

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EKSENEL AKIŞ ETKİSİNDEKİ PLAKLARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ
İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan KUZGUN

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği Anabilim Dalı

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği Programı

TEMMUZ 2020

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EKSENEL AKIŞ ETKİSİNDEKİ PLAKLARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ
İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Furkan KUZGUN
(508171008)**

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği Anabilim Dalı

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Bahadır UĞURLU

TEMMUZ 2020

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 508171008 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Furkan KUZGUN, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “EKSENEL AKIŞ ETKİSİNDEKİ PLAKLARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Bahadır UĞURLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Dr. Öğr. Üyesi Akif KUTLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 15 Haziran 2020
Savunma Tarihi : 24 Temmuz 2020





Aileme,



ÖNSÖZ

Engin bilgisi ve çok değerli yönlendirmeleri ile bu tez çalışmasının tamamlanmasında yardımını esirgemeyen ve bu çalışma ile mühendislik konularında ufkumu genişleten çok değerli hocam Doç. Dr. Bahadır UĞURLU'ya teşekkür ederim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca manevi desteklerinden dolayı annem, babam ve kardeşime sonsuz şükranlarımı sunarım.

Temmuz 2020

Furkan KUZGUN
(Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ	xv
ŞEKİL LİSTESİ	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı ve Kapsamı	1
1.2 Literatür Araştırması	2
2. MATEMATİKSEL MODEL	5
2.1 Giriş	5
2.2 Sürekli Sistemler İçin Hareket Denklemleri	5
2.3 Mindlin Plak Teorisi	8
2.3.1 Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları	9
2.3.2 Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları	10
2.4 Mindlin Plak Sonlu Eleman Modeli	12
2.4.1 İzoparametrik sonlu eleman	12
2.4.2 Mindlin plak modeli için hareket denklemi	15
2.4.3 Mindlin modeli için kayma kilitlenmesi	16
2.5 Akışkan-Yapı Etkileşim Problemi	17
2.5.1 Akışkan-yapı etkileşimi	19
2.5.2 Genelleştirilmiş hareket denklemi	21
2.5.3 Sınır eleman yöntemi ile hız potansiyeli alanının belirlenmesi	23
3. SAYISAL UYGULAMALAR VE SONUÇLAR	27
3.1 Kuru Analizler	27
3.2 Islak Analiz: Akışkan-Yapı Etkileşimi	29
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43



KISALTMALAR

A	: Statik Kararsızlık
B	: Yeniden Kararlılık
C	: Birleşik Dinamik Kararsızlık
ES	: Eleman Sayısı
MS	: Mod Sayısı





SEMBOLLER

A	: Genelleştirilmiş eksu kütle matrisi
a	: Genelleştirilmiş kütle matrisi
B	: Genelleştirilmiş hidrodinamik sönüm matrisi
B_{b,s}	: Yer değiştirme şekil değiştirme matrisi
C	: Genelleştirilmiş hidrodinamik katılık matrisi, sönüm matrisi
c	: Genelleştirilmiş katılık matrisi, Serbest terim
D	: Eğilme malzeme matris
d	: Plak genişliği
E	: Elastisite modülü
F	: Kuvvet vektörü
f	: Genelleştirilmiş kuvvet matrisi
G	: Kayma malzeme matrisi, Akı ifadelerinin katsayılar matrisi
H	: Potansiyel ifadelerin katsayılar matrisi
h	: Plak kalınlığı
J	: Jacobiye matrisi
K	: Katılık matrisi
k	: Kayma düzeltme katsayısı
L	: Plak boyu
M	: Kütle matrisi
N	: Şekil fonksiyonları matrisi
n	: Yüzey normali
P	: Akışkan basıncı
P_p	: Pertürbasyon nedeniyle oluşan akışkan basıncı
P_s	: Durgun akışkan basıncı
$\ddot{p}, \dot{p}, p$	: Asal koordinat vektörleri
$\ddot{q}, \dot{q}, q$	: İvme, hız, yer değiştirme
q^*	: İvme, hız, yer değiştirme
r	: Uzayda bulunan iki nokta arasındaki uzaklık
T	: Kinetik enerji
t	: Zaman

U	: Öz vektör matrisi, potansiyel enerji
U_x	: Eksenel akım hızı
u	: Mod şekilleri vektörü
u, v, w	: x, y, z doğrultularındaki plak yer değiştirmeleri
V	: Boyutsuz hız değeri
V_A	: Boyutsuz statik kararsızlık başlangıç hızı
V_B	: Boyutsuz tekrardan kararlı duruma geçiş başlangıç hızı
V_C	: Boyutsuz birleşik dinamik kararsızlık durumunun başlangıç hızı
v	: Poisson oranı, yapı kaynaklı akışkan hız vektörü
V	: Akışkan hız vektörü
w	: Ağırlık fonksiyonu, yapı hareketlerinin yüzey normali birleşeni
ω_n	: Doğal frekans
$y, \hat{z}$	: Durum vektörü
z	: Plak kalınlığı boyunca alınan bir mesafe
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$	: Plak normali doğrultusunda şekil değiştirmeler
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	: Plak kayma şekil değiştirmeleri
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	: Normal gerilmeler
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	: Kayma gerilmeleri
θ_x, θ_y	: x ve y eksenlerinde plak orta düzlemindeki dönmeler
ρ_s	: Plak yoğunluğu
ρ_f	: Akışkan yoğunluğu
λ	: Özdeğer
δ	: Varyasyonel, Dirac delta fonksiyonu
ζ, η	: Eleman üzerindeki lokal eksen takımı
Φ, ϕ	: Akışkan pertürbasyon potansiyeli
Φ^*	: Laplace denkleminin temel çözümü
∇	: Gradyen operatörü
Ω	: Kontrol hacmi, boyutsuz frekans değeri
Γ	: Yüzey alanı
$\mathfrak{R}$	: Etkileşim kuvvetleri haricindeki dış kuvvetler
L	: Diferansiyel operatörü

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1: Kare ince plağın doğal frekans değerleri ($L=d=2$ m, $h=0.001$ m).	28
Çizelge 3.2: Kare kalın plağın doğal frekans değerleri ($L=d=2$ m, $h=0.2$ m).	28
Çizelge 3.3: Dikdörtgen ince plağın doğal frekans değerleri ($L=2$ m, $d=1$ m, $h=0.001$ m).	29
Çizelge 3.4: Dikdörtgen kalın plağın doğal frekans değerleri ($L=2$ m, $d=1$ m, $h=0.2$ m).	29
Çizelge 3.5: Sistem karakteristikleri ve boyutsuz hız formülasyonu [13].	37
Çizelge 3.6: Durağan akışkan ($V=0$) için ıslak frekansların karşılaştırılması.	37
Çizelge 3.7: Sistem karakteristikleri ve boyutsuz hız formülasyonu [15].	37
Çizelge 3.8: Statik kararsızlık, yeniden kararlılık ve birleşik dinamik kararsızlık hızlarının karşılaştırılması.	37



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Altı serbestlik dereceli ayrıklaştırılmış sistem.	6
Şekil 2.2 : Mindlin plağı.	9
Şekil 2.3 : Mindlin plağı bünyesinde oluşan gerilmeler.	11
Şekil 2.4 : Kalınlık doğrultusundaki gerçek (τ_{xz}^0, τ_{yz}^0) ve varsayılan (τ_{xz}, τ_{yz}) gerilmeler.	12
Şekil 2.5 : Geometrik koordinatların referans koordinatlara dönüşümü.	12
Şekil 2.6 : 4 noktalı lineer eleman için integrasyon noktaları ve ağırlık fonksiyonları.	16
Şekil 2.7 : Eksenel akışkan etkisinde plak.	17
Şekil 3.1 : $L=2$ m, $d=1$ m, $h=0.001$ m plağı için doğal frekanslarda yakınsama.	30
Şekil 3.2 : $L=2$, $d=1$, $h=0.001$ m plağı için mod şekillerinin karşılaştırılması.	31
Şekil 3.3 : Eleman sayısına göre yakınsaklık analizi.	32
Şekil 3.4 : Modal açılımda dikkate alınan mod sayısına göre yakınsaklık analizi. ...	32
Şekil 3.5 : Plağın ilk beş modu için frekans-hız eğrileri.	33
Şekil 3.6 : Plağın ilk beş modu için sönüm katsayısı-hız eğrileri.	34
Şekil 3.7 : Akış etkisindeki plak için frekans-hız eğrileri [13].	36



EKSENEL AKIŞ ETKİSİNDEKİ PLAKLARIN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

ÖZET

Yapı üstünde akışkanın neden olduğu etkileri saptamak ve etkilerin sebep olacağı bozunumları önlemek adına, dinamik etkileşimin kestirim uygulamalarına ihtiyaç duyulur. Gemi inşaatı, uçak, inşaat, vb geleneksel mühendislik alanları ya da biyomühendislik gibi görece yeni alanlarda akışkan-yapı etkileşimi kaynaklı problemlerin incelenmesi önemli olabilmektedir.

Temelinde bu çalışma, eksenel akış etkisinde düzlemsel basit bağlı plağın dinamik davranışını, lineer hidroelelastisite teorisinin ana ilkeleri doğrultusunda çözmeyi hedeflemiştir. Bu ilkeler doğrultusunda, farklı ortamlar için ayrı çözümler yapılmış ve çözümler birleştirilerek bütün bir sistem incelenebilmiştir. Problemden iki farklı sınır şartı çözümlerde uygulanmıştır. İlki, plağın akışkanda sonsuz derinlikte olacağı, bir diğeri ise ortamların etkileşimini sağlayan, akışkan-yapı arayüzündeki sınır şartıdır. Ayrıca akışkan ile etkileşimin plağın bir yüzeyinden olduğu kabul edilmiştir.

Uygulanan çözüm yaklaşımı, yapısal sönüm ve dış kuvvetlerin yokluğunda elastik yapının dinamik karakteristiklerinin (doğal frekanslar ve karşılık gelen titreşim modları) belirlenmesi ve plak davranışının modal uzayda ifade edilmesi ile birlikte akışkan-plak etkileşiminin doğal modlar vasıtasıyla gerçekleştiği varsayımı ile akışkan probleminin çözülerek, etkileşim kuvvetlerinin kestirimi şeklindedir. Plak dinamik karakteristiklerinin tespit edildiği analizin ‘kuru’ safhası için sonlu eleman yöntemi Mindlin plak modeli üzerinde uygulanmış, akışkan-yapı etkileşim kuvvetlerinin hesaplandığı ‘ıslak’ safha içinse, etkileşim sonucunda ortaya çıkan akış alanını akışkan-yapı arayüzünde (plak yüzeyi) tanımlayan sınır integral denklem, sınır eleman yöntemiyle çözülmüştür. Akışkan ideal (viskoz olmayan ve sıkıştırılmaz) ve hareketi irrotasyonel kabul edilerek, yapının denge konumu etrafındaki küçük genlikli elastik titreşimlerinin akışkan ortamında neden olduğu hareketlenmeler (pertürbasyonlar), potansiyel akış modeliyle ifade edilmiştir. Akışkan ortamının sonsuza uzandığı varsayımıyla serbest yüzey etkileri ihmal edilmiştir.

Akışkan kuvvetleri ile yapısal hareket denkleminin çözümünden, yapı davranışında belirleyici rolü olan kararsızlık durumları ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Plakta gözlenen kararsızlıklar yapının giderek büyüyen genliklerde hareket ettiği anlamına gelmektedir. Bu sebepten kararsızlık durumlarının doğru tespiti için yapısal nonlineerliklerin çözüme katılması gerekmektedir. Ayrıca, tez kapsamındaki uygulamalar basit mesnetli plaklarla sınırlı kalmış olsa da, yöntem plağın tüm kenarı boyunca bağlı olduğu bütün sınır şartları için uygulanabilir. Bununla birlikte, konsol plak gibi belirli kenarların serbestçe hareket edebildiği sınır şartları için, serbest uçlarda oluşacak girdap etkilerini dikkate alabilen yeni bir akışkan-yapı etkileşim modeline ihtiyaç vardır.

Önerilen analiz yöntemi ile varılan sonuçların, ticari sonlu eleman yazılımları ve literatürde yer alan çalışmaların sonuçlarıyla uygunluk içerisinde olduğu saptanmıştır.



INVESTIGATION OF THE DYNAMIC BEHAVIOR OF FLOW INDUCED PLATES

SUMMARY

Understanding the behaviour of plate in fluid is an important task for engineering design process. In different engineering fields such as marine, civil, mechanical, aeronautic and bioengineering is encountered with fluid structure interaction problem. Simulation of interaction problems help to predict structural deformation and structure dynamics for engineering applications.

This thesis is aimed to examine the dynamic behaviour of a simple supported plate that is subjected to uniform axial fluid flow from one surface. Examined problem is based on linear hydroelasticity equations. It is facilitate to solve problem seperatly as fluid and structural stage. Thus, the solution of the interaction problem is made with different solution method. Furthermore, interaction of fluid and structure are made through help of kinematic boundary condition on plate surface. So, solutions is coupled and solved as an one stage.

In this thesis, it is assumed that the presence of the structure in the fluid did not cause any deterioration in the fluid domain. The interaction with fluid just took place with natural mode shapes of the plate. So, the problem could be considered as the dynamic analysis investigation of the plate that vibrates with natural mode under the fluid domain.

Presented numerical procedure is founded on two separate analysis. The first analysis is made to get the result of the natural frequencies and corresponding principal mode shapes in dry state (condition that no fluid effect). Structural damping and environmental forces are neglected in the solution of dry state. In the second analysis, the fluid force values is calculated according to dynamic values of plates in dry state. These forces would impact separately to acceleration, speed and deformation expressions of the equation of motion. So, the two system could be expressed as one system.

In first solution of problem, a code study is made in the Matlab software program to calculate the dynamic values of plate (natural frequency values and mode shapes) in dry state. The code provide generalized finite element solution to get results of plate's dynamic values for any aspect ratio and thickness of plate in simple supported condition. The dynamic values are calculated with eigenvalue and eigenvector solutions. Eigenvalues give a results of plate's natural frequencys and eigenvector give a results of mode shapes corresponding to natural frequencys. Dry state of solutions are made in basis of Mindlin plate theory.

The Mindlin plate theory is defined as the thick plate theory. It causes wrong results in thin plate solutions because of the shear-locking problem. The reduced integration method is included to the generalized finite element solution to deal with shear-locking problem for the solutions of thin plates of the Mindlin plate theory.

Mesh elements are necessary for the solution of the finite element method. The mesh elements are created as linear isotropic finite elements that have four nodes at each corner and each node has three degrees of freedom. The dynamic values of dry state are compared with the Ansys software program results. Shell181 type elements are used in Ansys software program. These elements are classified as linear isotropic type elements in Ansys. In addition, the convergence criteria of the natural frequency (in dry state) values are examined according to the increasing number of mesh elements.

First boundary condition employed in the system is that surface normal direction velocities at the interface between fluid and structure are equal. It means that the elastic vibration movements of the structure at the direction of the surface normal excite the fluid domain with the same velocity at the interface between fluid and structure. The other boundary condition, the plate is considered to be located at an infinite depth in the fluid. With this assumption, the effect of structure movement is considered to be zero at the infinite boundary of the fluid.

The fluid is assumed ideal (inviscid and incompressible) and its motion is irrotational. Small elastic vibrations move the fluid domain and that movement causes perturbation velocities. Perturbation velocities are assumed to be expressed as the potential gradient in this thesis. Using the Bernoulli's equation, the dynamic fluid pressure is expressed in terms of potential function, so that the fluid-structure interaction forces are calculated from pressure distribution on the wetted surface, as generalized added mass, hydrodynamic damping and hydrodynamic stiffness, due to the inertial, Coriolis and centrifugal effects of fluid, respectively. By merging the generalized structural matrices (mass and stiffness) with the hydrodynamic matrices, an eigenvalue problem is obtained, from which the dynamic characteristics of the structure are achieved.

In second solution of problem, a boundary integral solution is created to determine the changes in the fluid perturbations caused by the elastic vibrations of the structure. A boundary integral solution is made for Laplace equation under the given boundary conditions. So, potential values at the wetted surface are obtained.

The structure is exposed to the added-mass effect only in the quiescent fluid. Coriolis and centrifugal effects are revealed with the flowing flow in addition to the added-mass. Added-mass increases the inertia value of the structure; so, it causes a decrease in the frequency values. The centrifugal effect causes negative elasticity to the plate and its effect decreases all frequency value. Coriolis effect is responsible to plate damping and it plays an important role for the plate instabilities.

The centrifugal effects may completely remove the elasticity of the structure at a certain fluid velocity. The state of the plate at this velocity is expressed as a static instability (divergence). The plate does not vibrate in the mode that causes the static instability situation, but, displacements are so high at this mode. In this thesis, static instability is observed in the first mode of the plate.

The other type of instability that emerges in flowing fluid is the dynamic instability (couple mode flutter). In this thesis, first and second modes are coupled in a certain flow velocity (after the static instability condition) and so, it causes the dynamic instability. Coriolis forces are the main effects to emerge the dynamic instability because they have a responsible of damping on the structure. When fluid velocity increases, damping effect tends to gradually decrease. At certain velocity, transferred energy to the plate from fluid reaches a positive value. At this stage, the plate vibrates at first two modes but the plate vibration is large. This post-divergence behavior,

however, can be considered purely theoretical, since the linearity assumption becomes obsolete after the onset of divergence.

Static and dynamic instabilities have large deformations. This could exceed the linear limits of the plates. For this reason, to determine behavior of the plate's instability conditions with the linear structural assumption is obsolete. For this reason, it would be more appropriate to determine the plate's instability behaviors by including structural nonlinearities to the solutions. Beside of this, the presented method is not valid for all types of plate supports. In cantilever plates, for example, an energy transfer mechanism from flow to plate is developed and the present fluid model should be modified to consider the accompanying vortices.

The response of fluid-structure systems to any external excitation (wave forces, propulsion forces, etc.) could be analyzed, by adopting the mathematical model with using the computed wet dynamic characteristics. Comparison are made with result the literature and commercial finite element program for several characteristic (wet frequencies, dry frequencies, dry mode shapes) that clearly show the reliability and effectiveness of the method.



1. GİRİŞ

Birçok mühendislik alanında, akışkan ve yapı arasındaki etkileşimin davranış üzerinde belirleyici olduğu sistemler ve bu sistemleri ‘modelleyen’ sayısal kestirim uygulamalarına ihtiyaç duyulur. Akışkan-yapı etkileşimi, günlük rutinimiz içinde çok farklı şekillerde—dalgalanmakta olan bir bayrak, serbest kalan bir su hortumunun çırpınması veya bir balığın hareketi gibi—karşımıza çıkabilmektedir. Gemi inşaatı, uçak, inşaat, vb. geleneksel mühendislik alanları ya da biyomühendislik gibi görece yeni alanlarda akışkan-yapı etkileşimi kaynaklı problemlerin incelenmesi önemli olabilmektedir. Etkileşim problemlerinde hedeflenen, akışkanın yapıda neden olduğu dinamik etkileri incelemektir. Diğer yanda vurgulamak gerekir ki, akışkan ile yapı arasında bir etkileşimin varlığı, bu etkileşimin doğrudan dikkate alınmasını gerektirmez; ilgi özellikle yapı rijitliğinin düşük, akışkan ve yapının malzeme yoğunluklarının benzer mertebelerde ya da akışkanın yüksek hızlara sahip olduğu durumlar üzerinedir.

1.1 Tezin Amacı ve Kapsamı

Durağan bir akışkan veya eksenel doğrultuda etkiyen üniform bir akış ortamında elastik bir yapının dinamik davranışının lineer bir çerçevede ele alındığı çalışmanın temel hedefi, plakların hidrodinamik etkilerce değişen dinamik davranışının tespiti için sayısal bir analiz ortamının kurulması ve uygulanmasıdır. Bu hedef doğrultusunda, sonlu eleman ve sınır eleman yöntemleri, sırasıyla yapı ve akışkan problemlerinin çözümü için, lineer hidroelastisite teorisinin [1,2] ana ilkeleri etrafında birleştirilmiştir.

Uygulanan çözüm yaklaşımı, yapısal sönüm ve dış kuvvetlerin yokluğunda elastik yapının dinamik karakteristiklerinin (doğal frekanslar ve karşılık gelen titreşim modları) belirlenmesi ve plak davranışının modal uzayda ifade edilmesi ile birlikte akışkan-plak etkileşiminin doğal modlar vasıtasıyla gerçekleştiği varsayımı ile akışkan probleminin çözülerek, etkileşim kuvvetlerinin kestirimi şeklindedir. Plak dinamik

karakteristiklerinin tespit edildiği analizin ‘kuru’ safhası için sonlu eleman yöntemi Mindlin plak modeli üzerinde uygulanmış, akışkan-yapı etkileşim kuvvetlerinin hesaplandığı ‘ıslak’ safha içinse, etkileşim sonucunda ortaya çıkan akış alanını akışkan-yapı arayüzünde (plak yüzeyi) tanımlayan sınır integral denklem, sınır eleman yöntemiyle çözülmüştür. Akışkan ideal (viskoz olmayan ve sıkıştırılmaz) ve hareketi irrotasyonel kabul edilerek, yapının denge konumu etrafındaki küçük genlikli elastik titreşimlerinin akışkan ortamında neden olduğu hareketlenmeler (pertürbasyonlar), potansiyel akış modeliyle ifade edilmiştir. Akışkan ortamının sonsuza uzandığı varsayımıyla serbest yüzey etkileri ihmal edilmiştir.

Tez çalışmasında önerilen analiz yöntemi, kenarlarından basit mesnetli dörtgen plaklar üzerine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçların doğrulanması amacıyla gerek dinamik karakteristikler gerekse ıslak sonuçlar—ıslak frekans değerleri ve kararsızlığın ortaya çıktığı akış hızı değerleri—ticari yazılımlarla elde edilen değerlerle ve açık literatürde yer alan çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

1.2 Literatür Araştırması

19. yüzyıl başlarından itibaren akışkan kaynaklı etkilere bağlı olarak silindirik kabuk, dörtgen ve dairesel plak, vb. elastik yapılarda gözlenen davranış değişiklikleri, çok sayıda analitik, yaklaşık ya da sayısal incelemenin konusu haline gelmiştir [3].

Akışkan etkisi altındaki elastik yapıların dinamik davranışı ilk olarak Lamb [4] tarafından incelenmiş, rijit düzlemde ankastre mesnetlenmiş dairesel bir yapının durağan akışkan ortamındaki eksu kütle değerleri ve ıslak frekansları elde edilmiştir. Hesaplama yaklaşımı, akışkan kinetik enerjisinin belirlenerek Rayleigh-Ritz tekniğinin uygulanması şeklindedir.

Kwak ve Kim [5], durağan akışkan ortamıyla etkileşim içindeki basit mesnetli dairesel plakları ele aldıkları çalışmalarında, plak ıslak modlarının doğal mod şekilleriyle benzer olduğu kabulü altında, farklı geometri, malzeme ve sınır koşulları için boyutsuz eksu kütle artım katsayısı (NAVMI) hesaplamalarını sunmuşlardır. Bu katsayılar, yapının ıslak frekanslarının hızlı bir şekilde tahminine imkan vermektedir.

Fu ve Price [6], akışkan içine kısmen daldırılmış, yatay ve dikey pozisyonundaki konsol dörtgen plakların kuru ve ıslak dinamik karakteristiklerini lineer hidroelastisite teorisi kapsamında elde etmişlerdir. Çalışmada serbest yüzey etkileri dikkate alınmış, ayrıca

daldırılmış plak boyunun frekans değerleri üstündeki etkisi incelenerek, sonuçlar deneysel verilerle karşılaştırılmıştır. Ergin ve Uğurlu [7], aynı problemi plağın yüksek frekanslarda titreştiği kabulü altında serbest yüzey etkilerini ihmal ederek ve imaj yönteminden yararlanarak çözmüşlerdir. Akışkan etkilerinin sınır eleman yöntemi ile belirlendiği çalışmada, yapının ıslak frekansları elde edilmiş ve sonuçlar teorik ve deneysel verilerle karşılaştırılmıştır.

Akışkan ortamının durağan olmayıp hıza da sahip olması durumunda akışkan-yapı etkileşimi, akışkan eksu kütesine ek olarak, hız kaynaklı Coriolis ve santrifüj etkilerini de kapsar. Yapısal eylemsizliğe akışkan kaynaklı bir eklemeyi temsil eden eksu kütesinin yanında hıza bağlı bu yeni etkiler, yapısal davranışı radikal bir şekilde değiştirme potansiyeline sahiptirler—özelikle akışkan yoğunluğunun fazla olduğu (yapının yoğunluğu mertebesinde) ya da akış hızının yüksek olduğu durumlarda—yapıyı statik veya dinamik olarak kararsızlaştırmak (sırasıyla *divergence* ve *flutter*) gibi.

Weaver ve Unny [8], sonsuz genişlik ve sonlu boya sahip bir model ve sonsuz genişliklerden mesnetlendiği kabulleri altında, plağın bir yüzeyinden yüksek yoğunlukta akışkana (su gibi) maruz kalması durumunu, sonlu derinlikteki akışkan ortamı için incelemişlerdir. Serbest yüzey etkilerinin plak boyunun yarısından fazla derinlik durumlarında etkisinin olmadığının gözlendiği çalışmada, yapının hem statik ve hem de dinamik olarak kararsızlaşabildiği tespit edilmiş ve statik kararsızlığın ortaya çıktığı kritik hız değerleri analitik olarak elde edilmiştir.

Benzer şekilde, tek boyutlu plak ve iki boyutlu akışkan sistemini dikkate alan Guo ve Paidoussis [9], farklı olarak akışkanın belirli bir yükseklikte sınırlandırıldığı ve akışın plağın her iki yüzeyinde var olduğu durumu incelemişlerdir. Yapı ve akışkan problemlerinin sırasıyla Galerkin yöntemi ve Fourier dönüşümü ile ele alındığı çalışmada, farklı mesnet koşulları ve sistem parametrelerindeki (kanal yüksekliği, akışkan-yapı kütle oranı, vb.) değişimlerin sonuçlar üzerindeki etkileri incelenmiştir. Sonuç olarak, tüm mesnet şartlarında statik kararsızlık ve bunu takip eden birden fazla titreşim modunun dahil olduğu birleşik dinamik kararsızlık halleri gözlenmiştir; bunun istisnası, simetrik mesnet şartına sahip olmayan plaklar için dinamik kararsızlığın tek modlu olarak gerçekleşmesidir.

Gua and Paidoussis [10], potansiyel akışkan etkisindeki paralel plakların kararlılık durumlarını inceledikleri çalışmalarında statik kararsızlık ve iki modun birleşik dinamik kararsızlık durumlarını gözlemişler, ayrıca plak boyunun artması ve plaklar arası mesafenin azalması ile birlikte frekans ve kritik hız değerlerinin düştüğünü ve hidrodinamik ve yapısal sönümün statik ve dinamik kararsızlığın ortaya çıkışı üzerinde önemli etkileri olduğunu vurgulamışlardır.

Kerboua ve diğerleri [11], dikdörtgen bir plağın dinamiğini Sanders kabuk teorisine altında sonlu eleman yöntemi ile ele alarak, farklı bağ koşulları için kritik hız değerlerini hesaplamıştır. Ayrıca akışkan etkisinde paralel plakların statik kararsızlığında kritik hız değeri hesaplanmıştır. Plak boyunun ve plak arası mesafe oranına göre kritik hız değerindeki değişimleri, Miller [12] tarafından sunulan ve yapıya etkileyen hidrodinamik basıncın plağın iç kuvvetleri ile dengelenmesine dayanan analitik çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Tubaldi ve Amabili [13], sonsuz genişlik ve boya sahip, periyodik mesnetli plakları potansiyel akış modeli ve Rayleigh-Ritz yöntemi ile incelemişler ve statik kararsızlığın ortaya çıkışını tanımlayan kritik hız değerlerini sunmuşlardır. Rijid bir duvar ile sınırlandırılan akışkan ortamının plak ile teması bir yüzey üzerinden gerçekleşmektedir. Hesaplama dikkate alınan mod sayısının yakınsaklık bakımından etkileri üzerinde durulmuş ve plak en-boy oranının kritik hıza olan etkisi incelenmiştir.

Bochkarev ve diğerleri [14], Timoshenko teorisi altında ve sonlu eleman ve Bubnov-Galerkin yöntemlerini uygulayarak plak davranışını incelemiş, hem sakin akışkan hem de akışın varlığı durumunda doğal frekanslardaki değişimleri farklı mesnet şartlarını dikkate alarak sunmuştur.

Ragab ve Hassan [15], sonlu eleman yönteminden Mindlin-Reissner teorisi altında yararlanarak probleme yaklaşmış, dairesel, dörtgen ve üçgen panellerin eksenel akış etkisi altındaki dinamik davranışlarını, farklı mesnet şartlarında doğal frekans ve kritik hız değerlerini tespit ederek incelemiştir.

2. MATEMATİKSEL MODEL

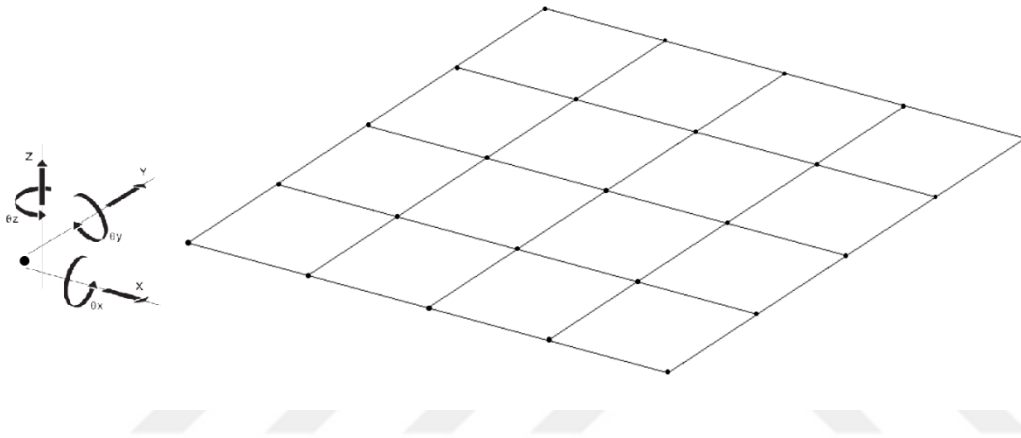
2.1 Giriş

Akışkan ile yapının etkileşim içinde olduğu dinamik problemler, yapısal hareketin akışkan içerisinde yol açtığı değişimler ve buna karşılık olarak akışkan ortamından yapıya gelen karşı etkiler—hidrodinamik basınç ve bu basıncın yapı üzerindeki net ifadesi olan kuvvetler—ile ilgilenir. Burada amaç, karşılıklı etkiler üzerinden akışkan-yapı sisteminin ortak davranışının belirlenmesidir. Tez kapsamında ele alınan etkileşim problemi, eksenel (düzlem içi etkiyen) akışa maruz plakların dinamik davranışının, yapısal kararlılık üzerinde özellikle durularak, incelenmesidir. Akışkan-yapı arayüzeyi iki sistemi birbirine bağlayan, bilgi transferinin gerçekleştiği bir geçit işlevi görmektedir. Yapının elastik hareketleri akış alanında arayüz üzerinden dalgalanmalar oluştururken, akışkan ortamı cevabı etkilerini gene arayüz üzerine uygulamaktadır. İki farklı ortama ait davranışların söz konusu olması, davranışların belirlenmesi için farklı yöntem tercihlerine imkân vermekteyse de, arayüz üzerinden bilgi aktarımının gerekliliği, seçilen yöntemlerin uyumlu olmalarını da zorunlu kılmaktadır. Bu çalışmada, analizler için seçilen yöntemler, plak ve akışkan ortamı için sırasıyla sonlu eleman ve sınır eleman yöntemleridir. Sonlu eleman yöntemi plağın dinamik karakteristiklerinin tanımlanması için kullanılacak, sınır eleman yöntemi ise potansiyel kabul edilen akışkan ortamının yapı kaynaklı hareketlenmelerinin tespiti için uygulanacaktır. Plağın sonsuz derinliğe sahip bir akışkan ortamında olduğu göz önüne alınmış ve akışkan serbest yüzey etkileri ihmal edilmiştir.

2.2 Sürekli Sistemler İçin Hareket Denklemleri

Sonsuz serbestlik derecesine sahip sürekli sistemlerin (kiriş, plak, kabuk, vb.) dinamik davranışlarının araştırılmasında kesin (analitik) çözümler ancak görece basit geometri, sınır şartı, yükleme, vs. durumlar için geçerlidir ve yaklaşık ya da sayısal çözüm teknikleri kullanılarak sistemin ayrıklaştırılması genellikle tercih edilen yaklaşımdır. Buradaki anahtar husus, ayrıklaştırmanın esas bileşenindeki (ayrıklaştırmada

kullanılan terim, düğüm noktası, eleman, vb. değişkenlerin sayısı) iyileştirmelerin bizi ‘doğru’ sonuca yaklaştırmasıdır. Sayısal analizlerde, ‘sonsuz’ bir çözümün yerini, sistemi temsil eden belirli sayıda nokta veya eleman için tanımlanmış, sonlu serbestlik derecesine sahip bir çözüm alır; sürekli bir sistem, ayrıklaştırarak sonlu bir sisteme dönüştürülür. Sistemin toplam serbestlik derecesi, uygulanan yöntemin (sonlu farklar, sonlu eleman, sınır eleman, vb.) yanında sistem/problem için uygun görülen teorik modele de bağlıdır. Şekil 2.1’de her bir düğüm noktasında en genel hali temsilen 6 serbestlik derecesinin (üç öteleme ve üç dönme) tanımlı olduğu bir plak sonlu eleman modeli örnek olarak verilmiştir.



Şekil 2.1: Altı serbestlik dereceli ayrıklaştırılmış sistem.

Dinamik bir sistemin davranışı hareket denklemleri ile tanımlanır; Newton’un temel hareket yasasının yanında, mekaniğin ana varyasyonel ilkelerinden türetilmiş Lagrange denklemleri özellikle ayrıklaştırılmış sistemler için sıklıkla kullanılır. Sistemin sahip olduğu kinetik ve potansiyel enerjilere dayanan Lagrange denklemleri,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = F_i(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada, T ve U sırasıyla cismin toplam kinetik ve potansiyel enerjisini, $F_i(t)$ ise sisteme uygulanan dış etkileri temsil etmektedir; n sistemin toplam serbestlik derecesidir. Elde edilen denklemlerin bir araya getirilmesiyle ayrıklaştırılmış (çok serbestlik dereceli) sistem için hareket denklemi,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

olarak verilebilir. Burada, $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ ve $\ddot{\mathbf{q}}$ sırasıyla sistemin zamana bağlı yer değiştirme, hız ve ivme vektörlerini; $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{K}$ sırasıyla kütle, sönüm ve katılık matrislerini ve $\mathbf{F}$ dış kuvvet vektörünü temsil etmektedir.

Dış kuvvetlerin olmadığı ve sönüm etkilerinin ihmal edildiği bir sistem için hareket denklemi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = 0 \quad (2.3)$$

olarak ifade edilir. $\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}e^{i\omega_n t}$ çözümünün eşitliğe uygulanmasıyla,

$$(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde sistemin sönümsüz serbest titreşimlerini tanımlayan özdeğer problemi elde edilir. Eşitliğin sıfırdan farklı çözümlere sahip olabilmesi için,

$$\det [-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] = 0 \quad (2.5)$$

şartından, n serbestlik derecesine sahip bir sistem için n farklı ω özdeğeri ve karşılık gelen $\mathbf{u}$ özvektörü elde edilir. Sistemin kütle ve elastikiyeti ile belirlenen ω doğal frekansları ve $\mathbf{u}$ mod şekilleri (ya da modal vektörler) sistemin dinamik karakteristikleri olarak ifade edilirler.

Yapısal bir sistemin dış etkilere karşı dinamik cevabı modal vektörlerin oluşturduğu bir uzayda tanımlanabilir. Modal açılım olarak adlandırılan bu yaklaşımda sistemin cevabı (yer değiştirme vektörü) mod şekillerinin bir süperpozisyonu olarak

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^n u_i p_i(t) = \mathbf{U} \mathbf{p} e^{i\omega t} = \mathbf{U} \mathbf{p}(t) \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir [1]. Burada, modal matris $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \dots \mathbf{u}_n]$, modal açılımda dikkate alınan mod şekli sayısını ve asal (veya modal) koordinat vektörü $\mathbf{p}(t)$, her bir mod şeklinin toplam dinamik cevaptaki katkısını temsil etmektedir.

(2.6) ifadesinin (2.2) denkleminde uygulanması ve $\mathbf{U}^T$ ile çarpımının sonucunda hareket denklemi, asal koordinatlar cinsinden tanımlanmış olan genelleştirilmiş (veya modal) hareket denklemine dönüşür:

$$\mathbf{a}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{b}\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{c}\mathbf{p} = \mathbf{f}(t) \quad (2.7)$$

İfadede yer alan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ terimleri sırasıyla genelleştirilmiş kütle, sönüm ve katılık matrisleridir ve

$$\mathbf{a} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{U}^T \mathbf{C} \mathbf{U} \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.8c)$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{U}^T \mathbf{F}(t) \quad (2.8d)$$

olarak tanımlanırlar. Asal koordinatlarda ifade edilen genelleştirilmiş kütle ve katılık matrisleri diyagonal forma sahiptir.

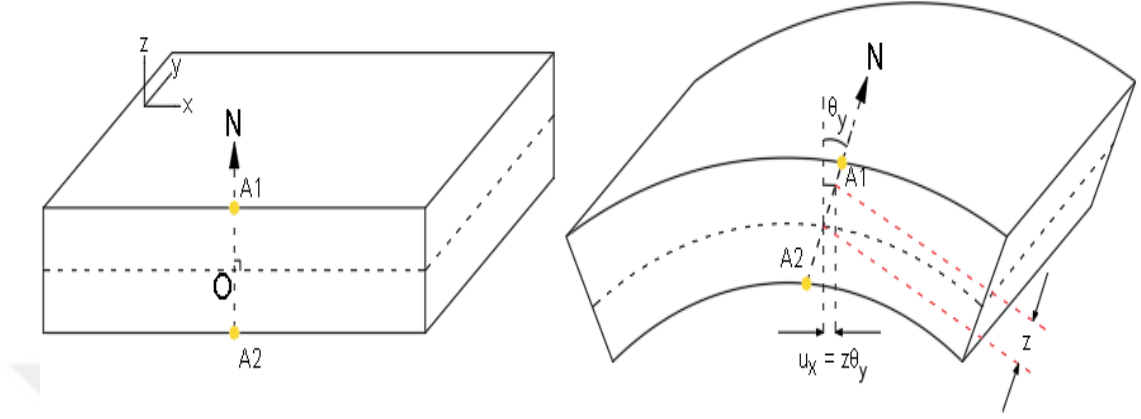
2.3 Mindlin Plak Teorisi

Taşıyıcı sistemler içerisinde önemli bir yere sahip olan plaklar, kalınlıkları diğer iki boyuta göre küçük olan ve düzlem dışı kuvvet taşıyabilen iki boyutlu düzlemsel elemanlardır. Plaklar, kalınlık oranlarına (kalınlığın plak karakteristik boyutuna göre oranı) bağlı olarak ince, nispeten kalın ve kalın plaklar olarak sınıflandırılabilir. İnce plaklar için geçerli olan klasik plak teorisi (Kirchhoff teorisi) plak kesitindeki kayma etkilerini ihmal ederken, kalınlığın artması ile birlikte bu etkilerin dikkate alınması gerekliliği, daha gelişmiş bir model olarak Mindlin plak modelini öne çıkartır.

Kayma etkilerinin lineer olarak ele alındığı ve birinci mertebeden kayma teorisi olarak da bilinen Mindlin modeli aşağıdaki kabullere dayanır:

- Malzeme homojen ve izotropiktir.
- Şekil değiştirmeler çok küçüktür ve plak lineer elastik bölgede çalışır.
- Şekil değiştirme sonrasında plak tarafsız eksenini aynı kalır.
- Plak normali doğrultusundaki yer değiştirmeler çok küçüktür ve $\varepsilon_{zz}=0$ alınır.
- Eğilmeden önce tarafsız eksene dik olan plak kesitleri eğilme sonrasında sadece düzlemliklerini korurlar. Kesitlerin dönmesine izin verilmesiyle birlikte kayma şekil değişiklikleri dikkate alınır.

- Plak düzlemi x, y eksenleri ve düzlem dışı z eksenleriyle tanımlanmak üzere (Şekil 2.2), plak bünyesinde oluşan yer değiştirmeler, z yönünde plağın çökmesi $w(x, y)$ ve plak kesitinin x ve y eksenleri etrafındaki, sırasıyla θ_x, θ_y , dönmeleriyle ifade edilir.



Şekil 2.2: Mindlin plağı.

Mindlin plağı için plak kesiti üzerinde yer değiştirmeler

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w(x, y) \\ u(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

olarak verilir [17]. u , v , w , sırasıyla x , y , z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmelerdir.

2.3.1 Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları

(2.9) yer değiştirme alanından Mindlin modeli için şekil değiştirmeler,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left(-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

olarak elde edilir. ε_{xx} , ε_{yy} düzlem içi, ε_{zz} düzleme dik normal şekil değiştirmeleri ve γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} kayma şekil değiştirmelerini temsil etmektedir. Şekil değiştirmeler eğilme kaynaklı şekil değiştirmeler, $\boldsymbol{\varepsilon}_b$, ve kayma kaynaklı şekil değiştirmeler, $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, olarak ayrılabilir [18]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_1] \{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_2] \{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3.2 Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları

Malzeme lineer, homojen ve izotropik olarak alınmıştır; buna göre Mindlin plak modeli için lineer gerilme-şekil değiştirme bağıntıları

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \cong 0 \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= k G \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\tau_{yz} = kG\gamma_{yz}$$

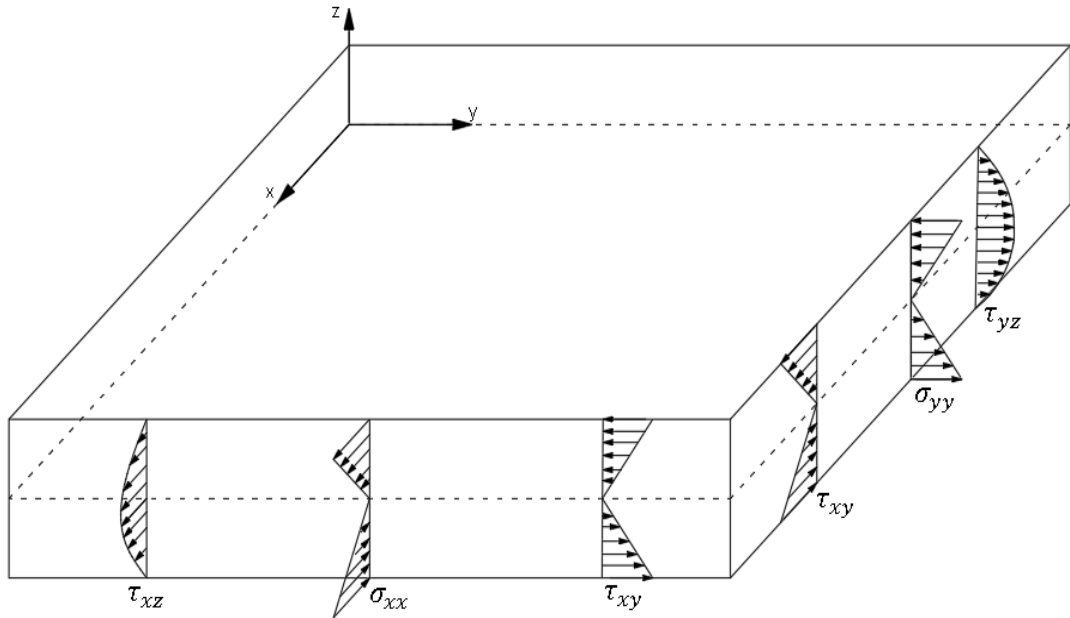
ile verilir. Burada, σ_{xx} ve σ_{yy} , düzlem içi, σ_{zz} düzleme dik normal gerilmeleri, σ_{xy} düzlem içi kayma gerilmelerini ve σ_{xz}, σ_{yz} düzleme dik kayma gerilmelerini ifade etmektedir.

Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları, şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları gibi iki kısma ayrılarak, eğilme ve kayma etkileriyle ilişkili olacak şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir [18]:

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{D}]\boldsymbol{\varepsilon}_b = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = [\mathbf{G}]\boldsymbol{\varepsilon}_s = kG \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

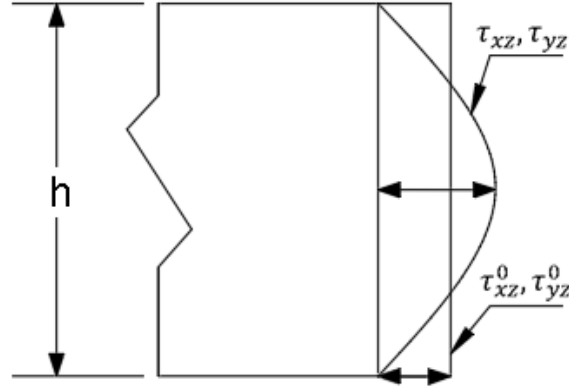
Burada, $G = E/(1-2\nu)$ bağıntısı kullanılmıştır ve $[\mathbf{D}]$ ve $[\mathbf{G}]$ sırasıyla eğilme ve kayma malzeme matrisleri, k ise kayma düzeltme faktörüdür. Mindlin plağı için gerilme bileşenleri şematik olarak Şekil 2.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3: Mindlin plağı bünyesinde oluşan gerilmeler.

Mindlin plak modeli ile düzlem içi kayma gerilmeleri kalınlık boyunca sabit olarak elde edilmektedir (Şekil 2.4). Gerçek durumun farklılık göstermesi—kayma

gerilmeleri kalınlık boyunca parabolik olarak değişim gösterir—sebebiyle kayma gerilmeleri k kayma faktörü ile ‘düzeltilmektedir.’



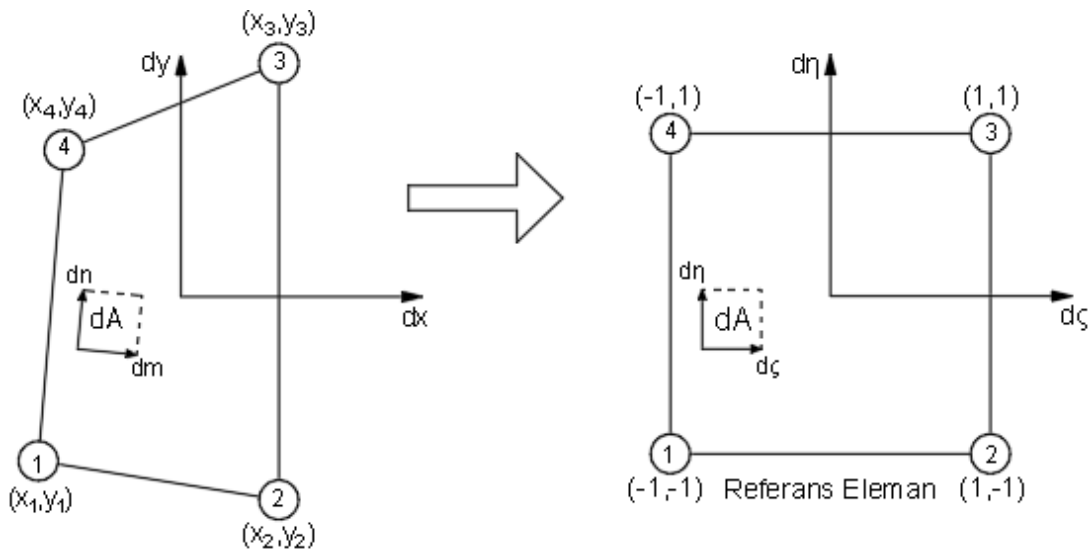
Şekil 2.4: Kalınlık doğrultusunda gerçek (τ_{xz}^0, τ_{yz}^0) ve varsayılan (τ_{xz}, τ_{yz}) gerilmeler.

Düzeltilme faktörünün değeri plak geometrisi ve malzemesine göre belirlenir. Homojen ve düz plaklar için 5/6 sık kullanılan bir değerdir [19]. Tez kapsamında kayma faktörü olarak bu değer alınmıştır.

2.4 Mindlin Plağı Sonlu Eleman Modeli

2.4.1 İzoparametrik sonlu eleman

Kartezyen eksen takımında belirlenen elemanın, local koordinatlarda belirlenen referans elemana dönüşümü Şekil 2.5’de belirtilmektedir.



Şekil 2.5: Geometrik koordinatların referans koordinatlara dönüşümü.

Şekil 2.5’de Kartezyen eksen takımında verilen diferansiyel alan elemanı referans eleman üzerinde tanımlanmış (ξ, η) lokal koordinatları üzerinde,

$$dA = dm \times dn = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \right) d\xi \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \right) d\eta = \det J d\xi d\eta \quad (2.16)$$

olarak elde edilir [20]. Burada, koordinat dönüşümünün Jakobiyesi $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ile verilir. Şekil 2.5’de yer alan referans eleman, 4 noktalı lineer izoparametrik eleman olarak bilinir. Kartezyen koordinatların lokal koordinatlar cinsinden ifadesi

$$x = \sum_{i=1}^n x_i N_i(\xi, \eta) \quad y = \sum_{i=1}^n y_i N_i(\xi, \eta) \quad (2.18)$$

şeklindedir [21]. Burada, n eleman düğüm noktası sayısı ve (x_i, y_i) düğüm noktalarının Kartezyen eksen takımındaki koordinatlarıdır; N_i şekil fonksiyonlarını temsil etmektedir. 4 noktalı lineer eleman için şekil fonksiyonları,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta), N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.19)$$

ile verilir [21].

(2.18) ve (2.19) denklemlerinin kullanılması ile Jakobiye ifadesi

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i N_{i,\xi}(\xi, \eta) & \sum_{i=1}^n y_i N_{i,\xi}(\xi, \eta) \\ \sum_{i=1}^n x_i N_{i,\eta}(\xi, \eta) & \sum_{i=1}^n y_i N_{i,\eta}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

haline gelir. Koordinat dönüşümü türev ifadelerinde de dönüşüm gerektirir. Kartezyen koordinatlardaki türev ifadelerinin doğal koordinatlardaki karşılıkları,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Problemin serbestlik dereceleri de benzer şekilde izoparametrik eleman üzerinde tanımlanabilir:

$$w = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta, \eta) w_i, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta, \eta) \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta, \eta) \theta_{yi} \quad (2.22)$$

(2.22) ifadelerinin (2.11) ve (2.12) denklemlerinde kullanılmasıyla yer değiştirmeler için,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_b &= \mathbf{L}_1 \mathbf{u} = \mathbf{L}_1 \mathbf{N} \mathbf{q}^e = \mathbf{z} \mathbf{B}_b \mathbf{q}^e \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s &= \mathbf{L}_2 \mathbf{u} = \mathbf{L}_2 \mathbf{N} \mathbf{q}^e = \mathbf{B}_s \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (2.23)$$

yazılabilir. $\mathbf{q}^e = (w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} \dots w_4 \theta_{x4} \theta_{y4})$ 4 noktalı lineer eleman için serbestlik derecelerini temsil etmektedir ve $\mathbf{B}_b$ ve $\mathbf{B}_s$ matrisleri aşağıdaki şekilde verilir.

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Burada, $\partial N_i / \partial x$, $\partial N_i / \partial y$ (2.21) ifadesinden

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ile belirlenir.

2.4.2 Mindlin plak modeli için hareket denklemi

Korunumlu ve dış yük etkisi altında olmayan sistemler için Hamilton prensibi

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (2.27)$$

olarak ifade edilir. U ve T sistemin sahip olduğu sırasıyla potansiyel ve kinetik enerjileri temsil etmektedir ve Mindlin plağı için

$$U^e = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}_b \boldsymbol{\epsilon}_b^T dV + \frac{k}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}_s \boldsymbol{\epsilon}_s^T dV \quad (2.28)$$

$$T^e = \frac{1}{2} \int_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV = \frac{1}{2} \int_A \rho (h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dA \quad (2.29)$$

ile verilirler [22].

(2.28) ve (2.29) enerji ifadelerinin (2.27) Hamilton denkleminde kullanılmasıyla, (2.2) hareket denklemi elde edilir. Denklemden yer alan $\mathbf{K}$ katılık matrisi, eğilme ve kayma etkilerine bağlı $\mathbf{K}_b$ ve $\mathbf{K}_s$ katılık matrislerinin toplamı olarak verilebilir:

$$\mathbf{K}_b^e = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b \det J d\boldsymbol{\zeta} d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F(\boldsymbol{\zeta}_i, \eta_j) w_i w_j \quad (2.30)$$

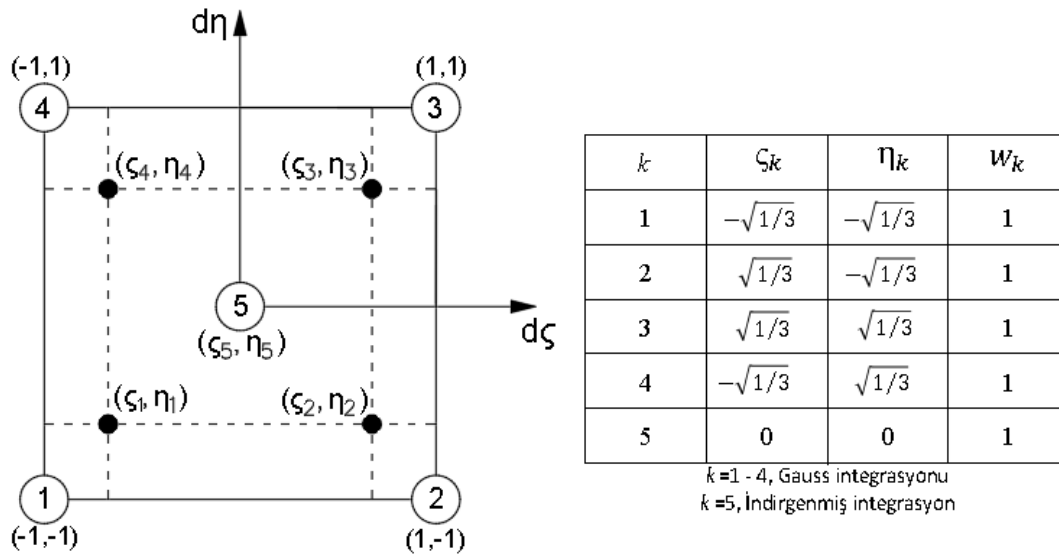
$$\mathbf{K}_s^e = kh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^T \mathbf{G} \mathbf{B}_s \det J d\boldsymbol{\zeta} d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H(\boldsymbol{\zeta}_i, \eta_j) w_i w_j \quad (2.31)$$

$\mathbf{M}$ kütle matrisi ise

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_s N^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} N \det J d\zeta d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L(\zeta_i, \eta_j) w_i w_j \quad (2.32)$$

şeklinde ifade edilir. Her iki ifadenin Gauss integrasyonu ile hesaplanacağı öngörülmüştür ve n Gauss noktası sayısıdır.

4 noktalı lineer izoparametrik eleman için uygulanabilecek 4 noktalı Gauss integrasyon şeması için hesaplama konumları ve ağırlık değerleri Şekil 2.6'da belirtilmiştir.



Şekil 2.6: 4 noktalı lineer eleman için integrasyon noktaları ve ağırlık fonksiyonları.

2.4.3 Mindlin modeli için kayma kilitlenmesi

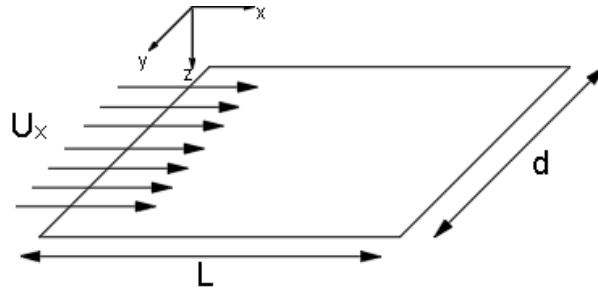
Mindlin modeli kalın plakların davranışını kayma şekil değiştirmesi etkilerini göz önüne alınarak incelemektedir ve plak katılığı üzerinde hem eğilme hem de kayma etkileri belirleyici olmaktadır. Mindlin plağı için kayma kilitlenmesi problemi, plak kalınlığının azalmasıyla birlikte sonlu eleman çözümlerinde kayma kaynaklı katılık etkilerinin baskın hale gelmesi ve yapının aşırı derecede rijit davranması, sonuç olarak da realistik olmayan sonuçların elde edilmesidir. Kayma kilitlenmesi, eğilme ve kayma katılık matrislerinin oranı ile tanımlanabilir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}_s}{\mathbf{K}_b} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12k}{h^2} \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^T \mathbf{G} \mathbf{B}_s \det J d\zeta d\eta}{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b \det J d\zeta d\eta} = \infty \quad (2.33)$$

İfadede yer alan $1/h^2$ terimi, kalınlığın azalması ile kayma etkilerinin baskınlığını ortaya çıkarmaktadır. Bu durumun önlenmesi için uygulanabilecek en yalın yöntem, eleman üzerinde gerçekleştirilen sayısal integrasyon işleminde yapılacak bir değişikliktir. İndirgenmiş integrasyon olarak bilinen bu yaklaşımda, kayma katılık matrisi merkezinde tek bir integrasyon noktasına sahip lineer bir eleman ile hesaplanır. İndirgenmiş integrasyon için hesaplama konumları ve ilgili ağırlık değerleri Şekil 2.6’da belirtilmiştir.

2.5 Akışkan-Yapı Etkileşim Problemi

Yapının akışkan ile olan etkileşimi, genel olarak, yapı hareketleri (rijit cisim hareketleri ve elastik titreşimler olarak) neticesinde akışkan alanında ortaya çıkan basınç dalgalanmaları ile bu dalgalanmaların yapı üzerinde oluşturduğu karşı etkileri kapsar. Yapı yüzeyine teğet (eksenel doğrultuda etkiyen) bir akışın varlığı durumunda etkileşimin yalın ancak bir ölçüde çok katmanlı formu, yapısal bakımdan da karmaşık ve zengin özelliklere sahip bir davranış doğurur. Tez kapsamında incelenen sonsuz akışkan ortamında aksenal akış etkisindeki plak davranışı Şekil 2.7’de gösterilmiştir.



Şekil 2.7: Eksenel akışkan etkisinde plak.

Plak etrafındaki akışkan ortamının ideal (viskoz olmayan, sıkıştırılmaz) ve hareketinin irrotasyonel olduğu kabulüyle, potansiyel akış modeli uygulanmıştır. Toplam akış hızı $\mathbf{V}$, aksenal plak boyuna ekseni doğrultusunda etkiyen uniform $\mathbf{U} = (U_x, 0, 0)$ hızı ve yapının elastik titreşimlerinin akışkan ortamındaki etkilerini yansıtan bir $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ hızının birleşimi olarak alınabilir:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.34)$$

İfadede yer alan $\mathbf{x} = (x, y, z)$ konum vektörünü belirtmektedir. İrrotasyonel akış için $\mathbf{v}$ hız alanı bir Φ hız potansiyeli fonksiyonu cinsinden tanımlanabilir:

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (2.35)$$

$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ süreklilik şartından (2.35) ifadesi,

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.36)$$

Laplace denklemini verir. Akışkan-yapı arayüzü üzerinde tanımlı kinematik sınır şartı, akışkan zerreciklerinin cisim yüzeyinden giremeyeceği ve dışarı çıkamayacağı ifade etmektedir ve ideal akışkan durumu için akışkan ve yapı ara yüzünde yüzey normali doğrultusunda akışkan ve cisim yüzey hızlarının eşit olmasını gerektirir. Yapının lineer (küçük genlikli) hareketleri için bu şart

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad (2.37)$$

olarak verilir. Yapının $\mathbf{n}$ yüzey normali doğrultusundaki hareketinin $w = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ olarak tanımlanmasıyla birlikte (2.37) ifadesi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} + U_x \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.38)$$

haline gelir.

Sınırsız akışkan ortamı için geçerli radyasyon şartı, ortamdaki yapı kaynaklı hareketlenmelerin kaynak noktasından uzaklaştıkça azaldığını ve sonsuzda yok olduğunu ifade eder [23]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (2.39)$$

Bernoulli denklemi, yerçekimi kaynaklı etkilerin ve ikinci dereceden terimlerin ihmal edilmesi ve (2.34) eşitliğinden elde edilen

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = U_x^2 + 2H_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.40)$$

ifadesinin kullanılmasıyla,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{H_x^2}{2} + U_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{P}{\rho_f} = \frac{P_s}{\rho_f} \quad (2.41)$$

olarak yazılabilir. Burada, P_s durağan basıncıdır.

Dinamik akışkan basıncı, üniform aksenal akımla ilgili P_0 basıncı ve yapı kaynaklı etkileri temsil eden P_p pertürbasyon basıncının toplamı olarak

$$P = P_0 + P_p \quad (2.42)$$

ile verilebilir ve durağan basıncın

$$P_s = \frac{1}{2} U_x^2 + P_0 \quad (2.43)$$

olarak tanımlanmasıyla, (2.41) denkleminden pertürbasyon basıncı için

$$P_p = -\rho_f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (2.44)$$

elde edilir.

2.5.1 Akışkan-yapı etkileşimi

Yapı kaynaklı elastik titreşimlerin akışkan ortamındaki yol açtığı hareketlenmeleri temsil eden pertürbasyon potansiyeli Φ için akışkan-yapı arayüzü (plak yüzeyi) üzerinde tanımlı (2.38) sınır şartı, (2.6) eşitliği kullanılarak ifade edilebilir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + U_x \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) p_i e^{\lambda t} \quad (2.45)$$

Burada zamana bağlılık kompleks λ büyüklüğü üzerinden tanımlanmıştır. Hız potansiyeli, yapısal cevabın mod şekilleri cinsinden ifade edilmesine benzer şekilde seri formunda verilebilir:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \phi_i p_i e^{\lambda t} \quad (2.46)$$

Sınır şartı i . mod için

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = \lambda w_i + U_x \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.47)$$

haline gelir. Burada, $w = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ olarak yapının mod şeklinin yüzey normali doğrultusundaki birleşeni, n_m seri açılımlarda dikkate alınan terim (doğal mod ve potansiyel bileşeni) sayısını, Φ_i yapının i . modal hareketine karşılık gelen hız potansiyelini temsil etmektedir.

(2.47) eşitliğinin formu dikkate alınarak, dinamik etkileşim problemi, yapının durağan akışkan ortamı ve üniform aksenal akımla etkileşimlerini temsil eden iki ayrı kısım halinde alınabilir. Hız potansiyelinin

$$\phi = \lambda \phi_1 + U_x \phi_2 \quad (2.48)$$

olarak tanımlanmasıyla, her bir potansiyel bileşeni için sınır şartları

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = w \quad (2.49a)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.49b)$$

halini alır.

Plâğin j . moduna karşılık gelen akışkan basıncı, (2.44) ve (2.46) denklemlerinden

$$P_{pj} = -\rho_f (\lambda \phi_j + U_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x}) p_j e^{\lambda t} \quad (2.50)$$

şeklinde yazılabilir ve (2.48) ifadesinin (2.50) denklemine uygulanmasıyla

$$P_{pj} = -\rho_f \left[\lambda^2 \phi_{j1} + U_x \lambda \left(\frac{\partial \phi_{j1}}{\partial x} + \phi_{j2} \right) + U_x^2 \frac{\partial \phi_{j2}}{\partial x} \right] p_j e^{\lambda t} \quad (2.51)$$

olarak elde edilir.

Etkileşim sonucunda plak yüzeyine etkiyen hidrodinamik kuvvet, başka bir deyişle akışkan-yapı etkileşiminin kuvveti, (2.8d) genelleştirilmiş kuvvet ve (2.51) basınç ifadelerinden elde edilebilir. j . elastik moda karşılık gelen etkileşim kuvvetinin i . bileşeni,

$$\begin{aligned}
f_{ij} &= \iint_A P_{pj}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} dA \\
&= -\rho_f p_j e^{\lambda t} \iint_A \left(\lambda^2 \phi_{j1} + U_x \lambda \left(\frac{\partial \phi_{j1}}{\partial x} + \phi_{j2} \right) + U_x^2 \frac{\partial \phi_{j2}}{\partial x} \right) w_i dA \quad (2.52)
\end{aligned}$$

şeklindedir. (2.52) kuvvetinin, zamana bağıllık dikkate alınarak akışkan-yapı sisteminin dinamik davranışını asal koordinatlarda ifade eden (2.7) hareket denkleminde kullanılması ile aksenel akış ve elastik plak arasındaki etkileşimi tanımlayan ve sırasıyla ivme, hız ve yer değiştirme ile orantılı olan genelleştirilmiş ek su kütlesi, hidrodinamik sönüm ve hidrodinamik rijitlik katsayıları,

$$A_{ij} = \rho_f \iint_A \phi_{j1} w_i dA \quad (2.53a)$$

$$B_{ij} = \rho_f U_x \iint_A \left(\frac{\partial \phi_{j1}}{\partial x} + \phi_{j2} \right) w_i dA \quad (2.53b)$$

$$C_{ij} = \rho_f U_x^2 \iint_A \frac{\partial \phi_{j2}}{\partial x} w_i dA \quad (2.53c)$$

şeklinde ifade edilir ve f_{ij} ifadesi

$$f_{ij}(t) = -(\lambda^2 A_{ij} + \lambda B_{ij} + C_{ij}) p_j e^{\lambda t} = -A_{ij} \ddot{p}_j(t) - B_{ij} \dot{p}_j(t) - C_{ij} p_j(t) \quad (2.54)$$

halini alır.

2.5.2 Genelleştirilmiş hareket denklemi

(2.7) ve (2.54) eşitliklerinden, akışkan ortamıyla etkileşim içindeki yapı için genelleştirilmiş hareket denklemi

$$(\mathbf{a} + \mathbf{A})\ddot{\mathbf{p}}(t) + (\mathbf{b} + \mathbf{B})\dot{\mathbf{p}}(t) + (\mathbf{c} + \mathbf{C})\mathbf{p}(t) = \mathfrak{R}(t) \quad (2.55)$$

olarak verilebilir. Burada, $\mathbf{A}$ eksu kütle matrisi, $\mathbf{B}$ hidrodinamik sönüm matrisi ve $\mathbf{C}$ hidrodinamik katılık matrisini temsil etmektedir. Eksu kütle matrisi simetrik ve pozitif tanımlıdır. Harekete başlıca etkisi sistemin eylemsizliğini artırarak doğal frekansları

azaltmaktır, ancak özellikle diyagonal olmayan terimler üzerinden modal açılımda kullanılan mod şekilleri arasında kurduğu bağlantı, ıslak mod şekillerinin doğal modlardan farklılaşmasına neden olmaktadır. Hidrodinamik sönüm matrisi anti-simetriktir ve özdeğerlerin kompleks olmasına yol açmaktadır. Simetrik hidrodinamik katılık matrisi ise negatif değerli olup plak ıslak frekans değerlerini hızla orantılı olarak azaltmaktadır. $\mathfrak{R}(t)$ etkileşim kuvvetleri haricinde yapıya etkiyen dış etkileri tanımlamaktadır.

Yapısal sönümün ve dış etkilerin ihmalıyla (2.55) ifadesi

$$(\mathbf{a} + \mathbf{A})\ddot{\mathbf{p}}(t) + (\mathbf{B})\dot{\mathbf{p}}(t) + (\mathbf{c} + \mathbf{C})\mathbf{p}(t) = 0 \quad (2.56)$$

olur. (2.56) hareket denklemi, asal koordinatlar ve hızlarından oluşan $\mathbf{y}(t)$ durum uzayına taşınarak çözülebilir.

$$\mathbf{y} = [\dot{\mathbf{p}} \quad \mathbf{p}]^T \quad (2.57)$$

olarak tanımlanan durum vektöründen (2.56) denklemi

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{y}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{y}(t) = 0 \quad (2.58)$$

ile verilebilir. Burada, $\bar{\mathbf{M}}$ ve $\bar{\mathbf{K}}$ matrisleri

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a} + \mathbf{A} \\ \mathbf{a} + \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{a} + \mathbf{A}) & 0 \\ 0 & \mathbf{c} + \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

olarak tanımlanmıştır ve n boyutlu modal uzay için $2n$ boyuta sahiptirler.

Denklem (2.58) için $\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{z}}e^{\lambda t}$ formunda bir çözümünden

$$(\lambda\bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{K}})\hat{\mathbf{z}} = 0 \quad (2.60)$$

akışkan-yapı sisteminin dinamik davranışını tanımlayan bir özdeğer problemi elde edilir.

(2.60) denkleminde elde edilen $2n$ adet λ özdeğeri, yapısal cevabın zamanla değişimini tanımlar. Genel olarak kompleks büyüklükler olan özdeğerler n eşlenik çift halindedir ve eşlenik çiftlere karşılık gelen (ve yapısal cevabı modal uzayda tanımlayan asal koordinatlar ve hızlarından oluşan) özvektörler de eşleniktir. Özdeğerlerin reel kısmı hareketin zamana bağlı olarak nasıl değişeceğini (pozitif ya

da negatif sönüm etkisi) ifade ederken, sanal kısım harmonik hareketlerin frekansını vermektedir. Hareketin kararlı ya da kararsız olması hali ve eğer bir kararsızlık durumu söz konusu ise kararsızlığın doğası özdeşlerin reel ve sanal kısımları tarafından tanımlanmaktadır. Eksenel akışın söz konusu olmaması durumunda (durağan akışkan), reel bileşenler ortadan kaybolmakta ve yapı kararlı davranmaktadır (sönümsüz harmonik hareket). Bu durumda hıza bağlı kuvvetler olan hidrodinamik sönüm ve rijitliğin de ortadan kaybolacağı ve durağan akışkan için etkileşim kuvveti olarak sadece eksu kütlelerinin söz konusu olacağı (2.53) ifadelerinden açıktır.

2.5.3 Sınır eleman yöntemi ile hız potansiyeli alanının belirlenmesi

Ω uzayında Laplace denklemini sağlayan iki potansiyel fonksiyon, Φ ve ψ , için Green'in ikinci özdeşliği,

$$\int_{\Omega} (\Psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \Psi) d\Omega = \int_{\Gamma} (\Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n}) d\Gamma \quad (2.61)$$

olarak verilir. Ω , Γ sırasıyla potansiyel hacmi ve bu hacmi sınırlandıran sınır yüzeyini temsil etmektedir.

Bir diferansiyel denklemin sonsuz Ω_{∞} uzayında birim şiddette noktasal bir kaynak için çözümü temel çözüm olarak adlandırılır ve

$$Lu^* = -\delta(x, \xi) \quad (2.62)$$

ile belirlenir. Burada, ξ ve x sırasıyla kaynak ve uygulama noktalarını, L diferansiyel operatörü ve u^* diferansiyel operatörün temel çözümünü temsil etmektedir. Eşitliğin sağ tarafına yer alan Dirac delta fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\delta(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} 0 & x \neq \xi \\ \infty & x = \xi \end{cases} \quad (2.63)$$

$$\int_{\Omega_{\infty}} f(x) \delta(x, \xi) d\Omega_{\infty} = f(\xi) \quad (2.64)$$

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x, \xi) d\Omega = \begin{cases} 0 & \xi \notin \Omega, \Gamma \\ f(\xi) & \xi \in \Omega \\ \text{Tanımsız} & \xi \in \Gamma \end{cases} \quad (2.65)$$

Laplace denkleminin üç boyutlu uzay için temel çözümü ϕ^* ve yüzey normali doğrultusunda türevi (akı) q^*

$$\phi^*(x, \xi) = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.66)$$

$$q^*(x, \xi) = \frac{d\phi^*}{dn} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.67)$$

olarak verilir [23]. r , x ve ξ noktaları arasındaki mesafeyi belirtmektedir.

$$r(x, \xi) = [(x_x - x_\xi)^2 + (y_x - y_\xi)^2 + (z_x - z_\xi)^2]^{1/2} \quad (2.68)$$

ϕ^* temel çözümünün, (2.62) ve (2.64) ile (2.61) özdeşliğinde kullanılmasıyla Green'in üçüncü özdeşliği

$$\phi(\xi) = \int_{\Gamma} (\phi^*(x, \xi) q(x) - \phi(x) q^*(x, \xi)) d\Gamma \quad (2.69)$$

halini alır [23]. (2.69) denklemi ile akışkan hacminin bir noktasındaki potansiyel değeri, Γ sınır yüzeyi üzerinde belirlenen potansiyel dağılım cinsinden tanımlanır. Belirtmek gerekir ki, temel çözümün (2.39) radyasyon şartını doğrudan sağlaması sayesinde, (2.69) integral denklemi sadece sınır yüzeyi (akışkan-yapı etkileşim problemleri için arayüz) üzerinde tanımlıdır.

ξ kaynak noktası sınır yüzeyine taşınarak, sadece sınır terimlerinin yer aldığı bir sınır integral denklemi elde edilebilir. Dirac fonksiyonu sınır üzerinde tanımsız olmakla birlikte, ξ kaynak noktası, etrafında $\varepsilon \rightarrow 0$ yarıçaplı küresel bir bölge oluşturularak, Ω uzayı içinde kalması ile sağlanabilir ve yüzey potansiyel dağılımı için aşağıdaki sınır integral denklem elde edilir:

$$c(\xi) \phi(\xi) + \int_{\Gamma} \phi(x) q^*(x, \xi) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n}(x) \phi^*(x, \xi) d\Gamma \quad (2.70)$$

Denklemden yer alan $c(\xi)$ serbest terimi, bir kaynak noktası etrafındaki hacmin akışkan ortamı içinde kalan kısmını tüm hacme kıyasla oransal olarak ifade etmektedir.

i . sınır eleman üstünde, Φ^i potansiyel ve q^i akı ifadeleri şekil fonksiyonları cinsinden verilebilir:

$$\Phi^i(\varsigma, \eta) = \sum_{j=1}^{e_i} \Phi_{ij} N_{ij}(\varsigma, \eta) \quad , \quad q^i(\varsigma, \eta) = \sum_{j=1}^{e_i} q_{ij} N_{ij}(\varsigma, \eta) \quad (2.71)$$

Φ_{ij} , q_{ij} sırasıyla i . elemanın j . düğüm noktasındaki potansiyel ve akı değerleridir. N_{ij} , 4 noktalı lineer dörtgen eleman için belirtilen (2.19) şekil fonksiyonlarıdır ve e_i , eleman üzerinde yer alan düğüm nokta sayısıdır.

(2.70) sınır integral denkleminde (2.71) ifadelerinin kullanımıyla

$$c_k(\xi) \Phi_k(\xi) + \sum_{i=1}^{n_n} \int_{\Gamma_i} \sum_{j=1}^{e_i} \Phi_{ij} N_{ij} q^* d\Gamma = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Gamma_i} \sum_{j=1}^{e_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{ij} N_{ij} \Phi^* d\Gamma, k = 1, 2 \dots n_e \quad (2.72)$$

elde edilir. Burada, n_n toplam düğüm sayısını, n_e eleman sayısını, Γ_i , i . elemanın alanını ve Φ_k ise k . düğüm noktasına için potansiyel değerleri temsil etmektedir.

Düzlemsel geometriler için kaynak ve uygulama noktaları arası uzaklığı belirten konum vektörü ile yüzey normal vektörünün daima birbirlerine dik olması sebebiyle plak yüzeyi üzerinde (2.69) akı ifadesi

$$q^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = 0 \quad (2.73)$$

olarak elde edilir [23].

(2.72) denkleminin yüzey integrallerinin gerçekleştirilmesi neticesinde sisteme ait eşitlikler matris formunda

$$\mathbf{H}\Phi = \mathbf{G} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (2.74)$$

olarak tanımlanır. Denklemden, Φ ve $\Phi_{,n}$ sırasıyla akışkan yapı arayüzündeki potansiyel ve akı vektörlerini ifade etmektedir. $\mathbf{H}$ ve $\mathbf{G}$ integral işlemi sonucu elde edilen matrisleri tanımlamaktadır.

(2.49a) ve (2.49b) ifadelerinden elde edilen sınır şartlarının (2.74) denkleminde $\Phi_{,n}$ bilinmeyenlerinin yerini alması ile

$$\mathbf{H}\Phi_{j1} = \mathbf{G}\mathbf{w}_j \quad , \quad \mathbf{H}\Phi_{j2} = \mathbf{G}\mathbf{w}_{j,x} \quad (2.75)$$

denklikleri elde edilir. Böylelikle akışkan yapı ara yüzeyinde Φ_{j1} ve Φ_{j2} potansiyel değerleri her bir j . mod şekline bağlı olarak elde edilirler.

Düğüm noktalarında potansiyel değerlerin eldesi, akışkan etkisiyle meydana gelen eksu kütle, hidrodinamik sönüm ve rijitlik katsayılarının Gauss integrali ile bulunmasına olanak tanır. Böylelikle (2.53) eşitliklerinin elde edilmesi sırasıyla

$$A_{mn} = \rho_f \sum_{i=1}^{n_e} \left(\int_{\Gamma_i} \sum_{j=1}^{e_i} N_{ij} \phi_{ij}^n w_{ij}^m d\Gamma \right) \quad (2.76a)$$

$$B_{mn} = \rho_f U_x \sum_{i=1}^{n_e} \left(\int_{\Gamma_i} \sum_{j=1}^{e_i} N_{ij} \left(\frac{\partial \phi_{ij1}^n}{\partial x} + \phi_{ij2}^n \right) w_{ij}^m d\Gamma \right) \quad (2.76b)$$

$$C_{mn} = \rho_f U_x^2 \sum_{i=1}^{n_e} \left(\int_{\Gamma_i} \sum_{j=1}^{e_i} N_{ij} \frac{\partial \phi_{ij2}^n}{\partial x} w_{ij}^m d\Gamma \right) \quad (2.76c)$$

şeklinde gerçekleştirilir. **A**, **B**, **C** matris boyutları, hesaba katılan mod sayısı (m, n) değerince belirlenmektedir. ϕ^n, w^m sırasıyla her bir mod değerine karşılık, düğüm noktalarında potansiyel dağılımı ve mod şekillerini ifade etmektedir. ϕ_{ij}, w_{ij} ilgili mod değerinde i . eleman üstündeki j . düğüm noktası değerini ifade etmektedir.

3. SAYISAL UYGULAMALAR VE SONUÇLAR

Çalışmada ele alınan akışkan-yapı etkileşim probleminin çözümü Matlab [24] ortamında geliştirilen kodlar vasıtasıyla yürütülmüştür. Yapının kuru (akışkan etkisi olmadan) haldeki dinamik karakteristikleri sonlu eleman yöntemi ile elde edilmiş, yapının akışkan ortamında sebep olduğu—mod şekilleri cinsinden kinematik sınır şartı ile ifade edilen—değişimler ve bunun karşılığında yapıya uygulanan hidrodinamik kuvvetler ise sınır eleman yöntemi ile belirlenmiştir.

Kuru analiz sonuçlarının doğruluğunun testi amacıyla, farklı geometri (kare ve dikdörtgen) ve kalınlığa (ince ve kalın) sahip plaklar için hesaplanan doğal frekanslar ve mod şekilleri, Ansys [25] sonlu eleman yazılımından elde edilen değerlerle karşılaştırılmıştır.

3.1 Kuru Analizler

Mindlin plaklarının dinamik karakteristiklerinin belirlenmesi amacıyla yürütülen kuru analizler için 4 düğüm noktalı bilineer elemanlardan oluşan sonlu eleman ayrıklaştırmaları kullanılmıştır. Ansys [25] yazılımı ile gerçekleştirilen doğrulama analizleri için de yine 4 düğüm noktalı SHEL181 eleman tipi seçilmiştir. İncelenen plaklar basit bağlı olarak alınmıştır.

Sekiz farklı sonlu eleman modeli ile yürütülen yakınsaklık analizlerinin sonuçları, doğal frekansların ilk altı mod için sunulduğu Çizelge 3.1-3.4’de görülebilir. İnce plaklarda ortaya çıkan kayma kilitlenmesi problemi, kayma katılık matrisinin hesaplanması sırasında indirgenmiş integrasyon uygulanarak aşılmış, kalın plaklar içinse 4 noktalı Gauss integrasyonu uygulanmıştır. L , d , h , plağın sırasıyla boyu, genişliği ve kalınlığını ifade etmektedir.

Analiz sonuçları, eleman sayısındaki artışla birlikte sağlanan düzgün bir yakınsamaya işaret etmektedir. 400 elemanlı en sık modele ait değerlerin Ansys [25] yazılımıyla elde edilen değerlerle yapılan karşılaştırması, ince ve kalın plaklar için sırasıyla % 0.2 ve % 2.5 civarında farkların yakalanmış olduğunu göstermektedir.

Çizelge 3.1: Kare ince plağın doğal frekans değerleri ($L=d=2$ m, $h=0.001$ m).

Yöntem & Hata Oranı	Kenar Bölmeleme	Eleman Sayısı	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6
Bu çalışma	5x5	25	1.255	3.516	3.516	5.534	9.561	9.561
	8x8	64	1.207	3.186	3.186	5.147	7.037	7.038
	10x10	100	1.205	3.116	3.116	5.017	6.629	6.630
	12x12	144	1.203	3.080	3.080	4.949	6.425	6.425
	14x14	196	1.203	3.058	3.058	4.908	6.307	6.307
	16x16	256	1.202	3.044	3.044	4.882	6.232	6.232
	18x18	324	1.202	3.035	3.035	4.864	6.182	6.182
	20x20	400	1.201	3.028	3.028	4.852	6.146	6.146
Ansysis	20x20	400	1.203	3.030	3.030	4.851	6.150	6.150
Hata Oranı (%)	20x20	400	-0.167	-0.067	-0.067	0.021	-0.066	-0.066

Çizelge 3.2: Kare kalın plağın doğal frekans değerleri ($L=d=2$ m, $h=0.2$ m).

Yöntem & Hata Oranı	Kenar Bölmeleme	Eleman Sayısı	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6
Bu çalışma	5x5	25	296.8	818.8	818.8	1179.1	1814.2	1814.5
	8x8	64	254.3	651.7	651.7	964.0	1324.2	1324.8
	10x10	100	243.7	612.5	612.5	913.6	1213.8	1214.8
	12x12	144	237.6	590.9	590.9	885.8	1154.6	1155.7
	14x14	196	233.8	577.7	577.7	868.7	1119.0	1120.2
	16x16	256	231.3	569.0	569.0	857.5	1095.9	1097.3
	18x18	324	229.6	563.0	563.0	849.7	1080.1	1081.6
	20x20	400	228.3	558.7	558.7	844.1	1068.9	1070.4
Ansysis	20x20	400	224.0	546.2	546.2	830.3	1043.7	1045.3
Hata Oranı (%)	20x20	400	1.89	2.24	2.24	1.64	2.36	2.35

$L=2$ m, $d=1$ m, $h=0.001$ m ince plağı için doğal frekans değerlerindeki değişimi yansıtan Şekil 3.1, yakınsama karakteristiğini daha açık olarak göstermektedir. Aynı plak için hesaplanan mod şekilleri, Şekil 3.2’de Ansys [25] yazılımı ile elde edilen mod şekilleriyle karşılaştırılmıştır.

Çizelge 3.3: Dikdörtgen ince plağın doğal frekans değerleri ($L=2m$, $d=1m$, $h=0.001m$).

Yöntem & Hata Oranı	Kenar Bölmeleme	Eleman Sayısı	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6
Bu çalışma	5x5	25	3.142	5.281	11.255	12.381	14.099	19.529
	8x8	64	3.032	4.987	8.753	10.969	12.907	15.693
	10x10	100	3.021	4.917	8.381	10.681	12.567	14.129
	12x12	144	3.014	4.880	8.193	10.529	12.388	13.401
	14x14	196	3.010	4.858	8.084	10.439	12.282	12.997
	16x16	256	3.008	4.844	8.014	10.382	12.214	12.748
	18x18	324	3.006	4.834	7.968	10.342	12.167	12.582
	20x20	400	3.005	4.827	7.935	10.314	12.134	12.466
Ansys	20x20	400	3.007	4.831	7.946	10.317	12.135	12.474
Hata Oranı (%)	20x20	400	-0.067	-0.083	-0.139	-0.030	-0.009	-0.065

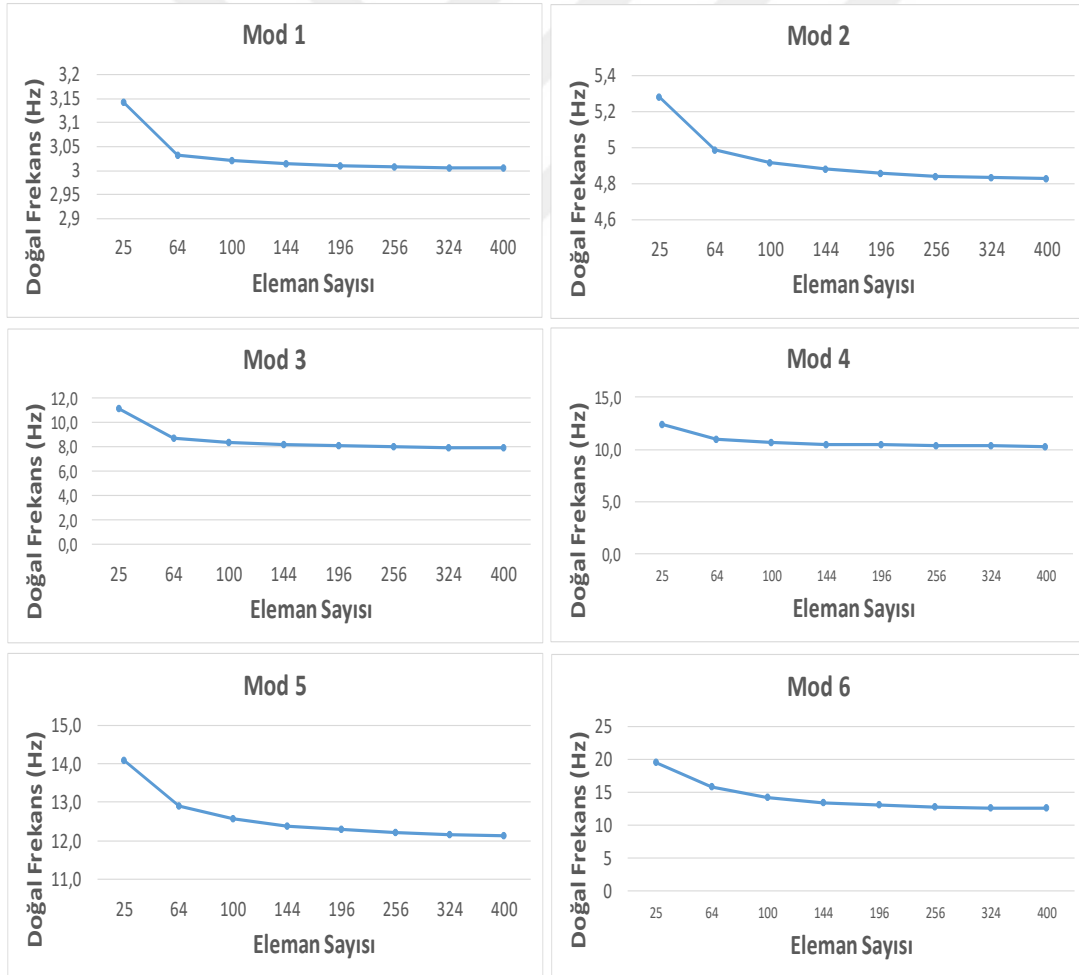
Çizelge 3.4: Dikdörtgen kalın plağın doğal frekans değerleri ($L=2m$, $d=1m$, $h=0.2m$).

Yöntem & Hata Oranı	Kenar Bölmeleme	Eleman Sayısı	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6
Bu çalışma	5x5	25	620.9	1047.1	1956.6	2018.1	2255.2	2843.5
	8x8	64	569.8	901.8	1515.5	1766.1	1981.9	2397.9
	10x10	100	557.5	868.2	1417.6	1709.3	1919.6	2178.4
	12x12	144	550.6	849.7	1365.2	1678.6	1885.6	2062.1
	14x14	196	546.4	838.5	1333.9	1660.1	1865.0	1993.3
	16x16	256	543.6	831.1	1313.7	1648.1	1851.6	1949.2
	18x18	324	541.7	825.9	1299.8	1639.9	1842.3	1919.3
	20x20	400	540.3	822.4	1289.9	1633.9	1835.7	1897.9
Ansys	20x20	400	536.5	813.4	1270.2	1624.3	1825.5	1866.0
Hata Oranı (%)	20x20	400	0.71	1.1	1.53	0.59	0.56	1.69

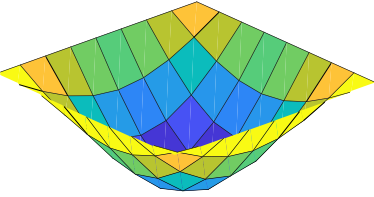
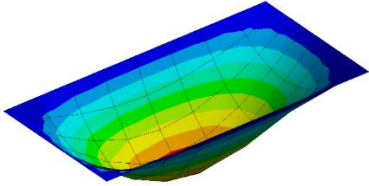
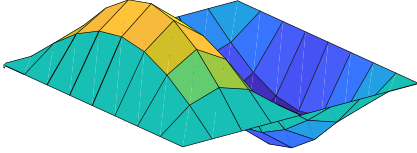
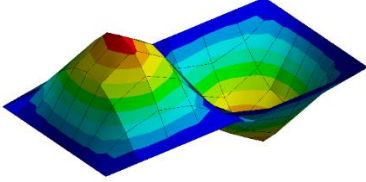
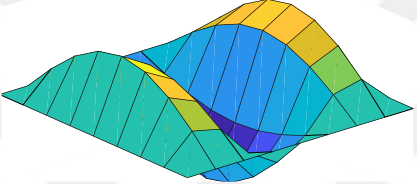
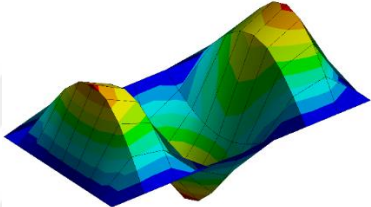
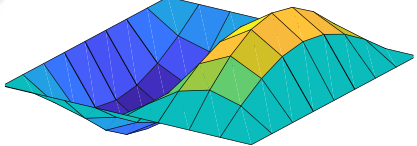
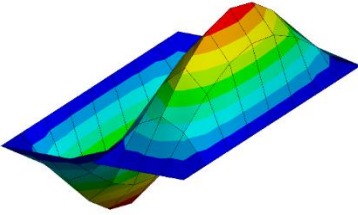
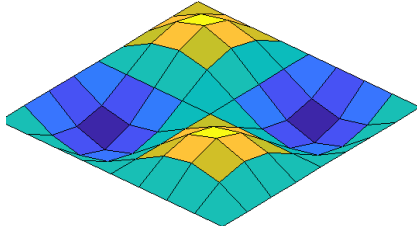
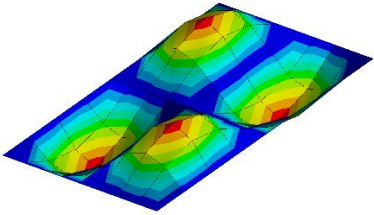
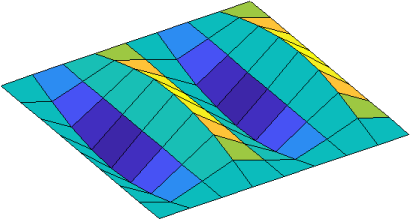
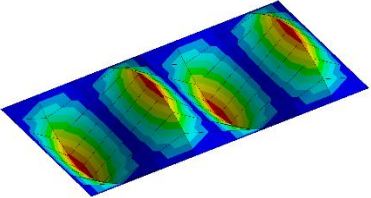
3.2 Islak Analiz: Akışkan–Yapı Etkileşimi

Mindlin plağı tek yüzeyi üzerinden plak düzlemine paralel (eksenel doğrultuda) bir akışa maruz kalmaktadır. Eksenel akışla birlikte ortaya çıkan etkileşim kuvvetleri, akışkan ortamının yoğunluğu ve akış hızına bağlı olarak, plağın dinamik davranışı

üzerinde belirgin değişikliklere yol açabilmektedir. Analiz sonuçları, ilgili özdeğer probleminin özdeğerleri cinsinden sunulacaktır; özdeğerlerin reel kısmı, plak genliklerinin zamanla değişimini belirlerken (bu sebeple reel kısım akışkan kaynaklı sönüm etkilerini temsil etmektedir), sanal kısım hareketin frekansını—ıslak frekanslar olarak alınabilir—tanımlamaktadır. Tüm sonuçlar ve temel parametreler boyutsuz olarak verilmiştir. Boyutsuz özdeğer ve hız değerleri sırasıyla $\Omega = \lambda L^2 / \delta$, $V = U_x L / \delta$ ile belirlenir; burada $\delta = (D / (\rho_s h))^{1/2}$, $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ olarak tanımlanır ve E , ν ve ρ_s plağın sırasıyla elastisite modülünü, Poisson oranını ve kütle yoğunluğunu temsil etmektedir. Hesaplamalarda kullanılan plağın geometrik karakteristikleri, $L/d = 1$, $h/L = 0,0005$ olarak belirlenmiş ve akışkan yoğunluğu $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ alınmıştır. Kuru analizlerin yürütüldüğü sonlu eleman ayrıklaştırmaları doğrudan sınır eleman analizleri için de kullanılmıştır.



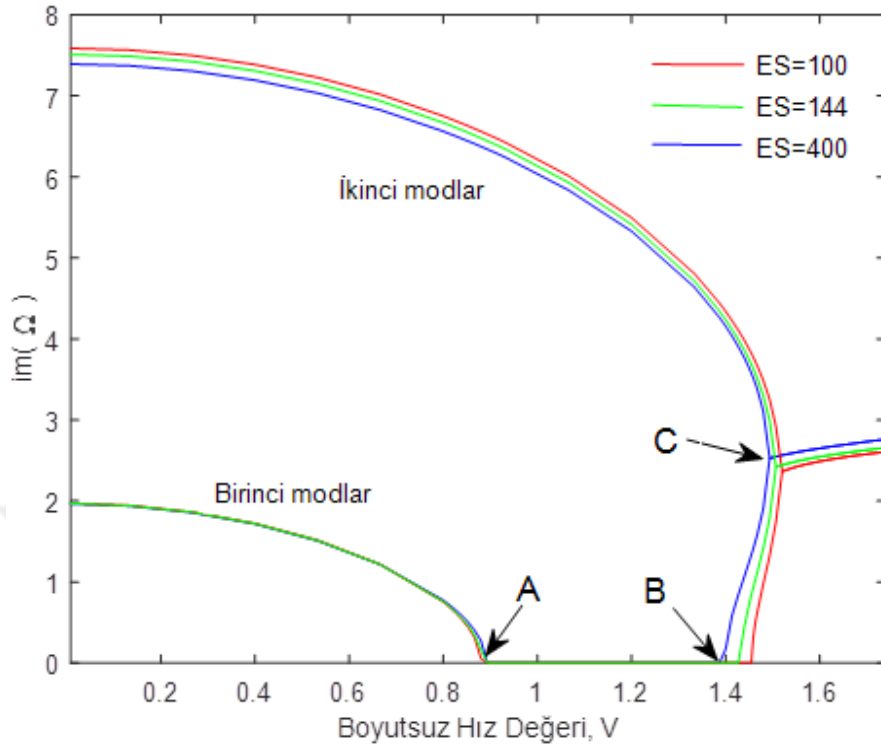
Şekil 3.1: $L=2 \text{ m}$, $d=1 \text{ m}$, $h=0.001 \text{ m}$ plağı için doğal frekanslarda yakınsama.

Mod Şekilleri		
	Bu çalışma	Ansys
Mod 1		
Mod 2		
Mod 3		
Mod 4		
Mod 5		
Mod 6		

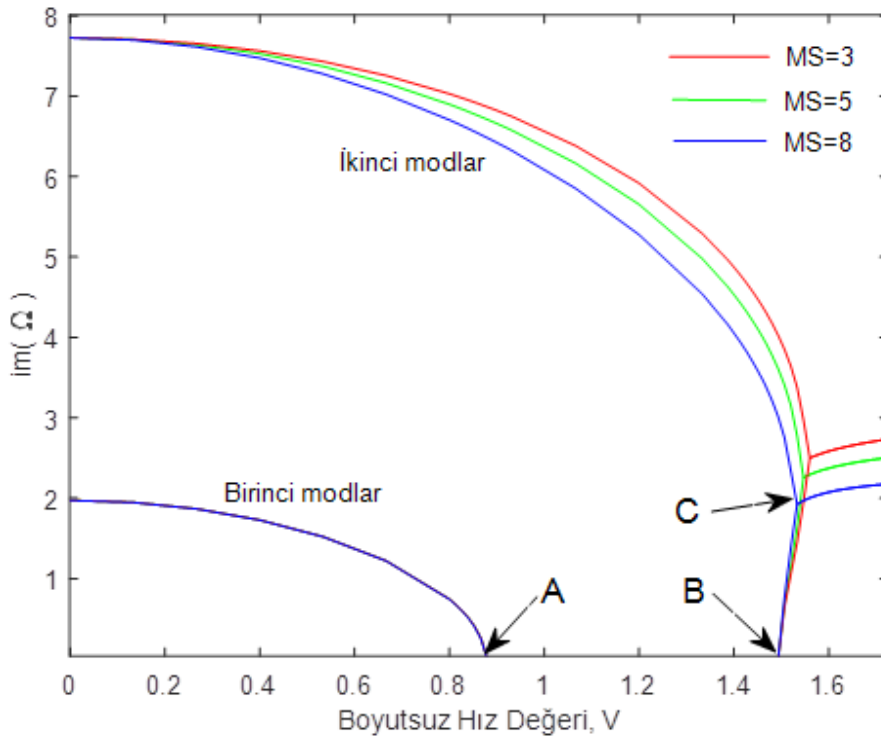
Şekil 3.2: $L=2$, $d=1$, $h=0.001$ m plağı için mod şekillerinin karşılaştırılması.

Üç farklı sınır eleman ayrıklaştırması ve modal açılımda kullanılan mod sayısının üç farklı değeri için, plak ıslak frekanslarının aksenal akış hızına göre değişimi—eleman

sayısı (ES) ve mod sayısı (MS) cinsinden sonuçların yakınsaması—sırasıyla Şekil 3.3 ve Şekil 3.4’de sunulmuştur.

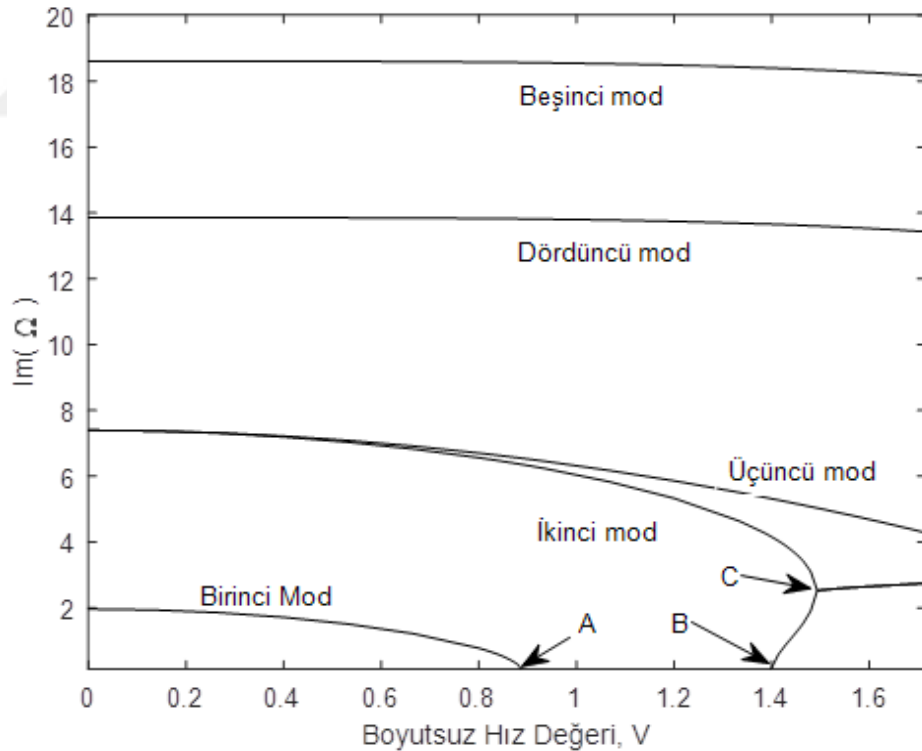


Şekil 3.3: Eleman sayısına göre yakınsaklık analizi.

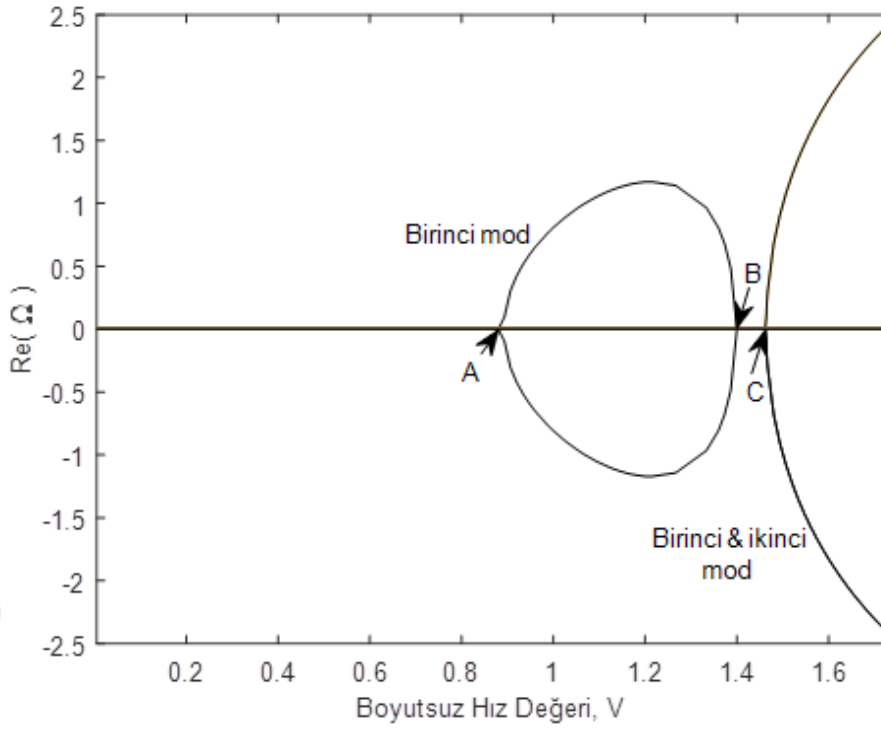


Şekil 3.4: Modal açılımda dikkate alınan mod sayısına göre yakınsaklık analizi.

Daha spesifik olarak, Şekil 3.3’de yüzey ayırıklaştırmasındaki iyileştirme (MS=5 için) ve Şekil 3.4’te gerek dinamik cevabın gerekse hız potansiyeli fonksiyonunun ifadesi sırasında dikkate alınan terim (mod) sayısındaki artış (ES=64 için) paralelinde frekans-hız eğrilerinin ve plak dinamik davranışındaki değişimlere işaret eden karakteristik noktaların—A statik kararsızlık (divergence), B yeniden kararlılık (restability) ve C birleşik dinamik kararsızlık (coupled-mode flutter)—değişimi yansıtılmıştır. Her iki analiz de ilk modun genel davranışının ve statik kararsızlık noktasının hızlı bir şekilde, yani göreceli olarak az sayıda eleman ve terimle, yakalandığına işaret etmekteyse de ikinci modun davranışının başarılı bir şekilde temsili dikkate alınan her iki parametrede belirgin iyileştirmeler gerektirmektedir. Benzer şekilde, yeniden kararlılık ve birleşik dinamik kararsızlık noktaları da ancak daha ‘iyi’ şartlarda yakınsamaktadır. Analizin daha yüksek modları kapsamı halinde bu durumun daha da anlamlı hale geleceği açıktır. Bu sebeple, ES=400 ve MS=10 için hesaplamalar tekrarlanmış ve plağın ilk beş moduna ait özdeğerlerin sanal ve reel kısımları, frekans ve sönüm olarak, sırasıyla Şekil 3.5 ve Şekil 3.6’da verilmiştir.



Şekil 3.5: Plağın ilk beş modu için frekans-hız eğrileri.



Şekil 3.6: Plâgın ilk beş modu için sönüm katsayısı-hız eğrileri.

Eksenel akış etkisindeki plâgın dinamik davranışı eksu kütlesi, hidrodinamik sönüm ve hidrodinamik katılık tarafından belirlenmektedir. Akışkan tarafından yapıya uygulanan eksu kütle etkisi, yapının eylemsizliğini artırarak frekans değerlerini azaltır, ancak yapının kararlılık durumu üzerinde belirleyici değildir; yapı, hidrodinamik etki olarak sadece eksu kütlesi hissetmesi durumunda ($V=0$) kararlı durumdadır. Akışın varlığı ile birlikte eylemsizlik etkilerine ek olarak hidrodinamik sönüm ve katılık etkileri ortaya çıkar. Hidrodinamik sönüm, kompleks özdeğerlere neden olmanın yanında yapının kararlılığında da rol oynar. Hidrodinamik katılık ise yapının sahip olduğu elastikiyeti hızla orantılı olarak azaltır; bu durum Şekil 3.3-3.5’de, sunulan tüm modlar için akış hızındaki artış paralelinde frekans değerlerinde düşme şeklinde dikkat çekmektedir.

Akış hızının yeterince büyük bir değerinde hidrodinamik katılık yapının elastikiyetini tümüyle ortadan kaldırır ve yapıda statik kararsızlık (A noktası) olarak adlandırılan burkulma (divergence) durumu meydana gelir. Statik kararsızlığın ortaya çıktığı bu hız değeri kritik hız olarak isimlendirilir; incelenen problem için kritik hız $V_A = 0.878$ olarak hesaplanmıştır.

Durağan ($V=0$) ve kritik akış hızı (A noktası) aralığında, sönümsüz serbest titreşim içinde olan (kuru durumdan farklı frekanslarda) plak kararlıdır. Akış hızındaki artış

yapı elastikiyetini, dolayısıyla frekans değerlerini, azaltır. Plak elastikiyetinin ilk mod için tamamen ortadan kalkması (*A* noktası), yani frekansın sıfır olması, ilk özdeğerin sönümü tanımlayan reel kısmının sıfırdan küçük değeri ile birlikte plağı burkulma formundaki statik kararsızlığa (divergence) yöneltir. *B* yeniden kararlılık noktasına kadar devam eden bu davranıştaki etken, titreşim genliklerinin negatif sönüm sebebiyle sürekli bir artış içinde olması, ancak sıfır frekans sebebiyle bir hareketin söz konusu olmaması sonucunda kararlılığın statik olarak kaybedilmesidir.

B yeniden kararlılık noktasında plak kararlılığını geri kazanır: negatif sönüm kaybolur ve pozitif elastikiyet söz konusudur. Bu durum, *C* birleşik dinamik kararsızlık noktasına kadar devam eder. Akış hızının *C* hız değerini aşmasıyla birlikte plağın ilk iki modu eş özdeğerler—eşit frekanslar ve sönüm katsayıları—olarak bir araya gelir. Plak titreşmeye devam etmektedir, ancak var olan negatif sönüm ilk iki modda titreşim genliklerini artırarak bu kez de plağı dinamik olarak kararsızlaştırmaktadır (çarpınma ya da flutter davranışı).

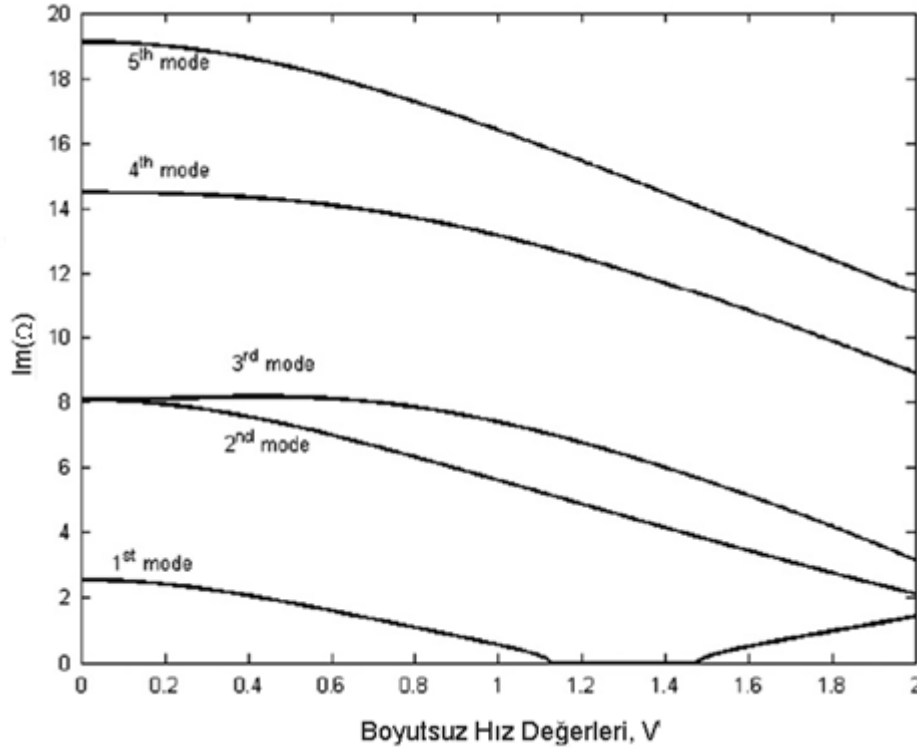
Yapının kararlı olduğu akış hızları için ıslak mod şekilleri, serbestlik derecelerinin eş zamanlı hareket ederek referans denge konumundan birlikte geçtikleri klasik mod şeklindedir. Statik kararsızlık halinde hareket yoktur, ancak dinamik kararsızlık durumunda sönümün varlığı ıslak mod şekillerini kompleks hale getirir: artık eş zamanlı hareket ortadan kalkmıştır ve hareketin her anında değişim söz konusudur; ıslak mod şekilleri olarak için tek bir formdan bahsetmek mümkün değildir.

Yukarıda yapılan eksenel akış etkisindeki plakların dinamik davranışına dair yorumların probleme getirilen lineer yaklaşımın sonucu olduğunun üzerinde özellikle durmak gerekir. Gerek statik gerekse dinamik kararsızlıklar yapının giderek büyüyen genliklerde hareketine neden olmaktadır ki, bunun anlamı, lineer bir yaklaşımın geçerli olacağı sınırların hızla ötesine geçileceği ve sunulan modelin, dolayısıyla modelin ön gördüğü kestirimlerin geçersizleşebileceğidir. Bununla birlikte, kritik hız değeri (*A* noktası) kararsızlık öncesi lineer koşullar altında belirlenmiştir. Diğer yanda, yeniden kararlılık (*B* noktası) ve birleşik dinamik kararsızlık (*C* noktası) statik kararsızlık sonrası gözlenen fenomenler olup, fiziksel gerçeklikleri şüphelidir ve salt teorik çıkarımlar olarak değerlendirilebilirler.

İncelenen probleme ait sonuç ve değerlendirmelerin, literatürde yer alan benzer niteliğe sahip diğer çalışmalarla uyumu araştırılmıştır. Söz konusu çalışmalar, lineer

teorilere (Mindlin plak ve potansiyel akışkan modelleri) dayanmaları ve benzer şartlar için—kenarlarından basit mesnetli plak ve tek bir yüzey üzerinden gerçekleşen plak-akışkan etkileşimi—gerçekleştirilmeleri bakımından mevcut çalışmayla benzeşmektedir.

Sistem karakteristikleri Çizelge 3.5’de verilen Tubaldi [13]’ye ait frekans-hız eğrileri Şekil 3.7’de sunulmuştur.



Şekil 3.7: Akış etkisindeki plak için frekans-hız eğrileri [13].

Yukarıda da ifade edildiği gibi, akış hızındaki artış incelenen tüm modlar için frekans değerlerini azaltmakta ve belirli bir kritik hız değerinde yapı elastikiyeti ilk mod için ortadan kalkmaktadır. Tez kapsamında incelenen problem ile bu çalışmada ele alınan problem arasında var olan temel farklılık, akışkan ortamının burada rijit bir duvar ile sınırlandırılmış olmasıdır. Tubaldi [13], H kanal açıklığının L plak boyuna oranını ($\bar{H} = H/L$) dikkate alarak farklı kanal açıklıkları için kritik hız değerlerini hesaplamış ve $\bar{H}=0,1, 0.3$ ve 0.5 için sırasıyla $0.885, 1.112$ ve 1.127 değerlerine ulaşmıştır ($\bar{H}>0,5$ için kritik hız değerinin değişmediği değerlendirilmesini de yapmıştır). Tez çalışmasında plak sonsuz akışkan ortamında alınmaktadır ve kritik hız değeri $V_A=0.878$ olarak hesaplanmıştır. Durağan akışkan ($V=0$) için tez kapsamında elde

edilen ıslak frekans değerleri ile Tubaldi [13] tarafından sunulan değerler Çizelge 3.6’da karşılaştırılmıştır.

Çizelge 3.5: Sistem karakteristikleri ve boyutsuz hız formülasyonu [13].

Sistem karakteristiği			Boyutsuz Hız
$L/d = 1$	$E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	$\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$	$V = V_0 L * \sqrt{\frac{\rho_s h}{D}}$
$h/L = 0,0005$	$\nu = 0,30$	$\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$	

Çizelge 3.6: Durağan akışkan ($V=0$) için ıslak frekansların karşılaştırılması.

Kaynak	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
Bu çalışma	1,96	7,39	7,39	13,85	18,61
Tubaldi	2,34	8,02	8,02	14,48	19,13
Hata oranı (%)	19,13	8,45	8,45	4,53	2,78

Sonsuz akışkan ortamında eksenel akışa maruz kalan bir plak (Çizelge 3.7) için hesaplanan statik kararsızlık, yeniden kararlılık ve birleşik dinamik kararsızlık akış hızları, Ragab [15] ve Tan [16] tarafından sunulan değerlerle Çizelge 3.8’de karşılaştırılmıştır; sunulan tüm hız değerlerinin her iki çalışmayla da uyum içinde olduğu görülmektedir.

Çizelge 3.7: Sistem karakteristikleri ve boyutsuz hız formülasyonu [15].

Sistem karakteristiği			Boyutsuz Hız
$L/d = 1$	$E = 73 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	$\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$	$V = \frac{\rho_f V_0^2 * L^3}{D}$
$h/L = 0,01$	$\nu = 0,35$	$\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$	

Çizelge 3.8: Statik kararsızlık, yeniden kararlılık ve birleşik dinamik kararsızlık hızlarının karşılaştırılması.

Kaynak	V_A	V_B	V_C
Bu çalışma	196,07	472,44	526,6
Ragab	205,06	479,34	537
Hata oranı (%)	4,59	1,46	1,97
Bu çalışma	196,07	472,44	526,6
Tan	202	481,6	535
Hata oranı (%)	3,02	1,94	1,60



4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tez çalışması kapsamında, eksenel doğrultuda etkiyen üniform bir akış ortamının etkisindeki kenarlarından bağlı plakların dinamik davranışının sayısal olarak kestirimi için lineer bir çözüm ortamı önerilmiş ve sırasıyla yapı ve akışkan problemlerinin çözümü için uygulanan sonlu eleman ve sınır eleman yöntemleri, lineer hidroelastisite teorisinin temel ilkeleri etrafında bir araya getirilmiştir. Buna göre, öncelikle yapısal sönüm ve dış kuvvetlerin yokluğunda plak dinamik karakteristikleri (doğal frekanslar ve karşılık gelen titreşim modları) Mindlin plak modeli altında sonlu eleman yöntemiyle belirlenmiş ve plağın dinamik tepkisi modal uzayda ifade edilmiş, sonrasında akışkan ve plak arasındaki etkileşim doğal modlar vasıtasıyla kurularak, akışkan hareketlerini, dolayısıyla akışkan kaynaklı yükleri tanımlayan potansiyel problem, plak yüzeyi üzerinde bir sınır integral denklem cinsinden ifade edilerek sınır eleman yöntemiyle çözülmüştür. Plak hareket denkleminin hidrodinamik zorlamalar için çözümüyle, ki bir özdeğer problemi söz konusudur, eksenel akışa maruz yapının dinamik davranışına ulaşılmıştır.

Eksenel akış etkisindeki plakların dinamik davranışını belirleyen hidrodinamik kuvvetler, eksu kütlesi ile akışkan kaynaklı sönüm ve katılık etkilerdir. Yapıyla birlikte hareket eden akışkan kütlesini temsil eden eksu kütlesi, yapı eylemsizliğine yaptığı katkıyla frekans değerlerini azaltır ve plak modal uzayını tanımlayan modlar arasındaki etkileşimlere (coupling) bağlı olarak ıslak mod şekillerinin doğal mod şekillerinden ayrılmasına neden olur. Bir akışın varlığı ile birlikte ek etkiler olarak hidrodinamik sönüm ve hidrodinamik katılık ortaya çıkar. Hidrodinamik sönüm, plak özdeğerlerinin ve özvektörlerinin kompleks formda olmasına yol açar ve yapının kararlılık davranışlarında rol oynar. Hidrodinamik katılık ise yapının sahip olduğu elastikiyeti azaltır. Her iki etki de akış hızıyla orantılı olarak artmaktadır ve yeterince yüksek bir akış hızı (kritik hız) için plak elastikiyetinin hidrodinamik katılık tarafından tamamen ortadan kaldırılmasıyla (ilk mod için) plak statik olarak—negatif hidrodinamik sönüm vasıtasıyla—kararsızlaşır. Akış hızının kritik hızdan daha yüksek bir değeri için, sönümün kaybolması ve elastikiyetin geri kazanılması ile yeniden

kararlılık söz konusudur. Akışın daha da hızlanması durumunda, plak bu kez ilk iki modunun ortak davranış sergilediği birleşik dinamik kararsızlık içine girer. Plakta gözlenen kararsızlıklar yapının giderek büyüyen genliklerde hareket ettiği anlamına gelmektedir ve uygulanan lineer çözüm modelinin statik kararsızlık sonrasına ait teorik tahminleri değerlendirilirken göz önüne alınmalıdır.

Önerilen analiz yöntemi, kenarlarından basit mesnetli dörtgen plaklara uygulanmış ve eksenel akış etkisindeki plakların genel dinamik tepkisi akış hızına bağlı olarak ortaya konmuştur. Elde edilen sonuçların doğrulanması amacıyla, plak dinamik karakteristikleri, durağan akışkan hali için ıslak frekans değerleri ve dinamik davranışın akışın varlığına bağlı olarak ani değişimler gösterdiği akış hızı değerleri hesaplanarak, ticari sonlu eleman yazılımları ile elde edilen değerlerle ve literatürde yer alan çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Her ne kadar tez kapsamındaki uygulamalar basit mesnetli plaklarla sınırlı kalmış olsa da, yöntem plağın tüm kenarı boyunca bağlı olduğu bütün sınır şartları için uygulanabilir. Bununla birlikte, konsol plak gibi belirli kenarların serbestçe hareket edebildiği sınır şartları için, serbest uçlarda oluşacak girdap etkilerini dikkate alabilen yeni bir akışkan-yapı etkileşim modeline ihtiyaç vardır. Sunulan sayısal yaklaşım bu etkileri kapsayacak şekilde genişletilmesiyle eksenel akış etkisindeki plaklar için daha kapsayıcı bir analiz ortamı kurulabilir. Çalışmada yapısal davranış modal uzayda tanımlanmış ve akışkan hareketlerini temsil eden hız potansiyeli alanı için benzer bir seri açılım uygulanarak, akışkan-yapı etkileşiminin doğal mod şekilleri seviyesinde kurulması mümkün olmuştur. Alternatif bir yaklaşım, etkileşimin yapı ve akışkan problemleri arasında doğrudan, yani çözücü seviyesinde kurulmasıdır. Çözümün kalitesinin modal uzayın boyutuna olan bağımlılığını azaltacak ve daha gerçekçi bir etkileşimin kurulmasını sağlayacak olan bu tür bir tercihin olumsuz denebilecek sonucu, problemin modal uzaydan hesaplama (çözüm ağı) uzayına taşınacak olması, yani problem boyutunun büyümesidir. Statik kararsızlık sonrası gözlenen problemin lineer olmayan doğasını temsil etme iddiasındaki bir nonlineer sonlu eleman çözücü için bu tür bir çözüm ortamının anlamlı olacağını özellikle vurgulamak gerekir.

KAYNAKLAR

- [1] **Bishop, R.E.D & Price, W.G. (1979).** Hydroelasticity of Ships: Cambridge University Press.
- [2] **Bishop, R.E.D., Price, G.W., Wu, T.-S.,** 1986. A general hydroelasticity theory of floating structures moving in a seaway, *Philosophical Transactions of Royal Society of London, Series A*, 316, 375-426.
- [3] **Paidoussis, M.P.,** 2016. *Fluid-structure interactions: Vol 2 Slender structures and axial flow*. 2nd ed. Oxford: Academic Press.
- [4] **Lamb, H.,** 1921. On vibration of an elastic plate in contact with water. *Proceeding of Royal Society (London) A* 98, 205-216.
- [5] **Kwak, M.K., Kim, K.,** 1991. Axisymmetric vibration of circular plates in contact with water. *Journal of Sound and Vibration* 146, 381-389.
- [6] **Fu, Y., Price, W.,** 1987. Interactions between a partially immersed vibrating cantilever plate and surrounding fluid. *Journal of Sound and Vibration* 118 (3), 495-513.
- [7] **Ergin, A., Uğurlu, B.,** 2003. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid. *Journal of Fluid and Structures*, 17, 927-939.
- [8] **Weaver, D. S., and Unny, T. E.,** 1970. The hydroelastic Stability of a Flat Plate. *ASME J. Appl. Mech.*, 39, pp. 53-58.
- [9] **Guo, C.Q., Paidoussis, M.P.,** 2000a. Analysis of hydroelastic instabilities of rectangular parallel-plate assemblies. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology* 122, 502-507.
- [10] **Guo, C.Q., Paidoussis, M.P.,** 2000b. Stability of rectangular plates with free-edges in two-dimensional inviscid channel flow. *Journal of Applied Mechanics* 67, 171-176.
- [11] **Kerboua, Y., Lakis, A.A., Thomas, M., Marcouiller, L.,** 2008. Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid. *Applied Mathematical Modelling* 32, 2570-2586.
- [12] **Miller, DR.,** 1960. Critical flow velocities for collapse of reactor parallel-plate fuel assemblies. *American Society of Mechanical Engineers – Transactions – Journal of Engineering for Power Series A* 82(2):83-95.
- [13] **Tubaldi, E. and M. Amabili,** 2013. Vibrations and stability of a periodically supported rectangular plate immersed in axial flow. *Journal of Fluids and Structures*. 39: p. 391-407.
- [14] **Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S.V., Matveenko, V.P.,** 2016. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dynamic*, Vol.51, No. 6, pp.821-833.

- [15] **Ragab, Saad A., Fayed, Hassan E.**, 2019. Finite element analysis of aero-hydroelastic stability of arbitrary shape panels. *Aerospace Science and Technology* 90, 299-313.
- [16] **Tan, B.H., Lucey, A.D., Pitman, M.W.**, 2012. Stability of a structurally inhomogeneous flexible plate in uniform axial flow, in: C. Meskeel, Bennett (Eds.), *Flow-Induced Vibration*, pp. 203-210.
- [17] **Mindlin, R.D.**, 1951. Influence of rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanical*, 18, 1, 31-32.
- [18] **İnan, M.**, 1996. *Cisimlerin Mukavemeti*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [19] **Liew, K.M., Wang, C.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.**, 1998. Vibration of Mindlin plates – Programming the p-version Ritz method, *Elsevier*, New York.
- [20] **Uğurlu, B.**, Yapısal Analiz için Sayısal Yöntemler, Ders notları, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [21] **Bathe, K.-J.**, 1996. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [22] **Petyt, M.**, *Introduction to finite element vibration analysis*. 2nd ed. 2010, New York: Cambridge University Press. Xvi, 500p.
- [23] **Gaul, L., Kögl, M., Wagner, M.**, 2003. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [24] **Matlab**, 2017. User's Manual.
- [25] **ANSYS**, 2019. User's Manual.

ÖZGEÇMİŞ



Ad-Soyad : Furkan KUZGUN
Doğum Tarihi ve Yeri : 17-02-1994 Sakarya
E-posta : furkankuzgun@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2017, Yıldız Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Denizcilik Fakültesi, Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2017-2019 yılları arasında çok amaçlı amfibik çıkartma gemisi TLHD projesinde havalandırma sistemleri üzerine çalıştı.
- 2019 yılından itibaren yapısal analiz mühendisi olarak çalışmalarına devam etmektedir.

