALILIK VE KUVVETLİ KAPALILIK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde quasi-proximity uzayların topolojik kategorisinde belirli bir noktada ve genelde çeşitli ayırma aksiyomlarını, (kuvvetli) kapalılık, (kuvvetli) bağlantılık gibi kavramları ile quasi-proximity uzayların topolojik kategorisinde bu kavramlar arasındaki ilişkileri incelenmiştir.

$X$  kümesi üzerinde Quasi-Proximity kavramı Efremovich tarafından 1950 de tanıtılmıştır [8].

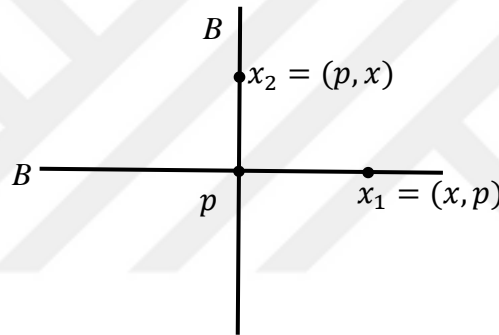
“ $A$ ,  $B$ ’ye yakındır” şeklindeki quasi-proximity bağıntısını  $X$  in alt kümeleri üzerinde ikili ilişki olarak tanıtmıştır. 1941’de Wallace [9, 10] tarafından ”Kümelerin Ayrılması (Seperation of Sets)” ile ilgili bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışma quasi-proximity (yarı-yakınlık) kavramının ilkel şekli olarak değerlendirilebilir. İlk yapılan çalışmaların büyük bir kısmı Smirnov ([18, 19]) tarafından yapılmıştır. Quasi-proximity uzaylar ile ilgili bütün ön bilgilerimiz ve daha bir çok bilgi bunun içinde bulunabilir [20]. Daha sonraki yıllarda Leader [21] , Lodato [22] ve Pervin [23] gibi bazı yazarlar Efremovich’ in quasi-proximity aksiyomlarından daha zayıf aksiyomlarla çalışmışlardır. Baran, topolojik uzaylardaki çeşitli ayırma aksiyomlarını kümeler üzerindeki değişik topolojik kategorilerde genelde ayırma aksiyomlarını vermiştir [5]. Baran, ayırma aksiyomlarını bir  $p$  de, yani yerel (local) olarak tanımlamıştır (bkz. [5, 24-31]).

Bir önceki bölümde fanktor ve topolojik kategori tanımlarını vermiştik. Not olarak;  $\mathcal{E}$  ve  $\mathcal{D}$  herhangi iki kategori,  $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  topolojik fanktor olsun. Her  $B \in \mathcal{D}$  bitiş (terminal) objesi için  $\mathcal{U}^{-1}(B)$  bir tek yapıya sahip ise  $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  fanktoruna normalleştirilmiş denir [16, 17, 30, 32, 33].

$\mathcal{E}$  topolojik kategori, her  $Y \in \mathcal{E}$  objesi için  $\mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{U}(Y)$  dönüşümü  $X \rightarrow Y$  ne kaldırılabilirse  $X \in \mathcal{E}$  objesi **diskredir**. Her  $Y \in \mathcal{E}$  objesi için  $\mathcal{U}(Y) \rightarrow \mathcal{U}(X)$  dönüşümü  $Y \rightarrow X$  ne kaldırılabilirse  $X \in \mathcal{E}$  objesi **indiskredir**.

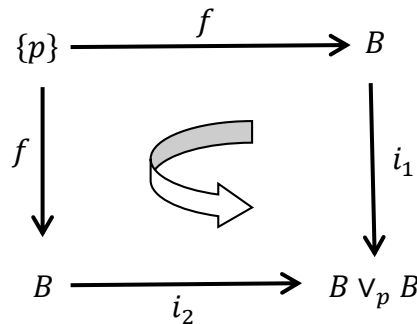
## 2.1 $p$ de Eğik Eksen ve Katlama Dönüşümleri

**Tanım 2.1.1. (Wedge Çarpımı):**  $B$  küme,  $p \in B$  ve  $B \amalg B$ ,  $B$  nin ayrık iki kopyası,  $B$  nin  $p$  de wedge çarpımı  $B \amalg B$  nin  $p$  de çakışması olarak tanımlanır ve  $B \vee_p B$  ile gösterilir.  $B \vee_p B$  de alınan  $x$  birinci bileşende ise  $x_1$  ikinci bileşende ise  $x_2$  ile gösterilir [5].



Şekil 2.1.  $p$  noktasında wedge çarpım

**Not 2.1.2:**  $B$  küme ve  $p \in B$  olmak üzere  $\{p\}$ , **SET** kategorisinde bitiş objesi ve  $i_1, i_2: B \rightarrow B \vee_p B$  dönüşümleri için;



değişmeli diyagramı pushout diyagramıdır.

$id: B \rightarrow B$  birim dönüşüm ve  $f: \{p\} \rightarrow B$  de  $p$  ye giden sabit dönüşüm olmak üzere;

$$A_p i_1 = (id, f): B \rightarrow B^2,$$

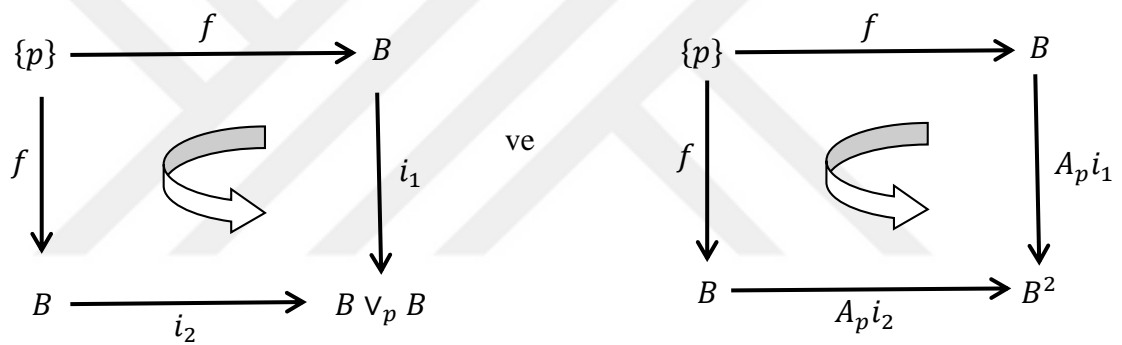
$$A_p i_2 = (f, id): B \rightarrow B^2,$$

$$S_p i_1 = (id, id): B \rightarrow B^2,$$

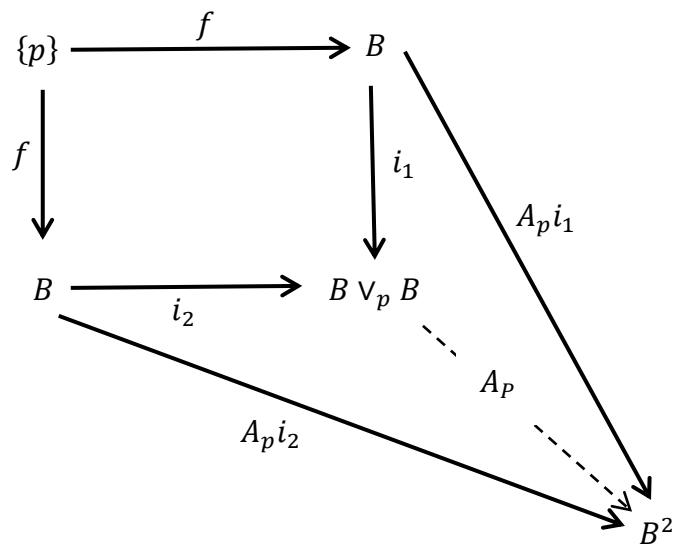
$$S_p i_2 = (f, id): B \rightarrow B^2 \text{ ve}$$

$$\nabla_p i_1 = \nabla_p i_2 = id: B \rightarrow B$$

Yukarıda verilen pushout diyagramına uygulandığında  $p$  deki wedge çarpımından  $A_p$ ,  $S_p$  ve  $\nabla_p$  dönüşümleri elde edilir.



değişmeli diyagramları için,

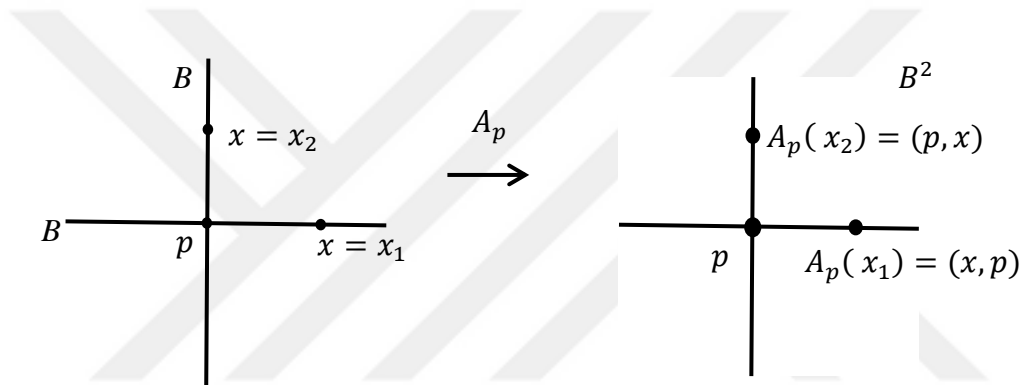


diyagramı değişmeli, yani  $A_p i_1 f = A_p i_2 f = (f, f)$  olduğundan bir tek  $A_p: B \vee_p B \rightarrow B^2$  morfizmi vardır [5].

**Tanım 2.1.3 ( $p$  de Eksen Dönüşümleri):**

(i)  $p$  de Temel Eksen Dönüşümü ( $A_p$ ):  $A_p: B \vee_p B \rightarrow B^2$ ,

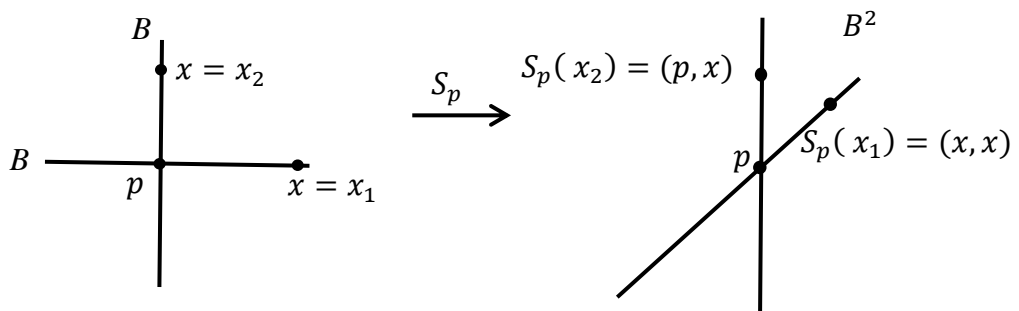
$$A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$



Şekil 2. 2.  $p$  de Temel eksen dönüşümü

(ii)  $p$  de Skewed Eksen Dönüşümü ( $S_p$ ):  $S_p: B \vee_p B \rightarrow B^2$ ,

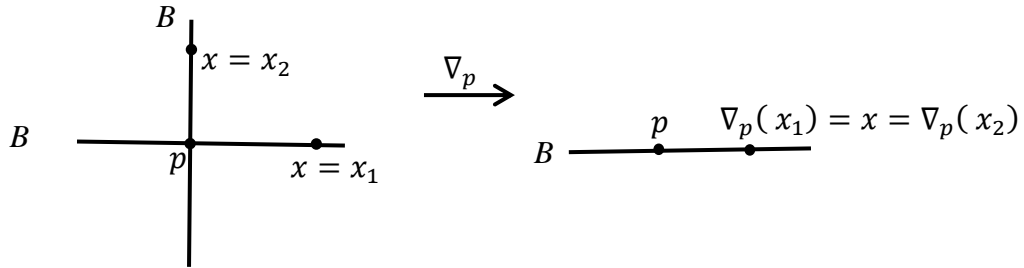
$$S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$



Şekil 2.3.  $p$  de Eğik (Skewed) eksen dönüşümü

(iii)  $p$  de Katlama Dönüşümü ( $\nabla_p$ ):  $\nabla_p: B \vee_p B \rightarrow B$ ,

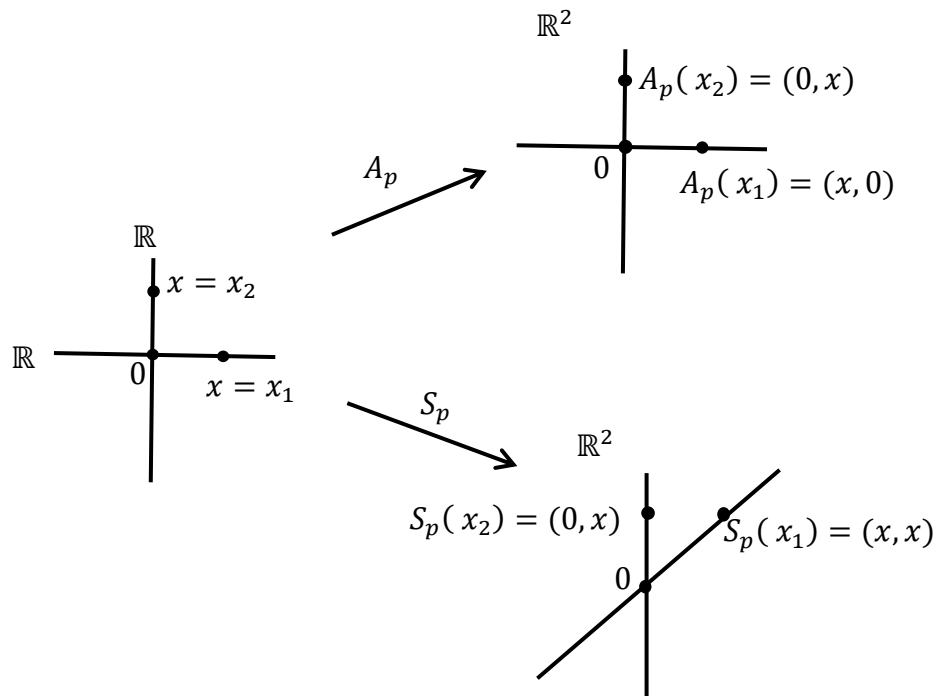
$$\nabla_p(x_i) = x, \quad i = 1, 2 \text{ ise}$$



Şekil 2.4  $p$  de Katlama (Fold) dönüşümü

olarak tanımlanır [5].

**Örnek 2.1.4:** Reel sayılar kümesi ve  $p = 0$  için  $A_p$  nin görüntüsü,  $x$  ve  $y$  eksenlerinin birleşimi  $S_p$  nin görüntüsü  $y = x$  doğrusu ile  $y$  ekseninin birleşimidir [15].



Şekil 2.5.  $B = \mathbb{R}$  ve  $p = 0$  için  $A_p$  ve  $S_p$  dönüşümlerinin görüntüsü

## 2.2. Kapalılık

**Tanım 2.2.1:**  $(X, \mathcal{T})$  topolojik uzayında ve  $F \subset X$  için  $F^c$  açıksa  $F$  ye kapalıdır denir.

## 2.3. Topolojik Kategorilerde Bir Noktada Ayırma Aksiyomları

**Tanım 2.3.1:**  $(X, \mathcal{T})$  topolojik uzay ve  $p \in X$  olsun.

- (1)  $(X, \mathcal{T})$   $p$  de  $T_0$  dir  $\Leftrightarrow$  her  $q \neq p$  için  $q \notin U$  olacak şekilde  $p$  nin en az bir  $U$  veya  $p \notin V$  olacak şekilde  $q$  nun en az bir  $V$  vardır [5].
- (2)  $(X, \mathcal{T})$   $p$  de  $T_1$  dir  $\Leftrightarrow$  her  $q \neq p$  için  $q \notin U$  olacak şekilde  $p$  nin en az bir  $V$  ve  $p \notin V$  olacak şekilde  $q$  nun en az bir  $V$  vardır [5].

## 2.4. Quasi-Proximity Uzaylar

**Tanım 2.4.1 (Quasi-Proximity Uzay):** ([20])  $\delta, P(X)$  de bir ikili ilişki olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $(X, \delta)$  ikilisine bir quasi-proximity veya  $P$  – proximity uzayı denir.

- (i)  $A\delta B$  ise,  $A, B \neq \emptyset$  dir,
- (ii)  $(A \cup B)\delta C$  dir  $\Leftrightarrow A\delta C$  veya  $B\delta C$  dir,
- (iii)  $C\delta(A \cup B)$  dir  $\Leftrightarrow C\delta A$  veya  $C\delta B$  dir,
- (iv)  $A \cap B \neq \emptyset$  ise  $A\delta B$  dir,
- (v)  $A\bar{\delta}B$  ise en az bir  $E \subseteq X$  vardır öyle ki  $A\bar{\delta}E$  ve  $(X - E)\bar{\delta}B$ ; (burada  $A\bar{\delta}B, A\delta B$  nin doğru olmadığı anlamına gelir).

Eğer  $\delta, A\delta B \Leftrightarrow B\delta A$  simetri koşulunu sağlıyorsa, buna  $X$  üzerinde bir (Efremovich) proximity denir. (v) aksiyomu kuvvetli aksiyom olarak adlandırılır ve proximity uzaylar teorisinde önemli bir rol oynar.

$(X, \delta), (Y, \delta')$  iki quasi-proximity uzayları için  $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$  fonksiyon olsun  $f$  (quasi-)proximity dönüşümüdür  $\Leftrightarrow A\delta B$  olduğunda  $f(A)\delta'f(B)$  dir.  $C\bar{\delta}'B$  olduğundan

$f^{-1}(C)\bar{\delta}f^{-1}(D) \Leftrightarrow f$  in bir **(quasi-)proximity dönüşüm** olduğu kolayca gösterilebilir [20].

$(X, \delta)$  bir (quasi-)proximity uzay,  $A \ll B$  dir  $\Leftrightarrow A\bar{\delta}(X - B)$ dir. Burada  $\ll$  bağıntısına  $p$  –komşuluğu veya kuvvetli içirme denir.  $A \ll B$  olduğunda,  $B$  ye  $A$  nın bir  $p$  –komşuluğu veya  $A$  nın  $B$  de kuvvetli olarak içerildiğini söyleriz [20, 34].

**Tanım 2.4.2 (PROX Kategorisi):** ([15]) Objeleri  $(X, \delta), (Y, \delta'), (Z, \delta'')$ ... gibi proximity uzaylar, morfizmleri  $p$  –dönüşüm ve  $f, g$  morfizmleri için  $g \circ f, p$  –dönüşüm olduklarından  $g \circ f$  de  $p$  –dönüşümdür.

(i)  $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta'), g : (Y, \delta') \rightarrow (Z, \delta'')$  ve  $h : (Z, \delta'') \rightarrow (T, \delta''')$  için  $f, g$  ve  $h$  ler  $p$  –dönüşüm olduğundan  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  dir.

(ii) Her  $(X, \delta)$  objesi için  $1_{(X, \delta)} : (X, \delta) \rightarrow (X, \delta)$  birim ve  $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$  için  $f \circ 1_{(X, \delta)} = f$  ve her  $g : (Y, \delta') \rightarrow (X, \delta)$  için  $1_{(X, \delta)} \circ g = g$  dir. Proximity uzayların kategorisi **PROX** şeklindedir.

**Tanım 2.4.3 (QPROX Kategorisi):** Proximity uzayları ve proximity dönüşümleri kategorisini **PROX** ve quasi-proximity uzayları ve quasi-proximity dönüşümleri kategorisini **QPROX** ile gösteririz.

Hunsaker ve Sharma [35]  $\mathcal{U} : \mathbf{PROX} \rightarrow \mathbf{SET}$  topolojik funktör olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde, **QPROX, SET** [40, s.31] üzerinde bir topolojik kategoridir ve **PROX, QPROX** un bir full alt kategorisidir [44, s.147].

**Tanım 2.4.4:**  $\mathfrak{B}$ , bir  $X$  kümesinde (quasi-)proximity-taban olsun ve  $\mathbf{P}(X)$  de bir ikili bağıntı aşağıdaki gibi tanımlansın:  $(A, B) \in \delta$  ise,  $A$  ve  $B$  nin sırasıyla  $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$  ve  $\{B_j : 1 \leq j \leq m\}$  herhangi bir sonlu örtüleri verilsin o halde bir  $(i, j)$  ikilisi vardır öyle ki  $(A_i, B_j) \in \mathfrak{B}$  dir.  $\delta, X$  üzerinde  $\mathfrak{B}$  [35,36] bağıntısından daha ince bir (quasi-)proximity yapısıdır [12].

**Tanım 2.4.5 (Quasi-Proximity Taban):**  $X$  küme ve her  $i \in I$  için  $(X_i, \delta_i)$  (quasi-) proximity uzayı ve  $f_i : X \rightarrow (X_i, \delta_i)$  **SET** kategorisi üzerinde bir kaynak olsun.  $\mathbf{P}(X)$

üzerinde  $\mathfrak{B}$  ikili ilişkisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  için  $A\mathfrak{B}B$  dir.  $\Leftrightarrow i \in I$  için  $f_i(A)\delta_i f_i(B)$  dir.  $\mathfrak{B}, X$  de bir (quasi-)proximity tabandır [36].

**Not 2.4.6:**  $X$  üzerinde  $\delta$  başlangıç (quasi-)proximity yapısı  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  için verilen  $\mathfrak{B}$  (quasi-)proximity tabanı tarafından üretilir,  $A\delta B$  dir  $\Leftrightarrow A$  ve  $B$  'nin her  $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$  ve  $\{B_j : 1 \leq j \leq m\}$  sonlu örtüleri için  $(i, j)$  ikilisi vardır öyle ki  $(A_i, B_j) \in \mathfrak{B}$  dir [10, 36].

**Tanım 2.4.7:** ([34])  $(X, \delta)$  bir (quasi-)proximity uzayı,  $Y \neq \emptyset$  ve  $f$  de  $(X, \delta)$  (quasi-)proximity uzayından  $Y$  kümesi üzerine örten olsun.  $Y$  üzerindeki  $f$  i (quasi-)proksimal sürekli yapan en ince (quasi-)proximity  $\delta^*$  (bölüm (quasi-)proximity) kuvvetli inclusion  $\ll^*$  tarafından şu şekilde üretilir:

Her  $A, B \subset Y$  kümesi için  $A \ll^* B$  dir  $\Leftrightarrow [0, 1]$  aralığı içindeki ikili rasyonel  $s$  için,  $C_0 = A$ ,  $C_1 = B$  ve  $s < t$  için  $f^{-1}(C_s) \ll_{\delta} f^{-1}(C_t)$  olacak şekilde en az bir  $C_s \subset Y$  vardır [34] veya [37, s. 276]; ki burada  $\ll_{\delta}$ ,  $X$  üzerindeki  $\delta$  (quasi-) proximity tarafından üretilmiş olan en kuvvetli inclusion (içine) dönüşümü ifade eder.

Bunlara ilave olarak,  $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta^*)$  bire bir (quasi-)proximity quotient dönüşüm ise  $A\delta^* B$  dir  $\Leftrightarrow f^{-1}(A)\delta^* f^{-1}(B)$  dir.

**Tanım 2.4.8:** ([12])  $X$  küme ve  $p \in X$  olsun. **Prox(QProx)** da  $i_1, i_2$  nin kanonik dönüşüm olduğu bir epi kavşağı  $\{i_1, i_2 : (X, \delta) \rightarrow (X \vee_p X, \delta')\}$  (quasi-proximity dönüşüm)  $\Leftrightarrow$  aşağıdaki ifadenin geçerli olması durumunda bitiş kaldırmadır.

$X \vee_p X$  in her bir  $A, B$  ikilisinin farklı bileşenlerindeki  $A\delta'B \Leftrightarrow k, j = 1, 2$  ve  $k \neq j$  için  $i_k^{-1}(A) = C$  ve  $i_j^{-1}(B) = D$  için  $C\delta\{p\}$  ve  $\{p\}\delta D$  olacak şekilde  $X$  de  $C, D$  kümeleri vardır.  $A$  ve  $B$  wedge çarpımın aynı bileşeninde ise  $A\delta'B$  dir  $\Leftrightarrow k = 1, 2$  için  $i_k^{-1}(A) = C$  ve  $i_k^{-1}(B) = D$  için  $C\delta D$  olacak şekilde  $X$  de  $C, D$  vardır.

Özel şekilde,  $i_k(C) = A$  ve  $i_k(D) = B$  ise  $(i_k(C), i_k(D)) \in \delta' \Leftrightarrow (i_k^{-1}(i_k(C)), i_k^{-1}(i_k(D))) = (C, D) \in \delta$  dir.

**Teorem 2.4.9:**  $X$  üzerindeki  $\delta$  diskre (quasi-) proximity yapısı  $A, B \subset X$  için,  $A\delta B$  dir  $\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$  dir [20].

**Teorem 2.4.10:**  $A, B \subset X$  için  $X$  üzerindeki  $\delta$  indiskre (quasi-)proximity yapısı  $A, B \subset X$  için,  $A\delta B$  dir  $\Leftrightarrow A \neq \emptyset$  ve  $B \neq \emptyset$  dir [38].



### 3. BÖLÜM

#### BİR NOKTADA $T_0$ VE $T_1$ (QUASI-)PROXİMİTY UZAYLAR

##### 3.1. Bir Nuktada $T_0$ ve $T_1$ (Quasi-)Proximity Uzaylar

**Tanım 3.1.1:**  $B$  küme ve  $p \in B$  olsun.  $x, B \vee_p B$ 'nin başlangıç (ikinci) bileşeninde ise  $B \vee_p B$  'deki  $x$  noktası  $x_1(x_2)$  ile gösterilir. Burada  $p_1 = p_2$  olduğuna dikkat edin.

Temel  $p$  ekseni dönüşümü olan  $A_p(x_1) = (x, p)$  ve  $A_p(x_2) = (p, x)$ ,  $A_p: B \vee_p B \rightarrow B^2$  ile tanımlanır. Eğik  $p$  ekseni dönüşümü,  $S_p(x_1) = (x, x)$  ve  $S_p(x_2) = (p, x)$ ,  $S_p: B \vee_p B \rightarrow B^2$  ile tanımlanır.  $p, \nabla_p: B \vee_p B \rightarrow B$  deki katlama dönüşümü,  $i = 1, 2$  için  $\nabla_p(x_i) = x$  ile verilir [5].

**Tanım 3.1.2:** ([5])  $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$  topolojik fanktor,  $\mathcal{U}(X) = B$  için  $X$  objesi,  $p \in B$  olsun.

(1)  $X, p$  de  $\bar{T}_0$  dır  $\Leftrightarrow \{A_p: B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2$  ve  $\nabla_p: B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ ,  $\mathcal{U}$  kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

(2)  $X, p$  de  $T_0'$  dir  $\Leftrightarrow \{id: B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X \vee_p X) = B \vee_p B$  ve  $\nabla_p: B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$   $\mathcal{U}$  kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada  $X \vee_p X$ ,  $\mathcal{E}$  de wedge çarpımıdır, yani  $i_1, i_2$  kanonik dönüşümler olmak üzere  $\mathcal{U}$  kavşağının bitiş kaldırması  $\{i_1, i_2: \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B \vee_p B\}$  dır.

(3)  $X, p$  de  $T_1$  dir  $\Leftrightarrow \{S_p: B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2$  ve  $\nabla_p: B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$   $\mathcal{U}$  kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

**Teorem 3.1.3:**  $(X, \delta)$  bir quasi-proximity uzayı ve  $p \in X$  olsun.  $(X, \delta)$  nın  $p$  de  $\bar{T}_0$  dır  $\Leftrightarrow$  her  $x \neq p$  için  $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$  veya  $(\{p\}, \{x\}) \notin \delta$  dır [12].

**İspat:**  $(X, \delta)$   $p$  de  $\bar{T}_0$  olsun. Bu şartların sağlandığını gösterelim.  $x \neq p$  olacak şekilde en az bir  $x \in X$  için,  $(\{x\}, \{p\}) \in \delta$  ve  $(\{p\}, \{x\}) \in \delta$  olsun. Bu taktirde, Tanım 2.4.5 ve 2.4.9'a göre,  $(U, V) \in \delta'$  ( $\delta'$ ,  $X \vee_p X$  üzerinde bir quasi-proximity yapısıdır) için  $U = \{x_1\}$  ve  $V = \{x_2\}$  ile,

$$\pi_1 A_p(U) \delta \pi_1 A_p(V) = \{x\} \delta \{p\},$$

$$\pi_2 A_p(U) \delta \pi_2 A_p(V) = \{p\} \delta \{x\},$$

olur ki burada  $\pi_i : X^2 \rightarrow X, i = 1, 2$  izdüşüm dönüşümleri, ve

$$\nabla_p(\{x_1\}) \delta_d \nabla_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta_d \{x\} \text{ dır.}$$

Fakat  $U \cap V = \emptyset$  dur. Bu ise  $(X, \delta)$  nın  $p$  de  $\bar{T}_0$  olmasıyla çelişir.  $(V, U) \in \delta'$  için de benzer çelişki elde edilebilir. Dolayısıyla  $(\{p\}, \{x\}) \in \delta$  ve  $(\{x\}, \{p\}) \in \delta$  ise,  $x = p$  dir.

Tersine alarak, her bir  $x \neq p$  için,  $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$  veya  $(\{p\}, \{x\}) \notin \delta$  olduğunu kabul edelim.  $(X, \delta)$  nın  $p$  'de  $\bar{T}_0$  olduğunu gösterelim. Bunun için  $(U, V)$ ,  $\delta'$  deki herhangi bir küme olsun, burada  $\delta'$ ,  $X \vee_p X$  üzerinde  $A_p$  ve  $\nabla_p$  tarafından üretilmiş başlangıç yapı olmak üzere  $\pi_1 A_p(U) \delta \pi_1 A_p(V)$ ,  $\pi_2 A_p(U) \delta \pi_2 A_p(V)$  ve  $\nabla_p(U) \delta_d \nabla_p(V)$  dır.

$\delta_d$  diskre quasi-proximity yapı ve  $\nabla_p U \delta_d \nabla_p V$  olduğundan,  $\nabla_p U \cap \nabla_p V \neq \emptyset$ . Bu,  $x \in \nabla_p U \cap \nabla_p V$  nin var olduğu sonucu çıkar. Buradan,  $\nabla_p \{y\} = x = \nabla_p \{z\}$  olacak şekilde  $\exists y \in U$  ve  $z \in V$  vardır.

Eğer  $x = p$  ise, bu taktirde  $y = p_i = z$ , ( $i = 1, 2$ ) ve  $p_i \in U \cap V$ .

Eğer  $x \neq p$  ise, bu taktirde  $y = x_i$ ,  $z = x_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) dir.  $U \cap V \neq \emptyset$  olduğunu gösterelim.

Eğer  $p \in \nabla_p U \cap \nabla_p V$  ise, bu taktirde  $p_i \in U \cap V$  ( $i = 1, 2$ ) dır.  $p \notin \nabla_p U \cap \nabla_p V$  olduğunu kabul edelim.

Hem  $U$  hem de  $V$  nin  $X \vee_p X$  in birinci bileşende veya ikinci bileşende veya her iki bileşeninde olduğunu gösterelim.

$U$ ,  $X \vee_p X$  in birinci bileşeninin alt kümesi ve  $V$ ,  $X \vee_p X$  in ikinci bileşeninin alt kümesi ise, bu takdirde  $\{x_1\} \subseteq U$  ve  $\{x_2\} \subseteq V$ . Bundan çıkan sonuç şudur ki

$$\pi_1 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{p\},$$

$$\pi_2 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_2\}) = \{p\} \delta \{x\} \text{ dır.}$$

Tanım 2.4.1'deki (Q2) ve (Q3) şartlarına göre  $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$  veya  $(\{p\}, \{x\}) \notin \delta$  (kabulümüze göre),  $(U, V) \notin \delta'$  dır.

$U, X \vee_p X$  in ikinci bileşeninin alt kümesi ve  $V, X \vee_p X$  in birinci bileşeninin alt kümesi alırsak benzer şeyler elde edilir. Buradan  $U$  ve  $V, X \vee_p X$  in farklı bileşenlerinde olamaz.

$U, X \vee_p X$  in birinci bileşeninin (sırayla  $V$ ) alt kümesi ve  $V, X \vee_p X$  in her iki bileşeninin (sırayla  $U$ ) alt kümesi ise, bu taktirde  $U \supseteq \{x_1\}$  ve  $V \supseteq \{x_1, x_2\}$  (sırayla  $V \supseteq \{x_1\}$  ve  $U \supseteq \{x_1, x_2\}$ ) dır.  $U, X \vee_p X$  in her iki bileşeninin (sırayla  $V$ ) alt kümesi ve  $V, X \vee_p X$  in ikinci bileşeninin (sırayla  $U$ ) alt kümesi ise, bu taktirde  $U \supseteq \{x_1, x_2\}$  ve  $V \supseteq \{x_2\}$  (sırayla  $V \supseteq \{x_1, x_2\}$  ve  $U \supseteq \{x_2\}$ ) dır. Dolayısıyla  $U \cap V \neq \emptyset$  dır.

Benzer şekilde,  $U$  ve  $V, X \vee_p X$  in birinci (sırayla ikinci) bileşenindeyse, bu taktirde  $U \supseteq \{x_1\}$  ve  $V \supseteq \{x_1\}$  ( $U \supseteq \{x_2\}$  ve  $V \supseteq \{x_2\}$ ) dır.  $U$  ve  $V, X \vee_p X$  in iki bileşenindeyse,  $U \supseteq \{x_1, x_2\}$  ve  $V \supseteq \{x_1, x_2\}$  dır. Dolayısıyla  $U \cap V \neq \emptyset$  dır.

$\{x_i, x_i\} \in \delta'$  ( $i = 1, 2$ ) ise, bu taktirde

$$\pi_1 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_1\}) = \{x\} \delta \{x\},$$

$$\pi_2 A_p(\{x_1\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_1\}) = \{p\} \delta \{p\}.$$

$$\pi_1 A_p(\{x_2\}) \delta \pi_1 A_p(\{x_2\}) = \{p\} \delta \{p\},$$

$$\pi_2 A_p(\{x_2\}) \delta \pi_2 A_p(\{x_2\}) = \{x\} \delta \{x\}.$$

$(U, V) \supseteq (\{x_i, x_i\})$ , ( $i = 1, 2$ ) yani,  $U \cap V \neq \emptyset$  ve sonuç olarak Tanımlar 2.4.5, 2.4.9 ve Tanım 3.1.2. ye göre  $(X, \delta)$   $p$  de  $\bar{T}_0$  dır.

**Teorem 3.1.4:** Her  $p \in X$  için  $p$  de bir quasi-proximity uzayı  $T_0'$  dır [12].

**İspat:**  $(X, \delta)$  quasi-proximity uzay ve  $p \in X$  olsun. Bazı  $(U, V) \in \delta$  ( $U, V \subset X$ ) ve  $\delta'$ ,  $X \vee_p X$  üzerinde quasi-proximity yapı olmak üzere eğer  $(i_k(U), i_k(V)) \in \delta'$  ( $i_k(U, V) = (i_k(U), i_k(V)) \in \delta'$  ( $k = 1, 2$ ) ve  $\delta_d$ ,  $X$  üzerinde diskre quasi-proximity yapı olmak üzere  $(\nabla_p(i_k(U)), \nabla_p(i_k(V))) \in \delta_d$  ise, bu taktirde  $(i_k(U), i_k(V)) \supseteq (\{p_k\}, \{p_k\})$  veya  $(i_k(U), i_k(V)) \supseteq (\{x_k\}, \{x_k\})$  ( $k = 1, 2$ ) yani  $i_k(U) \cap i_k(V) \neq \emptyset$  olduğunu göstermeliyiz. (Benzer olarak  $(i_k(V), i_k(U)) \in \delta'$  içinde yapılır.

$\delta_d$ ,  $X$  üzerinde diskre quasi-proximity yapı ve  $(\nabla_p(i_k(U))\delta_d\nabla_p(i_k(V)))$  olduğundan  $(\nabla_p(i_k(U)) \cap \nabla_p(i_k(V))) \neq \emptyset$  olur. Buradan  $x \in \nabla_p(i_k(U)) \cap \nabla_p(i_k(V))$  olacak şekilde bir  $x$  elemanı olduğunu görülür. Bu yüzden  $\nabla_p\{y\} = x = \nabla_p\{z\}$  olacak şekilde  $y \in i_k(U)$  ve  $z \in i_k(V)$  vardır. Eğer  $x = p$  ise, bu taktirde  $y = p_k = z, (k = 1,2)$  ve  $p_k \in i_k(U) \cap i_k(V)$  dir. (Benzer olarak  $(\nabla_p(i_k(U))\delta_d\nabla_p(i_k(V)))$  içinde yapılır.)

Eğer  $x \neq p$  ise, bu taktirde  $y = x_k, z = x_n (k, n = 1,2)$  dir.  $i_k(U) \cap i_k(V) \neq \emptyset$  olduğunu göstermeliyiz.

Eğer  $p \in \nabla_p(i_k(U)) \cap \nabla_p(i_k(V))$  ise, bu durumda  $p_k \in i_k(U) \cap i_k(V) (k = 1,2)$  olur. Kabul edelim ki  $p \notin \nabla_p(i_k(U)) \cap \nabla_p(i_k(V))$  olsun.  $i_k(U)$  ve  $i_k(V)$  nin her ikisi de  $X \vee_p X$  nin birinci, ikinci yada her iki bileşeninde olduğunu gösterelim.

Eğer  $i_k(U), X \vee_p X$  nin ilk bileşeninin;  $i_k(V), X \vee_p X$  nin ikinci bileşeninin alt kümeleri ise  $\{x_k\} \in i_k(U)$  ve  $\{x_k\} \in i_k(V)$  dir. Fakat bazı  $(U, V) \in \delta k = 1(k = 2)$  için  $(i_k(U), i_k(V)) \ni (\{x_1\}, \{x_2\})$  ise o halde  $(\{x_1\}, \{x_2\}) \in (i_k(U), i_k(V))$  olup bu  $x_2(x_1)$   $X \vee_p X$  nin ilk bileşeninde (ikinci bileşeninde) olduğunu gösterir. Bu ise  $x \neq p$  olduğundan bir çelişkidir.

Benzer olarak,  $i_k(U) X \vee_p X$  nin ikinci bileşeninde;  $i_k(V)$  ise birinci bileşeninde ise  $\{x_2\} \in i_k(U)$  ve  $\{x_1\} \in i_k(V)$  dir. Fakat bazı  $(U, V) \in \delta k = 1(k = 2)$  için  $(i_k(U), i_k(V)) \ni (\{x_2\}, \{x_1\}) \in \delta'$  ise  $(\{x_2\}, \{x_1\}) \in (i_1(U), i_1(V))$  olup bu  $x_2(x_1)$   $X \vee_p X$  nin ilk bileşeninde (ikinci bileşeninde) olduğunu gösterir. Bu ise  $x \neq p$  olduğundan çelişkidir. Bu yüzden  $i_k(U)$  ve  $i_k(V)$   $X \vee_p X$  nin farklı bileşenlerinde olamaz.

Eğer  $i_k(U)$  ve  $i_k(V)$ ,  $X \vee_p X$  nin her iki bişeninde iseler  $i_k(U) \supset \{x_1, x_2\}$  ve  $i_k(V) \supset \{x_1, x_2\}$  dir. Bu yüzden dolayı  $i_k(U) \cap i_k(V) \neq \emptyset$  dir.

Eğer  $i_k(U), X \vee_p X$  nin ilk bileşeninin alt kümesi ve  $i_k(V), X \vee_p X$  nin her iki bileşeninde ise  $i_k(U) \supset \{x_1\}$  ve  $i_k(V) \supset \{x_1, x_2\}$  dir. Bu yüzden dolayı  $i_k(U) \cap i_k(V) \neq \emptyset$  dir.

Eğer  $i_k(U), X \vee_p X$  nin her iki bileşeninde ve  $i_k(V), X \vee_p X$  nin ikinci bileşeninde ise  $i_k(U) \supset \{x_1, x_2\}$  ve  $i_k(V) \supset \{x_2\}$  dir. Bu yüzden dolayı  $i_k(U) \cap i_k(V) \neq \emptyset$  dir.

Eğer  $i_k(U)$  ve  $i_k(V)$ ,  $X \vee_p X$  nin birinci bileşeninde ise  $i_k(U) \supset \{x_1\}$  ve  $i_k(V) \supset \{x_1\}$  dir. Benzer olarak  $i_k(U)$  ve  $i_k(V)$ ,  $X \vee_p X$  nin ikinci bileşeninde ise  $i_k(U) \supset \{x_2\}$  ve  $i_k(V) \supset \{x_2\}$  dir. Bu yüzden dolayı  $i_k(U) \cap i_k(V) \neq \emptyset$  dir.  $(i_k(U), i_k(V)) \cong (\{x_2\}, \{x_1\})$ ,  $(i = 1, 2)$  yani  $i_k(U) \cap i_k(V) \neq \emptyset$  olarak almalıyız. Sonuç olarak,  $(X, \delta)$   $p$  de  $T_0'$  dir.

**Teorem 3.1.5:**  $(X, \delta)$  bir quasi-proximity ve  $p \in X$  olsun.  $(X, \delta)$  uzayının  $p$  de  $T_1 \Leftrightarrow x \neq p, (\{x\}, \{p\}) \notin \delta$  veya  $(\{p\}, \{x\}) \notin \delta$  dir [12].

**İspat:** Teorem 3.1.3. de ki  $A_p$  dönüşümü yerine  $S_p$  dönüşümü kullanılarak ispatlanır.

**Not 3.1.6:**  $(X, \delta)$  bir quasi-proximity uzayı olsun. Teorem 3.1.3. ve Teorem 3.1.5. den  $(X, \delta)$  uzayının  $\bar{T}_0$  dir  $\Leftrightarrow T_1$  dir.

**Not 3.1.7:**

(1) Topolojik uzayların **TOP** kategorisinde  $p$  de  $\bar{T}_0$ ,  $p$  de  $T_0'$  veya  $p$  de  $T_1$ , her  $x \in X$  için  $x \neq p$  olan bir topolojik uzayda,  $x$  in içermeyen bir  $p$  komşuluğu veya  $p$  yi içermeyen bir  $x$  komşuluğu olduğunu gösterir [25].

(2) (a)  $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$  normalleştirilmiş ise, o zaman  $p$  de  $\bar{T}_0$  ve  $p$  de  $T_1$  in her biri  $p$  de  $T_0'$  olduğunu gösterir [30].

(b) Bir topolojik kategoride,  $p$  de  $\bar{T}_0$  ve  $p$  de  $T_1$  objeleri denk olabilir, bkz. [38, 28] ve tüm objeler  $p$  de  $T_1$  olabilir, örneğin [42]'de gösterildiği gibi tüm prebornolojik uzayların  $p$  de  $T_1$  olduğunu gösterir. Ayrıca,  $p$  de  $T_1$  objeleri yalnızca diskre objeler olabilir [39].

## 4. BÖLÜM

### (KUVVETLİ) KAPALI VE (KUVVETLİ) AÇIK ALT UZAYLAR

#### 4.1. QPROX Kategorisinde Wedge Çarpım

**Tanım 4.1.1:**  $B$  küme,  $p \in B$  olsun. Sonsuz wedge çarpımı  $\vee_p^\infty$ ,  $B$  nin sayılabilir sayıda ayrık kopyalarını alarak elde edilir.  $B^\infty = B \times B \times \dots \times B$ ,  $B$  nin sayılabilir kartezyen çarpımı olsun.  $A_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow B^\infty$  yi  $A_p^\infty(x_i) = (p, p, \dots, p, x, p', \dots)$  ile  $\nabla_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow B$  yi  $\nabla_p^\infty : (x_i) = x$  ile tanımlayalım,  $i \in I$  için  $x_i$  sonsuz wedge çarpımının  $i$  –inci bileşenindedir ve  $x$ ,  $(p, p, \dots, p, x, p, \dots)$  ifadesinde  $i$  –inci sıradadır [6].

#### 4.2. QPROX Kategorisinde Kapalılık

**Tanım 4.2.1:** ([6])  $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{SET}$  topolojik fanktor,  $\mathcal{U}(X) = B$  için  $X$ ,  $\mathcal{E}$  de bir obje olsun.  $q$ ,  $(B \setminus F)$  üzerindeki birim,  $F$  yi bir  $\{*\}$  ye dönüştüren örten fonksiyonu için  $q : \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$  epi  $\mathcal{U}$  kavşağının bitiş kaldırmasını  $X \setminus F$  ile gösteririz.

(1)  $p$  kapalıdır  $\Leftrightarrow U$  –kavşağının başlangıç kaldırması  $\{A_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow U(X^\infty) = B^\infty$  ve  $\nabla_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow UD(B) = B\}$  diskre olmasıdır.

(2)  $F \subset X$  kapalıdır  $\Leftrightarrow \{*\}$ ,  $F$  nin görüntüsü,  $X \setminus F$  veya  $F = \emptyset$  nin kapalı olmasıdır.

(3)  $F \subset X$  kuvvetli kapalıdır  $\Leftrightarrow X \setminus F$ ,  $\{*\}$  veya  $F = \emptyset$  nin  $T_1$  dir.

(4)  $B = F = \emptyset$  ise,  $F$  yi hem kapalı hem de kuvvetli kapalı olarak tanımlarız.

**Teorem 4.2.2:**  $(X, \delta)$  quasi-proximity uzayı ve  $p \in X$  olsun.  $\{p\}$  nin  $X$  de kapalıdır  $\Leftrightarrow$  herhangi bir  $B \subset X$  için  $\{p\} \delta B$  veya  $B \delta \{p\}$  olduğunda  $p \in B$  dir [12].

**İspat:**  $\{p\}$ ,  $X$  de kapalı olsun.  $B \subset X$  için,  $\{p\}\delta B$  veya  $B\delta\{p\}$  ise,  $p \in B$  olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki  $B \subset X$  için  $p \notin B$  iken  $\{p\}\delta B$  veya  $B\delta\{p\}$  olsun. Daha sonra herhangi bir  $x \neq p$  ve  $x \in B$  için, Tanım 2.4.1.'in (Q2) ve (Q3) koşullarına göre  $(\{x\}, \{p\}) \in \delta$  ve  $(\{p\}, \{x\}) \in \delta$  yi elde ederiz.

$U = \{x_1\}$  ve  $V = \{x_2\}$  olsun.  $(U, V) \in \delta'$  olduğuna dikkat edelim çünkü

$$\pi_1 A_p^\infty U \delta \pi_1 A_p^\infty V = \{x\} \delta \{p\}, \quad \pi_2 A_p^\infty U \delta \pi_2 A_p^\infty V = \{p\} \delta \{x\},$$

ve  $i \geq 3$  için,

$$\pi_i A_p^\infty U \delta \pi_i A_p^\infty V = \{p\} \delta \{p\},$$

burada  $\pi_i : X^\infty \rightarrow X$  izdüşüm dönüşümdür ve

$$\nabla_p^\infty(\{x_1\}) \delta_d \nabla_p^\infty(\{x_2\}) = \{x\} \delta_d \{x\}$$

burada  $\delta_d$ ,  $X$  üzerindeki diskre quasi-proximity yapısıdır. Ama  $U \cap V = \emptyset$ . Bu da  $\delta'$  nin diskre olmasıyla çelişir.  $(V, U) \in \delta'$  için de benzer şekilde ele alınabilir.

Koşul geçerliyse, [12] de ki ispattaki benzer şeyler kullanılarak elde ederiz ki,  $\{p\}$ ,  $X$  de kapalıdır.

**Teorem 4.2.3:**  $(X, \delta)$  bir quasi-proximity uzayı olsun. Bu takdirde  $\emptyset \neq F$  için (kuvvetli) kapalıdır  $\Leftrightarrow$  herhangi bir  $x \in X$  için için  $\{x\}\delta F$  veya  $F\delta\{x\}$  olduğunda  $x \in F$  dir [12].

**İspat:** Bunun ispatı [12, Teorem 4.6 ve 4.7] kullanılarak ispat kolayca yapılabilir.

**Tanım 4.2.4:** ([43])  $\mathcal{E}$ , **SET** de topolojik kategori,  $X, \mathcal{E}$  'de bir obje ve  $F, X$  'in boştan farklı bir alt kümesi olsun.

(1)  $F \subset X$  için  $F$  açıktır  $\Leftrightarrow F^c, X$  de kapalıdır.

(2)  $F \subset X$  için  $F^c, X$  de kuvvetli kapalıdır  $\Leftrightarrow F$  kuvvetli açıktır.

**Teorem 4.2.5:**  $(X, \delta)$  bir quasi-proximity uzayı olsun.  $\emptyset \neq F \subset X$  (kuvvetli) açıktır  $\Leftrightarrow x \in F^c$ , tüm  $x \in X$  için  $\{x\}\delta F^c$  veya  $F^c\delta\{x\}$  dir [12].

**İspat:** Teorem 4.2.3. ve Tanım 4.2.4. den ispatı yapılır.

**Tanım 4.2.6:**  $(X, \delta)$  bir quasi-proximity uzayı ve  $B \subset X$  olsun.  $\bar{B} = \{y\}F^c\delta\{y\}$  tanımlayalım ve eğer  $\bar{B} = B$  ise,  $B$  nin kapalı olduğunu söyleriz [20].

**Teorem 4.2.7:**  $(X, \delta)$  bir quasi-proximity uzayı ve  $B \subset X$  olsun.  $B$  kapalıdır (genel anlamda)  $\Leftrightarrow B$  nin (kuvvetli) kapalıdır (bizim anlayışımızla) [12].

**İspat:** Teorem 4.2.3. ve Tanım 4.2.6. ten ispatı yapılır.

**Not 4.2.8:** **TOP** kategorisinde, kapalılık kavramı genel kapalılıkla örtüşür [6] ve  $F$  nin kuvvetli kapalıdır  $\Leftrightarrow$  her  $x \notin F$  için  $F$  nin  $x$  in dışında komşuluğu vardır ve  $F$  nin kapalıdır [6].

**QPROX** kategorisinde, Teorem 4.2.7'ye göre, (kuvvetli) kapalılık kavramı, genel kapalılık kavramıyla örtüşür. Dikranjan ve Giuli [38] [3] göre (kuvvetli) kapalılık kavramı, yakınsak uzaylarda [26], preorder uzaylarda [27] ve yarı düzgün yakınsak uzaylarda kapanış operatörüdür.

## 5. BÖLÜM

### BAĞLANTILILIK VE KOMPAKTLIK

#### 5.1. Bağlantılılık ve Kompaktlık

**Tanım 5.1.1:** ([41,43,45,17])  $\mathcal{E}$ , **SET** üzerinde topolojik bir kategori ve  $X \in Ob(\mathcal{E})$  olsun.

- (1)  $X$  bağlantılıdır  $\Leftrightarrow X$  in hem kuvvetli açık hem de kuvvetli kapalı tek altkümesi  $X$  ve  $\emptyset$  dir.
- (2)  $X$  kuvvetli bağlantılıdır  $\Leftrightarrow X$  in hem açık hem de kapalı tek altkümesi  $X$  ve  $\emptyset$  dir.
- (3)  $X, D$  –bağlantılıdır  $\Leftrightarrow X$  den herhangi bir diskre objeye herhangi bir morfizm sabittir.

**Tanım 5.1.2:** ([7])  $\mathcal{E}$ , **SET** üzerinde bir topolojik kategori,  $X$  ve  $Y$ ,  $\mathcal{E}$  de ki objeler ve  $\mathcal{E}$  de  $f : X \rightarrow Y$  bir morfizm olsun. O zaman,

- (1)  $f$  kapalıdır  $\Leftrightarrow X$  in her kapalı alt objelerinin görüntüsünün  $Y$  nin kapalı alt objesidir.
- (2)  $f$  kuvvetli kapalıdır  $\Leftrightarrow X$  in kuvvetli kapalı olan her bir alt objesinin görüntüsü,  $Y$  'nin kuvvetli kapalı bir alt objesidir.
- (3)  $X$  kompaktır  $\Leftrightarrow \mathcal{E}$  deki her  $Y$  objesi için  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  izdüşümü kapalıdır.
- (4)  $X$  kuvvetli kompaktır  $\Leftrightarrow \mathcal{E}$  deki her  $Y$  objesi için  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  izdüşümü kuvvetli kapalıdır.

Topolojik uzayların **TOP** kategorisi için, kapalı morfizm ve kompaktlık kavramlarının genel tanımlı olanlara indirgendiğine dikkat edelim ([46]).

**Teorem 5.1.3:** ([12])  $(X, \delta)$  bir quasi-proximity uzayı olsun.

(1)  $(X, \delta)$  (kuvvetli) bağlantılıdır  $\Leftrightarrow X$  in boştan farklı uygun  $F$  altkümesi için (a) veya (b) şartını sağlar.

(a) Herhangi bir  $x \in F$  için  $\{x\}\delta F$  veya  $F\delta\{x\}$  olduğunda  $x \notin F$ .

(b) Herhangi bir  $x \in X$  için  $\{x\}\delta F^c$  veya  $F^c\delta\{x\}$  olduğunda  $x \notin F^c$ .

(2)  $(X, \delta)$   $D$  –bağlantılıdır  $\Leftrightarrow x \neq y$  ile tüm  $x, y \in X$  için  $\{x\}\delta\{y\}$  veya  $\{y\}\delta\{x\}$  dir.

**İspat:** [12, Teorem 4.13 ve 4.14]'teki ispata benzer.

**Teorem 5.1.4:** ([12]) (1)  $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$  bir quasi-proximity dönüşümü olsun.  $D \subset Y$  (kuvvetli) kapalıysa  $f^{-1}(D)$  de (kuvvetli) kapalıdır.

(2)  $(X, \delta')$  bir quasi-proximity uzayı olsun.  $M \subset N$  (kuvvetli) kapalı ve  $N \subset Y$  (kuvvetli) kapalı ise  $M \subset Y$  de (kuvvetli) kapalıdır.

**İspat:** (1)  $D \subset Y$  (kuvvetli) kapalı ve  $x \in f^{-1}(D)$  olduğunu kabul edelim. Teorem 4.2.3.'e göre, tüm  $y \in Y$  için  $\{y\}\delta' D$  veya  $D\delta'\{y\}$  olduğunda  $y \in D$  dir. Her  $x \in X$  için  $\{x\}\delta f^{-1}(D)$  veya  $f^{-1}(D)\delta\{x\}$  olduğunda  $x \in f^{-1}(D)$  olduğunu göstermeliyiz.  $f$  bir quasi-proximity dönüşümü ve  $D \subset Y$  (kuvvetli) kapalı olduğu için  $f(x) \in f(f^{-1}(D)) \subset D$  ve  $\{f(x)\}\delta' D$  veya  $D\delta'\{f(x)\}$  olduğuna dikkat edelim. Bu takdirde,  $f^{-1}(D)$  (kuvvetli) kapalıdır.

(2)  $N \subset Y$  ve  $M \subset N$  nin (kuvvetli) kapalı,  $y \in Y$  ve  $y\delta'a$  veya  $a\delta'y$  olacak şekilde  $a \in M$  olduğunu kabul edelim. Teorem 4.2.3'e göre,  $y \in M$  olduğunu göstermeliyiz.  $N \subset Y$  (kuvvetli) kapalı ve  $M \subset N$  den, Teorem 4.2.3 den,  $y \in N$  dir.  $M \subset N$  (kuvvetli) kapalı olduğu için  $y \in M$  olduğu sonucu çıkar.

**Teorem 5.1.5:** Her quasi-proximity uzayı (kuvvetli) kompaktır [12].

**İspat:**  $(X, \delta)$  herhangi quasi-proximity uzayı olsun. Tanım (5.1.2.(3)) (5.1.2.(4)) den, ile her bir  $(Y, \delta')$  quasi-proximity uzayı için  $\pi_2 : (X, \delta) \times (Y, \delta') \rightarrow (Y, \delta')$  (kuvvetli) kapalı olduğunu göstermeliyiz.

$M \subset X \times Y$  nin (kuvvetli) kapalı olsun.  $\pi_2 M$  nin (kuvvetli) kapalı olduğunu göstermek için aksini kabul edelim ve Teorem 4.2.3.'yi uygulayalım. Buradan, en az bir  $b \in Y$  noktası için,  $\{b\}\delta'\pi_2 M$  veya  $\pi_2 M\delta'\{b\}$  olduğunda  $b \notin \pi_2 M$  dir. Çünkü  $M \subset X \times Y$  (kuvvetli) kapalı olduğundan tüm  $(a, b) \in X \times Y$  için,  $\{(a, b)\}\delta''M$  veya  $M\delta''\{(a, b)\}$  olduğunda  $(a, b) \in M$  dir.

Burada  $\delta''$ ,  $X \times Y$  üzerindeki çarpım quasi-proximity yapısıdır. Dolayısıyla, çarpım quasi-proximity yapısının tanımı gereği  $\pi_2\{(a, b)\}\delta'\pi_2 M = \{b\}\delta'\pi_2 M$  veya  $\pi_2 M\delta'\pi_2\{(a, b)\} = \pi_2 M\delta'\{b\}$  dir.  $(a, b) \in M$  olduğundan,  $\pi_2(a, b) = b \in \pi_2 M$  dir. Bu da  $M$  nin (kuvvetli) kapalı olmasıyla çelişir.

Bu nedenle, Teorem 4.2.3.'e göre,  $\pi_2 M$  (kuvvetli) kapalı olmak zorundadır ve sonuç olarak Tanım (5.1.2.(3)) (5.1.2.(4))'e göre,  $(X, \delta)$  (kuvvetli) kompaktır.

**Teorem 5.1.6:**  $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$  bir quasi-proximity dönüşümü olsun. Eğer  $(X, \delta)$  (kuvvetli) kompakt ise, o zaman  $f(X)$  alt uzayı da (kuvvetli) kompaktır [12].

**İspat:** Teorem 5.1.5.'ten gösterebiliriz.

## 6. BÖLÜM

### SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

#### 6.1. Sonuç ve Değerlendirme

Çalışmada, [12] makalesinde verilen Quasi Proximity Uzayların Topolojik Kategorisinde  $p$  de  $T_0$  ve  $T_1$  objeleri, (kuvvetli) kapalı ve (kuvvetli) açık alt objeleri, (kuvvetli) bağlantılılık ve (kuvvetli) kompaktlık kavramları incelenmiştir.

İleride yapılacak çalışmalarda genelde ayırma aksiyomları, Urysohn Lemması, Tietze Genişleme Teoremleri Quasi Proximity uzaylar kategorilerinde yukarıda bahsedilen konular araştırılabilir.

## KAYNAKLAR

1. Spivak, D. I., 2013. Category theory for scientists., free online. (Web Sayfası: <https://math.mit.edu/~dspivak/CT4S.pdf>), (Erişim tarihi: Eylül 2013)
2. Nel, L. D., 1975. Initially structured categories and cartesian closedness, **Can. journal of math.**, **6**: 1361-1377.
3. Dikranjan, D., Giuli, E., 1987. Closure operators I, **Topology appl.**, **27**: 129-143.
4. Baran, M., 1990. Separation Properties in Topological Categories, Ph.D. Thesis, University of Miami.
5. Baran, M., 1992. Separation properties, **Indian j. pure and appl. math.**, **23** (5): 333-341.
6. Baran, M., 1993. The notion of closedness in topological categories, **Comment. math. univ. carolin.** **34** (2): 383-395.
7. Baran, M., 1997. A notion of compactness in topological categories, **Publ. math. ebrecen**, **50**: 221-234.
8. Efremovič, V. A., 1951. Infinitesimal spaces, **Doklady akad. nauk sssr**, **76**: 341-343.
9. Wallace, A. D., 1941. Separation spaces, **Annals of math.**, **42**: 687-697.
10. Wallace, A. D., 1942. Separation spaces II, **Anais. acad. brazil ciencias**, **14**: 203-206.
11. Baran, M. ve Kula, M., 2003. A note on separation and compactness in categories of convergence spaces, **Applied general topology**, **4**: 1-13.
12. Kula, M., Maraşlı, T., ve Özkan, S., 2014. A note on closedness and connectedness in the category of proximity spaces, **Filomat**, **28** (7): 1483–1492.
13. Kula, M., Özkan, S., 2020. A note on the category of quasi-proximity spaces, **Publications de l'Institut Mathématique**, **107**: 75-83
14. Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
15. Özkan, S., 2018. Hausdorff And Regular Proximity Spaces. Erciyes Üniversitesi, Doktora Tezi, Kayseri.
16. Adamek, J., Herrlich H., Strecker, G.E., 1990. Abstract and Concrete Categories, John Wiley and Sons, New York.

17. Preuss, G., 1988. Theory of Topological Structures, An Approach to Topological Categories, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.
18. Smirnov, Y.M., 1964. On completeness of proximity spaces I, **Amer. math. soc. transl. 38**: 37-73.
19. Smirnov, Y.M., 1952. **On proximity spaces, mat. sb., 31** (73): 543-574, 1964. **Amer. math. soc. transl., 38** (2): 5-35.
20. Naimpally, S.A., B.D., 1970. Warrack, Proximity Spaces, Cambridge Tracts in Mathematic and Mathematical Physics, No. 59 Cambridge University Press, London-New York.
21. Leader, S., 1964. On products of proximity spaces, **Math. ann. 154**: 185-194.
22. Lodato, M.W., 1963. On topologically induced generalized proximity relations, **Proc. amer. math. soc. 15**: 417-422.
23. Pervin, W.J., 1963. Quasi-proximities for topological spaces, **Math. ann. 150**: 325-326.
24. Baran, M., 1992. Separation properties at  $p$  for the topological categories of reflexive relation spaces and preordered spaces, **Math. balkanica, 6** (2): 193-198.
25. Baran, M., 1996. Separation properties in topological categories, **Math. balkanica, 10** (1): 39-48.
26. Baran, M., 2000. Closure operators in convergence spaces, **Acta math. hungar, 87** (1-2): 33- 45.
27. Baran, M., Al-Safar, J., 2011. Quotient-reflective and bireflective subcategories of the category of preordered sets, **Topology appl. 158** (15): 2076-2084.
28. Kula, M., 2011. A note on cauchy spaces, **Acta math. hungar, 133** (1-2): 14-32.
29. Kula, M., 2012. Separation properties at  $p$  for the topological category of cauchy spaces, **Acta math. hungar, 136** (1-2): 1-15.
30. Baran, M., 1994. Generalized local separation properties, **Indian j. pure appl. math., 25** (6): 615-620.
31. Johnstone, P.T., 1977. Topos Theory, London Mathematical Society Monographs, Vol. 10. Academic Press, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, London-New York.
32. Baran, M., 2009. Pre $T_2$ -objects in topological categories, **Appl. categ. structures, 17** (6): 591-602.
33. Mielke, M.V., 1994. Separation axioms and geometric realizations, **Indian j. pure appl. math., 25** (7): 711-722.

34. Friedler, L.M., 1973. Quotients of proximity spaces, **Proc. amer. math. soc.**, **37** (2): 589-594.
35. Hunsaker, W.N., Sharma, P.L., 1974. Proximity spaces and topological functors, **Proc. amer. math. soc.**, **45**: 419-425.
36. Sharma, P.L., 1971. Proximity bases and subbases, **Pacific j. math.**, **37**: 515-526.
37. Willard, S., 1970. General Topology, Addison-Wesley, Reading, MA.
38. Baran, M., Kula, S., Baran, T.M., Qasim, M., Closure operators in semiuniform convergence spaces, **Filomat** **27** (4): 537-546.
39. Baran, T.M., Kula, M., T1 Extended pseudo-quasi-semi metric spaces, **Math. Sci. Appl. ENotes**, **5**: 40-45.
40. Brümmer, G.C.L., Topological categories, **Topology Appl.** **18** : 27-41.
41. Arhangel'skii, V.A., Wiegandt R., Connectedness and disconnectedness in topology, **Gen. Topology Appl.** **5**: 9-33.
42. Baran, M., 1998. Completely regular objects and normal objects in topological categories, **Acta math. hungar.**, **80** (3): 211-224.
43. Baran, M., Kula, M., 2006. A note on connectedness, **Publ. math. debrecen**, **68** (3-4): 489-501.
44. Tozzi, A., Wyler, O., On categories of supertopological spaces, *Acta Univ. Carol, Math. Phys.* **28** (2): 137-149.
45. Lord, H., Connectedness and disconnectedness, **Ann. N. Y. Acad. Sci.** **767**: 115-139.
46. Bourbaki, N., 1966. General Topology, Addison-Wesley Publ. Co.
47. Kula, M., 2019.  $ST_2$ ,  $\Delta T_2$ ,  $ST_3$ ,  $\Delta T_3$ , tychonoff, compact and  $\delta$ -connected objects in the category of proximity spaces, **Hacettepe journal of mathematics and statistics**, **48**: 490-500.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı:** Şeyma ASLAN

**Uyruğu:** Türkiye (T.C)

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2020
Ortaöğretim	Cumhuriyet Anadolu Lisesi, Merkez / Niğde	2016

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2023	Niğde Yeşilgölcük Şehit Recep Tektaş Çok Programlı Anadolu Lisesi, MEB	Öğretmen

### YABANCI DİL

İngilizce