

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAYNAK TERİMLİ BURGERS DENKLEMİNİN SONLU ELEMAN
ÇÖZÜMLERİ

Ayşenur Büşra ÇAKAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

Haziran, 2020

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAYNAK TERİMLİ BURGERS DENKLEMİNİN SONLU ELEMAN
ÇÖZÜMLERİ

Ayşenur Büşra ÇAKAY tarafından hazırlanan tez çalışması 22.06.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Murat SARI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi S. Hikmet ÇAĞLAR, Üye
Kültür Üniversitesi

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM sorumluluğunda tarafımda hazırlanan Kaynak Terimli Burgers Denklemine Sonlu Eleman Çözümleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ayşenur Büşra ÇAKAY

İmza

TEŞEKKÜR

Bu tezin yönlendirilmesi ve tamamlanmasında, yoğun çalışma programına rağmen bana vakit ayırıp gerekli yardım ve ilgisini esirgemeyen, değerli fikirleriyle bana yol gösteren, karamsarlığa kapıldığımda bana yeniden ışık olan çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bölüm hocalarımızdan sayın Prof. Dr. Murat SARI'ya, çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemediği, desteğini her zaman hissettirdiği için teşekkürü bir borç bilirim.

Bu süreç içerisinde her zaman olduğu gibi ilgi ve anlayışlarını üzerimden eksik etmeyen aileme ve tezimin düzenlenmesi sırasındaki yardımları için eniştem Ömer USLU'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayşenur Büşra ÇAKAY

İÇİNDEKİLER

| | |
|--|-------------|
| SİMGE LİSTESİ | vi |
| KISALTMA LİSTESİ | vii |
| ŞEKİL LİSTESİ | viii |
| TABLO LİSTESİ | ix |
| ÖZET | x |
| ABSTRACT | xii |
| 1 GİRİŞ | 1 |
| 1.1 Literatür Özeti | 1 |
| 1.2 Tezin Amacı | 4 |
| 1.3 Hipotez | 4 |
| 2 BURGERS DENKLEMİ | 5 |
| 2.1 Burgers Denklemine Çıkarılışı..... | 5 |
| 2.2 Burgers Denklemine Analitik Çözümü | 9 |
| 3 YÖNTEMLER | 14 |
| 3.1 Zamanı Ayrıştırma Yöntemi..... | 14 |
| 3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi..... | 17 |
| 3.2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemine Uygulama Adımları | 18 |
| 3.3 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi | 22 |
| 3.3.1 Galerkin Yöntemi..... | 23 |
| 3.3.2 Petrov-Galerkin Yöntemi | 24 |
| 4 ISI DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ | 25 |
| 5 BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ | 32 |
| 6 KAYNAK TERİMLİ BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ | 40 |
| 6.1 Zamanı Ayrıştırma | 40 |

| | |
|----------------------------------|-----------|
| 6.2 Konum Ayrıştırması- SEY..... | 41 |
| 7 SONUÇ VE ÖNERİLER | 54 |
| KAYNAKÇA | 56 |
| TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR | 61 |



SİMGE LİSTESİ

| | |
|----------------|--|
| c_i^j | Belirsiz katsayılar |
| z_j | Çözüm fonksiyonu |
| $U(x, t)$ | Hız vektörü |
| $\theta(x, t)$ | Isı denkleminin çözüm fonksiyonu |
| θ_j^N | Isı denkleminin yaklaşım fonksiyonu |
| $f(x, t)$ | Kaynak terim |
| ε | Kinematik viskozite |
| $\Delta x = h$ | Konum adımı |
| φ_i | Lineer bağımsız şekil fonksiyonu |
| $H[0,1]$ | Test fonksiyonlarının lineer uzayı |
| $v(x)$ | Test fonksiyonu |
| ϕ_i | Test şekil fonksiyonu |
| T | Toplam zaman |
| U_N | $u(x, t)$ 'nin yaklaşım fonksiyonu |
| Ω_i | x eksenini çözüm bölgesi |
| N | x eksenini yönündeki sonlu eleman sayısı |
| z_j^N | Yaklaşım fonksiyonu |
| Δt | Zaman adımı |
| p | Zaman aralığını bölen pozitif tamsayı |

KISALTMA LİSTESİ

| | |
|------|----------------------|
| diğ. | diğerleri |
| SE | Sonlu Eleman |
| SEY | Sonlu Eleman Yöntemi |



ŞEKİL LİSTESİ

| | | |
|------------------|--|----|
| Şekil 3.1 | [0,1] aralığı için sonlu elemanlar ve düğüm noktaları..... | 19 |
| Şekil 3.2 | 1-boyutlu çubuk elemanı | 20 |
| Şekil 4.1 | [0,1] aralığında tanımlı sonlu eleman şekil fonksiyonları | 28 |
| Şekil 4.2 | $\Delta t = 0.001, \varepsilon = 1, N = 100$ ve farklı t zamanlarında 1-boyutlu Isı denkleminin çözümü..... | 30 |
| Şekil 4.3 | $\Delta t = 0.001, \varepsilon = 0.1, N = 100$ ve farklı t zamanlarında 1-boyutlu Isı denkleminin çözümü..... | 31 |
| Şekil 5.1 | $\Delta t = 0.0001, \varepsilon = 0.1, N = 100$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümler | 38 |
| Şekil 5.2 | $t = 0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001, \varepsilon = 0.1$ için nümerik çözüm ve analitik çözümün Karşılaştırılması..... | 38 |
| Şekil 6.1 | $\Delta t=0.0005$ ve $\varepsilon=1$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümler..... | 45 |
| Şekil 6.2 | $t = 0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001, N = 100$ ve farklı ε değerleri için nümerik çözümler ve analitik çözümlerin karşılaştırılması..... | 50 |
| Şekil 6.3 | $t = 0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001, \varepsilon = 1$ ve $N = 100$ için nümerik çözümler..... | 50 |
| Şekil 6.4 | $\Delta t = 0.0001, N = 100$ ve $\varepsilon = 1$ ile $\varepsilon = 0.1$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümler..... | 51 |
| Şekil 6.5 | $\Delta t = 0.0001, N = 100$ ve $\varepsilon = 0.01$ ile $\varepsilon = 0.001$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümler..... | 51 |

TABLO LİSTESİ

| | | |
|------------------|--|----|
| Tablo 3.1 | Örnek 3.1.1'de verilen problemin $x = \pi/2$ 'de farklı Δt değerleri için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 17 |
| Tablo 4.1 | $t = 0.1$ 'de $\varepsilon = 1, N = 40$ ve farklı Δt değerleri için nümerik çözümlerin ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 30 |
| Tablo 4.2 | $\Delta t = 0.0001, N = 80$ ve farklı ε değerleri için nümerik çözümler ve analitik çözümlerin karşılaştırılması..... | 31 |
| Tablo 5.1 | $t = 0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001, \varepsilon = 0.1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 37 |
| Tablo 5.2 | $t = 0.1, 0.2, 0.3$ 'de $\Delta t = 0.0001, \varepsilon = 0.1, N = 100$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 37 |
| Tablo 5.3 | $t = 0.1$ 'de $\varepsilon = 1, N = 80$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 39 |
| Tablo 5.4 | $t = 0.01, \Delta t = 0.0001, N = 80$ ve ε 'nin farklı değerleri için nümerik çözümler ve analitik çözümlerin karşılaştırılması..... | 39 |
| Tablo 6.1 | $t=0.1$ 'de $\Delta t = 0.0005, \varepsilon = 1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 45 |
| Tablo 6.2 | $t=0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001, N=100$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması | 46 |
| Tablo 6.3 | $t=1$ 'de $\Delta t=0.01, N=100$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 46 |
| Tablo 6.4 | $t = 1$ 'de $\varepsilon = 1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 47 |
| Tablo 6.5 | $t = 1$ 'de $\varepsilon = 1, N = 100$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 48 |
| Tablo 6.6 | $t = 0.1$ 'de $\varepsilon = 1, N = 40$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 48 |
| Tablo 6.7 | $t = 1$ 'de $\Delta t = 1, \varepsilon = 1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması..... | 49 |
| Tablo 6.8 | $t = 1$ 'de $\Delta t = 0.00025, \varepsilon = 1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması | 49 |

KAYNAK TERİMLİ BURGERS DENKLEMİNİN SONLU ELEMEN ÇÖZÜMLERİ

Ayşenur Büşra ÇAKAY

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

Bu tezde, kaynak terimli Burgers denklemini nümerik olarak çözmek için zamanda sonlu geri fark ve konumda sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Her bir zaman adımı için elde edilen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümü, burada tarafımızca üretilen MATLAB kodları kullanılarak elde edilmiştir. Sunulan yöntemin etkinliğini göstermek için farklı zamanlardaki çeşitli viskozite değerleri için elde edilen sayısal çözümler, gerçek çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Burgers denkleminin küçük viskozite değerlerinde de lineer olmayan yapısını koruduğu görülmüştür.

Giriş bölümünde, Burgers denklemi ile ilgili literatür araştırmasının bir özeti verilmiştir. Daha sonraki bölümde, problemin davranışını denklemin çözümünde elde edilen sonuçlara göre daha iyi anlamak ve yorumlamak için Burgers denkleminin formüllerini elde etme yolu gösterilmiştir. Denklem analitik çözümü, Burgers denklemi ve ısı denklemi arasındaki ilişkiyi ifade eden Hopf-Cole dönüşümü kullanılarak elde edilmiştir. Isı denkleminin ve homojen Burgers denkleminin sayısal çözümü, tezde tartışılan problemlerin çözümünde kullanılan

yöntemler olan zaman içinde ayrıklaştırma yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi hakkında bilgi verilerek elde edilmiş ve bu değerler analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Böylece, ürettiğimiz MATLAB kodlarının doğruluğu test edilmiştir. Bu tezin orijinal bölümünde, 1-boyutlu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan Burgers denklemi, zamanda sonlu geri farklar kullanılarak lineer olmayan cebirsel denklemlere dönüştürülmüştür. Bu denklemlerin her biri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Burgers denklemi, kaynak terim, sonlu geri fark, sonlu elemanlar yöntemi



FINITE ELEMENT SOLUTIONS OF THE BURGERS EQUATION WITH FORCING TERM

Ayşenur Büşra ÇAKAY

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Advisor: Assist. Prof. Dr. Selmahan SELİM

In this thesis, the backward finite difference in time and the finite element method in space are applied to solve the Burgers equation with forcing term. The resulting system of the nonlinear equations obtained at each time step is solved by using programming codes generated by us in MATLAB. In order to demonstrate how the efficiency of the offered method, the numerical solutions obtained for various values of viscosity at different times are compared with the exact solutions. It is observed that Burgers equation maintains its nonlinear structure even in small viscosity values.

In the introduction part, a summary of literature research about the Burgers equation is given. In the later part, the way of getting the formulas of the Burgers equation is shown in order to better understand and interpret the behavior of the problem in accordance with the results obtained in the solution of the equation. The analytical solution of the equation is obtained by using the Hopf-Cole transformation that expresses the relationship between the Burgers equation and the heat equation. Numerical solution of heat equation and homogeneous Burgers equation are obtained by giving information about the method of discretization in

time and finite element method, which are the methods used in the solution of the problems discussed in the thesis, and these values are compared with analytical solutions. Thus, the accuracy of MATLAB codes that we produced are tested. In the original part of this thesis, the Burgers equation with forcing term which is a one dimensional nonlinear partial differential equation is converted to nonlinear algebraic equations by using the backward finite difference in time. Each of these equations is solved using the finite element method.

Keywords: Burgers equation, forcing term, the backward finite difference, finite element method



1.1 Literatür Özeti

Kısmi diferansiyel denklemler, uygulamalı bilimlerin bir çok problemini temsil etmeleri sebebiyle son derece önem arz ederler. Örneğin; levhalarda ve çubuktaki ısı akışı, elektrik devrelerinde akım ya da yükün bulunması, kimyasal reaksiyonların incelenmesi, radyoaktif cismin bozunması, gezegen ve uydu hareketlerinin belirlenmesi, sığ sularda oluşan dalga problemi gibi bir çok fiziksel ya da kimyasal olayın modellenmesi kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilmektedir. Ayrıca akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, trafik ve türbülans gibi bir çok model her birinin geçerli olduğu bölge içerisinde kısmi diferansiyel denklemler ile temsil edilmektedir. Bu nedenle, doğadaki bu olayların temel işleyişini anlayabilmek için ilgili kısmi diferansiyel denklemleri iyi anlamak gerekmektedir. Akışkan akıları ve trafik modellerinde karşılaşılan pek çok fiziksel sistemin davranışını ortaya koyan Burgers denklemi de bu kısmi diferansiyel denklemlerdendir. Burgers denklemi,

$$U_t(x, t) + U(x, t)U_x(x, t) - \varepsilon U_{xx}(x, t) = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde ilk defa 1915'de Bateman'in [1] makalesinde görülmüştür. Bateman, yaptığı çalışmada viskoz sıvıların hareketini bu denklemle analiz etmeyi önerir ve denklemin fiziksel yapısını açıklar. Denklemdaki x uzay koordinatını, t zaman değişkenini, ε matematiksel modeli ele alınacak akışkanın akmaya karşı gösterdiği iç direnç olarak tanımlanabilecek kinematik viskoziteyi, $U(x, t)$ fonksiyonu ise akışkanın hızını temsil etmektedir.

Denklemin daha sonraki yıllarda bilim dünyası tarafından tanınması 1939 ve 1948'de Burgers'in [2, 3] yaptığı çalışmalar sayesinde olmuştur. Akışkanlar mekaniğinin bazı temel konularını analiz edebilmek için Navier-Stokes denklemlerine benzeyen ancak daha sade bir denklem arayışında olan Burgers, birkaç denklem arasından söz konusu denklemi ele alır ve yaptığı kapsamlı çalışmalarının sonucunda denklemi türbülanslı akışa model olarak sunar.

Böylece, denklem Burgers'in türbülans teorisine yaptığı katkılar ve denklem üzerindeki faydalı çalışmalarından dolayı Burgers denklemi olarak anılmaya başlamıştır.

Burgers denklemi, Hopf [4] ve Cole'ün [5] birbirlerinden bağımsız olarak yaptıkları çalışmalarla bir dönüşüm vasıtasıyla lineer ısı denklemine dönüştürülmüştür. Dolayısıyla, elde edilen

$$U = -2\varepsilon \frac{\theta_x}{\theta} \quad (1.2)$$

şeklindeki bu dönüşüm Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinmektedir.

Farklı başlangıç koşulları kullanılarak [6]'da denklemin 35 farklı analitik çözümü bulunmuştur. Ancak bu analitik çözümlerin $Re = 1/\varepsilon$ şeklinde tanımlanan Reynolds sayıları için yetersiz kaldığı görülmüştür. Reynolds sayısının çok büyük seçilmesi durumunda özellikle sonsuz seri içeren analitik çözümlerin oldukça yavaşladıkları veya yakınsama için çok fazla terime ihtiyaç duydukları bir gerçektir. Reynolds sayısının çok küçük seçilmesi durumunda ise elde edilen sonuçlar fiziksel olmayan sonuçlar ortaya koyacaktır. Bu durum; Burgers denkleminin, nümerik yöntemlerle ve fiziksel gerçeklerle uyumlu viskozite değerleri için çözülme ihtiyacını ortaya çıkarmıştır.

Bazı araştırmacılar, yarı lineerleştirme ve spline fonksiyon tekniğini kullanmış [7], uzay zaman değişimini sonlu elemanlarla sağlayarak ağırlıklı kalan formülasyonu ile birleştirdikleri yöntemleri ile denklemi nümerik olarak çözmüş fakat küçük viskozite katsayıları için karşılaştırmalı örnekler verememiştir [8]. [9]'da, varyasyonel-ardışık yaklaşımı ile elde edilen sonuçların yeterli olduğu verilen örneklerle gösterilmiştir.

Burgers denkleminin lineer olmayan UU_x terimini barındırması, fiziksel dalga olaylarını modelleyen εU_{xx} terimini içermesi ve ε kinematik viskozite katsayısının küçük değerleri için şok dalga özelliğini sergilemesi bir çok araştırmacının bu denkleme olan ilgisini cezp etmiştir. Bu nedenle son yıllarda bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle beraber Burgers denkleminin nümerik çözümü için farklı nümerik yöntemler uygulanmıştır.

Bu yöntemlerden biri olan sonlu elemanlar yöntemiyle denklemi çözmek isteyen araştırmacılar, [10]'da yaptıkları çalışmada sonlu elemanlar yöntemiyle elde ettikleri sonuçların küçük viskozite değerleri için yetersiz olduğunu ifade etmişlerdir. [11]'de Reynolds sayısının büyük değerleri için sonlu elemanlar yönteminin en küçük kareler zayıf formülasyonu ile çözüm üretmişlerdir. Diğer araştırmacılar; kübik spline fonksiyonları ile kollakasyon yöntemini [12], Petrov-Galerkin yöntemini [13], Hopf-Cole dönüşümünden yararlanarak lineer ve kuadratik fonksiyonlar ile Galerkin yöntemini [14, 18] kullanmışlardır. [15]'de, Burgers tipi denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için kuadratik B-spline fonksiyonlar ile sonlu elemanlar yönteminin en küçük kareler integral formunu geliştirmişlerdir. Ayrıca [16]'da, $\sin(n\pi x)$ fonksiyonlar ile sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak denklem nümerik olarak çözülürken [17]'de, zamanı ayrıştırma yöntemiyle lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürülüp sonlu elemanlar yöntemi uygulanarak çözülmüştür. Burgers denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan diğer çalışmalar arasında; sektik B-spline fonksiyonlar ile kollakasyon yöntemi [19], değiştirilmiş kübik B-spline fonksiyonlar ile kollokasyon yöntemi [20] ve kübik B-spline fonksiyonlar ile Galerkin yöntemi [21] vardır.

Burgers denkleminin, sonlu farklar yöntemiyle de elde edilmiş çok sayıda nümerik çözümü mevcuttur. [22]'de, Burgers denklemi önce ikiye parçalanmış sonra sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. Buna benzer biçimde [23]'de, denklem önce üçe parçalanmış ardından kübik spline fonksiyonlar kullanılarak çözüm yapılmıştır. Ayrıca, lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yaklaşımı [24], kapalı sonlu fark [25], dördüncü mertebeden sonlu fark [26], sınırlayıcı Taylor yaklaşımı kullanılarak klasik açık kompakt sonlu farklar [27], altıncı mertebeden kompakt sonlu farklar [28], yüksek mertebeden sonlu farklar yaklaşımı [29], Crank-Nicolson üstel sonlu farklar yöntemi [30] gibi yöntemler kullanılarak Burgers denklemi sonlu farklar ile çözülmüştür.

Ayrıca denklemin Adomian ayrıştırma yöntemi [31], varyasyonel iterasyon yöntemi [32], Diferansiyel Kareleme Yöntemi [33, 34, 35] gibi farklı yöntemlerle çözümüne de literatürde yer verilmiştir.

Görüldüğü üzere, Burgers denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için kullanılan bu yöntemler arasında sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemi en çok tercih edilen yöntemlerdendir. Sonlu farklar yönteminde, denklemdeki türev değerleri için bir yaklaşım yapılırken sonlu elemanlar yönteminde ise denklemin çözümü için bir yaklaşım yapılır. Bölünme noktaları arasındaki bir değer için sonlu farklar yöntemi ile bir yaklaşım yapılamazken, sonlu elemanlar yönteminde her bir alt aralığa karşılık enterpolasyon polinomu tanımlandığından bölünme noktaları arasındaki değerler için de bir yaklaşım yapılabilir, daha hassas çözümler elde edilebilir. Dolayısıyla, Burgers denkleminin çözümü için sonlu elemanlar yönteminin tercih edilmesi daha yararlı olacaktır.

Bu tezde, Burgers denkleminin yapısı ve çıkarılışı hakkındaki bilgiler için Munson ve diğ. [36] kitabından yararlanılmıştır. Ele aldığımız probleme zamanı ayrıştırma yöntemini uygulamak için Rektorys'nin [37] kitabı incelenmiştir. Reddy'nin [38] ve Zienkiewicz'in [39] kitabı sonlu elemanlar yöntemi için son derece önem arz eden kaynaklar olup tezin genelinde sonlu elemanlar yöntemini açıklamak ve yöntemi ele aldığımız probleme uygulamak için başvurulmuştur. Ayrıca, SEY ile ilgili bilgiler için [40], [41], [42] ve [43] kaynak kitaplardan da yararlanılmıştır. Son olarak, tezde çözümünü elde ettiğimiz kaynak terimli Burgers denklemini içeren problem [44] makalesinden seçilmiştir. Kullanılan diğer tüm kaynaklar [45-55], burada yapılan çalışmaları anlamak, uygulamak ve fikir edinmek için kaynak teşkil etmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan kaynak terimli Burgers denkleminin nümerik çözümünün, zamanı ayrıştırmak için sonlu geri fark ve konumda sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmesi amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Sonlu elemanlar yöntemi ile kaynak terimli Burgers denkleminin yeterli hassasiyetteki çözümleri elde edilir.

2.1 Burgers Denklemine Çıkarılışı

Burgers denklemi, akışkanlar mekaniğinde önemli bir yere sahip olan Navier-Stokes denkleminin basitleştirilmiş bir hali olup temel model denklemlerden biri olarak ele alınmaktadır. Türbülans içeren akışkan dinamiklerindeki problemlerin, dalga yayılımını tanımlayan denklemlerin, sıg su dalgalarının ve kimyasal reaksiyon difüzyon modelinin incelenmesinde bu denklemden sıkça yararlanılmaktadır.

Burgers denkleminin çözümünde elde edilen sonuçlar doğrultusunda problemin davranışını doğru yorumlayabilmek için Burgers denkleminin fiziksel yapısını iyi anlamamız gerekmektedir. Bu nedenle, Burgers denkleminin çıkarılışını ve yapısal özelliklerini incelemek yaptığımız çalışma adına faydalı olacaktır.

Burgers denkleminin çıkarılışı Navier-Stokes denklemlerinden elde edilir. Navier-Stokes denklemleri, kütle ve enerji korunumu da dikkate alınarak Newton'un ikinci kanunu olan momentum korunumunun temel alınmasıyla türetilen ve akabilen akışkan parçacıklarının hareketini ifade eden denklemlerdir.

Bu denklemler hava, okyanus akıntıları, bir borudaki su akışı, bir kanat etrafındaki hava akışı, galaksideki yıldızların hareketi gibi pek çok fiziksel olayı modellemede kullanılabileninden ve uçak, araba ya da güç istasyonu gibi dizaynlara, kan akışı çalışmalarına ışık tutabileceğinden oldukça önemlidir.

Akış alanı içinde x, y ve z doğrultusundaki bileşenleri sırasıyla u, v, w olan \mathbf{u} hızına sahip bir akışkan ele alındığında

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

denklemi, 3-boyutlu kütle korunumu veya süreklilik denklemdir. İfadenin ilk terimi, sıkıştırılabilir akışkandaki bir noktada yoğunluğun zamana bağlı değişimi, ikinci terimi ise kontrol hacminin sınırlarından dışarıya doğru olan net akışı

tanımlar ve konvektif terimi olarak adlandırılır. Sıkıştırılamaz bir akışkan için yoğunluk ρ sabittir. Bu nedenle yukarıdaki ifade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

şeklini alır. ρe birim kütledeki iç enerji, $\frac{1}{2}\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ birim kütledeki kinetik enerji olmak üzere

$$E = \rho e + \frac{1}{2}\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (2.3)$$

birim hacimdeki toplam enerjiyi verir. Enerji korunumu

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla(E\mathbf{u}) = r \quad (2.4)$$

olur. r , yüzey (basınç, viskoz) ve gövde (yerçekimi) kuvvetleri tarafından akışkan parçacığı elemanı üzerinde yapılan iş ve ısı iletiminin toplam enerjisidir. Ayrıca, akışkana uygulanan momentum korunumu,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}) \right) = f \quad (2.5)$$

şeklinindedir. Burada f , akışkan üzerindeki kuvvetleri temsil eder. Akışkan denkleminin genel hali

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + f \quad (2.6)$$

şeklinindedir. Burada denklemin sol tarafındaki $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ terimi zaman ivmesini, $\mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u})$ terimi konvektif ivmesini, eşliğin sağındaki ilk terim olan ∇p terimi basınç gradyenini, ikinci terim olan $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ terimi viskoz etkisini ve üçüncü terim f , akışkan üzerindeki kuvvetleri (yerçekimi, merkezkaç, elektromanyetik kuvvetler gibi) temsil eder. İfadelerdeki ρ akışkanın yoğunluğunu, \mathbf{u} akış hızını, t zamanı, p basıncı, μ dinamik viskoziteyi, ∇ gradyen operatörünü ve ∇^2 Laplace operatörünü belirtir. Akışın sıkıştırılamaz olduğu ve diğer kuvvetlerin ihmal edildiği göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}) = \varepsilon \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.7)$$

olur. Burada, $\frac{\mu}{\rho} = \varepsilon$ viskoziteyi ifade etmektedir. Burada ele alınan ifadelerin ayrıntılı incelenmesi için [36] incelenebilir.

Denklemin kartezyen koordinatlardaki 3-boyutlu açılımı

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

şeklinde verilebilir.

Navier-Stokes denklemleri, verilen akışkanın herhangi bir bölgesindeki kuvvetler dengesinin dinamik ifadesidir. Navier-Stokes denklemleri, akışkan parçacıklarının konumundan ziyade hızını belirtir. Dolayısıyla denklemin bir çözümü, zamana bağlı olarak uzayda belirtilen bir noktada ele alınan akışkanın hızını ifade eden bir akış alanı ya da bir hız alanı olarak adlandırılmaktadır. Burada, akışkan parçacığın tek bir bileşeni alınırsa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

bir boyutlu Burgers denklemi elde edilir. Bu denklem, lineer olmayan bir boyutlu akış denkleminin bütün davranışlarını temsil eder. Denklemdaki ε viskozite katsayısı sayesinde konveksiyon ve difüzyon terimleri arasındaki çözüm davranışı gözlenebilir. Belirli başlangıç-sınır koşulları altında Burgers denkleminin hem analitik hem de nümerik çözümleri elde edilebilmektedir. Denklemin kendisi parabolik kısmi diferansiyel denklem olmasıyla birlikte terim içerisindeki difüzyon teriminin etkisini kaybettiği durumlarda, yani viskozite değerlerinin çok küçük seçilmesi durumunda denklem parabolik yapısını kaybederek hiperbolik kısmi

diferansiyel denkleme dönüşmektedir. Bu nedenle, yapılan çözümlerde ortak amaç, denklemin parabolik yapısını kaybetmemesini sağlayacak çözümler geliştirmektir.

Bu tezde,

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) - \varepsilon u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (2.12)$$

şeklindeki Burgers denklemi

$$u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t), \quad (2.13)$$

$$a \leq x \leq b, \quad t \geq 0$$

sınır koşulları ve

$$u(x, 0) = g(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.14)$$

başlangıç koşulu ile ele alınacaktır. (2.12) denklemi kaynak terimli Burgers denklemi olarak adlandırılır. Burada $f_1(t)$, $f_2(t)$ ve $g(x)$ test problemlerinde belirlenen fonksiyonlardır. $f(x, t)$ terimi, fiziksel olarak sisteme enerji yüklenmesinden sorumludur. Analitik açıdan, (2.12) denklemi literatürde çok az çalışılmıştır. Denklem analitik çözümü kaynak terimin yapısıyla yakından ilgilidir. Hopf-Cole dönüşümü kaynak terimli Burgers denklemini lineerleştirebilir ve kaynak terimin integrali lineer ısı denkleminin katsayısı olarak görünür. Ayrıca, bu lineerleştirilmiş denklem fonksiyonel Wiener integral yöntemi açısından bir kaynaklı kapalı-form çözümünü kabul eder. Yani, burada analitik çözüm sol tarafta yerine yazılarak kalanları kaynak terim olarak kabul edilir. Böylece, kaynak terimli Burgers denkleminin başlangıç değer problemlerinin çözümü elde edilir.

Burgers denklemi içerisindeki uu_x lineer olmayan teriminden dolayı bugüne kadar bir çok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Çünkü, ele alınan bazı problemlerin analitik çözümleri Fourier serisi içermekte ve serilerin çözümlerinin yavaş yakınsaması ve içerisinde çok sayıda terim içermesi bir sorun oluşturmaktadır. Bu durumda çözüm elde etmek için çok uzun serilere ihtiyaç vardır. Bu sebeple, Burgers denkleminin nümerik çözümleri son derece önemlidir. Günümüzde gelişen bilgisayar teknolojisi sayesinde denklem, araştırmacılara yüksek mertebeden yaklaşımlar bulma ve analitik çözüme daha yakın değerler üretme fırsatı vermiştir.

2.2 Burgers Denklemine Analitik Çözümü

$$U_t(x, t) + U(x, t)U_x(x, t) - \varepsilon U_{xx}(x, t) = 0 \quad (2.15)$$

Burgers denklemi verilmiş olsun. Bölüm 1'de Burgers denkleminin analitik çözümünün, Hopf ve Cole'ün birbirlerinden bağımsız olarak buldukları [4-5]

$$U = -2\varepsilon \frac{\theta_x}{\theta} \quad (2.16)$$

Hopf-Cole dönüşümü kullanılarak yapıldığından bahsedilmiştir. Burada $\theta(x, t)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

ısı denkleminin bir çözümüdür. (2.15) Burgers denklemi ile (2.17) ısı denklemi arasındaki bu ilişki, Cole tarafından aşağıdaki teoremlerin ispatıyla gösterilmiştir [5].

Teorem 2.1.

$\theta(x, t)$, (2.17) ısı denkleminin bir çözümü olsun. Öyleyse, (2.16) Hopf-Cole dönüşümündeki $U(x, t)$, (2.15) Burgers denkleminin çözümüdür.

İspat.

$f = f(x, t)$ her mertebeden kısmi türevleri ile birlikte sürekli bir fonksiyon ve

$$U(x, t) = f_x(x, t) \quad (2.18)$$

olsun. (2.18) denklemi, (2.15) Burgers denkleminde yerine yazıldığında

$$f_{xt} + f_x f_{xx} = \varepsilon f_{xxx} \quad (2.19)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her tarafının x 'e göre integrali alındığında

$$\int f_{xt} dx + \int f_x f_{xx} dx = \int \varepsilon f_{xxx} dx \quad (2.20)$$

$$f_t + \frac{1}{2}(f_x)^2 = \varepsilon f_{xx} \quad (2.21)$$

bulunur.

$\theta(x, t)$, (2.17) ısı denkleminin bir çözümü olmak koşuluyla,

$$f(x, t) = F(\theta(x, t)) \quad (2.22)$$

olsun. Bu durumda (2.21) denklemi

$$F'(\theta) \theta_t + \frac{1}{2} (F'(\theta)\theta_x)^2 = \varepsilon F''(\theta)\theta_x^2 + \varepsilon F'(\theta)\theta_{xx} \quad (2.23)$$

olur. Bu denklemin sol tarafında (2.17) ısı denklemini kullanılırsa

$$\varepsilon F'(\theta)\theta_{xx} + \frac{1}{2} (F'(\theta)\theta_x)^2 = \varepsilon F''(\theta)\theta_x^2 + \varepsilon F'(\theta)\theta_{xx} \quad (2.24)$$

bulunur. Denklemi düzenlersek

$$(F'(\theta))^2 = 2\varepsilon F''(\theta) \quad (2.25)$$

elde edilir.

$$P(\theta) = F'(\theta) \quad (2.26)$$

denilirse,

$$(P(\theta))^2 = 2\varepsilon P'(\theta) \quad (2.27)$$

değişkenlerine ayrılabilir bir adi diferansiyel denklem bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$P = -2\varepsilon(\theta + c)^{-1}$$

olup, $P(\theta) = F'(\theta)$ olduğundan

$$F(\theta) = -2\varepsilon \ln(\theta + c) + k \quad (2.28)$$

denklemini elde edilir. Burada c ve k sabittir. $f(x, t) = F(\theta)$ olduğundan (2.18) denklemini kullanılırsa

$U = -2\varepsilon \frac{\theta_x}{\theta}$ eşitliği bulunur. Dolayısıyla denklemin ispatı tamamlanmış olur.

$\theta(x,0)$ başlangıç değerini bulmak için (2.16) dönüşümünde $x = \mu$ değişken değişimi yaparak 0'dan x 'e kadar integral alınırsa

$$\int_0^x U(\mu, t) d\mu = -2\varepsilon \ln \theta(\mu, t) \Big|_0^x$$

$$= -2\varepsilon \ln \left(\frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)} \right) \quad (2.29)$$

bulunur.

Elde edilen bu son denklem basit bir düzenlemeyle

$$\theta(x, t) = \theta(0, t) \exp\left(-2\varepsilon \int_0^x U(\mu, t) d\mu\right) \quad (2.30)$$

olarak elde edilir. $U(x, t)$ 'nin başlangıç koşulunun $U(x, 0) = U_0(x)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\theta(x, t)$ 'nin başlangıç koşulu

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = c_0 \exp\left(-2\varepsilon \int_0^x U_0(\mu) d\mu\right) \quad (2.31)$$

olarak bulunur. Burada $c_0 = \theta(0,0)$ olarak alınmıştır. Ancak (2.16) denkleminde dolayı c_0 değeri (2.15) denklemi için elde edilen çözüm üzerinde etkili değildir.

Teorem 2.2.

(2.15) Burgers denkleminin (2.16) Hopf-Cole dönüşümü ile verilen çözümü tektir.

İspat.

(2.15) Burgers denkleminin herhangi bir $U(x, t)$ çözümü, (2.30) ile ispatlanan ve (2.17) ısı denklemini sağlayan bir $\theta(x, t)$ fonksiyonu tanımlar.

Varsayalım ki, $U(x, t)$ ve $K(x, t)$ (2.15) Burgers denkleminin farklı iki çözümü olsun. Başlangıç koşulundan dolayı $U(x, 0) = K(x, 0)$ 'dir. $\theta(x, t)$ 'nin başlangıç koşulu (2.31) eşitliği ile bir c_0 sabitine bağlı olarak verilir. $\theta(x, 0)$, $U(x, 0) = K(x, 0)$ 'a bağlı olduğundan $\theta(x, 0)$ her iki durumda da aynıdır. Sınır koşulları için her iki çözüm de aynı olduğu için ısı denkleminin $\theta(x, t)$ çözümü her iki durum için aynı olur.

Burada görüleceği üzere $U(x, t)$ ve $K(x, t)$ Hopf-Cole dönüşümünden elde edilirler. Dolayısıyla, $U(x, t) = K(x, t)$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, Teorem 2.1 ve Teorem 2.2'nin ispatına dayanarak Burgers denklemi yerine ısı denklemi çözülerek ve Hopf-Cole dönüşümü ile Burgers denkleminin çözümü elde edilebilir. Ayrıca, Burgers denklemi için burada verilen başlangıç ve sınır koşullarının Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla ısı denkleminin başlangıç ve sınır koşullarının elde edileceği açıkça görülür.

Bu kısımda literatürde sıkça rastladığımız ve bizim de üzerinde çalışmış olduğumuz Burgers denklemi, (2.32) başlangıç koşulu ve (2.33) sınır koşulları ile ele alınarak analitik çözümü yapılacaktır. Burada amacımız, Burgers denkleminin analitik çözümünün Hopf-Cole dönüşümü ile nasıl elde edileceğini göstermektir.

(2.15) Burgers denklemini

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.32)$$

başlangıç koşulu ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.33)$$

sınır koşulları ile ele alalım.

Denklemin analitik çözümünü, ısı denklemine karşılık gelen Hopf-Cole dönüşümünü kullanarak elde ederiz. (2.32) başlangıç koşulunu kullanarak $\theta(x, t)$ fonksiyonunun başlangıç koşulu

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = c_0 \exp(-(2\varepsilon\pi)^{-1}(1 - \cos(\pi x))) \quad (2.34)$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde, (2.33) sınır koşullarını kullanarak ısı denkleminin sınır koşulları

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0 \quad (2.35)$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla, (2.15) denklemi (2.32) başlangıç koşulu ve (2.33) sınır koşulları ile

$$\theta_t = \varepsilon \theta_{xx}$$

$$\theta(x, 0) = c_0 \exp(-(2\varepsilon\pi)^{-1}(1 - \cos(\pi x))) \quad (2.36)$$

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0$$

problemine dönüşür. Bu problemin çözümü sonucunda A_0, A_n Fourier katsayıları olmak üzere

$$\theta(x, t) = A_n \exp(-\varepsilon n^2 \pi^2 t) \cos(n\pi x) \quad (2.37)$$

olarak elde edilir. Bu denklem sınır şartlarını sağlar. Ayrıca

$$\theta(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\varepsilon n^2 \pi^2 t) \cos(n\pi x) \quad (2.38)$$

denklemini de başlangıç koşulunu sağlar.

A_0, A_n Fourier katsayıları

$$A_0 = c_0 \int_0^1 \exp(-(2\varepsilon\pi)^{-1}(1 - \cos(\pi x))) dx \quad (2.39)$$

$$A_n = 2c_0 \int_0^1 \exp(-(2\varepsilon\pi)^{-1}(1 - \cos(\pi x))) \cos(n\pi x) dx$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanır. Dolayısıyla, bu eşitlikler Hopf-Cole dönüşümü içerisinde yerine yazıldığında Burgers denkleminin analitik çözümü

$$U(x, t) = 2\pi\varepsilon \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \exp(-\varepsilon n^2 \pi^2 t) \sin(n\pi x)}{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(\varepsilon n^2 \pi^2 t) \cos(n\pi x)} \quad (2.40)$$

şeklinde elde edilir.

Bu bölümde, tez içerisinde ele alınan problemleri çözmek için kullanılacak yöntemler olan zamanı ayrıştırma ve sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili bilgi verilecektir.

3.1 Zamanı Ayrıştırma Yöntemi

$H \times (0, T)$ bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \quad (3.1)$$

şeklinde verilmiş kısmi diferansiyel denklem, H' 'da

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.2)$$

başlangıç koşulu ve $\Gamma \times (0, T)$ 'de

$$B_i u = g_i \quad (3.3)$$

$$C_i u = h_i$$

sınır koşulları ile verilen sınır değer problemini göz önüne alalım.

B_i ve C_i , A operatörü ile ilişkili sınır operatörleri ve T , toplam zamandır. Zamanı ayrıştırma yönteminde $[0, T]$ aralığı, uzunluğu Δt olan $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ olmak üzere p tane alt aralığa bölünür. Burada p , zaman aralığını bölmek için kullanılan pozitif tam sayı olmak üzere $\Delta t = T/p$ 'dir ve $t_1 = 0$ 'dır.

$t = t_j$ ($j = 1, 2, \dots, p$) noktalarında (3.1) denkleminde $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevi yerine

$$\frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta t}$$

geri fark ifadesi yazılmasıyla

$$A z_j + \frac{1}{\Delta t} z_j = \frac{1}{\Delta t} z_{j-1} + f \quad (3.4)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem

$$z_0 = u_0 \quad (3.5)$$

alınarak $j = 1, 2, \dots, p$ için ardışık olarak çözülür. Bu yöntemle (3.1)-(3.3) denklemleri ile göz önüne alınan parabolik başlangıç-sınır değer probleminin çözümü, (3.4) denklemleri ve (3.3) sınır koşullarına karşılık gelen sınır koşulları ile birlikte p tane adi diferansiyel denkleminin çözümüne indirgenmiş olur [37].

Örnek 3.1.1 $H = (0, \pi) \times (0, 1)$ bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x \quad (3.6)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.7)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (3.8)$$

problemini göz önüne alalım [37].

A operatörü, $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dir. (3.6)-(3.8) başlangıç-sınır değer problemi, (3.6)

denkleminde $\frac{\partial u}{\partial t}$ yerine $\frac{z_j - z_{j-1}}{\Delta t}$ yazılırsa $j = 1, 2, \dots, p$ için

$$-\frac{d^2 z_j}{dx^2} + \frac{1}{\Delta t} z_j = \frac{1}{\Delta t} z_{j-1} + \sin x \quad (3.9)$$

$$z_j(0) = z_j(\pi) = 0$$

sınır değer problemine dönüşür. Burada (3.5)'den $z_0 = 0$ 'dır.

$j = 1$ için (3.9) denkleminde

$$-\frac{d^2 z_1}{dx^2} + \frac{1}{\Delta t} z_1 = \frac{1}{\Delta t} z_0 + \sin x, \quad z_1(0) = z_1(\pi) = 0 \quad (3.10)$$

olarak elde edilen sınır değer probleminin çözümü

$$z_1(x) = \left(1 - \frac{1}{1 + \Delta t}\right) \sin x \quad ; \quad (3.11)$$

$j=2$ için,

$$-\frac{d^2 z_2}{dx^2} + \frac{1}{\Delta t} z_2 = \left(\frac{2 + \Delta t}{1 + \Delta t}\right) \sin x, \quad z_2(0) = z_2(\pi) = 0 \quad (3.12)$$

olup

$$z_2(x) = \left(1 - \frac{1}{(1 + \Delta t)^2}\right) \sin x \quad (3.13)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde işlemler tekrarlandığında problemin çözümü $j = 1, 2, \dots, p$ için

$$z_j(x) = \left(1 - \frac{1}{(1 + \Delta t)^j}\right) \sin x \quad (3.14)$$

olarak elde edilir. (3.6)-(3.8) sınır değer probleminin tam çözümü

$$u(x, t) = (1 - \exp(-t)) \sin x \quad (3.15)$$

dir.

Tablo 3.1 Örnek 3.1.1’de verilen problemin $x = \pi/2$ ’de farklı Δt değerleri için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

| t | $\Delta t=0.1$ | $\Delta t=0.01$ | $\Delta t=0.001$ | Analitik |
|-----|----------------|-----------------|------------------|----------|
| 0.2 | 0.1736 | 0.1805 | 0.1812 | 0.1813 |
| 0.4 | 0.3170 | 0.3283 | 0.3295 | 0.3297 |
| 0.6 | 0.4355 | 0.4496 | 0.4510 | 0.4512 |
| 0.8 | 0.5335 | 0.5489 | 0.5505 | 0.5507 |
| 1.0 | 0.6145 | 0.6303 | 0.6319 | 0.6321 |

3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi (SEY), uygulamalı bilimlerde karşılaşılan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan ve yaklaşık çözüm veren nümerik bir işlemdir. Sonlu elemanlar yönteminde temel kavram; sıcaklık, basınç veya yer değiştirme gibi herhangi bir sürekli büyüklüğün, sonlu sayıdaki alt bölgeler üzerinde tanımlanan parçalı sürekli fonksiyonlardan oluşan diskrit bir model yardımıyla tahmin edilmesidir.

Sonlu elemanlar yönteminin günümüzde uygulama alanı oldukça geniş olup anlamı bir fizikçi, mühendis veya uygulamalı matematikçiye göre değişiklik gösterebilir. Bu yöntem, karmaşık geometriye sahip yapıları kolaylıkla modellemesi ve lineer olmayan malzemelerin tanımlanmasına izin vermesinden dolayı tercih edilir.

Sonlu elemanlar yönteminin doğuşu, 1950 yılının başında endüstride olmuştur ve ilk olarak 1956’da Turner, Clough ve Martin’in yapmış olduğu çalışma ve yayınlarda görülmüştür. Yapılan bu yayın ve çalışmalar diğer araştırmacıların da ilgisini çekmiş ve yöntemle ilgili birçok yayında yöntemin mekanikteki uygulamaları tartışılmıştır.

Teorik anlamda en önemli adım 1963'de Melosh'un sonlu eleman yönteminin aslında iyi bilinen Rayleigh - Ritz işleminin bir varyasyonu olduğunu göstermesiyle atılmıştır.

1970'li yıllarda lineer eliptik sınır değer problemleri, parabolik problemler ve hiperbolik denklemlere ilişkin hata tahminlerinin hesaplanmasında önemli çalışmalar yapılmıştır. 1972'ye gelindiğinde, SEY uygulamalı matematikte yeni ve önemli bir nümerik analiz alanı olarak doğmuştur.

Diğer araştırmacılar, yapısal mekanik, ısı transferi ve akışkanlar mekaniği ile ilgili eleman denklemlerinin aynı zamanda Galerkin yöntemi ve en küçük kareler yaklaşımı gibi bir ağırlıklı kalan işlemi kullanarak da çıkarılabildiğini gösterdiklerinde SEY'in uygulama alanı genişlemiştir. Bu bilgi, sonlu eleman yönteminin herhangi bir diferansiyel denkleme uygulanabilmesini mümkün kıldığı için teoriye önemli bir katkı sağlamıştır [38].

3.2.1 Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulama Adımları

Sonlu elemanlar yöntemini kullanabilmek için ilk olarak ilgili denklemin zayıf formu oluşturulur. Zayıf form kullanılarak çözüm fonksiyonunun sağlaması gereken türevlenebilme şartları ve bağımlı değişkenler üzerindeki süreklilik gereksinimleri azaltılmış olur. Buradaki amaç, karmaşık geometriye sahip bölgelerde çalışılırken daha kararlı ve yakınsak sonuçlar elde etmeyi sağlayan ayrıştırılmış denklemler elde etmektir [39].

Bir diferansiyel denklemin zayıf formu bulunurken,

- i. Diferansiyel denkleminde bulunan her fonksiyon, test fonksiyonu olarak bilinen w ile çarpılır,
- ii. w ile çarpılan diferansiyel denklem çalışılan bölge üzerinde integre edilir,
- iii. Kısmi integrasyon uygulanarak türev mertebeleri en az sayıya indirgenir,
- iv. Eğer mümkünse sınır koşulları türetilir.

$u \in C^2$ ve $f \in C^0$ olmak üzere, ikinci mertebeden bir boyutlu $u'' = f$ denklemini üzerinden bir diferansiyel denklemin zayıf formunun nasıl elde edildiğini

göstererek açıklayalım. Yukarıda bahsedildiği gibi, önce $u'' - f = 0$ denklemi w ile çarpılıp integrale edilirse,

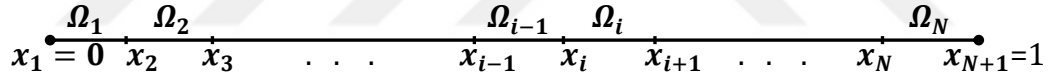
$$\int_{\Omega} (wu'' - wf)d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu aşamada kısmi integrasyon uygulanması ile;

$$\int_{\Omega} (w'u' - wf)d\Omega = wu'|_{\Omega} \quad (3.17)$$

bulunur.

SEY'de, üzerinde çalışılan problemin çözüm bölgesi kesişmeyen basit alt bölgelere ayrıştırılır. Bu alt bölgelerin her biri sonlu eleman olarak adlandırılır. Problemden bölgenin parçalanmasına ayrıklaştırma, sonlu eleman ağı ya da mesh denir. Her sonlu elemanın başlangıç ve bitiş noktasıyla köşe noktalarına nod veya düğüm noktası denir.



Şekil 3.1 [0, 1] aralığı için sonlu elemanlar ve düğüm noktaları

SEY çalışılan bölgeyi istenilen şekil ve büyüklükte, sayıda sonlu elemanlara bölme imkanı verir. Burada elemanların üst üste gelmeyecek şekilde boşluk bırakmadan bölgenin tamamını kaplaması ve elemanların ne kadar küçüklükte seçileceği ile eleman sayısının yaklaşımı nasıl etkileyeceği konusu dikkat edilmesi gereken unsurlardandır.

Gereksiz sayıda eleman kullanılması ile hesaplama süreci ve oluşan hatalar artar. Bu nedenle elemanlar, süreci kısaltacak kadar büyük ve hesaplama alanındaki değişimleri yansıtacak kadar küçük seçilmelidir. Genellikle, küçük elemanlar sonuçların hızla değiştiği durumlarda kullanılırken büyük elemanlar sonuçların neredeyse sabit olduğu yerlerde kullanılır [40].

Elemanların boyutları ilgili problemin boyutu ile aynı olacak şekilde seçilir. Sonlu elemanlar bir boyutlu problemlerde çubuk elemanlardan oluşur. Bu elemanlar, lineer elemanlar olarak adlandırılır. Daha yüksek dereceden olanları kuadratik, kübik, kuartik olarak adlandırılır.



Şekil 3.2 1-boyutlu çubuk eleman

İki boyutlu elemanlar, üçgensel ve dörtgensel elemanlar olup genellikle mühendislik problemlerinin modellenmesinde kullanılır.

Ayrıklaştırılan bölgede her bir eleman için elde edilmesi gereken çözüm, bir yaklaşım fonksiyonu olarak ifade edilir. Yaklaşım fonksiyonları, enterpolasyon fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak oluşturulur. Her eleman tipi için farklı ve kendine özgü olan enterpolasyon fonksiyonları kullanılır. Enterpolasyon fonksiyonları baz fonksiyonları veya şekil fonksiyonları olarak adlandırılır. Örneğin; $u(x)$ fonksiyonu için $U_N(x)$ yaklaşım fonksiyonu,

$$u(x) \approx U_N(x) = \sum_j c_j \phi_j(x) \quad (3.18)$$

denklemlerle ifade edilir. (3.18) denkleminde yer alan c_j 'ler bilinmeyen katsayılar ve $\phi_j(x)$ 'ler şekil fonksiyonlarıdır. Şekil fonksiyonları, her eleman üzerinde yerel olarak tanımlanır. Yani her bir elemana özgüdür ve ilgili eleman dışında sıfırdır. Çoğu zaman şekil fonksiyonları türev ve integral işlemlerinin yapılmasını kolaylaştıracak şekilde seçilir. Şekil fonksiyonlarının seçimi yaklaşık çözümün yakınsaklığını etkiler ve kullanılan şekil fonksiyonlarının sayısının artması daha iyi bir yaklaşım sağlar [38]. Şekil fonksiyonlarının üst üste gelmemesi ve aralarında boşluk olmaması için bu fonksiyonlar lineer bağımsız seçilmelidir.

Bir boyutlu problemlerde lineer şekil fonksiyonu,

$$\phi(x) = a_0 + a_1x \quad (3.19)$$

şeklinde olmalıdır. Eğer kuadratik eleman kullanarak çözüm yapılacaksa

$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (3.20)$$

biçiminde bir şekil fonksiyonu seçilmelidir. Bu şekilde istenilen yüksek mertebeden şekil fonksiyonları oluşturulabilir. Şekil fonksiyonları birbirlerine düğüm noktaları ile bağlı olup sürekli ve parçalı fonksiyonlardır [41].

Sonlu elemanlar ve onların şekil fonksiyonlarının seçimi yapıldıktan sonra her sonlu elemanın özelliklerini ifade eden cebirsel denklemlerin belirlenmesi gerekir. Bu kısımda, polinom olarak ifade edilen yaklaşım fonksiyonu diferansiyel denklemin zayıf formunda yerine yazıldıktan sonra her eleman için var olan temel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülür. Örneğin, bir e elemanı için bu cebirsel denklem

$$K^e U_N^e = F^e \quad (3.21)$$

olarak ifade edilir. K^e , e . elemana ait katsayılar matrisi iken U_N^e , bilinmeyenleri içeren vektör, F^e ise denklemin sağ tarafında yer alan kuvvet vektörüdür.

Cebirsel denklemler birleştirilerek cebirsel denklem sistemi oluşturulur ve elde edilen genel cebirsel denklem sistemine sınır koşulları uygulanır. Bir çok problemde global katsayılar matrisi karesel ve simetrik olmasıyla beraber singülerdir ve determinantı sıfıra eşittir. Sınır koşulları uygulandığında singülerlik olma sorunu ortadan kaldırılır. Bu işlemden sonra birleştirilen eleman denklemlerine sınır koşullarının uygulanması ile elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek düğüm noktalarındaki bilinmeyen değerler bulunur. Çözüm fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak ifade edilir. Son olarak, elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler yardımıyla verilerek problemin çözümü tamamlanır.

3.3 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi

İki boyutlu bir Ω bölgesinde

$$L(z) = f \quad (3.22)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada L lineer veya lineer olmayan bir operatör, z bağımlı değişken ve f bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonudur.

(3.22) denkleminin z çözümü için

$$z_N = \sum_{j=1}^N \beta_j \phi_j + \phi_0 \quad (3.23)$$

şeklinde bir yaklaşık fonksiyon tanımlanır. Burada ϕ_j yaklaşım fonksiyonu, β_j bilinmeyen parametrelerdir. (3.23) yaklaşımı (3.22) denklemine yerleştirilirse

$$R = L(z_N) - f = L\left(\sum_{j=1}^N \beta_j \phi_j + \phi_0\right) - L(z) \neq 0 \quad (3.24)$$

şeklinde bir kalan ile sonuçlanır. R , β_j parametrelerinin ve bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olur. β_j parametrelerini belirleyebilmek için R kalanının sıfırdan farklı bir w_i ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamın minimize edilmesine yani

$$\int_{\Omega} w_i(x, y) R(x, y, \beta_j) dx dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.25)$$

integrali sıfıra eşitlenerek R kalanının minimize edilmesine ağırlıklı kalanlar yaklaşımı denir. Bu yaklaşıma dayanan yöntemlere Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi denir.

Yaklaşık çözüm, hem esas hem de doğal sınır koşullarını sağlayacak şekilde ağırlık fonksiyonları seçilmelidir. $\{w_i\}$ kümesi lineer bağımsız olmalıdır. Aksi halde (3.25) ifadesinden sağlanan denklemler lineer bağımsız olmayacağından çözülemez.

3.3.1 Galerkin Yöntemi

w_i ağırlık fonksiyonları ile ϕ_i yaklaşım fonksiyonları eşit seçilir ise yani $w_i = \phi_i$ ise bu yöntem Galerkin yöntemi denir. Yöntemin matematiksel ifadesi

$$K_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i K(\phi_j) d\Omega \quad \text{ve} \quad F_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i [f - K(\phi_0)] d\Omega$$

olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} c_j = F_i \quad (3.26)$$

şeklindedir.

SEY ile nümerik çözüm elde edilmek istendiğinde en çok tercih edilen ağırlıklı kalan yöntemlerinden biri olan Galerkin yönteminin uygulanma şeklini basit bir örnek üzerinde gösterelim:

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \\ u(0) = u(1) &= 0, \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklinde verilen sınır değer problemini ele alalım. (3.27) probleminin yaklaşık çözümü u_N fonksiyonu olsun. (3.27) ile verilen diferansiyel denklemdeki tüm terimleri w_i ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve bölge üzerinde integre edilirse denklemin ağırlıklı integral formu

$$\int_0^1 w_i (-u'' + u - f) dx = 0 \quad (3.28)$$

olarak elde edilir. (3.28) denkleminde kısmi integrasyon uygulanması sonucu denklemin zayıf formu

$$\int_0^1 (w_i' u' + w_i u - w_i f) dx = [w_i u']_0^1 \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilir. $u(0) = 0$ ve $u(1) = 0$ sınır koşulları esas sınır koşullarıdır.

Tüm bölge üzerinde u_N yaklaşık çözümü, şekil fonksiyonları ve bilinmeyen parametreler cinsinden

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilir.

Galerkin yöntemi kullanıldığından ağırlık fonksiyonu ile şekil fonksiyonları eşit seçilmiştir. Yani, $w_i = \phi_i$ 'dir. (3.30) ifadesi (3.29) zayıf formunda yerine yazılırsa

$$\sum_j \int_0^1 c_j (\phi_i' \phi_j' + \phi_i \phi_j - \phi_i f) dx = [\phi_i \phi_j']_0^1 \quad (3.31)$$

şeklinde elde edilir. İntegrallerin hesaplanması sonucu elde edilen cebirsel lineer denklem sistemi

$$[K] \{c_j\} = \{F\} \quad (3.32)$$

şeklindeki matris formunda gösterilir. $[K]$ cebirsel denklem sisteminin katsayılar matrisi, $\{c_j\}$ bilinmeyenler vektörü, $\{F\}$ ise denklemin sağ tarafında yer alan kuvvet vektörüdür.

Burada denklem sistemi çözülür ve c_j bilinmeyen parametreleri bulunur ve yaklaşık çözüm fonksiyon denkleminde yerine yazılarak u_N yaklaşık çözümü bulunur. Bu yöntemde şekil fonksiyonları, türev ve integral işlemlerinin daha kolay bir şekilde yapılmasını sağlamak için genellikle trigonometrik fonksiyon ya da polinom fonksiyonu olarak seçilirler.

3.3.2 Petrov-Galerkin Yöntemi

w_i ağırlık fonksiyonları ile ϕ_i yaklaşım fonksiyonları $w_i \neq \phi_i$ olarak seçilir ise bu yöntem Petrov-Galerkin yöntemi denir.

Isı denklemi, ısının bir nesne üzerinde belli bir konumda ve zamanda nasıl dağılacığını tanımlayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Yayılım denklemi olarak da bilinen ısı denklemi, parabolik kısmi diferansiyel denklemler sınıfına aittir. Fiziksel koşullar uygun olarak seçilirse kartezyen koordinat sisteminde (x, y, z) konumu ve t zamanı göstermek üzere, ısı denkleminin genel ifadesi

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.1)$$

şeklinindedir. Yukarıdaki denklem, üç boyutlu bir cismin (x, y, z) konumunda ve t anındaki sıcaklık değerini ifade eder. (x, y, z, t) noktasında θ 'nın değeri $\theta(x, y, z, t)$ 'dir. Böylece θ , dört reel değerli bir fonksiyondur.

Bir boyutlu ısı denklemi ise

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir.

(4.2) denklemini

$$\theta(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1 \quad (4.3)$$

başlangıç koşulu ve

$$\theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, \quad 0 < t \quad (4.4)$$

sınır koşulları ile ele aldığımız da analitik çözümü

$$\theta(x, t) = e^{-\pi^2 \varepsilon t} \sin \pi x \quad (4.5)$$

şeklinde elde edilir.

(4.2)-(4.4) başlangıç-sınır değer problemine ilk olarak zamanı ayrıştırma yöntemi uygulanır;

(4.2) denkleminde $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ yerine $\frac{\theta_j(x) - \theta_{j-1}(x)}{\Delta t}$ ($j = 1, 2, \dots, p$) geri fark ifadesi yazılırsa

$$\frac{1}{\Delta t} (\theta_j(x) - \theta_{j-1}(x)) - \varepsilon \theta_j''(x) = 0 \quad (4.6)$$

$$\theta_j(0) = 0, \quad \theta_j(1) = 0 \quad (4.7)$$

sınır değer problemi elde edilir.

Burada, $j = 1$ için $\theta_0(x) = \sin \pi x$ 'dir. Yani, $\theta_0(x) = \theta(x, 0)$ 'dir. Artan j değerleri sebebiyle (4.6)-(4.7) sınır değer probleminin tam çözümünü elde etmek zor olduğundan problemin nümerik çözümü SEY kullanılarak elde edilecektir.

(4.6) ısı denkleminin zayıf formunu elde etmek için test fonksiyonlarının bir uzayı tanımlanır. $v(x)$ test fonksiyonu olmak üzere kendisi ve birinci mertebeden türevi $[0,1]$ aralığında tanımlı ve bu aralıkta karesi integrallenebilir. Matematiksel olarak ifade edecek olursak,

$$\int_0^1 [(v(x))^2 + (v'(x))^2] dx$$

şeklindedir. Burada tanımlanan test fonksiyonlarının uzayı $H[0,1]$ ile gösterilir.

(4.6)'nın zayıf formu

$$\int_0^1 v(x) \left(-\varepsilon \theta_j''(x) + \frac{1}{\Delta t} (\theta_j(x) - \theta_{j-1}(x)) \right) dx = 0 \quad (4.8)$$

($j = 1, 2, \dots, p$) şeklindedir.

Denklemin yaklaşık çözümleri, SEY uygulanarak şu şekilde kurulur: $\theta_j(x)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümü,

$$\theta_j^N = \sum_{i=1}^{N+1} b_i^j \psi_i(x) \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\psi_i(x) \in H[0,1]$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) şekil fonksiyonları ve b_i^j 'ler bilinmeyen katsayılarıdır. Burada, test şekil fonksiyonlarının $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$ lineer bağımsız kümesini seçerek $v(x)$ test fonksiyonları oluşturulur. Her $v(x)$ test fonksiyonu ($N + 1$) tane test şekil fonksiyonunun lineer kombinasyonu olduğundan

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \phi_i(x) \quad (4.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a_i ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) katsayıları keyfi reel sayılardır.

Galerkin yönteminde $\psi_i(x) = \phi_i(x)$ olacak şekilde seçilir.

SEY'de, $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) şekil fonksiyonları sistematik bir teknik kullanılarak elde edilir. $[0,1]$ aralığı N tane alt aralığa ya da eşit h uzunluğundaki $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ elemanlarına bölünür. x_i ve x_{i+1} , Ω_i 'nin başlangıç ve bitiş noktaları olsun. Matematiksel olarak

$$\Omega_i = [x_i, x_{i+1}] \quad , \quad h = x_{i+1} - x_i$$

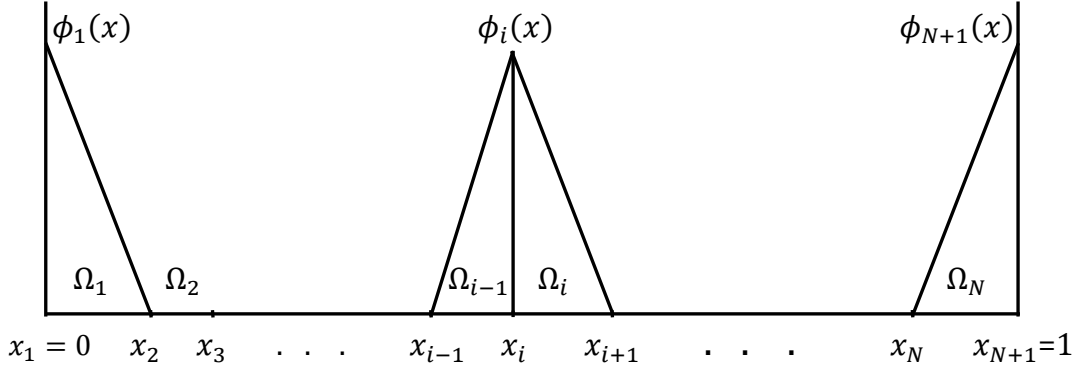
şeklinde ifade edilir. Burada $x_1 = 0$ ve $x_{N+1} = 1$ 'dir. Burada başlangıç ve bitiş noktalarını nod (düğüm) olarak adlandırırız.

$\phi_i(x)$ lineer şekil fonksiyonları

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & , \quad x \in \Omega_{i-1} \\ 1 - \frac{x - x_i}{h} & , \quad x \in \Omega_i \\ 0 & , \quad x \notin \Omega_{i-1} \cup \Omega_i \end{cases}$$

eşitliği kullanılarak belirlenir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i)** Her $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) şekil fonksiyonu $H[0,1]$ 'in elemanıdır.
- ii)** $\forall \phi_i(x)$ şekil fonksiyonu, elemanların tanım bölgesine göre parçalı fonksiyon şeklinde tanımlanır ve şekil fonksiyonları Ω_i elemanları üzerinde lineer fonksiyonlardır.
- iii)** $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, N + 1$) dir. Böylece $v(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \phi_i(x)$ test fonksiyonunun x_j nodundaki değeri $v(x_j) = a_j$ olur.
- iv)** Eğer $|i - j| \geq 2$ ise $\phi_i(x)\phi_j(x) = 0$ 'dir.



Şekil 4.1 [0, 1] aralığında tanımlı sonlu eleman şekil fonksiyonları

Burada, $v(x)$ test fonksiyonları $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sınır koşullarından dolayı sıfırlanırlar ve (iii) özelliği gereği $a_1 = 0$ ve $a_{N+1} = 0$ 'dır. Dolayısıyla, test fonksiyonu

$$v(x) = \sum_{i=2}^N a_i \phi_i(x) \quad (4.11)$$

olur. Bu nedenle, test fonksiyonları $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ olarak seçilirler.

Aynı şekilde, θ_N yaklaşım fonksiyonu da sınır koşullarını sağladığından

$$\theta_j^N = \sum_{i=2}^N b_i^j \psi_i(x) \quad (4.12)$$

şeklinde yeniden ifade edilir.

(4.8) zayıf formun kısmi integrasyonu

$$\int_0^1 \varepsilon \theta_j'(x) v'(x) dx + \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 v(x) \theta_j(x) dx = \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 v(x) \theta_{j-1}(x) dx \quad (4.13)$$

($j = 1, 2, \dots, p$) şeklinde yazılır.

(4.11) ve (4.12) eşitlikleri (4.13) zayıf formunda yerine yazılarak,

$$\varepsilon \sum_{n=2}^N b_n^j A_{kn} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=2}^N b_n^j D_{kn} = \frac{1}{\Delta t} E_k^j \quad (4.14)$$

($k = 2, 3, \dots, N$) denklemi elde edilir. Buradaki ifadeler,

$$A_{kn} = \int_0^1 \phi_k' \phi_n' dx,$$

$$D_{kn} = \int_0^1 \phi_k \phi_n dx,$$

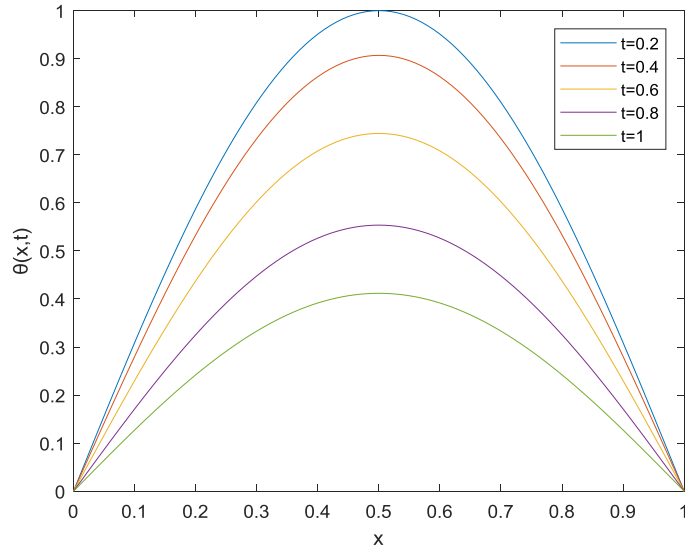
$$E_k^j = \int_0^1 \phi_k \theta_{j-1} dx$$

şeklinde olup A_{kn} ve D_{kn} matrislerine sırasıyla Stiffness ve Kapasitans matrisleri denir. Bu denklemde, ($N - 1$) tane lineer cebirsel denklem bulunur. Bu denklem sistemi MATLAB'de çözümlenerek nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 4.1'de, $t = 0.1$ anında $\varepsilon = 1, N = 40$ ve farklı Δt değerleri için ısı denkleminin nümerik çözümleri yapıldı ve bu çözümler analitik çözüm ile karşılaştırıldı. Tablo incelendiğinde, nümerik çözümler ile analitik çözümlerin uyum içerisinde oldukları anlaşılmaktadır. Tablo 4.2'de, farklı ε değerleri ve farklı t zamanlarında hesaplanan nümerik çözümlerin analitik çözümler ile karşılaştırılması verildi. Ayrıca, problemin çözüm davranışı Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'de verilerek gösterilmiştir.

Tablo 4.1 $t = 0.1$ 'de $\varepsilon = 1, N = 40$ ve farklı Δt değerleri için nümerik çözümlerin ve analitik çözümün karşılaştırılması

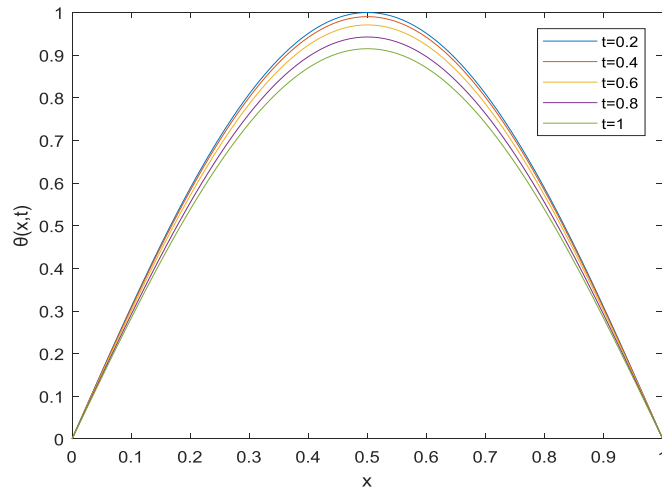
| x | $\Delta t = 0.01$ | $\Delta t = 0.001$ | $\Delta t = 0.0001$ | $\Delta t = 0.00001$ | Analitik |
|------------|-------------------|--------------------|---------------------|----------------------|----------|
| 0.1 | 0.115081 | 0.115172 | 0.115173 | 0.115173 | 0.115173 |
| 0.2 | 0.218896 | 0.219070 | 0.219072 | 0.219072 | 0.219072 |
| 0.3 | 0.301285 | 0.301525 | 0.301527 | 0.301527 | 0.301527 |
| 0.4 | 0.354182 | 0.354463 | 0.354466 | 0.354466 | 0.354466 |
| 0.5 | 0.372409 | 0.372705 | 0.372708 | 0.372708 | 0.372708 |
| 0.6 | 0.354182 | 0.354463 | 0.354466 | 0.354466 | 0.354466 |
| 0.7 | 0.301285 | 0.301525 | 0.301527 | 0.301527 | 0.301527 |
| 0.8 | 0.218896 | 0.219070 | 0.219072 | 0.219072 | 0.219072 |
| 0.9 | 0.115081 | 0.115172 | 0.115173 | 0.115173 | 0.115173 |
| L_∞ | 2.9892e-04 | 2.9860e-06 | 2.9839e-09 | 2.7754e-10 | |



Şekil 4.2 $\Delta t = 0.001, \varepsilon = 1, N = 100$ ve farklı t zamanlarında 1-boyutlu Isı denkleminin çözümü

Tablo 4.2 $\Delta t = 0.0001, N = 80$ ve farklı ε değerleri için nümerik çözümler ve analitik çözümlerin karşılaştırılması

| x | t | $\varepsilon = 1$ | | $\varepsilon = 0.01$ | | $\varepsilon = 0.0001$ | |
|------|-----|-------------------|----------|----------------------|----------|------------------------|----------|
| | | Nümerik | Analitik | Nümerik | Analitik | Nümerik | Analitik |
| 0.25 | 0.4 | 0.013645 | 0.013645 | 0.679735 | 0.679735 | 0.706828 | 0.706828 |
| | 0.6 | 0.001895 | 0.001895 | 0.666449 | 0.666449 | 0.706688 | 0.706688 |
| | 0.8 | 0.000263 | 0.000263 | 0.653423 | 0.653423 | 0.706549 | 0.706549 |
| | 1.0 | 0.000037 | 0.000037 | 0.640652 | 0.640652 | 0.706409 | 0.706409 |
| 0.5 | 0.4 | 0.019296 | 0.019296 | 0.961291 | 0.961291 | 0.999605 | 0.999605 |
| | 0.6 | 0.002680 | 0.002680 | 0.942505 | 0.942502 | 0.999408 | 0.999408 |
| | 0.8 | 0.000372 | 0.000372 | 0.924080 | 0.924080 | 0.999211 | 0.999211 |
| | 1.0 | 0.000052 | 0.000052 | 0.906018 | 0.906018 | 0.999014 | 0.999014 |
| 0.75 | 0.4 | 0.013645 | 0.013645 | 0.679735 | 0.979735 | 0.706828 | 0.706828 |
| | 0.6 | 0.001895 | 0.001895 | 0.666449 | 0.666449 | 0.706688 | 0.706688 |
| | 0.8 | 0.000263 | 0.000263 | 0.653423 | 0.653423 | 0.706549 | 0.706549 |
| | 1.0 | 0.000037 | 0.000037 | 0.640652 | 0.640652 | 0.706409 | 0.706409 |



Şekil 4.3 $\Delta t = 0.001, \varepsilon = 0.1, N = 100$ ve farklı t zamanlarında 1-boyutlu Isı denkleminin çözümü

BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, homojen Burgers denklemi zamanı ayrıştırma yöntemiyle ardışık olarak çözülmesi gereken p tane lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek her bir denklemin çözümü SEY ile elde edilmiştir.

$$U_t(x, t) + U(x, t)U_x(x, t) - \varepsilon U_{xx}(x, t) = 0 \quad (5.1)$$

şeklindeki homojen Burgers denklemini

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1 \quad (5.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad 0 < t \quad (5.3)$$

sınır koşulları ile ele alalım.

Bölüm 2.2'de (5.1) Burgers denkleminin analitik çözümü

$$U(x, t) = 2\pi\varepsilon \frac{\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \exp(-\varepsilon n^2 \pi^2 t) \sin(n\pi x)}{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(\varepsilon n^2 \pi^2 t) \cos(n\pi x)} \quad (5.4)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

(5.1)-(5.3) sınır değer problemine Bölüm 3.1'de ayrıntılı bir şekilde anlatılan zamanı ayrıştırma yöntemi uygulanır; $(\Delta t = \frac{T}{p})$

(5.1) denkleminde $\frac{\partial u}{\partial t}$ yerine $\frac{z_j(x) - z_{j-1}(x)}{\Delta t}$ ($j = 1, 2, \dots, p$) yazılırsa

$$-\varepsilon z_j''(x) + z_j(x)z_j'(x) + \frac{1}{\Delta t} (z_j(x) - z_{j-1}(x)) = 0 \quad (5.5)$$

$$z_j(0) = 0, \quad z_j(1) = 0 \quad (5.6)$$

sınır değer problemi elde edilir. Böylece, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem sınır koşullarını sağlayan p tane adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenir.

Burada $j=1$ için $z_0(x) = \sin \pi x$ 'dir. Yani, $z_0(x) = U(x, 0)$ 'dir. Artan j değerleri sebebiyle (5.5) –(5.6)sınır değer probleminin tam çözümünü elde etmek zordur. Bu nedenle, bu zorluğun üstesinden gelmek ve problemimizi çözebilmek için bu aşamada SEY kullanılacaktır.

(5.5) denkleminin zayıf formunu elde etmek için Galerkin yöntemini kullanacağız.

Buna göre zayıf form

$$\int_0^1 v(x) \left(-\varepsilon z_j''(x) + z_j(x)z_j'(x) + \frac{1}{\Delta t} (z_j(x) - z_{j-1}(x)) \right) dx = 0 \quad (5.7)$$

($j=1, 2, \dots, p$) şeklindedir. Burada $v(x)$ bir test fonksiyonu olmak üzere kendisi ve 1. mertebeden türevi $[0,1]$ aralığında mevcut, sürekli ve integrallenebilirdir. Yani, tüm test fonksiyonlarının lineer uzayı $H[0,1]$ Hilbert uzayı ile belirtilir.

$v(x)$ test fonksiyonunu oluşturmak için $\phi_i(x) \in H[0,1]$ olmak üzere $N+1$ tane $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$ lineer bağımsız test şekil fonksiyonlarının kümesini seçeriz. Dolayısıyla, $v(x)$ test fonksiyonu

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \phi_i(x) \quad (5.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada a_i 'ler keyfi reel sayılardır.

$z_j(x)$ fonksiyonu için bir yaklaşım fonksiyonu z_j^N olsun. Öyleyse,

$$z_j^N = \sum_{i=1}^{N+1} c_i^j \phi_i(x) \quad (5.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\phi_i(x) \in H[0,1]$ lineer bağımsız şekil fonksiyonları, c_i^j 'ler bilinmeyen katsayılardır. Daha önceki bölümde bahsettiğimiz gibi, Galerkin yönteminde $\phi_i(x)$ test şekil fonksiyonları ile $\phi_i(x)$ yaklaşım fonksiyonları eşit olarak seçilir. Yani, $i = 1, 2, \dots, N + 1$ için $\phi_i(x) = \phi_i(x)$ 'dir.

SEY'de $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$), sonlu eleman şekil fonksiyonları sistematik bir teknik kullanılarak elde edilir. $[0,1]$ aralığı N tane alt aralığa ya da eşit h uzunluğundaki $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ elemanlarına bölünür. x_i ve x_{i+1} , Ω_i 'nin başlangıç ve bitiş noktaları olsun. Matematiksel olarak

$$\Omega_i = [x_i, x_{i+1}] \quad , \quad h = x_{i+1} - x_i$$

şeklinde ifade edebiliriz. Açıkça görüleceği üzere, ele aldığımız problemde $x_1 = 0$ ve $x_{N+1} = 1$ 'dir.

$\phi_i(x)$ lineer şekil fonksiyonları

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & , \quad x \in \Omega_{i-1} \\ 1 - \frac{x - x_i}{h} & , \quad x \in \Omega_i \\ 0 & , \quad x \notin \Omega_{i-1} \cup \Omega_i \end{cases}$$

eşitliği kullanılarak belirlenir. Burada (5.8)'de belirttiğimiz $v(x)$ test fonksiyonları $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sınır koşullarından dolayı sıfırlanırlar. Dolayısıyla $a_1 = 0$ ve $a_{N+1} = 0$ 'dir.

Böylece, test fonksiyonu

$$v(x) = \sum_{i=2}^N a_i \phi_i(x) \quad (5.10)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Benzer şekilde, z_j^N yaklaşık çözümü de sınır koşullarını sağlamak durumunda olduğundan

$$z_j^N = \sum_{i=2}^N c_i^j \phi_i(x) \quad (5.11)$$

şeklinde yeniden düzenlenerek ifade edilir.

Bu düzenlemelerle birlikte $v(0) = 0, v(1) = 0$ eşitliklerini de kullanarak (5.7) denkleminin zayıf formunun kısmi integrasyonu ($j = 1, 2, \dots, p$)

$$\int_0^1 v(x) \left(-\varepsilon z_j''(x) + z_j(x) z_j'(x) + \frac{1}{\Delta t} (z_j(x) - z_{j-1}(x)) \right) dx = 0$$

$$\int_0^1 \varepsilon z_j'(x) v'(x) dx + \int_0^1 v(x) \left(z_j(x) z_j'(x) + \frac{1}{\Delta t} z_j(x) \right) dx = \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 v(x) z_{j-1}(x) dx$$

(5.12)

şeklinde yazılır.

(5.10) ve (5.11) eşitlikleri (5.12) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\varepsilon \sum_{n=2}^N c_n^j A_{kn} + \sum_{n=2}^N \sum_{m=2}^N c_n^j c_m^j B_{knm} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=2}^N c_n^j D_{kn} = \frac{1}{\Delta t} E_k^j$$

(5.13)

($k = 2, 3, \dots, N$)

denklemini elde edilir.

Burada

$$A_{kn} = \int_0^1 \phi_k' \phi_n' dx = \begin{cases} 2/h, & k = n \\ -1/h, & k = n-1 \text{ ve } k = n+1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$B_{knm} = \int_0^1 \phi_k \phi_n \phi_m' dx = \begin{cases} 1/6, & k = n-1 \text{ ve } k = m-1 \\ -1/6, & k = n-1 \text{ ve } k = m \\ 1/3, & k = n \text{ ve } k = m-1 \\ -1/3, & k = n \text{ ve } k = m+1 \\ 1/6, & k = n+1 \text{ ve } k = m \\ -1/6, & k = n+1 \text{ ve } k = m+1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$D_{kn} = \int_0^1 \phi_k \phi_n dx = \begin{cases} 2h/3, & k = n \\ h/6, & k = n - 1 \text{ ve } k = n + 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$E_k^j = \int_0^1 \phi_k z_{j-1} dx$$

şeklindedir. Her j değeri için (5.13) denklemi, $(N - 1)$ tane denklem ve c_n^j ($n = 2, \dots, N$) bilinmeyenleri içeren bir lineer olmayan cebirsel denklem sistemidir. Bu bilinmeyen değerler MATLAB'de tarafımızdan üretilen kodlar kullanılarak nümerik olarak elde edilmiştir.

Tablo 5.1'de, çeşitli N sayıda sonlu eleman için nümerik çözümler ile analitik çözüm yer almaktadır. Bu sonuçlara göre, kullanılan sonlu eleman sayısının artmasıyla nümerik çözümlerin analitik çözümlere yaklaştığı görülmüştür.

Tablo 5.2'de, ilerleyen zaman adımlarında ($t = 0.1, 0.2, 0.3$) nümerik çözümler ile analitik çözümlerin uyum içerisinde olduğu görülür.

Tablo 5.3'de farklı Δt zaman aralıklarında elde edilen nümerik çözümler ve analitik çözümler verilmiştir. Buna göre, zaman aralıkları küçüldükçe nümerik çözümlerin analitik çözümlere yaklaştığı görülmüştür.

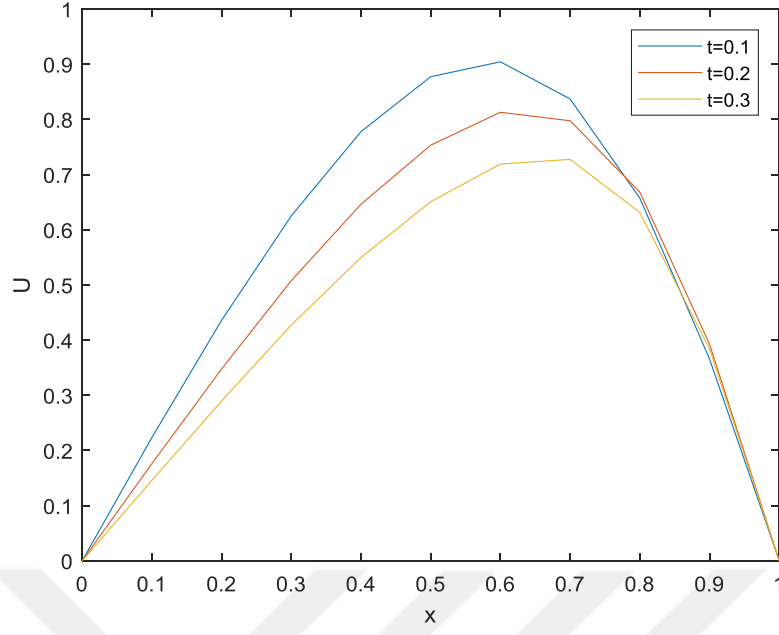
Bu çalışmanın amaçlarından biri de viskozite katsayısının denklemin nümerik çözümüne olan etkisini göstermektir. Tablo 5.4'de farklı ε viskozite sayıları kullanılarak nümerik çözüm elde edilmiştir. Elde edilecek çözümlerde yeterli hassasiyetin sağlanması için $N = 80$ seçilerek viskozitenin $0.05 \leq \varepsilon \leq 1$ değerleri için hesaplama yapılmıştır. Kullanılan bu değerlerde denklemin matematiksel ve fiziksel yapısını bozmadan nümerik çözüm elde edilebileceği görülmüştür.

Tablo 5.1 $t = 0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001$, $\varepsilon = 0.1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

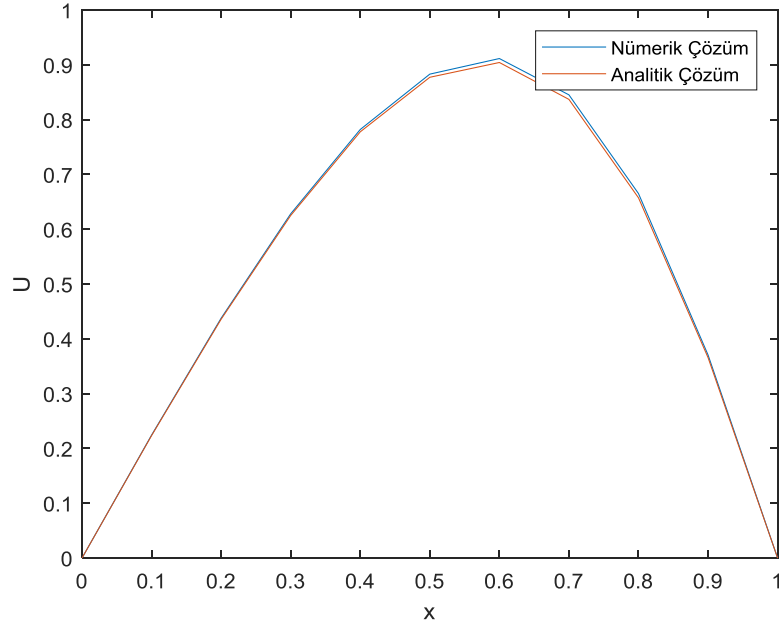
| x | N=10 | N=20 | N=40 | N=80 | N=100 | Analitik Çözüm |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|----------------|
| 0.1 | 0.23927 | 0.22370 | 0.22353 | 0.22348 | 0.22348 | 0.22345 |
| 0.2 | 0.46290 | 0.43631 | 0.43595 | 0.43586 | 0.43585 | 0.43580 |
| 0.3 | 0.65546 | 0.62590 | 0.62534 | 0.62520 | 0.62518 | 0.62512 |
| 0.4 | 0.80191 | 0.77882 | 0.77801 | 0.77781 | 0.77779 | 0.77772 |
| 0.5 | 0.88765 | 0.87872 | 0.87764 | 0.87737 | 0.87734 | 0.87728 |
| 0.6 | 0.89827 | 0.90604 | 0.90468 | 0.90434 | 0.90430 | 0.90425 |
| 0.7 | 0.81927 | 0.83897 | 0.83741 | 0.83702 | 0.83697 | 0.83692 |
| 0.8 | 0.63788 | 0.65924 | 0.65777 | 0.65740 | 0.65735 | 0.65731 |
| 0.9 | 0.35807 | 0.36698 | 0.36605 | 0.36582 | 0.36579 | 0.36575 |

Tablo 5.2 $t = 0.1, 0.2, 0.3$ 'de $\Delta t = 0.0001$, $\varepsilon = 0.1$, $N = 100$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

| x | $t = 0.1$ | | $t = 0.2$ | | $t = 0.3$ | |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.22348 | 0.22345 | 0.17610 | 0.17671 | 0.14574 | 0.14672 |
| 0.2 | 0.43585 | 0.43580 | 0.34764 | 0.34780 | 0.28971 | 0.29004 |
| 0.3 | 0.62518 | 0.62512 | 0.50770 | 0.50694 | 0.42720 | 0.42601 |
| 0.4 | 0.77779 | 0.77772 | 0.64624 | 0.64605 | 0.54959 | 0.54930 |
| 0.5 | 0.87734 | 0.87728 | 0.75321 | 0.75381 | 0.65079 | 0.65173 |
| 0.6 | 0.90430 | 0.90425 | 0.81288 | 0.81303 | 0.71906 | 0.71932 |
| 0.7 | 0.83697 | 0.83692 | 0.79747 | 0.79697 | 0.72745 | 0.72670 |
| 0.8 | 0.65735 | 0.65731 | 0.66806 | 0.66786 | 0.63141 | 0.63100 |
| 0.9 | 0.36579 | 0.36575 | 0.39258 | 0.39330 | 0.38383 | 0.38387 |



Şekil 5.1 $\Delta t = 0.0001$, $\varepsilon = 0.1$, $N = 100$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümler



Şekil 5.2 $t = 0.1$ 'de, $\Delta t = 0.0001$, $\varepsilon = 0.1$ için nümerik çözüm ve analitik çözümün karşılaştırılması

Tablo 5.3 $t = 0.1$ 'de $\varepsilon = 1$, $N = 80$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

| x | $\Delta t = 0.0002$ | $\Delta t = 0.0001$ | $\Delta t = 0.00005$ | Analitik Çözüm |
|-----|---------------------|---------------------|----------------------|----------------|
| 0.1 | 0.10965 | 0.10959 | 0.10957 | 0.10954 |
| 0.2 | 0.21000 | 0.20990 | 0.20987 | 0.20979 |
| 0.3 | 0.29219 | 0.29204 | 0.29197 | 0.29190 |
| 0.4 | 0.34827 | 0.34810 | 0.34801 | 0.34792 |
| 0.5 | 0.37194 | 0.37176 | 0.37167 | 0.37158 |
| 0.6 | 0.35940 | 0.35922 | 0.35913 | 0.35905 |
| 0.7 | 0.31020 | 0.31005 | 0.30998 | 0.30991 |
| 0.8 | 0.22804 | 0.22793 | 0.22787 | 0.22782 |
| 0.9 | 0.12080 | 0.12074 | 0.12070 | 0.12069 |

Tablo 5.4 $t = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$, $N = 80$ ve ε 'nin farklı değerleri için nümerik çözümler ve analitik çözümlerin karşılaştırılması

| x | $\varepsilon = 0.05$ | | $\varepsilon = 0.1$ | | $\varepsilon = 1$ | |
|-----|----------------------|-----------|---------------------|-----------|-------------------|-----------|
| | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. | Nüm. Çöz. | Anl. Çöz. |
| 0.1 | 0.29865 | 0.29865 | 0.29726 | 0.29726 | 0.27327 | 0.27324 |
| 0.2 | 0.57045 | 0.57044 | 0.56778 | 0.56777 | 0.52162 | 0.52156 |
| 0.3 | 0.79034 | 0.79034 | 0.78659 | 0.78659 | 0.72192 | 0.72185 |
| 0.4 | 0.93696 | 0.93696 | 0.93245 | 0.93244 | 0.85465 | 0.85459 |
| 0.5 | 0.99459 | 0.99460 | 0.98971 | 0.98971 | 0.90576 | 0.90571 |
| 0.6 | 0.95513 | 0.95513 | 0.95034 | 0.95035 | 0.86836 | 0.86833 |
| 0.7 | 0.81975 | 0.81976 | 0.81557 | 0.81558 | 0.74411 | 0.74410 |
| 0.8 | 0.59988 | 0.59988 | 0.59678 | 0.59678 | 0.54382 | 0.54382 |
| 0.9 | 0.31685 | 0.31686 | 0.31520 | 0.31520 | 0.28700 | 0.28700 |

KAYNAK TERİMLİ BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, zamanı ayrıştırma yöntemi ile kaynak terimli Burgers denklemi ardışık olarak çözülmesi gereken p tane lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek her bir denklemin çözümü SEY ile elde edilmiştir.

6.1 Zamanı Ayrıştırma

$$U_t(x, t) + U(x, t)U_x(x, t) - \varepsilon U_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (6.1)$$

şeklinde verilen kaynak terimli Burgers denklemini

$$U(x, 0) = 0 \quad (6.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 \quad (6.3)$$

sınır koşulları ile birlikte göz önüne alalım. Bu koşullar altında (6.1) denkleminin analitik çözümü

$$U(x, t) = t^2 \sin(2\pi x) \quad (6.4)$$

olurken $f(x, t)$ terimi

$$f(x, t) = 2t \sin(2\pi x) + 2\pi t^4 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x) + 4\varepsilon \pi^2 t^2 \sin(2\pi x) \quad (6.5)$$

biçiminde olacaktır [44].

(6.1) - (6.3) sınır değer probleminin nümerik çözümünü elde etmek için ilk olarak zamanı ayrıştırma yöntemi uygulanır;

(6.1) denkleminde $\frac{\partial u}{\partial t}$ yerine $\frac{z_j(x) - z_{j-1}(x)}{\Delta t}$ ($\Delta t = \frac{T}{p}$) yazılırsa ($j = 1, 2, \dots, p$)

$$-\varepsilon z_j''(x) + z_j(x)z_j'(x) + \frac{1}{\Delta t} (z_j(x) - z_{j-1}(x)) = f(x, t_j) \quad (6.6)$$

$$z_j(0) = 0, \quad z_j(1) = 0 \quad (6.7)$$

sınır değer problemi elde edilir. Burada $j=1$ için $z_0(x) = U(x, 0)$ 'dir.

6.2 Konum Ayırıştırması- SEY

(6.6) - (6.7) sınır değer probleminin tam çözümünü elde etmek artan j değerleri sebebiyle zor olduğundan SEY kullanarak problemin nümerik çözümünü elde edeceğiz. (6.6) denkleminin zayıf formunu elde etmek için Galerkin yöntemini kullanacağız.

(6.6) denklemi test fonksiyonu olan $v(x)$ ile çarpılarak integre edilirse

$$\int_0^1 v(x) \left(-\varepsilon z_j''(x) + z_j(x) z_j'(x) + \frac{1}{\Delta t} (z_j(x) - z_{j-1}(x)) - f(x, t_j) \right) dx = 0 \quad (6.8)$$

($j = 1, 2, \dots, p$) elde edilir. Burada, $v(x) \in H[0,1]$ olduğunu biliyoruz. $v(x)$ test fonksiyonunu oluşturmak için $\phi_i(x) \in H[0, 1]$ olmak üzere $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$ lineer bağımsız test şekil fonksiyonlarının kümesi seçilirse test fonksiyonu

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \phi_i(x) \quad (6.9)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada a_i 'ler keyfi reel sayılardır.

$z_j(x)$ fonksiyonu için bir yaklaşım fonksiyonu z_j^N olsun. Bu yaklaşım fonksiyonu,

$$z_j^N = \sum_{i=1}^{N+1} c_i^j \phi_i(x) \quad (6.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (6.10)'deki $\phi_i(x) \in H[0,1]$ lineer bağımsız şekil fonksiyonları, c_i^j 'ler bilinmeyen katsayılarıdır. Galerkin yönteminde $\phi_i(x) = \phi_i(x)$ olarak alınır ($i = 1, 2, \dots, N + 1$).

Çözüm bölgesi olan $[0,1]$ aralığı, N tane alt aralığa ya da eşit h uzunluğundaki $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ elemanlarına bölünür.

Matematiksel olarak

$$\Omega_i = [x_i, x_{i+1}] \quad , \quad h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, x_i ve x_{i+1} , Ω_i 'nin başlangıç ve bitiş noktaları olarak tanımlanmıştır. Açıkça görüleceği üzere ele aldığımız problemde $x_1 = 0$ ve $x_{N+1} = 1$ 'dir.

SEY'de $\phi_i(x)$ lineer şekil fonksiyonları

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & , \quad x \in \Omega_{i-1} \\ 1 - \frac{x - x_i}{h} & , \quad x \in \Omega_i \\ 0 & , \quad x \notin \Omega_{i-1} \cup \Omega_i \end{cases}$$

eşitliği kullanılarak sistematik bir şekilde belirlenir.

(6.9)'de belirttiğimiz $v(x)$ test fonksiyonları $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sınır koşullarından dolayı sıfırlanırlar. Bu nedenle, $a_1 = 0$ ve $a_{N+1} = 0$ 'dır.

Dolayısıyla, test fonksiyonu

$$v(x) = \sum_{i=2}^N a_i \phi_i(x) \quad (6.11)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Benzer şekilde, z_j^N yaklaşık çözümü de sınır koşullarını sağlamak durumunda olduğundan

$$z_j^N = \sum_{i=2}^N c_i^j \phi_i(x) \quad (6.12)$$

şeklinde yeniden düzenlenerek ifade edilir.

Bu düzenlemelerle birlikte $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ eşitliklerini de kullanarak (6.8) kaynak terimli Burgers denkleminin zayıf formunun kısmi integrasyonu

$$\int_0^1 v(x) \left(-\varepsilon z_j''(x) + z_j(x) z_j'(x) + \frac{1}{\Delta t} (z_j(x) - z_{j-1}(x)) - f(x, t_j) \right) dx = 0$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varepsilon z_j'(x) v'(x) dx + \int_0^1 v(x) \left(z_j(x) z_j'(x) + \frac{1}{\Delta t} z_j(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 v(x) z_{j-1}(x) dx + \int_0^1 v(x) f(x, t_j) dx \end{aligned}$$

(6.13)

($j = 1, 2, \dots, p$)

şeklinde yazılır.

(6.11) ve (6.12) eşitlikleri (6.13) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\varepsilon \sum_{n=2}^N c_n^j A_{kn} + \sum_{n=2}^N \sum_{m=2}^N c_n^j c_m^j B_{knm} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=2}^N c_n^j D_{kn} = \frac{1}{\Delta t} E_k^j + F_k^j$$

(6.14)

($k = 2, 3, \dots, N$)

olarak elde edilir.

Burada

$$A_{kn} = \int_0^1 \phi_k' \phi_n' dx = \begin{cases} 2/h, & k = n \\ -1/h, & k = n-1 \text{ ve } k = n+1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$B_{knm} = \int_0^1 \phi_k \phi_n \phi_m' dx = \begin{cases} 1/6, & k = n-1 \text{ ve } k = m-1 \\ -1/6, & k = n-1 \text{ ve } k = m \\ 1/3, & k = n \text{ ve } k = m-1 \\ -1/3, & k = n \text{ ve } k = m+1 \\ 1/6, & k = n+1 \text{ ve } k = m \\ -1/6, & k = n+1 \text{ ve } k = m+1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$D_{kn} = \int_0^1 \phi_k \phi_n dx = \begin{cases} 2h/3, & k = n \\ h/6, & k = n - 1 \text{ ve } k = n + 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$E_k^j = \int_0^1 \phi_k z_{j-1} dx$$

$$F_k^j = \int_0^1 \phi_k f(x, t_j) dx$$

şeklindedir. Her j değeri için (6.14) denklemi, $(N - 1)$ tane denklem ve c_n^j ($n = 2, \dots, N$) bilinmeyenleri içeren bir lineer olmayan cebirsel denklem sistemidir. Bu bilinmeyen değerler MATLAB'de tarafımızdan üretilen kodlar kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür.

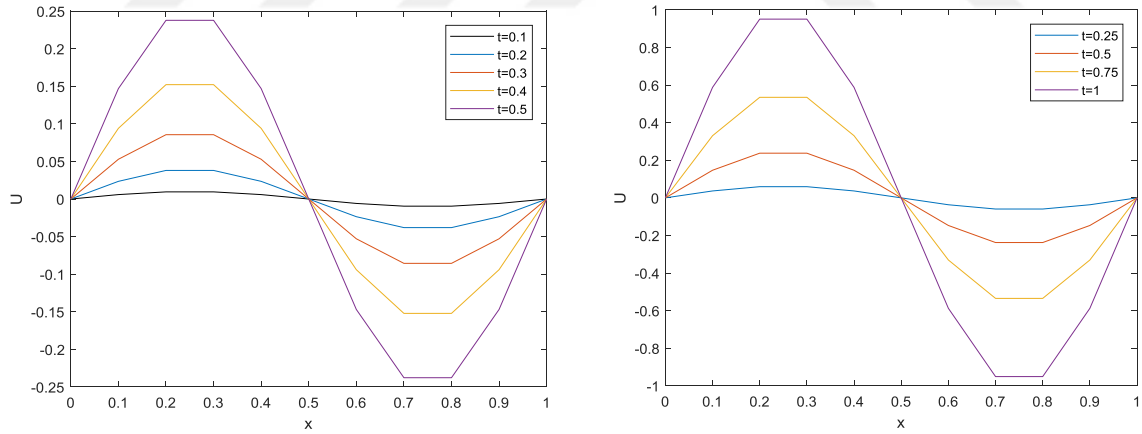
Çözümlerdeki mutlak hata hesabı

$$L_\infty = \|z_j(x) - z_j^N(x)\|_\infty \simeq \max_j |z_j - z_j^N|$$

eşitliği kullanılarak hesaplanmıştır.

Tablo 6.1 $t = 0.1$ 'de $\Delta t = 0.0005$, $\varepsilon = 1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

| x | N=10 | N=20 | N=40 | N=50 | N=100 | Analitik Çözüm |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------------|
| 0.1 | 0.005942 | 0.005894 | 0.005882 | 0.005880 | 0.005878 | 0.005878 |
| 0.2 | 0.009615 | 0.009536 | 0.009517 | 0.009514 | 0.009511 | 0.009511 |
| 0.3 | 0.009615 | 0.009536 | 0.009517 | 0.009514 | 0.009511 | 0.009511 |
| 0.4 | 0.005942 | 0.005894 | 0.005882 | 0.005880 | 0.005878 | 0.005878 |
| 0.5 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.6 | -0.005942 | -0.005894 | -0.005882 | -0.005880 | -0.005878 | -0.005878 |
| 0.7 | -0.009615 | -0.009536 | -0.009517 | -0.009514 | -0.009511 | -0.009511 |
| 0.8 | -0.009615 | -0.009536 | -0.009517 | -0.009514 | -0.009511 | -0.009511 |
| 0.9 | -0.005942 | -0.005894 | -0.005882 | -0.005880 | -0.005878 | -0.005878 |
| L_∞ | 1.0375e-04 | 2.5798e-05 | 6.1343e-06 | 2.9987e-06 | 5.5999e-07 | |



Şekil 6.1 $\Delta t = 0.0005$ ve $\varepsilon = 1$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümler

Tablo 6.2 $t=0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001$, $N=100$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

| x | $\varepsilon = 0.5$ | $\varepsilon = 0.1$ | $\varepsilon = 0.01$ | $\varepsilon = 0.001$ | $\varepsilon = 0.0001$ | Analitik Çözüm |
|------------|---------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|----------------|
| 0.1 | 0.005901 | 0.005889 | 0.005879 | 0.005877 | 0,006073 | 0.005878 |
| 0.2 | 0.009543 | 0.009531 | 0.009512 | 0.009510 | 0,009827 | 0.009511 |
| 0.3 | 0.009543 | 0.009531 | 0.009512 | 0.009510 | 0,009827 | 0.009511 |
| 0.4 | 0.005901 | 0.005889 | 0.005879 | 0.005877 | 0,006073 | 0.005878 |
| 0.5 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0,000000 | 0.000000 |
| 0.6 | -0.005901 | -0.005889 | -0.005879 | -0.005877 | -0,006073 | -0.005878 |
| 0.7 | -0.009543 | -0.009531 | -0.009512 | -0.009510 | -0,009827 | -0.009511 |
| 0.8 | -0.009543 | -0.009531 | -0.009512 | -0.009510 | -0,009827 | -0.009511 |
| 0.9 | -0.005901 | -0.005889 | -0.005879 | -0.005877 | -0,006073 | -0.005878 |
| L_∞ | 2.3042e-05 | 2.0280e-05 | 1.2000e-06 | 9.3000e-07 | 3.16e-04 | |

Tablo 6.3 $t = 1$ 'de $\Delta t = 0.01$, $N = 100$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

| x | $\varepsilon = 0.5$ | $\varepsilon = 0.1$ | $\varepsilon = 0.01$ | $\varepsilon = 0.001$ | $\varepsilon = 0.0001$ | Analitik Çözüm |
|------------|---------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|----------------|
| 0.1 | 0.593506 | 0.582676 | 0.577723 | 0.577618 | 0,707636 | 0.587785 |
| 0.2 | 0.973941 | 0.955071 | 0.955606 | 0.951119 | 0,982472 | 0.951057 |
| 0.3 | 0.973941 | 0.955071 | 0.955606 | 0.951119 | 0,982472 | 0.951057 |
| 0.4 | 0.593506 | 0.582676 | 0.577723 | 0.577618 | 0,707636 | 0.587785 |
| 0.5 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0,000000 | 0.000000 |
| 0.6 | -0.593506 | -0.582676 | -0.577723 | -0.577618 | -0,707636 | -0.587785 |
| 0.7 | -0.973941 | -0.955071 | -0.955606 | -0.951119 | -0,982472 | -0.951057 |
| 0.8 | -0.973941 | -0.955071 | -0.955606 | -0.951119 | -0,982472 | -0.951057 |
| 0.9 | -0.593506 | -0.582676 | -0.577723 | -0.577618 | -0,707636 | -0.587785 |
| L_∞ | 2.2884e-02 | 4.0140e-03 | 4.5490e-03 | 6.2000e-05 | 3.14e-02 | |

Tablo 6.4 $t = 1$ 'de $\varepsilon = 1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

| x | Δt | N=10 | N=20 | N=40 | Analitik Çözüm |
|-----|------------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| 0.1 | 0.5 | 0.587523 | 0.587729 | 0.587771 | 0.587785 |
| | 0.05 | 0.586508 | 0.587789 | 0.587787 | |
| | 0.005 | 0.587649 | 0.587684 | 0.587779 | |
| 0.2 | 0.5 | 0.953371 | 0.951639 | 0.951112 | 0.951057 |
| | 0.05 | 0.950464 | 0.951076 | 0.951082 | |
| | 0.005 | 0.951123 | 0.951114 | 0.951053 | |
| 0.3 | 0.5 | 0.953371 | 0.951639 | 0.951112 | 0.951057 |
| | 0.05 | 0.950464 | 0.951076 | 0.951082 | |
| | 0.005 | 0.951123 | 0.951114 | 0.951053 | |
| 0.4 | 0.5 | 0.587523 | 0.587729 | 0.587771 | 0.587785 |
| | 0.05 | 0.586508 | 0.587789 | 0.587787 | |
| | 0.005 | 0.587649 | 0.587684 | 0.587779 | |
| 0.5 | 0.5 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| | 0.05 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | |
| | 0.005 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | |
| 0.6 | 0.5 | -0.587523 | -0.587729 | -0.587771 | -0.587785 |
| | 0.05 | -0.586508 | -0.587789 | -0.587787 | |
| | 0.005 | -0.587649 | -0.587684 | -0.587779 | |
| 0.7 | 0.5 | -0.953371 | -0.951639 | -0.951112 | -0.951057 |
| | 0.05 | -0.950464 | -0.951076 | -0.951082 | |
| | 0.005 | -0.951123 | -0.951114 | -0.951053 | |
| 0.8 | 0.5 | -0.953371 | -0.951639 | -0.951112 | -0.951057 |
| | 0.05 | -0.950464 | -0.951076 | -0.951082 | |
| | 0.005 | -0.951123 | -0.951114 | -0.951053 | |
| 0.9 | 0.5 | -0.587523 | -0.587729 | -0.587771 | -0.587785 |
| | 0.05 | -0.586508 | -0.587789 | -0.587787 | |
| | 0.005 | -0.587649 | -0.587684 | -0.587779 | |

Tablo 6.5 $t = 1$ 'de $\varepsilon = 1, N = 100$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

| x | $\Delta t = 0.002$ | $\Delta t = 0.001$ | $\Delta t = 0.0005$ | $\Delta t = 0.0001$ | Analitik Çözüm |
|------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 0.1 | 0.588673 | 0.588077 | 0.587788 | 0.587785 | 0.587785 |
| 0.2 | 0.952457 | 0.951542 | 0.951074 | 0.951057 | 0.951057 |
| 0.3 | 0.952457 | 0.951542 | 0.951074 | 0.951057 | 0.951057 |
| 0.4 | 0.588673 | 0.588077 | 0.587788 | 0.587785 | 0.587785 |
| 0.5 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.6 | -0.588673 | -0.588077 | -0.587788 | -0.587785 | -0.587785 |
| 0.7 | -0.952457 | -0.951542 | -0.951074 | -0.951057 | -0.951057 |
| 0.8 | -0.952457 | -0.951542 | -0.951074 | -0.951057 | -0.951057 |
| 0.9 | -0.588673 | -0.588077 | -0.587788 | -0.587785 | -0.587785 |
| L_∞ | 1.4000e-03 | 4.8500e-04 | 1.7000e-05 | 4.2000e-07 | |

Tablo 6.6 $t = 0.1$ 'de $\varepsilon = 1, N = 40$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

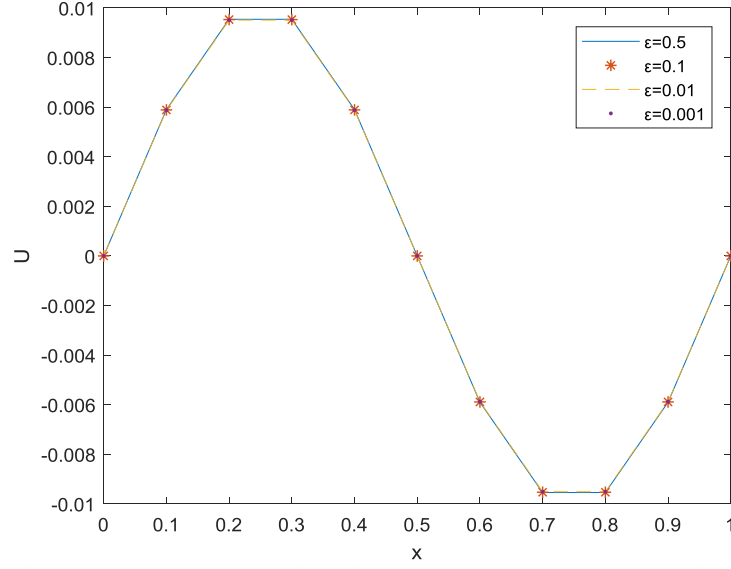
| x | $\Delta t = 0.05$ | $\Delta t = 0.005$ | $\Delta t = 0.0005$ | Analitik Çözüm |
|------------|-------------------|--------------------|---------------------|-----------------------|
| 0.1 | 0.005974 | 0.005882 | 0.005880 | 0.005878 |
| 0.2 | 0.009667 | 0.009517 | 0.009517 | 0.009511 |
| 0.3 | 0.009667 | 0.009517 | 0.009517 | 0.009511 |
| 0.4 | 0.005974 | 0.005882 | 0.005880 | 0.005878 |
| 0.5 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.6 | -0.005974 | -0.005882 | -0.005880 | -0.005878 |
| 0.7 | -0.009667 | -0.009517 | -0.009517 | -0.009511 |
| 0.8 | -0.009667 | -0.009517 | -0.009517 | -0.009511 |
| 0.9 | -0.005974 | -0.005882 | -0.005880 | -0.005878 |
| L_∞ | 1.5600e-04 | 6.0000e-06 | 2.0000e-06 | |

Tablo 6.7 $t = 1$ 'de $\Delta t = 1, \varepsilon = 1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

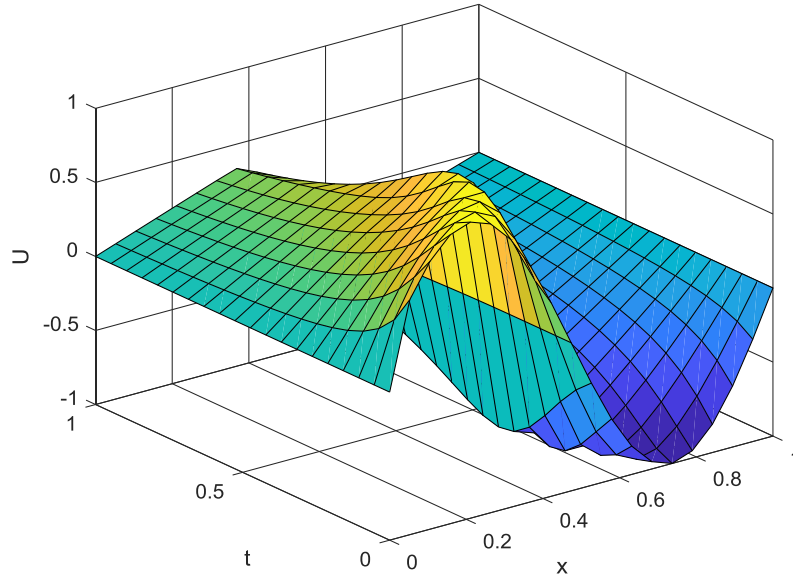
| x | $N = 10$ | $N = 20$ | $N = 40$ | $N = 100$ | Analitik Çözüm |
|------------|------------|------------|------------|------------|----------------|
| 0.1 | 0.603148 | 0.601715 | 0.601432 | 0.596624 | 0.587785 |
| 0.2 | 0.975576 | 0.974336 | 0.973941 | 0.965007 | 0.951057 |
| 0.3 | 0.975576 | 0.974336 | 0.973941 | 0.965007 | 0.951057 |
| 0.4 | 0.603148 | 0.601715 | 0.601432 | 0.596624 | 0.587785 |
| 0.5 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.6 | -0.603148 | -0.601715 | -0.601432 | -0.596624 | -0.587785 |
| 0.7 | -0.975576 | -0.974336 | -0.973941 | -0.965007 | -0.951057 |
| 0.8 | -0.975576 | -0.947617 | -0.973941 | -0.965007 | -0.951057 |
| 0.9 | -0.603148 | -0.601715 | -0.601432 | -0.596624 | -0.587785 |
| L_∞ | 2.4519e-02 | 2.3279e-02 | 2.2884e-02 | 1.3950e-02 | |

Tablo 6.8 $t = 1$ 'de $\Delta t = 0.00025, \varepsilon = 1$ için nümerik çözümler ve analitik çözümün karşılaştırılması

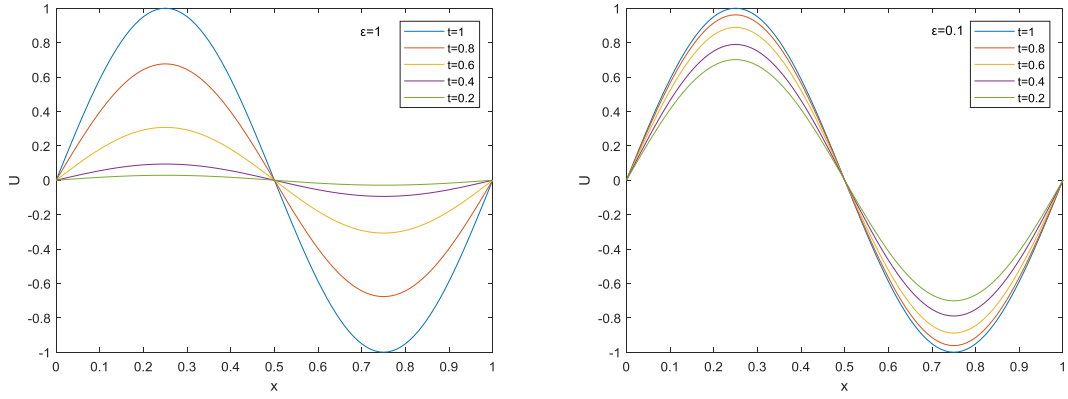
| x | $N = 40$ | $N = 50$ | $N = 80$ | $N = 100$ | Analitik Çözüm |
|------------|------------|------------|------------|------------|----------------|
| 0.1 | 0.585108 | 0.586143 | 0.587237 | 0.587508 | 0.587785 |
| 0.2 | 0.947076 | 0.947617 | 0.950252 | 0.950738 | 0.951057 |
| 0.3 | 0.947076 | 0.947617 | 0.950252 | 0.950738 | 0.951057 |
| 0.4 | 0.585108 | 0.586143 | 0.587237 | 0.587508 | 0.587785 |
| 0.5 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.6 | -0.585108 | -0.586143 | -0.587237 | -0.587508 | -0.587785 |
| 0.7 | -0.947076 | -0.947617 | -0.950252 | -0.950738 | -0.951057 |
| 0.8 | -0.947076 | -0.947617 | -0.950252 | -0.950738 | -0.951057 |
| 0.9 | -0.593506 | -0.586143 | -0.587237 | -0.587508 | -0.587785 |
| L_∞ | 3.9810e-03 | 2.4950e-03 | 8.1322e-04 | 4.3001e-04 | |



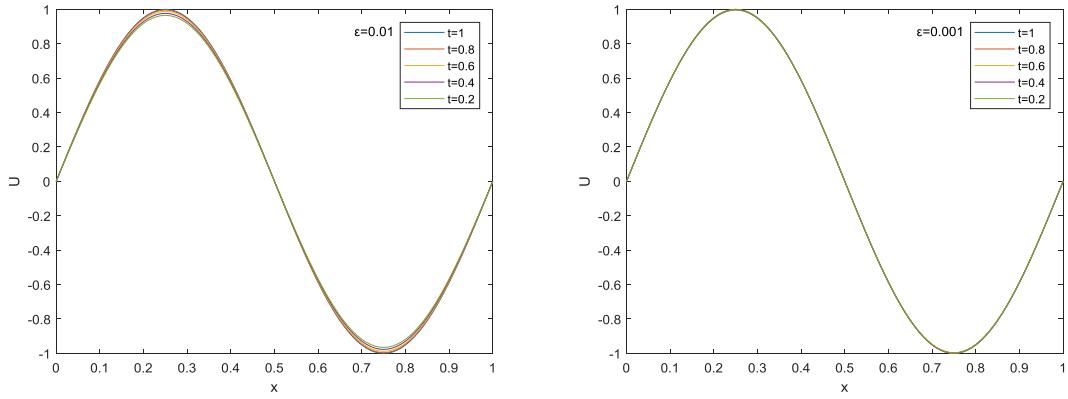
Şekil 6.2 $t=0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001$, $N=100$ ve farklı ε değerleri için nümerik çözümler ve analitik çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 6.3 $t = 0.1$ 'de $\Delta t = 0.0001$, $\varepsilon = 1$ ve $N = 100$ için nümerik çözümler



Şekil 6.4 $\Delta t = 0.0001, N = 100$ ve $\varepsilon = 1$ ile $\varepsilon = 0.1$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümler



Şekil 6.5 $\Delta t = 0.0001, N = 100$ ve $\varepsilon = 0.01$ ile $\varepsilon = 0.001$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümler

Tablo 6.1’de farklı sayıda sonlu eleman kullanılarak kaynak terimli Burgers denkleminin nümerik ve analitik çözümleri hesaplanmıştır. Tablo 6.1’deki değerler incelendiğinde N sonlu eleman sayısı arttıkça, nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklaştığı, $N=100$ ’de nümerik çözümün analitik çözüme ulaştığı görülmüştür.

Tablo 6.2 ve Tablo 6.3’de kaynak terimli Burgers denkleminin sonlu elemanlar çözümü farklı ε viskozite sayıları kullanılarak hesaplanmıştır. Tablolardaki sonuçlar incelendiğinde $0.5 \leq \varepsilon \leq 0.001$ değerleri için elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklaştığı görülmüştür. Elde ettiğimiz bu sonuçların [44] makalesindeki sonuçlar ile uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

Kaynak terimli Burgers denklemini üzerine yaptığımız bu çalışmada üzerinde durduğumuz bir diğer konu da zaman adımı olan Δt değerlerinin denklemin nümerik çözümüne olan etkisidir. Tablo 6.4’de, $\Delta t = 0.5, \Delta t = 0.05, \Delta t = 0.005$ için nümerik hesaplar yapılmış ve zaman adımlarının küçülmesiyle nümerik çözümlerin analitik çözüme yakınsadığı görülmüştür. Aynı şekilde Tablo 6.5 incelendiğinde ise, zaman adımı azaltıldığında nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklaştığı görülmüştür.

Tablo 6.6, büyük viskozite katsayısı kullanıldığında oluşabilecek yakınsama sorunlarının küçük zaman adımları kullanılarak giderilebileceğini göstermektedir.

Tablo 6.7 ve Tablo 6.8’de, aynı ε viskozite katsayısı ve farklı zaman adımları kullanılarak zaman adımının küçülmesiyle mutlak hata değerlerinin azaldığı gösterilmek istenmiştir.

Kaynak terimli Burgers denkleminin farklı zaman değerlerindeki çözüm davranışı Şekil 6.1’de gösterilmiştir. Burada homojen Burgers denkleminde farklı olarak, kaynak terimli Burgers denkleminde zaman değerlerinin artması ile elde edilen nümerik değerlerde de artış gözlenmiştir. Yani, mekanizmayı temsil eden adveksiyon difüzyonun davranış olarak beklendiği gibi kaynak fonksiyon gibi davranmaya zorlandığı görülmektedir. Burada kaynak fonksiyon olan $f(x, t)$ teriminin artan bir fonksiyon olması sebebiyle zaman değerleri olan t ’lerin artması ile nümerik değerlerin de arttığı elde edilen çözüm grafiklerinde açıkça görülmektedir.

Şekil 6.2'de farklı viskozite katsayıları için elde edilen çözüm değerlerinin karşılaştırılması verilirken Şekil 6.3'de kaynak terimli Burgers denkleminin 3-boyutlu çözüm davranışı görülmektedir.

Şekil 6.4'de sırasıyla $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = 0.1$, Şekil 6.5'de $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözüm grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden, denklemin burada verilen viskozite değerlerinde matematiksel ve fiziksel yapısını koruyarak çözüm davranışı ortaya koyduğu görülmüştür.



Bu tezde, daha karmaşık yapıdaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hesaplama tekniklerini test etmek ve karşılaştırmak için kullanılan Burgers denklemleri kaynak terim ile birlikte ele alındı.

Adi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmekten daha kolaydır. Bu nedenle, bu çalışmada göz önüne aldığımız (6.1) denklemleri, (6.2) ve (6.3) başlangıç-sınır değer problemi zamanı ayrıştırma yöntemi ile ardışık olarak çözülmesi gereken (6.14) ile tanımlı p tane sınır değer problemine dönüştürüldü.

Burada j ($j = 1, 2, \dots, p$) değerleri arttığında elde edilen problemlerin çözümlerine ulaşmak zor olduğu gibi elde edilmeye çalışılan çözümlerin bir programa aktarılabilmesi için belli bir kural bulmak da oldukça zordur. Dolayısıyla, her j değeri için elde edilen sınır-değer problemleri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözüldü.

Bu yöntemin her bir denkleme uygulanması sırasında karşımıza bir lineer olmayan cebirsel denklem sistemi çıktı. Elde edilen bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemleri burada tarafımızca üretilen MATLAB kodları ve *fsolve* komutu kullanılarak çözüldü.

Burada elde edilen sonuçlara göre,

- SEY’de kullanılan SE sayısı arttıkça nümerik çözümlerin analitik çözümlere yaklaştığı görülmüştür.
- Viskozite değerlerinin azaltılması halinde problemin matematiksel yapısını koruduğu ve çözümlerin gerçek çözüme yaklaştığı görülmüştür.
- Nümerik çözümlerin özellikle küçük zaman adımlarında ($\Delta t = 0.0001, 0.00025$ gibi) analitik çözüme yaklaştığı görülmüştür.

Sonuç olarak, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak kaynak terimli Burgers denklemleri için elde edilen çözümlerin beklentimizi karşıladığı ve küçük viskozite değerlerinde de denklemin lineer olmayan yapısını koruduğu görülmüştür. Bu yöntemin Burgers tipi denklemlerin çözümü için de kullanılabileceği açıktır.

Denklemin farklı sınır ve başlangıç koşulları ile çözümünü Petrov-Galerkin ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde etmek ilerleyen çalışmalar için düşünülmektedir.



- [1] H. Bateman, Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Rev.* 43 (1915) 163–170.
- [2] J. M. Burgers, Mathematical example illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, *Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amst.*, 17 (1939) 1-53.
- [3] J.M. Burgers, A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, in: *Adv. in App. Mech. I*, Academic Press, New York, 1948, pp. 171–199.
- [4] E. Hopf, “The partial differential equation $ut + uux = \mu uxx$ ”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 9, 201-230, (1950).
- [5] J.D. Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* 9 (1951) 225–236.
- [6] Benton, E. R., Platzman, G. W., “A table of solutions of the one dimensional Burgers’ equations”, *Quart. Appl. Math.*, 30, 195-212, (1972).
- [7] Rubin, S. G., Graves, R.A., Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, Washington: Nasa, TR R-436, (1975).
- [8] E. Varoglu, D. L. Finn, Space – time finite elements incorporating characteristics for the Burgers equation, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 16 (1980) 171–184.
- [9] R. Sounders, J. Caldwell, P. Wanless “A variational iterative scheme applied to Burgers equation”, *IMA J. Of Num. Anly*, 4, 4349-362, (1984).
- [10] J. Caldwell, P. Wanless, A. E. Cook, A finite element approach to Burgers equation, *Appl. Math. Model.* 5 (1981) 189– 193.
- [11] H. Nguyen, J. Reynen, A space-time finite element approach to Burgers’ equation, in: E. Hinton et al. (Eds.), *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, vol. 3, Pineridge Press, 1987, pp. 718–728.

- [12] Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., "A collocation method for Burgers' equation using cubic splines", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 325-337, (1992).
- [13] A. Doğan, "Petrov- Galerkin Finite Element Methods", Doktora Tezi, University of Wales, School of Mathematics, Gwynedd, (1997).
- [14] T. Öziş, E.N. Aksan, A.Özdeş, A finite element approach for solution of Burgers equation, *Appl. Math. Comput.* 139 (2003) 417-428.
- [15] S. Kutluay, A. Esen, I Dag, "Numerical solutions of the Burgers' equation by the least- squares quadratic B-spline finite element method", *J. Comput. Appl. Math.*, 167, 21-33, (2004).
- [16] E. N. Aksan, A. Özdeş, " A numerical solution of Burgers' equation", *Appl. Math. Comput.* , 156(2), 395-402, (2004).
- [17] E. N. Aksan, Numerical Solution of Burgers' Equation by Finite Element Method Constructed on the Method of Discretization in Time, *Appl. Math. Comput*, 170 (2005), 2, pp. 895- 904.
- [18] T. Öziş, A. Esen, S.Kutluay, " Numerical solution of Burgers 'equation by quadratic B-spline finite elements" , *Appl. Math. Comput.* , 165, 237-249, (2005).
- [19] D. Irk, "Sextic B-spline collocation method for the modified Burgers' equation", *Kybernetes*, 38, 1599-1620, (2009).
- [20] R. C. Mittal, R. K. Jain, "Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method", *Appl. Math. Comp.*, 218, 7839-7855, (2012).
- [21] A. A. Soliman, "A Galerkin solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements", *Abstract Appl. Anal.*, 15, (2012).
- [22] L. Iskandar, A. Mohsen, "Some numerical experiments on the splitting of Burgers' equation", *Num. Meth. Par. Diff. Eq.*, 8, 267-276, (1992).

- [23] P. C. Jain, R. Shankar, T. V. Singh, “ Numerical technique for solving convective-reaction-diffusion equation”, *Math. Comput. Modelling*, 22, 113-125, (1995).
- [24] S. Kutluay, A. Esen, “A linearized numerical scheme for Burgers-like equations”, *Appl. Math. Comp.*, 156, 295-305, (2004).
- [25] M. K. Kadalbajoo, , K. K. Sharma and A. Awasthi, “A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*,(in press) (2005).
- [26] I. A. Hassanien, A. A. Salama and H. A. Hosham, “Fourth-order finite difference method for solving Burgers’ equation”, (in press) (2005).
- [27] M. Gülsu and T. Öziş, “Numerical solution of Burgers’ equation with restrictive Taylor approximation”, (in press) (2005).
- [28] M. Sari and Gürarşlan, G., “A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 208, 475-483, (2009).
- [29] M. Sari, G. Gürarşlan and A. Zeytinođlu, “High order finite difference schemes fort he solution of generalized Burger-Fisher equation”, *Commun. Num. Meth. Eng.*, (2009).
- [30] B. İnan and A. R. Bahadır, “A numerical solution of the Burgers’ equation using a Crank-Nicolson exponential finite difference method”, *J. Math. Comput. Sci.*, 4, 849- 860, (2014).
- [31] S. Abbasbandy, et al., A Numerical Solution of Burgers’ Equation by Modified Adomian Method, *Appl. Math. Comput*, 163 (2005), 3, pp. 1265-1272.
- [32] M. A. Abdou, A. A. Soliman, “Variational iteration method for solving Burgers’ and coupled Burgers’ equation”, *J. Comput. Appl. Math.* , 181, 245-251, (2005).
- [33] A. Korkmaz and İ. Dağ, “Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear Burgers’ equation”, *J. Franklin Inst.*, 348,2863-2875, (2011).

- [34] R. C. Mittal and R. Jiwari, "Differential quadrature method for numerical solution of coupled viscous Burgers' equations", *International J. for Computational Methods in Engineering Sci. and Mechanics*, 13, 88-92, (2012).
- [35] Korkmaz, A. and Dağ, İ., "Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers' equation", *Eng. Comput. Int. J. Comput. Aided Eng.*, 30,320-344, (2013).
- [36] B. R. Munson, D. F Young, T. H. Okiishi and W. W. Huebsch, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, USA: John Wiley & Sons, (2009).
- [37] K. Rektorys, *The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations*, D. Reidel Publishing Company, Holland, (1982).
- [38] J. N. Reddy, *An Introduction to The Finite Element Method*, Professor of Engineering Science and Mechanics Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [39] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor , J. Z. Zhu, *The finite element method: its basis and fundamentals*, Oxford, Butterworth Heineman, New York, 2005.
- [40] G. R. Liu, S.S. Quek, *The Finite Element Method. A Practical Course*, Butterworth-Heinemann, USA, 2013.
- [41] C. S. Desai, T. Kundu, *Introductory Finite Element Method (Mechanical and Aerospace Engineering Series)*, CRC press, London, 2001.
- [42] D. L. Logan, *A first course in the Finite Element Method*, 4th ed. , Thomson, Toronto, 2007.
- [43] C. A. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*, Lecture notes, 2004.
- [44] A. Esen, O. Tasbozan, *Numerical Solution of Time Fractional Burgers equation*, *Mathematica*, 7,2 (2015) 167 – 185.
- [45] S. B. G. Karakoç, "Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye Edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri", *Doktora Tezi*, İnönü Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, (2011).

- [46] M. Bayraktar, Burgers denkleminin Petrov-Galerkin sonlu eleman metodu çözümlü, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Denizli,2016.
- [47] S. Eule, R. Friedrich, A note on the forced Burgers equation, Physics Letters A 351 (2006), pp 238-241.
- [48] L. Li, D. Li, Exact solutions and numerical study of time fractional Burgers' equation, Appl. Math. Let. , 100 (2020) 106011.
- [49] S. M. Pugh, Finite element approximations of Burgers' equation , MSc. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Mathematics, Virginia, 1995.
- [50] M.Gülbahar , “ Burgers Denklemlerinin Sayısal Çözümü”, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Niğde, 2007.
- [51] E. Dinçer, “ Burgers Denkleminin Çeşitli Sonlu Fark Şemaları ile Çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2015).
- [52] J. Fish, T. Belytschko, A First Course In Finite Elements, Wiley College, USA.
- [53] Ş. Büyükaşık, A. Pashaev, Exact Solution of forced Burgers equations with time variable coefficients, Commun. Nonlinear Sci. Numer Simulat 18 (2013) 1635-1651.
- [54] P. M. Prenter, Splines and variational methods, Wiles, New York, 1975.
- [55] G. D. Smith, Numerical solution of partial differential equations: Finite Difference Methods, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Third Edition, 1987.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgisi: bsr.cakay@hotmail.com

Konferans Bildirileri

1. A. B. Çakay, S. Selim, “ Finite Elements Solutions of Burgers Equation with Forcing Term”, 3rd International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM-Van 2020), Nisan 2020, Van, Turkey. (Covid-19 sebebiyle ertelenmiştir.)

