



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



Yüksek Lisans Tezi

**DÖNEN KARA DELİKLERİN UZAY-ZAMANINDA IŞIĞIN
BÜKÜLME OLAYININ İNCELENMESİ**

Aylin ÇALIŞKAN

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER

Temmuz, 2020

İSTANBUL

Bu çalışma, 16.07.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Doç. Dr. Reyhan KAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu tez, İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 32932 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Beni yüksek lisans yapmaya teşvik eden, tez konumu belirleyen, lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca her türlü desteğini, bilgisini, sevgisini ve sabrını esirgemeyen kıymetli danışmanım sayın Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER'e çok teşekkür ederim.

Huzurlu ve aile ortamında hissettiğim çalışma ortamını bana sağlamış oldukları için Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Başkanı sayın Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ başta olmak üzere tüm Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Öğretim Üyelerinden sayın Doç. Dr. Değer SOFUOĞLU'na çalışmalarım süresince her daim yanımda olmasından ve psikolojik desteğinin yanı sıra paylaştığı tecrübeleriyle, sabırla bana kattıklarından dolayı, ayrıca teşekkür ederim.

Hesaplamalarımda ve bu hesaplar için kullandığım bilgisayar programı konusunda, yaşayacağım muazzam zorlukları neredeyse sıfıra indiren, yadsınamaz desteğinden dolayı sevgili Orhan AYDİLEK'e ve bilgisayar kullanım konusunda teknik bilgilerini benimle sabırla paylaşan ve bu süreçte her daim yanımda olan değerli arkadaşım Birtan TAŞKIRAN'a teşekkür ederim. Ayrıca bu sürecimde bana sabırla yol gösteren, deneyimlerini ve desteğini esirgemeyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Gülin İnci VAROL'a çok teşekkür ederim. Tez yazım sürecimde fikir alışverişinde bulunduğum, hayatıma bir şekilde bir noktadan dokunmuş olan, iletişimde olduğum herkese teşekkür ederim.

Bütün hayatım boyunca özverisini, bana olan inancını, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, sayelerinde bu günlere gelebildiğim annem, babam ve tüm aileme sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez, tarihe geçecek olan, tüm dünya için büyük hayret verici ve ileride travma izleri bırakacak olan, dönüm noktası niteliğinde bir karmaşanın yaşandığı ilginç bir yıl içerisinde tamamlandı. Umarım bu süreç tüm insanlığı zirveye fırlatacak olan en dip noktadır ve hiç görmediğimiz kadar güzel günlere en kısa zamanda kavuşuruz.

Temmuz 2020

Aylin ÇALIŞKAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ.....	viii
ÖZET	x
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR.....	4
2.1. KARA DELİKLER	4
2.1.1. Kara Deliklerin Sınıflandırılması	6
2.1.2. Kara Deliklerin Gözlenmesi	6
2.1.3. Olay Ufku Ve Tekillik.....	9
2.1.4. Kara Delik Türleri	11
2.1.5. Kara Delik Işınması Olayı	12
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	13
3.1. KARA DELİK ALANINDA HAREKET PROBLEMİ	13
3.1.1. Hamilton-Jacobi Yöntemi	13
3.1.2. Metrik Formda Hamilton-Jacobi Yöntemi	14
3.1.3. Metrik Formda Lagrange Denklemi	15
3.1.4. Uzay-Zaman Yapısının Tasviri ve Boyer-Lindquist Koordinatları.....	16
3.1.5. Killing Vektörleri	18
3.2. KERR UZAY-ZAMANI.....	20
3.3. KERR-BRANE-WORLD UZAY-ZAMANI.....	24
3.4. KERR-KALUZA-KLEIN UZAY-ZAMANI.....	28
3.5. KERR-SEN UZAY-ZAMANI.....	31
3.6. IŞIĞIN BÜKÜLMESİ	32
4. BULGULAR.....	35
4.1. KERR-BRANE-WORLD KARA DELİKLERİ İÇİN IŞIĞIN BÜKÜLMESİ	35
4.2. KERR-KALUZA-KLEIN KARA DELİKLERİ İÇİN IŞIĞIN BÜKÜLMESİ	41
4.3. KERR-SEN KARA DELİKLERİ İÇİN IŞIĞIN BÜKÜLMESİ	44

5. TARTIŞMA VE SONUÇ	49
KAYNAKLAR.....	51
EKLER	54
EK 1: KERR-BRANE-WORLD METRİĞİ İÇİN CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ	54
EK 2: KERR-KALUZA-KLEIN METRİĞİ İÇİN CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ	55
EK 3: KERR-SEN METRİĞİ İÇİN CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ	56
ÖZGEÇMİŞ	57



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.1: Kara deliklerin ve diğer gök cisimlerinin uzay-zaman yapısına etkileri [1].	5
Şekil 2.2: Kara delik jeti.	7
Şekil 2.3: LIGO deney düzeneği.	8
Şekil 2.4: Elde edilen kara delik görüntüsü [6].	9
Şekil 2.5: Kara delik tekil noktası.	11
Şekil 3.1: Kerr kara deliğinin ergosfer bölgesi.	20
Şekil 3.2: Ekstra boyut farkları [14].	26
Şekil 3.3: Dönen bir kara deliğin uzay-zamanında ışığın bükülmesi.	34

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
M	: Kara Delik Kütlesi
$M_{\odot}$	: Güneş Kütlesi
$R_{\mu\nu}$	: Ricci Tensörü
$g_{\mu\nu}$	: Metrik Tensör
$g^{\mu\nu}$	: Metrik Tensörün Ters
$G_{\mu\nu}$	: Einstein Tensörü
$T_{\mu\nu}$	: Enerji-Momentum Tensörü
R	: Ricci Skaleri
G	: Gravitasyonel Sabit
r_g	: Schwarzschild Yarıçapı
r	: Olay Ufku Yarıçapı
r_+	: Dış Olay Ufku Yarıçapı
r_-	: İç Olay Ufku Yarıçapı
r_0	: Ergosfer Yarıçapı
Γ_{jk}^i	: Christoffel Sembolü
Q	: Yük
c	: Işık Hızı
δ	: Varyasyon
a	: Birim Kütle Başına Açısal Momentum
E	: Enerji
L	: Açısal Momentum
H	: Hamilton Fonksiyonu
$\mathcal{L}$	: Lagrange Fonksiyonu
Φ	: Dilaton Alanı
Ω	: Açısal Hız
∂	: Kısmi Türev
β	: Brane-World Kara Deliğinde Gelgit Yüğü
$\xi_{(t)}$	: Zamansal Killing Vektörü

$\xi_{(\phi)}$: Eksenel Killing Vektörü

Kısaltmalar

Açıklama

AdS	: Anti de-Sitter
ADD	: Arkani-Hamed, Dimopoulos ve Dali
Caltech	: California Institute of Technology
EMDA	: Einstein-Maxwell dilaton-axion
GR	: Genel Rölative
GRT	: Genel Rölative Teorisi
IY	: Işık Yılı
KK	: Kaluza-Klein
KB	: Kerr-Brane-World
KKK	: Kerr-Kaluza-Klein
KS	: Kerr-Sen
LIGO	: Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory
MIT	: Massachusetts Institute of Technology
RS	: Randall-Sundrum
RSII	: Randall-Sundrum -II-

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÖNEN KARA DELİKLERİN UZAY-ZAMANINDA IŞIĞIN BÜKÜLME OLAYININ İNCELENMESİ

Aylin ÇALIŞKAN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER

Kara delikler modern teorik fiziğin en ilginç ve en heyecan verici araştırma alanlarının başında gelmektedir. Uzun zamandır üzerinde çalışılan ve M87* Eliptik Gökadasının merkezinde bulunduğu tahmin edilen dev kütleli bir kara deliğin görüntüsünün, geçtiğimiz yıl ilk defa elde edilmesi, tahminleri doğru çıkartmış ve bu alanda yapılan araştırmalara yeni bir boyut kazandırmıştır. Bu kapsamda, gerek kara deliklerin yakın çevresindeki fiziksel süreçlere, gerekse ilgili uzay-zaman geometrisinin özelliklerine ilgi giderek artmaktadır. Kara delik çevresinde hareket problemini ele alabilmek için, ilgili uzay zamanın geometrik yapısı iyi bilinmelidir. Zira, söz konusu hareketin özellikleri, uzay-zamanın metrik yapısının incelenmesi ile belirlenir.

Bu tezde, dönen kara deliklerin uzay-zamanında hareket eden bir taneciğin jeodezik hareketi ele alınıp, bu süreçte oluşan önemli fiziksel etkilerden biri olan ışığın bükülme (“deflection of light”) olayı incelenmiştir. Işığın bükülmesi Genel Rölativite Teorisi’nin en önemli öngörülerinden biridir. Bu etki, zayıf alanda Genel Rölativite Teorisi’ni test etmeyi başarmıştır. Günümüzde gökadalardan ve gökada kümelerinin gözlemlerinde yaygın biçimde incelenen “kütle-çekimsel mercekleme” olgusu, bu etkinin en önemli sonuçlarından biridir.

Bu tezde ele aldığımız kara delik örneklerinden ilki olan Kerr-Brane-World kara delikleri; 5 boyutlu zar-evren modelinde tidal (gel-git) yükü içermektedir. Kerr-Brane-World fikri daha yüksek boyutlardaki gravitasyonun özelliklerinin 4-boyutta incelenmesini sağlamak için öne sürülen bir fikirdir. Gravitasyonun davranışını Kerr-Brane-World modellerinde araştırmak,

görülmeyen ek boyutların 4-boyutlu dünyamızda fiziksel etkilerini ele almanın bir yolunu sağlamaktadır. İncelediğimiz bir diğer kara delik  rneği Kerr-Kaluza-Klein türü dönen kara deliklerdir. Bu tür kara delik  z mlerinde, Kaluza-Klein teorisinde var olan 5. boyutun etkisi 4-boyutlu uzay-zamanda Kerr türü kara deliklerin elektrik ve dilaton yükleri ile gözlenir.        örneğimiz olan Kerr-Sen kara deliği ise, d     enerjili sicim teorisinde, Kerr-Newman kara deliğindeki açısal momentum, kütle ve elektrik yükü parametreleri ile benzerlik gösterir fakat dilaton ve ayar alanlarını içeren yükler ile farklı karakterize edilir. Bu kara delik  z m , Genel Rölativite Teorisi'ndeki Kerr-Newman  z m n n, Dilaton-Axion genellemesi olarak ortaya çıkar.

Bu tezdeki çalışmalar kapsamında, taneciğin hareket denklemleri Hamilton-Jacobi yöntemiyle incelenmiş ve yukarıda adı geçen metriklerin içerdiği fiziksel parametrelerin, ışığın bükülmesine etkileri ortaya konulmuştur. Ayrıca ışığın sapma açısını belirleyen ilgili açısal denklemlerin, metrik parametrelere göre karşılaştırılması yapılmıştır.

Temmuz 2020, 70 sayfa.

Anahtar kelimeler: Kara delik, ışığın bükülmesi, Kerr-Brane-Borl , Kerr-Kaluza-Klein, Kerr-Sen

SUMMARY

M.Sc. THESIS

INVESTIGATION OF DEFLECTION OF LIGHT PHENOMENA IN ROTATING BLACK HOLE SPACE-TIME

Aylin ÇALIŞKAN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Göksel DAYLAN ESMER

Black holes are one of the most interesting and exciting fields of research in modern theoretical physics. The first image of a giant black hole, which has been studied for a long time and is predicted to be located in the center of the M87* Elliptical Galaxy, has brought a new dimension to the research in this area. In this context, there is an increasing interest in both the physical processes in the immediate vicinity of the black holes and the features of the related space-time geometry. In order to deal with the problem of motion around the black hole, it is necessary to know the geometric structure of the related space-time. Because the properties of the movement in question are determined by examining the metric structure of space-time.

In this thesis, the geodetic motion of a particle moving in the space-time of rotating black holes is handled and the phenomenon of deflection of light, which is one of the important physical effects in this process, is investigated. The deflection of light phenomenon is one of the most important predictions of General Relativity Theory. This effect has managed to test General Relativity Theory in the weak field. The phenomenon of “gravitational lensing”, which is widely studied today in observations of galaxies and galaxy clusters, is one of the most important results of this effect.

Kerr-Brane-World black holes, which is the first black hole example that is considered in this thesis; it contains a tidal load in the 5-dimensional membrane-universe model. The Kerr-Brane-

World idea is an idea proposed to enable the properties of higher-dimensional gravitation to be examined in 4-dimensions. Investigating the behavior of gravitation in Kerr-Brane-World models, provides a way to adress the physical effects of invisible additional dimensions in our 4-dimensional world. In this thesis, we have also studied Kerr-Kaluza-Klein type rotating black holes. In this kind of black hole solutions, the effect of the 5-dimension in Kaluza-Klein theory is observed with the electric and dilaton charges off Kerr type black holes in 4-dimensional space-time. Our third example is Kerr-Sen black hole which is similar in low-energy string theory to the angular momentum, mass and electric charge parameters in the Kerr-Newman black hole, but is characterized by charges which include dilaton and gauge fields. This black hole solution emerges as the Dilaton-Axion generalization of the Kerr-Newman solution in General Relativity Theory.

Within the scope of this thesis, for the test particle, the equations of motions are investigated by Hamilton-Jacobi method and also the effects of the physical parameters contained in the aforementioned metrics on the bending of light are revealed. Additionally, the corresponding angular equations that determine the angle of deflection of light are compared with metric parameters.

July 2020, 70 pages.

Keywords: Black hole, deflection of light, Kerr-Kaluza-Klein, Kerr-Brane-World, Kerr-Sen

1. GİRİŞ

Kara delikler çağdaş teorik fiziğin ve astrofiziğin en ilginç ve en heyecan verici araştırma konuları olarak bilinmektedir. Kara delik çözümlerinin teorik olarak incelenmesi, öncelikle Genel Rölativite Teorisi'nin tekillik yapısının ve dinamiğinin anlaşılmasını mümkün kılmıştır. Ayrıca bu çözümlerin tekil ve kararlı özelliklerine sahip olması kara deliklerin evrende var olabileceklerini bize kuvvetle telkin etmektedir. Öte yandan kara delik uzay-zamanının saklı simetriler içermesi jeodezik hareket denklemlerinin tam çözülebilir olmasına yol açmıştır. Bu durum aynı zamanda kara deliklerin yakın çevresindeki fiziksel olayların incelenmesine ışık tutarak kara deliklerin reel evrende gözlemlenmesi için geniş bir zemin oluşturmuştur. Yakın geçmişe kadar, elektromanyetik spektrumun tüm bantlarında yapılan astronomik gözlemler X-ışını yayınlayan çok sayıda çift yıldız sistemlerinin kara delik barındırdığını ortaya koymuştur. Bu gözlemler aynı zamanda gökadalara merkezlerinde çok büyük kütleyle sahip (Güneş'in kütlesinin 100 milyon katı kadar) dev kara deliklerin bulunduğu işaret etmektedir. Nitekim bu teorik çalışmaların sonucunda, uzun yıllardan beri ilk defa M87* Eliptik Gökadasının merkezinde bulunduğu tahmin edilen dev kütleli bir kara deliğin geçtiğimiz yıl görüntüsünün elde edilmesi, bu alanda yapılan araştırmalara yeni bir boyut kazandırmıştır. Bu kapsamda, gerek kara deliklerin yakın çevresindeki fiziksel süreçlere, gerekse ilgili uzay-zaman geometrisinin özelliklerine ilgi giderek artmaktadır.

Tezimizin **Genel Kısımlar** bölümünde, kara deliklerin genel özellikleri “Kara Deliklerin Sınıflandırılması, Kara Deliklerin Gözlenmesi, Olay Ufku ve Tekillik, Kara Delik Türleri, Kara Delik Işınması Olayı” başlıkları altında ayrıntılı olarak incelenmiştir. Kara deliklerin gözlemlenmesine ilişkin teorik çalışmalar yakın zamandaki tarihi ve önemli bir gözlemle doğrulanmıştır. Bu tezin yazım aşaması sürecinde tarihte ilk kez bir kara deliğin görüntüsü alınmış ve bu görüntü, Dünya'dan 55 milyon ışık yılı uzaklıkta eliptik bir galaksi olan Messier 87'nin ortasındaki süper kütleli kara deliğin gölgesini göstermiştir. Görüntü; “Event Horizon Teleskop” olarak adlandırılan proje kapsamında elde edilmiştir. Kara delikler, merkezinde noktasal tekillik barındıran, sınırını ise olaylar ufku oluşturduğu bir bölgedir. Farklı uzay zamanlardaki kara deliklerin, metrik yapısına göre tekillikler ve olay ufku farklılıkları göstermektedir. Tezimizde bu konuyla ilgili ayrıntılar verilmiştir. Einstein alan denklemlerinin kesin çözümleri durağan, dönen ile yüklü ve yüksüz olmalarına göre dört farklı gruptadır ve

bunlar Schwarzschild, Reissner-Nördström, Kerr ve Kerr-Newman çözümleri olarak adlandırılırlar. Kara delikler de özel koşullarda diğer gök cisimleri gibi ışıma yaparlar ve bu süreç Hawking ışıması olarak adlandırılır.

Tezimizin teorik alt yapısını oluşturan temel konulara **Malzeme ve Yöntem** kısmında yer verilmiştir. Kara deliklerle ilgili teorik hesapların bir kısmının günümüzdeki gözlemlerle doğrulanmış olması bu konudaki çalışmalara olan ilgi ve heyecanı arttırmış ve bu alanda yapılan araştırmalara yeni bir boyut kazandırmıştır. Bu kapsamda, karadeliklerin uzay-zaman geometrisinin özelliklerine ilgi giderek artmaktadır. Öte yandan kara deliğin çevresinde hareket problemini ele alabilmek için, ilgili uzay-zamanın geometrik yapısını bilmek gerekir. Dolayısıyla, söz konusu hareketin özelliklerini uzay-zamanın metrik yapısının incelenmesi belirler. Tezimizde üç farklı uzay-zaman yapısı ayrıntılarıyla ele alınmış ve bu alanlarda hareket problemi Hamilton-Jacobi yöntemiyle incelenmiştir. Kerr-Brane-World kara delikleri; 5 boyutlu zar-evren modelinde tidal (gel-git) yükü içermektedir. Kerr-Brane-World karadelikleri, daha yüksek boyutlardaki gravitasyonun özelliklerinin 4-boyutta incelenmesini sağlamak için öne sürülen bir fikirdir. 5. boyutun etkisi tidal (gel-git) yükü ile belirlenir. İncelediğimiz bir diğer kara delik örneği Kerr-Kaluza-Klein türü dönen kara deliklerdir. Bu tür kara delik çözümlerinde, Kaluza-Klein teorisinde var olan 5. boyutun etkisi 4-boyutlu uzay-zamanda Kerr türü kara deliklerin elektrik ve dilaton yükleri ile gözlenir. Üçüncü örneğimiz olan Kerr-Sen kara deliği ise, düşük enerjili sicim teorisinde, Kerr-Newman kara deliğindeki açısal momentum, kütle ve elektrik yükü parametreleri ile benzerlik gösteren, fakat dilaton ve ayar alanlarını içeren yükler ile farklı karakterize edilir. Bu kara delik çözümü, genel rölativite teorisindeki Kerr-Newman çözümünün, Dilaton-Axion genellemesi olarak ortaya çıkar. Uzay-zaman metriklerini irdelemenin ardından ışığın bükülmesi olayı teorik olarak ele alınmıştır. Işığın bükülmesi Genel Rölativite Teorisi'nin en önemli öngörülerinden biridir. Nitekim bu öngörüye dayanarak 1919 Güneş tutulması olayında yapılan meşhur ölçümlerle Genel Rölativite Teorisi'nin test edilmesi başarılmıştır. Günümüzde gökadalara ve gökada kümelerinin gözlemlerinde yaygın biçimde incelenen “kütle-çekimsel merceklenme” olgusu, bu etkinin en önemli sonuçlarından biridir.

Tezimizin dördüncü bölümü olan **Bulgular** alt başlığında, Malzeme ve Yöntem’de verilen uzay-zaman geometrilerinin ayrıntılı hesapları, bu uzaylardaki hareket denklemlerini bulmak için kullanılmıştır. Hareket problemini ele almaktaki amaç, üç farklı dönen kara delik uzay-

zamanında (Kerr-Brane-World, Kerr-Kaluza-Klein ve Kerr-Sen) oluşan fiziksel etkilerden biri olan ışığın bükülmesi (deflection of light) olayının analitik ve nümerik analizlerinin incelenmesidir. Her bir metrik için ayrı ayrı ele alınmış olan bu olayda, yukarıda adı geçen metriklerin içerdiği fiziksel parametrelerin ışığın bükülmesine etkileri ortaya konulmuştur. Ayrıca ışığın sapma açısını belirleyen ilgili açısal denklemlerin, metrik parametrelere göre karşılaştırılması yapılmıştır.

Tezimizin beşinci kısmında yani **Tartışma ve Sonuç** bölümünde ise analitik ve nümerik olarak bulunmuş olduğumuz tüm sonuçlar karşılaştırılmış, uzay-zaman parametrelerinin ışığın bükülmesi olayına etkileri analiz edilmiştir.



2. GENEL KISIMLAR

2.1. KARA DELİKLER

Kara delik; uzayda bulunan, ışık da dahil hiçbir şeyin kaçışına izin vermeyen, maksimum kuvvetli gravitasyonel çekim gücüne sahip, uzay-zamanın en çok eğrilmiş bölgesidir. Kara delikler farklı oluşumlara sahip olabilseler de çoğunlukla süpernova sonrası oluşurlar. Yıldızın çekirdeğinde termonükleer tepkimeler ile yanma tamamlandığı zaman, yakıt kalmadığı için, bir süpernova oluşur. Kritik kütleyi aşan yıldız, kendi merkezine doğru çökme eğilimine girer. Çökme sonlanana kadar ki aşamaya kadar yüzeyde kütle-çekim etkisi de artmaya devam eder. Bu gravitasyonel etki öyle bir limite gelir ki, bir süre sonra ışık bile bu etkiden kaçamaz. Işık dahi kaçamayacağından, olay ufkuna giren gök cisimlerini içine alarak veya diğer kara deliklerle birleşerek büyümeye devam ederler. Kütle miktarına bağlı olarak belli bir zaman sonra büyük bir patlama ile yok olurlar. Kara delikler için kritik kütle sınırı; $M = 3M_{\odot}$ 'dir. Fakat, bir yıldızın çökmesi sonucu değil de madde ve enerji yoğunluğunun olağanüstü yüksek düzeyde bulunduğu, evrenin büyük patlamayı izleyen en erken çağlarında, homojensizliğin yol açtığı, kütlesi güneşin kütlesinden çok daha küçük kara deliklerin oluşmuş olabileceği de öngörülmüştür. Bu küçük kütleli kara delikler de mini kara delikler olarak adlandırılmıştır.

Kara deliklerin birbirleriyle ve diğer gök cisimleriyle etkileşimi, gök cisimlerinin birbirleriyle olan etkileşimlerinden çok daha etkilidir. Dolayısıyla kara deliklerin uzay-zaman dokusuna etkisi diğer gök cisimlerinden daha farklı ve fazladır. Ayrıca kara delikler; gravitasyonun tüm boyutlarda serbestçe hareket edebilen bir uzay-zaman dinamiği olması özelliğinden hareketle, gravitasyonun ekstra boyutlarda davranışını araştırarak, ekstra boyutların fiziksel imzalarını 4 boyutlu dünyamızda ele alabilmemize imkan sağlaması açısından, vazgeçilmez bir role sahiptir.

Aslında kara delikler doğrudan Einstein'ın Genel Rölativite Teorisi'nin ortaya koyduğu bir şey değildir. Karadelik, kavram olarak ilk kez 1967'de "Our Universe: The Known and The Unknown" adlı makalede John Wheeler tarafından ortaya atılmıştır. Kavramın ilk olarak ortaya atıldığı tarih fikrin ortaya çıkışından neredeyse 200 yıl sonrasına denk düşmektedir. Işığı dahi çekebilecek kadar büyük olan çekim alanlarının var olabileceği fikri ilk olarak 1783 yılında John Michell tarafından ortaya atılmıştır. 1795'de ise ışığın kaçamayacağı nesnelerin mümkün olabileceği, Laplace tarafından Newton tanecik teorisi çerçevesinde ortaya konmuştur. Kara delik terimi ise; Amerikalı fizikçi Kip Thorne tarafından ortaya atılmıştır. Bu terimin

terminolojiye yerleşmesinden önce ise karadelikler için "Schwarzschild cismi" ve "kapalı yıldız" terimleri kullanılmıştır.



Şekil 2.1: Kara deliklerin ve diğer gök cisimlerinin uzay-zaman yapısına etkileri [1].

Kara delikler "gravitasyonel tekilik" dediğimiz bir noktaya yoğunlaşmış olağanüstü kütleden oluşur. Kara delikler fiziğin temel yasalarına, örneğin enerji korunum yasasına ve evrenin toplam entropisinin zaman geçtikçe her zaman arttığını belirten, termodinamiğin 2. yasasına uyarlar. Tekillikleri dolayısıyla, üç boyutlu olmadıkları, sıfır hacimli oldukları kabul edilir ve bu noktada uzay-zaman bükümü sonsuzdur. Dolayısıyla olay ufkunun başlangıcını referans alarak, kara delik sınırları dahilinde fizik yasalarından söz edilemez. Genel Rölativite Teorisi klasik teoridir ve olay ufkunun altında, tekilik söz konusu olduğunda geçersizdir. Günümüzde de gravitasyonun kuantum teorisi henüz bilinmemektedir.

Kara deliğin olay ufkuna giren şey, dönmeye zorlanır ve böylece kara deliğin çevresinde bir madde akışı gerçekleşir. Bunun sonucunda da kara deliğin etrafında "kütle aktarım disk" dediğimiz bir disk meydana gelir. Maddenin dönüş hızının büyüklüğünden dolayı maddenin sıcaklığı diskin iç bölgelerinde çok büyük bir sıcaklığa ulaşır. Bunun sonucunda ise X-ışınları şeklinde kuvvetli bir radyasyon ortaya çıkar. Bundan dolayı kara delikler X-ışını kaynakları olarak da bilinir. Kara deliklerin olay ufku sınırı ötesinde neler olduğu hala bilinmese de, kara delik bölgesinin matematiksel yapısı ve özellikleri hakkındaki bilimiz giderek artmaktadır. Bunda gelişen teknoloji sonucunda yapılan gözlemlerin katkısı büyüktür.

Kara delik çözümleri; Einstein alan denklemlerinin $\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \right]$ [9], çözümlerinin tartışılmaya başlanmasıyla elde edilmiştir. Bunlardan ilki ve Einstein denklemlerinin en basit ve en kullanışlı çözümü olan ise Alman fizikçi Karl Schwarzschild tarafından 22 Aralık 1915 tarihinde elde edilmiştir.

2.1.1. Kara Deliklerin Sınıflandırılması

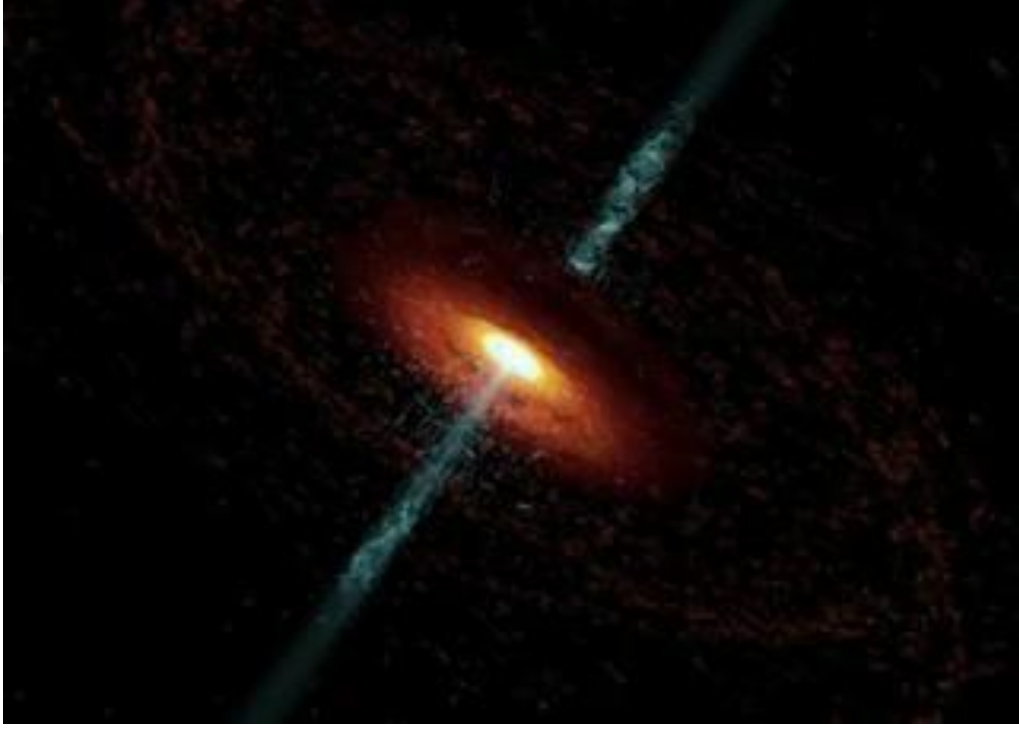
- i) **İlksel (Primordial) Kara Delikler:** Çok küçük boyutlarda olan bu kara delikler; “mikro kara delikler” veya “kuantum kara delikleri” olarak da bilinirler. İlksel denmesinin sebebi ise, büyük patlama sonrasında oluştuklarının sanılmasındandır.
- ii) **Orta Kara Delikler:** Yakın zamanlarda keşfedilmiş olup, $100 M_{\odot}$ ile $10.000 M_{\odot}$ aralığında değişen kütlelere sahiplerdir.
- iii) **Yıldızsal Kara Delikler:** Bir yıldız kalıntısının gravitasyonel çekim alanının etkisi ile içe çökmesinin ardından oluşan kara deliklerdir.
- iv) **Dev Kara Delikler:** Yaklaşık $10^6 M_{\odot}$ ile $10^7 M_{\odot}$ aralığında bir kütleye sahiptirler ve X-ışınımına sebep olurlar. İçerisinde bulunduğumuz Samanyolu galaksisinin çekirdeğinde de böyle bir kara delik bulunmaktadır.

2.1.2. Kara Deliklerin Gözlenmesi

Kara deliklerin gözlenmesi, ilk kez Uhuru uydusu tarafından 1971 yılında Samanyolu galaksimizde meydana gelmiştir. Bu da gezegenimizden 6.000 IY (1 IY= 9 460 730 472 580 KM) uzaklıkta olan ve saniyede 800 kez dönen $15M_{\odot}$ olan Cygnus X-1 kara deliğidir. Günümüzde varlığı bilinen kara deliklerin sayısı 35’e ulaşmıştır. Hali hazırda varlığından şüphelenilen 100’e yakın kara delik bulunmaktadır. Bunlardan bize en yakın olanı ise 2800 IY uzaklıktadır.

Kara delikler; etraflarında bulunan cisimler üzerindeki gravitasyonel etkileri, o cisimlerle etkileşimleri, X-ışını ışımaları, gravitasyonel dalga yayılımları aracılığıyla ya da çeşitli dalga boylarının kullanılması gibi dolaylı gözlem teknikleri sayesinde gözlemlenebilirler.

Buna ek olarak, kara delikler bir maddeyi yuttuktan sonra meydana gelebilecek aşırı madde emilimi durumunda, bu maddenin bir kısmını; elektron ve proton gibi parçacıklardan oluşan, ışık hızına çok yakın olan ve de genellikle kara deliklerin kuzey ve güney kutup bölgelerinden çıkan, kara delik jetleri dediğimiz bir yapıyla uzaya püskürtür. Bu da kara delikleri gözlememizi sağlayan bir diğer durumdur.



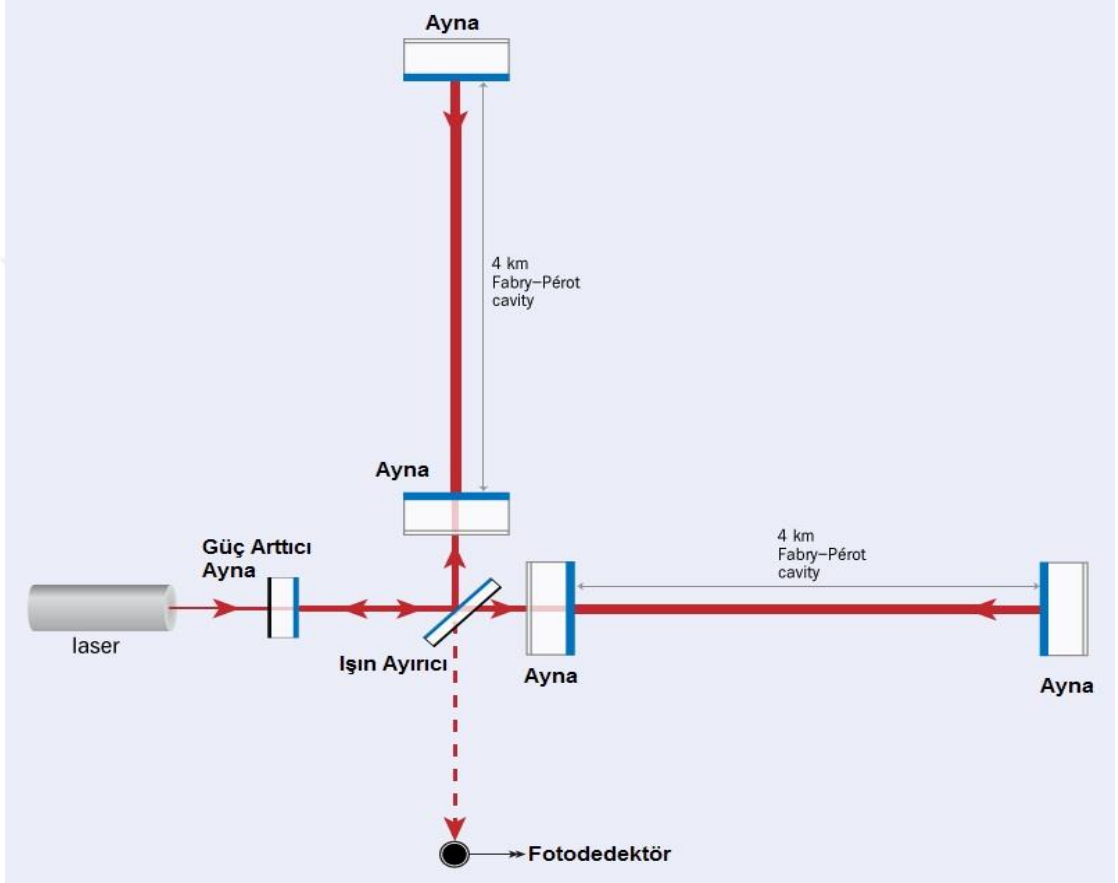
Şekil 2.2: Kara delik jeti.

Başka bir gözlem çeşidi ise; LIGO deneyidir. LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) 1992 yılında Caltech (California Institute of Technology-Kaliforniya Teknoloji Enstitüsü) ve MIT (Massachusetts Institute of Technology-Massachusetts Teknoloji Enstitüsü) ortaklığı ile kütle çekim dalgalarını gözlemleyebilmek için kurulmuş bir deney düzeneğidir.

LIGO deney sahası, her biri 4 km uzunluğunda, birbirine dik L şeklinde iki lazer demeti hattına sahiptir. Bu hatlar içerisindeki lazer demetleri, ileri ve geri yansırarak sürekli bir salınım halindedirler. Gravitasyonel dalga'nın iki lazer demeti hattından biri yönünde gelmesi, o kolun boyutunu değiştirmektedir, yani geldiği doğrultuda uzayı bükmemektedir. Deney düzeneği o kadar hassastır ki, bir atomun çapının milyarda birinden daha kısa olan uzunluk değişimleri ölçülebilmektedir. Bu deneyde gözlemlenen iki kara deliğin çarpışması sonucunda uzay-

zamanda meydana gelen gravitasyonel dalgalar sayesinde kara deliklerin varlıkları da bir kez daha gözlemlenmiş olmaktadır (2016).

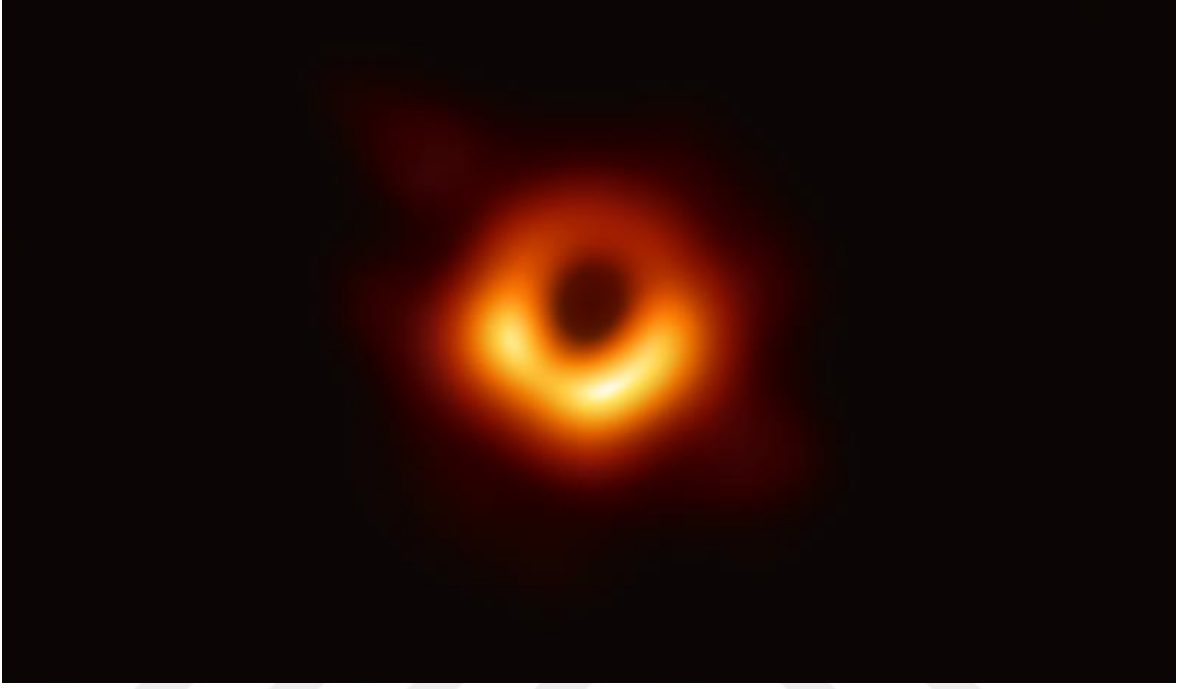
Gözlemlenen dalganın kaynağı olarak 1.3 Milyar IY ötede, her biri yaklaşık 150 km çapında ve $30M_{\odot}$ kütleyle sahip olan iki kara delik olarak belirlenmiştir.



Şekil 2.3: LIGO deney düzeneği.

Ayrıca; bu tezin yazım aşaması sürecinde (2019) tarihte ilk kez bir kara deliğin görüntüsü alınmıştır. Bu görüntü, Dünya'dan 55 milyon ışık yılı uzaklıkta eliptik bir galaksi olan Messier 87'nin ortasındaki süper kütleli kara deliğin gölgesini göstermektedir. Bu kara delik Güneş kütesinin 6.5 milyar katıdır. Görüntü; dünyada sekiz farklı yere konumlandırılmış olan radyo teleskopları dizisinden oluşan, "Event Horizon Teleskop" olarak adlandırılan proje kapsamında elde edilmiştir. Bu radyo teleskopları 4 kıtaya dağılmış, 6 dağ üzerinde bulunan 8 gözlemevinde bulunmaktadır. 8 farklı radyo teleskopundan gelen veriler, tek tek ve bir bütün olarak işlenerek tekil bir görüntü şeklinde bizlere ulaştırılmıştır. Fotoğrafi oluşturmak için gözle görünür dalga boyu değil de radyo dalgaları kullanıldığından dolayı verilerde aslında renk bilgisi

bulunmamaktadır. Kara deliğin etrafında farklı kısımlarda tespit edilen daha az veya daha fazla ışımalardan ötürü araştırmacılar bu farklı ışıma miktarlarına; sarı, kırmızı ve turuncu tonlarını atayarak bizlere ulaştırdıkları görüntüyü elde etmişlerdir [6].



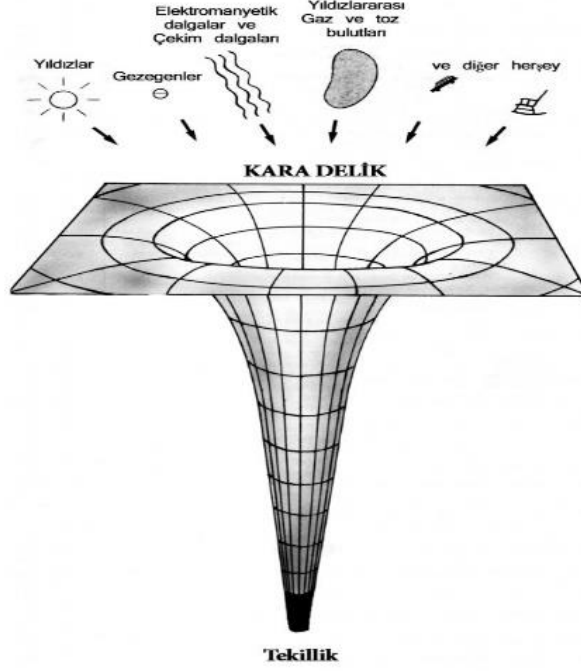
Şekil 2.4: Elde edilen kara delik görüntüsü [6].

2.1.3. Olay Ufku Ve Tekillik

Olay ufku; kara deliklerde ışık ve maddenin gravitasyonel çekimden artık kaçamayacağı bölgenin başlangıcıdır. Olay ufkunun şekli daima küresele yakındır. Dönmeyen sabit kara deliklerin şekilleri ise kusursuz olarak küreseldir. Kara deliğin olay ufku, kritik yarıçapı veya Schwarzschild yarıçapı (r_g) olarak bilinmektedir, yani olay ufku başlangıç referansı r_g yarıçapıdır ve kara deliğin kütlesiyle doğru orantılıdır. Bu yarıçap aynı zamanda bir kara deliğin yarıçapıdır. Olay ufkuna yaklaşan dolayısıyla kara deliğe düşen bir gözlemci için gravitasyon etkisi ve zamanın akışı; olay ufkundan uzaktaki bir gözlemciye göre çok farklı hissedilecektir. Bir cisim r_g bölgesine girdiği an zamanın akışı durur. Dünyada bulunan bir gözlemciye göre ise cisim r_g yarıçapına yaklaştıkça öyle yavaşlar ki, 1 cm daha ilerlemesi için milyonlarca yıl cismin hareketine devam etmesi gerektiği sonucuna varılır. Gravitasyonel kırmızıya kayma da zamanın yavaşlamasının bir işaretidir. Gravitasyon alanın şiddeti arttıkça, cisimden yayılan

sinyalin frekansı düşer (dalga boyu artar) ve kırmızıya kayma görülür. Cisim r_g bölgesine vardığında zamanın akışı tamamen durur ve kırmızıya kaymanın değeri sonsuz olur.

Olay ufku koni şeklinde düşünülecek olursa, koninin geniş ağız kısmı olay ufkunu temsil ederken en uçtaki sivri yere de tekilik noktası denir. Tekilik; madde yoğunluğu ya da gravitasyonel alan gibi temel fiziksel niceliklerin sonsuz değerler almasından dolayı fizik yasalarının matematiksel tanımlarının geçerliliklerini kaybettikleri uzay-zamanın bazı bölgeleridir. Schwarzschild geometrisinde jeodezikler incelendiğinde; bir cisim r_g yarıçapına yaklaştığı zaman onun hızını ölçen yerel gözlemci cismin hızının ışığın boşluktaki hızına yaklaştığını görür. Aynı gözlemci cismin hızını r_g yarıçapında ışığın hızına eşit görür. Bu cisim r_g sınırını geçerek $r = 0$ noktasına gelene kadar ki süreçte hiçbir farklılık gözlemler. Dolayısıyla r_g bölgesinde hiçbir fiziksel tekilik yokken, $r = 0$ noktasında fiziksel niteliklerin sonsuz olduğu tekilik söz konusudur. Fiziksel tekilliğin söz konusu olduğu durumlarda, fizik kavramları ve yasaları, geçersiz ve anlamsız kalır. Schwarzschild çözümünde $r = r_g$ bölgesi fiziksel tekilik değildir, o bölge için kullanılan küresel koordinatlardan meydana gelen bir durumdur ve gerekli koordinat dönüşümleriyle bu tekilik yok edilebilir. Kara deliğin tekilliğine yaklaşan bir gözlemciyi etkilemeye başlayan etkilere “gelgit etkileri” denir. Bu etkiler, gravitasyon alanının homojen olmayan bir yapıya sahip olması nedeniyle nesnenin doğal biçimini kaybetmesine yol açarlar. Gelgit etkileri bölgesi; dev karadeliiklerde tümüyle olay ufkunda yer alır, fakat özellikle “yıldızsal kara deliklerde” olay ufkunun sınırını da aşmaktadırlar. Dolayısıyla yıldızsal kara deliğe yaklaşan bir astronot daha olay ufkuna geçmeden parçalanacakken, dev kara deliğe yaklaşan bir astronot, daha sonra “gelgit etkileri” ile yok edilecek olmakla birlikte olay ufkuna bir güçlkle karşılaşmadan giriş yapacaktır.



Şekil 2.5: Kara delik tekil noktası.

2.1.4. Kara Delik Türleri

Kara delikler yük, açısal momentum, kütle parametreleri baz alınarak, 4 farklı türde incelenmektedir. Bunlardan kütle parametresi, karadeliğin uzay-zamanını tanımlayan metrik üzerinde bir değişime yol açmayacağı için geriye kalan 2 parametre ile kara delikler farklılık göstermektedir. Başka bir deyişle; kara deliğin kütlesine oranla bir kütle çekim alanı ve elektriksel yüküne oranla da bir elektrik alanı vardır. Bir kara deliğin kütlesi her zaman sıfırdan büyük olacağından dolayı tür farklılıkları yük ve açısal momentum parametrelerine bağlı olarak gruplandırılmaktadır. Bu parametrelere göre kara delik türleri; durağan yüksüz, durağan yüklü, dönen yüksüz ve dönen yüklü şeklindedir.

1. **Schwarzschild Kara Deliği:** Açısal momentumu ve elektriksel yükü sıfır olan kara deliklerdir.
2. **Reissner-Nordström Kara Deliği:** Açısal momentumu sıfır olup, elektriksel yüke sahip olan kara deliklerdir. Doğada bulunma olasılığı pek bulunmayan teorik bir kara deliktir. Çünkü bilinen hiçbir süreç böyle sürekli bir elektriksel yük içeren sıkışmış bir cisim

retme olanağı vermez. Bu elektriksel yük de kara deliğin çevresinden alacağı zıt elektrik yüklerinin emilmesiyle zamanla dağılabilir.

3. **Kerr Kara Deliği:** Elektriksel yükü sıfır olup, açısal momentuma sahip olan kara deliklerdir. Bu kara delik türü tezin ilerleyen bölümünde daha da fazla ayrıntılandırılacaktır.
4. **Kerr-Newman Kara Deliği:** Elektriksel yüke ve açısal momentuma sahip olan kara deliklerdir. Bu türün de var olma olasılığı çok zayıftır.

2.1.5. Kara Delik Işıması Olayı

Hawking 1974 yılında, Hawking ışıması olarak bilinen, kara deliklerin küçük miktarlarda da olsa termal ışımlar yaydığı teorisini ortaya atmıştır. Kuantum alan teorisini uygulayarak ortaya attığı bu teori ile de bir kara deliğin zamanla yok olacağı sonucu da ortaya atılmış oldu.

Evrenin her köşesinde (kara delikler hariç) her saniye sonsuz tane madde, anti-madde parçacıkları oluşmaktadır ve saliseler içerisinde tekrar birleşerek birbirlerini yok etmektedirler. Kara deliğin çevresinde bu durum gerçekleştiğinde ise çekim gücü nedeniyle negatif yüklü parçacığın, yani anti-madde parçacıklarının kara deliğin içine çekildiği; pozitif yüklü parçacıkların ise o bölgeden hemen uzaklaşıp kaçtığı düşünülmektedir. Bu düşünceye dayanarak, kara deliğin dönme enerjisinin azalması sonucunu doğuran Penrose sürecine bağlı olarak Kerr kara deliği, Schwarzschild kara deliğine evrilmektedir. Açısal momentum sıfıra indirgenmiş olsa bile, bu durumda kararlı bir hal olmayacağı ve ısı emisyona kara delikten sürekli parçacık yayınlanmasının devam edeceği Hawking tarafından gösterilmiştir. Penrose sürecine ve Hawking emisyonuna bağlı olarak kara deliğin sürekli kütle-enerji kaybetmesi durumuna ise kara deliğin buharlaşması denilmektedir. Isıl emisyonla buharlaşan kara deliklerin sıcaklıkları kütleleriyle ters orantılıdır. Dolayısıyla daha sıcak olan küçük kütleli kara delikler daha fazla parçacık yayınlayarak kütle ve enerji kaybederek hızla küçülecek ve bir patlamayla varlığı son bulacaktır [1-5], [7].

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. KARA DELİK ALANINDA HAREKET PROBLEMİ

3.1.1. Hamilton-Jacobi Yöntemi

Bütün kanonik koordinatların kanonik dönüşümler aracılığıyla dönüştürülebilmesi, ilk defa Jacobi tarafından düşünülmüştür. Bugün temelinde bu amaç yatan yapı Hamilton-Jacobi teorisi ve kullanılan yöntem de Hamilton-Jacobi yöntemi olarak bilinmektedir. Hamilton-Jacobi yönteminin ana fikri, dönüşümden sonraki Hamilton fonksiyonu K 'yı sıfır yaparak, bütün kanonik koordinatları kendiliğinden dönüşebilir duruma getirmektir. Kanonik dönüşüm sonucunda elde edilen yeni Hamilton fonksiyonunun sıfır olması bize;

$$K = 0 = H(q; P; t) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3.1)$$

ifadesini verir. Bu eşitliğe, dönüşüm ve ters dönüşümü belirleyen, dönüşümün doğurgan F fonksiyonunu belirleyen diferansiyel denklem gözüyle bakarsak, ya Hamilton fonksiyonundaki genelleştirilmiş P_i momentumlarının yerine F fonksiyonunun genelleştirilmiş q_i koordinatlarına göre kısmi türevlerini ya da Hamilton fonksiyonundaki genelleştirilmiş q_i koordinatların yerine F fonksiyonunun genelleştirilmiş P_i momentumlarına göre kısmi türevlerini getirmeliyiz. Birinci durumda F fonksiyonuna bağlı bulunduğu temel değişkenler arasında q_i koordinatları; ikinci durumdaysa F fonksiyonunun bağlı bulunduğu temel değişkenler arasında P_i koordinatları bulunmalıdır. Birinci durum F_2 ve ikinci durum F_3 doğurgan fonksiyonlarının kullanılması sonucunda ortaya çıkar. Burada daha yaygın olarak tercih edilen F_2 fonksiyonu kullanılmaktadır.

$n + 1$ değişkene bağlı olan F_2 fonksiyonunun uyduğu denklem;

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q_1, \dots, q_n; \beta_1, \dots, \beta_2; t) = 0 \quad (3.2)$$

şeklindedir. Bu denklem **Hamilton-Jacobi** denklemi olarak isimlendirilir. F_2 fonksiyonunun anlamına bakılacak olursa;

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \sum_i P_i \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (3.3)$$

ve bu Hamilton-Jacobi denkleminin verdiği değer kullanılacak olursa;

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \sum_i P_i \dot{q}_i - H(q; P; t) \quad (3.4)$$

olur. Bu denklem de Hamilton fonksiyonunun Lagrange fonksiyonu cinsinden tanımından yararlanılarak;

$$\frac{dF_2}{dt} = \mathcal{L}(q; \dot{q}; t) \quad (3.5)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitliğe göre de;

$$F_2 = \int \mathcal{L}(q; \dot{q}; t) dt + \text{sabit} \quad (3.6)$$

olduğu görülür. Literatürde F_2 yerine farklı notasyonlar kullanılmaktadır, biz bunlardan biri olan I 'yı kullanacak olursak, (3.6) denklemi;

$$I = \int \mathcal{L}(q; \dot{q}; t) dt + \text{sabit} \quad (3.7)$$

şeklinde olur.

Hamilton varyasyon ilkesi (iki nokta arasındaki varyasyon problemi); koordinatlarını $q_j(t)$ 'lerin oluşturduğu t_1 ve t_2 parametrelerine karşı düşen iki nokta arasındaki eğrinin, bu eğri boyunca $f(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)$ fonksiyonunun yol integrali ekstremum olacak şekilde belirlenmesi problemidir. Bu tanımdan da Hamilton varyasyon ilkesi anımsanacak olursa;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q; \dot{q}; t) dt = 0 \quad (3.8)$$

Lagrange denklemleri $\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \right\}$; bu ilkeden türetilmektedir.

3.1.2. Metrik Formda Hamilton-Jacobi Yöntemi

Bir kara delik alanındaki herhangi bir parçacığın hareketi için, hareket denklemleri metrik formda Hamilton-Jacobi yöntemi ile hesaplanabilir.

Hamilton fonksiyonu $q^r(\lambda)$ koordinat bileşenlerini ve $P_r(\lambda)$ kanonik momentum bileşenlerini içermek üzere; (λ burada eğrilik parametresi)

$$H(q^r, P_r) = P_r \dot{q}^r - \mathcal{L} \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır. Burada; $\dot{q}^r = \frac{\partial H}{\partial P_r}$ ve $\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial q^r}$ dir. Dolayısıyla da Hamilton'un konum ve momentum koordinatları simetriktir. Bu simetrik durum;

$$\frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^r}, \quad \frac{dq^r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_r} \quad (3.10)$$

eşitlikleriyle de gösterilebilir.

Sistemin aksiyon fonksiyonu; $S = S(q^r, \lambda)$ şeklinde koordinatların bir fonksiyonu olarak yazılır. Böylelikle Hamilton-Jacobi denklemi de;

$$H\left(q^r, \frac{\partial S}{\partial q^r}\right) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki S aksiyonu ile momentum terimimiz $P_r = \frac{\partial S}{\partial q^r}$ eşitliğiyle birbirine bağlıdırlar.

3.1.3. Metrik Formda Lagrange Denklemi

Lagrange fonksiyonu metrik cinsinden;

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^m}{ds} \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^m} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (3.12)$$

şeklindedir. Bu denklemin alt yapısı incelendiğinde :

Hiçbir kuvvetin etkisi altında kalmayan yani serbest bir taneciğin hareket denklemleri varyasyon ilkesi kullanılarak;

$$I = \int_{S_A}^{S_B} \mathcal{L} \left(x^n, \frac{dx^n}{ds} \right) ds = \int_{S_A}^{S_B} \mathcal{L}(x^n, u^n) ds \quad (3.13)$$

olmak üzere;

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^n} = 0 \quad (n = 0,1,2,3) \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır. Burada $\dot{x}^n$; 4-hız vektörünü temsil eder. Burada 4-hız vektörünün, $u^n u_n = g_{kn} u^k u^n = 1$ olduğu dikkate alınır;

$$I = \int_{S_A}^{S_B} \sqrt{g_{kn} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^n}{ds}} ds \quad (3.15)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Buradan Lagrange fonksiyonu $\mathcal{L} = \sqrt{g_{kn} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^n}{ds}}$ şeklinde olduğu görülür.

Jeodezik Denklemi; GRT’de, serbest bir tanecik o uzayın jeodezikleri boyunca hareket eder, jeodezik denklemi ise;

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (3.16)$$

şeklindedir.

3.1.4. Uzay-Zaman Yapısının Tasviri ve Boyer-Lindquist Koordinatları

Uzay-zamanın yapısını metrik aracılığıyla tasvir edebiliriz. Metrik; GRT’de noktalar arasındaki uzaklığın bir ölçüsüdür. World-line denilen ve metrik cinsinden ifade edilen yay elemanı ise uzay-zamanın yapısını ve geometrisini belirler. Yay elemanı; geometride sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesi şeklinde ifade edilen ve uzay-zamanın yapısını belirleyen bir ölçektir ve $g_{\mu\nu}$ cinsinden ifade edildiğinden çoğu zaman metrik diye adlandırılır. Düz uzayda metrik ifadesi; $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, eğri uzayda ise; $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ($\mu, \nu = 0,1,2,3$) şeklinde tanımlanır.

Tensörler; Riemann uzayında vektörlerin yerini alan, doğrultu, yön ve büyüklüğe bakılmaksızın belli bir dönüşüme göre dönüşen, hareketi belirlemenin alfabesi olan koordinatlardan bağımsız matematiksel ifadelerdir. Tensör dönüşümleri ise; sonlu, tek değerli, sürekli, sürekli türevlere sahip, Jakobiyeni sıfırdan farklı dönüşümlerdir. $g_{\mu\nu}$ metrik tensörüdür ve tüm koordinat sistemlerinde invarianttır. Hesaplamalarımız için invariantlık özelliği büyük önem

taşımaktadır. $g_{\mu\nu}$ metrik tensörü uzayın geometrisini tasvir eder ve $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$ ve $A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$ ifadelerinden de görüldüğü üzere alt indisi üst indise, üst indisi alt indise getirir.

Christoffel sembolünün ise metrik tansör cinsinden ifadesi

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha x}(g_{\beta x,\alpha} + g_{\gamma x,\beta} - g_{\beta\gamma,x}) \quad (3.17)$$

şeklindedir. $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ eşitliğinden de görüldüğü gibi Christoffel sembolleri simetriktir.

Tezimizde de sırasıyla; Kerr-Brane-World, Kerr-Kaluza-Klein ve Kerr-Sen metriklerini inceleyeceğiz. Bu incelemelerde tekillik probleminden kurtulmak için Boyer-Lindquist koordinatları kullanılacaktır. Bu koordinatlar 1967 yılında Robert Boyer ve Richard Lindquist tarafından türetilmiş, Kerr kara deliklerini tasvir eden koordinatlardır ve Schwarzschild koordinatlarının genelleştirilmiş halleridirler.

Kartezyen koordinatlar (x, y, z) ile Boyer-Lindquist koordinatlar (r, θ, ϕ) arasındaki dönüşüm;

$$x = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\cos\phi \quad (3.18)$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\sin\phi \quad (3.19)$$

$$z = r\cos\theta \quad (3.20)$$

şeklindedir. En genel haliyle Boyer-Lindquist koordinatlarıyla yazılan bir metrik, M kütle, J açısal momentum ve Q yük olmak üzere, $G = c = 1$ alınan bir sistemde:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (3.21)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta \quad (3.22)$$

$$a = J/M \quad (3.23)$$

olmak üzere;

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}[(r^2 + a^2)d\phi - adt]^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (3.24)$$

olur.

Eğer $a = 0$ olursa metrik; (3.24) ifadesi Schwarzschild metriği halini alır. $J = 0$, $M = 0$ ve $a \neq 0$ olarak alınırsa, Boyer-Lindquist koordinatlarda metrik;

$$ds^2 = -dt^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{dr^2}{r^2 + a^2} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.25)$$

halini alır.

3.1.5. Killing Vektörleri

Kerr metriği zamandan bağımsız ve eksenel simetriktir. Bu simetri dönüşümleri; $\xi_{(t)}^\mu$, zamansal ve $\xi_{(\phi)}$, eksensel Killing vektörleriyle ifade edilir. Killing vektörleri simetri generatörleridir, bu simetriler altındaki dönüşümler metriği değiştirmez, bunlara uzay-zamanın izometrilere denir. Killing vektör seçimi; $\xi_{(t)}^\mu = \delta_{(t)}^\mu$ ve $\xi_{(\phi)}^\mu = \delta_{(\phi)}^\mu$ şeklindedir ve bir metrik hangi koordinattan bağımsız ise o yönde bir Killing vektörü vardır. Killing vektörleri;

$$\xi_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_{(\phi)} = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.26)$$

$$\xi_{(t)} = \xi_{(t)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_{(t)}^\mu = \{1, 0, 0, 0\}, \quad \{\mu = 0, 1, 2, 3\} \quad (3.27)$$

$$\xi_{(\phi)} = \xi_{(\phi)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \xi_{(\phi)}^\mu = \{0, 0, 0, 1\} \quad (3.28)$$

ve Killing denklemi ise,

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \quad (3.29)$$

şeklindedir.

Kerr metriği katsayıları; g_{tt} , $g_{t\phi}$ ve $g_{\phi\phi}$ Killing vektörleri cinsinden sırasıyla; $\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)}$, $\xi_{(t)} \cdot \xi_{(\phi)}$ ve $\xi_{(\phi)} \cdot \xi_{(\phi)}$ şeklinde bulunur ve

$$\xi_{(t)} = g_{tt} \delta_\mu^t + g_{t\phi} \delta_\mu^\phi \quad (3.30)$$

$$\xi_{(\phi)} = -(g_{\phi\phi} \delta_\mu^\phi + g_{t\phi} \delta_\mu^t) \quad (3.31)$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Killing vektör alanı; kara delikten sonsuz uzakta, Kerr metriğini, zamandan bağımsız olmasından dolayı, Lorentz koordinat sisteminin zaman çizgileri boyunca yönlendireceği şekilde seçilir. Kara delikten uzak mesafelerde simetri eksenini etrafındaki uzay bölge kesitinde ($r \rightarrow \infty$), herhangi bir dönüşüm olmamasına karşılık gelen bir Killing vektörü ortaya koyulur.

$$k^2 = g_{00} = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \quad (3.32)$$

şeklindeki Killing vektör alanı ele alındığında bu vektör alanı;

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr > 0 \quad (3.33)$$

koşulu sağlandığında zamansal,

$$r_+ < r < M + \sqrt{M^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.34)$$

sınırları çerçevesinde ise uzaysal olur. Yani, ergosfer denilen bölgeye karşı düşer.

Killing vektör alanı ile tasvir edilen simetriye sahip bir geometride; “herhangi bir jeodezik boyunca göz önüne alınan hareket, jeodeziğin hareketi ile Killing vektörünün skaler çarpımını sabit bırakır”, teoremi geçerlidir. Yani;

$$P_\mu \cdot \xi_{(t)}^\mu = \text{sabit} \quad (3.35)$$

ifadesi bir hareket sabiti tanımlamaktadır. Buna göre, Killing vektörleri aracılığıyla, $G = c = 1$ alındığında;

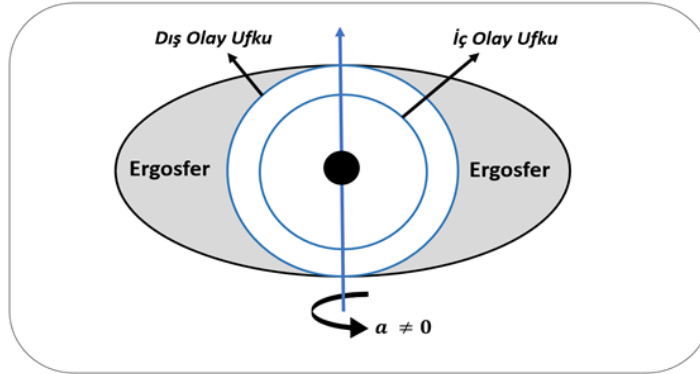
$$P_t = \vec{P} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = E \quad (3.36)$$

$$P_\phi = \vec{P} \cdot \vec{\xi}_{(\phi)} = -L_z \quad (3.37)$$

olacağı, yani eksenel simetrik, stasyoner alandaki bir hareketin hareket sabitlerinin, taneciğin enerjisi ile açısal momentumunun kara deliğin dönme eksenini doğrultusundaki bileşeni olduğu görülür [8-11].

3.2. KERR UZAY-ZAMANI

1963 yılında Yeni Zelandalı matematikçi Roy Kerr, GRT’de Einstein alan denklemlerinin, dönen kara delikler için kesin çözümünü bulmuştur. Kerr çözümü iki fiziksel nitelik olan; kütle ve açısal momentumu içermektedir. Kerr çözümü, Schwarzschild çözümünün genelleştirilmiş hali olup, dönen bir kütlenin dışındaki gravitasyonel alanı tasvir etmektedir. Ayrıca Kerr kara delikleri en genel kara delik çözümü olmasından dolayı da yüksek boyutlu GRT için oldukça önemlidir. Kerr çözümünün, yani dönen kara deliklerin bir diğer önemli özelliği ise, çevrelerinde olay ufkundan önce bir limit yüzeyi olan ergosfere sahip olmasıdır. Ergosfer; durağan bir limit yüzeyidir ve bu yüzeyin ilerisinde kara deliğin dönüş yönünün tersine hareket eden bir tanecik bulunması mümkün değildir. Schwarzschild çözümündeki ufuk yüzeyinden farklı olarak ergosfer bölgesinde bulunan cismin dış dünyayla iletişimi vardır. 1969 yılında İngiliz fizikçi Roger Penrose, ergosfere düşen bir cismin herhangi bir sebeple iki parçaya ayrılırsa, bu parçalardan birinin ufku geçip yok olurken diğer parçanın ise dış dünyaya enerji kazancı ile geri döneceğini göstermiştir. Bu durumda dönme enerjilerini cisme aktardıkları için kara deliklerin dönmesi yavaşlayacaktır. Ergosferin yapısının daireden elips şekline dönmesine sebep olan şey ise karadeliğin dönüş hızıdır. Kara delik ne kadar hızlı dönerse, elips o kadar basık hale gelir. Burada, GRT’de hiçbir nesnenin kütlesini aşan dönme parametresine sahip olamayacağını ve dönme parametresi için her zaman somut bir üst sınır olacağını belirtmek gerekir ($a \leq M$). Öte yandan açısal momentum parametresi a değeri arttıkça da kesit elipsinin basıklık parametresi (eksentiritesi; e) artar. Ergosfer içine giren cisim uzay-zamanda sürüklenir. Örneğin; bir foton kara deliğe dönüş yönünün tersi yörüngeye girerse Dış Olay Ufkuna, dönüş yönü ile aynı yörüngeye girerse İç Olay Ufkuna oturur.



Şekil 3.1: Kerr kara deliğinin ergosfer bölgesi.

Kerr metriği en genel haliyle Boyer-Lindquist koordinatlarda;

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2 \text{ ve } \Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.38)$$

olmak üzere,

$$ds^2 = -dt^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2 \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlanır. Δ ve Σ özdeşlikleri sıfır olduğunda metrik bileşenleri ya sıfır olur ya da belirsiz hale gelir.

Kovaryant metrik bileşenleri;

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}) & 0 & 0 & -\frac{2Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{2Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta & 0 & 0 & -(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

şeklindeki metrik formda yazılırken, metriğin kontravaryant bileşenleri de; $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$

olduğundan,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Sigma\Delta} [(r^2 + a^2)^2 + a^2 \sin^2 \theta \Delta] & 0 & 0 & -\frac{2Mr}{\Sigma\Delta} a \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{2Mr}{\Delta\Sigma} a & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

matris biçimde yazılır.

Köşegen bir matrisin varlığında söz konusu matrisin tersi, elemanlarının bölme işlemine göre tersidir. Fakat karmaşık metrikler için matrisin tersini alma işlemi biraz daha karmaşıktır.

İlk önce, genel ve eksenal simetrik biçimde yazacağımız metriğin tersini elde edelim. Metrik;

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2 g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 \quad (3.42)$$

şeklindedir.

Köşegen olmayan elemanlar için kovaryant metrik matrisi,

$$\begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

şeklinde yazılır. Determinantı hesaplandığında;

$$D = g_{tt} g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2 \quad (3.44)$$

eşitliği elde edilir.

Matrisin tersi de,

$$\frac{1}{D} \begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & -g_{t\phi} \\ -g_{t\phi} & g_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{tt} & g^{t\phi} \\ g^{\phi t} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

matrisi biçiminde elde edilir.

$r = r_\infty$ yüzeyi üzerinde $g_{00} = 0$ olduğundan herhangi bir tanecik için $ds^2 = 0$ olacak, yani taneciğin ışık hızıyla hareket etmekte olduğu gibi fizik kurallarının alışılacağı dışında bir sonuç ortaya çıkacaktır.

Kerr metriği incelendiğinde Δ ve Σ sıfır olduğunda metrik tekil hale gelir. $\Sigma = 0$ durumunda yüzey boyunca tekilliğin tek eğri tekillik olduğu gözlenir. $\Delta = 0$ durumunda ise Kerr metriğinin bir koordinat tekilliği olduğunu göstermektedir. Radyal bileşeni sıfır yapan değer; $g^{11} = g^{rr} = 0$ kara delik alanında hareket için olay ufku dediğimiz bir radyal sınır oluşturur. Başka bir yaklaşım olan açısal hız ile de Kerr metriğinde olay ufkunun varlığına bakılabilir. Kerr metriğinin koordinatlarına bağlı açısal hız ifadesi;

$$\Omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a(r^2 + a^2 - \Delta)}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} \quad (3.46)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu ifade $\Delta = 0$ durumunda sonlu ve sınırlayıcı sabit bir değere yaklaşmaktadır. Bu koordinat açısal hızı; $r \rightarrow r_+$ limit durumunda

$$\Omega_H = \frac{a}{r^2 + a^2} \quad (3.47)$$

formunda ki; Kerr kara deliğinin olay ufkunun dönüş açısal hızı bulunur.

$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr = 0$ eşitliği boş bir yüzeyi tanımlar. Bu denklemin kökleri;

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.48)$$

şeklindedir.

Ergosferde; $ds^2 = 0$ durumunda,

$$0 = g_{tt} dt^2 + 2 g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 \quad (3.49)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \left[\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} \right]^{1/2} \quad (3.50)$$

elde edilir.

Eğer $g_{00} = g_{tt} = 0$ olursa, ki bu durum ergosfer bölgesini ifade eder,

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{2g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \quad (3.51)$$

şeklinde ϕ 'yi bulmamızı sağlayacak iki çözüm olur.

Ergosfer $g_{tt} = 0$ ve olay ufku $g_{rr} = \infty$ iken Kerr çözümünde; $\Delta = 0$ ve

$$r_+ = r_{horizon} = M + \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.52)$$

ve de

$$r_0 = r_{ergosfer} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.53)$$

bulunur.

r_+ ; kara delik yarıçapına karşılık gelir, nesnelerin geri dönemediği bir bölgeyi sınırlamaktadır. Dönen bir yıldız ancak $r = r_+$ yarıçapına büzülmesi halinde bir kara delik olur. $g_{00} = 0$ olduğu durum $r = r_{\infty}$ yüzeyidir ve bu yüzeyde $dr = d\phi = d\theta = 0$ 'dır. Özetle, g_{00} ; $r = r_{\infty}$ yüzeyinde sıfır, dışında pozitif içinde ise negatiftir. Ergosfer bölgesi dediğimiz bölge de; incelenen $r = r_+$ yüzeyi ile $r = r_{\infty}$ yüzeyi arasında kalan bölgedir [1, 2, 11].

3.3. KERR-BRANE-WORLD UZAY-ZAMANI

Kara delikler Brane-World'de daha yüksek boyutlu nesnelerdir. Daha yüksek boyutlarda dinamik dengesizlik, farklı ufuk topolojileri ve farklı rotasyon dinamikleri gibi beklenmeyen fiziksel özelliklere sahip birden fazla kara delik çözümü bulunmaktadır. Brane-World modellerinde, kara delikleri açıklamak için var olan birçok yaklaşımdan ilki; klasik yüksek boyutlu kara delik çözümleri üzerine kuruludur.

Temelde gravitasyonun Standart Model kuvvetlerinden daha zayıf olduğu bilinmektedir. Gravitasyon kuvveti diğer kuvvetlerin aksine, ekstra boyutların üzerine yayılmaktadır. Bu nedenle Brane-World modellerinde gravitasyon kuvvetinin davranışının keşfi, görülmeyen ekstra boyutlarla başa çıkmanın bir yolunu sağlamaktadır. Bu anlamda gravitasyonun davranışını Brane-World modellerinde araştırmak, görülmeyen ekstra boyutların 4-boyutlu dünyamızda fiziksel etkilerini ele almanın bir yolunu sağlamaktadır. Bu nedenle kara delikler önemli bir role sahiptirler.

1998 yılında ekstra boyut teorileri; Arkani-Hamed, Dimopoulos ve Dvali'nin (ADD) ekstra boyutlar için önerdikleri model doğrultusunda yön değiştirdi. ADD modelinin birincil motivasyonu; hiyerarşi sorununa olası bir çözümdür. Yani, gravitasyon ile ilişkili Planck ölçeği [$M_{pl} \sim 10^6$ TeV] ve zayıf elektrik ölçeği [$M_{ew} \sim 1$ TeV] arasındaki temel parçacık fiziğinde açıklanamayan tutarsızlığa çözüm üretmektedir.

Modelde; ekstra boyutların Planck ölçeğinde [$\sim 10^{-33}$ cm] sıkıştırılması önerilmiştir. Aslında KK modelinin genelleştirilmesi olan ADD modeli R boyutunda, düz, kompakt ekstra boyutlara sahiptir. Ancak Standart Model alanlarının sadece kütle içinde yayılan gravitasyon ve 4-boyutlu bir Brane ile sınırlı olduğunu varsaymaktadır. Brane ile sınırlama Standart Model alanlarının hiçbir KK modunun bulunmasını sağlamaz. Bu nedenle ekstra boyutların Newton yasasının deneysel olarak test edildiği ölçek kadar [$R \sim 0,1$ mm] büyük olmasına izin verilir. Standart Model alanlarının sınırlandırılması, pozitif gergin bir Brane ve AdS bulku için negatif bir kozmolojik sabit elde edilir. Brane-World modellerinde Newton gravitasyon potansiyelinin ortaya çıkan modifikasyonu; L , ekstra boyutun ölçeği olmak üzere; $r \geq L$ modellerinde $1/r^3$ mertebesindedir.

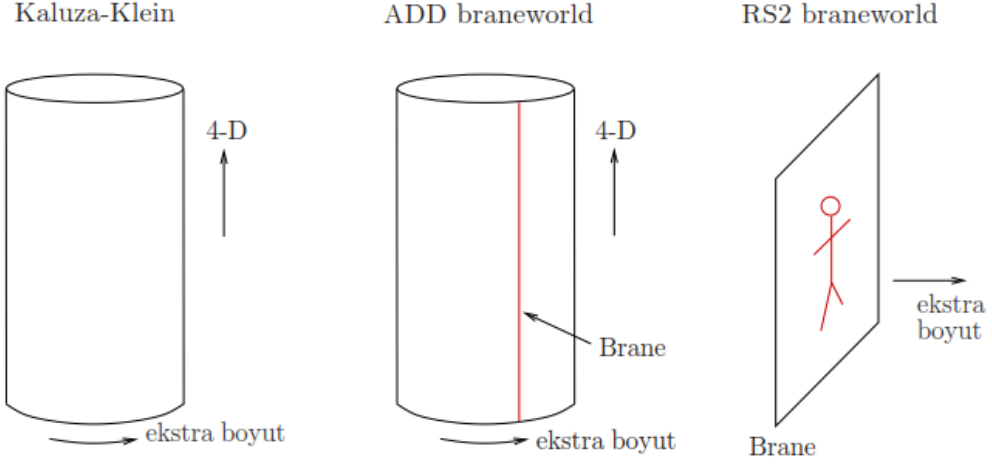
Herhangi bir alternatif gravitasyon teorisinden beklenen temel gereksinim; Newton'un gravitasyon yasasını uygun sınırdan yeniden üretmesidir. Dolayısıyla üretilen alternatif gravitasyon yasasının 5-boyutlu doğasının, bilinen 4-boyuttaki $1/r^2$ davranışından ziyade, $1/r^3$ kuvvet yasasıyla yansıtılması beklenir.

Kısa bir süre sonra da, ADD modelinin düz ekstra boyutlarından farklı olarak, Randall-Sundrum (RS) modelleri bulk geometrinin kavislenmesine izin verdi ve Brane'i bir gerilim ile donattı. Böylece Brane bulk ile dinamik olarak etkileşerek gravitasyona yol açan bir nesne haline geldi ve bu da modelleri GRT açısından daha ilginç kıldı.

Hiyerarşi sorununu çözmeye çalışan Randall-Sundrum ilk modellerinde (RSI); ekstra boyut hala kompakttır. Fakat ikinci modellerinde (RSII) sonsuz boyutlu ekstra bir boyut için bile Brane'de 4-boyutlu gravitasyonun geri kazanıldığını gösterdiler. RS modeli; tek bir Brane'in 5-boyutlu Anti de-Sitter (AdS) uzayına yerleştirilmiş halidir. Düşük enerji sınırında bu model, 4-boyutlu Einstein'ın Brane üzerindeki gravitasyon özelliklerini destekler. RSII modelinde AdS bulku sonsuz boyutta olabilir.

Randall-Sundrum makalelerinde bu durumu şöyle açıklamışlardır; “ek boyutlar mevcut gravitasyon testleriyle tutarlı olacak şekilde kompakt ve yeterince küçük oldukları sürece kabul edilebilirler. Başka bir durumsa; n ekstra kompakt boyut varsa, Planck ölçeğinin $M_{pl}^2 = M^{2+n}V_n$ eşitliğiyle daha yüksek boyutlarda gravitasyon ölçeği M ile ilişkili olmasıdır. V_n ekstra boyut hacmidir.” [15].

RSII modeli, sonsuz yani kompakt olmayan ekstra boyutta tek, pozitif, gergin bir Brane'den oluşur. Bir anlamda RSII modeli ekstra bir boyutun en basit, geometrik olarak çekici modelini sunar ve tezimizde de RS modeli ismi altında kullanacağımız modeldir.



Şekil 3.2: Ekstra boyut farkları [14].

Brane üzerinde herhangi bir yük olmamasına rağmen, yerel dönen kara delik çözümü, uzay boşluğunun gelgit etkisinden dolayı yüklü olarak ortaya çıkmaktadır. Gelgit yükünün değeri Brane-World'de sınırlı değildir, yani negatif değerlere de sahip olabilmektedir. Pozitif gelgit yüküne sahip dönen Brane-World kara deliği, kütlesini aşmayan açısıl bir momentuma sahip olmalıdır. Fakat Brane-World gravitasyonu, açısıl momentumu kütlesini aşabilen dönen bir kara deliği de kabul eder. Negatif gelgit yükü, ergosferi Brane-World kara deliğinin etrafına uzatırken, pozitif gelgit yükü onu azaltır.

Brane üzerindeki bir kara deliğin ufuk yarıçapının, ekstra boyutların boyut ölçeğinden çok daha büyük olması ($r_+ \gg L$) durumunda, kara delik daha yüksek boyutlu bir uzay-zaman hissedecektir. Bu durumda Brane-World kara delikleri yüksek boyutlu Einstein denklemlerinin klasik çözümleri ile açıklanabilir. Tersisi durumda; ufuk yarıçapının ekstra boyutların boyut ölçeğine kıyasla çok daha küçük olması ($r_+ \ll L$) durumunda, kara delik ekstra boyutlar boyunca 4-boyutlu hale gelecektir. Fakat 4-boyutlu nesnelere benzemek zorunda olsalar da ekstra boyutların izlerini taşıyacaklardır. Bu tür kara deliklerin tam açıklaması daha zordur ancak böyle bir açıklama RS Brane-World modelindeki kara delikler için mümkündür.

Boyer-Lindquist koordinatlarda Kerr-Brane-World metriği;

$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + \beta$ ve $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ olmak üzere,

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [adt - (r^2 + a^2) d\phi]^2 \quad (3.54)$$

şeklinde ifade edilir. Burada M kütle, a dönme parametresi veya birim kütle başına açısal momentumdur. $a = J/M$ ve β , kara deliğin gelgit yüküdür. Metrikteki gelgit yükü hem pozitif hem de negatif değerlere sahip olabilir.

$a = 0$ için (3.54) metriği, statik bir Brane-World kara deliği tanımlayan Reissner-Nordström tipi bir çözüme indirgenmektedir. $\beta = 0$ için ise normal Kerr çözümü elde edilmektedir.

(3.54) metriğinin olay ufku $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + \beta = 0$ denklemi tarafından belirlenmekte ve bu denklemin en büyük kökü olan $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - \beta}$; ufkun yarıçapına karşılık gelmektedir. Azami eşitliğin;

$$M^2 \geq a^2 + \beta \quad (3.55)$$

olması durumunda, r_+ denkleminde olay ufku elde edilmektedir. Bu “Kozmik Sansür” ün gereğidir. Ayrıca (3.55) ifadesi maksimum dönen bir kara deliğe karşılık gelmektedir.

Gelgit yükünün pozitif olması durumunda koşulumuz, açısal momentuma bağlı Kerr tipi çözüme yol açmaktadır. Yani, pozitif gelgit yüküne sahip Brane-World kara deliğinin kütleini aşmayan bir açısal momentuma sahip olması gerekmektedir. Bununla birlikte, negatif gelgit yükü için durum önemli ölçüde farklılık göstermektedir.

$\beta < 0$ ve $a = M$ durumuna sahip dönen bir kara delik;

$$r_+ = (M + \sqrt{-\beta}) > M \quad (3.56)$$

denklemini verir. Bu $r_+ = M$ olay ufku yarıçapına sahip maksimum dönen kara delik için açısal momentumun kütleden daha büyük olduğu anlamına gelir. Böylece Brane-World gravitasyonu, açısal momentumu kütleini aşan dönen bir kara delik kabul eder. Bu da genel görelilikte Kerr sınırını oldukça ihlal eder.

Brane-World kara deliğinin bir diğer önemli özelliği, ufukta kaybolmayan timelike Killing vektörünün $\xi_{(t)}$ normu ile ilgilidir.

$$\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)} = g_{tt} = 0 \quad (3.57)$$

denkleminde,

$$r_0 = \sqrt{M + M^2 - a^2 \cos^2 \theta - \beta} \quad (3.58)$$

elde edilir. Burada r_0 ; ergosferin kara deliğin etrafındaki sınırını tanımlayan bu denklemin en büyük köküdür. (3.58) denkleminde de görüleceği üzere; negatif gelgit yükünün ergosferi, Brane-World kara deliğinin etrafına doğru uzatırken, pozitif gelgit yükü onu azaltmaktadır.

Sınırlayıcı durumda (3.55) denkleminin (3.58) denkleminde kullanılması, ergosferin yarıçapını;

$$M < r_0 < M + \sin \theta \sqrt{M^2 - \beta} \quad (3.59)$$

aralığında vermektedir. Bunun sonucu olarak, negatif gelgit yüküne sahip Brane-World kara deliklerinin pozitif gelgit yüküne kıyasla daha enerjik nesneler olması gerekmektedir.

Sonuç olarak bir kez daha vurgulamak gerekirse; (3.54) metriğinin indüklenen metrik formunu Brane üzerine yerleştirerek elde edilebilmektedir. Bu da hacimsel olan Weyl tensörünün öngörülen elektrik parçası E_{ij} 'nin şeklini belirtir, böylece denklemin sistemini kapatır.

Henüz bazı sonuçlanmamış problemler olmasına rağmen (3.54) metriği en azından bir dereceye kadar Brane-World evrendeki dönen kara deliklerin fiziksel etkilerini anlamada özel bir öneme sahiptir [12-19].

3.4. KERR-KALUZA-KLEIN UZAY-ZAMANI

Matematiksel temeli Riemann geometrisine dayanan GRT, 4-boyutlu uzay-zamanda geliştirilmiş olup, klasik anlamda gravitasyonun en iyi teorisidir. Çünkü teorilerin çok boyutlu doğaları hem teorik güçlükler hem de gözlemsel zayıflıklar içermektedir. Diğer yandan çok yüksek enerji büyüklüklerinde gravitasyonun dinamiği kuantum nitelik taşımaktadır ve bu nedenle Genel Rölativite Teorisi'ne uymamaktadır. Yani kara deliklerin 4-boyuttaki yeganelik ve kararlılık özellikleri yüksek boyutlarda kaybolmaktadır. Çünkü boyut sayısına bağlı olarak birden fazla açısız momentum vardır. Multi-dönme dinamiği de kara deliklerin kararlılık özelliğini etkiler ve hatta kara delikleri tamamen kararsız nesneler haline getirir.

Alman matematikçi Theodor Kaluza (1919) ve İsveçli matematikçi Oscar Klein (1926)'nın orijinal çalışmalarından bu yana, çalışmalarının temel varsayımlarını esneterek, teorisinin zorluklarını gidermek için birçok girişimde bulunulmuştur. Varılan temel sonuç ise belli boşluk

için 5-boyutlu alan denklemlerinin her zaman maddeyle birlikte genel göreliliğin 4-boyutlu Einstein denklemleri olarak yeniden yazılabilmesi olmuştur.

5-boyutta Einstein denklemlerine indirgenen Kerr-Kaluza-Klein teorisi, Elektromanyetizma ve 4-boyutlu Genel Görelilik Teori'lerini, Riemann geometrisi sayesinde birleştiren, Einstein-Maxwell-Dilaton alan denklemlerini sağlayan bir teoridir.

Bilindiği üzere KKK teorisinin ön gördüğü kara delikler, Einstein'ın Genel Rölativite Teorisi ile Maxwell'in Elektromanyetik Teorisinin birleştirilmesi için gereken ek 5. uzaysal boyutun fiziksel imzasını içermektedir. Teoride yer alan yüksek boyutun kaynağı olan ek uzaysal boyut matematiksel bir araç olarak ele alınabilir. Ancak bu boyut, normal şartlar altında kendiliğinden tıkHzlaşması sebebi ile çok küçük boyutlara indirgendiği için gözlemlenemeyen gerçek bir fiziksel boyut olarak ele alınırsa gravitasyonu anlamak açısından yardımcı olur hale gelecektir.

KKK teorisinde yüksek boyutlarda evren boş olduğundan enerji-momentum tensörü $T^{\mu\nu}$ yoktur. 4-boyutta madde, 5-boyutlu geometrinin 4-boyuttaki etkileri olarak ortaya çıkar.

Boyer-Lindquist koordinatlarda $[x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, r, \theta, \phi\}]$ 5-boyutlu KKK metriği;

$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ olmak üzere;

$$ds_5^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [adt - (r^2 + a^2) d\theta]^2 + dy^2 \quad (3.60)$$

formundadır. Burada; M parametresi kütle, a parametresi ise açısal momentumu temsil etmektedir. Bu metrik,

$$ds_5^2 = e^{-2\Phi/\sqrt{3}} ds_4^2 + e^{4\Phi/\sqrt{3}} (dy + 2A)^2 \quad (3.61)$$

eşitliğindeki standart KK formu ile karşılaştırıldığında, 4-boyutlu metrik belirlenerek 5. boyutun etkisi elde edilir. Elde edilen 4-boyutlu metrik ise;

$$ds_4^2 = -\frac{1}{B} \frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \cosh \alpha \sin^2 \theta d\phi)^2 + B \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) - \frac{\Delta \sin^2 \theta}{B} \sinh^2 \alpha d\phi^2 + \frac{\sin^2 \theta}{B \Sigma} [adt - (r^2 + a^2) \cosh \alpha d\phi]^2 \quad (3.62)$$

şeklindedir. Ayrıca bu karşılaştırmada; Φ , dilaton alanı ile A bir-form potansiyel alanı;

$$B = \left(1 + \frac{2Mr \sinh^2 \alpha}{\Sigma}\right)^{1/2} \quad (3.63)$$

olmak üzere; $A = \frac{Z \sinh \alpha}{2B^2} (\cosh \alpha dt - a \sin^2 \theta \phi)$, $\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln B$ şeklinde bulunur.

Burada 4-boyuttaki metriği 5. boyuta yükseltmek için kullanılan $v = \tanh \alpha$ boost hızı kaybolduğu için, $\alpha \rightarrow 0$, Maxwell ve Dilaton alanlarının yok olduğunu ve (3.62) metriğinin orijinal Kerr çözümüne indirgendiği görülmektedir.

A ve Φ eşitlikleriyle verilen Maxwell ve Dilaton alanları ile birlikte (3.62) çözümünün; KKK teorisinin 4-boyutlu etkisinden elde edilen hareket denklemi yani, Maxwell-Dilaton alanlarına bağlı genel göreliliği tanımlayan en basit eylem ifadesi;

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2(\partial\Phi)^2 - e^{2\alpha\Phi} F^2] \quad (3.64)$$

formundadır. Burada $F = dA$ eşitliğine sahiptir. α ; eşleşme sabitidir. $\alpha = 0$ için 4-boyutta Maxwell ve skaler alanlarla olağan Einstein gravitasyonuna sahip oluruz. $\alpha = 1$ iken sicim teorisinin düşük enerji sınırındaki bir eyleme sahip oluruz. $\alpha = \sqrt{3}$ için ise (3.62) metriğinde KKK teorisinin aksiyonunu tanımlarız.

(3.62) metriğinde, uzay-zamanın izometrilere olan; $\xi_{(t)}$ ve $\xi_{(\phi)}$ Killing vektörlerini içermektedir. Bu vektörlerin;

$$\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)} = g_{00} = -\frac{1}{B} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right), \quad (3.65)$$

$$\xi_{(t)} \cdot \xi_{(\phi)} = g_{03} = -\frac{2Mr a \sin^2 \theta}{B\Sigma} \cosh \alpha, \quad (3.66)$$

$$\xi_{(\phi)} \cdot \xi_{(\phi)} = g_{33} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{B^2 \Sigma}\right) B \sin^2 \theta \quad (3.67)$$

şeklindeki farklı skaler çarpımlarıyla, metrik bileşenlerini elde edebiliriz.

Öte yandan; (3.62) metriğinde, yükseltme ve boyut küçültme işlemleri olay ufkunun yerini değiştirmez. Denklemin en büyük kökü her zaman $\Delta = 0$ tarafından belirlenir.

Toplam kütle, açısal momentum ve toplam elektrik yükü, boost hızı v cinsinden;

$$\mathcal{M} = \frac{M}{2} \left(\frac{2-v^2}{1-v^2} \right), \quad J = \frac{aM}{\sqrt{1-v^2}}, \quad Q = \frac{Mv}{1-v^2} \quad (3.68)$$

şeklinde elde edilir.

(3.62) metriğinden ve 4-lü hız vektörünün $u \cdot \xi_{(\phi)} = 0$ koşulundan, koordinat açısal hız ifadesi;

$$\Omega = -\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{2aM}{2Mr(r^2+a^2)+(1-v^2)\Delta\Sigma} \quad (3.69)$$

formunda bulunur. Büyük uzaklıklar için açısal hız ifadesi de;

$$\Omega = \frac{2aM}{r^3\sqrt{1-v^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (3.70)$$

olur.

Ayrıca olay ufkuna yaklaştıkça açısal hız artacak ve $r = r_+$ noktasında sabit değerine yaklaşacaktır. Böylece ufkun açısal hız ifadesi;

$$\Omega_+ = \frac{a}{r_+^2+a^2} \sqrt{1-v^2} \quad (3.71)$$

formunda olacaktır.

Özetle (3.62) metriği, Kerr'in genel görelilik çözümünü, 4-boyutta Maxwell ve Dilaton alanlarının görünümü ile ortaya çıkan ekstra 5. boyutun imzasını içerecek şekilde genelleştirir [20-24].

3.5. KERR-SEN UZAY-ZAMANI

Kerr-Sen kara delik çözümü, heterotik sicim teorisinin düşük enerji sınırında yüklü ve dönen bir kara delik çözümüdür. Düşük enerji sınırında, heterotik sicim için eylem, aslında 3 farklı madde alanına;

- Manyetik alan,
- Dilaton adı verilen skaler bir alan,
- Axion adı verilen sözde skaler alan

bağlı gravitasyon eylemidir. Bu nedenle karşılık gelen teori; Einstein-Maxwell Dilaton-Axion (EMDA) teorisi ismini taşır. Birleşik teorileri gerçekleştiren en umut vaat eden yollardan biri, düşük enerji sınırında EMDA gravitasyonuna indirgenmiş sicim teorisidir. Heterotik sicim teorisinin etkili teorisi olan 4-boyutlu EMDA gravitasyonundaki durağan, eksenel simetrik kara delik çözümü Sen tarafından 1992’de elde edilmiştir.

Kerr-Sen, düşük enerjili sicim teorisinde tıpkı Kerr-Newmann kara deliğindeki gibi açısal momentum, kütle ve elektrik yükü parametreleri gibi yük ile karakterize edilir ve Genel Rölativite Teorisi’ndeki Kerr çözümünün Dilaton-Axion genellemesi olarak ortaya çıkar. Bununla birlikte, Kerr-Sen kara deliğinin geometrisi, Kerr-Newmann kara deliğinin geometrisinden farklıdır. Bu düşük enerjili, heterotik sicim kara delik; sınırlı miktarda yük, açısal momentum ve manyetik dipol moment taşır.

Boyer-Lindquist koordinatlarda Kerr-Sen kara deliği metriği;

$\Delta = r(r + r_0) + a^2 - 2Mr$ ve $\Sigma = r(r + r_0) + a^2 \cos^2 \theta$, burada M ; kara delik kütlesi a açısal hız parametresi $r_0 = Q^2/M$, Q elektriksel yük olmak üzere,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \left[r(r + r_0) + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right] \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.72)$$

şeklindedir [25-36].

3.6. IŞIĞIN BÜKÜLMESİ

Einstein genel görelilik teorisini oluştururken gravitasyon alanının ışık ışını yolu üzerindeki önemli etkisini de göz önünde bulundurmıştır. Dolayısıyla ışığın sapma etkisi genel göreliliğin öngörülerinden biridir. Bu öngörü ise 1919’da Eddington’ın Güneş tutulması gözlemiyle doğrulanmıştır. Kara deliği çevreleyen güçlü gravitasyon alanının en çarpıcı sonuçlarından biri ise bu bölgeden geçen bir ışık ışını ile sonuçlanabilecek büyük ışık bükülmesidir.

GRT’de Schwarzschild metriği; yüksüz, statik bir kütlenin dışı için Einstein alan denklemlerinin çözümünü verirken, Kerr metriği yüksüz, dönen bir kütlenin dışı için Einstein alan denkleminin çözümünü vermektedir. Kerr çözümünde dönen kütleler tarafından alışılmadık bir frame dragging (çerçeve sürüklenme) durumu söz konusu olmaktadır. Bu

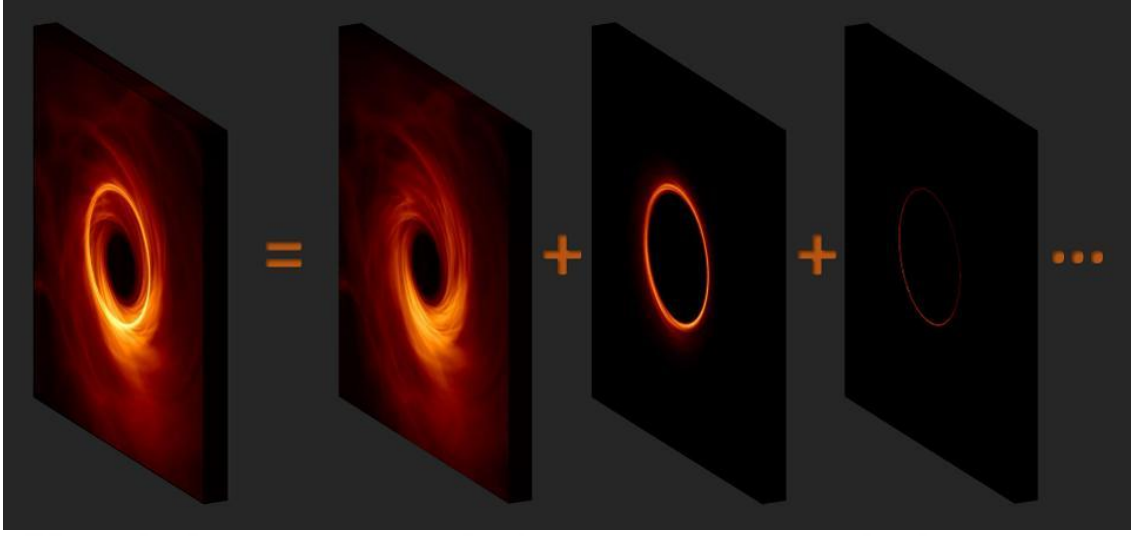
durumun etkisi, dönen bir kütleyle yaklaşan tüm nesnelerin, herhangi bir kuvvet ya da tork nedeniyle değil, dönen kütle ile ilişkili uzay-zamanın eğriliği nedeniyle rotasyona katılmaya sürüklenmesidir. Yani, yeterince yakın mesafede tüm nesneler, ışık bile kütle ile birlikte dönmelidir. Dolayısıyla Schwarzschild ve Kerr geometrileri için ışık sapma açıları aynı değildir. Döndürmenin etkisi nedeniyle ortaya çıkan bazı ekstra terimler vardır. Schwarzschild metriğindeki toplam sapma açısı olan α_{sch} 'ya, Kerr metriğinde yapılan düzeltme, ışık ışını için $\alpha_{kerr} = -4am/u^2$ olur [37]. Burada $u \equiv \frac{L}{E}$ olmakla beraber, etki parametresidir.

Ekvatorial düzlemde ($\theta = \pi/2$) Kerr alanının sapma açısı Iyer tarafından hesaplanmıştır [39, 40]. Iyer'ın bulgularına göre, dönen bir kara delik etkisiyle meydana gelen sapma, açıkça ışığın hareket yönüne bağlıdır. Işık ışını, kara delik ile aynı dönme yönünde hareket ediyorsa, sapma açısı statik Schwarzschild alanından daha yüksektir. Işık ışını, kara delik ile zıt dönme yönünde hareket ediyorsa, sapma açısı statik Schwarzschild alanından daha küçük olacaktır.

Statik, yüklü bir gravitasyon alanı için Einstein alan denkleminin çözümü ilk olarak Reissner-Nordström tarafından bağımsız olarak Reissner-Nordström çözümü olarak verilmiştir. Eiroa, bu yay elemanı için ışık sapma açısını hesaplamış ve yükün kendisinin uzay-zaman eğriliği üzerinde bazı etkileri olduğunu göstermiştir [24].

Einstein alan denklemlerinin dönen, yüklü kütle için çözümü temsil eden Kerr-Newman çözümü, 1967 yılında Newman tarafından bulunmuştur. Chakrabarty ve Sen son zamanlarda ekvatorial düzlemde yüklü, dönen bir kütle için ışık sapma açısını elde etmiştir [38, 42].

Yapılan çeşitli çalışmalar sonucunda, ekvatorial düzlemin yönü boyunca, sıfır yük koşulu altında ışık sapma açısı için bulunan ifadeler tam olarak Iyer'ın sonucu [39, 40] ile eşleşmiştir [37-44].



Şekil 3.3: Döner bir kara deliğin uzay-zamanında ışığın bükülmesi.

4. BULGULAR

4.1. KERR-BRANE-WORLD KARA DELİKLERİ İÇİN IŞIĞIN BÜKÜLMESİ

Tezin bu bölümünde; 3. bölümde de genel özelliklerinden bahsettiğimiz KB kara deliği alanında hareket problemi ve ışığın bükülme açısının belirlenmesi hedeflenmektedir. Üçüncü bölümde KB metriği (3.54) şeklinde tanımlanmıştır.

(3.54) ifadesinden hareketle, metrik tensörün kovaryant bileşenleri;

$$\begin{aligned}
 g_{tt} &= -1 + \frac{2Mr-\beta}{\Sigma} \\
 g_{rr} &= \frac{\Sigma}{\Delta} \\
 g_{\phi\phi} &= \frac{\sin^2\theta[(a^2+r^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta]}{\Sigma} \\
 g_{\theta\theta} &= \Sigma \\
 g_{t\phi} = g_{\phi t} &= \frac{a(-2Mr+\beta)\sin^2\theta}{\Sigma}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

olarak belirlenir. Kovaryant bileşenler matris formunda yazılıp (3.43), (3.44) ve (3.45) denklemleri sırasıyla bu matrise uygulandığında, matrisin tersi ve metriğin kontravaryant bileşenleri;

$$\begin{aligned}
 g^{tt} &= -\left(1 + \frac{(a^2+r^2)(2Mr-\beta)}{\Delta\Sigma}\right) \\
 g^{rr} &= \frac{\Delta}{\Sigma} \\
 g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\Sigma} \\
 g^{\phi\phi} &= \frac{-a^2+\Delta\operatorname{cosec}^2\theta}{\Delta\Sigma} \\
 g^{t\phi} = g^{\phi t} &= \frac{a(-2Mr+\beta)}{\Delta\Sigma}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

KB metriği için aksiyon ifadesi;

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) \quad (4.3)$$

olmak üzere,

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = \frac{1}{2} m^2 \quad (4.4)$$

ile verilen Hamilton fonksiyonu (3.36) ve (3.37) eşitlikleri de kullanılarak,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (4.5)$$

şeklindeki Hamilton-Jacobi denkleminde yerine konulduğunda;

$$\begin{aligned} & \left(-1 - \frac{(a^2 + r^2)(2Mr - \beta)}{\Delta \Sigma} \right) E^2 - 2EL \left(\frac{a(-2Mr + \beta)}{\Delta \Sigma} \right) + \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial S^{(\theta)}}{\partial \theta} \right)^2 + \\ & L^2 \left(\frac{-a + \Delta \operatorname{cosec}^2 \theta}{\Delta \Sigma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (4.6) eşitliğinde r ve θ içeren denklemlerin parçalı yazılabilmesi için;

$$\Sigma(r^2 + a^2) + 2Mra^2 \sin^2 \theta = (a^2 + r^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (4.7)$$

$$\frac{4Mra}{\Delta} LE = -2aLE + 2aLE \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right)$$

özdeşliklerinden faydalanılacaktır. (4.7) özdeşlikleri yardımıyla gerekli düzenlemeler yapıldığında null jeodezik için;

$$\begin{aligned} & -E^2 r^2 - E^2 a^2 \cos^2 \theta - \left(\frac{(a^2 + r^2)(2Mr - \beta)}{\Delta} \right) E^2 - 2EL \left(\frac{a(-2Mr + \beta)}{\Delta} \right) + \Delta \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial r} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\partial S^{(\theta)}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2 L^2}{\Delta} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitliği elde edilir. (4.8) denklemi, $\mathcal{K}$ ayrışım sabiti olmak üzere;

$$\Delta \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial r} \right)^2 - E^2 r^2 - E^2 \left(\frac{(a^2 + r^2)(2Mr - \beta)}{\Delta} \right) - 2EL \left(\frac{a(-2Mr + \beta)}{\Delta} \right) - \frac{a^2 L^2}{\Delta} = -\mathcal{K} \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{\partial S^{(\theta)}}{\partial \theta} \right)^2 - E^2 a^2 \cos^2 \theta + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} = \mathcal{K} \quad (4.10)$$

şeklinde düzenlenerek, yalnızca r ve θ içeren iki parçalı fonksiyon olarak yazılabilirler.

(4.9) ve (4.10) parçalı fonksiyonları düzenlenerek, sırasıyla;

$$\mathcal{R}(r) = [(r^2 + a^2)E - aL]^2 - \Delta[\mathcal{K} + (L - aE)^2] \quad (4.11)$$

$$\Theta(\theta) = \mathcal{K} + \cos^2 \theta \left(a^2 E^2 - \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilirler. r ve θ koordinatlarına bağlı hareket denklemleri;

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (4.13)$$

ve

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \quad (4.14)$$

eşitlikleri, t ve ϕ koordinatlarına bağlı hareket denklemleri ise,

$$\frac{dt}{d\lambda} = \dot{t} = -g^{tt}E - g^{t\phi}L \quad (4.15)$$

ve

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \dot{\phi} = g^{\phi t}E + g^{\phi\phi}L \quad (4.16)$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanmaktadır.

Bu eşitliklerden hareketle null jeodezik için KB hareket denklemleri;

$$\Sigma \dot{t} = a(L - aE \sin^2 \theta) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL] \quad (4.17)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = \left(\frac{L}{\sin^2 \theta} - aE \right) + \frac{a}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL] \quad (4.18)$$

$$\Sigma \dot{r} = \sqrt{\mathcal{R}} \quad (4.19)$$

$$\Sigma \dot{\theta} = \sqrt{\Theta} \quad (4.20)$$

şeklinde elde edilirler. Bu hareket denklemleri, dönen kara delik alanında bir ışık ışınının yayılmasını tarif eder.

KB jeodezik denklemi için E , enerji ve L , açısal momentum ifadeleri;

$$E = -g_{t\mu}u^\mu = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi} \quad (4.21)$$

$$L = g_{t\mu}u^\mu = g_{\phi t}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} \quad (4.22)$$

şeklindeki tanımlardan yola çıkarak;

$$\frac{E}{m} = \frac{r^2 - 2Mr + \beta \pm a\sqrt{Mr - \beta}}{r[r^2 - 3Mr + 2\beta \pm 2a\sqrt{Mr - \beta}]^{1/2}} \quad (4.23)$$

$$\frac{L}{m} = \pm \frac{\sqrt{Mr - \beta}(r^2 + a^2 \pm 2a\sqrt{Mr - \beta}) \pm a\beta}{r[r^2 - 3Mr + 2\beta \pm 2a\sqrt{Mr - \beta}]^{1/2}} \quad (4.24)$$

şeklinde elde edilirler. (4.24) ifadesinde (+) işareti; dairesel yörüngede bulunan bir taneciğin dönme yönünün, kara deliğin dönme yönüyle aynı olduğu duruma, (-) işareti ise taneciğin dönme yönünün, kara deliğin dönme yönüyle zıt olduğu duruma karşı gelmektedir.

(4.17), (4.18) ve (4.19) denklemleri kullanılarak, kara deliğin simetri eksenine göre etki parametresinin (u), dik ve paralel yönlerdeki bileşenleri; h , ekvatorial düzlemde ışık ışınının yüksekliği ve θ , dikey açı olmak üzere,

$$u_\perp = r^2 \sin\theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{r \rightarrow \infty} = \frac{L}{E \sin\theta} = J \sin^{-1}\theta \quad (4.25)$$

$$u_\parallel = h \sin\theta = r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{r \rightarrow \infty} = \frac{\mathcal{K}}{E^2} + (a^2 - u_\perp^2) \cos^2\theta \quad (4.26)$$

şeklinde bulunur. θ açısı; ψ_0 , ışığın ekvatorial düzlemle yaptığı eğim açısı olmak üzere,

$$\theta = \pi/2 - \psi_0 \quad (4.27)$$

şeklindedir.

KB kara deliğinde ekvatorial düzlemdeki ışığın sapması, hem zayıf hem de güçlü alan yaklaşımlarıyla hesaplanacaktır. Ekvatorial düzlemde $\theta = \pi/2$, $\psi_0 = 0$, $u_{\parallel} = 0$ olduğunu göz önünde bulundurup (4.18), (4.19) denklemlerini kullanarak ve etki parametresi,

$$u \equiv u_{\perp} = \frac{L}{E} \quad (4.28)$$

olmak üzere, ışık ışını yörüngesinin;

$$\frac{d\phi}{dr} = f(u, r) \quad (4.29)$$

ile verilen tanımından hareketle,

$$f(u, r) = \frac{(\Delta - a^2)u + a(2Mr - \beta)}{\Delta \sqrt{(r^2 + a^2 - au)^2 - \Delta(u - a)^2}} \quad (4.30)$$

eşitliğini elde ederiz.

(4.28) ifadesi (4.30) eşitliğinde yerine yazılıp,

$$\frac{dr}{d\phi} = 0 \quad (4.31)$$

denklemini çözülerek, r_0 kara deliğe en yakın yaklaşma mesafesi olmak üzere etki parametresi u ile arasındaki;

$$u = \frac{a(\beta - 2Mr_0) \pm r_0^2 \sqrt{\Delta_0}}{r_0^2 - 2Mr_0 + \beta} \quad (4.32)$$

şeklindeki ilişkiye ulaşılır. (4.32) ifadesinde; (+) işaret, foton ile kara deliğin aynı yönde dönmesine karşılık gelirken (−) işaret, tam tersi duruma karşılık gelir. Buradan sonraki işlemlerimizde (+) işareti odaklanarak devam edeceğiz.

(4.28) denklemini (4.30) ifadesinde işleme koyarak ve sonsuzdaki ışığın yörüngesinin düz bir çizgi olduğunu dikkate alarak, düz çizgiden sapma açısı;

$$\delta\phi = 2 \int_{r_0}^{\infty} f(r, r_0) dr - \pi \quad (4.33)$$

denklemleri ile verilir.

Işık ışınının kara delikten yeterince uzak bir mesafeden geçtiğini varsayarak, yani; $r_0 \gg r_+$ durumunda zayıf alan yaklaşımı kullanılabilir ve integral analitik olarak; zayıf alanın

$\epsilon = M/r_0$, $\eta = \beta/r_0^2$ ve $\delta = a/r_0$ küçük parametrelerinde değerlendirilebilir. Bu parametrelerde 2. dereceden terimlerle sınırlandırarak sapma açısı için analitik ifade;

$$\delta\phi = \frac{4M}{r_0} \left(1 - \frac{a}{r_0}\right) + \frac{M^2}{4r_0^2} (15\pi - 16) - \frac{\pi\beta}{4r_0^2} \left(3 - \frac{4a}{r_0}\right) + \frac{M\beta}{2r_0^3} (3\pi - 28) + \frac{57\pi}{64} \frac{\beta^2}{r_0^4} \quad (4.34)$$

şeklinde bulunur.

Genel olarak, (4.33) ifadesindeki integral; eliptik bir integraldir ve sadece nümerik olarak değerlendirilebilir. Ayrıca, integralin alt limiti sınırlayıcı foton yörüngesinin yarıçapına yaklaştığında ($r_0 = r_{ph}$), integrand tekil olur. Sonsuzluktan gelen ve kara delik etrafındaki sınırlayıcı foton yörüngesine yaklaşan ışık ışını için (4.33) ifadesindeki integralin doğrudan nümerik değerlendirmesi yapılabilir.

Kara deliğe minimum yaklaşma mesafesi r_0 'ın artırılmasıyla sapma açısının mutlak değerinin, fotonun kara delik ile hem aynı yönde hem de zıt yönde dönme durumları için azaldığını söyleyebiliriz. Fakat zıt yönde dönme durumunda sapma daha büyüktür ve yeterince büyük r_0 değerleri için (4.34) denkleminin analitik çözümü elde edilebilir.

r_0 değerinin artmasıyla, fotonun kara delik ile hem aynı yönde hem de zıt yönde dönme durumları için sapma açısı azalmaktadır. Fakat fotonun kara delik ile zıt yönlü dönme durumunda, aynı yönde dönme durumuna kıyasla sapma açısının daha büyük olduğunu söyleyebiliriz.

r_0 değerinin azalmasıyla da, fotonun kara delik ile hem aynı yönde hem de zıt yönde dönme durumları için sapma açısı artar, bazı durumlarda 2π katına ulaşır. Yani; foton bölgeden ayrılmadan önce kara deliğin etrafında birkaç kez döner.

Maksimum dönen durumda ve ışık ışınının doğrudan sarılması için, Kerr kara deliği ($a = M, \beta = 0$) ve gelgit yükü $\beta = -M^2$ ($a = \sqrt{2}M$)'ye sahip KB kara deliği için sapma

açıların hemen hemen aynı değere sahip olduğuna dikkat edilmelidir. Yani, bu kara delikler için ışık sapma açıları birbirinden ayırt edilemez hale gelir.

4.2. KERR-KALUZA-KLEIN KARA DELİKLERİ İÇİN IŞIĞIN BÜKÜLMESİ

Bu bölümde genel özelliklerinden 3. bölümde bahsettiğimiz KKK kara deliği alanında hareket problemi ve ışığın bükülme açısının belirlenmesi hedeflenmektedir. Üçüncü bölümde KKK metriği (3.62) denklemi ile tanımlanmıştı.

(3.62) ifadesinden hareketle, metrik tensörün kovaryant bileşenleri;

$$\begin{aligned}
 g_{tt} &= \frac{2Mr - \Sigma}{\Sigma B} \\
 g_{rr} &= \frac{\Sigma B}{\Delta} \\
 g_{\theta\theta} &= \Sigma B \\
 g_{\phi\phi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma B^2} \right) B \sin^2 \theta \\
 g_{t\phi} &= g_{\phi t} = - \frac{2aMr \cosh \alpha \sin^2 \theta}{\Sigma B}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

olarak belirlenir. Kovaryant bileşenler matris formda yazılıp (3.43), (3.44) ve (3.45) denklemleri sırasıyla bu matrise uygulandığında, matrisin tersi ve metriğin kontravaryant bileşenleri;

$$\begin{aligned}
 g^{tt} &= \frac{-\frac{(a^2 + r^2)^2 \cosh^2 \alpha}{\Delta} + a^2 \cosh^2 \alpha \sin^2 \theta + \Sigma \sinh^2 \alpha}{\Sigma B} \\
 g^{rr} &= \frac{\Delta}{\Sigma B} \\
 g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\Sigma B} \\
 g^{\phi\phi} &= \frac{\frac{a^2}{\Delta} + \operatorname{cosec}^2 \theta}{\Sigma B} \\
 g^{t\phi} &= g^{\phi t} = \frac{\left(1 - \frac{a^2 + r^2}{\Delta} \right) a \cosh \alpha}{\Sigma B}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

KKK metriği için (4.3) ifadesinden hareketle;

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = \frac{1}{2} m^2 \quad (4.37)$$

ile verilen Hamilton fonksiyonu, (3.36) ve (3.37) eşitlikleri de kullanılarak

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (4.38)$$

şeklindeki Hamilton-Jacobi denkleminde yerine konur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, null jeodezik için;

$$\begin{aligned} & -\frac{(a^2+r^2)^2 \cosh^2 \alpha}{\Delta} E^2 + a^2 \cosh^2 \alpha \sin^2 \theta E^2 + r^2 \sinh^2 \alpha E^2 + a^2 \cos^2 \theta \sinh^2 \alpha E^2 + \\ & \frac{4Mr a}{\Delta} L E \cosh \alpha + \Delta \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(\theta)}}{\partial \theta} \right)^2 + L^2 \frac{a^2}{\Delta} + L^2 \operatorname{cosec}^2 \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

eşitliği elde edilir. (4.39) denklemini; $\mathcal{K}$ ayrışım sabiti olmak üzere;

$$\Delta \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial r} \right)^2 = a^2 E^2 [\cosh^2 \alpha (1 + r^2) + r^2] + r^2 E^2 [r^2 + 2M \sinh^2 \alpha] - \Delta \mathcal{K} \quad (4.40)$$

$$\left(\frac{\partial S^{(\theta)}}{\partial \theta} \right)^2 = \mathcal{K} - a^2 E^2 [\sin^2 \theta + \sinh^2 \alpha] + L^2 \operatorname{cosec}^2 \theta \quad (4.41)$$

şeklinde düzenlenerek, yalnızca r ve θ içeren iki parçalı fonksiyon olarak yazılabilirler.

(4.40) ve (4.41) parçalı fonksiyonları tekrar (4.7) özdeşliklerinden faydalanılarak düzenlendiğinde, sırasıyla;

$$\mathcal{R}(r) = a^2 E^2 [\cosh^2 \alpha (1 + r^2) + r^2] + r^2 E^2 [r^2 + 2M \sinh^2 \alpha] - \Delta \mathcal{K} \quad (4.42)$$

$$\Theta(\theta) = \mathcal{K} - a^2 E^2 [\sin^2 \theta + \sinh^2 \alpha] + L^2 \operatorname{cosec}^2 \theta \quad (4.43)$$

şeklinde yazılırlar.

(4.13), (4.14), (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden hareketle, null jeodezik için KKK kara deliği hareket denklemleri;

$$\Sigma B \dot{r} = \sqrt{\mathcal{R}} \quad (4.44)$$

$$\Sigma B \dot{\theta} = \sqrt{\Theta} \quad (4.45)$$

$$\Sigma B \dot{t} = \frac{a^2 + r^2}{\Delta} \cosh \alpha [(a^2 + r^2) \cosh \alpha E + La] + E a^2 \sin^2 \theta + E \sinh^2 \alpha (r^2 + a^2) - L \cosh \alpha \quad (4.46)$$

$$\Sigma B \dot{\phi} = a E \cosh \alpha \left(1 - \frac{r^2}{\Delta}\right) - \frac{a^2}{\Delta} (a E \cosh \alpha + L) + L \csc^2 \theta \quad (4.47)$$

şeklinde elde edilirler.

Ekvatorial düzlemde $\theta = \pi/2$, $\psi_0 = 0$, $u_{\parallel} = 0$ olduğunu göz önünde bulundurup (4.46) ve (4.47) denklemleri kullanılarak, kara deliğin simetri eksenine göre etki parametresinin (u) dik bileşeni;

$$u \equiv u_{\perp} = r^2 \sin \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)_{r \rightarrow \infty} = \frac{L}{E(\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha)} \quad (4.48)$$

şeklindedir.

(4.44), (4.47) ve (4.48) eşitliklerini kullanarak, (4.29) tanımından hareketle;

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{-2mr a \cosh \alpha + [u^2 (\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha)^2 - 1]^{1/2} (\Delta - a^2)}{\Delta \{a^2 [\cosh^2 \alpha (1 + r^2) + r^2] + r^2 (r^2 + 2m \sinh^2 \alpha) - \Delta [a^2 \cosh^2 \alpha - u^2 ((\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha)^2 - 1)]\}^{1/2}} \quad (4.49)$$

elde edilir.

(4.48) ifadesi (4.49) eşitliğinde yerine yazılıp, $\frac{dr}{d\phi} = 0$ denklemi çözülerek, r_0 kara deliğe en yakın yaklaşma mesafesi olmak üzere etki parametresi (u) ile arasındaki;

$$u = \pm \frac{\{a^2 (1 - r_0^2 (\Delta - 1)) \cosh^2 \alpha + r_0^2 (2\Delta - 2mr_0 - m + m \cosh \alpha)\}^{1/2}}{r_0 \cosh 2\alpha \sqrt{-\Delta}} \quad (4.50)$$

şeklindeki ilişkiye ulaşılır.

(4.33) tanımından yola çıkarak $\delta\phi$ ifadesi elde edilir. Fakat burada $\delta\phi$ açısının analitik değeri ve nümerik olarak incelenmesi ve bunun sonucunda farklı parametreler arasındaki ilişkilerin ve sapmanın grafiksel olarak incelenmesi daha sonra çalışmalarımızda irdelenecektir.

4.3. KERR-SEN KARA DELİKLERİ İÇİN IŞIĞIN BÜKÜLMESİ

Bu bölümde yine genel özelliklerinden 3. bölümde bahsettiğimiz KS kara deliği alanında hareket problemi ve ışığın bükülme açısının belirlenmesi hedeflenmektedir. Üçüncü bölümde KS metriği (3.72) denklemi ile tanımlanmıştı.

(3.72) ifadesinden hareketle, metrik tensörün kovaryant bileşenleri;

$$\begin{aligned}
 g_{tt} &= -1 + \frac{2Mr}{\Sigma} \\
 g_{rr} &= \frac{\Sigma}{\Delta} \\
 g_{\theta\theta} &= \Sigma \\
 g_{\phi\phi} &= \sin^2\theta \left[\Delta + \frac{2Mr[a^2 + r(r+r_0)]}{\Sigma} \right] \\
 g_{t\phi} &= g_{\phi t} = -\frac{2Mar\sin^2\theta}{\Sigma}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak belirlenir. Kovaryant bileşenler matris formda yazılıp (3.43), (3.44) ve (3.45) denklemleri sırasıyla bu matrise uygulandığında, matrisin tersi ve metriğin kontravaryant bileşenleri;

$$\begin{aligned}
 g^{tt} &= -1 - \frac{2Mr[a^2 + r(r+r_0)]}{\Delta\Sigma} \\
 g^{rr} &= \frac{\Delta}{\Sigma} \\
 g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\Sigma} \\
 g^{\phi\phi} &= \frac{1}{\sin^2\theta} \left[\frac{-2Mr + \Sigma}{\Delta\Sigma} \right] \\
 g^{t\phi} &= g^{\phi t} = -\frac{2Mar}{\Delta\Sigma}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

KS metriği için de (4.3) aksiyon ifadesinden hareketle;

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = \frac{1}{2} m^2 \quad (4.53)$$

ile verilen Hamilton fonksiyonu (3.36) ve (3.37) eşitlikleri de kullanılarak

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (4.54)$$

şeklindeki Hamilton-Jacobi denkleminde yerine konur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, null jeodezik için;

$$\begin{aligned} & -(a^2 \cos^2 \theta) E^2 - [r(r + r_0)] E^2 - \left[\frac{2Mr[a^2 + r(r + r_0)]}{\Delta} \right] E^2 + \Delta \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(\theta)}}{\partial \theta} \right)^2 + \\ & \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2 L^2}{\Delta} - 2EL \frac{2Mar}{\Delta} = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

eşitliği elde edilir. (4.55) denklemini; $\mathcal{K}$ ayrışım sabiti olmak üzere;

$$\Delta \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial r} \right)^2 - [r(r + r_0)] E^2 - \left[\frac{2Mr[a^2 + r(r + r_0)]}{\Delta} \right] E^2 - \frac{L^2 a^2}{\Delta} - EL \frac{4Mar}{\Delta} = -\mathcal{K} \quad (4.56)$$

$$\left(\frac{\partial S^{(\theta)}}{\partial \theta} \right)^2 - (a^2 \cos^2 \theta) E^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} = \mathcal{K} \quad (4.57)$$

şeklinde düzenlenerek, yalnızca r ve θ içeren iki parçalı fonksiyon olarak yazılabilir.

(4.56) ve (4.57) parçalı fonksiyonları tekrar (4.7) özdeşliklerinden faydalanılarak düzenlendiğinde, sırasıyla;

$$\mathcal{R}(r) = [aL - [r(r + r_0) + a^2]E]^2 - \Delta[(L - aE)^2 + \mathcal{K}] \quad (4.58)$$

$$\Theta(\theta) = \mathcal{K} - \cot^2 \theta [L^2 - \sin^2 \theta E^2 a^2] \quad (4.59)$$

şeklinde yazılırlar.

(4.13), (4.14), (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden hareketle, null jeodezik için KS hareket denklemleri;

$$\Sigma \dot{r} = \sqrt{\mathcal{R}(r)} \quad (4.60)$$

$$\Sigma \dot{\theta} = \sqrt{\Theta(\theta)} \quad (4.61)$$

$$\Sigma \dot{t} = \frac{1}{\Delta} [E[r(r+r_0) + a^2]^2 - 2Mr a L] - a^2 E \sin^2 \theta \quad (4.62)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = -aE + L \operatorname{cosec}^2 \theta + \frac{a}{\Delta} [(r(r+r_0) + a^2)E - aL] \quad (4.63)$$

şeklinde elde edilirler.

KS jeodezik denklemi için; (4.21) ve (4.22) eşitlikleri kullanılarak; E, enerji ve L, açısal momentum ifadeleri;

$$E = \frac{\sqrt{r_0+2r}(r_0+r-2M)}{\sqrt{(r_0+r)((r_0+r)(r_0+2r)-2M(r_0+3r))}} \quad (4.64)$$

$$L = \pm \frac{\sqrt{2Mr}(r_0+r)}{\sqrt{M(r_0+r)(r_0^2+r_0(3r-2M)+2r(r-3M))}} \quad (4.65)$$

şeklinde elde edilir. (4.65) ifadesinde (+) işareti; dairesel yörüngede bulunan bir taneciğin dönme yönünün, kara deliğin dönme yönüyle aynı olduğu duruma, (-) işareti ise taneciğin dönme yönünün, kara deliğin dönme yönüyle zıt olduğu duruma karşı gelmektedir.

KS kara deliğinde, ekvatorial düzlemdeki ışığın sapması, KB kara deliği için yapılan hesaplamalardan yararlanılarak incelenecektir. Ekvatorial düzlemde $\theta = \pi/2$, $h = \psi_0 = 0$ ve $u_{||} = 0$ eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda, bu durumda yeni bir radyal koordinat; $x = \frac{r}{2M}$ ifadesini kullanarak, $2M = 1$ biriminde bulunan tüm mesafeleri ölçerek;

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + B(x)dx^2 + C(x)d\phi^2 - D(x)dtd\phi \quad (4.66)$$

indirgenmiş metrik elde edilmiş olur.

$x_\alpha = \frac{Q^2}{2M^2}$ ve $a = \frac{L}{M}$ olmak üzere, metrik katsayıları;

$$A(x) = \frac{x+x_\alpha-1}{x+x_\alpha}$$

$$B(x) = \frac{x(x+x_\alpha)}{x(x+x_\alpha)-x+a^2}$$

$$C(x) = x(x+x_\alpha) + a^2 + \frac{a^2}{x+x_\alpha} \quad (4.67)$$

$$D(x) = \frac{2a}{x+x_\alpha}$$

şeklindedir.

Elde etmiş olduğumuz indirgenmiş metriğimizden hareketle, $A(x)$, $C(x)$ ve $D(x)$ metrik katsayıları cinsinden, $\dot{t}$, $\dot{\phi}$ ve $\dot{x}$ ifadelerini;

$$\dot{t} = 2 \left[\frac{2C-DL}{4AC+D^2} \right] \quad (4.68)$$

$$\dot{\phi} = 2 \left[\frac{D+2AL}{4AC+D^2} \right] \quad (4.69)$$

ve

$$\dot{x} = \pm 2 \sqrt{\frac{C-L(D+AL)}{B(4AC+D^2)}} \quad (4.70)$$

şeklinde elde ederiz.

(4.25) ve (4.26) ifadelerinden;

$$J = u \cos \psi_0 \quad (4.71)$$

$$\mathcal{K} = h^2 \cos^2 \psi_0 + (u^2 - a^2) \sin^2 \psi_0 \quad (4.72)$$

eşitliklerine ulaşabiliriz. (4.71) eşitliğinden ulaştığımız;

$$u \equiv u_\perp = J \quad (4.73)$$

eşitliğinden faydalanarak, $r = x$ ve x_0 kara deliğe en yakın yaklaşma mesafesi ($x = x_0$) olmak üzere, etki parametresi u ile arasındaki ilişki;

$$u = \frac{-a+(x_0+x_\alpha)\sqrt{x_0^2+x_0(x_\alpha-1)+a^2}}{x_0+x_\alpha-1} \quad (4.74)$$

şeklinde elde edilir.

Işık ışını için (4.29) ile verilen tanımdan hareketle, (4.69) ve (4.70) denklemlerini kullanarak;

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{\sqrt{B|A_0|(D+2JA)}}{\sqrt{C}\sqrt{4AC+D^2}\sqrt{\text{sgn}(A_0)\left[A_0-A\frac{C_0}{C}+\frac{J}{C}(AD_0-A_0D)\right]}} \quad (4.75)$$

ifadesi elde edilir.

Burada metrik katsayısı olan A_0 ; ergosfer altında negatif olarak dikkate alınmaktadır.

Sonsuzdaki ışığın yörüngesinin düz bir çizgi olduğunu dikkate alarak, düz çizgiden sapma açısı;

$$\phi(x_0) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} dx \quad (4.76)$$

tanımı ile elde edilir.

(4.74) ifadesinden hareketle; $a > 0$ için foton ve kara delik aynı yönde dönüş hareketine sahiplerken, $a < 0$ için birbirleri ile zıt yönde bir dönüş hareketi gerçekleştirirler. Yine bu ifadeden; ekvatorial düzlemde kara deliğin dönme yönünün tersi yönde hareket eden foton, kara delik ile aynı yönde hareket eden fotonun etki parametresine kıyasla daha büyük bir etki parametresine sahiptir diyebiliriz. Birbirlerine karşı zıt yönde hareket ettiklerinde yük parametresi azalırken, hareketleri aynı yönde olduğunda yük parametresi artar. Yük parametresi arttığında sapma açısı da artar.

x_0 değerinin azalmasıyla sapma açısı artar ve belirli bir x_0 değeri için sapma açısı 2π olur, böylece foton kara delik etrafında tam bir döngü oluşturur. KS kara deliği için daha büyük ölçüde rölativistik bir veri elde edebilmemiz sahip olduğu yüke bağlıdır, bu durum x_α ile doğru orantılı artar. Ayrıca kendisi ile hem aynı, hem de zıt yönde hareket eden bir fotonu içine çekme olasılığı x_α parametresi arttıkça, azalır diyebiliriz.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kara delikler, Genel Rölativite Teorisi'nin merak uyandıran başarılı uygulama alanlarından biridir. Bu başarı da, kara delik alanındaki bir taneciğin hareketinin teorik olarak hesaplanması ile elde edilen nümerik sonuçların, yapılan gözlem sonuçlarıyla eşleşmesi sonucu görülmektedir.

Tezimizde; ilk olarak kara deliklerle ilgili genel bilgiler verildikten sonra, kara delik alanında hareket problemi incelenmiş ve ışığın bükülmesine ilişkin gereken matematiksel alt yapı, özellikle Hamilton-Jacobi yöntemi ele alınmıştır. Ardından bu bilgiler yardımıyla; Kerr-Brane-World, Kerr-Kaluza-Klein ve Kerr-Sen kara delikleri alanlarındaki hareket problemi ve ışığın bükülmesi olayı incelenmiştir. Bu bilgiler doğrultusunda tezimizde elde ettiğimiz sonuçlar kısaca özetlenecek olursa;

- Genel Rölativite, Kerr-Brane-World, Kerr-Kaluza-Klein ve Kerr-Sen kara delik teorilerine ilişkin genel bilgiler verilmiştir. Ayrıca kara delik alanındaki ışığın bükülmesi olayının incelenmesi için gerekli alt yapıdan özetle bahsedilmiştir.
- Kerr-Brane-World kara delik alanındaki harekete ilişkin hesaplar, daha önce Alikram N. Aliev ve Pamir Talazan [12, 13] tarafından yapılmış olan çalışmadan faydalanılarak ele alınmış ve tezimizdeki çalışma için bu hesaplar tekrar edilmiştir. Ayrıca bu kara delik alanında ışığın bükülmesi incelenmiştir. Kerr-Brane-World kara deliklerinin 5. boyutu gözlemlenebilir dünyamıza aktaran gelgit yükü imzasını taşımaktadır. Foton için; etki parametresi (u) ve kara deliğe en yakın yaklaşma mesafesinin (r_0) değeri ile sapma açısının ters orantılı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca foton ile kara deliğin hareket yönlerinin zıt olduğu durumda, hareket yönlerinin aynı olduğu duruma kıyasla sapma açısının daha büyük olduğu sonucuna varılmıştır.
- Kerr-Kaluza-Klein kara delik alanındaki harekete ilişkin hesaplar, Kerr-Brane-World kara delik örneğindeki hesaplamalardan faydalanılarak incelenmiştir. Bu problemde de etki parametresi (u) benzer yöntemle bulunmuştur. Benzer şekilde sapma açısı için analitik çözüm ve bu çözümden hareketle elde edeceğimiz nümerik analiz sonucundaki irdelemeleri ileriki çalışmalarımızda ele almayı hedeflemekteyiz.

- Kerr-Sen kara delik alanındaki harekete ilişkin hesaplar ise Kerr-Brane-World ve Kerr-Kaluza-Klein kara delik örneklerindeki hesaplamalardan ve daha önce yapılmış olan bazı çalışmalardan [25, 26, 27] faydalanılarak incelenmiştir. Kerr-Brane-World ve Kerr-Kaluza-Klein kara deliklerinde 5. boyutun etkileri, temel fiziksel parametreler olan; kütle ve açısal momentuma bağlı hesaplamalara dayanarak incelenirken, Kerr-Sen kara deliğinde üçüncü fiziksel parametre olan; yük içeren bir hesaplama ile incelenmiştir. Sapma açısının, kara deliğe en yakın yaklaşma mesafesinin (x_0) değeri ile ters orantılı, yük parametresi ile doğru orantılı olduğu gözlemlenmiştir. Kara deliğin dönme yönüyle aynı yönde hareket eden foton için, yük parametresinin arttığı durumlarda, bükülme açısının arttığı fakat kara deliğin dönme yönüne ters yönde hareket eden foton için ise bu durumun tersine olduğu sonucuna varılmıştır.

Sonuç olarak, ele alınan üç kara delik alanında, ekvatorial düzlemde ($\theta = \pi/2$) bir ışık ışınının sapma açısı incelenmiştir. Sonuçlarını elde ettiğimiz Kerr-Brane-World ve Kerr-Sen kara delikleri için; ekvatorial düzlemde, kara deliğin dönme yönünün tersi yönde hareket eden foton, kara deliğin dönme yönü ile aynı yönde hareket eden fotonun etki parametresine göre daha büyük bir etki parametresine sahiptir ve fotonun etki parametresi azaldıkça, sınırlayıcı foton yörüngesine doğru hareket ederken sapma açısının arttığı sonucuna varılmıştır. Kerr-Kaluza-Klein alanındaki bükülme problemindeki nümerik irdelemeleri ise ileri ki çalışmalarımızda ele almayı hedeflemekteyiz.

Bu bilgilerden yola çıkarak, zaten biliniyor olan, foton için üç farklı senaryo çizilebilir. Etki parametresinin ve buna paralel olarak sapma açısının etkisine bağlı olarak; güçlü gravitasyon alanında foton, kara deliğin hareket alanından; doğrudan kaçabilir, bu alanı terk etmeden önce birkaç kez sarım yapabilir ya da hiç kaçamayabilir.

KAYNAKLAR

- [1]. Orhan, A., 2018, *Karanlık enerji ve dönen kara delikler*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi.
- [2]. Oğuz, H., 2016, *Kaluza-klein teorisinde dönen kara deliklerin gravitasyonel etkilerinin incelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi.
- [3]. Saltı, M., 2012, *Kara delikler, solucan delikleri ve teleparalel kütle çekim kuramı*, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.
- [4]. NASA, 2018, *What is a black hole?*, https://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/news/black-hole-image-makes-history, [Ziyaret Tarihi: 27 Ağustos 2019].
- [5]. Wikipedia, 2019, *Rotating black hole*, https://en.wikipedia.org/wiki/Rotating_black_hole [Ziyaret Tarihi: 5 Eylül 2019].
- [6]. Event horizon telescope, 2019, *First image of a black hole*, <https://eventhorizontelescope.org/>, [Ziyaret Tarihi: 15 Eylül 2019].
- [7]. Thorne, S. K., 1974, The search for black holes, *Scientific American*, 231, No. 6, 32-43.
- [8]. Özemre, A. Y., 2016, *Teorik fizik dersleri*, <https://www.ozemre.com/arsiv/teorik-fizik-kitaplari>, [Ziyaret Tarihi: 5 Kasım 2019].
- [9]. Gürses, C., 2017, *Metrik tensör*, <https://cangurses.wordpress.com/tag/metrik-tensor/>, [Ziyaret Tarihi: 10 Eylül 2019].
- [10]. Dalarsson, M. and Dalarsson, S. N., 2015, *Tensors, relativity and cosmology (Second Edition)*, Academic Press, Sweden, ISBN: 978-0-12-803397-5.
- [11]. Frolov, V. P. and Novikov, I. D., 1998, *Black holes physics*, Kluwer academic publishers, U.S.A., ISBN: 0-7923-5145-2.
- [12]. Alikram, N. A. and Talazan, P., 2009, Gravitational effects of rotating brane-world black holes, *Physics Review Letters*, D80(044023), 13-14.
- [13]. Talazan, P., 2009, *Some physical effects of black holes: theory and observations*, Thesis (Master), Istanbul Technical University.
- [14]. Whisker, R., 2006, *Brane-world black holes*, Thesis (PhD), University of Durham.
- [15]. Randall, L. and Sundrum, R., An alternative to compactification, 1999, *Phys. Rev. Lett.* 83, 4690.
- [16]. Alikram, N. A., Rotating brane-world black holes, 2006, *arXiv* (astro-ph/0612735v1).
- [17]. Alikram, N. A. and Gümrükçüoğlu, A. E., 2005, Charged rotating black holes on a 3-brane, *Phys. Rev. D* 71, 104027.

- [18]. Majumdar, A. S. and Mukherjee, N., Brane-world black holes in cosmology and astrophysics, 2005, *International Journal of Modern Physics D*, 14-7, 1095-1129.
- [19]. Mukherjee, N. and Majumdar, A. S., 2009, Rotating brane-world black hole lensing in the strong deflection limit, ISSN 0202-2893, *Gravitation and Cosmology*, Vol. 15, No. 3, pp. 263–272.
- [20]. William, O. S., 2014, Kaluza-klein for kids, *Pasadena, California 91104*.
- [21]. Duff, M. J., 1994, Kaluza-klein theory in perspective, *arXiv:hep-th/9410046*.
- [22]. Kerner, R., Martin, J., Mignemi, S. and Holten, J.W., 2000, Geodesic deviation in kaluza klein theories, *Phys. Rev. D* 63, 027502.
- [23]. Mashhoon, B., Wesson, P. and Liu, H., 1998, Dynamics in kaluza-klein gravity and a fifth force, *General Relativity and Gravitation volume 30*, pages555–571.
- [24]. Amarilla, L. and Eiroa, E. F., 2013, Shadow of a kaluza-klein rotating dilaton black hole, *Phys. Rev. D* 87: 044057.
- [25]. Siahahan, H. M., 2016, Destroying kerr-sen black holes, *Phys. Rev. D* 93, 064028.
- [26]. Liu, C. O., Ding, C. K. and Jing, J. L., Periodic orbits around kerr-sen black holes, *Commun. Theor. Phys.* 71 1461–1468.
- [27]. Debnath, U., 2018, Particles collision near kerr-sen dilaton-axion black hole, *arXiv: 1508.02385v1*.
- [28]. Blaga, P. A. and Blaga, C., 2001, Bounded radial geodesics around a kerr-sen black hole, *Class. Quantum Grav.* 18 3893–3905.
- [29]. Gyulchev, G. N. and Yazadjiev, S. S., 2007, Kerr-Sen dilaton-axion black hole lensing in the strong deflection limit, *Phys. Rev. D* 75, 023006.
- [30]. Gyulchev, G. N. and Yazadjiev, S. S., 2010, Analytical kerr-sen dilaton-axion black hole lensing in the weak deflection limit, *Phys. Rev. D* 81, 023005.
- [31]. Bernard, C., 2017, Analytical study of a kerr-sen black hole and a charged massive scalar field, *Phys. Rev. D* 96, 105025.
- [32]. Uniyal, R., Nandan, H. and Purohit, K. D., 2018, Null geodesics and observables around the kerr-sen black hole, *Class. Quantum Grav.* 35 025003.
- [33]. Wei, S. W. and Liu, Y. X., 2013, Observing the shadow of einstein-maxwell-dilaton-axion black hole, *arXiv* (1311.4251).
- [34]. Rogatko, M., 2010, Uniqueness theorem for stationary axisymmetric black holes in einstein-maxwell-axion-dilaton gravity, *Phys. Rev. D* 82, 044017.
- [35]. Uniyala, R., Nandan, H. and Jetzer, P., 2018, Bending angle of light in equatorial plane of kerr-sen black hole, *Physics Letters B* 782 185–192.

- [36]. Gyulchev, G. N. and Yazadjiev, S. S., 2011, Weak gravitational lensing by rotating dilaton-axion black holes, *Bulg. J. Phys.* 38 (2011) 113–122.
- [37]. Arakida, H., 2018, General relativistic aberration equation and measurable angle of light ray in Kerr spacetime, *arXiv* (1808.03418v2).
- [38]. Chakraborty, S. and Sen, A. K., 2018, Light deflection in Kerr field for off-equatorial source, *arXiv* (1504.03124v2).
- [39]. Iyer, S. V. and Hansen, E. C., 2009, Light's bending angle in the equatorial plane of a Kerr black hole, *Phys. Rev. D* 80, 124023.
- [40]. Iyer, S. V. and Hansen, E. C., 2009, Strong and weak deflection of light in the equatorial plane of a Kerr black hole, *arXiv*:0908.0085v1.
- [41]. Tsukamoto, N., 2017, Deflection angle in the strong deflection limit in a general asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetime, *Phys. Rev. D* 95, 064035.
- [42]. Chakraborty, S. and Sen, A. K., 2017, Trajectory of light ray slightly above the equatorial plane in kerr geometry and its deflection, *Canadian Journal of Physics*, 95(12): 1307-1312.
- [43]. Perlick, V. and Tsupko, O. Y., 2017, Light propagation in a plasma on kerr spacetime: Separation of the hamilton-jacobi equation and calculation of the shadow, *Phys. Rev. D* 95, 104003.
- [44]. Bozza, V. and Scarpitta, G., 2007, Strong deflection limit of black hole gravitational lensing with arbitrary source distances, *Phys. Rev. D* 76, 083008.
- [45]. Bozza, V., *Phys. Rev. D* 66, 103001 (2002).

EKLER

EK 1: KERR-BRANE-WORLD METRİĞİ İÇİN CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ

$$B = \frac{2M}{\Sigma} \left(1 - \frac{2r^2}{\Sigma} \right) + \frac{2r\beta}{\Sigma^2}$$

olmak üzere,

$$\Gamma_{01}^0 = -\frac{(r^2+a^2)B}{2\Delta}, \quad \Gamma_{02}^0 = -\frac{2Mr-\beta}{2\Sigma^2} a^2 \sin 2\theta, \quad \Gamma_{13}^0 = \frac{a \sin^2 \theta}{\Delta} \left[\frac{(r^2+a^2)B}{2} - \frac{(2Mr-\beta)r}{\Sigma} \right],$$

$$\Gamma_{32}^0 = \frac{2Mr-\beta}{2\Sigma^2} a^3 \sin^2 \theta \sin 2\theta, \quad \Gamma_{00}^1 = -\frac{\Delta B}{2\Sigma}, \quad \Gamma_{03}^1 = \frac{\Delta B}{2\Sigma} a \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\Delta r - (r-M)\Sigma}{\Delta \Sigma},$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{\Delta r}{\Sigma}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{\Delta}{2\Sigma} \sin^2 \theta (2r + Ba^2 \sin^2 \theta),$$

$$\Gamma_{00}^2 = -\left(\frac{2Mr-\beta}{2\Sigma^2} \right) \frac{a^2 \sin 2\theta}{\Sigma}, \quad \Gamma_{03}^2 = \left(\frac{2Mr-\beta}{2\Sigma^2} \right) \frac{r^2+a^2}{\Sigma} a \sin 2\theta, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Delta \Sigma},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{r}{\Sigma}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{\sin 2\theta}{2\Sigma} \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mr-\beta}{\Sigma} \left(2 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) a^2 \sin^2 \theta \right],$$

$$\Gamma_{01}^3 = -\frac{aB}{2\Delta}, \quad \Gamma_{02}^3 = -\frac{2Mr-\beta}{\Sigma^2} a \cot \theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{r}{\Delta} \left(1 - \frac{2Mr-\beta}{\Sigma} \right) + \frac{a^2 B \sin^2 \theta}{2\Delta},$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{\cot \theta}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2Mr-\beta}{\Sigma} \right) \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr-\beta}{\Sigma} a^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{2Mr-\beta}{\Sigma^2} (r^2 + a^2) a^2 \sin^2 \theta \right]$$

şeklindedir.

EK 2: KERR-KALUZA-KLEIN METRİĞİ İÇİN CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ

$$B = \left(1 + \frac{2Mr}{\Sigma} \sinh^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$c_1 = \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{B^2 \Sigma^2} (r^2 + a^2 + \Sigma), \quad c_2 = B^2 \Sigma (r^2 + a^2) - 2Ma^2 r \sinh^2 \alpha,$$

$$c_3 = (r^2 + a^2) \Sigma + Mr(r^2 + a^2 + \Sigma) \sinh^2 \alpha, \quad c_4 = \frac{c_2}{B^2 \Sigma}$$

olmak üzere,

$$\Gamma_{01}^0 = -\frac{M(\Sigma - 2r^2)}{2B^2 \Sigma^2} \left(1 + \cosh^2 \alpha + \frac{4Mr \cosh^2 \alpha}{\Delta}\right), \quad \Gamma_{02}^0 = -\frac{Ma^2 r \sin 2\theta}{2B^2 \Sigma^2} (1 + \cosh^2 \alpha),$$

$$\Gamma_{13}^0 = -\frac{M \sin^2 \theta \cosh \alpha}{\Delta B^2 \Sigma^2} [\Sigma(r^2 - a^2) + 2r^2(r^2 + a^2) + 4Mr^2 \sinh^2 \alpha]$$

$$\Gamma_{23}^0 = -\frac{Ma^3 r \sin 2\theta}{B^2 \Sigma^2} \sin^2 \theta \cosh \alpha, \quad \Gamma_{00}^1 = -\frac{M\Delta(\Sigma - 2r^2)}{2B^4 \Sigma^3} (B^2 + \cosh^2 \alpha)$$

$$\Gamma_{03}^1 = \frac{Ma\Delta(\Sigma - 2r^2)(1+B^2)}{2B^4 \Sigma^3} \sin^2 \theta \cosh \alpha, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\Delta r - (r-M)\Sigma}{\Delta \Sigma} + \frac{M(\Sigma - 2r^2) \sinh^2 \alpha}{2B^2 \Sigma^2},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Sigma \Gamma_{11}^2, \quad \Gamma_{22}^1 = -\Delta \Gamma_{12}^2, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Sigma} \left[r + \frac{M(\Sigma - 2r^2)}{B^2 \Sigma^2} \left(a^2 \sin^2 \theta + \frac{c_4 \sinh^2 \theta}{2} \right) \right],$$

$$\Gamma_{00}^2 = -\frac{Ma^2 r \sin 2\theta}{2B^4 \Sigma^3} (B^2 + \cosh \alpha), \quad \Gamma_{03}^2 = \frac{Ma^2 r \sin 2\theta \cosh \alpha}{B^4 \Sigma^4}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{a^2(1+B^2) \sin 2\theta}{4B^2 \Sigma \Delta},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{r}{\Sigma} + \frac{M(\Sigma - 2r^2) \sinh^2 \alpha}{2B^2 \Sigma^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\Delta \Gamma_{11}^2, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{\sin 2\theta (r^2 + a^2 + c_1 + Mr c_2 a^2 \sin^2 \theta \sinh^2 \alpha)}{2B^4 \Sigma^4}$$

$$\Gamma_{01}^3 = -\frac{Ma(\Sigma - 2r^2) \cosh \alpha}{B^2 \Sigma^2 \Delta}, \quad \Gamma_{02}^3 = -\frac{2Ma^2 r \cot \theta \cosh \alpha}{B^2 \Sigma^2},$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{r-M}{\Delta} + \frac{M(\Sigma - 2r^2)}{2\Sigma^2} \left(1 + \cosh^2 \alpha + \frac{4Mr \cosh^2 \alpha}{\Delta}\right),$$

$$\Gamma_{23}^3 = \left(1 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma^2}\right) \cot \theta + \frac{Ma^2 r \left(1 - \frac{4Mr}{\Sigma}\right) \sin 2\theta \sinh^2 \alpha}{2B^2 \Sigma^2}$$

şeklindedir.

EK 3: KERR-SEN METRİĞİ İÇİN CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ

$$\zeta = \frac{M(a^2 \cos^2 \theta - r^2)}{\Sigma^2} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$\Gamma_{01}^0 = -\frac{(\Delta + 2Mr)\zeta}{\Delta}, \quad \Gamma_{02}^0 = -\frac{a^2 Mr \sin 2\theta}{\Sigma^2}, \quad \Gamma_{23}^0 = \frac{2a^3 Mr \sin^3 \theta \cos \theta}{\Sigma^2}$$

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{\Delta \zeta}{\Sigma}, \quad \Gamma_{03}^1 = \frac{\Delta a \sin^2 \theta \zeta}{\Sigma}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\Sigma(2(M-r) - r_0) + \Delta(r_0 + 2r)}{2\Sigma\Delta}$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{(r_0 + 2r)\Delta}{2\Sigma}, \quad \Gamma_{00}^2 = -\frac{a^2 Mr \sin 2\theta}{\Sigma^3}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{\Delta \sin^2 \theta ((r_0 + 2r) + 2a^2 \zeta \sin^2 \theta)}{2\Sigma}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma}, \quad \Gamma_{03}^2 = \frac{a Mr \sin 2\theta (\Delta + 2Mr)}{\Sigma^3},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma\Delta}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{(r_0 + 2r)}{2\Sigma}, \quad \Gamma_{01}^3 = -\frac{a\zeta}{\Delta}, \quad \Gamma_{02}^3 = -\frac{2a Mr \cot \theta}{\Sigma^2},$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot \theta + \frac{a^2 Mr \sin 2\theta}{\Sigma^2}, \quad \Gamma_{13}^0 = \frac{a M \sin^2 \theta (a^2 \cos^2 \theta (a^2 - r^2) - r^2 (a^2 + r_0^2 + 4rr_0 + 3r^2))}{\Delta \Sigma^2},$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{\sin 2\theta ((\Delta + 2Mr)\Sigma^2 + 2a^2 Mr (\Delta + 2Mr + \Sigma) \sin^2 \theta)}{2\Sigma^3},$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{(r_0 + 2r)\Sigma\Delta + a^2 \sin^2 \theta (2a^2 \cos^2 \theta (M - r) - \Sigma r_0 - 2r^2 (r_0 + M + r))}{2\Sigma^2 \Delta}$$

şeklindedir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Aylin Çalışkan
Doğum Yeri	İstanbul
Doğum Tarihi	24.09.1989
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	+90 506 745 59 24
E-Posta Adresi	aylinaliskan@istanbul.edu.tr
Web Adresi	https://avesis.istanbul.edu.tr/aylinaliskan/



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Fizik
Mezuniyet Yılı	24.06.2016

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı

Makale ve Bildiriler	
Caliskan A., Gudekli E., 2018, Examination of Anisotropic Bianchi V Types For Perfect Fluid Universe Models, 34. TFD Conference, Bodrum, Turkey.	
E. Güdekli, A. Çalışkan, 2018, Perfect Fluid LRS Bianchi Universe in Myrzakulov Gravity, AIP Conference Proceedings 2042, 020052.	
A. Caliskan, G. D. Esmer, 2018, Black Holes And Gravitational Waves, 34. TFD Conference, Bodrum, Turkey.	