

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI UZAYLARDAKİ OPERATÖRLERİN  
SAYISAL BÖLGELERİ

Büşranur ŞERAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Matematik Anabilim Dalı  
Matematik Programı

Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Elif DEMİR

Temmuz, 2023

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI UZAYLARDAKİ OPERATÖRLERİN SAYISAL  
BÖLGELERİ**

Büşranur ŞERAN tarafından hazırlanan tez çalışması 10.07.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Elif DEMİR  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Dr. Öğr. Üyesi Elif DEMİR, Danışman  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Ömer GÖK, Üye  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Doç. Dr. Beyaz Başak ESKİŞEHİRLİ, Üye  
İstanbul Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Elif DEMİR sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Bazı Uzaylardaki Operatörlerin Sayısal Bölgeleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Büşranur ŞERAN

İmza



Bu çalışma, 2210/A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu(TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir.

*Anneme*



## TEŞEKKÜR

---

Bu tezin hazırlanmasında yardımcı olan danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Elif DEMİR'e ve lisansüstü eğitimim boyunca desteğini hep yanı başımda hissettiğim saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ömer GÖK'e şükranlarımı sunarım. Tez sürecim boyunca yanımda olan arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca bütün eğitim öğretim hayatım boyunca her koşulda yanımda olan, bana olan inancı ile beni teşvik eden kıymetli anneme sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

2210/A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında sağladığı destek için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna(TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Büşranur ŞERAN

# İÇİNDEKİLER

---

<b>SİMGE LİSTESİ</b>	<b>vii</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>ix</b>
<b>ÖZET</b>	<b>x</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xii</b>
<b>1 GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Literatür Taraması . . . . .	1
1.2 Tezin Amacı . . . . .	2
1.3 Hipotez . . . . .	2
<b>2 TEMEL KAVRAMLAR</b>	<b>3</b>
<b>3 HILBERT UZAYLARINDA SAYISAL BÖLGE</b>	<b>11</b>
3.1 Sayısal Bölge Kavramı ve Örnekler . . . . .	11
3.2 Sayısal Yarıçap . . . . .	19
3.3 Kendine Eşlenik Operatörler . . . . .	23
3.4 Normal Operatörler . . . . .	25
3.5 Değişmeli ve Üniter Operatörler . . . . .	28
<b>4 SONUÇ</b>	<b>30</b>
<b>KAYNAKÇA</b>	<b>31</b>
<b>TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR</b>	<b>33</b>

## SİMGE LİSTESİ

---

$ko(A)$	$A$ 'nın konveks örtüsü
$\mathbb{1}$	Birim
$I$	Birim operatör
$\perp$	Diklik
$\oplus$	Direkt toplam
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\nabla$	Gradyan
$H$	Hilbert uzayı
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım
$\times$	Kartezyen çarpım
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
$d$	Metrik
$\ \cdot\ $	Norm
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{F}$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$
$ker(T)$	$T$ operatörünün çekirdeği
$T^*$	$T$ operatörünün eşleniği
$ran(T)$	$T$ operatörünün görüntüsü
$\sigma_p(T)$	$T$ operatörünün nokta spektrumu
$\rho(T)$	$T$ operatörünün rezolvent kümesi
$W(T)$	$T$ operatörünün sayısal bölgesi
$\overline{W(T)}$	$T$ operatörünün sayısal bölgesinin kapanışı
$w(T)$	$T$ operatörünün sayısal yarıçapı

$r(T)$	$T$ operatörünün spektral yarıçapı
$\sigma(T)$	$T$ operatörünün spektrumu
$\sigma_{ap}(T)$	$T$ operatörünün yaklaşık nokta spektrumu
$U^\perp$	$U$ 'nun ortogonal tümleyeni
$L(U, V)$	$U$ vektör uzayından $V$ vektör uzayına giden tüm lineer dönüşümlerin kümesi
$boy(V)$	$V$ vektör uzayının boyutu
$B(X, Y)$	$X$ uzayından $Y$ uzayına giden tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı



## ŞEKİL LİSTESİ

---

<b>Şekil 3.1</b>	Yarıçapı $\frac{1}{2}$ 'ye eşit olan kapalı disk . . . . .	12
<b>Şekil 3.2</b>	Yarıçapı 1'e eşit olan açık birim disk . . . . .	13
<b>Şekil 3.3</b>	Yarıçapı 1'e eşit olan kapalı birim disk . . . . .	13
<b>Şekil 3.4</b>	Doğru parçası . . . . .	16



## Bazı Uzaylardaki Operatörlerin Sayısal Bölgeleri

Büşranur ŞERAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Elif DEMİR

Bu tez çalışmasında, operatör teoride birçok uygulaması bulunan sayısal bölge kavramı, özel olarak Hilbert uzaylarında, detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde bu çalışmayla alakalı literatür özeti verilmiş, tezin amacından ve hipotezden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde çalışma boyunca ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremler bulunmaktadır.

Üçüncü bölüm beş alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt bölümde bu çalışmanın ana konusunu teşkil eden sayısal bölge kavramının tanımı verilmiştir. Sayısal bölge spektrum ile ilişkilendirilmiş, çeşitli örnekler ile somutlaştırılmıştır. Örneklerde operatörlerin matris temsilleri kullanılarak sayısal bölgeler bulunmuş, grafiksel olarak da gösterilmiştir. İkinci alt bölümde sayısal yarıçap kavramının tanımı verilmiş ve buna ek olarak Lagrange çarpanı metodu ile sayısal yarıçap hesaplanmıştır. Sayısal yarıçapın, spektral yarıçap ve operatör normu ile ilişkisi incelenmiştir. Diğer alt kısımlarda Hilbert uzaylarındaki özel operatör sınıfları üzerinde durulmuştur. Bu özel operatör sınıfları kendine eşlenik, normal, değişmeli ve üniter operatörler olup, her birinin tanımları ve özellikleri kullanılarak, teoremler ile incelenerek, sayısal bölge karakterizasyonları yapılmıştır.

Dördüncü bölüm olan son kısımda ise elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sayısal bölge, Hilbert uzayı, kendine eşlenik operatör, normal operatör, üniter operatör.



---

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ABSTRACT

---

## Numerical Ranges of Operators on Some Spaces

Büşranur ŞERAN

Department of Mathematics  
Master of Science Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Elif DEMİR

In this thesis, the concept of the numerical range, which has many applications in operator theory, is examined in detail, especially in Hilbert spaces.

The thesis consists of four parts.

In the first part, a summary of the literature related to this study is given, and the purpose of the thesis and the hypothesis are mentioned.

In the second part, there are the basic definitions and theorems needed throughout the study.

The third part consists of five subsections. In the first subsection, the definition of the concept of numerical range, which is the main subject of this study, is given. The numerical range is associated with the spectrum and embodied with various examples. In the examples, numerical ranges were found using the matrix representations of the operators, and they were also shown graphically. In the second subsection, the definition of the concept of numerical radius is given and in addition to this, the numerical radius is calculated by the Lagrange multiplier method. The relationship of the numerical radius with the spectral radius and the operator norm has been examined. In other subsections, special operator classes in Hilbert spaces are discussed. These special operator classes are self-adjoint, normal, commuting and unitary operators, and their numerical range characterizations have been made by using the definitions and properties of each, examining with theorems.

In the last part, which is the fourth part, the results obtained are given.

**Keywords:** Numerical range, Hilbert space, self-adjoint operator, normal operator, unitary operator.



---

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING**

## 1.1 Literatür Taraması

Sonlu boyutlu uzaylardaki sayısal bölgenin tanımı, 1918 yılında, Otto Toeplitz tarafından yapılmıştır [1]. Felix Hausdorff ise, 1919 yılında, sayısal bölgenin sonlu boyutlu Hilbert uzaylarında konveks olduğunu ispatlamıştır [2]. Sayısal bölge, yaygın olarak  $W$  sembolü ile temsil edilmektedir. Bu sembolün, Almancadaki "Wertvorrat" kelimesinden geldiği bilinmektedir.  $W$ , çok farklı şekillerde adlandırılmıştır. Fonksiyonel analiz topluluğu sayısal bölge, matris analizi topluluğu değerler alanı, Rus topluluğu Hausdorff alanı olarak isimlendirmişlerdir [3]. Marshall Stone ise, operatör teori üzerine yazdığı kitapta, sayısal bölge adını kullanmıştır [4].

1961 yılına gelindiğinde Günter Lumer ve hemen ertesi yıl Heinz Bauer, normlu uzaylardaki sayısal bölge için tanım yapmışlardır [5, 6]. Lumer'in tanımı yarı iç çarpımlara; Bauer'in tanımı dual uzaya dayanmaktadır. F. F. Bonsall ile J. Duncan, 1971 ve 1973 yıllarında, sayısal bölge ile ilgili iki tane kitap yayınlamışlardır [7, 8]. J. Giles ve G. Joseph, 1974 yılında, sınırsız operatörlerin sayısal bölgelerini incelemişlerdir [9]. 1975 yılında J. Giles, G. Joseph, D. Koehler ve B. Sims yerel konveks uzaylardaki operatörlerin sayısal bölgeleri üzerine çalışmışlardır [10]. Yine 1975 yılında, Bela Bollobas ve Stephen E. Eldridge, sınırsız lineer operatörlerin sayısal bölgeleriyle ilgili bir makaleyi, Giles ve Joseph'in makalesini referans olarak yayınlamışlardır [9, 11]. 2020 yılında ise bazı özel Banach uzaylarındaki operatörlerin sayısal bölgeleri, K. Mandal, A. Bhanja, S. Bag ve K. Paul tarafından çalışılmıştır [12]. Burada verdiklerimize ek olarak Halmos, Sinclair, Vidav gibi birçok matematikçi sayısal bölgeler üzerine bu tezde de kullanacağımız çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmada çoğunlukla teorik kısmıyla ilgilenilen sayısal bölgelerin; diferansiyel denklemlerde, sayısal analizde, kuantum fiziğinde, yazılım alanında ve özellikle son yıllarda popüler olan kuantum bilgisayarlarda çokça ve yaygın olarak kullanıldığı bilinmektedir.

## **1.2 Tezin Amacı**

Bu tezin amacı; teorik alanların yanı sıra geniş uygulama alanlarına da sahip olan sayısal bölge kavramını, Hilbert uzaylarında, tanım, teorem ve örnekleriyle verip ek olarak bu uzaydaki özel operatör sınıflarında incelemektir.

## **1.3 Hipotez**

Sayısal bölge kavramı ve uygulamaları ile alakalı yapılan birçok çalışma literatürde bulunmaktadır. Bu çalışmaların bir kısmı Banach cebirlerinde, normlu uzaylarda, Hilbert uzaylarında ve yerel konveks uzaylarda yapılmıştır. Bu tezde ise Hilbert uzaylarında sayısal bölge kavramı ele alınacaktır.



## 2 TEMEL KAVRAMLAR

---

Bu bölümde; [13], [14], [15], [16] ve [17] kaynaklarından yararlanılmıştır.

**Tanım 2.1.**  $U \neq \emptyset$  bir küme,  $\mathbb{F}$  cisim olarak verilsin.  $+$  :  $U \times U \rightarrow U$ ,  $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times U \rightarrow U$  işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda  $U$ 'ya  $\mathbb{F}$  üzerinde vektör uzayı denir.

$U$ ,  $+$ 'ya göre değişmeli gruptur:

- (i)  $\forall u, v \in U$  için  $u + v \in U$  olur.
- (ii)  $\forall u, v, w \in U$  için  $u + (v + w) = (u + v) + w$  olur.
- (iii)  $\forall u \in U$  için  $u + \theta = \theta + u = u$  olacak şekilde  $\theta \in U$  vardır.
- (iv)  $\forall u \in U$  için  $u + (-u) = (-u) + u = \theta$  olacak şekilde  $-u \in U$  vardır.
- (v)  $\forall u, v \in U$  için  $u + v = v + u$  olur.

$u, v \in U$  ve  $\lambda, \beta \in \mathbb{F}$  olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i)  $\lambda u \in U$  olur.
- (ii)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$  olur.
- (iii)  $(\lambda + \beta)u = \lambda u + \beta u$  olur.
- (iv)  $(\lambda\beta)u = \lambda(\beta u)$  olur.
- (v)  $\mathbb{1}$ ,  $\mathbb{F}$ 'in birim elemanı olmak üzere  $\mathbb{1}u = u$  olur.

**Tanım 2.2.**  $X$ ,  $\mathbb{F}$  cisimi üzerinde vektör uzayı olarak verilsin.  $X$  üzerindeki norm,  $\forall x, y \in X$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$  için

- (i)  $\|x\| \geq 0$ ,

- (ii)  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- (iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
- (iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonudur ve  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisi normlu uzay olarak adlandırılır.

**Tanım 2.3.**  $X, \mathbb{R}$  üzerinde vektör uzayı olsun.  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $X$ 'teki  $\forall x, y, z$  elemanı ve  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  için

- (i)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,
- (ii)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ,
- (iii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,
- (iv)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,
- (v)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

özelliklerini sağlaması durumunda bu fonksiyon  $X$  üzerinde iç çarpım,  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ikilisi reel iç çarpım uzayı olarak adlandırılır.

**Örnek 2.1.**  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  biçiminde tanımlanan  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,  $\mathbb{R}^n$  uzayı üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma,  $\mathbb{R}^n$  uzayı üzerindeki standart iç çarpım denir.

**Tanım 2.4.**  $X, \mathbb{C}$  üzerinde vektör uzayı olarak verilsin.  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu,  $\forall x, y, z \in X$  ve  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  için

- (i)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,
- (ii)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ,
- (iii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
- (iv)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,
- (v)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

özelliklerini sağlaması durumunda bu fonksiyon  $X$  üzerinde iç çarpım,  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ikilisi kompleks iç çarpım uzayı olarak adlandırılır.

**Örnek 2.2.**  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$  biçiminde tanımlanan  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu,  $\mathbb{C}^n$  uzayı üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma,  $\mathbb{C}^n$  uzayı üzerindeki standart iç çarpım denir.

**Teorem 2.1.** (Paralelkenar Kuralı)  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  iç çarpım uzayı olarak verilsin.

$\forall u, v \in X$  için

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

sağlanır [13].

**Tanım 2.5.**  $X$  ve  $Y$  vektör uzayları verilsin.  $T : X \rightarrow Y$  dönüşümü,  $\forall x, y \in X$  ve  $\lambda$  skaleri için

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\lambda x) = \lambda Tx$$

eşitliklerini sağlıyorsa lineer operatör olarak adlandırılır. Sonlu boyutlu vektör uzayı üzerinde tanımlı her lineer operatör, bu uzayda bir taban seçildiğinde, bir kare matrisle ifade edilebilmektedir [14].

**Teorem 2.2.** (Polarizasyon Özdeşliği)  $X$  kompleks iç çarpım uzayı ve  $T$ ,  $X$  üzerinde lineer operatör olsun.  $\forall u, v \in X$  için

$$4 \langle Tu, v \rangle = \langle T(u + v), u + v \rangle - \langle T(u - v), u - v \rangle \\ + i \langle T(u + iv), u + iv \rangle - i \langle T(u - iv), u - iv \rangle$$

sağlanır [13].

**Önerme 2.1.** (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  iç çarpım uzayı olarak verilsin.  $\forall u, v \in X$  için

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

sağlanır.

**Tanım 2.6.**  $X$  kümesi üzerindeki bir  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  metriği,  $\forall x, y, z \in X$  için

(i)  $d(x, y) \geq 0$ ,

(ii)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,

(iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Simetri),

(iv)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur.  $(X, d)$  ise bir metrik uzay olarak adlandırılır [14].

**Örnek 2.3.**  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$  şeklinde tanımlanan fonksiyon  $\mathbb{R}^n$  üzerinde bir metrik,  $(\mathbb{R}^n, d)$  metrik uzaydır.

**Tanım 2.7.** Bir  $X = (X, d)$  metrik uzayından  $x_n$  dizisi alalım.  $\forall \epsilon > 0$  sayısına karşılık,  $\forall m, n > N$  için

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

olacak şekilde bir  $N = N(\epsilon)$  sayısı varsa,  $(x_n)$  dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır.  $X$ 'teki her Cauchy dizisi yakınsıyorsa  $X$  uzayı tamdır denir [14].

**Tanım 2.8.** Bir iç çarpım uzayı, üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre tamsa Hilbert uzayı olarak adlandırılır [14].

**Tanım 2.9.**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  iç çarpım uzayı verilsin.  $\langle x, y \rangle = 0$  oluyorsa  $x, y \in X$  vektörlerine ortogonal denir.

**Tanım 2.10.** Bir  $U$  vektör uzayındaki  $u_1, u_2, \dots, u_m$  ( $m \geq 1$ ) vektörlerinden oluşan  $M$  kümesini alalım.  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  skalerler olmak üzere,

$$\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_m u_m = 0$$

ancak ve ancak  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 0$  iken gerçekleşiyorsa  $M$  kümesi lineer bağımsızdır. Aksi durumda lineer bağımlıdır.

**Tanım 2.11.**  $n$  pozitif tam sayısı verilsin.  $\mathbb{F}$  cismi üzerindeki  $U$  vektör uzayı, lineer bağımsız  $n$  tane vektör içeriyor ve  $n+1$  veya daha fazla sayıda vektör lineer bağımlı oluyorsa  $U$  sonlu boyutludur denir.  $n$  sayısı  $U$ 'nun boyutudur ve kısaca  $boyU = n$  olarak gösterilir. Eğer  $boyU = n$  ise  $U$ 'nun lineer bağımsız bir vektör  $n$ -lisine  $U$  için bir taban denir. Örneğin,  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $U$ 'nun bir tabanı ise her  $u \in U$  vektörü, taban vektörlerinin lineer bir kombinasyonu olarak tek bir gösterime sahiptir:

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$$

**Tanım 2.12.**  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar,  $T : X \rightarrow Y$  lineer operatör olarak verilsin.  $\forall x \in X$  için

$$\|Tx\| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde bir  $c$  reel sayısı varsa  $T$  sınırlıdır [14].

**Teorem 2.3.**  $X$  ve  $Y$  normlu uzayları verilsin.  $X$  uzayından  $Y$  uzayına giden tüm sınırlı lineer operatörlerin uzayı,  $B(X, Y)$  ile gösterilir ve

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

normuyla birlikte bir normlu uzaydır.  $Y = X$  olması halinde  $B(X, X)$  kısaca  $B(X)$  şeklinde gösterilir [14].

**Tanım 2.13.**  $U$  ve  $V$  iki vektör uzayı,  $T \in L(U, V)$  olarak verilsin.  $T$ 'nin çekirdeği

$$\ker(T) = \{u \in U : Tu = 0\}$$

şeklinde tanımlanan bir alt uzaydır [15].

**Tanım 2.14.**  $U$ ,  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde vektör uzayı,  $T : U \rightarrow U$  lineer operatör olsun.  $u \in U$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$  olmak üzere  $Tu = \lambda u$  olacak şekilde  $u \neq 0$  varsa  $\lambda$ ,  $T$  lineer operatörünün bir özdeğeri;  $u$  ise  $T$ 'nin  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

**Tanım 2.15.**  $H_1$  ve  $H_2$  Hilbert uzayları verilsin.  $T : H_1 \rightarrow H_2$  operatörü sınırlı lineer bir operatör olsun.  $T$ 'nin eşlenik operatörü  $T^*$ ,  $\forall x \in H_1$  ve  $y \in H_2$  için

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

olacak şekilde  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  olarak tanımlanan bir operatördür [14].

**Teorem 2.4.** Tanım 2.15'teki  $T$ 'nin  $T^*$  eşlenik operatörü; mevcuttur, tektir ve

$$\|T^*\| = \|T\|$$

normuna sahip sınırlı lineer bir operatördür [14].

**Tanım 2.16.**  $I : X \rightarrow X$  operatör olsun.  $\forall x \in X$  için,  $Ix = x$  ise  $I$  birim operatördür.

**Tanım 2.17.**  $H$  kompleks Hilbert uzayı,  $I \in B(H)$  birim operatör olmak üzere  $T \in B(H)$  operatörünün spektrumu,  $\sigma(T)$  ile temsil edilir ve

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ } B(H) \text{ uzayında terse sahip değildir}\}$$

şeklinde tanımlanır. Spektrumun tümleyeni olan

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$$

kümesine ise  $T$ 'nin rezolvent kümesi denir.

**Tanım 2.18.**  $H$  Hilbert uzayı olarak verilsin.  $T \in B(H)$  olmak üzere

$$\sigma_p(T) = \{\lambda : \lambda, T \text{ operatörünün bir özdeğeridir}\}$$

kümesi  $T$  operatörünün nokta spektrumdur [15].

**Tanım 2.19.**  $T \in B(H)$  ise  $T$ 'nin yaklaşık nokta spektrumu,  $\sigma_{ap}$  ile gösterilir ve  $\lambda$  kompleks sayılarından oluşur öyle ki  $\|y_n\| = 1$  ve  $\|(T - \lambda)y_n\| \rightarrow 0$  olacak şekilde  $H$ 'de bir  $y_n$  dizisi vardır [16].

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T).$$

**Tanım 2.20.**  $H$  kompleks Hilbert uzayı olarak verilsin.  $T \in B(H)$  olmak üzere  $T$  operatörünün spektral yarıçapı  $r(T)$  ile gösterilir ve

$$r(T) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

olarak tanımlanır [15].

Spektral yarıçap Gelfand formülü ile de tanımlanabilir. Hilbert uzayında sınırlı bir  $T$  operatörü için Gelfand formülü,

$$r(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{(1/k)}$$

şeklindedir.

**Tanım 2.21.**  $T \in B(H)$  olmak üzere  $\forall x \in H$  için  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  ise  $T$ 'ye pozitif operatör denir [16].

**Teorem 2.5.** *Kompleks bir Hilbert uzayı  $H$  üzerindeki her pozitif, sınırlı, lineer  $T : H \rightarrow H$  operatörünün tek bir pozitif karekökü vardır [14].*

**Tanım 2.22.**  $H$  kompleks Hilbert uzayı olarak verilsin.  $T \in B(H)$  olmak üzere  $T = T^*$  eşitliği sağlanıyorsa  $T$  kendine eşlenik operatördür.

**Tanım 2.23.**  $H$  kompleks Hilbert uzayı olarak verilsin.  $T \in B(H)$  olmak üzere  $TT^* = T^*T$  eşitliği sağlanıyorsa  $T$  normal operatördür.

**Tanım 2.24.**  $H$  kompleks Hilbert uzayı olarak verilsin.  $T \in B(H)$  olmak üzere  $TT^* = T^*T = I$  eşitliği sağlanıyorsa  $T$  üniter operatördür.

**Tanım 2.25.**  $H$  Hilbert uzayı olarak verilsin.  $T : H \rightarrow H$  lineer operatör olmak üzere  $T$ 'nin izometri olması için gerek ve yeter şart  $\forall x, y \in H$  için  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$  eşitliğinin sağlanmasıdır [16].

**Önerme 2.2.**  $T \in B(H)$  operatörü verilsin.  $T$  operatörünün izometri olması için gerek ve yeter koşul  $T^*T = I$  olmasıdır [16].

**Tanım 2.26.**  $V, U$  vektör uzayının bir alt kümesi olsun.  $u, v \in V$  iken

$$A = \{w \in U : w = tu + (1 - t)v, 0 \leq t \leq 1\} \subset V$$

oluyorsa,  $V$  kümesine konveks denir [14].

**Tanım 2.27.** Bir  $A$  kümesini kapsayan en küçük konveks kümeye veya  $A$  kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine  $A$  kümesinin konveks örtüsü denir.

$$\{t_1x_1 + \dots + t_nx_n : x_i \in A, t_i \geq 0, t_1 + \dots + t_n = 1, n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde de ifade edilir [17].

**Tanım 2.28.** Bir  $X$  iç çarpım uzayının, bir  $Y$  alt kümesinin ortogonal tümleyeni

$$Y^\perp = \{x \in X : x \perp Y\}$$

şeklinde tanımlanır.  $x \in Y^\perp$  olması için gerek ve yeter koşul  $\forall y \in Y$  için  $\langle x, y \rangle = 0$  olmasıdır [14].

**Tanım 2.29.**  $U$  vektör uzayı,  $V$  ve  $W$  iki alt uzayı olsun.  $\forall u \in U$ ,

$$u = v + w, \quad v \in V, w \in W$$

şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa  $U$ 'ya,  $V$  ve  $W$ 'nin direkt toplamı denir.

$$U = V \oplus W$$

olarak gösterilir. Bir  $H$  Hilbert uzayı,  $H$  uzayının kapalı bir  $Y$  alt uzayı ile

$$Y^\perp = \{z \in H : z \perp Y\}$$

uzayının bir direkt toplamı olarak gösterilebilir [14].

**Teorem 2.6.**  $Y$ ,  $H$  Hilbert uzayının herhangi kapalı alt uzayı olarak verilsin. Bu durumda

$$H = Y \oplus Z, \quad Z = Y^\perp$$

olur.

$\forall x \in H$  için

$$x = y + z, \quad z \in Z = Y^\perp$$

şeklinde tek bir  $y \in Y$  vardır.  $z$  değerine  $x$ 'in  $Y$  üzerindeki ortogonal izdüşümü denir. Ayrıca bu eşitlik,

$$P : H \rightarrow Y$$

$$x \rightarrow y = Px$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlar.  $P$ 'ye  $H$ 'ın  $Y$  üzerine ortogonal izdüşümü denir [14].

**Teorem 2.7.**  $H$  kompleks Hilbert uzayı olarak verilsin.  $H$  uzayındaki bir ortogonal izdüşüm,

$$P = P^* = P^2$$

eşitliğini sağlayan bir  $P \in B(H)$  operatördür [15].



Bu bölümde; [3], [18], [19], [20], [21], [22], [13], [23], [24], [14], [25], [26] ve [7] kaynaklarından yararlanılmıştır.

### 3.1 Sayısal Bölge Kavramı ve Örnekler

**Tanım 3.1.**  $H$  reel veya kompleks Hilbert uzayı olarak verilsin.  $T \in B(H)$  olmak üzere  $T$  operatörünün sayısal bölgesi

$$W(T) := \{ \langle Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \}$$

şeklinde tanımlanır.

Aksi belirtilmedikçe tez boyunca Hilbert uzayının kompleks olduğu ve  $T \in B(H)$  olduğu varsayılacaktır.

**Açıklama.**  $I \in B(H)$  birim operatör olduğunda herhangi  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  kompleks sayıları, herhangi  $R, T \in B(H)$  operatörleri ve  $U \in B(H)$  üniter operatörü için sayısal bölge şu özelliklere sahiptir:

$$W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta,$$

$$W(T^*) = \{ \bar{\alpha} \mid \alpha \in W(T) \},$$

$$W(U^* T U) = W(T),$$

$$W(R + T) \subseteq W(R) + W(T).$$

**Örnek 3.1.**  $\mathbb{C}^2$  uzayında  $T$ ,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile tanımlanan bir operatör olsun.  $T$  operatörünün sayısal bölgesini bu-

bulalım.

**Çözüm.**  $y = (f, g)$  ise  $\|y\|^2 = |f|^2 + |g|^2 = 1$ ,  $Ty = (g, 0)$  ve  $\langle Ty, y \rangle = g\bar{f}$  eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$|\langle Ty, y \rangle| = |g| |f| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) \leq \frac{1}{2}$$

bulunur.  $z = |\langle Ty, y \rangle|$  olarak seçildiğinde

$$W(T) \subset \left\{ z : |z| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

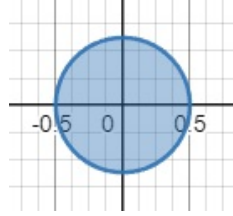
olur. Öte yandan  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$  olsun.  $\sin 2\alpha = 2r \leq 1$  ve  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$  iken  $y = (\cos\alpha, e^{i\theta} \sin\alpha)$  olarak seçilirse

$$\langle Ty, y \rangle = e^{i\theta} \sin\alpha \cos\alpha = re^{i\theta}$$

olur ve buradan  $\{z : |z| \leq \frac{1}{2}\} \subset W(T)$  bulunur. O halde

$$W(T) = \left\{ z : |z| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

elde edilir. Böylece sayısal bölge, yarıçapı  $\frac{1}{2}$ 'ye eşit olan içi dolu bir disk [3].



**Şekil 3.1** Yarıçapı  $\frac{1}{2}$ 'ye eşit olan kapalı disk

**Örnek 3.2.**  $\ell_2$  Hilbert uzayı üzerindeki

$$T(f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_2, f_3, f_4, \dots)$$

geri öteleme operatörünün sayısal bölgesini bulalım.

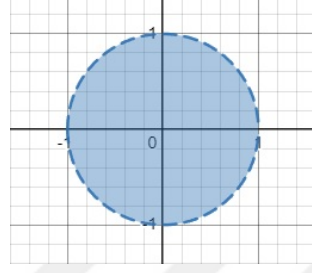
**Çözüm.** Herhangi bir  $f = (f_1, f_2, \dots) \in \ell_2$ ,  $\|f\| = 1$  için  $Tf = (f_2, f_3, \dots)$  olur. Öyleyse sayısal bölgenin elemanları

$$\langle Tf, f \rangle = f_1\bar{f}_2 + f_2\bar{f}_3 + f_3\bar{f}_4 + \dots$$

şeklinde bulunur.  $|f_1|^2 + |f_2|^2 + \dots = 1$  olduğundan

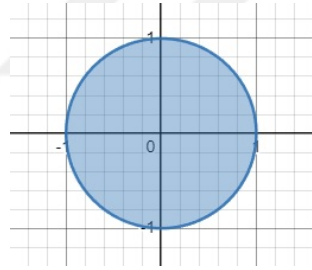
$$\begin{aligned} |\langle Tf, f \rangle| &\leq |f_1| |f_2| + |f_2| |f_3| + \dots \\ &\leq \frac{1}{2} [|f_1|^2 + 2|f_2|^2 + 2|f_3|^2 + \dots] \leq [2 - |f_1|^2] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada iki durum söz konusudur: Eğer  $|f_1| \neq 0$  ise  $|\langle Tf, f \rangle| < 1$  olacaktır ve  $W(T)$  sayısal bölgesinin elemanları  $\{z : |z| < 1\}$  açık birim diskinde bulunacaktır.



**Şekil 3.2** Yarıçapı 1'e eşit olan açık birim disk

$|f_1| = 0$  olması halinde ise  $|\langle Tf, f \rangle| \leq 1$  bulunacak ve  $W(T)$  sayısal bölgesinin elemanları  $\{z : |z| \leq 1\}$  kapalı diskinde yer alacaktır.



**Şekil 3.3** Yarıçapı 1'e eşit olan kapalı birim disk

Bulunan sayısal bölgelerin kesişimi  $W(T)$ 'dir [3].

**Örnek 3.3.**  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,

$$\begin{bmatrix} r & b \\ 0 & -r \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$$

matrisi ile temsil edilen bir dönüşüm olsun.  $A$  dönüşümünün sayısal bölgesini bulalım.

**Çözüm.**  $(f, g) \in \mathbb{C}^2$ 'de birim vektör,  $f = e^{i\alpha} \cos \theta$ ,  $g = e^{i\beta} \sin \theta$ ,  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\beta \in [0, 2\pi)$  olsun.

$$Af = (re^{i\alpha} \cos \theta + be^{i\beta} \sin \theta, -re^{i\alpha} \sin \theta)$$

ve

$$\langle Af, f \rangle = r (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + be^{i(\beta-\alpha)} \sin\theta \cos\theta = x + iy,$$

$$x = r \cos 2\theta + \frac{|b|}{2} \sin 2\theta \cos(\beta - \alpha + \gamma),$$

$$y = \frac{|b|}{2} \sin(\beta - \alpha + \gamma) \sin 2\theta,$$

$$\gamma = \arg b$$

bulunur. Böylece

$$(x - r \cos 2\theta)^2 + y^2 = \frac{|b|^2}{4} \sin^2 2\theta$$

elde edilir. Bu bir çember ailesidir ve birleşimleri elde edilebilir. Bu son ifade,

$$(x - r \cos \phi)^2 + y^2 = \frac{|b|^2}{4} \sin^2 \phi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

olarak yazılırsa ve  $\phi$ 'ye göre türev alınırsa

$$(x - r \cos \phi)r = \frac{|b|^2}{4} \cos \phi$$

eşitliği elde edilir. Son iki denklemde  $\phi$  yok edilerek

$$\frac{x^2}{r^2 + \frac{|b|^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{|b|^2}{4}} = 1$$

elde edilir. Bu merkezi 0, küçük eksenini  $b$  ve büyük eksenini  $\sqrt{4r^2 + b^2}$  olan bir elipstir [3].

Aşağıdaki lemma sayısal bölgenin konveksliğini kanıtlarken yardımcı olacaktır.

**Lemma 3.1.** *T, iki boyutlu uzayda bir operatör olsun. O halde  $W(T)$ , odak noktaları T'nin özdeğerleri olan bir elipstir.*

*İspat.* Genelliği bozmaksızın (bkz. [3]), T bir üst üçgensel matris olarak seçilebilir:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Burada  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$ , T'nin özdeğerleridir.

Eğer  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  ise

$$T - \lambda = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W(T - \lambda) = \left\{ z : |z| \leq \frac{|a|}{2} \right\}$$

(bkz. Örnek 3.1) ve  $W(T)$ , merkezi  $\lambda$ , yarıçapı  $\frac{|a|}{2}$  olan bir çember olarak bulunur.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ve  $a = 0$  olduğu durumda matris şu şekildedir:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

$x = (f, g)$  ise,  $t = |f|^2$  ve  $|f|^2 + |g|^2 = 1$  iken,  $\langle Tx, x \rangle = \lambda_1 |f|^2 + \lambda_2 |g|^2 = t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2$  olur. Böylece  $W(T)$ ,  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  nin konveks kombinasyonları kümesidir ve bu noktaları birleştiren doğru parçasıdır.

Eğer  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ve  $a \neq 0$  ise,  $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = re^{i\theta}$  iken,

$$T - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} & a \\ 0 & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \end{bmatrix},$$

$$e^{-i\theta} \left[ T - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right] = \begin{bmatrix} r & ae^{-i\theta} \\ 0 & -r \end{bmatrix} = R$$

bulunur.  $W(R)$ ,  $(0, 0)$  merkezli, küçük eksenini  $|a|$  (bkz. Örnek 3.3), odak noktaları  $(r, 0)$  ve  $(-r, 0)$  olan bir elipstir. Böylece  $W(T)$ , odak noktaları  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  olan bir elipstir ve büyük eksenin reel eksenle yaptığı açı  $\theta$  dir [3]. ■

Sayısal bölge için yapılan tanımlama, Hilbert uzayının reel veya kompleks olma durumuna göre değişkenlik göstermemektedir. Tanımın aynı olmasına karşın uzayın kompleks olması durumunda sağlanan bazı özellikler, reel olma durumunda sağlanmaz. Örneğin kompleks Hilbert uzayında sıfırdan farklı  $T$  operatörü için  $W(T) = \{0\}$  olması mümkün değilken reel Hilbert uzayında mümkün olabilir:

**Örnek 3.4.**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  operatörü,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile tanımlansın.  $T$  operatörünün sayısal bölgesini bulalım.

*Çözüm.*  $a = (u, v) \in \mathbb{R}^2$  olsun.

$$Ta = T(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ u \end{bmatrix}$$

olarak bulunur ve

$$\langle Ta, a \rangle = \langle (-v, u), (u, v) \rangle = -vu + uv = 0$$

olduğundan  $W(T) = \{0\}$  eşitliğine ulaşılır. Burada hem reel Hilbert uzayında sıfırdan farklı bir operatörün sayısal bölgesinin sıfıra eşit olabileceği hem de sayısal bölgenin tek bir elemandan oluşabileceği gözlemlenmiş olur.

**Örnek 3.5.**  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  operatörü,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

matrisi ile tanımlansın.  $T$  operatörünün sayısal bölgesini bulalım.

*Çözüm.*  $x = (f, g) \in \mathbb{C}^2$  olsun.

$$Tx = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 f \\ \lambda_2 g \end{bmatrix}$$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle (\lambda_1 f, \lambda_2 g), (f, g) \rangle = \lambda_1 f \bar{f} + \lambda_2 g \bar{g} = \lambda_1 |f|^2 + \lambda_2 |g|^2$$

elde edilir. Tanımdan  $\|x\| = 1$  dir. O halde

$$\|x\| = \sqrt{\langle (f, g), (f, g) \rangle} = |f|^2 + |g|^2 = 1$$

bulunur.

$|f|^2 = t$  olarak seçildiğinde  $|g|^2 = 1 - t$  olur. Böylece

$$\langle Tx, x \rangle = \lambda_1 t + \lambda_2 (1 - t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle = \lambda_1 t + \lambda_2 (1 - t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece sayısal bölge, uç noktaları  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  olan bir doğru parçasıdır.



**Şekil 3.4** Doğru parçası

**Örnek 3.6.**  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  operatörü,  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile tanımlansın.  $T$  operatörünün sayısal bölgesini bulalım.

*Çözüm.*  $x = (f, g) \in \mathbb{C}^2$  olsun.

$$Tx = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ag \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle (ag, 0), (f, g) \rangle = ag\bar{f} + 0\bar{g} = ag\bar{f}$$

$$|\langle Tx, x \rangle| = |ag\bar{f}| = |a| |g| |\bar{f}| = |a| |g| |f|$$

$AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$  eşitsizliği kullanılarak

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \frac{|a|}{2}(|f|^2 + |g|^2)$$

ifadesi elde edilir.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \Rightarrow \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle (f, g), (f, g) \rangle = f\bar{f} + g\bar{g} = |f|^2 + |g|^2 = 1$$

olduğundan

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \frac{|a|}{2}$$

elde edilir.  $z = \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{C}$  olarak alındığında

$$W(T) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{|a|}{2} \right\}$$

bulunur. Sonuç olarak sayısal bölge; merkezi  $(0, 0)$ , yarıçapı  $\frac{|a|}{2}$  olan kapalı bir disktr.

**Teorem 3.1.** (Toeplitz-Hausdorff) *Kompleks düzlemde sayısal bölge konveks kümedir.*

*İspat.* Bir küme konveks ise kümedeki herhangi iki nokta birleştirildiğinde ortaya çıkan doğru parçası yine bu kümenin içinde yer alır.  $a, b \in W(T)$  ve  $\|x\| = \|y\| = 1$  olsun. O halde  $a = \langle Tx, x \rangle$ ,  $b = \langle Ty, y \rangle$  yazılabilir. İspat için  $a$  ile  $b$  noktalarını birleştiren doğru parçasının  $W(T)$  sayısal bölgesinin içine düştüğünü göstermek yeterli olacaktır.  $P$ ,  $x$  ve  $y$  vektörleri ile üretilmiş ortogonal bir izdüşüm olsun.  $\langle PTPx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle$  ve  $\langle PTPy, y \rangle = \langle Ty, y \rangle$  olduğundan  $a$  ve  $b$  elemanları aynı zamanda  $W(PTP)$  sayısal bölgesinin elemanıdır. Lemma 3.1'den dolayı  $W(PTP)$  bir elipstir. O halde bu elipsin içinde olan  $a$  ve  $b$  noktalarının oluşturduğu doğru parçası da bu bölgenin içinde olacaktır. Öyleyse bu doğru parçasından bir  $c$  noktası seçildiğinde,  $\|z\| = 1$  olmak üzere,  $c = \langle PTPz, z \rangle$  eşitliği yazılabilir. Yani  $c = \langle PTPz, z \rangle \in W(PTP)$  olur. Aynı zamanda  $c = \langle TPz, Pz \rangle$  yazılabildiğinden  $c \in W(T)$  bulunur. Böylece  $W(PTP) \subseteq W(T)$  olduğu ve  $W(T)$  sayısal

bölgesinin bahsedilen doğru parçasını içerdiği bulunmuş olur [3]. Bir diğer ispat da şu şekildedir: sayısal bölgeden alınan birbirinden farklı  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  noktaları için  $\alpha_1 = \langle Tf, f \rangle$  ve  $\alpha_2 = \langle Tg, g \rangle$  eşitlikleri vardır. Burada  $f$  ve  $g$  birim vektör ve  $T$ ,  $H$  Hilbert uzayındaki sınırlı lineer bir operatördür.  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  olduğundan bu vektörler lineer bağımsızdır. Bundan dolayı bu vektörler  $H$  uzayının iki boyutlu(kapalı) bir  $Y$  alt uzayını gerebilirler. O halde  $Y$  alt uzayı,  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  elemanlarını ve dolayısıyla bu iki nokta arasındaki doğru parçasını da içeren konveks bir sayısal bölgeye(eliptik bir disk veya doğru parçasına) sahiptir [22]. ■

$W(T)$ , spektrumu sınırlamak için de kullanılır:

**Teorem 3.2.** *Bir  $T \in B(H)$  operatörünün spektrumu, sayısal bölgesinin kapanışı tarafından kapsanır. Yani,*

$$\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$$

sağlanır.

*İspat.* İspat için spektrumun sınırına bakmak yeterlidir. Spektrumun sınırı, yaklaşık nokta spektrumunda bulunur (bkz. Tanım 2.19).  $W(T)$  konveks olduğundan  $\sigma_{ap}(T) \subset W(T)$  kapsamasının sağlandığını göstermek yeterlidir. Yaklaşık nokta spektrumundan herhangi  $\lambda$  elemanını ve  $\|(T - \lambda I)y_n\| \rightarrow 0$  olacak şekilde  $\{y_n\}$  birim vektör dizisini ele alalım. Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak

$$|\langle (T - \lambda I)y_n, y_n \rangle| \leq \|(T - \lambda I)y_n\| \|y_n\|$$

elde edilir. Öyleyse

$$|\langle (T - \lambda I)y_n, y_n \rangle| \leq \|(T - \lambda I)y_n\| \rightarrow 0$$

$$|\langle (T - \lambda I)y_n, y_n \rangle| \rightarrow 0$$

$$|\langle Ty_n, y_n \rangle - \lambda| \rightarrow 0$$

bulunur. Buradan  $\langle Ty_n, y_n \rangle \rightarrow \lambda$  elde edilir. O halde  $\lambda \in \overline{W(T)}$  dir [3]. ■

Sayısal bölge, genel olarak spektrumu sınırlamak için kullanılsa da bazı durumlarda spektrumdan çok daha büyük olabilir [26]:

**Örnek 3.7.** *Kompleks uzayda*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile verilen  $T$  operatörü için  $W(T) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{2}\}$  iken  $\sigma(T) = \{0\}$  olur yani tek bir elemana sahiptir.

### 3.2 Sayısal Yarıçap

**Tanım 3.2.**  $T \in B(H)$  operatörünün sayısal yarıçapı

$$w(T) := \sup \{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}$$

olarak tanımlanır.

**Örnek 3.8.**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  operatörü,  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  matrisi ile tanımlansın.  $T$  operatörünün sayısal yarıçapını bulalım.

*Çözüm.*  $a = (u, v) \in \mathbb{R}^2$  olsun.

$$Ta = T(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ u \end{bmatrix}$$

$$\langle Ta, a \rangle = \langle (-v, u), (u, v) \rangle = -vu + uv = 0$$

$$W(T) = \{0\}$$

$$w(T) = \sup \{|z| : z \in W(T) = \{0\}\} = 0$$

bulunur.

Sayısal yarıçap, Lagrange çarpanı metodu ile de bulunabilir:

**Örnek 3.9.**  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  operatörü,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile tanımlanmış olsun.  $T$  operatörünün sayısal yarıçapını Lagrange çarpanı metodu ile bulalım.

*Çözüm.*  $x = (f, g) \in \mathbb{C}^2$  elemanını alalım.

$$Tx = T(f, g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(f, g) = (g, 0)$$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle T(f, g), (f, g) \rangle = \langle (g, 0), (f, g) \rangle = g\bar{f}$$

$$|\langle Tx, x \rangle| = |g\bar{f}| = |g| |\bar{f}| = |g| |f|$$

bulunur.

$$|f| = r_1, |g| = r_2$$

olsun. O halde fonksiyon  $h(r_1, r_2) = r_1 r_2$  şeklinde tanımlanabilir. Bu fonksiyonun,  $\|x\| = 1$  denklemini sağlayan noktalarının, maksimum değeri bulunmalıdır. Öyleyse

$$\|x\| = \langle (f, g), (f, g) \rangle = 1$$

$$|f|^2 + |g|^2 = 1$$

olduğundan

$$k(r_1, r_2) = r_1^2 + r_2^2 - 1 = 0$$

şeklinde tanımlanabilir. Lagrange çarpanı metodundan

$$\nabla h = \lambda \nabla k$$

$$r_2 \vec{i} + r_1 \vec{j} = 2\lambda r_1 \vec{i} + 2\lambda r_2 \vec{j}$$

denklemini elde edilir. Burada katsayılar eşitlendiğinde

$$\lambda = \frac{r_2}{2r_1}, r_1 \neq 0 \quad \text{ve} \quad \lambda = \frac{r_1}{2r_2}, r_2 \neq 0$$

bulunur. İki denklemini birleştirdiğimizde  $r_1^2 = r_2^2$  yani  $r_2 = \pm r_1$  eşitliği elde edilir.

Bulunan bu eşitlik

$$k(r_1, r_2) = r_1^2 + r_2^2 - 1 = 0$$

denkleminde yerine yazıldığında;  $r_2 = r_1$  için  $2r_1^2 = 1$  yani  $r_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  bulunur.

Buradan

$$M_1 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{ve} \quad M_2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

noktaları elde edilmiş olur.  $r_2 = -r_1$  için ise yine  $2r_1^2 = 1$  yani  $r_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  eşitliği elde edilir. Buradan da

$$M_3 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{ve} \quad M_4 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

noktaları elde edilir. Bu noktalar fonksiyonun  $\|x\| = 1$  denkleminin üzerindeki ekstremum noktalarıdır. Noktalar fonksiyonda yerine yazıldığında

$$h(M_1) = \frac{1}{2}, \quad h(M_2) = \frac{1}{2}, \quad h(M_3) = -\frac{1}{2}, \quad h(M_4) = -\frac{1}{2}$$

değerleri elde edilir. Fonksiyonun maksimum değeri

$$w(T) = \max \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Bu değer aynı zamanda sayısal yarıçapa eşittir.

**Teorem 3.3.**  $T \in B(H)$  olmak üzere  $w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T)$  sağlanır.

*İspat.* Sayısal yarıçap, sayısal bölgenin elemanlarının mutlak değerlerinin supremumuna eşittir.  $u \in H$  ve  $\|u\| = 1$  ise Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$|\langle Tu, u \rangle| \leq \|Tu\| \|u\| \leq \|T\|$$

bulunur. Operatör normu tanımı

$$\|T\| = \sup \{ \|Tu\| : u \in H, \|u\| = 1 \}$$

şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned} w(T) &= \sup \{ |\langle Tu, u \rangle| : u \in H, \|u\| = 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|Tu\| : u \in H, \|u\| = 1 \} = \|T\| \end{aligned}$$

olduğu görülür.  $\|T\| \leq 2w(T)$  ifadesini ispatlamak için Teorem 2.2 kullanılabilir:

$$\begin{aligned} 4 \langle Tu, v \rangle &= \langle T(u+v), u+v \rangle - \langle T(u-v), u-v \rangle \\ &\quad + i \langle T(u+iv), u+iv \rangle - i \langle T(u-iv), u-iv \rangle. \end{aligned}$$

Teorem 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} 4 |\langle Tu, v \rangle| &\leq w(T) [\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 + \|u+iv\|^2 + \|u-iv\|^2] \\ &= 2w(T)(\|u\|^2 + \|v\|^2) + 2w(T)(\|u\|^2 + \|iv\|^2) \\ &= 4w(T)(\|u\|^2 + \|v\|^2) \end{aligned}$$

elde edilir.  $\|u\| = \|v\| = 1$  olduğunda  $|\langle Tu, v \rangle| \leq 2w(T)$  bulunur ve böylece  $\|T\| \leq 2w(T)$  eşitsizliğine ulaşılır. ■

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 kullanılarak aşağıdaki sonuca varılabilir.

**Sonuç 3.1.** Her  $T \in B(H)$  operatörü için  $r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$  sağlanır.

**Önerme 3.1.** Eğer  $w(T) = \|T\|$  ise  $r(T) = \|T\|$  olur.

*İspat.*  $w(T) = \|T\|$  ise  $|\lambda| = \|T\|$  olacak şekilde bir  $\lambda \in \mathbb{C}$  sayısı ve  $\langle Ty_n, y_n \rangle \rightarrow \lambda$  olacak şekilde  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  birim vektör dizisi vardır. İspat için  $\lambda$  elemanının spektrumun elemanı olduğu gösterilmelidir. Yani  $(T - \lambda I)y_n \rightarrow 0$  olacak şekilde  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  birim vektör dizisinin varlığından söz edilebilmelidir:

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda I)y_n\|^2 &= \langle Ty_n - \lambda y_n, Ty_n - \lambda y_n \rangle \\ &= \|Ty_n\|^2 - \langle Ty_n, \lambda y_n \rangle - \langle \lambda y_n, Ty_n \rangle + |\lambda|^2 \|y_n\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 - \bar{\lambda} \langle Ty_n, y_n \rangle - \lambda \langle y_n, Ty_n \rangle + \|T\|^2 \\ &\rightarrow 2\|T\|^2 - 2\bar{\lambda}\lambda = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıda  $|\langle Ty_n, y_n \rangle| \leq \|Ty_n\| \leq \|T\|$  eşitsizliği kullanılarak geçiş yapılmıştır. Sonuç olarak  $\|(T - \lambda I)y_n\|$  ifadesinin sıfıra gittiği görülür. Öyleyse  $\lambda \in \sigma(T)$  bulunur. Operatör normu, spektral yarıçaptan küçük olamaz (bkz. Sonuç 3.1). Burada operatör normu  $|\lambda|$  olduğundan spektrumda bundan mutlak değerce daha büyük eleman olamaz. O halde  $r(T) = \|T\|$  eşitliğine ulaşılır. ■

**Önerme 3.2.** *Eğer  $\lambda \in W(T)$  ve  $|\lambda| = \|T\|$  ise  $\lambda \in \sigma_p(T)$  olur.*

*İspat.*  $\lambda = \langle Tu, u \rangle \in W(T)$ ,  $\|u\| = 1$  olsun. O halde

$$\|T\| = |\langle Tu, u \rangle| \leq \|Tu\| \|u\| = \|Tu\| \leq \|T\|$$

bulunur. Buradan  $|\langle Tu, u \rangle| = \|Tu\| \|u\|$  eşitliği elde edilir. O halde  $\exists x \in \mathbb{C}$  için  $Tu = xu$  olur.  $\lambda = \langle Tu, u \rangle = \langle xu, u \rangle = x$  eşitliğinden dolayı  $Tu = \lambda u$  elde edilir. Sonuç olarak  $\lambda \in \sigma_p(T)$  bulunur. ■

**Önerme 3.3.**  *$\text{ran}(T) \perp \text{ran}(T^*)$  ise  $w(T) = \frac{1}{2} \|T\|$  eşitliği sağlanır.*

*İspat.*  $y \in H$  birim vektörünü alalım. Lineer cebirin temel teoreminden  $\overline{\text{ran}(T^*)}^\perp = \ker(T)$  ve  $\overline{\text{ran}(T^*)} = \ker(T)^\perp$  eşitlikleri vardır. O halde  $y_1 \in \ker(T)$  ve  $y_2 \in \overline{\text{ran}(T^*)}$  iken  $y = y_1 + y_2$  yazılabilir. Böylece  $Ty_1 = 0$  ve  $\langle Ty_2, y_2 \rangle = \langle y_2, T^*y_2 \rangle = 0$  olduğundan

$$\langle Ty, y \rangle = \langle T(y_1 + y_2), y_1 + y_2 \rangle = \langle Ty_1 + Ty_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle Ty_2, y_1 \rangle$$

elde edilir. O halde

$$|\langle Ty, y \rangle| \leq \|T\| \|y_2\| \|y_1\| \leq \|T\| \frac{\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2}{2} = \frac{\|T\|}{2}$$

bulunur.  $f$  keyfi olduğundan  $w(T) \leq \frac{\|T\|}{2}$  eşitsizliğine ulaşılır. Teorem 3.3'ten  $\frac{\|T\|}{2} \leq w(T)$  yazılabilir. Sonuç olarak  $w(T) = \frac{1}{2} \|T\|$  eşitliği elde edilir. ■

**Önerme 3.4.** Eğer  $T$  operatörü idempotent,  $w(T) \leq 1$  ise  $T$  ortogonal izdüşümdür.

*İspat.*  $T$  operatörü idempotent olduğundan  $T = T^2$  eşitliği vardır. İspat için  $\text{ran}(T)^\perp$ 'deki  $T$ 'nin sıfır operatörü olduğunu göstermek yeterlidir.  $y \in \text{ran}(T)$  ve  $x = Ty$  olsun. O halde  $c > 0$  için

$$T(y + cx) = Ty + cT^2y = x + cTy = x + cx$$

bulunur.  $x \perp y$  iken

$$\langle T(y + cx), (y + cx) \rangle = \langle (1 + c)x, y + cx \rangle = \langle (1 + c)x, cx \rangle = (1 + c)c \|x\|^2$$

elde edilir. Öte yandan  $w(T) \leq 1$  iken  $\langle T(y + cx), y + cx \rangle \leq \|y + cx\|^2$  bulunur. Böylece

$$(1 + c)c \|x\|^2 \leq \|y + cx\|^2 = \|y\|^2 + c^2 \|x\|^2$$

ve buradan  $c \|x\|^2 \leq \|y\|^2$  elde edilir.  $c$  keyfi seçildiğinden  $\|x\|, 0$ 'a eşit olmalıdır.  $x = Ty$  olduğundan  $T, \text{ran}(T)^\perp$  üzerinde sıfır operatörüdür. ■

### 3.3 Kendine Eşlenik Operatörler

**Teorem 3.4.**  $T \in B(H)$  operatörünün kendine eşlenik olması için gerek ve yeter koşul  $W(T) \subseteq \mathbb{R}$  olmasıdır.

*İspat.*  $T = T^*$  ise  $\forall u \in H$  için  $\langle Tu, u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \overline{\langle Tu, u \rangle}$  eşitliği sağlanır. Buradan  $W(T)$  sayısal bölgesinin reel olduğu görülür. Öte yandan her  $u \in H$  için  $\langle Tu, u \rangle \in \mathbb{R}$  ise  $\langle Tu, u \rangle - \langle u, Tu \rangle = 0 = \langle (T - T^*)u, u \rangle$  bulunur. O halde  $T - T^*$  sıfır operatörüdür yani  $T = T^*$  olur [3, 14]. ■

Teorem 3.4'e göre kompleks Hilbert uzayındaki her pozitif operatör, kendine eşleniktir [16].

**Sonuç 3.2.**  $T \in B(H)$  operatörünün pozitif operatör olması için gerek ve yeter şart  $W(T) \subseteq [0, \infty)$  olmasıdır.

Sayısal bölgenin kapanışının spektrumu içerdiğinden Teorem 3.2'de bahsedilmişti. O halde aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 3.3.**  $T$  kendine eşlenik operatör ise  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ ; pozitif operatör ise  $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$  kapsamaları sağlanır [14, 15].

**Teorem 3.5.**  $T$  kendine eşlenik operatör ise  $\|T\|^2 \leq w(T^2)$  sağlanır.

*İspat.*  $u \in H$  ve  $\|u\| = 1$  olsun.

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle = \langle T^*Tu, u \rangle = \langle T^2u, u \rangle \leq w(T^2)$$

bulunur. Operatör normu tanımından  $\|Tu\|$ 'ların supremumu  $\|T\|$  ifadesine eşittir. Böylece

$$\|T\|^2 \leq w(T^2)$$

sağlanır. ■

**Teorem 3.6.**  $T$  kendine eşlenik operatör ise  $w(T^2) \leq (w(T))^2$  sağlanır.

*İspat.*  $\lambda \in W(T^2)$ ,  $u \in H$  ve  $\|u\| = 1$  olsun.  $x = Tu$  olarak alındığında

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \langle T^2u, u \rangle^2 = \langle Tu, Tu \rangle^2 \\ &= \langle Tu, x \rangle^2 \\ &\leq \langle Tu, u \rangle \langle Tx, x \rangle \quad (\text{Cauchy-Schwarz Eşitsizliği}) \\ &\leq w(T) \langle T(Tu), Tu \rangle \\ &\leq w(T)^2 \|Tu\|^2 \\ &= w(T)^2 \langle Tu, Tu \rangle \\ &= w(T)^2 \langle T^2u, u \rangle \\ &= w(T)^2 \lambda \end{aligned}$$

bulunur.  $\lambda > 0$  için  $\lambda \leq w(T)^2$  elde edilir. Sol tarafın supremumu alındığında  $w(T^2) \leq (w(T))^2$  eşitsizliğine ulaşılır [7]. ■

**Sonuç 3.4.**  $T$  kendine eşlenik operatör ise  $\|T\| \leq w(T)$  dir.

*İspat.* Teorem 3.5 ve Teorem 3.6'dan bulunur. ■

**Sonuç 3.5.**  $T$  kendine eşlenik operatör ise  $\|T\| = w(T)$  dir [14].

*İspat.*  $\forall u$  birim vektörü için  $|\langle Tu, u \rangle| \leq \|Tu\| \|u\| \leq \|T\| \|u\|^2 = \|T\|$  doğrudur.  $|\langle Tu, u \rangle|$  ifadesinin supremumu alındığında  $w(T) \leq \|T\|$  bulunur. Öte yandan Sonuç 3.4'ten  $\|T\| \leq w(T)$  eşitsizliği vardır. Dolayısıyla  $\|T\| = w(T)$  elde edilir. ■

**Sonuç 3.6.**  $T$  kendine eşlenik operatör ise  $\|T\|^2 = w(T^2) = (w(T))^2 = \|T^2\|$  sağlanır.

*İspat.* Teorem 3.3, Teorem 3.5 ve Teorem 3.6'dan ötürü  $T$  kendine eşlenik operatörü için

$$\|T\|^2 \leq w(T^2) \leq (w(T))^2 \leq \|T\|^2$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan  $w(T^2) = (w(T))^2 = \|T\|^2$  elde edilir.  $T^2$  kendine eşlenik olduğundan, Sonuç 3.5'ten,  $\|T^2\| = w(T^2)$  eşitliği vardır. Böylece istenilen sonuca ulaşılır. ■

**Teorem 3.7.**  $R$  kendine eşlenik operatör,  $\lambda$  sıfırdan farklı bir kompleks sayı olmak üzere  $T = \lambda R$  ise  $\|T\| = w(T)$  dir [23].

*İspat.*  $\lambda^{-1}T = R$  kendine eşlenik operatör ise Sonuç 3.5'ten  $\|\lambda^{-1}T\| = w(\lambda^{-1}T)$  dir. Buradan  $|\lambda^{-1}|\|T\| = |\lambda^{-1}|w(T)$  yazılabilir. Böylece  $\|T\| = w(T)$  eşitliğine ulaşılır. ■

**Teorem 3.8.** Bir  $T \in B(H)$  operatörünün sayısal bölgesi doğru parçasıdır ancak ve ancak  $R$  kendine eşlenik operatör iken  $T = \alpha I + \beta R$  eşitliği vardır.

*İspat.*  $W(T) = \{\alpha + \beta x : x \in \mathbb{R}\}$  doğru parçası olsun. Buradan  $\beta^{-1}(\alpha + \beta x) - \beta^{-1}\alpha$  reeldir.  $R = \beta^{-1}T - \beta^{-1}\alpha I$  olsun. O halde herhangi bir  $u$  birim vektörü için  $\langle Ru, u \rangle = \beta^{-1}T \langle u, u \rangle - \beta^{-1}\alpha I \langle u, u \rangle = \beta^{-1}(\alpha + \beta x) - \beta^{-1}\alpha$  reeldir. Böylece  $R$  operatörünün kendine eşlenik olduğu ve  $T = \alpha I + \beta R$  eşitliğini sağladığı görülür. Öte yandan,  $R$  kendine eşlenik operatör olmak üzere  $T = \alpha I + \beta R$  eşitliği sağlansın.  $u$  birim vektör olmak üzere  $\langle Tu, u \rangle \in W(T)$  olsun. Buradan  $\langle Tu, u \rangle = \langle (\alpha I + \beta R)u, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \beta \langle Ru, u \rangle$  elde edilir.  $R$  kendine eşlenik operatör olduğundan  $\langle Ru, u \rangle$  reeldir. O halde  $x \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\langle Tu, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \beta \langle Ru, u \rangle = \alpha + \beta x$  yazılabilir. Buradan  $W(T)$  doğru parçasıdır [20]. ■

### 3.4 Normal Operatörler

**Önerme 3.5.**  $W(T)$  doğru parçası ise  $T$  normal operatördür.

*İspat.*  $W(T)$  doğru parçası ise  $R$  operatörü kendine eşlenik iken  $T = \alpha I + \beta R$  eşitliği yazılabilir. O halde

$$TT^* = (\alpha I + \beta R)(\bar{\alpha} I + \bar{\beta} R) = |\alpha|^2 + \alpha \bar{\beta} R + \beta \bar{\alpha} R + |\beta|^2 R^2$$

ve

$$T^*T = (\bar{\alpha} I + \bar{\beta} R)(\alpha I + \beta R) = |\alpha|^2 + \bar{\alpha} \beta R + \bar{\beta} \alpha R + |\beta|^2 R^2$$

eşitlikleri elde edilebilir. Buradan  $TT^* = T^*T$  olduğu yani  $T$  operatörünün normal olduğu görülür. ■

**Teorem 3.9.**  $T$  normal operatör ise  $k = 1, 2, \dots$  için  $\|T^k\| = \|T\|^k$  ve  $r(T) = w(T) = \|T\|$  sağlanır.

*İspat.* Herhangi  $x \in H$  için

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\|$$

yazılabilir ve buradan  $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$  bulunabilir.  $\|T^2\| \leq \|T\|^2$  her zaman doğru olduğundan  $\|T^2\| = \|T\|^2$  elde edilir.  $k = 2, 3, \dots$  için

$$\|T^kx\|^2 = \langle T^*T^kx, T^{k-1}x \rangle \leq \|T^{k+1}x\| \|T^{k-1}x\|$$

olur. Bu ifade  $\|T^2\| = \|T\|^2$  ile birleştirilerek ve tümevarım kullanılarak  $k = 1, 2, \dots$  için  $\|T^k\| = \|T\|^k$  elde edilir. Tanım 2.20'den  $r(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k}$  eşitliği vardır. Böylece

$$r(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T\|^{k(\frac{1}{k})} = \|T\|$$

bulunur. Sonuç 3.1'den  $r(T) = w(T) = \|T\|$  olduğu sonucuna varılır [3].

■

$T$  normal operatör olmak üzere  $w(T) = \|T\|$  eşitliği, kompleks  $H$  uzayı için sağlanıyorken reel  $H$  uzayı için sağlanmayabilir:

**Örnek 3.10.**  $H = \mathbb{R}^2$  olsun.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile verilen  $T \in B(H)$  operatörü için  $w(T) = 0$  iken  $\|T\| = 1$  dir.

**Teorem 3.10.**  $T$  normal operatör ise  $T$  operatörünün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler ortogondur.

*İspat.*  $f$  ve  $g$ ;  $Tf = \lambda f$ ,  $Tg = \gamma g$  ve  $\lambda \neq \gamma$  olacak şekilde  $T$ 'nin özvektörleri olsun. O halde  $\lambda \langle f, g \rangle = \langle \lambda f, g \rangle = \langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle = \langle f, \bar{\gamma}g \rangle = \bar{\gamma} \langle f, g \rangle$  eşitliği yazılabilir. Buradan  $(\lambda - \gamma) \langle f, g \rangle = 0$  bulunur.  $\lambda - \gamma \neq 0$  olduğundan  $\langle f, g \rangle = 0$  dir. Sonuç olarak  $f$  ve  $g$  ortogondur. ■

**Teorem 3.11.**  $T$ , iki boyutlu  $H$  Hilbert uzayında normal operatör ise  $W(T)$  doğru parçasıdır.

*İspat.*  $x$  ve  $y$ , birbirinden farklı  $\lambda$  ve  $\gamma$  özdeğerlerine karşılık gelen normalize edilmiş özvektörler olsun. Teorem 3.10'dan bu vektörler lineer bağımsızdır ve bundan dolayı  $H$  uzayı için bir baz oluştururlar.  $H$  uzayındaki her  $f$  birim vektörü için,  $f = px + qy$  yazılabilir.  $|p|^2 + |q|^2 = 1$  iken  $\langle Tf, f \rangle = \langle p\lambda x + q\gamma y, px + qy \rangle = |p|^2 \lambda + |q|^2 \gamma$  elde edilir.  $t = |p|^2$  olarak seçilirse  $\langle Tf, f \rangle = t\lambda + (1 - t)\gamma$  olur. O halde  $W(T)$ , uç noktaları  $\lambda$  ve  $\gamma$  olan doğru parçasıdır [23]. ■

**Teorem 3.12.**  $\lambda$ ,  $T$  normal operatörünün rezolvent kümesinde yer alan herhangi kompleks sayı olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\|(T - \lambda I)y\| \geq d(\lambda, \sigma(T)) \quad y \in H, \|y\| = 1$$

*İspat.*  $(T - \lambda I)^{-1}$  normal olduğundan

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| = r((T - \lambda I)^{-1}) = \sup \{|\gamma|, \gamma \in \sigma(T - \lambda I)^{-1}\}$$

eşitliği vardır.

$$\sigma((T - \lambda I)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\gamma - \lambda} : \gamma \in \sigma(T) \right\}$$

olduğundan

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| = \sup \left\{ \frac{1}{|\gamma - \lambda|} : \gamma \in \sigma(T) \right\} = \frac{1}{\inf \{|\lambda - \gamma| : \gamma \in \sigma(T)\}}$$

bulunur.  $\inf \{|\lambda - \gamma| : \gamma \in \sigma(T)\}$ ,  $\lambda$  noktasının  $\sigma(T)$  kümesine uzaklığını temsil ettiğinden

$$\frac{1}{\inf \{|\lambda - \gamma| : \gamma \in \sigma(T)\}} = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}$$

yazılabilir. O halde normu 1'e eşit olan herhangi  $y \in H$  için

$$d(\lambda, \sigma(T)) = \|(T - \lambda I)^{-1}\|^{-1} \leq \|(T - \lambda I)y\|$$

elde edilir [3]. ■

**Teorem 3.13.**  $T$  normal operatör ise  $\overline{W(T)} = ko(\sigma(T))$  eşitliği vardır.

*İspat.* İspat için  $T$ 'nin spektrumunu içeren  $\mathbb{C}$ 'deki herhangi kapalı yarı-düzlemin  $W(T)$  sayısal bölgesini de içerdiğini göstermek yeterli olacaktır. Genelliği bozmaksızın,  $\sigma(T) \subset \{z : Rez \leq 0\}$  olduğunu ve sanal eksenin  $ko(\sigma(T))$ 'nin bir noktasını içerdiğini fakat herhangi iki noktasını ayırmadığını, yani sanal eksenin  $ko(\sigma(T))$  için bir destek doğrusu olduğunu varsayalım.

$x > 0$ ,  $x + iy \in W(T)$  ve  $\|f\| = 1$ ,  $\langle Tf, f \rangle = x + iy$  olduğunu kabul edelim.  $\langle f, g \rangle = 0$  iken  $Tf = (x + iy)f + g$ ,  $u \in \mathbb{R}$  ve  $u > 0$  olsun. Bu durumda  $u$ ,  $T$  operatörünün spektrumunda değildir. O halde Teorem 3.12 kullanılarak

$$d(u, \sigma(T)) \leq \|(T - uI)f\|$$

yani

$$u^2 \leq \|(x - u + iy)f + g\|^2 = (x - u)^2 + y^2 + \|g\|^2$$

yazılabilir. Buradan  $x, u > 0$  olmak üzere  $2xu \leq x^2 + y^2$  elde edilir.  $u$  keyfi olduğundan bu bir çelişkidir. ■

### 3.5 Değişmeli ve Üniter Operatörler

**Teorem 3.14.**  $R$  pozitif operatör,  $TR = RT$  ise  $W(TR) \subseteq W(T)W(R)$  kapsamı sağlanır.

*İspat.*  $R$  pozitif olduğundan Teorem 2.5'e göre tek bir  $R^{\frac{1}{2}}$  vardır. O halde  $TR^{1/2} = R^{1/2}T$  eşitliği yazılabilir.  $\|y\| = 1$ ,  $R^{1/2}y \neq 0$  ve  $z := \frac{R^{1/2}y}{\|R^{1/2}y\|}$  ise  $\langle TRy, y \rangle = \langle TR^{1/2}y, R^{1/2}y \rangle = \langle Tz \|R^{1/2}y\|, z \|R^{1/2}y\| \rangle = \langle Tz, z \rangle \langle Ry, y \rangle \in W(T)W(R)$  elde edilir.  $W(TR)$  sayısal bölgesinden alınan herhangi eleman  $W(T)W(R)$  sayısal bölgesinin de elemanı olduğundan  $W(TR) \subseteq W(T)W(R)$  kapsamı sağlanmış olur. ■

**Teorem 3.15.**  $T, R \in B(H)$  olmak üzere  $T$  normal operatör,  $RT = TR$  ise  $w(RT) \leq w(R)w(T)$  olur.

*İspat.* Normal operatörlerin spektral ayrışımını kullanalım.  $T$  normal olduğundan  $\gamma_i \in \sigma(T)$ , her  $P_i \in B(H)$  bir ortogonal izdüşüm, her  $i \neq j$  için  $P_i \perp P_j$ ,  $\sum_{i=1}^n P_i = I$  ve  $P_i R = R P_i$  iken  $T_0 = \sum_{i=1}^n \gamma_i P_i$  toplamıyla operatör normunda yaklaşık olarak hesaplanabilir [25]. Böyle bir  $T_0$  için,  $w(RT_0) \leq w(R)w(T)$  ifadesinin sağlandığı gösterilmelidir.  $x \in H$  ve  $\|x\| = 1$  ise

$$\begin{aligned} |\langle RT_0 x, x \rangle| &= \left| \left\langle R \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i P_i \right) x, \left( \sum_{j=1}^n P_j \right) x \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i,j=1}^n \gamma_i \langle R P_i x, P_j x \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i,j=1}^n \gamma_i \langle P_j R P_i x, P_j x \rangle \right| \quad (P_j^* = P_j = P_j^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i,j=1}^n \gamma_i \langle R(P_j P_i)x, P_j x \rangle \right| \quad (RP_i = P_i R) \\
&= \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i \langle RP_i x, P_i x \rangle \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |\gamma_i| |\langle RP_i x, P_i x \rangle| \\
&\leq \sum_{i=1}^n w(T) |\langle R(P_i x), (P_i x) \rangle| \quad (|\gamma_i| \leq r(T) = w(T)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n w(T) w(R) \|P_i x\|^2 \\
&= w(T) w(R) \left\| \sum_{i=1}^n P_i x \right\|^2 \\
&= w(T) w(R) \|Ix\|^2 \\
&= w(T) w(R).
\end{aligned}$$

Her yaklaşık operatör  $T_0$  için  $w(RT_0) \leq w(R)w(T)$  olduğundan  $w(RT) \leq w(R)w(T)$  elde edilebilir [24]. ■

**Lemma 3.2.**  $Q$  üniter operatör,  $TQ = QT$  ise  $w(QT) \leq w(T)$  sağlanır.

*İspat.*  $Q$  üniter operatör olduğundan aynı zamanda normal operatördür. O halde Teorem 3.15 kullanılarak  $w(QT) \leq w(Q)w(T)$  bulunur.  $Q$  üniter olduğundan  $\|Qx\| = \|x\|$  eşitliği vardır.

$$\|Q\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Qx\|}{\|x\|} = 1$$

operatör normu tanımından ve Teorem 3.9'dan  $w(Q) = \|Q\| = 1$  olur. Böylece  $w(QT) \leq w(T)$  sağlanır. ■

**Sonuç 3.7.** Üniter operatör  $Q$  için  $w(Q) = 1$  olur.

**Lemma 3.3.**  $Q$  bir izometri,  $QT = TQ$  ise  $w(QT) \leq w(T)$  olur.

*İspat.*  $Q$  izometri olduğundan  $Q^*Q = I$  ve buradan  $\langle QTa, a \rangle = \langle Q^*QQTa, a \rangle = \langle QTQa, Qa \rangle$  yazılabilir. Bu nedenle  $\text{ran}(Q)$ 'nin incelenmesi yeterli olacaktır. Herhangi  $a = Qb \in \text{ran}(Q)$  için  $QQ^*a = QQ^*Qb = Qb = a$  olduğundan,  $\text{ran}(Q)$  üzerinde,  $QQ^* = I$  eşitliği elde edilir. O halde  $Q$  üniterdir. Lemma 3.2'den,  $\text{ran}(Q)$  üzerinde,  $w(QT) \leq w(T)$  elde edilir [3]. ■

# 4

## SONUÇ

---

Çalışma boyunca, iki boyutlu Hilbert uzaylarında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin sayısal bölgelerinin elips olduğu, yine Hilbert uzaylarındaki sınırlı lineer bir operatörün spektrumunun sayısal bölgesinin kapanışı tarafından kapsandığı, sayısal yarıçap kavramının spektral yarıçap ve operatör normu ile ilişkili olduğu görülmüştür. Bunlara ek olarak bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı kendine eşlenik operatörün sayısal bölgesinin reel olduğu, iki boyutlu Hilbert uzayında tanımlı normal bir operatörün sayısal bölgesinin ise doğru parçası olduğu gözlemlenmiştir.

- [1] O. Toeplitz, “Das algebraische analogon zu einem satze von fejér,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 2, no. 1-2, pp. 187–197, 1918.
- [2] F. Hausdorff, “Der wertvorrat einer bilinearform,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 3, no. 1, pp. 314–316, 1919.
- [3] K. E. Gustafson, D. K. Rao, K. E. Gustafson, D. K. Rao, *Numerical range*. Springer, 1997.
- [4] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*. American Mathematical Soc., 1932, vol. 15.
- [5] G. Lumer, “Semi-inner-product spaces,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 100, no. 1, pp. 29–43, 1961.
- [6] F. L. Bauer, “On the field of values subordinate to a norm,” *Numerische Mathematik*, vol. 4, pp. 103–113, 1962.
- [7] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*. CUP Archive, 1971.
- [8] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Numerical ranges II*. Cambridge university press, 1973, vol. 10.
- [9] J. Giles, G. Joseph, “The numerical ranges of unbounded operators,” *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 11, no. 1, pp. 31–36, 1974.
- [10] J. Giles, G. Joseph, D. Koehler, B. Sims, “On numerical ranges of operators on locally convex spaces,” *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 20, no. 4, pp. 468–482, 1975.
- [11] B. Bollobas, S. E. Eldridge, “The numerical ranges of unbounded linear operators,” *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 12, no. 1, pp. 23–25, 1975.
- [12] K. Mandal, A. Bhanja, S. Bag, K. Paul, “On the numerical range of operators on some special banach spaces,” *arXiv preprint arXiv:2005.01288*, 2020.
- [13] J. R. Giles, J. R. Giles, *Introduction to the analysis of normed linear spaces*. Cambridge University Press, 2000, vol. 13.
- [14] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1991, vol. 17.
- [15] B. Rynne, M. A. Youngson, *Linear functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [16] J. B. Conway, “A course in functional analysis (1990),” *Graduate Texts in Mathematics*, 1990.

- [17] J. Muscat, *Functional analysis: an introduction to metric spaces, Hilbert spaces, and Banach algebras*. Springer, 2014.
- [18] M. S. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 5.
- [19] J. K. Hunter, B. Nachtergaele, *Applied analysis*. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [20] A. W. Wafula, J. Khalaghai, “The numerical range of some operators on a finite dimensional hilbert space,” 2021.
- [21] K. Havasréti, “Numerical ranges of operators,” *Eötvös Loránd University*, 2021.
- [22] J. H. Shapiro, “Notes on the numerical range,” *Lecture Notes, Michigan State University*, 2004.
- [23] A. W. Wafula, “On invariance of the numerical range and some classes of operators in hilbert spaces,” Ph.D. dissertation, 2013.
- [24] J. A. R. Holbrook, “Multiplicative properties of the numerical radius in operator theory.,” 1969.
- [25] W. Rudin, “Functional analysis 2nd ed,” *International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York*, 1991.
- [26] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 19.

## TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

---

### **Konferans Bildirisi**

1. B. Şeran, E. Demir, "Numerical Ranges of Operators on Some Spaces", 8th International IFS and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM2022), Turkey, 16 - 19 June 2022, pp.95

