



**T.C.  
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**DOKTORA TEZİ**

**MANYETİZE PLAZMALARDAKİ DALGA YAYILIMINA  
İNDİRGEYİCİ PERTÜRBASYON TEORİSİNİN UYGULANMASI**

**Özgür GÜLTEKİN**

**Fizik Anabilim Dalı**

**Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı**

**DANIŞMAN  
Prof. Dr. Haşim MUTUŞ**

**II. DANIŞMAN  
Dr. Özgür D. GÜRCAN**

**Aralık, 2017**

**İSTANBUL**

Bu çalışma, 1.12.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Yüksek Enerji ve Plazma Fiziğı Programında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

### **Tez Jürisi**

Prof. Dr. Haşım MUTUŞ (Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Fakülte

Prof. Dr. Deniz DEĞER ULUTAŐ  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. H. Handan GÜRBÜZ  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Bayram DEMİR  
İstanbul Üniversitesi  
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

## ÖNSÖZ

Doktora çalışmam boyunca güven ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Haşim MUTUŞ'a ve lisansüstü eğitimim süresince deneyimlerinden faydalandığım hocam Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ'e teşekkür ederim.

Tanıştığımız günden bu yana kendisinden pek çok şey öğrendiğim değerli dostum, çalışma arkadaşım ve Fransa Ecole Polytechnique'den ikinci danışman hocam Dr. Özgür GÜRCAN'a bu tezin hazırlanma sürecinde bana verdiği büyük emek için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü öğrenimim boyunca beni her zaman motive eden ve hiçbir konuda emeğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Emine RIZAOĞLU'na teşekkür ederim.

Anne ve babama beni dünyaya getirdikleri için teşekkür ederim. Bana gösterdiği sabır ve birlikte yaşadığımız her gün sunduğu içten sevgi için Esra YAZICIOĞLU'na minnettarım.

Aralık, 2017

Özgür GÜLTEKİN

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ .....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ .....	vii
TABLO LİSTESİ.....	xi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .....	xii
ÖZET .....	xiv
SUMMARY .....	xvi
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1. TERMONÜKLEER FÜZYON .....	6
1.2. KONTROLLÜ FÜZYON ARAŞTIRMALARININ KISA BİR TARİHÇESİ .....	9
1.3. TOKAMAK GEOMETRİSİNDE PLAZMA .....	12
<b>2. GENEL KISIMLAR.....</b>	<b>16</b>
2.1. VLASOV DENKLEMİ (ÇARPIŞMASIZ BOLTZMANN DENKLEMİ).....	16
2.2. PLAZMANIN "GYROKİNETİK" BETİMLEMESİ.....	24
2.2.1. Yüklü Parçacığın Manyetik Alan İçindeki Hareketi .....	24
2.2.2. Operatörlerin Dönüşümü ve Vlasov Denkleminin Lineer Operatörü .....	25
2.2.3. Gyrokinetik Denklem .....	32
2.3. TOROİDAL ITG MODU İÇİN YEREL DAĞINIM BAĞINTISI.....	36
<b>3. MALZEME VE YÖNTEM.....</b>	<b>40</b>
3.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ PLAZMA DAĞINIM FONKSİYONU VE $I_{nm}$ İNTEGRALLERİ .....	40
3.2. $I_{nm}$ İNTEGRALLERİ İÇİN ANALİTİK SÜREKLİLİK .....	42
3.3. DAĞINIM BAĞINTISININ $I_{nm}$ İNTEGRALLERİ CİNSİNDEN YAZILMASI .....	45
3.4. DUPREE REZONANS GENİŞLEMESİ VE YEREL DAĞINIM BAĞINTISI.....	47
<b>4. BULGULAR.....</b>	<b>52</b>
4.1. $I_{nm}$ İNTEGRALLERİNİN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR CİNSİNDEN YAZILMASI .....	52
4.2. DAĞINIM BAĞINTISININ ÇÖZÜMLERİNİ AYRIŞTIRMAK İÇİN NÜMERİK BİR YAKLAŞIM.....	56

4.3. $I_{nm}$ İNTEGRALLERİNİN TÜREVİ OLARAK $J_{nm}$ İNTEGRALLERİ .....	59
4.4. RENORMALİZE EDİLMİŞ DAĞINIM BAĞINTISININ $K_{nm}$ İNTEGRALLERİ CİNSİNDEN YAZILMASI .....	71
4.5. ANALİTİK SÜREKLİLİK VE $K_{nm}$ İNTEGRALLERİ .....	77
4.6. DUPREE TERİMİNİN HIZA BAĞLI POLİNOMİYEL BİÇİMİNİN YEREL İTG DAĞINIM BAĞINTISININ ÇÖZÜMÜNE OLAN ETKİSİ .....	98
4.7. DUPREE TERİMİNİN POLİNOMİYEL BİÇİMİ .....	105
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>	<b>110</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>114</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>119</b>



## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1.1: Döteryum-Trityum Füzyon Reaksiyonu.....	8
Şekil 1.2: ITER Projesinin Şeması (Tokamak Boyutunun Karşılaştırılması İçin Sağ Alta Mavi Elbisesiyle İnsan Görülmektedir.) (iter.jpg, 2013).....	11
Şekil 1.3: Tokamak Yapısının Şematik Gösterimi.....	13
Şekil 3.1: Lorentzian Eğri.....	48
Şekil 4.1: Yerel Kinetik ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü.....	57
Şekil 4.2: Yerel Kinetik ITG Dağılım Bağıntısının Ayrıştırılmış Kökleri.....	58
Şekil 4.3: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $I_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	65
Şekil 4.4: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $J_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	65
Şekil 4.5: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $I_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	66
Şekil 4.6: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $J_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	66
Şekil 4.7: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $I_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	67
Şekil 4.8: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $J_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	67
Şekil 4.9: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $I_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	68
Şekil 4.10: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $J_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	68
Şekil 4.11: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $I_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	69
Şekil 4.12: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $J_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	69
Şekil 4.13: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $I_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	70
Şekil 4.14: $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.0$ $b = 1.0$ Parametreleri İçin $J_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	70

<b>Şekil 4.15:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin Analitik Sürekliliğin Hesaba Dahil Edilmediği Durumda $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	76
<b>Şekil 4.16:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin Analitik Sürekliliğin Hesaba Dahil Edilmediği Durumda $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	76
<b>Şekil 4.17:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin Analitik Sürekliliğin Hesaba Dahil Edilmediği Durumda $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	81
<b>Şekil 4.18:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .Analitik süreklilik hesaplara dahil edilmiştir.....	81
<b>Şekil 4.19:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin Analitik Sürekliliğin Hesaba Dahil Edilmediği Durumda $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	82
<b>Şekil 4.20:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ Analitik süreklilik hesaplara dahil edilmiştir.....	82
<b>Şekil 4.21:</b> $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.5$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	83
<b>Şekil 4.22:</b> $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.5$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	83
<b>Şekil 4.23:</b> $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.5$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	84
<b>Şekil 4.24:</b> $\zeta_b = 1.0$ , $\zeta_c = 0.0$ , $\zeta_d = 0.5$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	84
<b>Şekil 4.25:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	85
<b>Şekil 4.26:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	85
<b>Şekil 4.27:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	86
<b>Şekil 4.28:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	86
<b>Şekil 4.29:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	87

<b>Şekil 4.30:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	87
<b>Şekil 4.31:</b> $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	88
<b>Şekil 4.32:</b> $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	88
<b>Şekil 4.33:</b> $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	89
<b>Şekil 4.34:</b> $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	89
<b>Şekil 4.35:</b> $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	90
<b>Şekil 4.36:</b> $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	90
<b>Şekil 4.37:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	91
<b>Şekil 4.38:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	91
<b>Şekil 4.39:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	92
<b>Şekil 4.40:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	92
<b>Şekil 4.41:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	93
<b>Şekil 4.42:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ , $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	93

<b>Şekil 4.43:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	94
<b>Şekil 4.44:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	94
<b>Şekil 4.45:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	95
<b>Şekil 4.46:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	95
<b>Şekil 4.47:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	96
<b>Şekil 4.48:</b> $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ , $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ , $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ , $b = 1.0$ Parametreleri İçin $K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .....	96
<b>Şekil 4.49:</b> Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü ( $d_0 = 0.1, d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.0$ ) .....	99
<b>Şekil 4.50:</b> Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü ( $d_1 = 0.1, d_0 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.0$ ) .....	100
<b>Şekil 4.51:</b> Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü ( $d_2 = 0.1, d_0 = d_1 = d_3 = d_4 = 0.0$ ) .....	101
<b>Şekil 4.52:</b> Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü ( $d_3 = 0.1, d_0 = d_1 = d_2 = d_4 = 0.0$ ) .....	102
<b>Şekil 4.53:</b> Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü ( $d_4 = 0.1, d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0.0$ ) .....	103
<b>Şekil 4.54:</b> Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü ( $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.1$ ) .....	104
<b>Şekil 4.55:</b> $v_{\perp}$ için Dupree Difüzyon Katsayısı Polinom Fit.....	106
<b>Şekil 4.56:</b> $v_{\parallel}$ için Dupree Difüzyon Katsayısı Polinom Fit.....	107
<b>Şekil 4.57:</b> $v_{\perp}$ için Yapılan Polinom Fit Kullanılarak $k_y - \gamma$ ve $k_y - \omega$ .....	109
<b>Şekil 4.58:</b> $v_{\parallel}$ için Yapılan Polinom Fit Kullanılarak $k_y - \gamma$ ve $k_y - \omega$ .....	109

## TABLO LİSTESİ

Sayfa No

**Tablo 4.1:**  $K_{nm}$  Fonksiyonlarının Grafikleri Çizdirilen Parametreleri.....98



## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mu$	: Manyetik Moment
$v_{\perp}$	: Manyetik Alana Dik Yöndeki Hız Bileşeni
$v_{\parallel}$	: Manyetik Alana Paralel Yöndeki Hız Bileşeni
$m_s$	: S Türündeki Parçacığın Kütlesi
$q_s$	: S Türündeki Parçacığın Yüğü
$\mathbf{B}$	: Manyetik Alan
$\mathbf{E}$	: Elektrik Alan
$\mathbf{J}$	: Akım Yoğunluğu Vektörü
$\sigma$	: Yüğü Yoğunluğu Vektörü
$\lambda_D$	: Debye Uzunluğu
$\epsilon_0$	: Boşluğun Elektriki Geçirgenliğı
$n_0$	: Birim Hacimdeki Elektron veya İyon Ortalama Sayısı
$n_i$	: İyon Sayı Yoğunluğu
$n_e$	: Elektron Sayı Yoğunluğu
$c$	: Işık Hızı
$\Omega_L$	: Larmor Frekansı
$\rho_L$	: Manyetik Alan Etrafında Dönüşü Temsil Eden Konum Vektörü
$\mathbf{R}$	: Parçacığın İlerlemesini Temsil Eden Konum Vektörü
$E$	: Birim Kütlenin Kinetik Enerjisi
$\delta\Phi$	: Elektriksel Potansiyel
$F_M$	: Maxwellian Dağılım Fonksiyonu
$v_{Ti}$	: İyonların Termal Hızı
$T_i$	: İyon Sıcaklığı
$T_e$	: Elektron Sıcaklığı
$\mathbf{k}$	: Dalga Sayısı Vektörü

$\Omega_i$	: İyon Gyrofrekans
$\phi$	: Gyrofaz Açısı
$\mathbf{V}$	: Hız Vektörü
$J_0$	: Sıfırıncı Mertebeden Bessel Fonksiyonu
$\omega_D$	: İyon Manyetik Alan Gradiyenti Eğrilik Kayması Frekansı
$\omega_{*i}$	: İyon Dimanyetik Alan Kayma Frekansı
$a_{  }$	: Paralel Ayna Kuvveti
$\omega$	: Dalganın Frekansı
$\epsilon$	: Dielektrik Sabit
$Z_m$	: Genelleştirilmiş Plazma Dağılım Fonksiyonu
$x_{\perp}$	: Konum Vektörünün Dik Bileşeni
$x_{  }$	: Konum Vektörünün Paralel Bileşeni
$D_D$	: Dupree Terimi
$F_0$	: Normal Dağılıma Uyan Hız Dağılım Fonksiyonu
$\delta f$	: Normal Dağılımdan Sapmayı İfade Eden Terim
$f$	: Hız Dağılım Fonksiyonu
$\delta g$	: Dağılım Fonksiyonu Adyabatik Olmayan Kısmı

## Kısaltmalar

## Açıklama

<b>ETG</b>	: Elektron Sıcaklık Gradyent
<b>ITER</b>	: International Thermonuclear Experimental Reactor
<b>ITG</b>	: İyon Sıcaklık Gradyent
<b>TEM</b>	: Tuzaklanmış Elektron Modu
<b>JET</b>	: Joint European Torus

## ÖZET

### DOKTORA TEZİ

#### MANYETİZE PLAZMALARDAKİ DALGA YAYILIMINA İNDİRGEYİCİ PERTÜRBASYON TEORİSİNİN UYGULANMASI

Özgür GÜLTEKİN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Haşim MUTUŞ

II. Danışman : Dr. Özgür D. GÜRÇAN

Manyetik füzyon deneylerinde kullanılan tokamaklarda temel amaçlardan biri, ısıyı mümkün olabildiğince cihazın orta kısmında yoğunlaştırıp duvarlardan uzak tutmaktır. Bu, ısı dağılımının homojen olmaması anlamına gelir. Böylece plazmanın içinde çeşitli salınımlar ve hatta türbülans oluşur. Plazmanın bu rastgele hareketleri ısının duvarlara doğru kaybedilmesine neden olur. Isının tokamağın merkezinden duvarlara doğru taşınması sürecinde rol oynayan en önemli fiziksel etkinin ITG (Ion Temperature Gradient) kaynaklı türbülans olduğu düşünülmektedir. Manyetize füzyon plazmalarında ITG, bilinen yaklaşımlar arasında en iyi gyrokinetik denklem ile betimlenebilmektedir.

Bu tezde temel olarak üç yeni yaklaşım geliştirilmiştir. Öncelikle toroidal ITG mod için yazılan renormalize edilmemiş gyrokinetik denklemden elde edilen dağılım bağıntısı ele alınmıştır. Dağılım bağıntısının literatürdeki standart çözümü dışında yeni çözümleri elde etmek ve bu çözümlerin her birini ayrıştırarak  $k-\omega$  ve  $k-\gamma$  uzaylarındaki evrimlerini izleyebilmek amacıyla yeni bir nümerik yöntem geliştirilmiştir. Bu yolla elde edilen bazı çözümler bu tezde sunulmuştur.

Ayrıca dağılım bağıntısının nümerik çözümlerinin bilgisayar programlama ile yapılmasının zorluklarını ortadan kaldırmak ve çözümleri elde etmek için bilgisayarların hesaplama hızlarında artış sağlamak amacıyla literatürde daha önce tanımlanmış olan  $I_{nm}$  integralleri, genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları cinsinden yazılır. Bu tezde geliştirilen yaklaşımlardan ikincisi ise  $I_{nm}$  integrallerinin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazılması olmuştur.  $I_{nm}$  integrallerini bu biçimde ifade edebilmiş olmanın avantajı şudur: Matematikte yaygın olarak kullanılan hipergeometrik fonksiyonlar için en hızlı hesaplama yöntemleri biliniyor olduğundan bilgisayar programlama ile yapılan nümerik hesaplar daha fazla hızlandırılmıştır ve böylece nümerik hesaplar açısından kullanışlı bir biçim elde edilmiştir.

Toroidal ITG modunda renormalize edilmiş gyrokinetik denklemden elde edilen dağılım bağıntısındaki renormalizasyondan gelen  $D_D(\mathbf{v})$  Dupree teriminin  $\mathbf{v}$  bağımlılığı literatürde biliniyor olsa da uygulamada kullanılabilir bir analitik ifade bilinmemektedir. Son olarak bu tezde  $D_D(\mathbf{v})$  Dupree terimi için  $v_{\perp}$  ve  $v_{\parallel}$ 'e bağlı kompleks katsayılı bir analitik ifade elde edilmiş ve  $D_D(\mathbf{v})$  teriminin etkileri tartışılmıştır. Renormalizasyondan gelen Dupree teriminin bir önemi şudur: Türbülansın incelenmesinde kullanılan lineer kararsızlık teorisi, kararsız dalgaların enerji yoğunluğunun üstel olarak sonsuza kadar büyüyeceğini verir. Oysa bu büyüme fiziksel açıdan söz konusu değildir ve çözümlerde lineer olmayan  $D_D(\mathbf{v})$  terimi ile dengelenir. Dupree teriminin bir diğer önemi ise tokamak geometrisinden kaçan tanecikler ve ısı için akı hesabında kullanılabilir olmasıdır. Dupree terimi için bir analitik ifadenin elde edilmesi klasik ve neoklasik taşınım modelleri ile uyumlu olmayan akı miktarını uygulamada hesaplayabilme olanağı sunar.

Bu alanda yapılan nümerik çalışmalar ve simülasyonlar için özellikle paralel yazılım teknolojisi açısından dünyadaki en gelişmiş bilgisayarlara ihtiyaç duyulur. Dupree terimi için bir analitik ifade elde edebilmek amacıyla ITG modda renormalize edilmiş gyrokinetik denklemden elde edilen plazma dağılım fonksiyonları, bu tezde tanımlanan  $K_{nm}$  fonksiyonları cinsinden yazılmıştır. Bu yaklaşım da bilgisayar programlama ile uygulanan sayısal analiz yöntemleri için ciddi miktarda hız kazandırmıştır. Bu yolla dağılım bağıntısının yarı lineer taşınım problemleri için kullanımı kolaylaşmış ve tercih edilebilirliği artmıştır. Ayrıca  $K_{nm}$  integrallerinin analitik sürekliliğini sağlamak, renormalizasyonun karmaşık doğası nedeniyle literatürde önerilen yöntemlerle mümkün olmamıştır. Bu nedenle analitik sürekliliği sağlamak için de bu tezde özgün bir yöntem geliştirilmiştir.

Aralık 2017, 136 sayfa.

**Anahtar kelimeler:** Manyetik füzyon, Gyrokinetik, ITG, Dupree, Tokamak

## **SUMMARY**

### **Ph.D. THESIS**

#### **APPLICATION of REDUCTIVE PERTURBATION THEORY to WAVE- PROPAGATION in MAGNETIZED PLASMAS**

**Özgür GÜLTEKİN**

**İstanbul University**

**Institute of Graduate Studies in Science and Engineering**

**Department of Physics**

**Supervisor : Prof. Dr. Haşim MUTUŞ**

**Co-Supervisor : Dr. Özgür D. GÜRCAN**

One of the primary goals in tokamaks in magnetic fusion experiments is to localize the heat and particles in the center of the device away from the walls as much as possible. This means that the heat profile is inhomogeneous. This leads to the excitation of various fluctuations and turbulence in the plasma. These random motions of the plasma causes the heat loss towards the walls. The primary transport process which causes the ion heat loss from the center towards the walls of the device is the turbulence generated by the ion temperature gradient driven instability (ITG). The state of the art description of the ITG mode in magnetised plasmas is based on the gyrokinetic equation.

Three different approaches have been developed in this thesis. First, the linear dispersion relation obtained from the linear gyrokinetic equation for the ITG mode is considered. A new numerical method has been developed in order to obtain the roots of the dispersion relation that are not considered in the literature (i.e. damped modes) and follow their evolution in  $k-\omega$  and  $k-\gamma$  space. Some of the results that have been obtained with this method is presented in this thesis.

Furthermore, in order to resolve the difficulties in numerical computing and increase computation speeds in solving the dispersion relation, previously defined curvature modified dispersion functions,  $I_{nm}$ 's, were written in terms of integrals over plasma dispersion functions. The second approach which has been developed in this thesis is the expression of these  $I_{nm}$  integrals using analytical functions such as the hypergeometric function. The advantage of this formulation is that since the best methods for computing hypergeometric functions rapidly are well-known, their implementation this way leads to further speed increase potentially leading to a convenient formulation for numerical simulations.

While the  $\mathbf{v}$  dependence of the Dupree diffusion term  $D_D(\mathbf{v})$  which appears in the renormalized dispersion relation for the toroidal ITG mode that can be obtained from the renormalized gyrokinetic equation, is well known in the literature, there is no analytical expression that can be used directly. In this thesis we have developed such a term which shows the dependence of  $D_D(\mathbf{v})$  as a function of  $v_\perp$  and  $v_\parallel$  discussed the effects of this term.

One importance of the  $D_D(\mathbf{v})$  which comes from renormalization is the following: Linear instability theory, which is used in the description of plasma turbulence, implies that the energy density of unstable waves will increase indefinitely. However, physically, this is of course not the case and one way to balance this increase is the nonlinear diffusion via the Dupree term  $D_D(\mathbf{v})$ . Another important aspect of the Dupree term is that it can be used to estimate the transport of particles and heat in tokamaks. Obtaining an analytical form for the Dupree term allows the estimation of non-classical and non-neoclassical transport.

Numerical studies in this area of research necessitate development of massively parallel, high performance supercomputing. In order obtain an analytical form for the Dupree term in ITG, the renormalized dispersion relation obtained from the renormalized gyrokinetic equation is written in term of the renormalized, curvature modified plasma dispersion functions or  $K_{nm}$ 's defined for the first time in this thesis. This approach also allows an important advantage and speedup in numerical computing and analysis. This formulation makes the use of this functions in the formulation of quasi-linear transport, possible an preferable. Moreover, because of their complex nature, the analytical continuation of the  $K_{nm}$  integrals were not possible using standard methods described in the literature. Therefore a unique method together with its numerical implementation has been developed during this thesis.

December 2017, 136 pages.

**Keywords:** Magnetic fusion, Gyrokinetic, ITG, Dupree, Tokamak

## 1. GİRİŞ

Evrende gözlenen madde büyük ölçüde plazmadır. Bu nedenle plazma fiziğinin astrofizikçiler açısından da önemi büyüktür ve her gün artmaktadır. Plazma fiziği, astrofizikçiler için bir taraftan yıldız ve galaksi yapılarını anlamada önemli bir rol oynarken bir taraftan da yıldız ve galaksi evrimlerinde gravitasyonel etkileri her zaman ön planda tutan geleneksel yaklaşımlarla analiz etmenin güç olduğu bazı problemlerin çözümünde anlamlı bir seçenek olmaktadır. Örneğin astrofiziğin uzun yıllar çözülememiş bir problemi olarak, Güneş atmosferinin en dış yüzeyi olan koronanın yüksek sıcaklığı olgusu, plazma fiziği uygulamalarıyla bugün büyük oranda anlaşılabilir (Gültekin ve diğ., 2013; Kasper ve diğ., 2013). Bu bakımdan insanın evren hakkındaki anlayışının şekillenmesinde plazma fiziğinin de temel bir kuramsal alan olarak yeri vardır (Kulsrud, 2005). Bununla birlikte plazma fiziğinin günümüzde teknoloji üretimi konusunda da çok çeşitli uygulamaları bulunur. Dahası plazma fiziği, temiz bir enerji üretimi biçimi olarak öngörülen termonükleer füzyon çalışmalarındaki kullanımı nedeniyle de gündelik yaşantımızı derinden etkileyecek bir potansiyele sahiptir.

Plazma ile klasik bir gaz arasındaki önemli bir fark, klasik gazın iyi olmayan bir elektrik ileticisi olmasıdır. Klasik gazda tanecikler genel olarak nötrdür. Plazma ise yüklü taneciklerden oluşur. Hatta az sayıda yüklü tanecik barındıran bir gaz bile plazma özelliği taşımaya eğilimlidir. Klasik gaz elektromanyetik alanlardan etkilenmezken plazma hem elektromanyetik alanlarla etkileşir hem de elektromanyetik alanları üretir. Ayrıca plazmanın önemli bir özelliği büyük ölçekte nötr kalma eğiliminde olmasıdır.

Plazmanın bir diğer ilginç özelliği de çeşitli pertürbasyonlarla belirli bir bölgede aynı yüklerin toplanması yani yük ayrışmasının ortaya çıkması durumunda bile Coulomb kuvvetleri nedeniyle büyük ölçekte elektriksel olarak nötr kalmasıdır. Başka bir deyişle belirli bir hacimde denge durumundaki nötr plazmada yük dengesizliğinin ortaya çıkması plazma titreşimlerine kaynaklık eden Coulomb etkileşimlerini gündeme getirecektir. Örneğin negatif yüklerin küresel simetrik bir şekilde bir araya gelmesi Gauss kanunu nedeniyle radyal bir elektrik alan yaratır. Bu da negatif yüklerin bu küçük bölgenin dışına sürülmesine neden olur.

Yeteri kadar zaman geçtiğinde bu küresel bölge pozitif yüklü olacaktır. Bu kez pozitif yüklü küresel bölge için benzer bir süreç işleyecektir. Bu şekilde bir fiziksel mekanizma plazma titreşimlerinin kaynağıdır (Bellan, 1973). Elektronların termal hareketleri bu şekilde ortaya çıkan plazma titreşimlerini plazma dalgalarına dönüştürür. Plazmanın klasik gazdan farklı olan bir diğer özelliği ise içerisinde klasik gazda görülmeyen çeşitli dalga biçimleri oluşmasıdır. Pozitif ve negatif yüklerden oluşmuş plazmanın, dinamik özellikleri Lorentz kuvvetiyle irdelenebilir. Yani belli bir türdeki parçacıkların hız ve konumları Lorentz denklemi kullanılarak  $E$  ve  $B$  alanlarından elde edilir. Plazma taneciklerin etkilendiği elektromanyetik alanlar da elbette Maxwell denklemleri ile betimlenir. Bu bakımdan plazma, hidrodinamik özellikler sergileyen ve elektromanyetik olayların içerisinde baskın olduğu ve oldukça karmaşık davranışlar sergileyen bir akışkan olarak ele alınabilir.

Her ne kadar plazma içindeki elektromanyetik alanların Maxwell denklemleri ile ve taneciklerin hız, konum gibi özelliklerinin ise Lorentz kuvveti ile ilkesel olarak belirlenebilir olduğu söylenebilse de uygulamada pek çok basitleştirme yapmaya ihtiyaç duyulur. Plazma fiziğinde kullanılan temel yaklaşımlardan biri *tek parçacık yörünge betimlemesidir*. Bu yaklaşımda plazma dinamiği, dış bir manyetik alan içindeki tanecik için Lorentz kuvveti kullanılarak hareket denkleminin yazılması yoluyla betimlenir. Tanecik hareketlerinin bu alanları değiştirmedeği varsayılır (Bellan, 2008). Başka bir deyişle manyetik alanlar önsel kabul edilir.

Plazma fiziğinde bir diğer önemli yaklaşım ise *akışkan betimlemesidir*. Plazma içindeki yüklü taneciklerin birbiriyle etkileştikleri karmaşık bir hareketleri olsa da plazmayı bir akışkan olarak görmek mümkündür. Plazma kararsızlıklarını basitçe çözümlmek için elektronların ve iyonların tek bir akışkan olarak ele alındığı MHD (ManyetoHidroDinamik) yaklaşımı ile elektron ve iyonların iki farklı akışkan olarak ele alındığı iki-akışkan modeller de plazmanın akışkan betimlemesine dayanır.

Plazmanın *kinetik betimlemesi* olarak bilinen yaklaşım ise istatistiksel temellere dayanır. Elbette çok sayıda yüklü taneciğin istatistiksel betimlemesi tek tanecik yörünge betimlemesi ile tutarlı olur. Plazma içindeki her bir parçacığın belirli bir andaki konum ve hız vektörleri biliniyorsa ilkesel olarak bir başka andaki konum ve hız vektörleri de bulunabilir. Fakat çok

sayıda parçacık için ne başlangıç koşullarını bilmek ne de her birinin yörüngesini taneciklerin birbirleriyle etkileşimlerini de hesaba katarak ele almak mümkündür. Bu zorluk, plazma içindeki taneciklerin fiziksel durumu için hız dağılım fonksiyonu aracılığıyla istatistiksel bir betimleme yapmayı gerekli kılar. Plazma ortamında bir tanecik elbette hız ve konum vektörleriyle temsil edilebilir. Böylece plazma içindeki bir tanecik için üçü konum ve üçü de hız bileşeni olmak üzere altı boyutlu bir faz uzayı tanımlamak mümkündür. Bu durumda hız dağılım fonksiyonu, faz uzayındaki temsilci noktaların yoğunluğu olarak görülebilir (Seshadri, 1973). Çarpışmasız plazmada tek bir tür tanecik için yazılan hız dağılım fonksiyonu, çarpışmasız Boltzmann denklemi olarak da bilinen Vlasov denklemini sağlar. Vlasov denkleminin fiziksel temelleri ve elde edilişi Kısım 2.1’de anlatılmaktadır.

Plazma fiziğindeki pek çok gelişmenin ve son yıllardaki bilgisayarlı simülasyon tekniklerine dayanan araştırmaların artmasının önemli bir nedeni plazmanın termonükleer füzyon ile olan ilişkisidir. Bir füzyon reaksiyonunu başlatmak amacıyla gerekli olan sıcaklığa ulaşabilmek için önerilmiş bir araç tokamaktır. Füzyon reaksiyonunu başlatmak için gerekli olan sıcaklık çok yüksektir. Hatta bu sıcaklık tokamağın merkezinde, Güneş’in merkezindeki ortalama sıcaklıktan 10 kat mertebesinde daha fazla olabilmektedir.

Elbette bu yüksek sıcaklıkta iyonlaşmış halde bulunan madde, plazma durumundadır. Plazma yüklü taneciklerden oluştuğu için elektromanyetik alanlar kullanılarak hapsedilebilir. Plazma fiziği ile termonükleer füzyon arasındaki temel ilişki bu olguya dayanmaktadır. Bir tokamakta temel amaçlardan biri ısıyı mümkün olduğunca aletin orta kısmında yoğunlaştırıp, duvarlardan uzak tutmaktır. Bu, ısı dağılımının homojen olmaması anlamına gelir ve bu durum plazmanın içinde çeşitli salınımlara ve hatta türbülansa neden olur. Plazmanın bu rastgele hareketleri ısının duvarlara doğru kaybedilmesine neden olur. Yani türbülans nedeniyle ısı tokamağın merkezinden duvarlarına doğru taşınmış olur. Bu sürece *türbülans nedeniyle ısı taşınımı* denir. Isının tokamağın merkezinden duvarlara doğru taşınması sürecinde rol oynayan önemli bir fiziksel etki ITG (Ion Temperature Gradient) türbülanstır. Manyetize plazma düzeneklerinde taşınım için önemi nedeniyle ITG mod uzun yıllardır çalışılmaktadır (Coppi ve diğ., 1967; Horton ve diğ., 1981; Lee ve Diamond, 1986). Son yıllarda ise füzyon ve plazmanın hapsedilmesi süreçleri üzerine yapılan çalışmalarda ITG

moduna olan ilginin arttığı görülüyor. Bunun temel nedeni ITG'nin plazmanın hapsedilmesi konusunda problem yaratan en önemli türbülans kaynağı olmasıdır (Horton, 1999).

Türbülans gerçekten fiziğin en zor problemlerinden biri olarak görülür. Bununla birlikte plazma türbülansı klasik gaz türbülansına göre çok daha zor bir problemdir. Çünkü plazmada klasik gaz türbülansı bir de elektromanyetik alanlarla etkileştikten çok karmaşık bir yapı ortaya çıkar. Plazma türbülansı için kullanılan denklemlerin, tüm kinetik etkilerden ayrıca elektrik ve manyetik salınımlardan soyutlanıp basitleştirilmesiyle bile akışkanların dinamiğini betimleyen ve yaygın olarak akışkanlar mekaniğinden bildiğimiz ünlü Navier-Stokes denklemleri elde edilir. Bu basitleştirmeler elbette plazma fiziği açısından kabul edilemeyecek düzeydedir fakat Navier-Stokes denklemlerinin bile genel çözümü yapılamamıştır.

Astrofiziksel plazmalarda, tokamak plazmalarında ve laboratuvar plazmalarında genellikle güçlü bir manyetik alan vardır. Bu ortamda taneciklerin Lorentz kuvveti nedeniyle manyetik alan çizgileri çevresindeki Larmor dönüşleri iyi bilinen bir süreçtir. Öte taraftan çok hızlı olan bu Larmor hareketi türbülans çalışmaları açısından pek ilginç değildir. Çünkü parçacığın Larmor frekansı, plazma içindeki mikro kararsızlıklara neden olan elektromanyetik dalgalanmaların frekansına göre çok daha yüksektir. Bu nedenle türbülans araştırmalarında hızlı dönme üzerinden ortalama alma fikri kullanılarak, taneciğin türbülans açısından önemsiz olan Larmor dönüşünün bir şekilde elimine edilmesi tercih edilir. Bu nedenle plazmanın kinetik betimlemesi yolu kullanıldığında, Vlasov denklemi yerine gyrokinetik denkleme Kısım (2.2)'de anlatılan dönüşümler yoluyla geçiş yapılır.

Güçlü manyetik alanlar söz konusu olduğunda, gyrokinetik teori günümüzde bir plazmanın karmaşık davranışlarının hesaplanabilmesi için en gelişmiş tekniktir (Catto, 1978; Frieman ve Chen, 1982). Bugün gyrokinetik teorisinin gelişmiş plazma simülasyonları için kullanımı aslında bir pertürbasyon teorisine dayanmaktadır (Hahn, 1988; Dimits ve diğ., 2000). Dupree'nin rezonans genişlemesi kuramı bu aşamada önemli bir rol oynar. Dupree'nin bu lineer olmayan kuramı parçacıkların tuzaklanması yoluyla Landau rezonansının genişlemesi fikrini temel alır (Dupree, 1967). Landau rezonansının genişlemesi olayı ise türbülanslı plazmada taneciklerin yörüngelerinin pertürbasyon etkisinde olmalarından kaynaklanır. Bu

alanda yapılan simülasyonlar özellikle paralel yazılım teknolojisi açısından dünyadaki en gelişmiş bilgisayarlara ihtiyaç duymaktadır.

Gerek MHD gerek gyrokinetik denklemlerin kullanıldığı plazma türbülansına uygun karmaşık nümerik simülasyonlar bugün plazma fiziğinin ayrılmaz bir parçasıdır (Howes ve diğ., 2006). Bu nedenle nümerik analiz yöntemleri üzerine çalışan matematikçilerle plazma fizikçileri arasında yürütülen disiplinler arası araştırmalar plazma türbülansı araştırmaları için oldukça verimli sonuçlar doğurmaktadır. Bu bakımdan dünyada sadece füzyon araştırmalarında kullanılmak üzere dev süper bilgisayarlar yapılmıştır. Elbette nümerik hesaplamalar açısından bu maliyeti düşürecek her yeni teknik, bu alanda önemlidir. Bu tezde gyrokinetik denklemin çözümünden elde edilen  $\varepsilon(k, \omega) = 0$  dağılım bağıntısını probleme özel olarak tanımladığımız  $K_{nm}$  integralleri cinsinden yazmamızın temel amacı da budur. Yani dağılım bağıntısının  $K_{nm}$  integralleri cinsinden yazılması, bilgisayar programlama ile uygulanan sayısal analiz yöntemleri için hesaplama sürelerinde önemli bir hızlanma elde edilmesini sağlamıştır.

Bu tez çalışmasının “Giriş” bölümünde termonükleer füzyon olayından, tarihçesinden ve tokamakların yapısından kısaca bahsedildi.

“Genel Kısımlar” bölümünde Klimontovich denkleminde bahsedilecek daha sonra plazmanın kinetik kuramı bağlamında çarpışmasız Boltzmann denklemi olarak da bilinen Vlasov denklemi anlatıldı. Daha sonra Vlasov denkleminde hareket ederek yüklü taneciklerin Larmor dönüşlerini boşlayacak dönüşümler yapmak yoluyla gyrokinetik denklem elde edildi. Bu bölümde son olarak gyrokinetik denklemin çözümünden toroidal ITG modu için yerel dağılım bağıntısına ulaşıldı.

“Malzeme ve Yöntem” bölümünde öncelikle genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları ve  $I_{nm}$  integrali tanıtılmış daha sonra literatürde  $I_{nm}$  fonksiyonlarının analitik sürekliliğinin nasıl sağlandığı gösterildi. Dağılım bağıntısının  $I_{nm}$  integralleri cinsinden nasıl yazıldığı gösterildikten sonra renormalizasyonun dağılım bağıntısını nasıl değiştireceği Dupree rezonans genişlemesi alt başlığında tartışıldı.

“Bulgular” bölümünde bu tezin ilk bulgusu olarak  $I_{nm}$  fonksiyonları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yeni bir biçimde yazıldı. Daha sonra dağınım bağıntısının çözümlerini ayırtmak için geliştirdiğimiz nümerik yaklaşım açıklandı. Bu nümerik yaklaşımı uygulamak için  $I_{nm}$  fonksiyonlarının  $\omega$ ’ya göre türevine ihtiyaç vardı. Bir alt başlıkta  $I_{nm}$  fonksiyonlarının  $\omega$ ’ya göre türevi olan  $J_{nm}$  fonksiyonları elde edildi. Renormalize edilmiş dağınım bağıntısının nümerik çözümlerini hızlıca yapabilmek için bu tezde  $K_{nm}$  fonksiyonları tanımlandı ve renormalize edilmiş dağınım bağıntısı  $K_{nm}$  fonksiyonları cinsinden yazıldı.

$K_{nm}$  fonksiyonlarının analitik sürekliliği için bu tez çalışmasında geliştirdiğimiz yöntem bir alt başlıkta anlatıldı. Dupree terimi için kompleks katsayılı polinomial bir analitik ifade önerildi. Daha sonra Dupree teriminin ITG dağınım bağıntısı üzerine etkilerini görmek için elde edilen çözümler grafiklerle sunuldu. Ayrıca bu tezde ilk defa tanımlanan  $J_{nm}$  ve  $K_{nm}$  fonksiyonlarının farklı parametreler için Python’da çizdirilen grafikleri bu bölümde sunuldu.

“Tartışma ve Sonuç” bölümünde ise bu tezde elde edilen bulgular bir arada değerlendirilip fiziksel önemlerinden bahsedildi. Ayrıca Dupree terimi için önerdiğimiz analitik ifadedeki kompleks katsayılar için bulunan sonuçlar verildi.

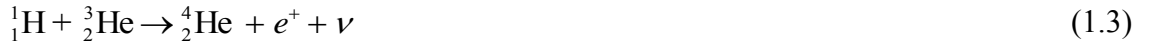
## 1.1. TERMONÜKLEER FÜZYON

Füzyon “birleşmek” ya da “birbiri içinde kaynaşmak” anlamına gelen bir sözcüktür. İki hafif nükleer parçacığın birleşmesiyle ortaya çıkan nükleer reaksiyon, füzyon reaksiyonu olarak adlandırılır. İlkesel olarak taneciklerin reaksiyondan önceki kütleleri toplamı, reaksiyondan sonraki kütlelerin toplamından daha büyüktür. Aradaki bu kütle farkı Özel Görelilik Teorisinin bir sonucu olan ünlü  $E = mc^2$  formülü ile ilişkili bir biçimde enerji olarak salınır (Murray ve Holbert, 2014). Elbette nükleer parçacıkların bir araya gelmesi böylesi bir nükleer reaksiyonun başlaması için yeterli değildir. Çünkü çekirdekler yüklüdür ve Coulomb etkileşimi nedeniyle birbirleri üzerine büyük bir itme kuvveti uygularlar. Bu nedenle füzyon olayının gerçekleşebilmesi için bir şekilde parçacıkların ya da en azından bir parçacığın nükleer kuvvetin Coulomb kuvvetine üstün gelebileceği uzaklıklara kadar hızlandırılması gerekir.

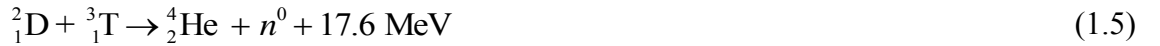
Güneş ve diğer yıldızlarda gerçekleşen füzyon reaksiyonlarına aşağıdaki gibi iki örnek verilebilir:



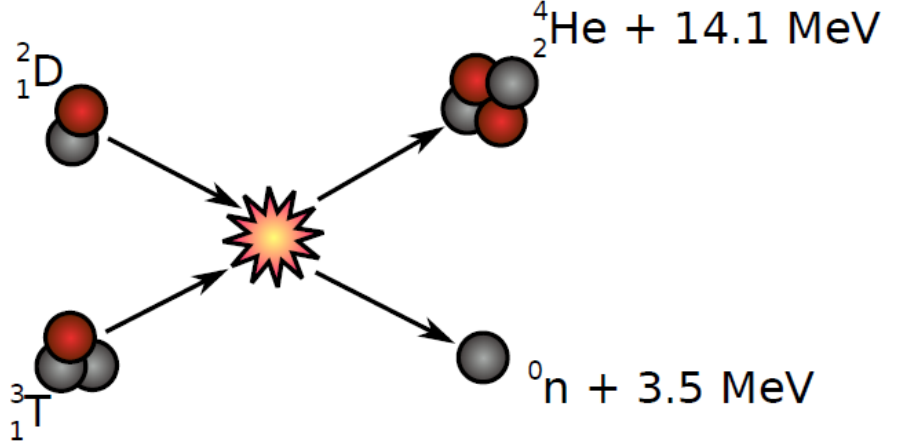
Son reaksiyon aşağıdaki reaksiyonlardan biriyle devam eder:



Özellikle Güneş ve yıldızlarda gerçekleşen bu reaksiyonlar dünyamızdaki yaşamın varlığını ve devamlılığını sağlayan enerji üretiminin kaynağıdır. Fakat bu reaksiyonlar füzyon reaktörlerinde kullanmak için elverişli değildir. Çünkü yıldızların içindeki çok yüksek yoğunluk ve basıncı dünyamızdaki laboratuvar koşullarında sağlamak olanaklı değildir. Kontrollü füzyon çalışmalarında, füzyon reaktörleri için araştırmaların yoğunlaştığı hidrojenin döteryum ve trityum izotopları arasında gerçekleşen füzyon reaksiyonları aşağıdaki gibidir (Murray ve Holbert, 2014):



Yukarıdaki ilk tepkime bir döteryum atomu ile bir trityum atomunun nükleer olarak kaynaştığı reaksiyon sonucunda bir helyum atomu ile bir nötron ve 17.6 MeV enerji açığa çıkacağı ikinci denklemden ise iki döteryumun kaynaşması ile ortaya yan ürün olarak bir trityum ve serbest proton ile birlikte 4.03 MeV enerji açığa çıkacağı görülüyor.



**Şekil 1.1:** Döteryum-Trityum Füzyon Reaksiyonu.

Termonükleer füzyon açısından farklı tip reaksiyonlarının birbirine göre avantaj ve dezavantajları bulunmaktadır. Görüldüğü gibi füzyon reaksiyonlarında yakıt olarak hidrojenin izotopları kullanılır. Doğada bulunan hidrojen atomlarının içinde döteryum miktarı sadece yüzde 0.0115 oranındadır. Bununla birlikte döteryumu deniz suyundan ayırıştırmak olanaklı ve düşük maliyetli olduğu için döteryum miktarı sınırsız olarak kabul edilebilir. Trityum izotopunun ise yapay olarak üretimi zordur. Ayrıca nükleer silahlar için kullanıldığından oldukça pahalı bir maddedir. Bununla birlikte D-T reaksiyonunun yan ürün olarak bir nötron vermesi, füzyon aleti için bir dezavantaj doğurmaktadır. Çünkü duvar malzemeleri nötron saçılmaları nedeni ile zarar görür. Füzyon çalışmalarında asıl amaçlanan şey doğada sınırsızca bulunan döteryumu kullanarak enerji üretimi için uygun maliyetli bir D-D reaktörünü geliştirmektir.

Termonükleer füzyon yoluyla enerji elde edilmesi konusunda önemli bir ifade de *Lawson kriteri*dir. Füzyon aletinin içindeki parçacık sayı yoğunluğu  $n$  ve sınırlama zamanı da  $\tau$  olmak üzere, Lawson kriteri, D-T reaksiyonu için  $n\tau \geq 10^{14} \text{ s/cm}^3$  ve D-D reaksiyonu için  $n\tau \geq 10^{16} \text{ s/cm}^3$  biçimindedir. Bir füzyon reaktöründe hangi reaksiyon kullanılırsa kullanılsın güç kaybı mutlaka olur. Eğer reaktördeki üretim hızı, güç kaybı hızını aşarsa tutuşma meydana gelir. Tutuşmanın meydana geldiği bu yüksek sıcaklık, *kritik tutuşturma sıcaklığı* olarak bilinir (Murray ve Holbert, 2014). Lawson kriterinde verilen  $\tau$  sınırlama zamanı ise iyonların sıcaklığının tutuşturma sıcaklığından büyük oluncaya kadar geçen süre olarak tanımlanabilir. Gene de Lawson kriteri kaba bir kuraldır ve uygulamada deneylerin hassas bir biçimde analiz edilerek çalışılması gerekmektedir.

## 1.2. KONTROLLÜ FÜZYON ARAŞTIRMALARININ KISA BİR TARİHÇESİ

Füzyon reaksiyonu daha önce de söylendiği gibi yıldızların dolayısıyla Güneşin sınırsız enerjisinin kaynağıdır. Yani dünyada kullandığımız tüm enerji çeşitlerinin aslında ilk kaynağıdır. Kontrolsüz füzyon reaksiyonu, yeryüzündeki koşullarda uzun yıllar önce gerçekleştirilmiştir. Hidrojen bombası bunun iyi bilinen bir örneğidir. Hidrojen bombası bir füzyon reaksiyonu ile yüksek sıcaklık oluşturup kontrolsüz bir füzyon reaksiyonunu başlatma ilkesine dayanır.

İlk füzyon çalışmaları, ABD ile Sovyetler Birliği arasındaki silahlanma yarışının sürdüğü soğuk savaş yıllarına uzanmaktadır. İlk füzyon bombası ise 1952 yılında Amerikalılar tarafından Marshall adalarının bir parçası olan Elugelab adasında patlatılmıştır (Campbell, 1998). Bu patlama daha önce kullanılan atom bombasına göre 450 kat daha fazla enerji açığa çıkarmış ve Elugelab adasını yok etmiştir. Sovyetler Birliği ise geliştirdiği füzyona dayanan termonükleer bir bombayı, 1953 yılında deneyerek başarılı olmuştur (Bethe, 1991).

Soğuk savaş yıllarında füzyon çalışmaları çeşitli ülkeler tarafından gizli olarak yürütülmüştür. 1955 yılında Uluslararası Atom Enerjisi Kurumu'nun (IAEA) Cenevre'de yaptığı birinci konferansta kontrollü füzyon enerjisinin mümkün bir seçenek olduğu tartışılmış ve 1958 yılında yine Cenevre'de yapılan ikinci konferansta ise tüm ülkelerin füzyon üzerine yürüttükleri gizli projelerin gizliliğinin resmen kaldırılması kararı alınmıştır. Böylece ABD, Sovyetler Birliği, Avrupa ve diğer ülkeler arasında barışçıl amaçlarla kontrollü füzyon enerjisini elde edebilmek için bilimsel bir iş birliği olanaklı olmaya başlamıştır.

1958'deki konferansta daha önce yürütülen füzyon araştırmaları için gizliliğin kalkması ile birlikte ABD'nin kontrollü füzyon çalışmaları için plazmayı hapsetme amacıyla kullanılan "stellarator" adını verdikleri bir makine üzerinde çalıştıkları, Sovyetler Birliği'nin ise aynı amaçla "tokamak" adını verdikleri başka bir makine üzerinde çalıştıkları ortaya çıkmıştır (Bromberg, 1982). Tokamak, toroid-hazne-mıknatıs-bobin kelimelerinin Rusça karşılıklarının kısaltılması olup torus şeklinde bir manyetik oda gibi bir anlama gelmektedir (Murray ve Holbert, 2014). Bu iki yaklaşım da bugün ayrı ayrı çalışılıyor olsa da, içinden geçen akım nedeniyle Ohmic ısınma adı verilen bir fiziksel süreç ile içinde bulunan plazmanın kendiliğinden ısınmasını sağladığı için tokamak günümüzde daha çok ön planda olan cihazdır

(Kadomstsev, 1992). Ayrıca cihazların ne kadar plazmayı hapsedebileceği boyutlarıyla orantılı olduğundan, büyük boyutlarda yapımı ve kontrolü stellaratore göre kolay olan tokamak daha avantajlıdır. Füzyon araştırmalarında stellarator yerine tokamakın tercih edilmesi hakkında bir diğer ilginç gelişme de 1968 yılında Uluslararası Atom Enerjisi Kurumu'nun konferansında yaşandı. Sovyet bilim insanları T-3 adını verdikleri bir tokamakta Güneş'in merkezindeki sıcaklığı aşan bir elektron sıcaklığına ulaştıklarını bildirdiler. Ancak Amerikalı ve Avrupalı bilim insanları daha önce bu sıcaklıklara hiç ulaşmadıkları için bunun bir Sovyet propogandası olabileceğinden kuşkulandılar. Daha sonra İngiliz bir ekip Sovyetler Birliği'ne giderek yaptıkları ölçümlerle Sovyet bilim insanlarının bildirimini doğrulamıştır (Peacock ve diğer., 1969). Böylece Princeton'daki stellarator olabildiğince hızlı bir şekilde bozulup bir tokamağa dönüştürülmüştür (Bromberg, 1982).

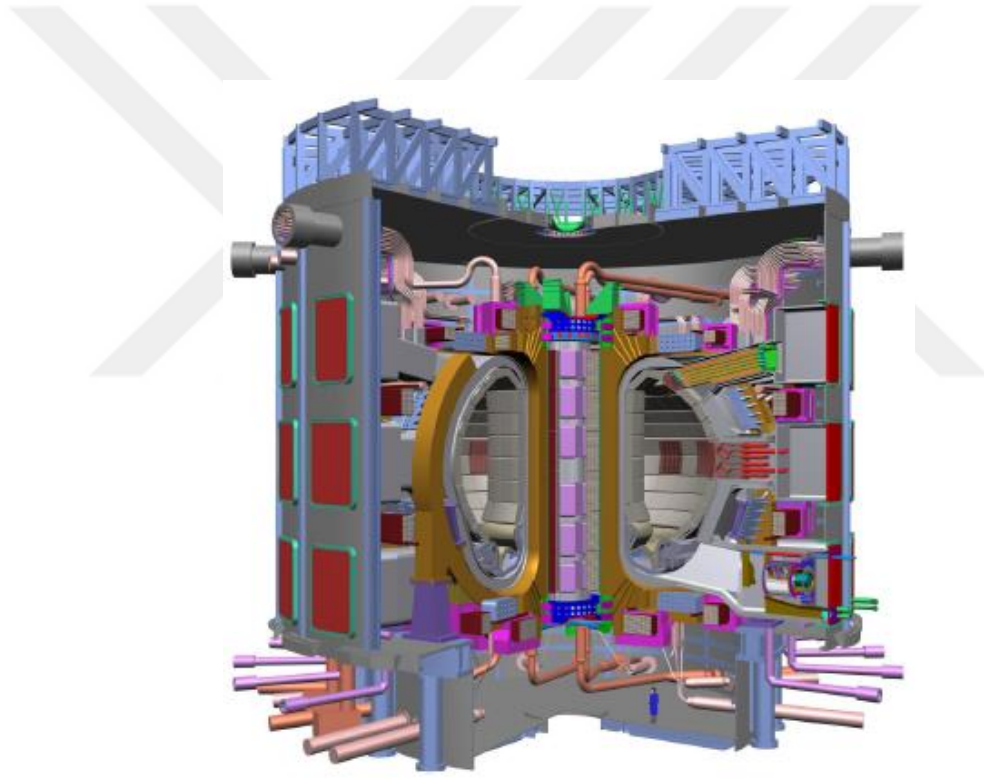
Elbette kontrollü füzyon için farklı fikirler denenmiş olsa da bu aşamadan sonra tokamak çalışmaları ön plana çıkmıştır. Özellikle 1970'lerde ortaya çıkan enerji krizi, Amerika ve Avrupa'da füzyon araştırmalarının önem kazanması ve bu konulara büyük bütçelerin ayrılması için belirleyici bir etken olmuştur. Amerika'da MIT (Massachusetts Institute of Technology) bünyesinde Alcator, Princeton'da 1975 yılında PLT ve 1978 yılında PDX tokamakları geliştirilmiştir. Fransa da bu gelişmelere paralel olarak 1973 ve 1976 yılları arasında PDX tokamağını yaparak füzyon araştırmalarına katılmıştır. Aynı yıllarda Japonya JFT, İtalya TTF ve FT, İngiltere CLEO ve Sovyetler Birliği ise T-4, T-5, T-6 tokamaklarını yapmışlardır (Freeman, 2010).

1980'li yıllarda önceki yıllara göre tokamakların içinden geçen akım ortalama 10 kat ve ısıtma sistemleri ise 20-30 kat artış göstermiştir (Meade, 2010). Almanya'da ASDEX adlı tokamakta, plazmanın sınırlarını fazla ısıtmadan, merkezini çok yüksek sıcaklık ve yoğunluğa ulaştırmayı sağlayan H modu (High confinement) olarak adlandırılan yeni bir işleyiş şekli bulunmuştur (Wagner ve diğer., 1982). Ayrıca aynı yıllarda ilk olarak Fransa'da tokamak yapısında süperiletken bobinler kullanılmıştır (2006; Fujita ve diğer., 2007; 2008).

2000'lere kadar İngiltere'de bulunan JET (The Joint European Torus) tokamağında yapılan deneylerde D-T reaksiyonları çok defa denenmiştir. Bu deneylerin umut verici yanı elde

edilen füzyon enerjisinin, ısıtma ve hapsedilme için harcanan enerjinin yüzde 65'i seviyesine ulaşmış olmasıdır (Meade, 2010).

Tokamağın içindeki plazmanın hapsedilebilme kapasitesi tokamağın büyüklüğü ile orantılı olduğundan tokamak ne kadar büyükse bu, kontrollü füzyon çalışmaları açısından o ölçüde önemli bir avantajdır. Günümüzde dünyanın en büyük tokamağı olan JET yaklaşık 100 m<sup>3</sup> hacindedir. Öte taraftan Güney Fransa'da yapımı tamamlandıktan sonra dünyanın en büyük tokamağı olacak olan ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) projesi 830 m<sup>3</sup> büyüklüğündedir (iter.jpg, 2013).



**Şekil 1.2:** ITER Projesinin Şeması (Tokamak Boyutunun Karşılaştırılması İçin Sağ Altta Mavi Elbisesiyle İnsan Görülmektedir.) (iter.jpg, 2013).

Şu anda Avrupa Birliği ülkeleri başta olmak üzere Çin, Hindistan, Güney Kore, Rusya ve ABD'nin de içinde bulunduğu toplam 35 ülke bu projede çalışmaktadır. ITER projesinde ısıtma için harcanan enerjinin yaklaşık 10 katı kadar füzyon enerjisi elde edilmesi amaçlanmaktadır. ITER projesinin başarılı olması kontrollü füzyon reaksiyonu yoluyla enerji üretilebileceğinin kesin bir kanıtı olacaktır.

### 1.3. TOKAMAK GEOMETRİSİNDE PLAZMA

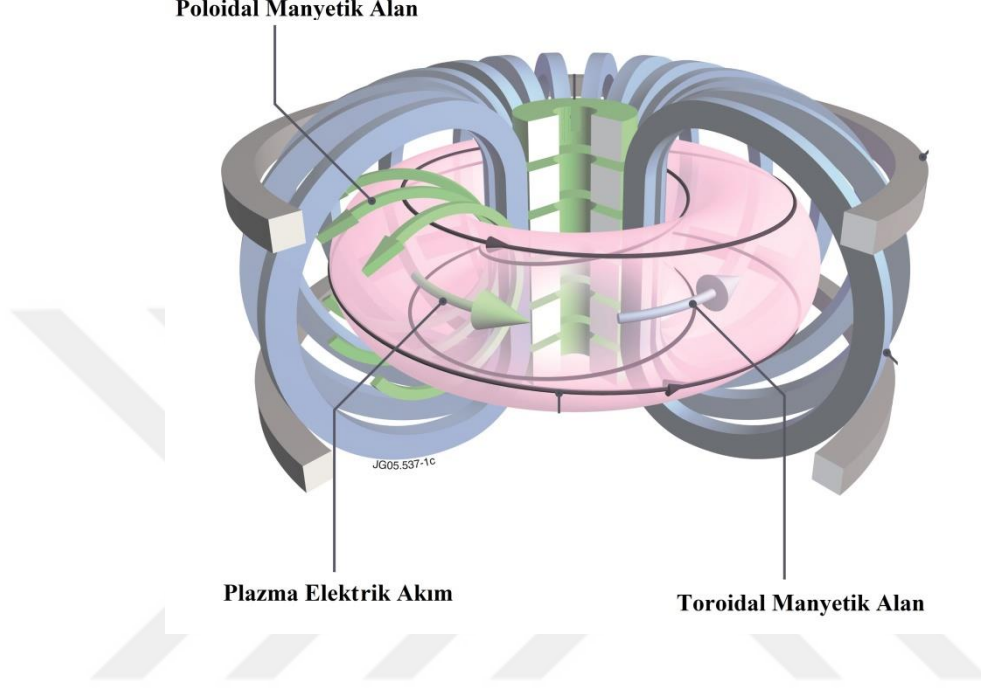
Termonükleer füzyonu manyetik hapsedme makinaları aracılığıyla gerçekleştirmek için plazmanın yeterli sıcaklığa kadar ısıtılması gerekir (Nishikawa, Wakatani, 2000). Plazma yüksek sıcaklıklara kadar ısıtılırken sınır bölgelerini belirleyen duvarlardan ısı kaybını engellemek için manyetik hapsedme yöntemi kullanılabilir.

Basit bir manyetik hapsedme makinesi manyetik ayna olarak bilinen bir fiziksel sürece dayanır (Chen, 1984). Uç bölgelerde manyetik alan şiddetinin orta bölgelere göre daha şiddetli olduğu silindirik geometriye sahip bir manyetik alan bölgesi basit bir manyetik ayna makinesinin yapımı için kullanılır. Bir parçacık manyetik alan çizgileri çevresinde Larmor yarıçapı çizerek farklı şiddetteki manyetik alan bölgeleri içinde hareket ederken Larmor yarıçapı değişse de  $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$  biçiminde tanımlanan manyetik moment büyüklüğünün değişmediği bilinmektedir (Taylor, 1967).

Silindir bölgenin içindeki tanecikler yüksek şiddetli manyetik alan bölgelerine yani silindirin uçlarına yaklaştığında manyetik momentin değişmezliğine rağmen manyetik alan şiddeti arttığından taneciklerin manyetik alana dik yöndeki  $v_{\perp}$  hızları da artacaktır. Bu, enerjinin korunumu nedeniyle taneciklerin yüksek manyetik alan bölgeleri olan silindir geometrinin uçlarına yaklaşmasıyla birlikte, manyetik alanlara paralel yöndeki  $v_{\parallel}$  hız bileşeninin azaldığı anlamına gelir. Dolayısıyla parçacıklar manyetik ayna geometrisinin düşük manyetik alan bölgesinde hapsedilir (Chen, 1984). Ancak bu kusursuz bir hapsedme yöntemi değildir. Uç bölgelere yakınken  $v_{\perp}$  hız bileşeni yeterince küçük olan tanecikler bu geometriden kurtulmaktadır.

Yük kayıplarının engellenmesi için tamamen farklı bir yaklaşım ise toroidal geometriye sahip bir manyetik hapsedme makinesidir. Tokamak geometrisinin toroidal yapısı basitçe Şekil 1.3'te görülmektedir. Tokamak içindeki güçlü toroidal manyetik alan toroidal bölgenin çevresindeki içinden akım geçirilen poloidal bobinlerle üretilmektedir. Şekil 1.3'te görüldüğü gibi bu poloidal bobinlerin yerleşimi torusun iç bölgesinde birbirine doğru yaklaşmakta ve dış

bölgesinde ise birbirinden uzaklaşmaktadır. Bu nedenle torusun iç bölgesi yüksek manyetik alan bölgesi, dış bölgesi ise düşük manyetik alan bölgesi olur.



Şekil 1.3: Tokamak Yapısının Şematik Gösterimi.

Yüklü tanecikler toroidal manyetik alan çizgileri çevresinde Lorentz kuvveti nedeniyle Larmor dönüşü yaparak hareket ederler. Yüklü taneciklerin torus geometrisinde hapsolmesinin temel fiziksel mekanizması budur. Fakat bir plazma ortamında manyetik alan çizgilerine dik yönde manyetik alan şiddetinin değişmesi yani  $\nabla B \perp \mathbf{B}$  Gradyent B sürüklenmesi olarak bilinen temel bir plazma olayı iyon ve elektronların manyetik alan çizgilerine dik olarak ters yönlere doğru sürüklenmesine ve manyetik alan çizgilerine dik yönde akımların ortaya çıkmasına neden olur (Chen, 1984).

Bununla birlikte eğri manyetik alan çizgileri ise eğrilik sürüklenmesi olarak bilinen olaya neden olur. Eğri manyetik alan çizgileri çevresinde dolanan yüklü taneciklerin üzerine etkiyen merkezkaç kuvvetleri taneciklerin dönme merkezlerinin sürüklenmesine neden olur (Chen, 1984). Bu sürece Gradyent B sürüklenmesinden de katkı gelir. Böylece manyetik alanların eğriliğinin kaçınılmaz olduğu torus geometri içinde hapsedilen tanecikler bu geometriden sürüklenerek kurtulurlar. Plazmanın hapsedilmesi için olumsuz olan bu durum torusun içinde toroidal akımlar yaratarak, toroidal manyetik alanlara göre daha zayıf olan poloidal manyetik

alanlar yaratmak yoluyla düzeltilir. Böylece toroidal ve poloidal manyetik alanların bileşkesi sonucu Şekil 1.3'te siyah çizgilerle gösterilen helis şeklindeki bileşke manyetik alanlar oluşur. Eğer helisel manyetik alan çizgileri çevresinde Larmor dönüşü yapan tek bir yüklü tanecik olduğunu varsaysaydık bu taneciğin manyetik alan çizgileri çevresinde kusursuzca tuzaklanacağı söylenebilirdi. Fakat tokamak içindeki taneciklerin kollektif hareketleri sırasında ortaya çıkan kararsızlıklar ve türbülans taneciklerin zamanla tokamak geometrisinden kurtulmalarına neden olur.

Eğer plazma içinde oluşan pertürbasyonlar daha sonra plazmanın yeniden denge durumuna geçmesine engel olacak biçimde bir etki doğuruyorsa, yani pertürbasyonlar sonucu ortaya çıkan kuvvetler denge durumundan sapmayı artırma eğilimde ise kararsızlıklar ortaya çıkar. Plazma içinde makro kararsızlıklar gözleendiği gibi mikro kararsızlıklar da gözlenir. Makro kararsızlıklar genel olarak plazmanın geometrik yapısından kaynaklanırken, mikro kararsızlıklar plazma içindeki parçacıkların hız dağılım fonksiyonunun yapısından kaynaklanır.

Makro kararsızlıklara bir örnek sosis kararsızlığıdır. Plazmanın bir silindirik hacmini göz önüne aldığımızda kinetik basıncın bu silindirik yüzey üzerinde değişmediğini varsayalım. Fakat bu silindir yüzeyin dalgaya benzer biçimde pertürbe olduğunu düşünelim. Yüzeyin genişleyen kısımlarında taneciklerin termal hareketlerinden kaynaklanan kinetik basınç manyetik basınçtan büyük olur. Bununla birlikte yüzeyin daralan kısımlarında ise kinetik basınç manyetik basınçtan küçük olacaktır.

Eğer pertürbasyonlar plazmayı denge durumundan uzaklaştırıp bu kararsızlığın artmasına neden olacak şekilde etki gösterirse plazmanın geometrisinde silindir boyunca boğumlar ortaya çıkar. Plazmanın geometrik yapısı bir sosise benzediği için bu kararsızlığa *Sosis Kararsızlığı* denir.

Bir başka makro kararsızlık ise kink kararsızlığıdır. Yine silindir hacim içinde sıkıştırılmış plazma göz önüne alalım. Plazma geometrisinde silindirin bükülmesi şeklinde bir pertürbasyonun plazmayı denge durumundan uzaklaştırması sonucu doğan makro kararsızlık *Kink Kararsızlığı* olarak bilinir. Tokamak geometrisinde plazmayı hapsedmeye yönelik

deneylerde burada örneklenen makro kararsızlıkları engelleyici yönde önlemler almak mümkün olmaktadır.

Plazmada iyon Larmor yarıçapı mertebesinde dalgaboyuna sahip kararsızlıklar mikro kararsızlıklardır. Elektrostatik ve elektromanyetik çok sayıda mikrokararsızlık türü vardır. Genellikle mikro kararsızlıklar tokamak içindeki anormal taşınımın kaynağıdır. Tokamaklarda ITG kökenli türbülans plazmanın hapsedilmesi konusunda problem yaratan en önemli etkendir.



## 2. GENEL KISIMLAR

### 2.1. VLASOV DENKLEMİ (ÇARPIŞMASIZ BOLTZMANN DENKLEMİ)

Plazmanın pozitif yüklü iyonlarla negatif yüklü elektronlardan oluştuğunu ve üstelik nötr davranma eğiliminde olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki incelemede genel çalışacak ve s türünü ele alacağız. Bu türden bir parçacığın kütleini  $m_s$  ve yükünü de  $q_s$  ile göstereyim. s türünü oluşturan parçacıkların her biri konum ve hız vektörleriyle belirlenir. Bu nedenle bu türün faz uzayı  $6N_s$  boyutludur. Bu kadar yüksek boyutlu bir faz uzayında çalışmak şüphesiz aşırı zordur. Bu yüzden çalışmalarda kolaylıklar sağlması amacıyla değişik yöntemler geliştirilmiştir. Kullanılan bu yöntemlerden bir tanesi de Klimontovich yöntemidir.

Klimontovich yönteminde baştan sistemi oluşturan  $N_s$  tane parçacığın yörüngelerinin bilindiği kabul edilir:  $\mathbf{r}_i(t)$  ve  $\mathbf{p}_i(t)$ . Ayrıca sistemdeki parçacıkları 6 boyutlu tek-parçacık faz uzayında,  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  uzayında betimleyen dağılım fonksiyonu temel alınır. Parçacıkların yörüngeleri üzerindeki hareketleri dağılım fonksiyonunun zamanla değişmesi sonucunu getirir. Dağılım fonksiyonu tek-parçacık faz uzayında noktadan noktaya değişir.

Bu gerçekler dağılım fonksiyonunun  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  ve  $t$ 'ye bağlı olması demektir. Söz konusu fonksiyonu  $\hat{F}_s$  ile göstereyim. Bu söylenenlerden sonra  $\hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  olacağı açıktır. Şimdi de  $\hat{F}_s$ 'nin açık şeklini elde edelim. Tek-parçacık faz uzayında herhangi bir  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  noktasının  $d^3r d^3p$  hacim elemanını göz önüne alalım.  $i$  numaralı parçacığın bu hacim elemanı içinde bulunabilmesi ve  $\hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ 'ye ancak  $t$  anında bu hacim elemanı içinde bulunabilen parçacıklar katkı verir. Bu olgunun matematiksel olarak  $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))$  şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. Öyleyse  $t$  anında söz konusu hacim elemanı içinde bulunan parçacıkların sayısı

$$\sum_{i=1}^{N_s} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))d^3r d^3p \quad (2.1)$$

dır.

Dağılım fonksiyonu  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  noktasının birim komşuluğunda bulunan parçacıkların sayısı olduğundan,

$$\hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{N_s} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) \quad (2.2)$$

olur (Nishikawa ve Wakatani, 2000). Şimdi  $\hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ 'nin uyduğu denklemi bulalım. Söz konusu denklemi klasik fizik çerçevesinde bulacağız. Parçacıkların her biri klasik fizik yasaları uyarınca davrandığına göre

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad \text{ve} \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \hat{\mathbf{K}}_i; \quad i = 1, 2, \dots, N_s \quad (2.3)$$

olur. Burada  $\hat{\mathbf{K}}_i$ ,  $i$  numaralı parçacık üzerine diğer tüm parçacıklarca etki ettirilen kuvettir. Parçacıklar yüklü olduğu ve hareket ettiği için bu kuvvet Lorentz kuvveti olup

$$\hat{\mathbf{K}}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t) = \frac{q_s}{m_s} \left( \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_i(t), t) + \frac{\mathbf{p}_i(t)}{c} \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_i(t), t) \right) \quad (2.4)$$

den ibarettir.  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_i(t), t)$  ve  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_i(t), t)$  sırasıyla diğer parçacıklarca  $t$  anında  $i$  numaralı parçacığın bulunduğu konumda yarattığı elektrik ve manyetik alan vektörleridir. Bu hazırlıktan sonra  $\hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ 'nin zamana göre kısmi türevini hesaplayalım:

$$\frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial t} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) + \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \frac{\partial \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))}{\partial t} \right] \quad (2.5)$$

$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$ 'nin zamana bağlılığı  $\mathbf{r}_i$  üzerinden olduğundan

$$\frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i(t) \frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial \mathbf{r}_i(t)} \quad (2.6)$$

dir. Aynı düşünce ikinci terimdeki kısmi türeve de uygulandığında,

$$\frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}}_i(t) \frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial \mathbf{r}_i(t)} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) \\ + \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \dot{\mathbf{r}}_i(t) \frac{\partial \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))}{\partial \mathbf{p}_i(t)} \end{array} \right] \quad (2.7)$$

elde ederiz. Oysa Dirac delta fonksiyonu için

$$\frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial \mathbf{r}_i(t)} = \frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))}{\partial \mathbf{p}_i(t)} = \frac{\partial \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))}{\partial \mathbf{p}} \quad (2.9)$$

özelliği vardır. Bu özellik sonucunda,  $\dot{\mathbf{p}}_i(t) = \hat{\mathbf{K}}_i(t)$  olduğundan,

$$\frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}}_i(t) \frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial \mathbf{r}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) \\ + \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \hat{\mathbf{K}}_i(t) \frac{\partial \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))}{\partial \mathbf{p}} \end{array} \right] \quad (2.10)$$

buluruz. Üstelik Dirac delta fonksiyonu için

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) \frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial \mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.11)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_i(t) \frac{\partial \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))}{\partial \mathbf{r}} = \hat{\mathbf{K}} \frac{\partial \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.12)$$

özelliği de söz konusudur. Sonuçta

$$\frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}{\partial \mathbf{r}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) \\ + \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \hat{\mathbf{K}} \frac{\partial \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))}{\partial \mathbf{v}} \end{array} \right] \quad (2.13)$$

elde ederiz. Faz uzayında  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{p}$  birbirinden bağımsızdır. Üstelik  $\hat{\mathbf{E}}$  de  $\mathbf{p}$ 'den bağımsızdır ve  $[\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)]_i = v_j \hat{B}_k - v_k \hat{B}_j$ ,  $j, k \neq i$  olduğu için  $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$  de  $v_i$ 'den bağımsızdır. Bu nedenle  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot (\hat{\mathbf{K}} \hat{F}_s) = \hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s}{\partial \mathbf{p}}$  yazabiliriz. Bu yüzden  $i$ 'den bağımsız olan kısımları toplamın dışına atabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} &= -\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \sum_{i=1}^{N_s} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) \\ -\hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \sum_{i=1}^{N_s} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) &= -\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{r}} - \hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Buradan

$$\frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (2.15)$$

denklemine ulaşırız. Bu denklem *Klimontovich denklemi* olarak bilinir. Plazmayı tam olarak betimlemek için elektromagnetik alanların uyduğu Maxwell denklemlerine de ihtiyaç vardır (Jackson, 1999). Bu denklemler

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \hat{\sigma}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Buradaki  $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)$  akım yoğunluğu vektörü ve  $\hat{\sigma}(\mathbf{r}, t)$  yük yoğunluğu yörüngeleri üzerinde hareket eden parçacıkların yarattığı büyüklüklerdir.

Bunlar sırasıyla

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = \sum_s q_s \int \mathbf{v} \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.17)$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \sum_s q_s \int \hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır. Tüm bu denklemler *Klimontovich sistemi* olarak bilinir (Nishikawa ve Wakatani, 2000).

$\hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 'nin parçacıkların yörüngelerine ait büyüklükleri içerdiğini biliyoruz. Bu, elektromagnetik alanların da parçacıkların yörüngelerine bağlı olması demektir. Öte yandan parçacıkların yörüngelerinin bilinmesi için başlangıç koşullarının bilinmesi gerekir. Bu özellik  $\mathbf{r}_i(t)$  ve  $\mathbf{p}_i(t)$ 'lerin klasik fiziğin zamana göre birinci mertebeden olan diferansiyel denklemlerinin çözümleri olmasının sonucudur. Oysa parçacıkların yörüngelerini belirleyen başlangıç koşullarının bilinmesi olanak dışıdır. Bu yüzden bu, plazmanın en ayrıntılı betimlemesini sağlamasına karşın pratik hiçbir öneme sahip değildir.

Bu soruna bir çözüm getirebilmek için plazmayı  $\hat{F}_s$  ile değil de  $\hat{F}_s$ 'nin tüm başlangıç koşulları üzerinden alınan ortalaması ile betimlemek yoluna gidilir. Söz konusu ortalamanın nasıl alınacağına mekanizmasının açık olarak belirtilmesine gerek duyulmaz. Hem dengede bulunmayan bir sistem için böyle bir ortalama kesin olarak tanımlanamaz (Nishikawa ve Wakatani, 2000). Şimdi Klimontovich denkleminin şekilsel olarak ortalamasını alalım. Ortalama değeri  $\langle \rangle$  ile göstereceğiz. Ortalama alma işlemi bir lineer işlemdir. Buna göre,

$$\left\langle \frac{\partial \hat{F}_s}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle + \left\langle \hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = 0 \quad (2.19)$$

elde ederiz. Parçacıkların tüm konum ve lineer momentum başlangıç değerleri üzerinden ortalama aldığımız için bu ortalamanın zamana göre türev alma işlemcisi ile hiçbir ilgisi yoktur.

$\left\langle \frac{\partial \hat{F}_s}{\partial t} \right\rangle$  yerine rahatlıkla  $\frac{\partial \langle \hat{F}_s \rangle}{\partial t}$  yazabiliriz.

Ortalama alma işlemi ile başlangıç koşullarına bağıllık ortadan kaldırılınca bir  $\mathbf{r}$  konumunda

tüm parçacıklar bir  $\mathbf{p}$  momentumu ile karakterize edilir. Bu nedenle ikinci terimde  $\left\langle \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle$

yerine  $\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \langle \hat{F}_s \rangle}{\partial \mathbf{r}}$  yazarız.

Üçüncü terime gelince: Parçacıkların konum ve lineer momentumlarının başlangıç değerleri

hem  $\frac{\partial \hat{F}_s}{\partial \mathbf{p}}$  ve hem de  $\hat{\mathbf{K}}$  içinde yer alır. Yani üçüncü terim diğer iki terim gibi başlangıç

değerlerine göre lineer değildir. Bu nedenle  $\left\langle \hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle$  yerine doğrudan  $\hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \langle \hat{F}_s \rangle}{\partial \mathbf{p}}$  yazamayız.

Bunu hangi koşullarda yapabileceğimizi araştıralım. İdeal plazma,

$$n_0 \lambda_D^3 \equiv N_D \rightarrow \infty \quad \lambda_D \simeq 1 \quad (2.20)$$

koşulu ile tanımlanır. Burada  $\lambda_D$

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 T_e}{n_0 e^2}} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanan Debye uzunluğu ve  $n_0$  da birim hacimdeki elektron veya iyon ortalama sayısıdır. Boltzmann sabiti 1 alındığında bir elektronun ortalama kinetik enerjisi  $T_e$  sıcaklığı ile temsil edilir. Burada  $\varepsilon_0$  vakumun geçirgenliği ve  $e$  de elektron yükünün salt değeridir. Plazmanın oluşması koşulunun da  $n_0 \lambda_D^3 \gg 1$  olduğunu zaten biliyoruz. Demek ki ideal plazma için Debye uzunluğu içindeki elektron veya iyon sayısının çok büyük olması gerekir.

Bir plazma parçacığı, etrafında bulunan aynı yüklü plazma parçacıklarını iter ve ters yüklü plazma parçacıklarını çeker. Etrafında böylelikle bir polarizasyon yaratır. Parçacığın etrafında biriken ters yüklü parçacıklar, söz konusu parçacığın etrafında yarattığı alanın etkisini azaltır. Başka bir deyişle bu, parçacığın boşlukta yer alması durumunda etrafında yarattığı Coulomb alanının menzili parçacık plazma içinde yer aldığı azalması demektir. Bu olay *Debye koruması* olarak bilinir.

İdeal plazma içinde parçacığın etrafında çok sayıda plazma parçacığının bulunması dolayısıyla Debye koruması çok büyük olur. Her parçacığın öteki parçacıklar üzerindeki Coulomb etkisi aşırı zayıflar. Bu ise her bir parçacığın kinetik enerjisinin, üzerine etkileyen Coulomb enerjisinin yanında çok büyük kalması demektir. Öyleyse parçacık sistemini etkileşmesiz/çarpışmasız olarak kabul edebiliriz. Sonuçta, çarpışmasız bir ortam olan ideal plazmada iki-cisim korelasyon etkisini göz ardı edebileceğiz ve  $\left\langle \hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \hat{F}_s}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle$  yerine doğrudan

$\hat{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \langle \hat{F}_s \rangle}{\partial \mathbf{p}}$  yazabileceğiz.  $\langle \hat{F}_s \rangle \equiv F_s$  dediğimizde

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (2.22)$$

elde ederiz.  $\mathbf{K} = \langle \hat{\mathbf{K}} \rangle$  olduğu açıktır. Her iki denklemin de şekilleri aynıdır. Yalnızca  $\hat{F}_s$  ile  $F_s$  fonksiyonlarının fiziksel anlamları ayrıdır. Bu son denklem *Vlasov denklemi* veya *çarpışmasız Boltzmann denklemi* olarak bilinir (Bellan, 2008).

Vlasov denkleminde  $\mathbf{K}$  'nın yer alması nedeniyle Maxwell denklemlerinin de aynı şekilde ortalamasının alınması gerekir. Bu denklemlerin tümü lineer yapıdadır. Bu nedenle bu denklemlerin ortalamalarının alınması herhangi bir sorun yaratmaz.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rangle$  ve  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \rangle$  için

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma(\mathbf{r}, t)$$

Burada  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) \rangle$  ve  $\sigma(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\sigma}(\mathbf{r}, t) \rangle$  dir.

Hem Klimontovich hem de Vlasov denkleminde baktığımızda her iki denklemin de şekil olarak Liouville denkleminin aynısı olduğunu görürüz. Yalnız, denklemlerin içinde geçerli oldukları faz uzayları ve bu denklemleri sağlayan dağılım fonksiyonlarının anlamı farklıdır.  $N_s$  tane parçacık içeren bir sistem için Liouville denkleminin söz konusu olduğunda faz uzayı  $6N_s$  boyutludur. Oysa hem Klimontovich hem de Vlasov denklemleri söz konusu olduğundan faz uzayı tek-parçacık faz uzayı olup yalnızca 6 boyutludur.  $N_s$  tane parçacık bu 6 boyutlu faz uzayına tıktırılmıştır.

Vlasov denkleminin söz konusu olduğunda ayrıca parçacıklı yapı ortalama alınmak yolu ile 6 boyutlu faz uzayı parçacıklı yapıdan arındırılmıştır. Diğer yandan Liouville denkleminin belli bir faz hacmi içinde bulunan faz noktalarının sayısının parçacıkların hareketi boyunca değişmediğini ifade eder. Yani parçacıklarla birlikte hareket eden gözlemci için faz uzayı dağılım fonksiyonu sabit kalır. Aynı şekilde 6 boyutlu faz uzayında da dağılım fonksiyonu sabit kalır. Bunun matematiksel ifadesi

$$\frac{dF_s}{dt} = 0 \quad (2.24)$$

dir. Buradaki  $F_s$ , söz konusu olan faz uzayına göre  $\hat{F}_s$ ,  $F_s$  veya  $6N_s$  boyutlu faz uzayındaki dağılım fonksiyonunu temsil etmektedir.

## 2.2. PLAZMANIN "GYROKİNETİK" BETİMLEMESİ

### 2.2.1. Yüklü Parçacığın Manyetik Alan İçindeki Hareketi

Parçacığın kütleini  $m$  ve yükünü de  $q$  ile gösterelim. Parçacığın hareket denklemi

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.25)$$

olur. Koordinat sisteminin z-eksenini manyetik alan doğrultusunda seçtiğimizde, yukarıdaki hareket denklemini bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz ( $\Omega_L = \frac{qB}{mc}$ ):

$$\begin{aligned} v_z &= v_{\parallel} = \text{sabit} \\ v_x &= v_{\perp} \cos(\Omega_L t + \theta_0) \\ v_y &= -v_{\perp} \sin(\Omega_L t + \theta_0) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Öyle ise  $\phi = \Omega_L t$  kısaltması altında

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + v_{\perp} (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi) \quad (2.27)$$

olur. Burada  $\hat{\mathbf{b}}$  manyetik alan doğrultusundaki birim vektör ve  $\hat{\mathbf{e}}_1$  ile  $\hat{\mathbf{e}}_2$  de  $\hat{\mathbf{b}}$ 'ye dik düzlem içinde birbirine dik kalarak dönen birim vektörlerdir. Bu nedenle  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}} \cos \phi + \hat{\mathbf{j}} \sin \phi$  ve  $\hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\mathbf{i}} \sin \phi + \hat{\mathbf{j}} \cos \phi$  dir. (2.26) denklem sistemini integre ettiğimizde,

$$\begin{aligned} z &= z_0 + v_z t \\ x &= x_0 + \frac{v_{\perp}}{\Omega_L} \sin(\phi + \theta_0) \\ y &= y_0 + \frac{v_{\perp}}{\Omega_L} \cos(\phi + \theta_0) \end{aligned} \quad (2.28)$$

eşitliklerini buluruz.

Başlangıç koşullarını ve faz farkını sıfır aldığımızda (2.28)'de verilen eşitlikler,

$$z = v_z t$$

$$x = \frac{v_{\perp}}{\Omega_L} \sin \phi \quad (2.29)$$

$$y = \frac{v_{\perp}}{\Omega_L} \cos \phi$$

biçiminde yazılır. Parçacığın manyetik alan etrafında dönmesini temsil eden konum vektörüne

$\rho_L$  diyelim. (2.29) dolayısıyla  $\rho_L = \frac{v_{\perp}}{\Omega_L} [\sin \phi \hat{e}_1 + \cos \phi \hat{e}_2]$  olur. Ayrıca

$$\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{b}} = \left[ v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + v_{\perp} (\cos \phi \mathbf{e}_1 - \sin \phi \mathbf{e}_2) \right] \times \hat{\mathbf{b}} = -v_{\perp} (\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) \text{ dir.}$$

Bu iki eşitlikten  $\rho_L = -\frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L}$  elde edilir. Parçacığın tüm hareketinden manyetik alan etrafındaki dönme hareketini çıkarttığımızda parçacığın ilerlemesini temsil eden  $\mathbf{R}$  vektörünü,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \rho_L = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \quad (2.30)$$

şeklinde buluruz.

### 2.2.2. Operatörlerin Dönüşümü ve Vlasov Denkleminin Lineer Operatörü

Vlasov denklemini lineerleştirmek için denklemdaki  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{v}$  vektörlerinin bileşenlerinden yeni koordinatlara geçeceğiz (Catto, 1978; Lee 1983). Yeni koordinatları  $\mathbf{R}$ 'nin bileşenleri ile  $\phi$ ,

$E = \frac{v^2}{2}$  (birim kütlekin kinetik enerjisi) ve  $\mu = \frac{v_{\perp}^2}{2B}$  (manyetik moment) olacak şekilde alarak

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  ile  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$  işlemcilerini bu yeni koordinatlara göre olan kısmi türevler cinsinden yazacağız.

$E = \frac{1}{2}v_{\parallel}^2 + B\mu$  olduğundan  $E$  yerine  $v_{\parallel}$ 'i kullanıyoruz. Zincir kuralı

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2.31)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2.32)$$

verir. (2.30) uyarınca

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \mathbf{v}_{\perp} \times \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \quad (2.33)$$

ve

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} = \left( \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\hat{\mathbf{i}}_x + \hat{\mathbf{j}}_y + \hat{\mathbf{k}}_z) = \hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{I} \quad (2.34)$$

ile  $\mathbf{v}_{\perp}$ 'in  $\mathbf{r}$ 'den bağımsız olması nedeniyle

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{I} - \left[ \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \right] \times \mathbf{v} \quad (2.35)$$

bulunur. İkinci olarak kullanacağımız veriler  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{v}$ 'nin birbirinden bağımsız olması

nedeniyle  $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} = 0$  ve  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = 0$  eşitlikleridir. Buradan

$$0 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp})}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.36)$$

ve

$$\frac{\partial (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}})}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) \quad (2.37)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını önce sağdan  $v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp}$  ile skaler olarak çarpalım ( $\hat{\mathbf{v}}_{\perp}$ ,  $\mathbf{v}_{\perp}$  doğrultusundaki birim vektördür.):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (v_{\perp}^2 \hat{\mathbf{v}}_{\perp}^2) = 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) \cdot v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp} = -2 \frac{\partial (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}})}{\partial \mathbf{r}} \cdot v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \quad (2.38)$$

$v_{\parallel}$  tüm konumlarda aynı aldığından

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (v_{\perp}^2) = -2 v_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \quad (2.39)$$

buluruz. Diğer yandan  $\mu$ 'nün tanımı ile

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{v_{\perp}^2}{2B} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{r}} v_{\perp}^2 + \frac{1}{2B} \frac{\partial v_{\perp}^2}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.40)$$

$$= -\frac{1}{2B^2} (\nabla B) v_{\perp}^2 + \frac{1}{2B} \frac{\partial v_{\perp}^2}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.41)$$

$$= -\frac{1}{B} \nabla B \left( \frac{v_{\perp}^2}{2B} \right) + \frac{1}{2B} \frac{\partial v_{\perp}^2}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.42)$$

$$= -\frac{\mu}{B} \nabla B + \frac{1}{2B} \frac{\partial v_{\perp}^2}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.43)$$

(2.39) eşitliği ile bu sonucu birleştirelim:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\mu}{B} \nabla B + \frac{1}{2B} \left( -2 v_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \right) \quad (2.44)$$

$$= -\frac{\mu}{B} \nabla B - \frac{1}{B} v_{\parallel} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \quad (2.45)$$

Oysa

$$v_{\perp}^2 = v^2 - v_{\parallel}^2 \quad (2.46)$$

dir.  $v^2 = \text{sabit}$  alınırsa,

$$2v_{\perp}^2 \frac{\partial v_{\perp}}{\partial r} = -2v_{\parallel} \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial r} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial r} = -\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\partial v_{\perp}}{\partial r} = -\frac{1}{v_{\parallel}} \left( v_{\perp} \frac{\partial v_{\perp}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{v_{\parallel}} \left( v_{\perp} \frac{\partial v_{\perp}}{\partial r} \right) \quad (2.48)$$

bulunur. (2.37) eşitliğini bir daha kullanıldığında:

$$\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial r} = -\frac{1}{v_{\parallel}} \left( -v_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial r} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \right) = v_{\perp} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial r} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\perp} = \nabla \hat{\mathbf{b}} \cdot (v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) = \nabla \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v}_{\perp} \quad (2.49)$$

Şimdi de (2.37) eşitliğinin her iki yanını,

$$\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp} = \hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi \quad (2.50)$$

ile skaler olarak çarpalım. Eşitliğin sol tarafı  $\mathbf{v} = v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + v_{\perp} (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi)$

$$\frac{\partial}{\partial r} (v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) = \frac{\partial}{\partial r} [v_{\perp} (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi)] \cdot (\hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi + \hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi) \quad (2.51)$$

$$= \left[ \frac{\partial v_{\perp}}{\partial r} (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi) + v_{\perp} \frac{\partial}{\partial r} (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi) \right] \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi) \quad (2.52)$$

$$= (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi) + v_{\perp} \frac{\partial}{\partial r} (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi) \quad (2.53)$$

$$= v_{\perp} \frac{\partial}{\partial r} (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi) \quad (2.54)$$

$$= v_{\perp} \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi \sin \phi + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \cos^2 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_2}{\partial r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \sin^2 \phi - \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_2}{\partial r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi \sin \phi \right] \quad (2.55)$$

Öte yandan  $\hat{e}_i^2 = 1$ ,  $i = 1, 2$  eşitliklerinden  $\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial \mathbf{r}} \cdot \hat{e}_i = 0$  ve  $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$  eşitliğinden de

$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial \mathbf{r}}$  olduğu görülür. Sonuçta,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) = v_{\perp} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \hat{e}_2 \cos^2 \phi - \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial \mathbf{r}} \cdot \hat{e}_1 \sin^2 \phi \right) \quad (2.56)$$

$$= v_{\perp} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} + \hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (2.57)$$

bulunur. Oysa

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (v_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}}) \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) = -v_{\parallel} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) \quad (2.58)$$

dir. Bu iki eşitlikten de

$$v_{\perp} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial \mathbf{r}} \right) = -v_{\parallel} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp}) + \hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.60)$$

elde edilir. Hesaplanan tüm bu değerler, Vlasov denkleminde yerleştirilince

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \left\{ \left[ \mathbf{I} - \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{c} \right) \times \mathbf{v} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} + (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_{\perp} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right\} \quad (2.61)$$

$$+ \frac{e \mathbf{v}}{m c} \times \mathbf{B} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} + \hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \frac{v_{\perp}}{B} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{\hat{\phi}}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right\} = 0$$

biçiminde elde ederiz. Şimdi (2.22) Vlasov denklemini aşağıdaki biçimde yeniden yazalım:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f = 0 \quad (2.62)$$

ve  $f = F_0 + \delta f$   $\mathbf{K} = \frac{e}{m c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  olmak üzere  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{K} + \delta \mathbf{K}$  pertürbasyon yöntemi kullanacağız.

Çalkantılı olmayan  $F_0$  dağılım fonksiyonunun aşağıdaki gibi normal dağılım formuna uyduğu kabul edildi.

$$F_0 = \frac{n(\mathbf{R}_\perp) e^{-\frac{m}{2T(\mathbf{R}_\perp)}(v_\parallel^2 + 2\mu B)}}{(2\pi T(\mathbf{R}_\perp)/m)^{3/2}} \quad (2.63)$$

Burada  $\delta f$  dağılımdan sapmayı ifade eden çalkantı terimidir. Türbülans,  $\delta \mathbf{K} = -\frac{e}{m} \nabla \delta \Phi$

biçimindeki elektriksel potansiyelden kaynaklanmaktadır.  $F_0(\mathbf{R}, \mu, v_\parallel)$  olduğundan  $\frac{\partial F_0}{\partial \phi} = 0$

olur. Böylece pertürbasyon uygulandığında

$$\begin{aligned} & \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F_0(\mathbf{R}, \mu, v_\parallel) + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_0(\mathbf{R}, \mu, v_\parallel) \\ &= \mathbf{v} \cdot \left\{ \left[ \mathbf{I} - \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_\perp} \right) \times \mathbf{v} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_\perp \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} F_0 - \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} F_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\left\{ \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} - \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_\perp} \right) \times \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_\perp \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} F_0 - \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} F_0 \quad (2.65)$$

Böylece

$$\mathbf{v} \cdot \left[ (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_\perp \frac{\partial}{\partial v_\parallel} F_0 + \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \mu} F_0 \right] = \left[ \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_\perp} \right) \times \mathbf{v} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_\perp} F_0 \quad (2.66)$$

elde edilir. Daha önce normal dağılım biçiminde olduğu kabul edilen  $F_0$  dağılım fonksiyonu yukarıdaki denkleme uymaktadır. Ayrıca (2.22) Vlasov denkleminde uygulanan pertürbasyondan gelen çalkantı terimleri için kolayca aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta f + \delta \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f + \delta \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_0 = 0 \quad (2.67)$$

(2.67) eşitliğinin son terimi (2.32)'den faydalanıldığında aşağıdaki gibi yazılır:

$$\delta \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_0 = \delta \mathbf{K} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \hat{\mathbf{b}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} F_0 \quad (2.68)$$

Dağılım fonksiyonunu adyabatik olmayan kısmı  $\delta g$  olmak üzere adyabatik ve adyabatik olmayan kısmı ayırtırmak için

$$\delta f = \delta g - \frac{e \delta \Phi}{T} F_0 \quad (2.69)$$

ifadesi kullanılır. Yukarıdaki (2.69) ifadesi (2.68)'de yerine yazıldığında ve  $\frac{\partial F_0}{\partial \phi} = 0$  olduğu da göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta g + \delta \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta g &= \frac{e F_0}{T} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \delta \Phi \\ + \frac{e \delta \Phi}{T} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) F_0 - \delta \mathbf{K} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \hat{\mathbf{b}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} F_0 & \end{aligned} \quad (2.70)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki ikinci terimin değeri Vlasov denklemi nedeniyle sıfırdır. Aynı denklemin sağ tarafındaki üçüncü teriminde geçen  $F_0$  'ın  $v_{\parallel}$  ve  $\mu$  'ye göre kısmi türevlerini içeren kısmı ise (2.63) denkleminde verilen dağılım kullanılarak

$$\delta \mathbf{K} \cdot \left( \hat{\mathbf{b}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) F_0 = - \frac{e F_0}{T} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta \Phi}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.71)$$

biçiminde elde edilir. Böylece (2.70) denklemini

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta g + \delta \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta g = \frac{e F_0}{T} \frac{\partial}{\partial t} \delta \Phi + \frac{e}{m} \left\{ \frac{\nabla \Phi \times \hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right\} F_0 \quad (2.72)$$

biçimine döndürür.

Bu hesaplanan nicelikler (2.61) ifadesinin sol tarafında yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \frac{d\delta g}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \delta g + \mathbf{v} \cdot \left\{ \left[ \mathbf{I} - \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \mathbf{v} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_\perp \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \delta g \\ - \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{\partial \delta g}{\partial \mathbf{R}} - \Omega_L \frac{\partial \delta g}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2.73)$$

elde edilir. Bu Vlasov denkleminin lineer operatörüdür. Böylece dağılım fonksiyonunun adyabatik kısmı için lineerleştirilmiş Vlasov operatörü,

$$\frac{d\delta g}{dt} \rightarrow \frac{\partial \delta g}{\partial t} + v_\parallel \nabla_\parallel \delta g + \mathbf{v} \cdot \left\{ \begin{aligned} & -\nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_\perp \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \delta g - \Omega_L \frac{\partial \delta g}{\partial \phi} \quad (2.74)$$

biçiminde elde edilir.

### 2.2.3. Gyrokinetik Denklem

Bir önceki kısımda elde edilen lineerleştirilmiş Vlasov operatörünün her bir terimini ortalama olarak yeniden yazmak mümkündür. Bunun için şu ifadeyi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta g}{\partial t} + v_\parallel \nabla_\parallel \delta g + \mathbf{v} \cdot \left\{ -\nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_\perp \frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \delta g \\ - \Omega_L \frac{\partial \delta g}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2.75)$$

$B$  çok büyük olunca  $\Omega_L$  çok büyük olur. Bu nedenle yukarıdaki denklemde son terim içindeki  $\frac{\partial \delta g}{\partial \phi} = 0$  olmalıdır. Yani  $\delta g$ ,  $\phi$ 'ye bağlı değildir. Böylece terim terime ortalama alma amacına uygun olarak bu denklemi  $\phi$  üzerinden 0'dan  $2\pi$ 'ye kadar integre edip, sonucu  $2\pi$  ile bölebiliriz. İlk iki terim değişmeyecektir.

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \mathbf{v} \, d\phi = \int_0^{2\pi} (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{\perp}) \, d\phi \quad (2.76)$$

İntegralin içindeki ifade,

$$\begin{aligned} (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{\perp}) &= v_{\parallel}^2 \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{b}} + v_{\parallel} \mathbf{v}_{\perp} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \\ &+ v_{\parallel} \mathbf{v}_{\perp} \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{b}} + v_{\perp}^2 \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \end{aligned} \quad (2.77)$$

biçiminde hesaplanır. Ortadaki iki terimin  $\phi$  üzerinden  $0$ 'dan  $2\pi$ 'ye kadar integrali sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının integrallerinin lineer toplamı olduğu için bu terimler ortadan kalkar. Birinci terim,  $\phi$ 'ye bağlı değildir. Bu yüzden aynen kalır. Sonuncu terim,  $\phi$ 'ye bağlıdır. Bu yüzden geriye,

$$\int_0^{2\pi} (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times (v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{\perp}) \, d\phi = v_{\parallel}^2 \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{b}} + \int_0^{2\pi} v_{\perp}^2 \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \, d\phi \quad (2.78)$$

kalır. Oysa,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{v}}_{\perp} &= (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi) \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi) \\ &= \cos^2 \phi \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{e}}_1 - \cos \phi \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{e}}_2 - \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &+ \sin^2 \phi \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{e}}_2 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ve aradaki iki terim  $\int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi \, d\phi = 0$  olduğundan düşer ve  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{2}$

olduğundan geriye

$$\frac{1}{2} \left[ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_L} \right) \times \hat{\mathbf{e}}_2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{b}} \times \nabla B}{B} \quad (2.80)$$

kalır. Sonuçta

$$\int_0^{2\pi} (\nu_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\Omega_{\perp}} \right) \times (\nu_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{\perp}) d\phi = \frac{1}{\Omega_{\perp}} \left[ \frac{\nu_{\perp}^2}{2} \frac{\hat{\mathbf{b}} \times \nabla B}{B} + \nu_{\parallel}^2 \hat{\mathbf{b}} \times [(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{b}}] \right] \quad (2.81)$$

elde edilir. Bu son büyüklüğü  $\nu_d$  ile gösterilecektir.  $\mathbf{v} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_{\perp} = \nu_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_{\perp}$  olduğu göz önünde bulundurulduğunda integral altındaki birinci terim yalnızca sinüs ve kosinüs terimlerini içerdiği için ortadan kalkar.

İkinci terime gelince,  $\mathbf{v}_{\perp}$ 'in açık ifadesini yerine konulup integrale edildiğinde sadece sinüsün karesi ve kosinüsün karesini içeren terimlerden  $\frac{1}{2}$  çarpanı katkısı gelir. Diğer terimler sıfır vereceğinden  $\frac{1}{2} [\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2]$  ifadesi elde edilir. Oysa  $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B = 0$  eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{v}_{\perp} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{v}_{\perp} d\phi = -\frac{1}{2B} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B \quad (2.82)$$

bulunur. (2.75) denkleminde çengelli parantezin içinde bulunan son terimin integrali sıfırdır.

Çünkü  $\frac{\partial \delta g}{\partial \phi} = 0$ 'dır. Tüm bu sonuçlar kullanıldığında (2.75) yerini

$$\frac{\partial \delta g}{\partial t} + \nu_{\parallel} \nabla_{\parallel} \delta g + \nu_d \cdot \nabla \delta g + a_{\parallel} \frac{\partial \delta g}{\partial \nu_{\parallel}} = 0 \quad (2.83)$$

ifadesine bırakır. Böylece lineerleştirilmiş Vlasov operatörü,

$$\frac{d\delta g}{dt} \rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu_{\parallel} \nabla_{\parallel} + \nu_d \cdot \nabla \right) \delta g + a_{\parallel} \frac{\partial \delta g}{\partial \nu_{\parallel}} \quad (2.84)$$

biçiminde yazılır. Burada  $a_{\parallel} = \mu \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B$  paralel ayna kuvvetidir. Yukarıda (2.72) denklemindeki lineer olmayan terim için ortalama alındığında

$$\left\langle \delta \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta g \right\rangle = - \left\langle \frac{e}{m} \nabla \delta \Phi \cdot \frac{\partial \delta g}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \approx \frac{c}{B} \hat{\mathbf{b}} \times \nabla \langle \delta \Phi \rangle \cdot \nabla \delta g \quad (2.85)$$

elde edilir.

Bu sonuçları kullandığımızda gyrokinetik denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} + \mathbf{v}_d \cdot \nabla \right) \delta g + a_{\parallel} \frac{\partial \delta g}{\partial v_{\parallel}} + \frac{c}{B} \hat{\mathbf{b}} \times \nabla \langle \delta \Phi \rangle \cdot \nabla \delta g \\ & = \frac{e F_0}{T} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \Phi \rangle - \frac{c}{B} \hat{\mathbf{b}} \times \nabla \langle \delta \Phi \rangle \cdot \nabla F_0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Burada  $\delta g$  dağılım fonksiyonunun adyabatik olmayan kısmının gyro-ortalamasıdır.

Yukarıdaki gyrokinetik denklemde  $\delta g = \delta f + \frac{e}{T} \langle \delta \Phi \rangle F_0$  eşitliği kullanıp, Fourier dönüşümü yapıldığında,

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + i(v_{\parallel} k_{\parallel} + \omega_D(v)) \right) \right] \delta f_k + \left[ \frac{c}{B} \hat{\mathbf{b}} \times \nabla \langle \delta \Phi \rangle \cdot \nabla \delta f \right]_k \\ & = i(\omega_{*T} - v_{\parallel} k_{\parallel} - \omega_D(v)) \frac{e F_0}{T} J_{0k}(v) \delta \Phi_k \end{aligned} \quad (2.87)$$

denkleme ulaşılır (Frieman ve Chen, 1982; Hahm, 1988; Lee, 1983). Burada

$$\omega_{*T} = k_y \frac{cT}{eB} F_0^{-1} \frac{dF_0}{dr} = \omega_{*i} \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \left( 1 + \eta_i \left[ \frac{v^2}{2v_{ii}^2} - \frac{3}{2} \right] \right) \quad (2.88)$$

biçiminde bir kısaltmadır. Bu kısaltmanın içindeki  $\frac{dF_0}{dr}$  ifadesi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{n(r) e^{-\frac{mv^2}{2T(r)}}}{(2\pi T/m)^{3/2}} \right) = \left( \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{3}{2T} \frac{dT}{dr} + \frac{mv^2}{2T} \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) \frac{n(r) e^{-\frac{mv^2}{2T(r)}}}{(2\pi T/m)^{3/2}} \quad (2.89)$$

Böylece Vlasov denkleminde hareket ederek (2.87) gyrokinetik denklem elde edildi. Burada  $T$  sıcaklığı,  $k_{\parallel}$  dalga sayısı vektörünün paralel bileşenini,  $J_{0k}(v)$  sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonunu,  $n(r)$  tanecik sayı yoğunluğunu ve  $\omega_D(v)$  ise  $\nabla B$  eğrilik kayması frekansını ifade etmektedir. Sonuç olarak

$$\delta f_k = \delta g_k \frac{e}{T} J_{0k}(v) \delta \Phi_k F_0 \quad (2.90)$$

ifadesi kullanılarak (2.87) gyrokinetik denklem aşağıdaki gibi yazılır (Kuroda ve diğ., 1998):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + i(v_{\parallel} k_{\parallel} + \omega_D(v)) \right] \delta g_k + \left[ \frac{c}{B} \hat{\mathbf{b}} \times \nabla \langle \delta \Phi \rangle \cdot \nabla \delta g \right]_k = \frac{e F_0}{T} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \omega_{*T} \right) J_{0k}(v) \delta \Phi_k \quad (2.91)$$

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta şudur: Vlasov denklemindeki  $\delta f$  parçacıkların fiziksel uzaydaki dağılım fonksiyonunu ifade eder. Oysa gyrokinetik denklemdeki  $\delta f$  fiziksel uzayda parçacık dağılımını değil, parçacıkların manyetik alan çizgileri çevresindeki hareketleri sırasındaki yörünge merkezleri anlamına gelen “guiding-center” dağılımını ifade eder.

### 2.3. TOROİDAL ITG MODU İÇİN YEREL DAĞINIM BAĞINTISI

Deneylerde gözlenen yoğunluk ve sıcaklık dalgalanmalarının sebebinin plazma sürüklenme dalgaları mikro-kararsızlıkları olduğuna inanılır (Frieman ve Chen, 1982; Smith, 1985; Hahm, 1992). Bu kararsızlıklar; iyon sıcaklık gradiyent modu (ITG) (Mattor ve Diamod, 1989; Hahm ve Tang, 1990; Mattor, 1992), elektron sıcaklık gradiyent modu (ETG) (Kim ve diğ., 2003; Chen, 2005; Idomura, 2006) ve tuzaklanmış elektron modudur (TEM) (Similon ve Diamond, 1984; Gang, 1991; Hahm ve Tang, 1991).

ITG modu iyon sıcaklık gradiyenti ile manyetik alan gradiyentinin paralel olduğu durumda ortaya çıkar. Bu paralellik, bir torus söz konusu olduğunda torusun dış kısmında yani düşük alan kısmında oluşur. Oysa torusun iç kısımlarında manyetik alan gradiyenti ile sıcaklık gradiyenti birbirine ters yöndedir.

Torusun düşük manyetik alan bölgesinde herhangi bir sıcaklık pertürbasyonu ortaya çıkınca,  $\nabla B$  sürüklenmesinin kinetik enerjiye bağlılığı nedeniyle sıcak plazma bölgesindeki parçacıklar soğuk plazma bölgesindeki parçacıklara kıyasla yukarıya doğru daha hızlı sürüklenir. Böylece ortaya bir yük ayrışması çıkar. Bu da bir elektrik alanın doğmasına neden olur. Sonuçta bir  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  sürüklenmesi gelişir. Bu sürüklenme pertürbasyonu daha da büyütür ve kararsız duruma getirir. Oysa kuvvetli alan bölgesinde  $\nabla B$  ile  $\nabla T$  ters yönde olduğundan  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  sürüklenmesi ters yönde olur; başlangıçtaki pertürbasyonu söndürür ve kararlı kılar. ITG kararsızlıklarının uzaysal ölçeği iyon Larmor yarıçapı ile kıyaslanabilir. ITG en kuvvetli taşınım kaynağıdır (Guzdar ve diğ., 1983). Bölüm (2.2)'de gyrokinetik denklemi, yani (2.87) denklemini elde etmiştik. Bu denklemde dalgalanma dağılım fonksiyonunun adyabatik kısmını,

$$\delta f = \delta g - \frac{e}{T} \langle \delta \Phi \rangle F_0 \quad (2.92)$$

biçiminde ayırdığımızda (2.91) denklemini elde ettik. Dalgalanan elektrostatik potansiyelin

Fourier-Laplace dönüşümü  $\delta \phi_{k,\omega} = \int_0^\infty \delta \phi_k(t) e^{i\omega t} dt$  biçimindedir. Benzer bir şekilde  $g$ 'nin  $\delta g_{k,\omega}$

Fourier-Laplace dönüşümü  $\delta g_{k,\omega} = \int_0^\infty \delta g(t) e^{i\omega t} dt$  biçimindedir.

Böylece gyrokinetik denklemi Fourier-Laplace temsilinde  $\omega_{*k}^{T_i} = \omega_{*i} \left[ 1 + \left( \frac{v_\perp^2 + v_\parallel^2}{2v_{Ti}^2} - \frac{3}{2} \right) \eta_i \right]$  ve

$v_{Ti} \equiv \left( \frac{2T_i}{m_i} \right)^{1/2}$  olmak üzere,

$$\delta g_{k,\omega} = \frac{e}{T_i} \delta \phi_{k,\omega} \frac{\omega - \omega_{*k}^{T_i}(\mathbf{v})}{\omega - k_\parallel v_\parallel - \omega_D(\mathbf{v})} F_M(\mathbf{v}) J_0 \left( \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_i} \right) \quad (2.93)$$

biçiminde yazabiliriz.  $\frac{\delta n_e}{n_0} = \frac{e\phi}{T_e}$  adyabatik elektron yanıtı varsayımı (Kim ve diğ., 1994),

$\delta n_e = \delta n_i$  yük nötrlüğü varsayımı ile iyon yoğunluğunun Laplace-Fourier temsili olan

$$\delta n_{i,k,\omega} = -\frac{e\delta\phi_{k,\omega}}{T_i} n_0 + \int \delta g_{k,\omega} J_0 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\theta \quad (2.94)$$

ifadesi (2.93) eşitliğinin yerine yazılmasıyla aşağıdaki biçimi alır:

$$\begin{aligned} \frac{n_0 e \delta\phi_{k,\omega}}{T_e} = & -\frac{e\delta\phi_{k,\omega}}{T_i} n_0 \\ & + \frac{e}{T_i} \delta\phi_{k,\omega} \int \frac{\omega - \omega_{*k}^{T_i}(v)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_D(v)} F_M(v) J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\theta \end{aligned} \quad (2.95)$$

Bu ifade düzenlendiğinde,

$$\left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) = \frac{1}{n_0} \int \frac{\omega - \omega_{*k}^{T_i}(v)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_D(v)} F_M(v) J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\theta \quad (2.96)$$

elde edilir.  $\frac{T_i}{T_e} = \frac{1}{\tau}$  kısaltmasını ve  $F_M(v) = \frac{n_0 e^{-\frac{(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2v_{Ti}^2}}}{(2\pi)^{3/2} v_{Ti}^3}$  Maxwellian dağılımının açık

ifadesini yukarıdaki eşitlikte yerine yazdığımızda,

$$1 + \frac{1}{\tau} - \int \frac{\omega - \omega_{*k}^{T_i}(v)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_D(v)} \frac{e^{-\frac{(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2v_{Ti}^2}}}{(2\pi)^{3/2} v_{Ti}^3} J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\theta = 0 \quad (2.97)$$

buluruz. Böylece dağılım bağıntısı için

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} - \int \frac{\omega - \omega_{*k}^{T_i}(v)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_D(v)} \frac{e^{-\frac{(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2v_{Ti}^2}}}{(2\pi)^{3/2} v_{Ti}^3} J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\theta \quad (2.98)$$

eşitliğine ulaşırız.  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$  olduğundan

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} - \int \frac{\omega - \omega_{*k}^{T_i}(\mathbf{v})}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_D(\mathbf{v})} \frac{e^{-\frac{(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2v_{T_i}^2}}}{\sqrt{2\pi} v_{T_i}^3} J_0^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i}\right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = 0 \quad (2.99)$$

elde edilir. Bu, toroidal ITG modunda dağılım fonksiyonunun adyabatik olmayan kısmı için gyrokinetik denklemden elde edilen dağılım bağıntısıdır.

### 3. MALZEME VE YÖNTEM

#### 3.1.GENELLEŞTİRİLMİŞ PLAZMA DAĞINIM FONKSİYONU VE $I_{nm}$ İNTEGRALLERİ

Plazma fiziğinde yaygın olarak kullanılan plazma dağınım fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir (Fried ve Conte, 1972):

$$Z_m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{x^m e^{-x^2}}{x-z} dx \quad (3.1)$$

Plazma dağınım fonksiyonunu,

$$Z_m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^m z^{k-1} \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right) + z^m Z_0(z) \quad (3.2)$$

biçiminde de yazmak mümkündür (Gürcan, 2014). Plazma dağınım fonksiyonunun yukarıdaki biçimi ve

$$G_m(z_1, z_2) = \frac{Z_m(z_1) - Z_m(z_2)}{z_1 - z_2} \quad (3.3)$$

ifadesi birlikte kullanıldığında, plazma dağılım fonksiyonunu çok değişken için aşağıdaki gibi genelleştirmek mümkün olur (Gautschi, 1970):

$$G_m(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{\parallel}^m e^{-x_{\parallel}^2}}{\prod_{i=1}^n (x_{\parallel} - z_i)} dx_{\parallel} \quad (3.4)$$

Böylece iki değişken için genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonu,

$$G_m(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m e^{-x^2}}{(x-z_1)(x-z_2)} dx \quad (3.5)$$

olarak yazılabilir. Plazma dağılım fonksiyonunun bu genelleştirilmiş biçiminin burada ele alınmasının nedeni, kısım (2.3)'te toroidal ITG modu için gyrokinetik denklemin çözümünden elde edilen dağılım bağıntısının genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları cinsinden yazılabilesidir. Bu amaçla  $\text{Im}[\zeta_\alpha] > 0$ ,  $\{\zeta_\alpha, b\} \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  olmak üzere denklem (3.6)'daki 2 boyutlu integrali göz önüne alalım (Gürcan, 2014) :

$$I_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx_\perp \int_{-\infty}^\infty dx_\parallel \frac{x_\perp^n x_\parallel^m J_0^2(\sqrt{2b}x_\perp) e^{-x_\perp^2}}{\left(x_\parallel^2 + \frac{x_\perp^2}{2} + \zeta_\alpha - \zeta_\beta x_\parallel\right)} \quad (3.6)$$

Bu şekilde tanımlanan  $I_{nm}$  integralini denklem (3.5)'i kullanarak

$$I_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b) = 2 \int_0^\infty dx_\perp \left[ x_\perp^n g_m(x_\perp) J_0(\sqrt{2b}x_\perp)^2 e^{-x_\perp^2} \right] \quad (3.7)$$

biçiminde 1 boyutlu integrale indirgemek mümkündür. Burada  $g_m(x_\perp) = G_m(z_1(x_\perp), z_2(x_\perp))$  olarak tanımlıdır. Kolayca görülebilir ki (3.6) numaralı ifadede içteki integralin altındaki terimin paydası sıfıra eşitlendiğinde kökler,

$$z_{1,2}(x_\perp) = \frac{1}{2} \left( \zeta_\beta \pm \sqrt{\zeta_\beta^2 - 2(x_\perp^2 + 2\zeta_\alpha)} \right) \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Böylece kısım (2.3)'te toroidal ITG modu için gyrokinetik denklemin çözümünden elde edilen dağılım bağıntısı, (3.6) numaraları ifade kullanılarak  $I_{nm}$  integralleri cinsinden yeniden yazılabilir (Gürcan, 2014). Genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonunun değerini bilgisayar ile nümerik olarak hesaplamak için çok hızlı yöntemler vardır. Bu nedenle bilgisayarlarla yapılan nümerik çözümlerin elde edilişi önemli bir oranda hızlanabilmektedir. Sonuçta dağılım bağıntısının  $I_{nm}$  integralleri cinsinden ifade edilmesiyle, iki boyutlu bir integrali hesaplamak yerine bir boyutlu bir integrali hesaplamak yeterli olur.

### 3.2. $I_{nm}$ İNTEGRALLERİ İÇİN ANALİTİK SÜREKLİLİK

Dikkat edilirse (3.6) ifadesi  $\text{Im}[\zeta_a] > 0$  durumu için tanımlandı. Aslında plazma dağılım fonksiyonunu genellikle aşağıdaki analitik süreklilik ile birlikte tanımlanır. Plazma dağılım fonksiyonunun analitik sürekliliği üzerine genel bir tartışma Kim ve diğ. (1994) ve Kuroda ve diğ. (1998) makalelerinde bulunur.

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-v^2}}{v - \zeta} dv + \begin{cases} 0 & \text{Im}(\zeta) > 0 \\ \sqrt{\pi} i e^{-\zeta^2} & \text{Im}(\zeta) = 0 \\ 2\sqrt{\pi} i e^{-\zeta^2} & \text{Im}(\zeta) < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Böyle bir tanımla birlikte plazma dağılım fonksiyonunun kompleks düzlemin her yerinde analitik olması sağlanmış olur. Bu nedenle bir önceki kısımda tanımlanan  $I_{nm}$  integrali için rezidü hesabı yapılarak integralin temel değerine eklenmelidir.

$$I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \mathbf{b}) = I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \mathbf{b})_{\text{Im}[\zeta_a] > 0} + \Delta I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \mathbf{b}) \quad (3.10)$$

Yani (3.6) ifadesi göz önüne alındığında  $\text{Im}[\omega] < 0$  olduğu durumda  $\Delta I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \mathbf{b})$  ifadesi için rezidü hesabı yapılmalıdır. (3.6) denkleminin paydasındaki  $x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} + \zeta_a - \zeta_b x_{\parallel}$  ifadesi,

$$\left( x_{\parallel} - \frac{\zeta_b}{2} \right)^2 - \frac{\zeta_b^2}{4} + \frac{x_{\perp}^2}{2} + \zeta_a = 0 \quad (3.11)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu ifadenin bir elips denklemi ifade ettiğini görmek için aşağıdaki gibi bir düzenleme yapılabilir:

$$\left( x_{\parallel} - \frac{\zeta_b}{2} \right)^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} = \frac{\zeta_b^2}{4} - \zeta_a \quad (3.12)$$

Burada  $x'_{\parallel} = x_{\parallel} - \frac{\zeta_b}{2}$ ,  $x'_{\perp} = \frac{x_{\perp}}{\sqrt{2}}$  ve  $w = \frac{\zeta_b^2}{4} - \zeta_a$  biçiminde dönüşümler yapıldığında (3.12)

ifadesi  $(x'_{\parallel})^2 + (x'_{\perp})^2 = w$  biçiminde bir çember denklemi olarak yazılabilir.

Bu durumda,

$$r = \sqrt{(x'_{\perp})^2 + (x'_{\parallel})^2} \quad (3.13)$$

$$\mu = \frac{x'_{\parallel}}{r} \quad (3.14)$$

dönüşümlerini kullanarak silindirik koordinatlara geçtikten sonra rezidü hesabı yapılacaktır.

Başlangıçta kullanılan değişkenler,  $r$  ve  $\mu$  değişkenleri cinsinden

$$x_{\parallel} = \mu r + \frac{\zeta_b}{2} \quad (3.15)$$

$$x_{\perp} = \sqrt{2(1-\mu^2)}r \quad (3.16)$$

biçiminde yazılır. Eski değişkenlerin diferansiyellerini yeni değişkenlerin diferansiyelleri cinsinden ifade edebilmek için

$$\frac{\partial(x_{\parallel}, x_{\perp})}{\partial(\mu, r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial \mu} & \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial r} \\ \frac{\partial x_{\perp}}{\partial \mu} & \frac{\partial x_{\perp}}{\partial r} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial \mu} \frac{\partial x_{\perp}}{\partial r} - \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial r} \frac{\partial x_{\perp}}{\partial \mu} \quad (3.17)$$

biçimindeki Jacobian hesaplanmalıdır. Her bir terim (3.15) ve (3.16) dönüşümleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial x_{\parallel}}{\partial \mu} = r, \quad \frac{\partial x_{\perp}}{\partial r} = \sqrt{2(1-\mu^2)}, \quad \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial r} = \mu, \quad \frac{\partial x_{\perp}}{\partial \mu} = -\frac{\sqrt{2}r\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (3.18)$$

Bu terimler Jacobianın tanımında yerine yazıldığında

$$\frac{\partial(x_{\parallel}, x_{\perp})}{\partial(\mu, r)} = \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (3.19)$$

elde edilir.

Böylece

$$dx_{\perp} dx_{\parallel} = \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu dr \quad (3.20)$$

ifadesi elde edilir. Eski değişkenler yerine yeni değişkenler (3.6) ifadesinde yerine yazıldığında

$$I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\infty} dr \frac{2^{\frac{n+1}{2}} (1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}} r^{(n+1)} \left(\mu r + \frac{\zeta_b}{2}\right)^m}{(r-\sqrt{w})(r+\sqrt{w})} J_0^2\left(2\sqrt{b(1-\mu^2)}r\right) e^{-2(1-\mu^2)r^2 - \left(\mu r - \frac{\zeta_b}{2}\right)^2} \quad (3.21)$$

elde edilir. Aslında  $I_{nm}$  integralinin elips biçiminde bir dönüşümle yeniden yazılması, tek kutup noktasının  $r = \sqrt{w}$  olduğunun açıkça görülmesini sağlamıştır. Son olarak  $\delta I_{nm} = 2\pi i \text{Res}\{I_{nm}\}$  olarak hesaplandığında

$$\delta I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, b) = -i\sqrt{\pi} 2^{\frac{n+3}{2}} w^{\frac{n-1}{2}} \int_{-1}^1 d\mu \left[ \frac{(1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}} \left(\mu\sqrt{w} + \frac{\zeta_b}{2}\right)^m J_0^2\left(2\sqrt{bw(1-\mu^2)}\right)}{e^{-2(1-\mu^2)w - \left(\mu\sqrt{w} - \frac{\zeta_b}{2}\right)^2}} \right] \quad (3.22)$$

ifadesine ulaşılır (Gürcan, 2014). Böylece integralin temel değerine katkı,

$$\Delta I_{nm}(\zeta_b, \zeta_c, b) = \begin{cases} 0 & \text{Im}[\zeta_c] > 0 \\ \delta I_{nm} \times \frac{1}{2} & \text{Im}[\zeta_c] = 0 \\ 1 & \text{Im}[\zeta_c] < 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

biçiminde olur.

### 3.3. DAĞINIM BAĞINTISININ $I_{nm}$ İNTEGRALLERİ CİNSİNDEN YAZILMASI

Kısım (2.2)'de toroidal ITG modunda dağılım fonksiyonunun adyabatik olmayan kısmı için gyrokinetik denklemden (2.99) dağılım bağıntısı elde edilmiştir. Aşağıdaki

$$\omega_{*k}^{T_i}(\mathbf{v}) = \omega_{*i} \left[ 1 + \left( \frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_{ii}^2} - \frac{3}{2} \right) \eta_i \right] \quad (3.24)$$

$$\omega_D(\mathbf{v}) = 2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i} \frac{1}{2} \left( \frac{v_{\parallel}^2}{v_{ii}^2} + \frac{v_{\perp}^2}{2v_{ii}^2} \right) \quad (3.25)$$

$$L_n^{-1} = -\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \quad (3.26)$$

kısaltmalar (2.99) denkleminde yerine yazıldığında dağılım bağıntısı,

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} - \int \frac{\omega - \omega_{*i} \left[ 1 + \left( \frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_{ii}^2} - \frac{3}{2} \right) \eta_i \right]}{\left[ \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - 2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i} \frac{1}{2} \left( \frac{v_{\parallel}^2}{v_{ii}^2} + \frac{v_{\perp}^2}{2v_{ii}^2} \right) \right]} \frac{e^{-\frac{(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2v_{ii}^2}}}{\sqrt{2\pi} v_{ii}^3} J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (3.27)$$

biçiminde olur. Bu da  $I_{nm}$  integralleri cinsinden yazma hedefi doğrultusunda

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i}} \int \frac{\omega - \omega_{*i} \left[ 1 + \left( x_{\perp}^2 + x_{\parallel}^2 - \frac{3}{2} \right) \eta_i \right]}{\left[ \frac{\omega}{2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i}} + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} x_{\parallel} v_{ii}}{2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i}} + \left( x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} x_{\perp}^2 \right) \right]} e^{-x^2} J_0^2(k_{\perp} \rho_i \sqrt{2} x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} \quad (3.28)$$

biçiminde düzenlenebilir.  $k_{\perp}^2 \rho_i^2 = b$  kısaltmasını ve  $\omega_{Di} = 2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i}$  ifadesini göz önüne aldığımızda yukarıdaki denklem,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k, \omega) = & 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_{Di}} \int \frac{\left[ \omega - \omega_{*i} + \frac{3}{2} \omega_{*i} \eta_i \right] e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{\left[ x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} - \frac{\omega}{\omega_{Di}} + \frac{\sqrt{2}k_{\parallel}v_{ti}}{\omega_{Di}} x_{\parallel} \right]} \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_{Di}} \int \frac{(-\omega_{*i}) x_{\perp}^2 \eta_i e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} - \frac{\omega}{\omega_{Di}} + \frac{\sqrt{2}k_{\parallel}v_{ti}}{\omega_{Di}} x_{\parallel}} \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_{Di}} \int \frac{(-\omega_{*i}) x_{\parallel}^2 \eta_i e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} - \frac{\omega}{\omega_{Di}} + \frac{\sqrt{2}k_{\parallel}v_{ti}}{\omega_{Di}} x_{\parallel}} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Artık bu denklemi (3.6) ifadesindeki  $I_{nm}$  integralleri cinsinden yazmak kolaydır. Bunun için son olarak  $\zeta_{\alpha} = -\frac{\omega}{\omega_{Di}}$  ve  $\zeta_{\beta} = -\frac{\sqrt{2}k_{\parallel}v_{ti}}{\omega_{Di}}$  kısaltmalarını yaptığımızda gyrokinetik denklemin çözümü olan dağılım bağıntısı,

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{\left[ \omega - \omega_{*i} + \frac{3}{2} \omega_{*i} \eta_i \right]}{\omega_{Di}} I_{10} - \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega_{Di}} I_{30} - \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega_{Di}} I_{12} = 0 \tag{3.30}$$

biçiminde elde edilir.

### 3.4. DUPREE REZONANS GENİŞLEMESİ VE YEREL DAĞINIM BAĞINTISI

Türbülansın incelenmesinde kullanılan lineer kararsızlık teorisi kararsız dalgaların enerji yoğunluğunun üstel olarak sonsuza kadar büyüyeceğini verir. Oysa bu büyüme fiziksel açıdan söz konusu değildir. Bu sorunu çözmek için Dupree (1967)'nin geliştirdiği lineer olmayan teorinin ana fikri, Landau rezonansının parçacıkların tuzaklanması ile genişlemesini temel almaktadır. Bu fikrin temel dayanağı ise lineer olmayan teoride başlangıçta dalgaların faz hızından farklı hızlarda hareket eden parçacıkların dalgalar tarafından tuzaklanmasıdır.

Landau rezonansının genişlemesi olayı türbülanslı plazmada parçacıkların yörüngelerinin pertürbasyona uğramalarından kaynaklanır (Dupree, 1967). Sonuçta lineer büyüme lineer olmayan sönüm ile dengelenir.

Kısım (2.2)'de (2.91) ifadesi pertürbe edilmemiş gyrokinetik denklemin Fourier-Laplace temsilindeki biçimidir. Bu denklem G propagatörü,  $G = -\frac{1}{i(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})}$  olmak üzere Balescu (2005)'te aşağıdaki biçimde verilmiştir:

$$-i(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})\delta f_k(\mathbf{v}, \omega) = -i\frac{e}{T}\left[k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega_{*k}^T(\mathbf{v})\right]J_k(\mathbf{v})F_M(\mathbf{v})\delta\phi_k(\omega) \quad (3.31)$$

Dupree (1967) yukarıda sözü edilen problemi çözmek amacıyla makalesinde propagatörün reel kısmını (rezonans fonksiyonu),

$$\frac{k_{\perp}^2 D_D}{(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})^2 + (k_{\perp}^2 D_D)^2} \quad (3.32)$$

biçiminde elde etmiştir. Propagatörün reel kısmının bu şekilde yazılabilmesi propagatörün

$\frac{1}{-i(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) + k_{\perp}^2 D_D}$  olması demektir. İki propagatörü kıyaslayınca Dupree'nin getirdiği

açıklamanın propagatörde bir değişiklik yarattığını ve bu değişikliğin de

$$\omega \rightarrow \omega + ik_{\perp}^2 D_D \quad (3.33)$$

dönüşümü ile gerçekleştiğini görüyoruz.

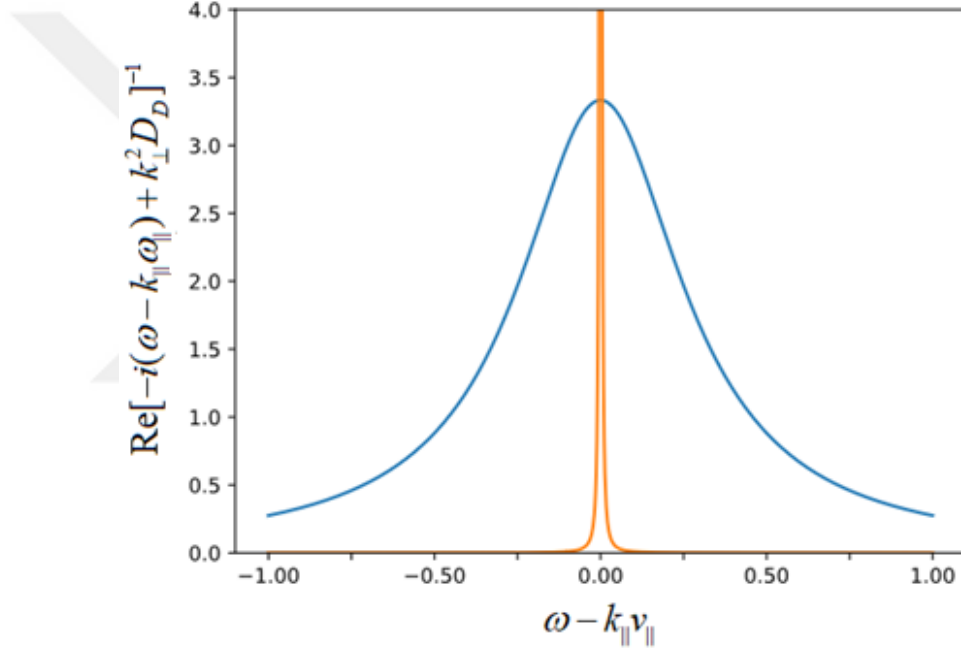
Diğer yandan  $\mathcal{P}$ , *Cauchy esas kısmını* göstermek üzere (Balescu, 2005)  $\varepsilon \rightarrow 0$  için

$$\frac{1}{y-i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{y} + i\pi\delta(y), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{eşitliği yazılabilir. Buna göre propagatörün } \frac{1}{-i(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})}$$

olduğu durumda reel kısmı,

$$\frac{1}{-i(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})} = \pi\delta(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) + i\mathcal{P} \frac{1}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}} \quad (3.34)$$

biçimindedir.



Şekil 3.1: Lorentzian Eğri.

Oysa bildiğimiz üzere Dupree'nin verdiği reel kısım denklem (3.32)'de ifade edildiği gibidir. Pertürbe edilmemiş propagatör bize bir dar ve yüksek bir pik verirken Dupree'nin propagatörü Lorentzian şekle sahiptir. Lorentzian eğri Şekil 3.1'de görüldüğü gibi pikle kıyaslandığında basık ve yaygındır. Dupree'nin temel fikirlerine paralel olarak renormalize edilmiş propagatör Balescu (2005)'te aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{-i(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) + k_{\perp}^2 D_D(\mathbf{v})} \quad (3.35)$$

Renormalize edilmiş propagatörü ve iyon  $\nabla B$  eğrilik kayması frekansını da göz önüne alarak (3.31) gyrokinetik denklemi,

$$\delta f_{k,\omega} = \frac{e}{T_i} \delta \phi_{k,\omega} \frac{\left[ \omega - \omega_{*k}^{T_i}(\mathbf{v}) + ik_{\perp}^2 D_D(\mathbf{v}) \right]}{\left[ (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_D(\mathbf{v})) + iD_D(\mathbf{v}) k_{\perp}^2 \right]} F_M(\mathbf{v}) J_0 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) \quad (3.36)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemi, daha önce pertürbe edilmemiş gyrokinetik denklem için yaptığımız gibi  $\frac{\delta n_e}{n_0} = \frac{e\phi}{T_e}$  adyabatik elektron yanıtı varsayımı,  $\delta n_e = \delta n_i$  yük nötrlüğü varsayımı ile (2.94)'teki iyon yoğunluğunun Laplace-Fourier temsilini kullanarak aşağıdaki gibi buluruz:

$$\left( \frac{T_i}{T_e} + 1 \right) = \frac{1}{n_0} \int \frac{\left[ \omega - \omega_{*k}^{T_i}(\mathbf{v}) + ik_{\perp}^2 D_D(\mathbf{v}) \right]}{\left[ (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_D(\mathbf{v})) + iD_D(\mathbf{v}) k_{\perp}^2 \right]} F_M(\mathbf{v}) J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\theta \quad (3.37)$$

$$\frac{T_i}{T_e} = \frac{1}{\tau} \text{ kısıltmasını ve } F_M(\mathbf{v}) = \frac{n_0 \mathbf{e}}{(2\pi)^{3/2} v_{T_i}^3} e^{-\frac{(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2v_{T_i}^2}} \text{ Maxwellian dağılımının açık ifadelerini (3.37)}$$

pertürbe edilmiş gyrokinetik denklemde yerine yazdığımızda,

$$\varepsilon(k,\omega) = 1 + \frac{1}{\tau} \int \frac{\left[ \omega - \omega_{*k}^{T_i}(\mathbf{v}) + ik_{\perp}^2 D_D(\mathbf{v}) \right]}{\left[ (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_D(\mathbf{v})) + iD_D(\mathbf{v}) k_{\perp}^2 \right]} \frac{e^{-\frac{(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2v_{T_i}^2}}}{\sqrt{2\pi} v_{T_i}^3} J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} \quad (3.38)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede (3.25) kısaltmalarını yerine yazdığımızda

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} - \int \frac{\left[ \omega - \omega_{*i} \left[ 1 + \left( \frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_{ii}^2} - \frac{3}{2} \right) \eta_i \right] + ik_{\perp}^2 D_D(\mathbf{v}) \right] e^{-\frac{(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2v_{ii}^2}} J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_i} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\left[ \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - 2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i} \frac{1}{2} \left( \frac{v_{\parallel}^2}{v_{ii}^2} + \frac{v_{\perp}^2}{2v_{ii}^2} \right) + iD_D(\mathbf{v}) k_{\perp}^2 \right] \sqrt{2\pi} v_{ii}^3} \quad (3.39)$$

biçiminde bir ifade buluruz. Daha önce pertürbe edilmemiş dağılım bağıntısını yazarken izlenen yola benzer bir biçimde dağılım bağıntısını  $I_{nm}$  integralleri cinsinden yazma hedefi doğrultusunda (3.40) biçiminde düzenledik.

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i}} \int \frac{\left[ \omega - \omega_{*i} \left[ 1 + \left( x_{\perp}^2 + x_{\parallel}^2 - \frac{3}{2} \right) \eta_i \right] + ik_{\perp}^2 D_D(x) \right]}{\left[ -\frac{\omega}{2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i}} + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} x_{\parallel} v_{ii}}{2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i}} + \left( x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} x_{\perp}^2 \right) - \frac{iD_D(x) k_{\perp}^2}{2 \frac{L_n}{R} \omega_{*i}} \right]} e^{-x^2} J_0^2(k_{\perp} \rho_i \sqrt{2} x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = & 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_{Di}} \int \frac{\left[ \begin{array}{l} \omega - \omega_{*i} + \frac{3}{2} \omega_{*i} \eta_i \\ + ik_{\perp}^2 D_D \end{array} \right] e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{\left[ \begin{array}{l} x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} - \frac{(\omega + iD_D k_{\perp}^2)}{\omega_{Di}} \\ + \frac{\sqrt{2}k_{\parallel} v_{ti}}{\omega_{Di}} x_{\parallel} \end{array} \right]} \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_{Di}} \int \frac{(-\omega_{*i}) x_{\perp}^2 \eta_i e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} - \frac{(\omega + iD_D k_{\perp}^2)}{\omega_{Di}} + \frac{\sqrt{2}k_{\parallel} v_{ti}}{\omega_{Di}} x_{\parallel}} \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_{Di}} \int \frac{(-\omega_{*i}) x_{\parallel}^2 \eta_i e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} - \frac{(\omega + iD_D k_{\perp}^2)}{\omega_{Di}} + \frac{\sqrt{2}k_{\parallel} v_{ti}}{\omega_{Di}} x_{\parallel}} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu kez  $\zeta_{\alpha} = -\frac{\omega + iD_D k_{\perp}^2}{\omega_{Di}}$  ve  $\zeta_{\beta} = -\frac{\sqrt{2}k_{\parallel} v_{ti}}{\omega_{Di}}$  kısaltmalarını

yaptığımızda pertürbasyona uğramış gyrokinetik denklemin çözümü olan dağılım bağıntısını,

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{\left[ \omega - \omega_{*i} + \frac{3}{2} \omega_{*i} \eta_i + ik_{\perp}^2 D_D \right]}{\omega_{Di}} I_{10} - \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega_{Di}} I_{30} - \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega_{Di}} I_{12} \quad (3.42)$$

biçiminde elde ederiz. Pertürbe edilmemiş durum için (3.30) numaralı dağılım bağıntısında  $\omega \rightarrow \omega + ik_{\perp}^2 D_D$  dönüşümü yapıldığında yukarıdaki ifadenin elde edileceği açıkça görülmektedir.

## 4. BULGULAR

### 4.1. $I_{nm}$ İNTEGRALLERİNİN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR CİNSİNDEN YAZILMASI

Daha önceki kısımlarda  $I_{nm}$  integrallerini tanımlayarak yerel ITG plazma dağılım bağıntısını bu integraller cinsinden yazmanın temel amacı çeşitli nümerik yöntemler için daha uygun olmasıdır. Bu yöntem 2 boyutlu bir integrali hesaplamayı gerektiren (3.27) denklemini, denklem (3.30) ve (3.7)'den açıkça görüldüğü gibi 1 boyutlu bir integrale indirgemeyi sağlamıştır. Aslında bu bir boyutlu integralin içindeki  $I_{nm}$  ifadesi genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları cinsinden yazıldı. Bu nedenle  $I_{nm}$ 'nin bilgisayar programlama yoluyla sayısal olarak hesaplanmasında, bu integrali doğrudan hesaplamak yerine genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları için bilinen hızlı yöntemleri kullanmak mümkün olmaktadır. Sonuçta dağılım bağıntısının 1 boyutlu hali simülasyonlara ve nümerik analiz tekniklerini uygulamaya, doğrudan yapılan hesaplara göre daha uygundur.

Bunun dışında  $I_{nm}$  integrallerini genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları cinsinden ifade etmek yerine matematikte kullanılan daha genel fonksiyonlar cinsinden ifade etmenin de bazı avantajları olacaktır. Her şeyden önce matematikte daha yaygın kullanılan fonksiyonlar için genellikle en hızlı hesaplama yöntemleri biliniyor olduğundan yine bilgisayar programlama ile yapılan nümerik hesaplar açısından hız kazanılacaktır. Bu nedenle  $I_{nm}$  integralleri üzerine ayrıca çalışıldı ve  $I_{nm}$  integralleri, matematikte yaygın olarak kullanılan hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazıldı. Bu nedenle denklem (3.6)'ı yeniden ifade edebilmek için aşağıdaki  $\zeta_{ai} > 0$  için gibi bir integral hesaplandı:

$$\int_0^{\infty} dt e^{it \left( x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} + \zeta_a - \zeta_b x_{\parallel} \right)} = \frac{e^{it \left( x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} + \zeta_a - \zeta_b x_{\parallel} \right)}}{i \left( x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} + \zeta_a - \zeta_b x_{\parallel} \right)} \Big|_0^{\infty} = - \frac{1}{i \left( x_{\parallel}^2 + \frac{x_{\perp}^2}{2} + \zeta_a - \zeta_b x_{\parallel} \right)} \quad (4.1)$$

Buradaki temel fikir, bu integralin sonucunun  $I_{nm}$  integralinin paydasındaki ifadeyi veriyor oluşudur. Bu ilginç özelliği kullandığımızda  $I_{nm}$  fonksiyonları,

$$I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, b) \equiv -\frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx_\perp \int_{-\infty}^\infty dx_\parallel x_\perp^n x_\parallel^m J_0^2(\sqrt{2b}x_\perp) e^{-x^2} e^{it\left(x_\parallel^2 + \frac{x_\perp^2}{2} + \zeta_a - \zeta_b x_\parallel\right)} \quad (4.2)$$

biçiminde yazmak mümkündür. Şimdi  $\text{Im}[\zeta_a] > 0$  için aşağıdaki gibi iki yeni fonksiyon tanımlayalım:

$$F_n(t) = \int_0^\infty dx_\perp J_0^2(\sqrt{2b}x_\perp) x_\perp^n e^{-x_\perp^2(1-it/2)} \quad (4.3)$$

$$G_m(t) = \int_{-\infty}^\infty dx_\parallel x_\parallel^m e^{-x_\parallel^2(1-it) - it\zeta_b x_\parallel} \quad (4.4)$$

Böylece  $I_{nm}$  fonksiyonları,

$$I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, b) \equiv \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt F_n(t) G_m(t) e^{it\zeta_a} \quad (4.5)$$

biçiminde yazılmış olur.  $G_m(t)$  fonksiyonlarını,

$$G_m(t) = \int_{-\infty}^\infty dx_\parallel x_\parallel^m e^{-(1-it)\left[x_\parallel + \frac{it}{1-it} \frac{\zeta_b}{2}\right]^2 + \frac{t^2 \zeta_b^2}{4(1-it)^2}} \quad (4.6)$$

biçiminde düzenleyip  $x \equiv \sqrt{1-it}\left(x_\parallel + \frac{it}{1-it} \frac{\zeta_b}{2}\right)$  şeklinde bir kısaltma ile

$$G_m(t) = \frac{e^{-\frac{t^2 \zeta_b^2}{4(1-it)}}}{\sqrt{1-it}} \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{x}{\sqrt{1-it}} - \frac{it}{(1-it)} \frac{\zeta_b}{2} \right)^m dx e^{-x^2} \quad (4.7)$$

biçiminde yazılabilir.

İntegralin içindeki ifade binom serisine aşağıdaki gibi açılır:

$$\left( \frac{x}{\sqrt{(1-it)}} - \frac{it}{(1-it)} \frac{\zeta_b}{2} \right)^m = \sum_k \binom{m}{k} x^k \frac{(-it)^{m-k}}{(1-it)^{m-\frac{k}{2}}} \frac{\zeta_b^{m-k}}{2^{m-k}} \quad (4.8)$$

Gama integrallerinin tanımını göz önünde bulundurduğumuzda

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} t^{(k-1)/2} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \quad (4.9)$$

eşitliği yazılabilir. Dikkat edilirse  $\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2} dx$  integrali  $k$  'nın tek değerleri için sıfır ve çift değerleri için  $\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$  verir. Bu nedenle genel olarak  $k=2l$  alarak  $G_m(t)$  integralini yeniden

$$G_m(t) = \frac{e^{-\frac{t^2 \zeta_b^2}{4(1-it)}}}{\sqrt{(1-it)}} \sum_{l=0}^{[m/2]} \binom{m}{2l} \frac{(-it)^{m-2l}}{(1-it)^{m-l}} \frac{\zeta_b^{m-2l}}{2^{m-2l}} \Gamma\left(\frac{2l+1}{2}\right) \quad (4.10)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca  $x_1 = \frac{x}{\sqrt{(1-it/2)}}$  dönüşümü yapılırsa  $F_n(t)$  integrali,

$$F_n(t) = \frac{1}{(1-it/2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\infty} x^n dx J_0^2\left(\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{(1-it/2)}} x\right) e^{-x^2} \quad (4.11)$$

biçiminde yazılır. Geometrik serinin bir genelleştirilmesi olan Hipergeometrik seri,

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (4.12)$$

biçiminde veya

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^p \frac{\Gamma(k+a_i)}{\Gamma(a_i)} \prod_{j=1}^q \frac{\Gamma(b_j)}{\Gamma(k+b_j)} \frac{z^k}{k!} \quad (4.13)$$

biçiminde tanımlıdır. Burada  ${}_2F_2$  hipergeometrik fonksiyonu ifade etmek üzere

$$\int_0^{\infty} x^n dx J_0^2(bx) e^{-x^2} = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}; 1, 1; b^2\right) \quad (4.14)$$

eşitliği yazılabilir. Böylece

$$F_n(t) = \frac{1}{(1-it/2)^{\binom{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}; 1, 1; \frac{2b}{(1-it/2)}\right) \quad (4.15)$$

olur.  $F_n(t)$  ve  $G_m(t)$  ifadeleri  $I_{nm}$  fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$I_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, b) = -\int_0^{\infty} dt \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{t^2 \zeta_b^2}{4(1-it)} + it\zeta_a}}{\sqrt{(1-it)}} \frac{1}{(1-it/2)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{2l+1}{2}\right) \times F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}; 1, 1; -\frac{2b}{(1-it/2)}\right) \sum_{l=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2l} \frac{(-it)^{m-2l}}{(1-it)^{m-l}} \frac{\zeta_b^{m-2l}}{2^{m-2l}} \Gamma\left(\frac{2l+1}{2}\right) \quad (4.16)$$

ifadesi elde edilir. Böylece  $I_{nm}$  fonksiyonları genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları cinsinden değil, gama ve hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazılmış oldu.  $I_{nm}$  fonksiyonlarının bu biçimi genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları cinsinden yazılmış formuna göre nümerik hesaplar açısından hız kazandırmaktadır. Bu nedenle bu tezde hesaplanan  $I_{nm}$ 'lerin bu yeni biçimi nümerik hesaplar açısından tercih edilebilir bir seçenek olarak önerilebilir.

## 4.2. DAĞINIM BAĞINTISININ ÇÖZÜMLERİNİ AYRIŞTIRMAK İÇİN NÜMERİK BİR YAKLAŞIM

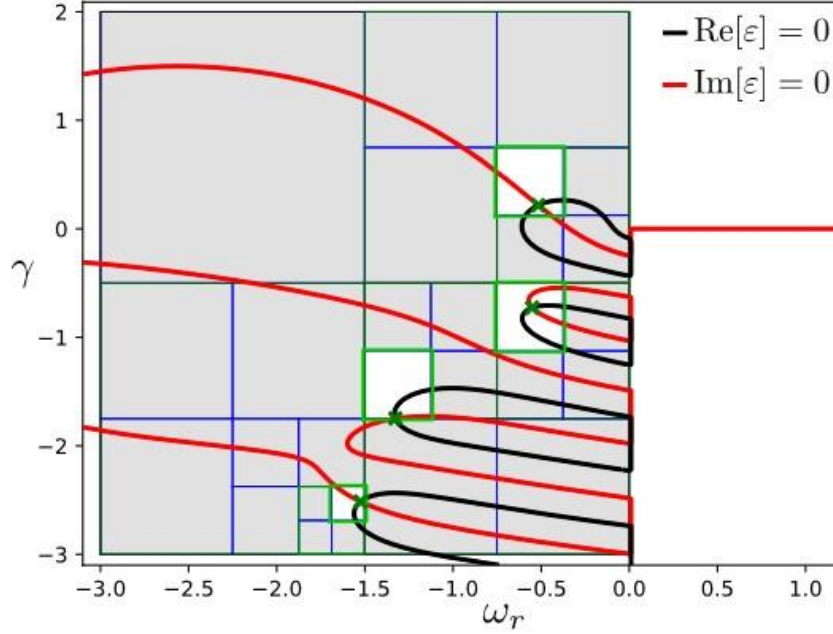
Gyrokinetik denklemin çözümünden elde edilen dağınım bağıntısı daha önce Kısım 3.3'te  $I_{nm}$  integralleri cinsinden denklem (3.30) olarak yazılmıştı.  $I_{nm}$  integralleri cinsinden yazılmış olan dağınım bağıntısı aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\omega_{Di}} \left( I_{10} \left[ \omega + \left( 1 - \frac{3}{2} \eta_i \right) \right] + (I_{30} + I_{12}) \eta_i \right) = 0 \quad (4.17)$$

Bu dağınım bağıntısı  $\tau, \eta_i, \omega_{Di}$  gibi parametrelere fiziksel değerlerini verdiğimizde her bir  $\mathbf{k}$  için  $\omega$ 'ya göre çözülebilir. Burada  $\omega$  komplekstir ve  $\omega = \omega_r + i\gamma$  alınır. Söz konusu çözümü gerçekleştirmek için uygulamada  $k_{\parallel}$  ve  $k_x$ 'i belirler ve  $\omega$ 'yı  $k_y$ 'nin fonksiyonu olarak alırız. Bunu sayısal olarak başarabilmek için çözümün her bir kökünü ayırıştırmak, çözmek ve izlemek için Johnson ve Tucker (2009) makalelerinde anlatılan yonteme benzer bir biçimde sade bir yöntem geliştirip kullandık. (Bu yöntem Davis (1986) ve Bourdelle ve diğ. (2007) kullanılan yonteme benzer.) Kökleri ayırıştırmak için kullandığımız algoritma,

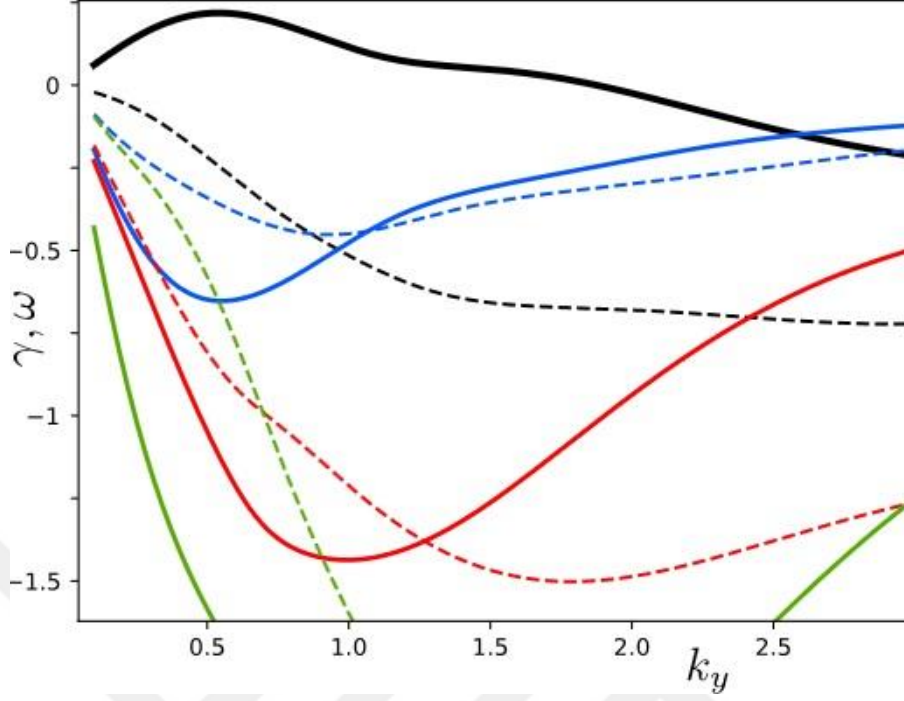
$$\oint_C \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} d\omega = 2\pi i (N - P) \quad (4.18)$$

eşitliğine dayanmaktadır. Burada N ve P sırası ile C ile belirlenene kapalı eğrideki kutupların ve sıfırların sayısını gösterir. Bu yöntemi anlatabilmek için (3.30) denkleminin çözümünden elde ettiğimiz Şekil 4.1'i göz önüne alalım.



**Şekil 4.1:** Yerel Kinetik ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü.

Köklerin farklı olduğunu kabul edip bir referans  $k_y$  değeri olarak başlanır. Bu  $k_y$  değerinin seçilmesi deneme yanılma yöntemine dayanır. Şekil 4.1’de görüldüğü gibi her bir çözümü ayırmak için  $\omega_r = 0$  doğrusunu dışarıda tutmak amacıyla kompleks düzlemin sadece  $\omega_r < 0$  kısmını kapsayan bir başlangıç dikdörtgeni seçilir. İsteddiğimiz sayıda (örneğin  $N_r$  tane) kök belirttiğimizde istenen kök sayıları dikdörtgen içine girene kadar daha büyük ve daha küçük dikdörtgenlerle algoritma kendisini tekrar eder. Daha sonra her biri bir kök içeren  $N_r$  tane dikdörtgen elde edilir. Şekil 4.1’deki karalanmış dikdörtgenler hiç kök içermediğinden hemen göz ardı edilir. Ardından her bir dikdörtgen içindeki kökün yerini tam olarak belirleyebilmek için temel bir en küçük kareler optimizasyonuna dayanan bir Python kodu kullanılarak Şekil 4.1’deki kökler belirlenir. Bazen kök dikdörtgenin sınırına düşebilir. Bu durum da programlamada dikkate alınır. Bundan sonra  $k_y$  değiştirilir  $N_r$  sayıdaki her bir kök için önceki adımlardaki çözümler kullanılarak önceden belirlenen dikdörtgen büyüklüğü ile yeni bir dikdörtgen belirlenir. Her bir dikdörtgen içindeki yeni çözümleri bulmak için en küçük kareler optimizasyonu yeniden kullanılır. Bu farklı kökleri birbirinden ayırmaya yarayan  $\omega = \omega(k_y)$  eğrilerini izlemeye izin verir. Her seferinde ayırma işlemini yenilemek yerine  $\omega$ ’yı  $k_y$ ’nin fonksiyonu olarak izlemek hesaplama zamanını büyük ölçüde kısaltır.



**Şekil 4.2:** Yerel Kinetik ITG Dağılımı Bağıntısının Ayrıştırılmış Kökleri.

Şekil 4.2’de yerel kinetik ITG dağılımı bağıntısının ayrıştırılmış ilk dört kökü farklı renklerde çizdirildi.  $k_y$ ’nin fonksiyonu olarak büyüme oranı  $\gamma$ ’lar düz çizgilerle ve  $\omega$  frekansları kesikli çizgilerle gösterildi.

Burada anlatılan algoritma bilgisayar programlama açısından çeşitli değişikliklerle birlikte ele alınabilir olsa da, burada geliştirilen yöntemin kullanılabilmesinin özünde bazı analitik hesaplar yatmaktadır. Eşitlik (4.18)’in kullanılabilmesi için  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  dağılım fonksiyonunun  $\omega$ ’ya göre birinci türevine ihtiyaç vardır. Oysa denklem (4.17) dağılım fonksiyonu göz önüne alındığında, dağılım fonksiyonunun  $\omega$ ’ya göre birinci türevinin karmaşık yapısı dolayısıyla yeniden  $I_{nm}$  integralleri cinsinden nasıl yazılacağı açık değildir. Çünkü dağılım fonksiyonunun  $\omega$ ’ya göre birinci türevinin paydada 4. dereceli terimleri içereceği aşıkardır. Eğer dağılım fonksiyonu  $I_{nm}$ ’ler cinsinden yazılamazsa bu durum bilgisayar hesaplamalarında yavaşlamaya neden olur ve kullanılan yöntemin simülasyonlar için işlevselliğini azaltır.

### 4.3. $I_{nm}$ İNTEGRALLERİNİN TÜREVİ OLARAK $J_{nm}$ İNTEGRALLERİ

Bir önceki kısımda  $I_{nm}$  integralleri cinsinden yazılmış dağılım bağıntısı denklem (4.17)'de verildi. Aynı zamanda (4.18) eşitliğini kullanmayı gerektiren nümerik yaklaşım için  $\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  ifadesine ihtiyaç vardır. Fakat plazma dağılım fonksiyonunun içindeki  $I_{nm}$  fonksiyonları da  $\omega$ 'nın fonksiyonu olduğu için  $I_{nm}$  fonksiyonlarının da türevlerinin alınması gereklidir. Bu durumda eşitlik (4.17) kullanılarak plazma dağılım fonksiyonunun  $\omega$ 'ya göre türevi,

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega_{Di}} I_{10} + \frac{1}{\omega_{Di}^2} \left( J_{10} \left[ \omega + \left( 1 - \frac{3}{2} \eta_i \right) \right] + (I_{30} + I_{12}) \eta_i \right) \quad (4.19)$$

biçiminde olur. Burada  $J_{nm}$  fonksiyonları ile  $I_{nm}$  fonksiyonları arasındaki ilişki,

$$\frac{\partial I_{nm}}{\partial \omega} = -\frac{1}{\omega_{Di}} J_{nm} \quad \text{ya da} \quad \frac{\partial I_{nm}}{\partial \zeta_a} = -J_{nm} \quad (4.20)$$

biçiminde tanımlandı. Bu durumda  $J_{nm}$ 'nin açık ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$J_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, b) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx_\perp \int_{-\infty}^\infty dx_\parallel \frac{x_\perp^n x_\parallel^m J_0^2(\sqrt{2b}x_\perp) e^{-x^2}}{\left( x_\parallel^2 + \frac{x_\perp^2}{2} + \zeta_a - \zeta_b x_\parallel \right)^2} \quad (4.21)$$

$J_{nm}$  fonksiyonu 2 boyutlu bir integraldir. Üstelik integralin içindeki ifadenin paydası da  $x_\parallel$ 'in 4. dereceli terimini içerir. Bu durum, bilgisayar programlama açısından bilgisayarın nümerik hesaplama hızını ciddi oranda düşüren bir yaklaşım olan  $I_{nm}$  integrallerini 1 boyuta indirgeme çabasını anlamsız kılar. Bu sorunu çözmek amacıyla yukarıdaki  $J_{nm}$  fonksiyonunu da 1 boyutlu bir integral olarak yazabilmek gerekir. Bunun için genelleştirilmiş plazma fonksiyonlarını kullanmak gerekecek.

Bu nedenle  $J_{nm}$  fonksiyonlarını  $I_{nm}$  'deki yaklaşıma benzer bir biçimde aşağıdaki gibi 1 boyutlu bir integrale indirgeyebiliriz:

$$J_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b) = 2 \int_0^\infty dx_\perp \left[ x_\perp^n G_m(z_1, z_2, z_3, z_4) J_0(\sqrt{2b}x_\perp)^2 e^{-x_\perp^2} \right] \quad (4.22)$$

$J_{nm}$  integralinin paydasındaki  $\left( x_\parallel^2 + \frac{x_\perp^2}{2} + \zeta_a - \zeta_b x_\parallel \right)^2$  ifadesi  $x_\parallel$  'e göre çözüldüğünde çakışık kökler olacağından denklem (4.22) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b) = 2 \int_0^\infty dx_\perp \left[ x_\perp^n G_m(z_1, z_2, z_1, z_2) J_0(\sqrt{2b}x_\perp)^2 e^{-x_\perp^2} \right] \quad (4.23)$$

Burada  $G_m(z_1, z_2, \dots, z_n)$  'nin açık tanımı eşitlik (3.4)'te verilmiştir. Öte taraftan eşitlik (3.3) ile de  $G_m(z_1, z_2)$  genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonlarına bağlanmıştır. Fakat  $G_m(z_1, z_2, \dots, z_n)$  ifadesinin genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonlarına nasıl bağlanacağı açık değildir. Bunun için bir yöntem geliştirilmesi gerekti ve bu nedenle aşağıdaki analitik hesaplar yapıldı. Amacımız  $G(z_1, z_2, z_1, z_2)$  için bilgisayarlarda yapılacak sayısal hesaplamalar için kullanışlı bir analitik ifadeye ulaşmaktır.

$$G_m(z_1, z_2) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^m \left( z_1^{k-1} \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right) - z_2^{k-1} \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right) \right)}{(z_1 - z_2)} + \frac{z_1^m Z_0(z_1) - z_2^m Z_0(z_2)}{(z_1 - z_2)} \quad (4.24)$$

eşitliği yazılabilir. Burada  $z_1, z_2$ ,

$$z_{1,2} = z_{1,2}(x, \zeta_\alpha, \zeta_\beta) = \frac{1}{2} \left( \zeta_b \pm \sqrt{\zeta_b^2 - 4\zeta_\alpha - 2x^2} \right) \quad (4.25)$$

biçiminde olur.

Zincir kuralı yardımıyla

$$\frac{d}{d\zeta_\alpha} = \frac{dz_1}{d\zeta_\alpha} \frac{d}{dz_1} + \frac{dz_2}{d\zeta_\alpha} \frac{d}{dz_2} \quad (4.26)$$

biçiminde bir operatör tanımlamak mümkündür. Ayrıca

$$\frac{dz_{1,2}}{d\zeta_\alpha} = \mp \frac{1}{\sqrt{\zeta_b^2 - 4\zeta_\alpha - 2x^2}} = \frac{\mp 1}{z_1 - z_2} \quad (4.27)$$

olur. Bu ifade (4.26)'da tanımlanan operatörde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{d\zeta_\alpha} = \frac{1}{(z_1 - z_2)} \left( \frac{d}{dz_2} - \frac{d}{dz_1} \right) \quad (4.28)$$

elde edilir. Bu operatör  $\frac{d}{d\zeta_\alpha} G_m(z_1, z_2)$  ifadesini hesaplamak için kullanılacaktır. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta_\alpha} G_m(z_1, z_2) &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^m (k-1) (z_1^{k-2} + z_2^{k-2}) \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right)}{(z_1 - z_2)^2} \\ &+ \frac{-(z_1^{m-1} Z_0(z_1) - z_2^{m-1} Z_0(z_2)) - z_1^m Z_0'(z_1) - z_2^m Z_0'(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} \\ &+ \frac{2 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^m \left( z_1^{k-1} \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right) - z_2^{k-1} \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right) \right) + z_1^m Z_0(z_1) - z_2^m Z_0(z_2) \right]}{(z_1 - z_2)^3} \end{aligned} \quad (4.29)$$

olur. Bu ifade toplam sembolünün özelliklerinden faydalanıp, denklem (3.2) tanımını da dikkate alarak  $Z_0'(z_1)$  ve  $Z_0'(z_2)$  türevli ifadelerin de yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\zeta_\alpha} G_m(z_1, z_2) &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^m (k-1)(z_1^{k-2} + z_2^{k-2}) \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right)}{(z_1 - z_2)^2} \\
&+ \frac{-m(z_1^{m-1} Z_0(z_1) + z_2^{m-1} Z_0(z_2)) + 2z_1^m (1 + z_1 Z_0(z_1)) + z_2^m (1 + z_2 Z_0(z_2))}{(z_1 - z_2)^2} \\
&+ \frac{2 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^m (z_1^{k-1} - z_2^{k-1}) \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right) + z_1^m Z_0(z_1) - z_2^m Z_0(z_2) \right]}{(z_1 - z_2)^3}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

biçiminde olur. Son bir düzenlemeyle aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{d}{d\zeta_\alpha} G_m(z_1, z_2) = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \left\{ \begin{aligned} &Z_0(z_1) \left[ -mz_1^{m-1} + 2z_1^{m+1} + \frac{2z_1^m}{(z_1 - z_2)} \right] \\ &+ Z_0(z_2) \left[ -mz_2^{m-1} + 2z_2^{m+1} - \frac{2z_2^m}{(z_1 - z_2)} \right] 2(z_1^m + z_2^m) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^m \left[ \frac{2(z_1^{k-1} - z_2^{k-1})}{(z_1 - z_2)} - (k-1)(z_1^{k-2} - z_2^{k-2}) \right] \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \tag{4.31}$$

Şimdi genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonlarının anlatıldığı kısımda denklem (3.5) ve denklem (4.28) birlikte ele alınırsa  $G_m(z_1, z_2)$  ifadesinin  $\zeta_\alpha$ 'ya göre türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\zeta_\alpha} G_m(z_1, z_2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(z_1 - z_2)} \left[ \begin{aligned} &\frac{d}{dz_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m e^{-x^2}}{(x - z_1)(x - z_2)} dx \\ &-\frac{d}{dz_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m e^{-x^2}}{(x - z_1)(x - z_2)} dx \end{aligned} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(z_1 - z_2)} \left[ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m e^{-x^2}}{(x - z_1)(x - z_2)^2} dx \\ &-\frac{d}{dz_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m e^{-x^2}}{(x - z_1)^2 (x - z_2)} dx \end{aligned} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m e^{-x^2}}{(x - z_1)^2 (x - z_2)^2} dx
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Bu sonuç bize

$$G(z_1, z_2, z_1, z_2) = -\frac{d}{d\zeta_\alpha} G_m(z_1, z_2) \tag{4.33}$$

olduğunu söyler. Böylece  $G(z_1, z_2, z_1, z_2)$  ile  $G_m(z_1, z_2)$  arasında bir ilişki kurulmuş oldu. Bu ilişkiyi kullanarak

$$G(z_1, z_2, z_1, z_2) = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^m \left[ \frac{(k-1)(z_1^{k-2} - z_2^{k-2})}{(z_1 - z_2)} \right] \Gamma\left(\frac{m-k+1}{2}\right) \\ &-2(z_1^m - z_2^m) + Z_0(z_1) z_1^{m-1} \left( m - 2z_1^2 - \frac{2z_1}{(z_1 - z_2)} \right) \\ &+ Z_0(z_2) z_2^{m-1} \left( m - 2z_2^2 + \frac{2z_2}{(z_1 - z_2)} \right) \end{aligned} \right\} \tag{4.34}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem (4.23) denklemindeki  $J_{mm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  integrallerinin 1 boyutlu tanımının içindeki  $G_m(z_1, z_2, z_3, z_4)$  için analitik bir ifadedir.

Böylece  $J_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  integralleri de 1 boyutlu duruma indirgenebilir olduğundan  $\frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  ifadesinin hesaplanması yoluyla bilgisayar programlama ve sayısal analiz teknikleri açısından kullanışlı bir yöntem geliştirilmiş oldu. Bu kısımda yapılan analitik hesapların bir amacı sayısal analiz teknikleri açısından hızlı bir yöntem geliştirmektir. Bir diğer temel amaç ise bu yolla Şekil 4.2'deki gibi yerel kinetik ITG dağılımı bağıntısının ayrıştırılmış köklerini takip etmektir. Ayrıca  $I_{nm}$  fonksiyonları için hesaplanan analitik sürekliliğin de

$$\Delta J_{nm} = -\frac{d}{d\zeta_a} \Delta I_{nm} = \frac{d}{dw} \Delta I_{nm} \quad (4.35)$$

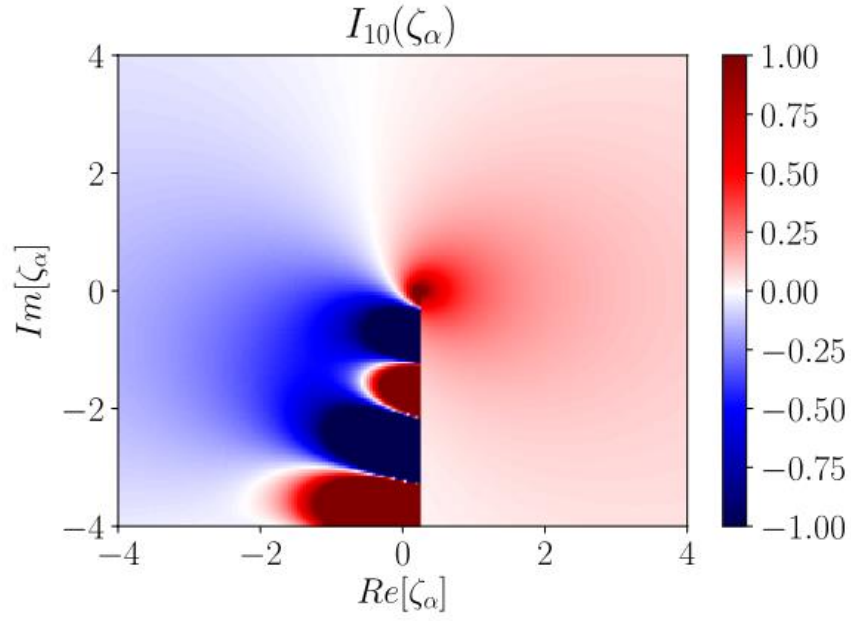
biçiminde türevinin alınması gereklidir. Bu hesap özel bir zorluk içermez ve sonuç basitçe aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta J_{nm} = -i\sqrt{\pi} 2^{\frac{n+3}{2}} \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{n}{2w} + \frac{\mu m}{2\mu w + \sqrt{w}\zeta_b} - 2 + \mu^2 - \frac{\zeta_b}{2} \frac{\mu}{\sqrt{w}} \right) J_0^2 \left( 2\sqrt{bw(1-\mu^2)} \right) \\ - 2\sqrt{\frac{b(1-\mu^2)}{w}} J_0 \left( 2\sqrt{bw(1-\mu^2)} \right) J_1 \left( 2\sqrt{bw(1-\mu^2)} \right) \end{array} \right\} \quad (4.36)$$

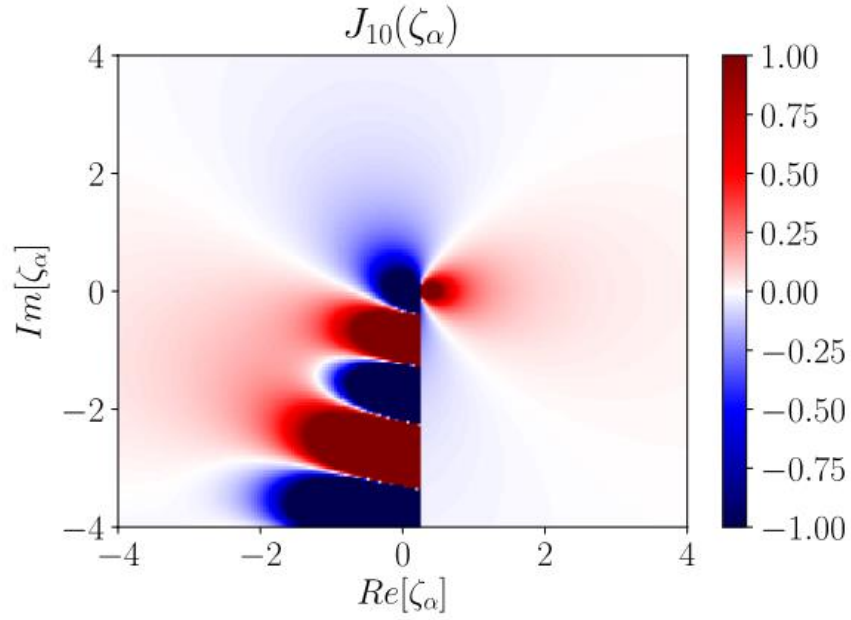
$$w^{n/2} (1-\mu^2)^{\frac{n-1}{2}} \left( \mu\sqrt{w} + \frac{\zeta_b}{2} \right)^m e^{-2(1-\mu^2)w - \left( \mu\sqrt{w} + \frac{\zeta_b}{2} \right)^2} d\mu \times \begin{cases} 0 & \text{Im}[\zeta_a] > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{Im}[\zeta_a] = 0 \\ 1 & \text{Im}[\zeta_a] < 0 \end{cases}$$

Elbette aşağıda sıralanan  $J_{nm}$  grafikleri elde edilirken, bu kısımda hesaplanan  $J_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  nin temel değerine  $J_{nm}$  fonksiyonunun analitik sürekliliği olarak  $\Delta J_{nm}$  ifadesinin eklendi.

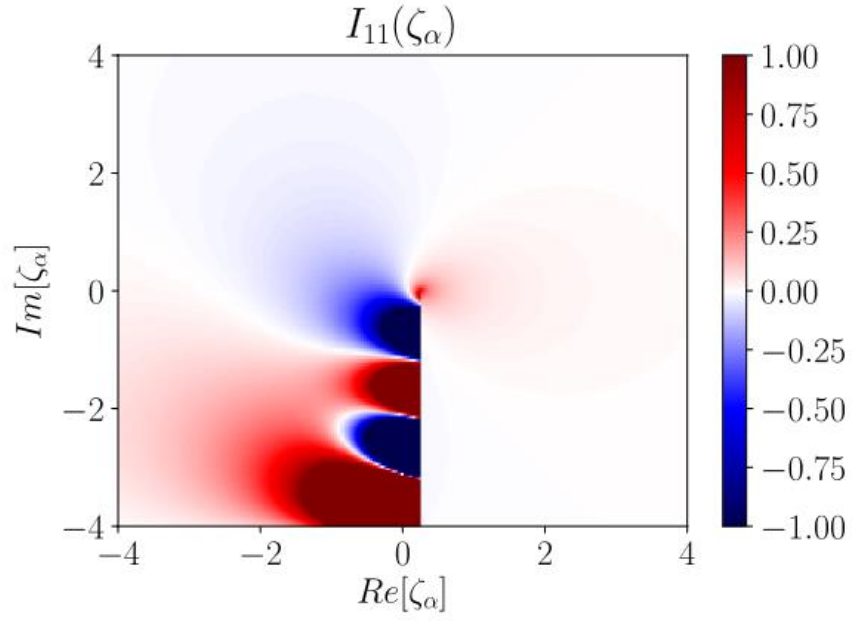
Aşağıdaki grafiklerde  $I_{nm}$  integralleri ile  $J_{nm}$  integralleri  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  parametreleri kullanılarak çizdirildi karşılaştırılmalı olarak sunuldu (Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5, Şekil 4.6, Şekil 4.7, Şekil 4.8, Şekil 4.9, Şekil 4.10, Şekil 4.11, Şekil 4.12, Şekil 4.13, Şekil 4.14).



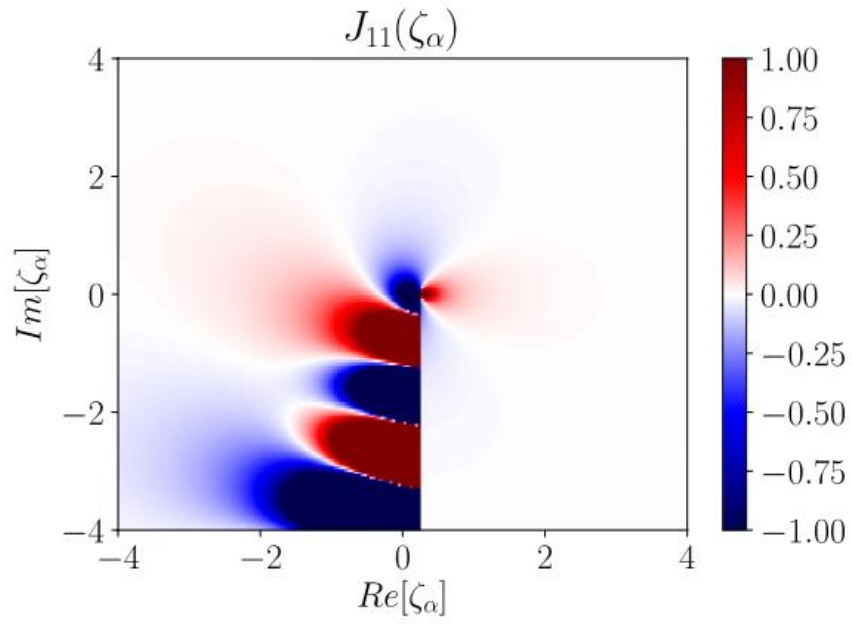
Şekil 4.3:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $I_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



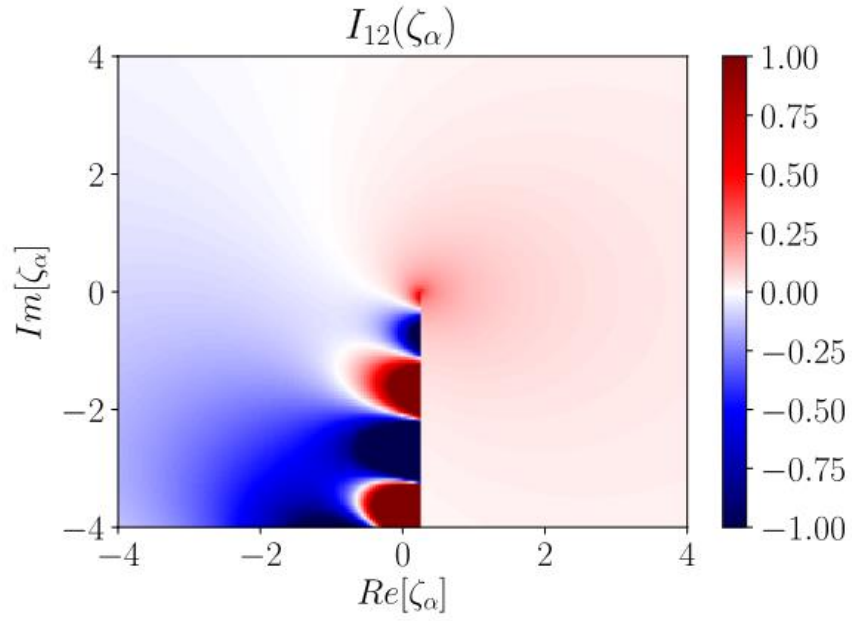
Şekil 4.4:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $J_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



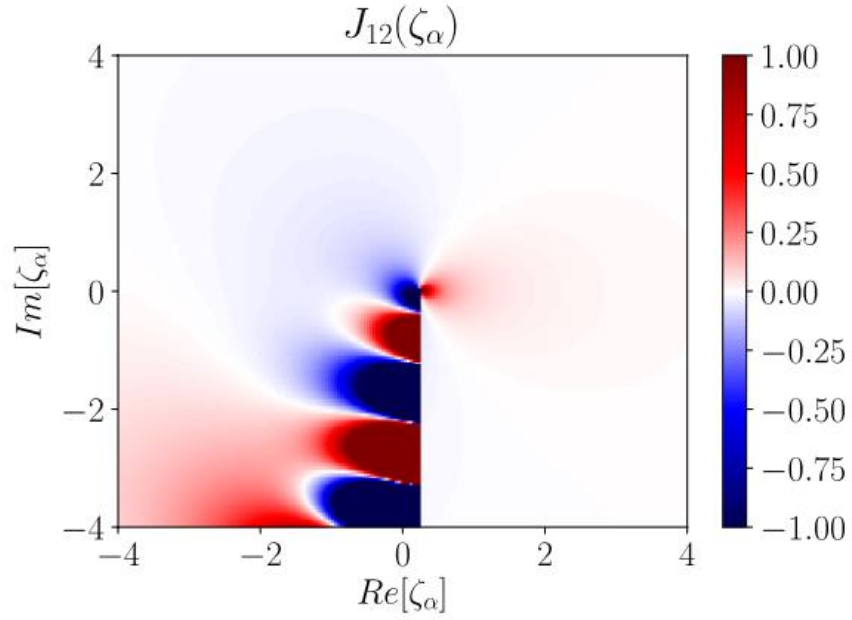
Şekil 4.5:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $I_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



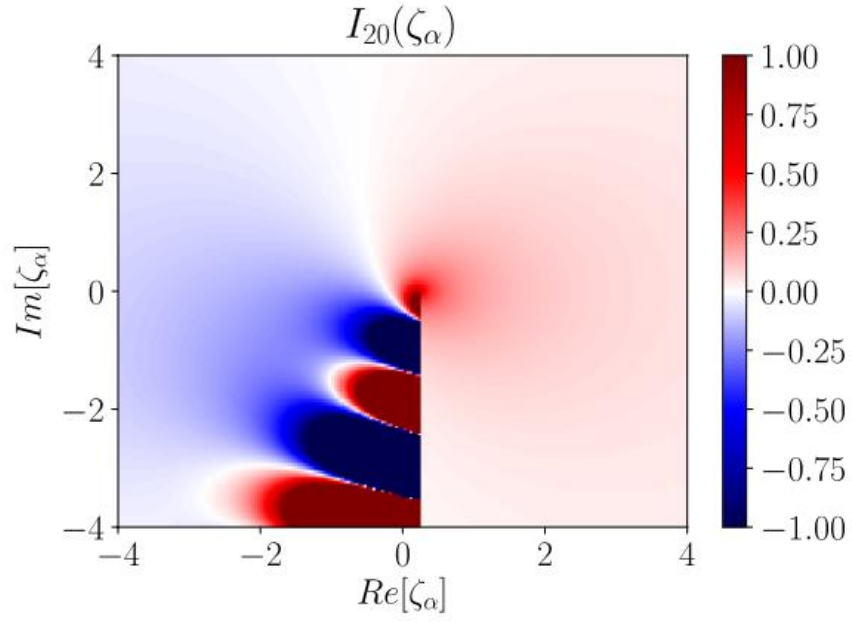
Şekil 4.6:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $J_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



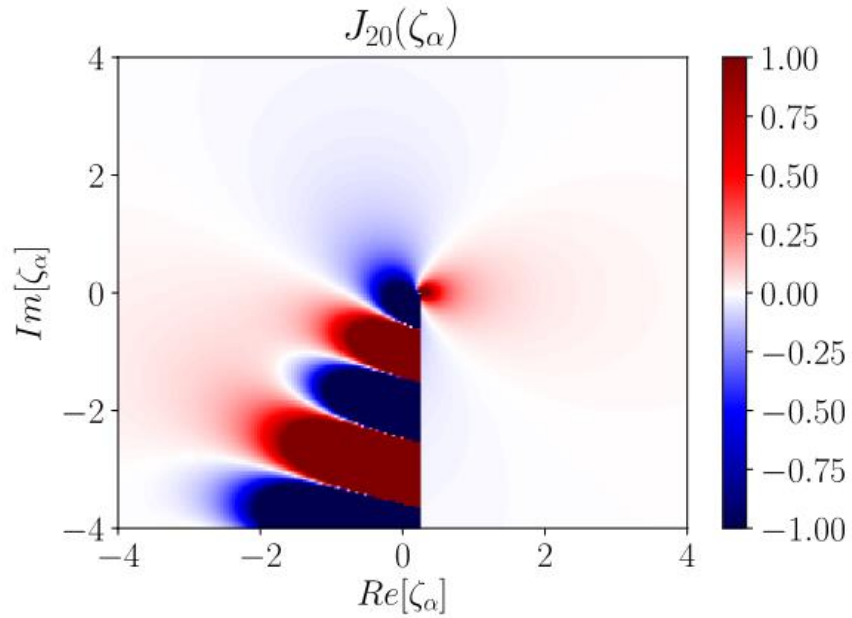
Şekil 4.7:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $I_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



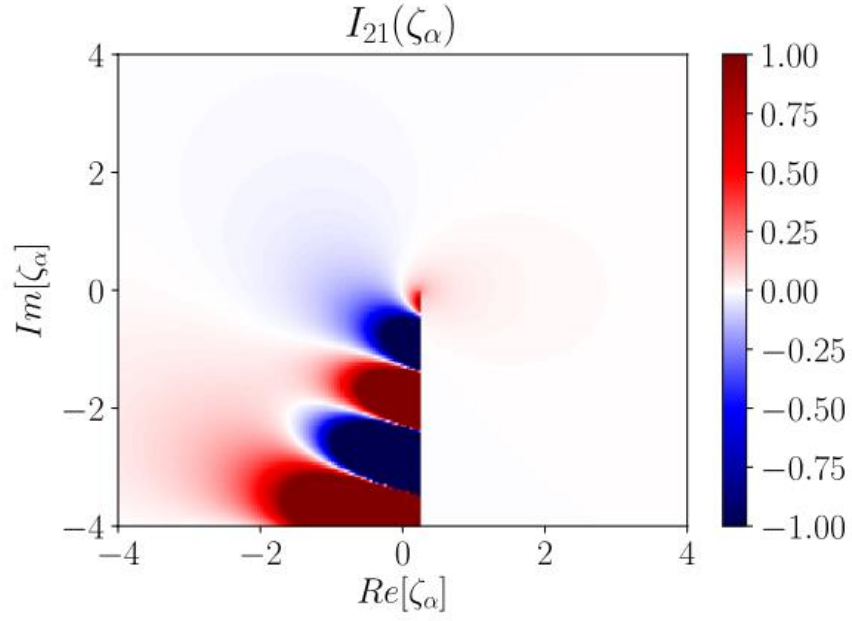
Şekil 4.8:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $J_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



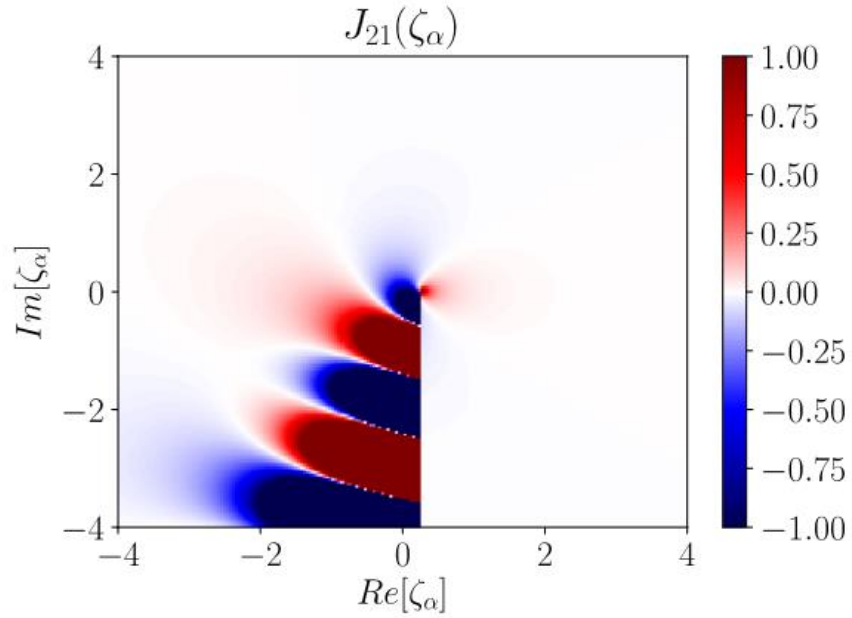
Şekil 4.9:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $I_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



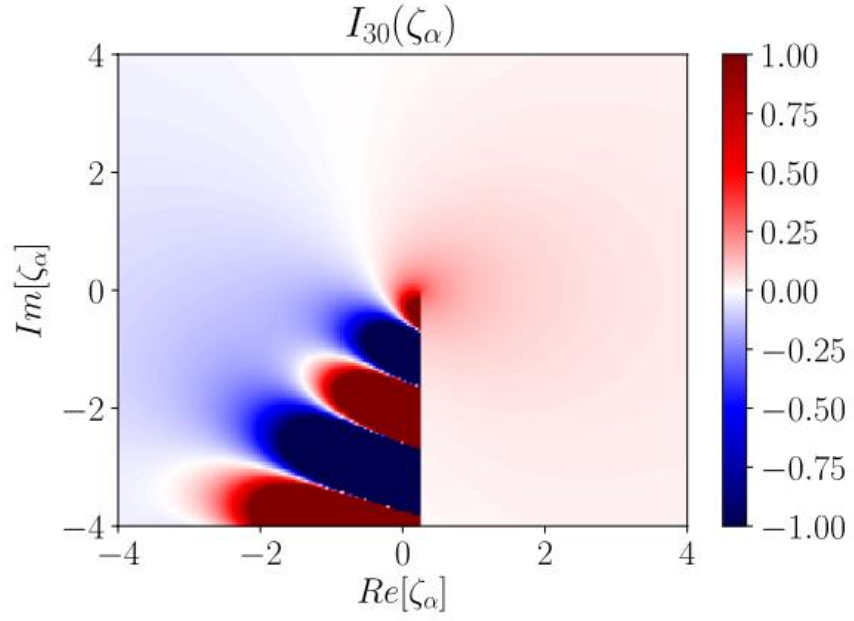
Şekil 4.10:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $J_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



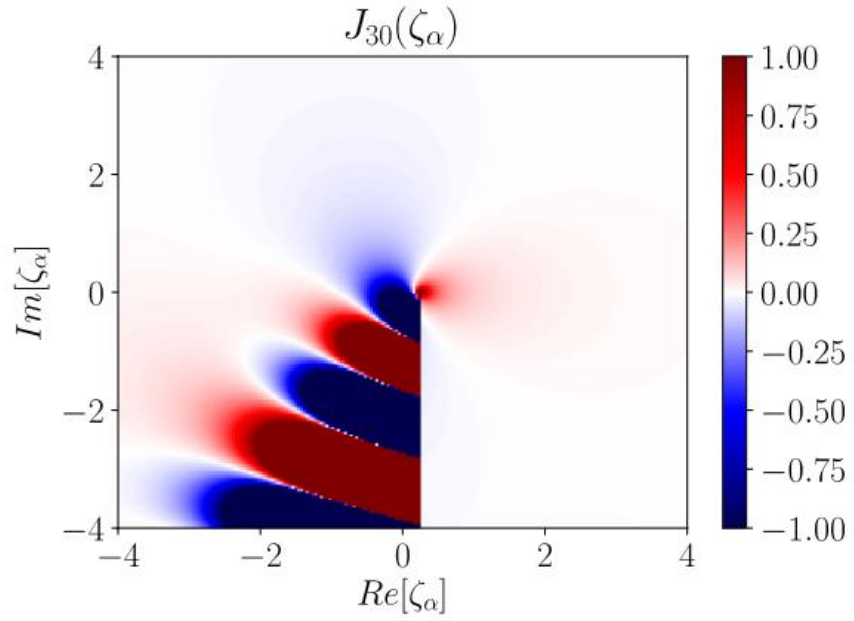
Şekil 4.11:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $I_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



Şekil 4.12:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $J_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



Şekil 4.13:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $I_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



Şekil 4.14:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.0$   $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $J_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .

#### 4.4. RENORMALİZE EDİLMİŞ DAĞINIM BAĞINTISININ $K_{nm}$ İNTEGRALLERİ CİNSİNDEN YAZILMASI

Daha önce lineer kararsızlık teorisinin türbülansın incelenmesi konusunda kararsız dalgaların enerji yoğunluğunun üstel olarak sonsuza kadar büyüyeceğini verdiği, buna karşın Dupree'nin lineer olmayan teorisinin bu büyümeyi lineer olmayan sönümle dengelediği tartışılmıştı. Kısım (3.4)'de bu lineer olmayan sönümün  $\varepsilon(k, \omega)$  ifadesinde bulunan  $D_D$  terimi ile karşılandığı görülebilir. Uygulamada  $D_D$  terimini sabit alarak çözüm yapmak mümkün olsa da literatürde bu terimin  $D_D(\mathbf{v})$  biçiminde bir bağımlılığı olduğu bilinmektedir. Balescu (2005), bu terimin açık ifadesini

$$D_D(\mathbf{v}) = \frac{c^2}{B^2} \frac{1}{2\pi} \int dk d\omega \varepsilon_{\perp k} \frac{[J_k(\mathbf{v})]^2}{i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) + k_{\perp}^2 D_D(\mathbf{v})} \quad (4.37)$$

olarak vermektedir. Bu tezde  $D_D$  teriminin  $D_D(\mathbf{v}) = d_0 + d_1 v_{\parallel} + d_2 v_{\parallel}^2 + d_3 v_{\perp} + d_4 v_{\perp}^2$  biçiminde bir polinom yapısına sahip olduğu varsayıldı. Bu varsayımın gerekçesi ve sonuçları ileride tartışılacaktır. Bu varsayım altında (3.40) denklemini aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_{Di}} \int \left[ \frac{\omega - \omega_{*i} \left[ 1 + \left( x_{\perp}^2 + x_{\parallel}^2 - \frac{3}{2} \right) \eta_i \right] + ik_{\perp}^2 (d_0 + d_1 v_{\parallel} + d_2 v_{\parallel}^2 + d_3 v_{\perp} + d_4 v_{\perp}^2)}{-\frac{\omega}{\omega_{Di}} + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} x_{\parallel} v_{ii}}{\omega_{Di}} + \left( x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} x_{\perp}^2 \right)} \right] e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b} x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} \quad (4.38)$$

İlk olarak  $x_{\parallel} = \frac{v_{\parallel}}{\sqrt{2} v_{ti}}$  ve  $x_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\sqrt{2} v_{ti}}$  kısaltmalarını yeniden göz önünde bulundurarak

(4.38) denklemi,

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_{\text{Di}}} \int \left[ \frac{\omega - \omega_{*i} \left[ 1 + \left( x_{\perp}^2 + x_{\parallel}^2 - \frac{3}{2} \right) \eta_i \right] + ik_{\perp}^2 \left( d_0 + d_1 x_{\parallel} \sqrt{2} v_{ii} + d_2 x_{\parallel}^2 2v_{ii}^2 + d_3 x_{\perp} \sqrt{2} v_{ii} + d_4 x_{\perp}^2 2v_{ii}^2 \right)}{\omega_{\text{Di}} + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} x_{\parallel} v_{ii}}{\omega_{\text{Di}}} + \left( x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} x_{\perp}^2 \right)} - \frac{i \left( d_0 + d_1 x_{\parallel} \sqrt{2} v_{ii} + d_2 x_{\parallel}^2 2v_{ii}^2 + d_3 x_{\perp} \sqrt{2} v_{ii} + d_4 x_{\perp}^2 2v_{ii}^2 \right) k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}}} \right] e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} \quad (4.39)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifadeyi genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları cinsinden yazmak için bir bazı düzenlemeler yapmak gerekmektedir. Amaca uygun bir biçimde (4.39) denkleminde integralin içindeki ifade aşağıdaki gibi 5 integralden oluşacak şekilde parçalanabilir:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \left[ \frac{\omega - \omega_{*i} + \frac{3}{2} \omega_{*i} \eta_i + ik_{\perp}^2 d_0}{\omega_{\text{Di}} - id_4 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\parallel}^2 + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{ii} - id_1 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp}^2 + \frac{id_3 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\parallel} - \frac{\omega + id_0 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp} \right] e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \left[ \frac{ik_{\perp}^2 d_3 \sqrt{2} v_{ii}}{\omega_{\text{Di}} - id_4 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\parallel} + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{ii} - id_1 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp}^2 + \frac{id_3 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\parallel} - \frac{\omega + id_0 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp} \right] e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \left( ik_{\perp}^2 d_4 2v_{ii}^2 - \omega_{*i} \eta_i \right) x_{\perp}^2 e^{-x^2} J_0^2 \left( \sqrt{2b} x_{\perp} \right) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} \\
& \left[ \frac{x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{Di}} - id_4 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp}^2 + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{ii} - id_1 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\parallel}}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp} - \frac{id_3 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp} - \frac{\omega + id_0 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} \right] \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \left( ik_{\perp}^2 d_2 2v_{ii}^2 - \omega_{*i} \eta_i \right) x_{\parallel}^2 e^{-x^2} J_0^2 \left( \sqrt{2b} x_{\perp} \right) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} \\
& \left[ \frac{x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{Di}} - id_4 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp}^2 + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{ii} - id_1 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\parallel}}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp} - \frac{id_3 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp} - \frac{\omega + id_0 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} \right] \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \left( ik_{\perp}^2 d_1 \sqrt{2} v_{ii} \right) x_{\parallel} e^{-x^2} J_0^2 \left( \sqrt{2b} x_{\perp} \right) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel} \\
& \left[ \frac{x_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{Di}} - id_4 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp}^2 + \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{ii} - id_1 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\parallel}}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp} - \frac{id_3 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} x_{\perp} - \frac{\omega + id_0 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} \right]
\end{aligned}$$

Burada  $\Upsilon \equiv \frac{\omega_{\text{Di}}}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2}$  biçiminde bir kısaltmadır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\zeta_b & \equiv \frac{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{ii} - id_1 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} & \zeta_d & \equiv \frac{\frac{1}{2} \omega_{\text{Di}} - id_4 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} \\
\zeta_c & \equiv -\frac{id_3 \sqrt{2} v_{ii} k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} & \zeta_a & \equiv -\frac{\omega + id_0 k_{\perp}^2}{\omega_{\text{Di}} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

kısaltmaları yapıldığında (4.40) denklemini, (4.42) gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = & 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \frac{\left[ \omega - \omega_{*i} + \frac{3}{2} \omega_{*i} \eta_i + ik_{\perp}^2 d_0 \right] e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{\left[ x_{\parallel}^2 + \zeta_a + \zeta_b x_{\parallel} + \zeta_c x_{\perp} + \zeta_d x_{\perp}^2 \right]} \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \frac{\left( ik_{\perp}^2 d_3 \sqrt{2v_{ii}} \right) x_{\perp} e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{\left[ x_{\parallel}^2 + \zeta_a + \zeta_b x_{\parallel} + \zeta_c x_{\perp} + \zeta_d x_{\perp}^2 \right]} \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \frac{\left( ik_{\perp}^2 d_4 2v_{ii}^2 - \omega_{*i} \eta_i \right) x_{\perp}^2 e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{\left[ x_{\parallel}^2 + \zeta_a + \zeta_b x_{\parallel} + \zeta_c x_{\perp} + \zeta_d x_{\perp}^2 \right]} \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \frac{\left( ik_{\perp}^2 d_2 2v_{ii}^2 - \omega_{*i} \eta_i \right) x_{\parallel}^2 e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{\left[ x_{\parallel}^2 + \zeta_a + \zeta_b x_{\parallel} + \zeta_c x_{\perp} + \zeta_d x_{\perp}^2 \right]} \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Upsilon}{\omega_{\text{Di}}} \int \frac{\left( ik_{\perp}^2 d_1 \sqrt{2v_{ii}} \right) x_{\parallel} e^{-x^2} J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) x_{\perp} dx_{\perp} dx_{\parallel}}{\left[ x_{\parallel}^2 + \zeta_a + \zeta_b x_{\parallel} + \zeta_c x_{\perp} + \zeta_d x_{\perp}^2 \right]} \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Elde edilen bu ifadeyi genelleştirilmiş plazma fonksiyonları cinsinden yazabilmek için  $\text{Im}[\zeta_a] > 0, \{\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b\} \in \mathbb{R}, n \geq 1$  olmak üzere aşağıdaki gibi iki boyutlu bir integral tanımlandı:

$$K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{\parallel} \frac{x_{\perp}^n x_{\parallel}^m J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}) e^{-x^2}}{\left[ x_{\parallel}^2 + \zeta_a + \zeta_b x_{\parallel} + \zeta_c x_{\perp} + \zeta_d x_{\perp}^2 \right]} \tag{4.43}$$

Bu iki boyutlu integral daha önce  $I_{nm}$  integralleri için kullanılan tekniğe benzer bir şekilde,

$$K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b}) = 2 \int_0^{\infty} dx_{\perp} \left[ x_{\perp}^n g_m(x_{\perp}) J_0(\sqrt{2b}x_{\perp})^2 e^{-x_{\perp}^2} \right] \tag{4.44}$$

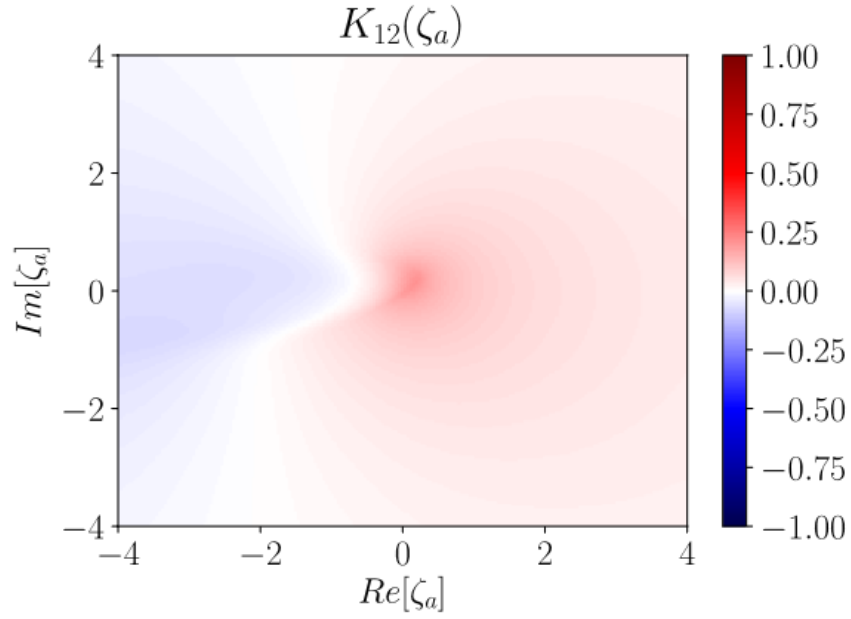
olmak üzere tek boyutlu bir integrale indirgemek mümkündür. Burada  $g_m(x_{\perp}) = G_m(z_1(x_{\perp}), z_2(x_{\perp}))$  olmak üzere  $z_1$  ve  $z_2$  kökleri,

$$z_{1,2}(x_{\perp}) = \frac{1}{2} \left( -\zeta_b \mp \sqrt{\zeta_b^2 - 4(\zeta_c x_{\perp} + \zeta_d x_{\perp}^2 + \zeta_a)} \right) \quad (4.45)$$

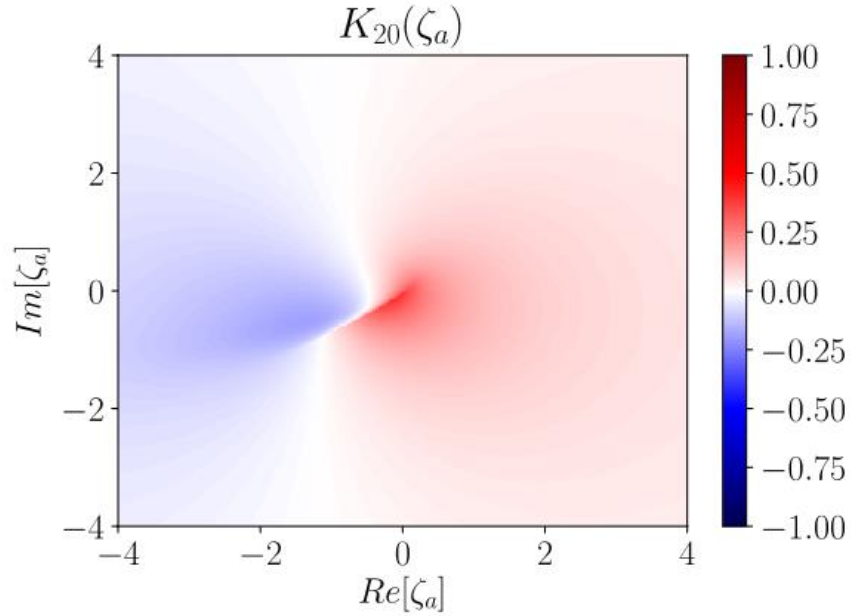
biçiminde olur.

Öte taraftan  $K_{nm}$  integralinin paydasını sıfır yapan değerler integralin alındığı aralık içinde kaldığından  $K_{nm}$  integralleri için analitik süreklilik hesabı yapılmalıdır. Bir sonraki kısımda yapılan bu hesap sunulacak olsa da, analitik süreklilik hesabının etkisinin açıkça görülebilmesi için analitik süreklilik hesabını eklemeyen, sadece integralin temel değerinden gelen katkıyı göz önünde bulundurarak, yatay eksen  $\zeta_a$  değişkeninin reel kısmı ve düşey eksen de  $\zeta_a$  değişkeninin sanal kısmı olmak üzere örnek oluşturması bakımından  $K_{12}$  ve  $K_{20}$  fonksiyonlarının grafikleri çizildi (Şekil 4.15, Şekil 4.16).

$\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  parametreleri için  $K_{12}$  Şekil 4.15'de,  $K_{20}$  Şekil 4.16'da, Python kullanılarak çizdirilmiştir. Analitik süreklilik hesaplara dahil edilmelidir. Grafikler üzerindeki beyaz süresiz bölgeler analitik sürekliliğin hesaplara henüz dahil edilmemesinden kaynaklanmaktadır. Bir sonraki kısımda ise analitik süreklilik hesaplanıp integralin temel değerine eklenerek çeşitli parametreler için  $K_{nm}$  grafikleri çizdirildi.



**Şekil 4.15:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin Analitik Sürekliliğin Hesaba Dahil Edilmediği Durumda  $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



**Şekil 4.16:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin Analitik Sürekliliğin Hesaba Dahil Edilmediği Durumda  $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .

Pertürbasyondan kaynaklanan dağılım fonksiyonunun, adyabatik olmayan kısmı için yazılan ve eğrilik terimi ile yeniden düzenlenen, renormalize olan gyrokinetik denklemden elde edilen toroidal ITG modundaki lineer dağılım bağıntısının çözümünden bulunan  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  ifadesi  $K_{nm}$  integralleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = & 1 + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\omega_{Di} - id_2 2v_{ii}^2 k_{\perp}^2} \left[ \left( \omega - \omega_{*i} + \frac{3}{2} \omega_{*i} \eta_i + ik_{\perp}^2 d_0 \right) K_{10} \right. \\ & + \left( ik_{\perp}^2 d_3 \sqrt{2} v_{ii} \right) K_{20} + \left( ik_{\perp}^2 d_4 2v_{ii}^2 - \omega_{*i} \eta_i \right) K_{30} + \left( ik_{\perp}^2 d_2 2v_{ii}^2 - \omega_{*i} \eta_i \right) K_{12} \\ & \left. + \left( ik_{\perp}^2 d_1 \sqrt{2} v_{ii} \right) K_{11} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  ifadesini  $K_{nm}$  integralleri cinsinden yazmanın temel amacı bilgisayar programlama ile uygulanan sayısal analiz yöntemleri için hesaplama sürelerinde önemli bir hızlanma elde edilmesidir. Bu yaklaşım sadece programcılık açısından hız kazandırmayacak aynı zamanda bu şekilde bir dağılım bağıntısının çeşitli simülasyonlarda ve sayısal analiz tekniklerinde kullanımını da bir fiziksel yaklaşım olarak daha tercih edilebilir kılacaktır. Bu tezde uygulanan bütün sayısal analiz yöntemlerinden elde edilen çözümler, ilgili dağılım bağıntısının  $I_{nm}$  ya da  $K_{nm}$  integralleri sayesinde genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonları cinsinden yeniden yazılması ile mümkün olmuştur.

#### 4.5. ANALİTİK SÜREKLİLİK VE $K_{nm}$ İNTEGRALLERİ

Plazma dağılım fonksiyonu kompleks düzlemin her yerinde analitik olmadığı için bir önceki kısımda tanımlanan  $K_{nm}$  integralleri için rezidü hesabı yapılarak integralin temel değerine eklenmelidir.

$$K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b}) = K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b})_{td} + \Delta K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b}) \quad (4.47)$$

Burada  $K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b})_{td}$  integralin temel değeridir ve  $\Delta K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b})$  ise rezidüel hesaptan gelir. (4.43) denkleminde integral içindeki ifadenin paydası,

$$x_{\parallel}^2 + \zeta_a + \zeta_b x_{\parallel} + \zeta_c x_{\perp} + \zeta_d x_{\perp}^2 \quad (4.48)$$

biçimindedir.

Bu ifadede  $\zeta_b, \zeta_c, \zeta_d$  değerleri kompleks olduklarından  $\zeta_b = \zeta_{br} + i\zeta_{bi}$ ,  $\zeta_c = \zeta_{cr} + i\zeta_{ci}$  ve  $\zeta_d = \zeta_{dr} + i\zeta_{di}$  biçiminde ayrıştırılmalıdır. Böylece (4.48) ifadesi,

$$\begin{aligned} & \left( x_{\parallel} + \frac{\zeta_{br}}{2} \right)^2 + \zeta_{dr} x_{\perp}^2 + \zeta_{cr} x_{\perp} + i\zeta_{di} x_{\perp}^2 + \zeta_{ci} x_{\perp} \\ & + i\zeta_{bi} \left( x_{\parallel} + \frac{\zeta_{br}}{2} \right) - \frac{\zeta_{br}^2}{4} - i \frac{\zeta_{bi} \zeta_{br}}{2} + \zeta_a \end{aligned} \quad (4.49)$$

biçiminde yazılır. Sanal ve reel kısımlar uygun şekilde düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} & \left( x_{\parallel} + \frac{\zeta_{br}}{2} \right)^2 + \left( \sqrt{\zeta_{dr}} x_{\perp} \right)^2 + \zeta_{cr} x_{\perp} + i \left( \zeta_{ci} x_{\perp} + \zeta_{di} x_{\perp}^2 \right) \\ & + i\zeta_{bi} \left( x_{\parallel} + \frac{\zeta_{br}}{2} \right) - \frac{\zeta_{br}^2}{4} - i \frac{\zeta_{bi} \zeta_{br}}{2} + \zeta_a \end{aligned} \quad (4.50)$$

ifadesi elde edilir.

$$\rho = \sqrt{\left( x_{\parallel} + \frac{\zeta_{br}}{2} \right)^2 + \left( \sqrt{\zeta_{dr}} x_{\perp} \right)^2} \quad (4.51)$$

biçiminde bir dönüşüm yapıлып

$$\mu \equiv \left( x_{\parallel} + \frac{\zeta_{br}}{2} \right) / \rho \quad (4.52)$$

olarak tanımlanırsa (4.51) eşitliğinden

$$x_{\perp} = \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\sqrt{\zeta_{dr}}} \rho \quad (4.53)$$

olarak bulunur.

(4.50) ifadesinde  $x_{\perp}$  ve  $\rho$  yerine yazıldığında

$$\rho^2 + i \frac{\zeta_{di}(1-\mu^2)}{\zeta_{dr}} \rho^2 + \zeta_c \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\sqrt{\zeta_{dr}}} \rho + i \zeta_{bi} \mu \rho - \frac{\zeta_{br}^2}{4} - i \frac{\zeta_{bi} \zeta_{br}}{2} + \zeta_a \quad (4.54)$$

ifadesi elde edilir ve bu ifade  $\rho^2$  ye göre düzenlenip

$$\omega = \frac{\zeta_{br}^2}{4} + i \frac{\zeta_{bi} \zeta_{br}}{2} - \zeta_a \quad (4.55)$$

olarak tanımlanırsa

$$\rho^2 \left( 1 + i \frac{\zeta_{di}(1-\mu^2)}{\zeta_{dr}} \right) + \rho \left( \zeta_c \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\sqrt{\zeta_{dr}}} + i \zeta_{bi} \mu \right) - \omega \quad (4.56)$$

elde edilir. Bu ifade açıkça görüldüğü gibi  $\rho$  nun ikinci dereceden bir polinomudur. Bu ifadeyi sıfıra eşitleyip köklerin bulunması (4.43) denkleminde integral içinde paydayı sıfır yapan değerleri bulmak anlamına gelir.

$$a = \left( 1 + i \frac{\zeta_{di}(1-\mu^2)}{\zeta_{dr}} \right) \quad (4.57)$$

$$b = \left( \zeta_c \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{\sqrt{\zeta_{dr}}} + i \zeta_{bi} \mu \right) \quad (4.58)$$

olarak tanımlandığında bu ikinci dereceden denklemin kökleri,

$$\rho = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{4a\omega + b^2} \quad (4.59)$$

biçiminde olur.

Eski değişkenlerin diferansiyellerini yeni değişkenlerin diferansiyelleri cinsinden ifade edebilmek için aşağıdaki gibi Jacobian hesaplanır:

$$\frac{\partial(x_{\parallel}, x_{\perp})}{\partial(\mu, r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial \mu} & \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial r} \\ \frac{\partial x_{\perp}}{\partial \mu} & \frac{\partial x_{\perp}}{\partial r} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial \mu} \frac{\partial x_{\perp}}{\partial r} - \frac{\partial x_{\parallel}}{\partial r} \frac{\partial x_{\perp}}{\partial \mu} = \frac{\rho}{\sqrt{\zeta_{dr}(1-\mu^2)}} \quad (4.60)$$

Böylece eski değişkenler yeni değişkenler cinsinden

$$dx_{\perp} dx_{\parallel} = \frac{\rho}{\sqrt{\zeta_{dr}(1-\mu^2)}} d\mu d\rho \quad (4.61)$$

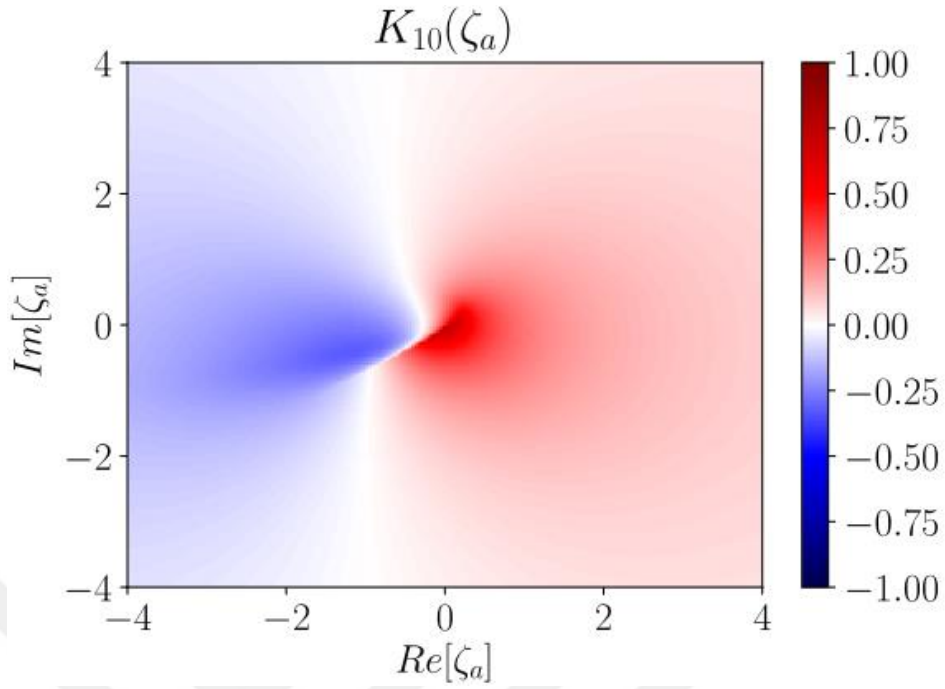
biçiminde ifade edilir.

$$K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, b) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\infty} d\rho \frac{\left[ \frac{x_{\perp}(\rho, \mu)^n x_{\parallel}(\rho, \mu)^m J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}(\rho, \mu)) e^{-x_{\perp}(\rho, \mu)^2 - x_{\parallel}(\rho, \mu)^2}}{a(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)} \right]}{\sqrt{\zeta_{dr}(1-\mu^2)}} \quad (4.62)$$

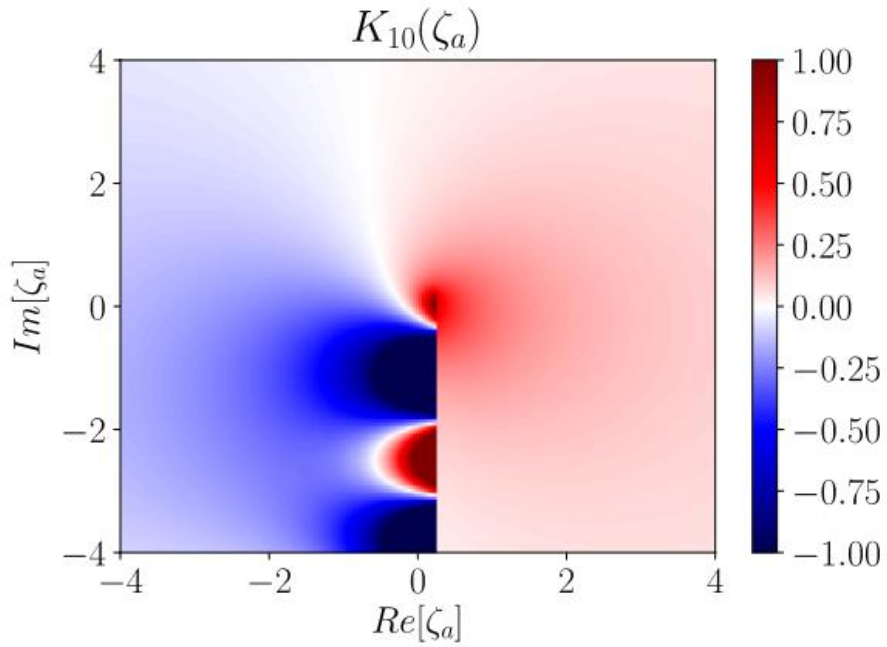
şimdi tek kutup noktasının  $\rho = \rho_+$  olduğu açıkça görülür. şimdi  $\delta K_{nm} = 2\pi i \text{Res}\{K_{nm}\}$  hesaplandığında  $\text{Im}[\rho + (\mu)] > 0$  için

$$\delta K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, b) \equiv 4\sqrt{\pi}i \int_{-1}^1 d\mu \frac{\left[ \frac{x_{\perp}(\rho, \mu)^n x_{\parallel}(\rho, \mu)^m J_0^2(\sqrt{2b}x_{\perp}(\rho, \mu)) e^{-x_{\perp}(\rho, \mu)^2 - x_{\parallel}(\rho, \mu)^2}}{\sqrt{4a\omega + b^2}} \right]}{\sqrt{\zeta_{dr}(1-\mu^2)}} \quad (4.63)$$

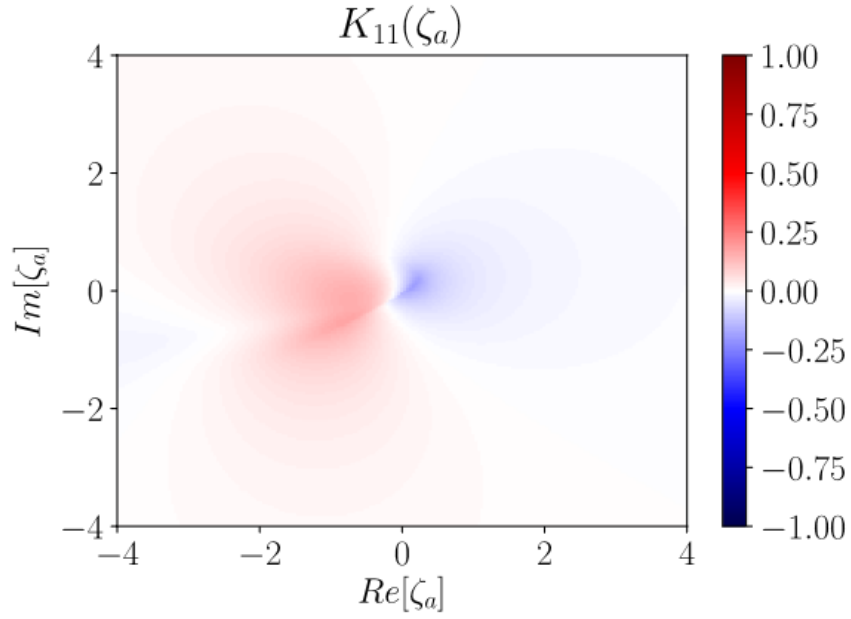
ifadesine ulaşılır. Artık  $K_{nm}$  integralleri analitik süreklilik ile birlikte ele alınabilir. Aşağıda sunulan grafiklerde  $K_{nm}$  integralleri, analitik süreklilikten gelen katkı ile birlikte çizdirilmiştir.



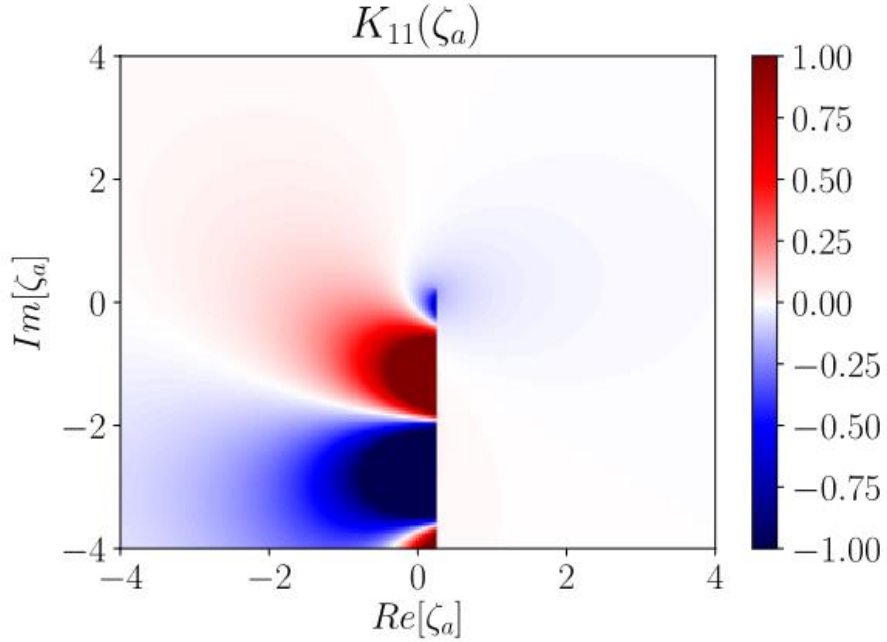
Şekil 4.17:  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin Analitik Sürekliliğin Hesaba Dahil Edilmediği Durumda  $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



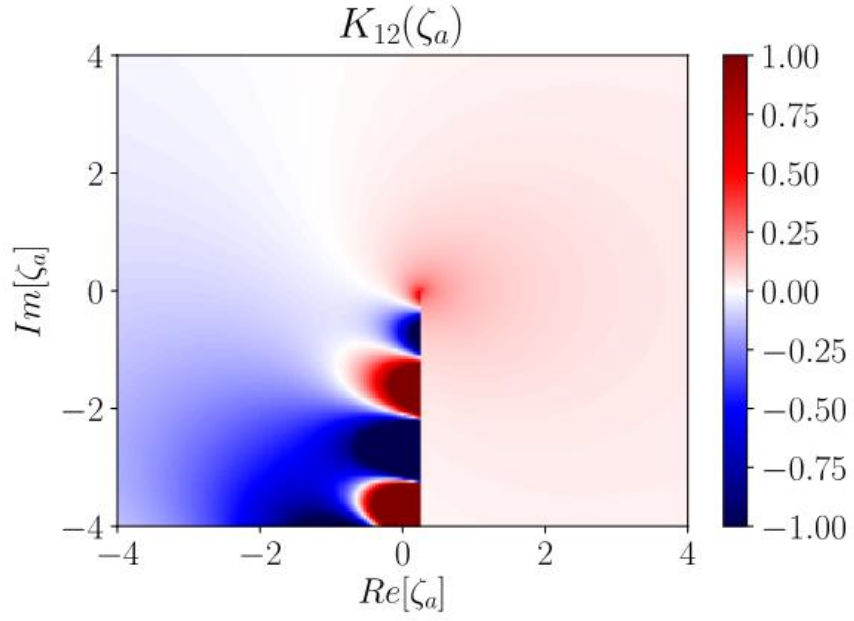
Şekil 4.18:  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ . Analitik süreklilik hesaplara dahil edilmiştir.



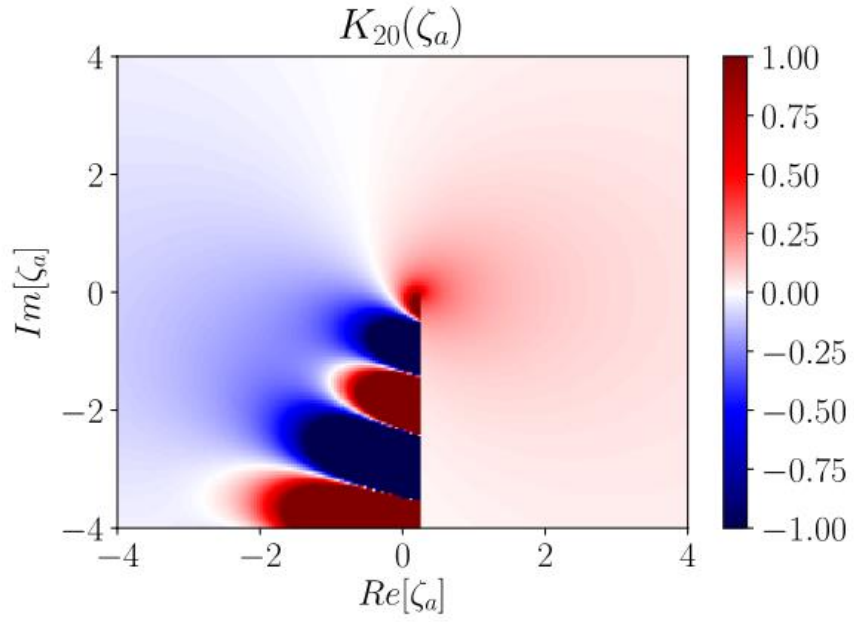
**Şekil 4.19:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$  ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$  ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$  ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin Analitik Sürekliliğin Hesaba Dahil Edilmediği Durumda  $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



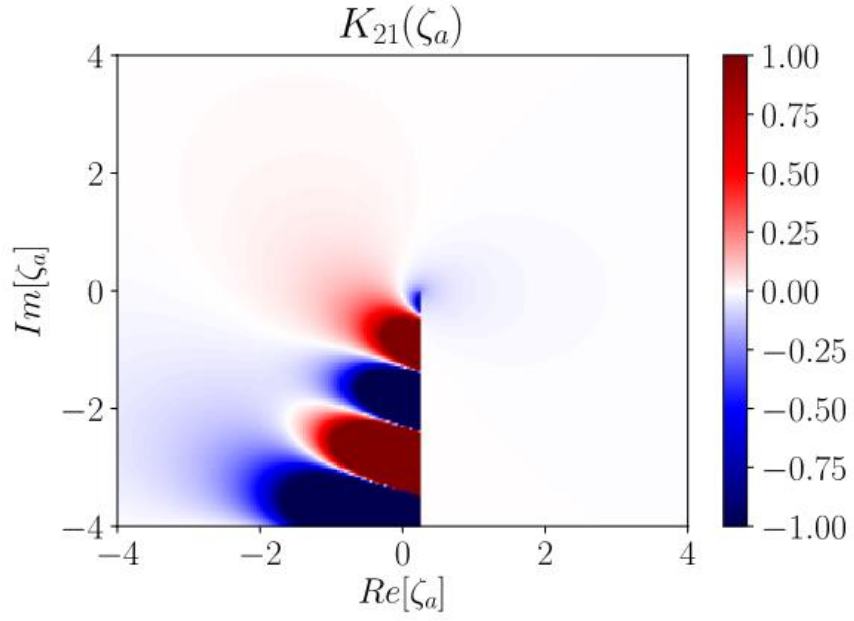
**Şekil 4.20:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$  ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$  ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$  ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ . Analitik süreklilik hesaplara dahil edilmiştir.



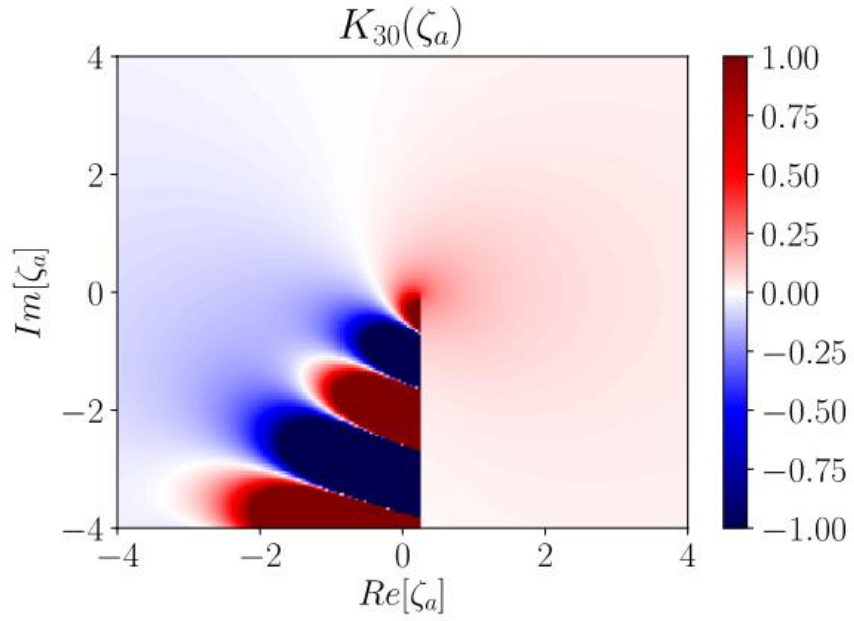
Şekil 4.21:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.5$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



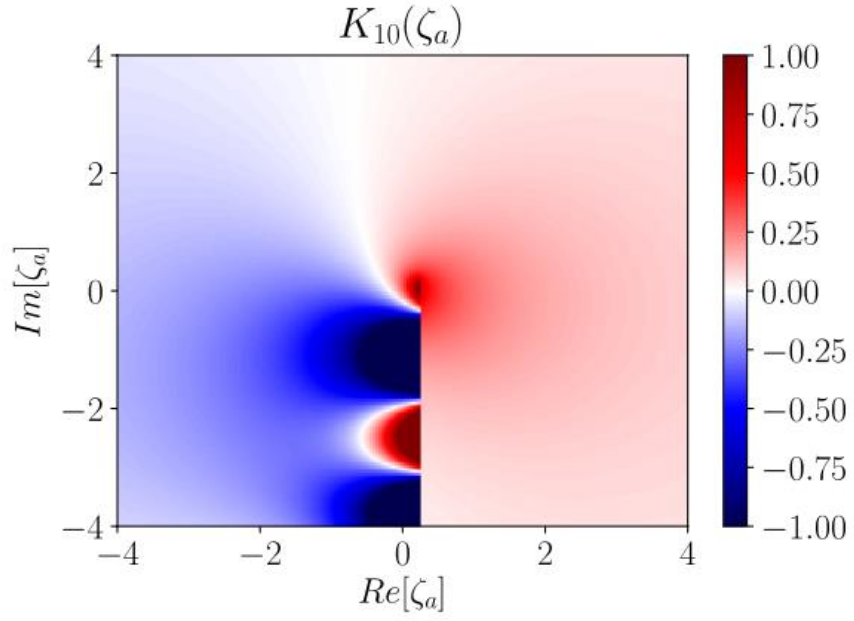
Şekil 4.22:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.5$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



Şekil 4.23:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.5$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .

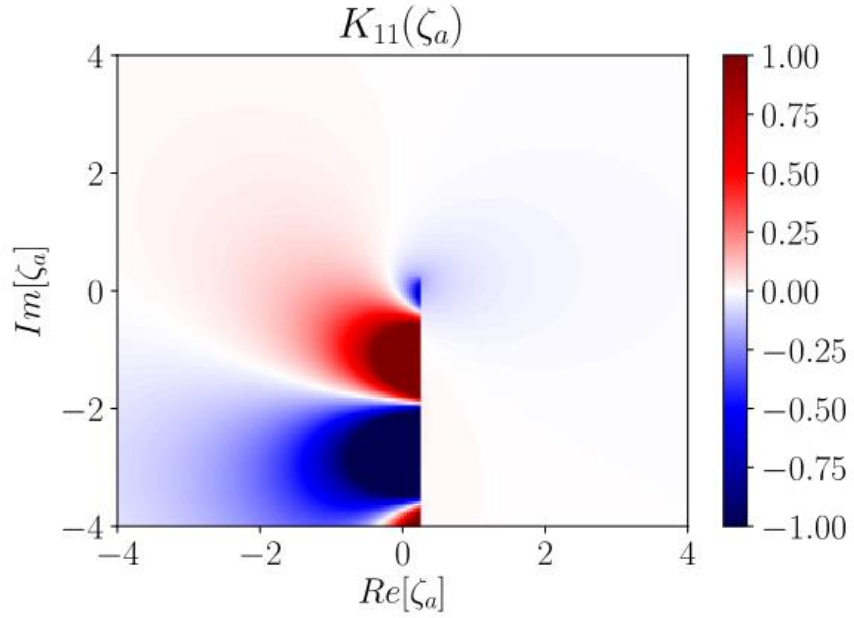


Şekil 4.24:  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.5$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



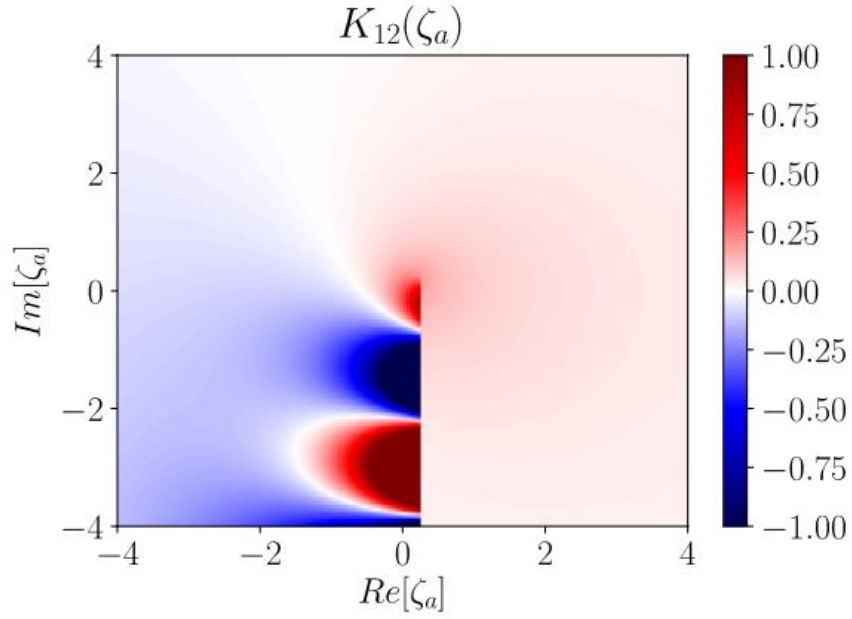
**Şekil 4.25:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$

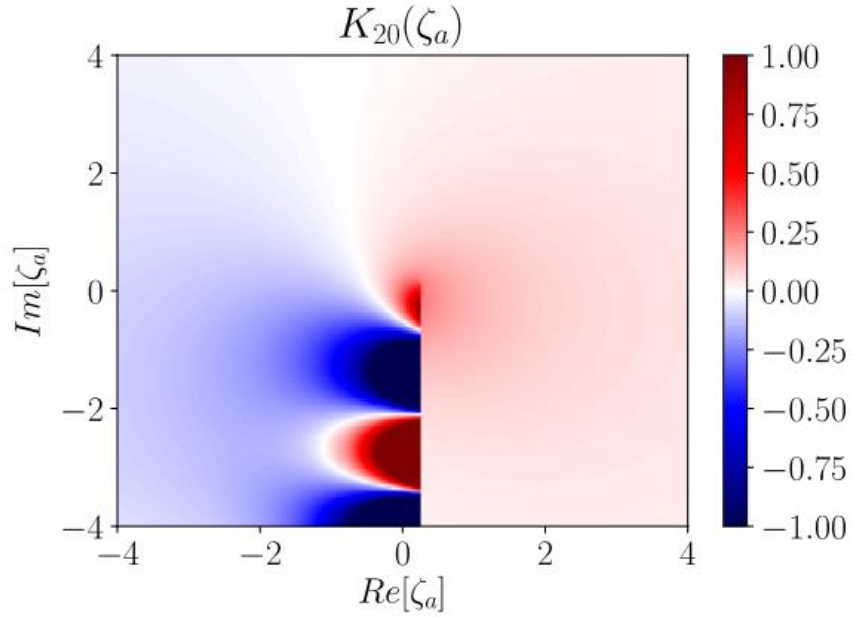


**Şekil 4.26:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

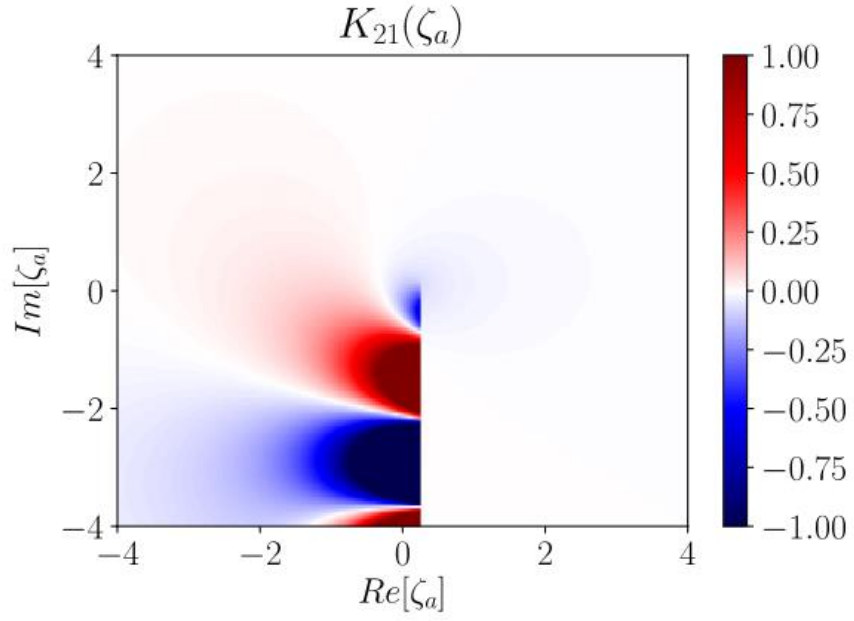
$$K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



**Şekil 4.27:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .

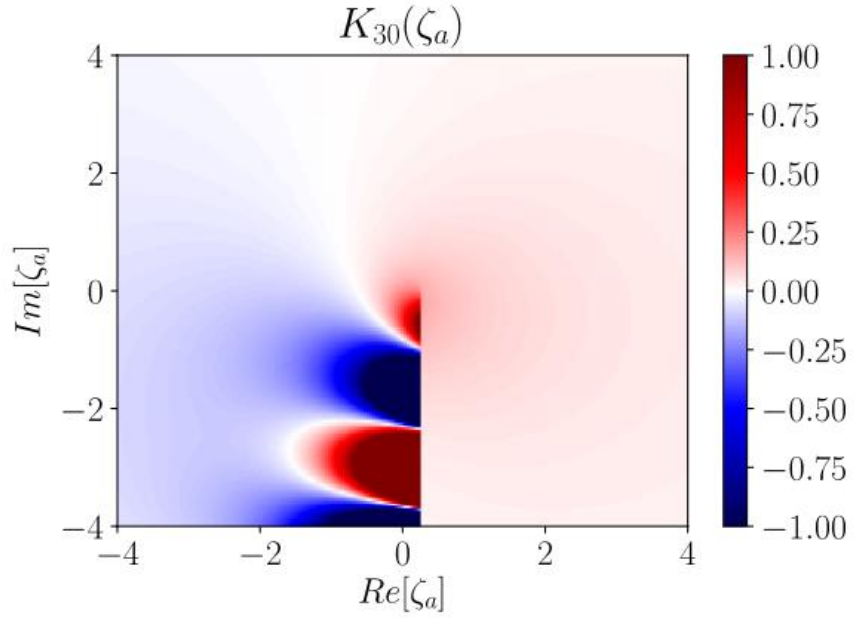


**Şekil 4.28:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



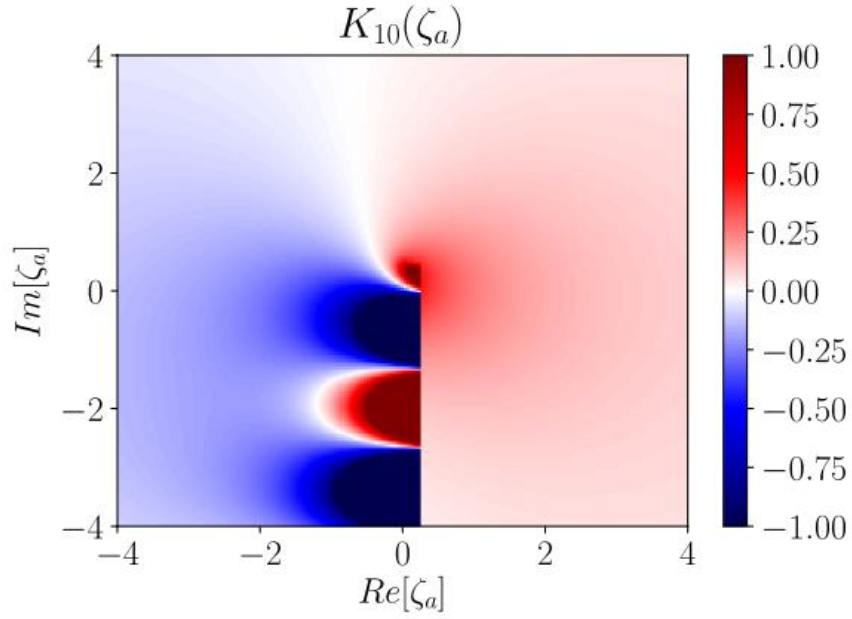
Şekil 4.29:  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$

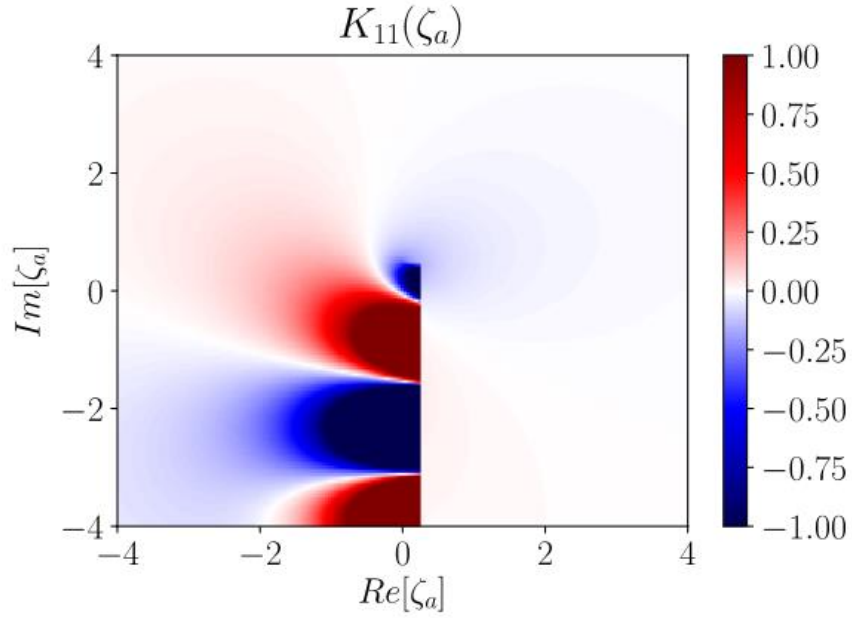


Şekil 4.30:  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

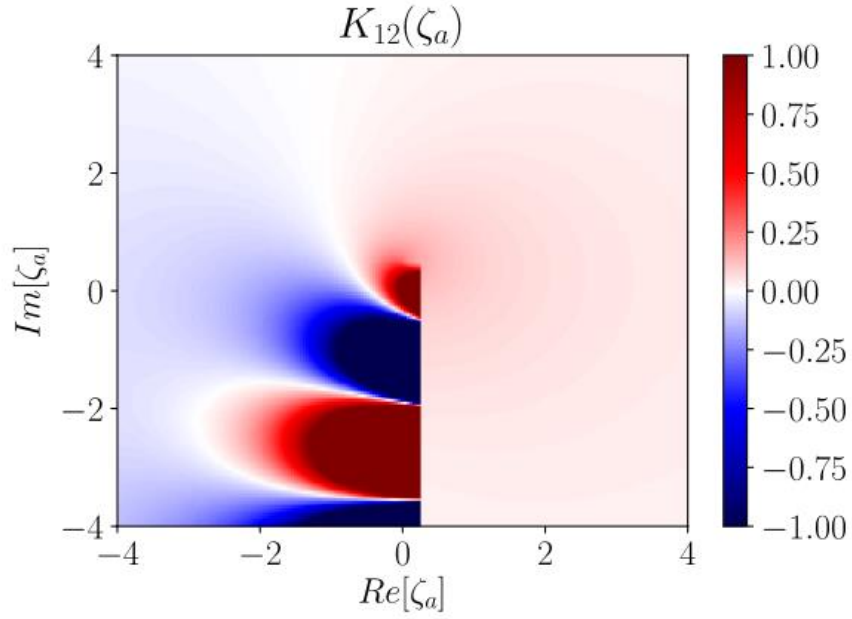
$$K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



**Şekil 4.31:**  $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .

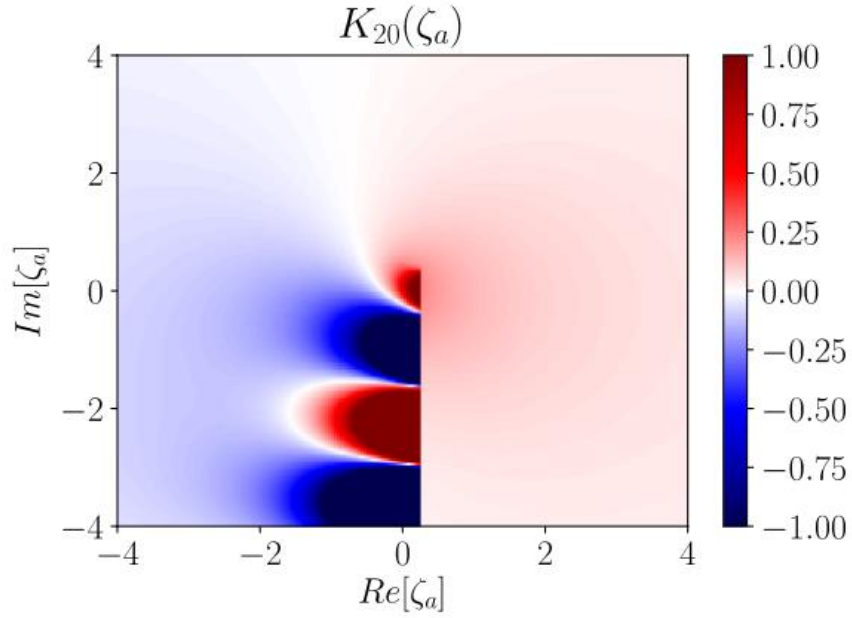


**Şekil 4.32:**  $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



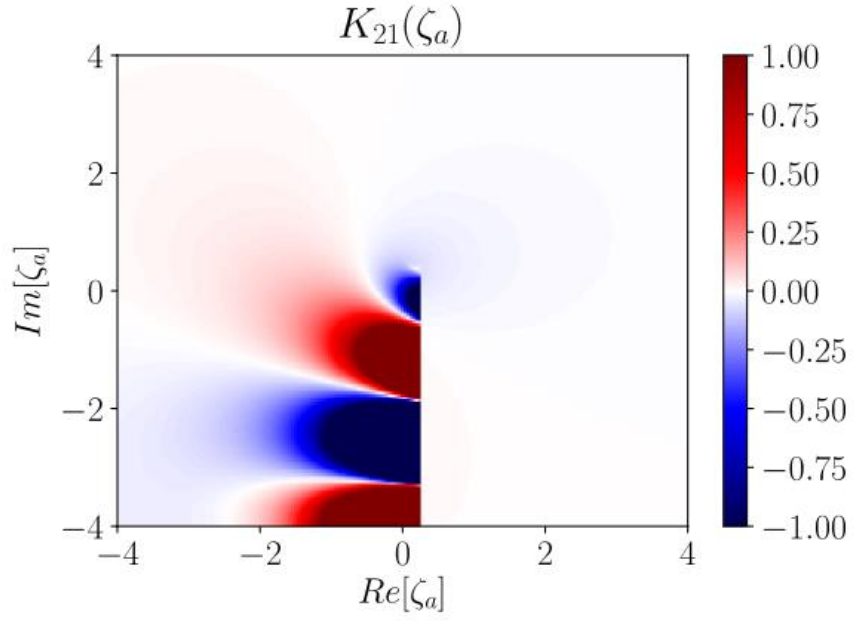
Şekil 4.33:  $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$

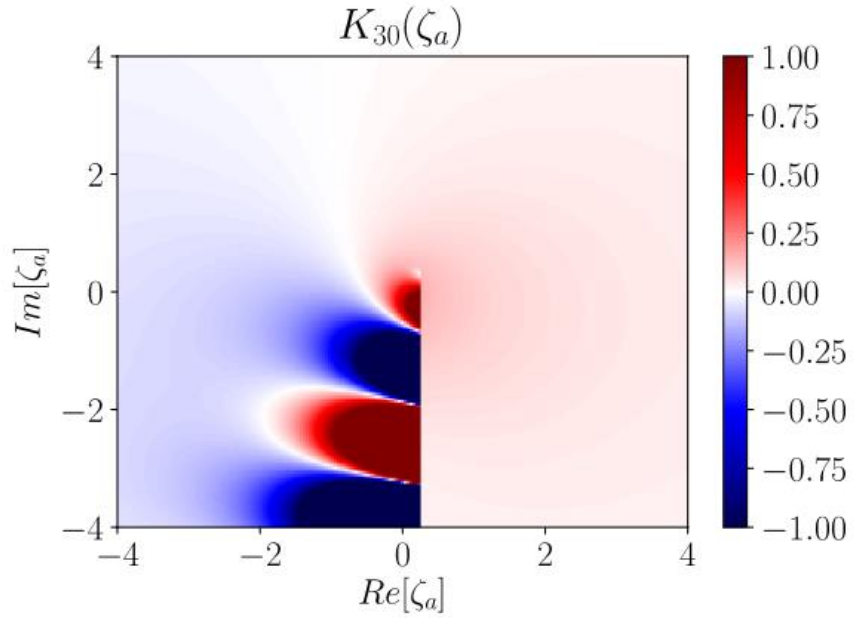


Şekil 4.34:  $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

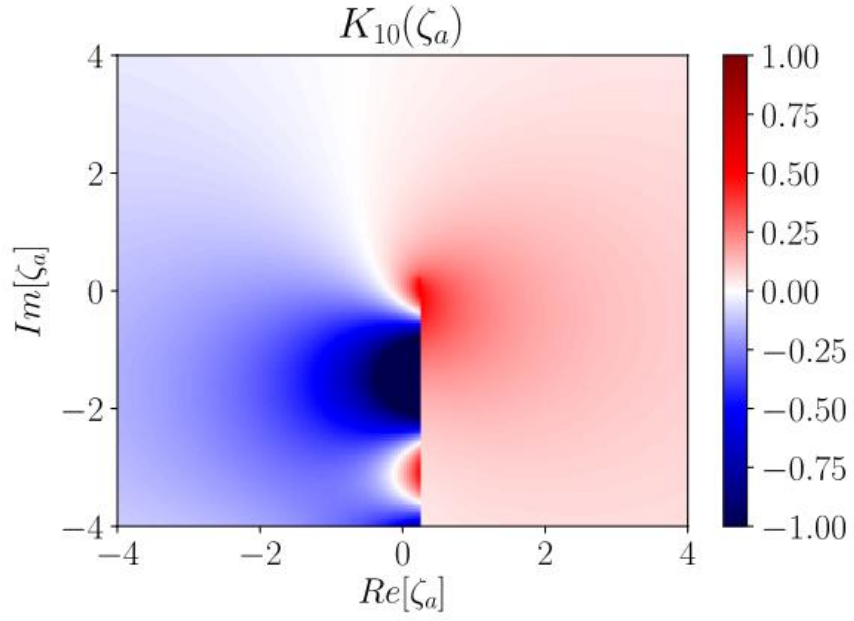
$$K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



Şekil 4.35:  $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .

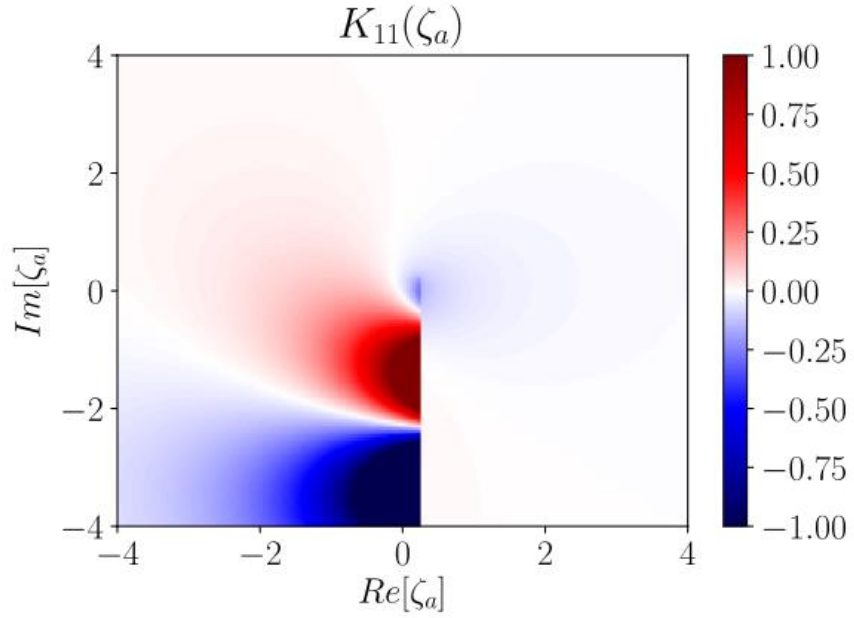


Şekil 4.36:  $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



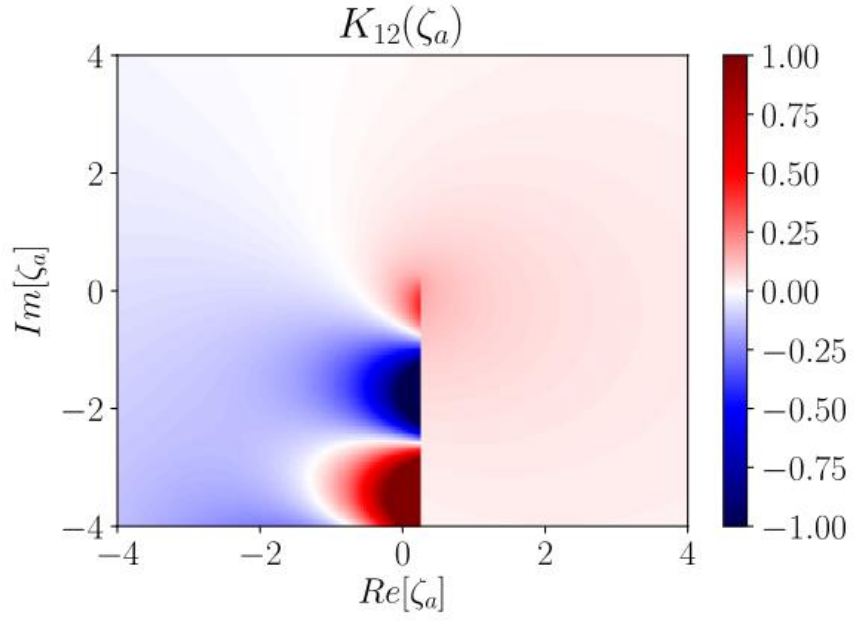
**Şekil 4.37:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



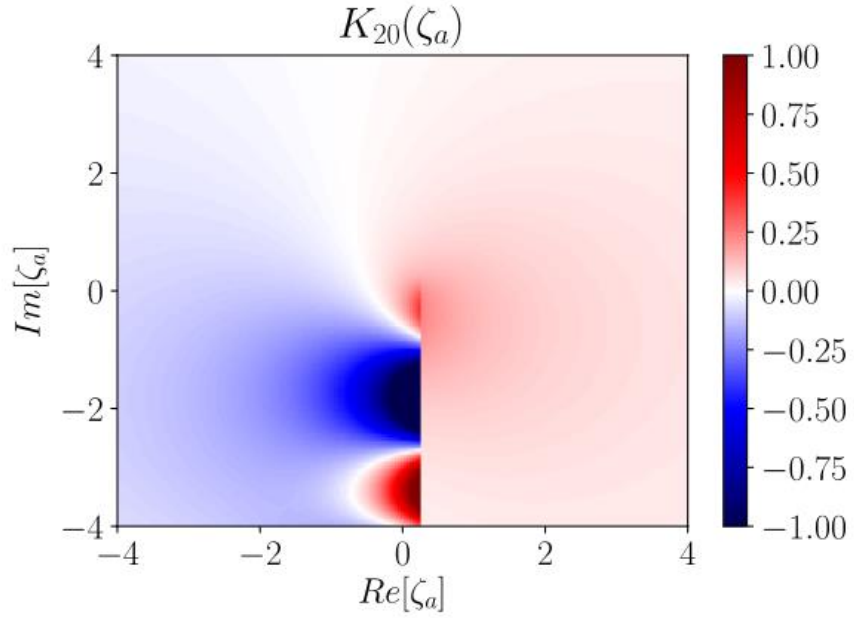
**Şekil 4.38:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



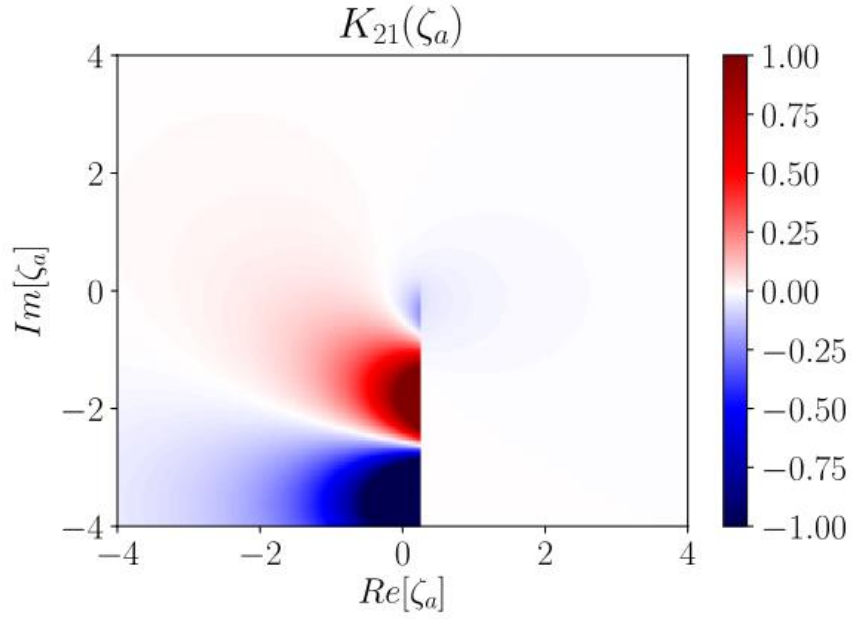
**Şekil 4.39:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



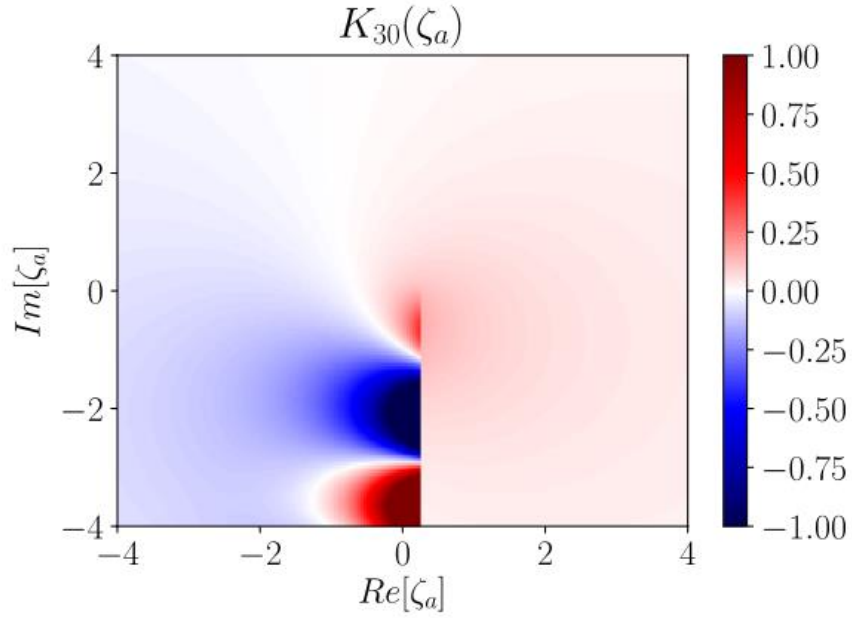
**Şekil 4.40:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



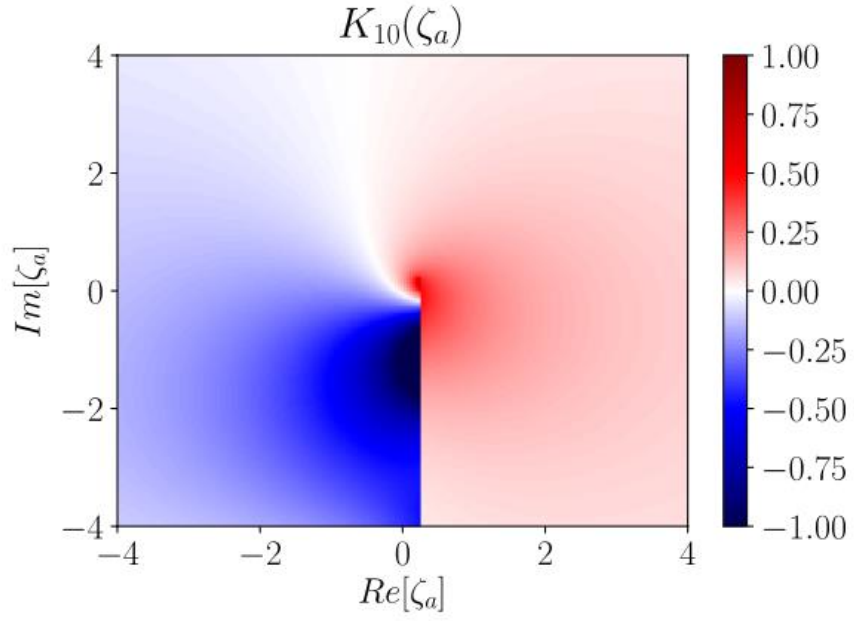
Şekil 4.41:  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



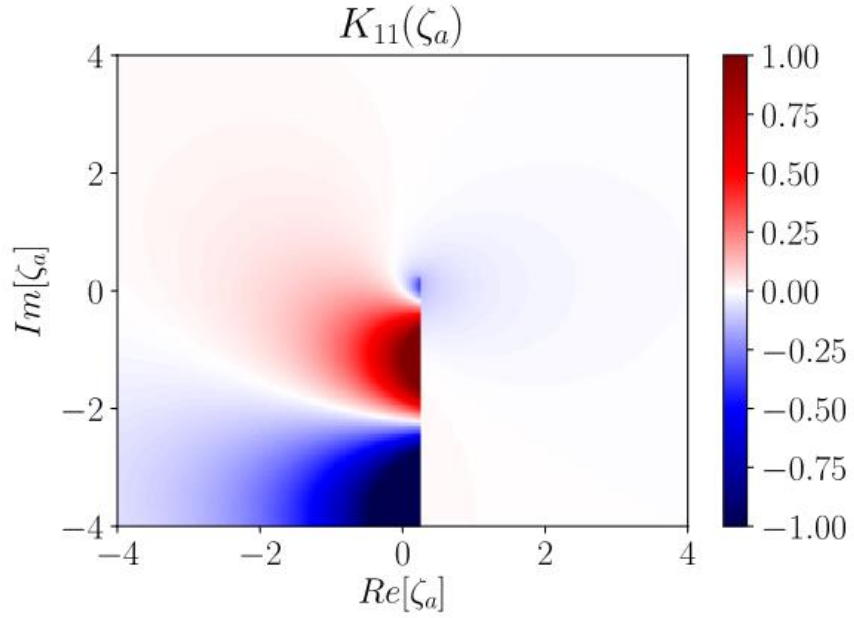
Şekil 4.42:  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



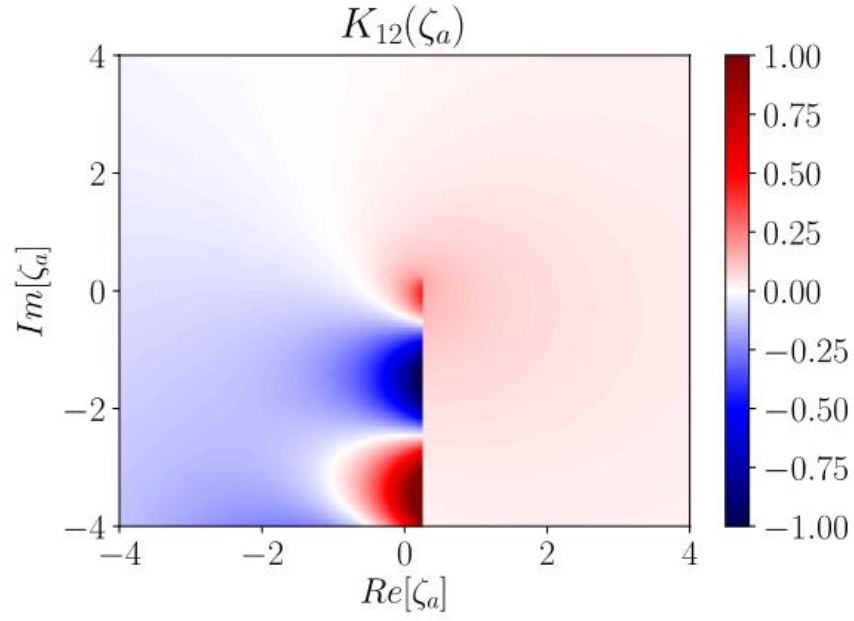
**Şekil 4.43:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{10}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



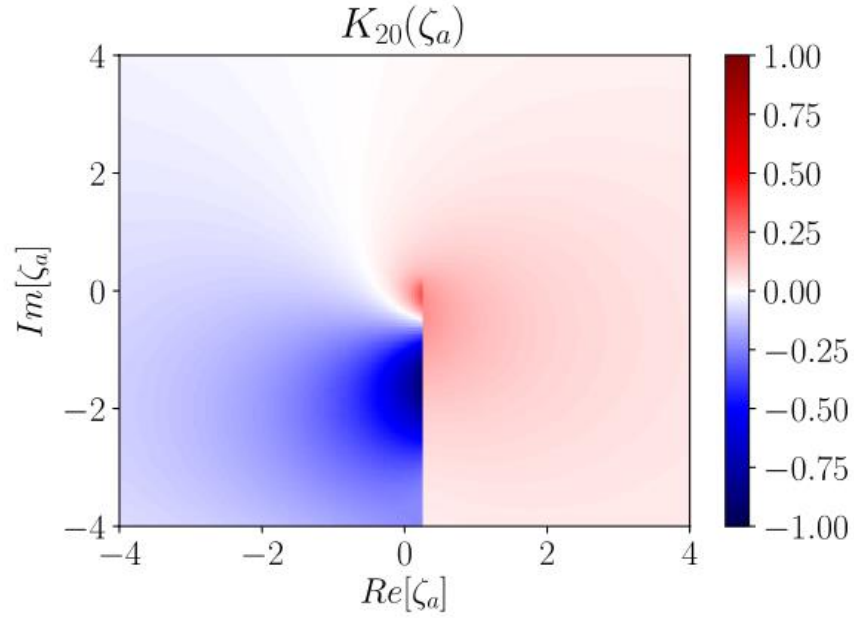
**Şekil 4.44:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{11}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



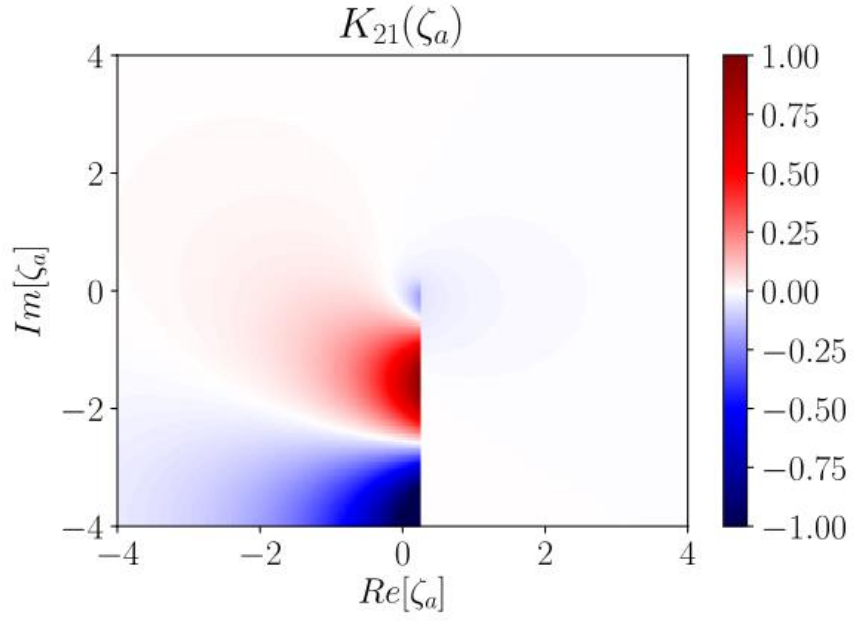
**Şekil 4.45:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{12}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$

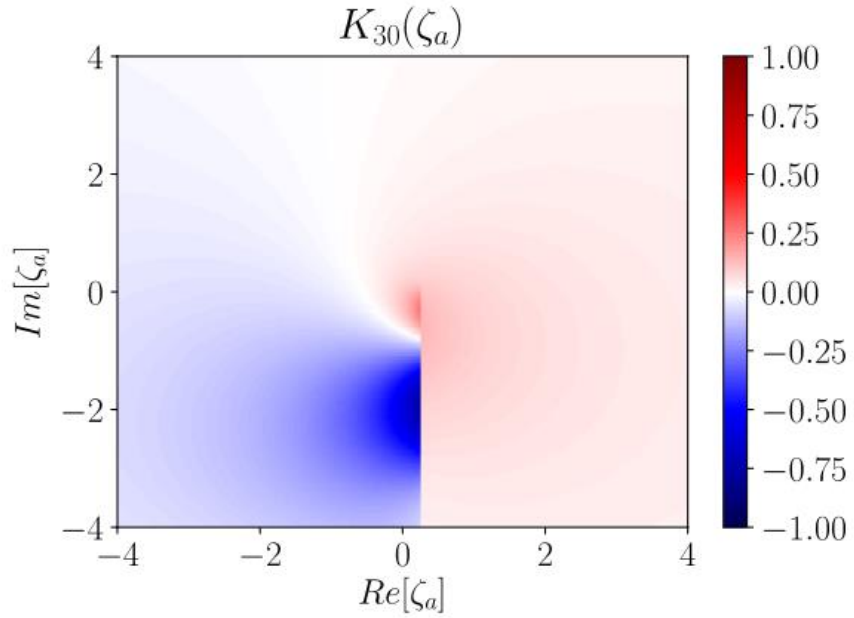


**Şekil 4.46:**  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin

$$K_{20}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b).$$



Şekil 4.47:  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{21}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .



Şekil 4.48:  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ ,  $b = 1.0$  Parametreleri İçin  $K_{30}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$ .

Farklı parametreler için  $K_{nm}$  fonksiyonlarının reel kısımları,  $\zeta_a$  kompleks düzleminde çizdirilmiştir. Şekillerin yanındaki renk barında gösterildiği gibi kırmızı renk pozitif, mavi renk ise negatif değerleri temsil etmektedir. Rengin tonu ise sıfıra olan uzaklıkla orantılıdır.

Şekil 4.17 ile Şekil 4.24 arasındaki grafiklerde parametrelere  $\zeta_b = 1.0$ ,  $\zeta_c = 0.0$ ,  $\zeta_d = 0.5$ ,  $b = 1.0$  değerleri verilmiştir. Aslında  $K_{nm}$  integrallerinin içindeki ifadenin paydasındaki  $\zeta_c = 0$  alınması ile  $x_{\perp}$  düşecektir. Bununla birlikte  $\zeta_b, \zeta_c, \zeta_d$  parametrelerinin reel olması  $K_{nm}$  integrallerinin  $I_{nm}$  integrallerine indirgendiği anlamına gelir. Bu özel durum  $I_{nm}$  integrallerinin yapısı hakkında bilgi vermektedir. Ayrıca Şekil 4.17 ve Şekil 4.19 analitik süreklilik sağlanmadan çizdirilmiştir. Böylece aynı parametrelerle birlikte analitik sürekliliği hesaplara dahil etmenin  $K_{nm}$  integralleri üzerine olan etkisini görmek mümkündür.

Dikkat edilirse  $\text{Re}[\zeta_a] > 0$  olduğunda  $K_{11}$  ve  $K_{21}$  dışında  $K_{nm}$  fonksiyonlarının reel kısımları pozitif kalmaktadır. Aynı davranış sadece  $I_{nm}$  fonksiyonlarına ait olmayıp çizdirdiğimiz parametrelerde tüm  $K_{nm}$  fonksiyonlarının genel bir özelliği olarak görülmektedir. Şekil 4.25 ile Şekil 4.30 arasındaki grafiklerde parametrelere  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  değerleri; Şekil 4.31 ile Şekil 4.36 arasındaki grafiklerde parametrelere  $\zeta_b = 1.0 + 1.0i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  değerleri; Şekil 4.37 ile Şekil 4.42 arasındaki grafiklerde parametrelere  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 1.0i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 0.2i$ ,  $b = 1.0$  değerleri; Şekil 4.43 ile Şekil 4.48 arasındaki grafiklerde ise parametrelere  $\zeta_b = 1.0 + 0.5i$ ,  $\zeta_c = 0.5 + 0.5i$ ,  $\zeta_d = 0.5 + 1.0i$ ,  $b = 1.0$  değerleri verilmiştir. Grafiklerin çizdirildiği aralıklarda,  $I_{nm}$  fonksiyonlarının reel kısımlarının, sıfırın altında ve sıfırın üstünde oldukları öbekleşmelerin sayısının  $K_{nm}$  fonksiyonlarının reel kısımlarının, sıfırın altında ve sıfırın üstünde oldukları öbekleşmelerin sayısından genel olarak daha fazla olduğu görülmektedir (Şekil 4.18, Şekil 4.20, Şekil 4.21, Şekil 4.22, Şekil 4.23, Şekil 4.24, Şekil 4.25, Şekil 4.26, Şekil 4.27, Şekil 4.28, Şekil 4.29, Şekil 4.30).

Grafikler çizilirken parametreler beş farklı grup oluşturacak şekilde ele alındı. 1. gruptaki parametreler  $K_{nm}$  fonksiyonlarının  $I_{nm}$  fonksiyonlarına indirgendiği özel bir durumu ele almaktadır. 2. gruptaki parametrelerle 3. gruptaki parametreler arasındaki tek fark, 2. grupta  $\zeta_b$  parametresinin sanal

kısımının 3. gruptaki  $\zeta_b$  parametresinin sanal kısmından daha küçük olmasıdır. 2. grup ile 4. gruptaki parametreler de  $\zeta_c$  parametresi dışında aynıdır. 4. gruptaki  $\zeta_c$  parametresinin sanal kısmı 2. gruptaki  $\zeta_c$  parametresinin sanal kısmından daha büyük alınmıştır. 2. grup ile 5. grup arasında ise  $\zeta_d$  parametresinin sanal kısmı dışında tüm parametreler aynıdır.

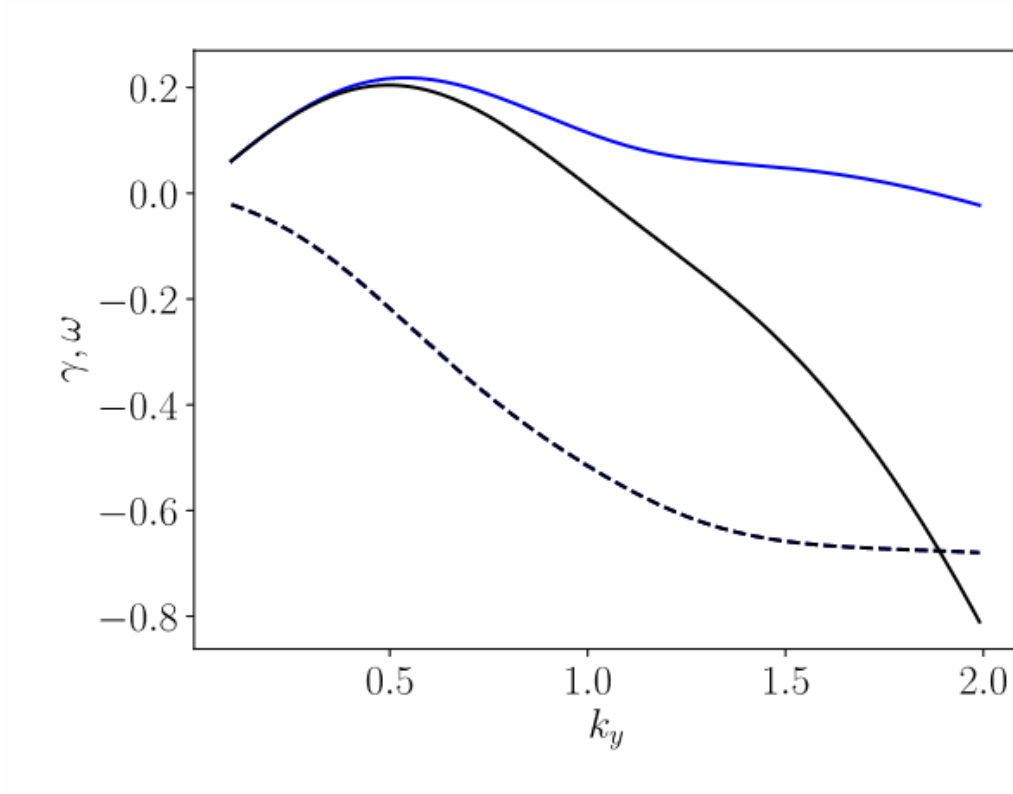
**Tablo 4.1:**  $K_{nm}$  Fonksiyonlarının Grafikleri Çizdirilen Parametreleri.

Parametre	Grup-1	Grup-2	Grup-3	Grup-4	Grup-5
$\zeta_b$	1.0	$1.0 + 0.5i$	$1.0 + 1.0i$	$1.0 + 0.5i$	$1.0 + 0.5i$
$\zeta_c$	0.0	$0.5 + 0.5i$	$0.5 + 0.5i$	$0.5 + 1.0i$	$0.5 + 0.5i$
$\zeta_d$	0.5	$0.5 + 0.2i$	$0.5 + 0.2i$	$0.5 + 0.2i$	$0.5 + 1.0i$
$b$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Böylece  $K_{nm}$  fonksiyonlarında  $\zeta_b, \zeta_c, \zeta_d$  parametrelerindeki farklılıklar yukarıdaki tabloda ve parametrelerin değiştirilmesinin etkileri de grafiklerde görülmektedir. Örneğin 2. gruptaki parametrelerle 3. gruptaki parametrelere bakıldığında, 2. gruptaki  $\zeta_b$  parametresinin sanal kısmının, 3. gruptaki  $\zeta_b$  parametresinin sanal kısmından küçük olmasının etkisinin,  $K_{nm}$  fonksiyonlarının reel kısımlarının, sıfırın altında ve sıfırın üstünde oldukları öbekleşmelerin kaymasına neden olduğu anlaşılır.

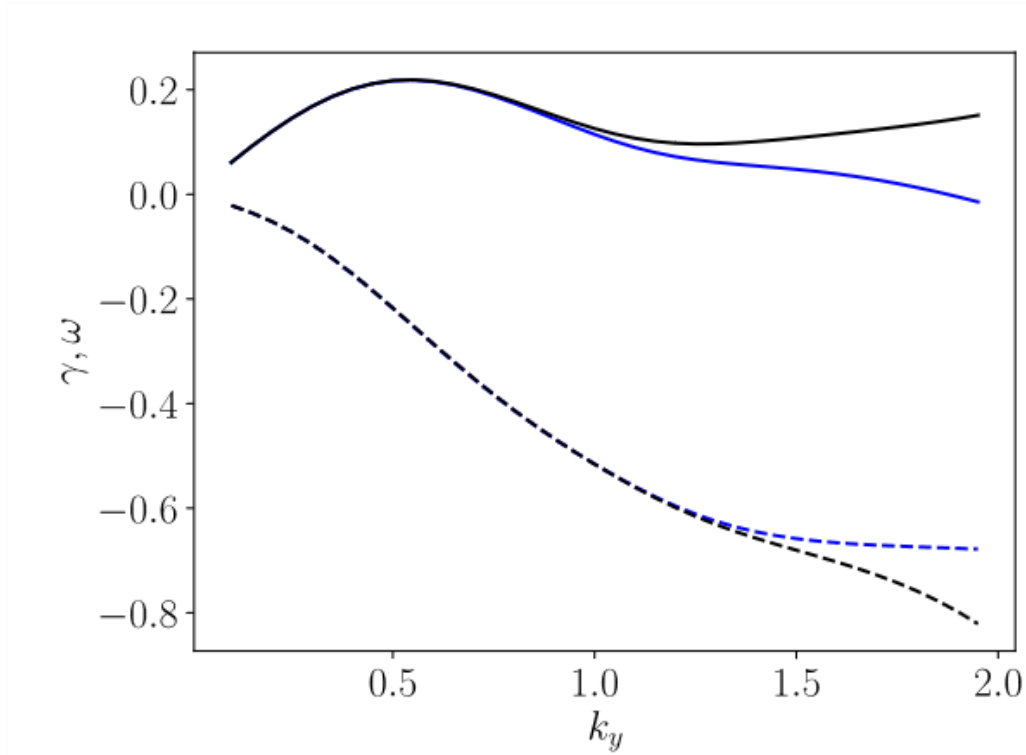
#### 4.6. DUPREE TERİMİNİN HIZA BAĞLI POLİNOMİYEL BİÇİMİNİN YEREL ITG DAĞINIM BAĞINTISININ ÇÖZÜMÜNE OLAN ETKİSİ

Daha önce kısım (3.4)'te Dupree'nin lineer olmayan teorisinden bahsedildi. Yerel ITG dağılım bağıntısına  $D_D$  teriminin eklenmiş olması, dağılım bağıntısının renormalize edildiği anlamına gelir. Ayrıca  $D_D$ 'nin hıza bağımlı olduğu genel olarak bilinmektedir. Bu tezde bu hız bağımlılığının  $D_D(\mathbf{v}) = d_0 + d_1 v_{\parallel} + d_2 v_{\parallel}^2 + d_3 v_{\perp} + d_4 v_{\perp}^2$  biçiminde olduğu varsayıldı. Bu kısımda  $D_D(\mathbf{v})$  polinomundaki  $d_0, d_1, d_2, d_3$  ve  $d_4$  katsayılarının yerel ITG bağıntısının  $k_y$  ve  $\gamma$  ile  $k_y$  ve  $\omega$  uzayındaki etkileri sunuldu (Şekil 4.49, Şekil 4.50, Şekil 4.51, Şekil 4.52, Şekil 4.53, Şekil 4.54).



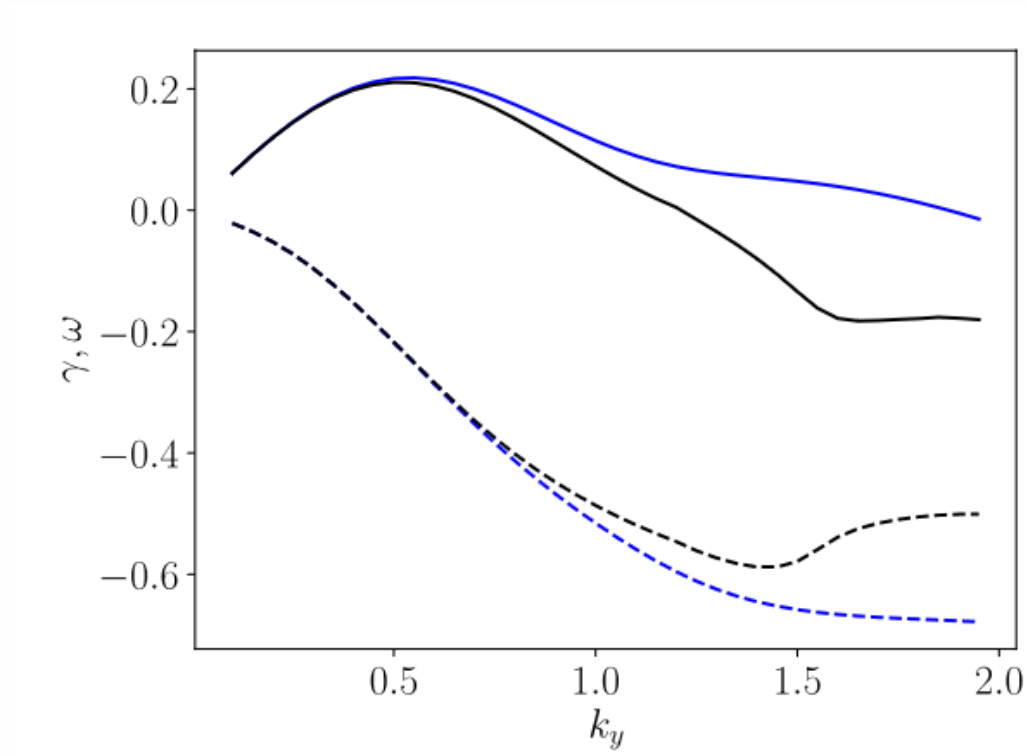
**Şekil 4.49:** Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü  
( $d_0 = 0.1, d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.0$ ).

Şekil 4.49’da renormalize edilmiş yerel ITG’nin çözümü  $k_y$  ve  $\gamma$  ile  $k_y$  ve  $\omega$  uzayında çizdirilmiştir. Sürekli çizgiler büyüme oranı  $\gamma$ ’yı, kesikli çizgiler ise  $\omega$  frekansını göstermektedir. Mavi renkli çizgiler  $D_D = 0$  yani renormalize edilmemiş durumu temsil ediyor. Renormalize edilmiş yerel ITG’den elde edilen plazma dağılım fonksiyonundaki Dupree’nin difüzyon teriminin katsayıları ise Şekil 4.49’da  $d_0 = 0.1, d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.0$  olarak seçilmiştir.  $d_0 = 0.1$  ve  $D_D(v)$  polinomunun diğer katsayıları sıfır seçildiğinden Şekil 4.49’da Dupree terimi  $D_D = 0.1$  olup, bir sabittir. Görüldüğü gibi Dupree teriminin bir sabit olması  $\omega$  frekansı üzerinde bir etki yaratmadığı, frekansı temsil eden kesikli mavi ve siyah çizgilerin çakışık olmasından görülmektedir. Bununla birlikte büyüme oranı  $\gamma$  üzerine  $D_D$ ’nin bu değeri  $k_y = 0.5$  dolaylarına kadar bir etkide bulunmamaktadır. Sonrasında  $k_y$  değeri arttıkça  $\gamma$  değeri hızla düşmektedir. Artan  $k_y$  değerleri ile birlikte Dupree teriminin etkisi de daha fazla ortaya çıkmaktadır.



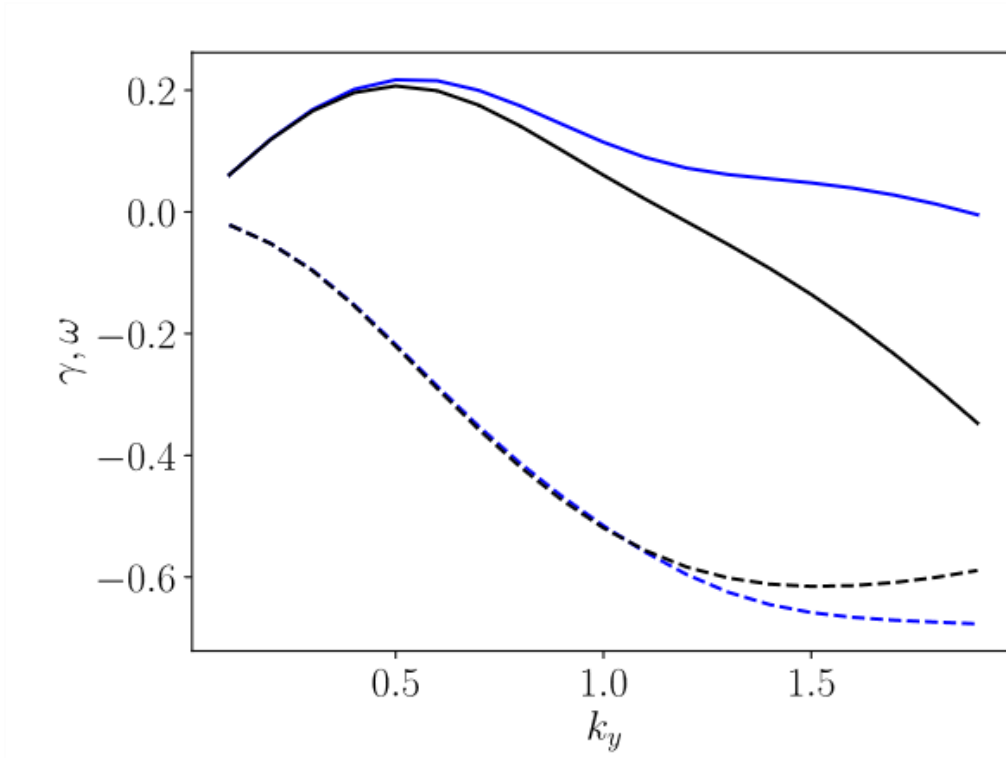
**Şekil 4.50:** Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü  
( $d_1 = 0.1, d_0 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.0$ ).

Renormalize edilmiş yerel ITG'den elde edilen plazma dağılım fonksiyonundaki Dupree'nin difüzyon teriminin katsayıları Şekil 4.50'de  $d_1 = 0.1, d_0 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.0$  olarak seçilmiştir.  $d_1 = 0.1$  ve  $D_D(\mathbf{v})$  polinomunun diğer katsayıları sıfır seçildiğinden Şekil 4.50'de Dupree teriminin  $D_D(\mathbf{v}) = 0.1v_{\parallel}$  biçiminde alındığı anlamına gelir. Yani bu kez  $D_D(\mathbf{v})$  sadece paralel yöndeki hız bileşenine bağlı olduğu durumdaki etkisi Şekil 4.50'de görülmektedir. Bu kez  $D_D$  teriminin,  $k_y = 0.8$  dolaylarına kadar büyüme oranı  $\gamma$  üzerine ve  $k_y = 1.4$  dolaylarına kadar da  $\omega$  frekansı üzerine etkisi ortaya çıkmamaktadır.  $D_D$  terimi,  $k_y = 0.8$  dolaylarından sonra büyüme oranı  $\gamma$ 'nın azalmasına ve  $k_y = 1.4$  dolaylarından sonra da  $\omega$  frekansının düşmesine neden olmaktadır. Söz konusu etkilerin artan  $k_y$  değerleriyle arttığı gözlenmektedir.



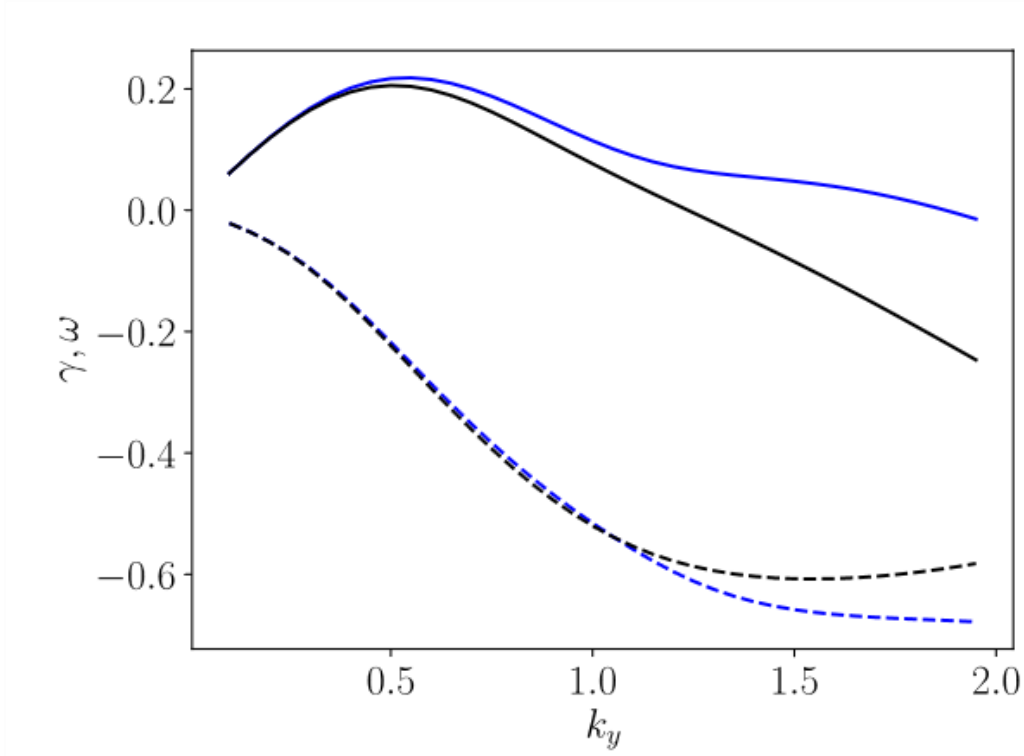
**Şekil 4.51:** Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü  
( $d_2 = 0.1, d_0 = d_1 = d_3 = d_4 = 0.0$ ) .

Renormalize edilmiş yerel ITG'den elde edilen plazma dağılım fonksiyonundaki Dupree'nin difüzyon teriminin katsayıları ise Şekil 4.51'de  $d_2 = 0.1, d_0 = d_1 = d_3 = d_4 = 0.0$  olarak seçilmiştir.  $d_2 = 0.1$  ve  $D_D(\mathbf{v})$  polinomunun diğer katsayıları sıfır seçildiğinden Şekil 4.51'de Dupree teriminin  $D_D(\mathbf{v}) = 0.1v_{\parallel}^2$  biçiminde alındığı anlamına gelir. Yani bu kez  $D_D(\mathbf{v})$ 'nin sadece paralel yöndeki hız bileşeninin karesine bağlı olduğu durumdaki etkisi Şekil 4.51'de görülmektedir. Bu kez  $D_D$  teriminin,  $k_y = 0.6$  dolaylarına kadar büyüme oranı  $\gamma$  üzerine ve  $k_y = 0.7$  dolaylarına kadar da  $\omega$  frekansı üzerine etkisi ortaya çıkmamaktadır.  $D_D$  terimi,  $k_y = 0.6$  dolaylarından sonra büyüme oranı  $\gamma$ 'nın azalmasına ve  $k_y = 0.7$  dolaylarından sonra da  $\omega$  frekansının yükselmesine neden olmaktadır. Söz konusu etkilerin artan  $k_y$  değerleriyle arttığı gözlenmektedir.



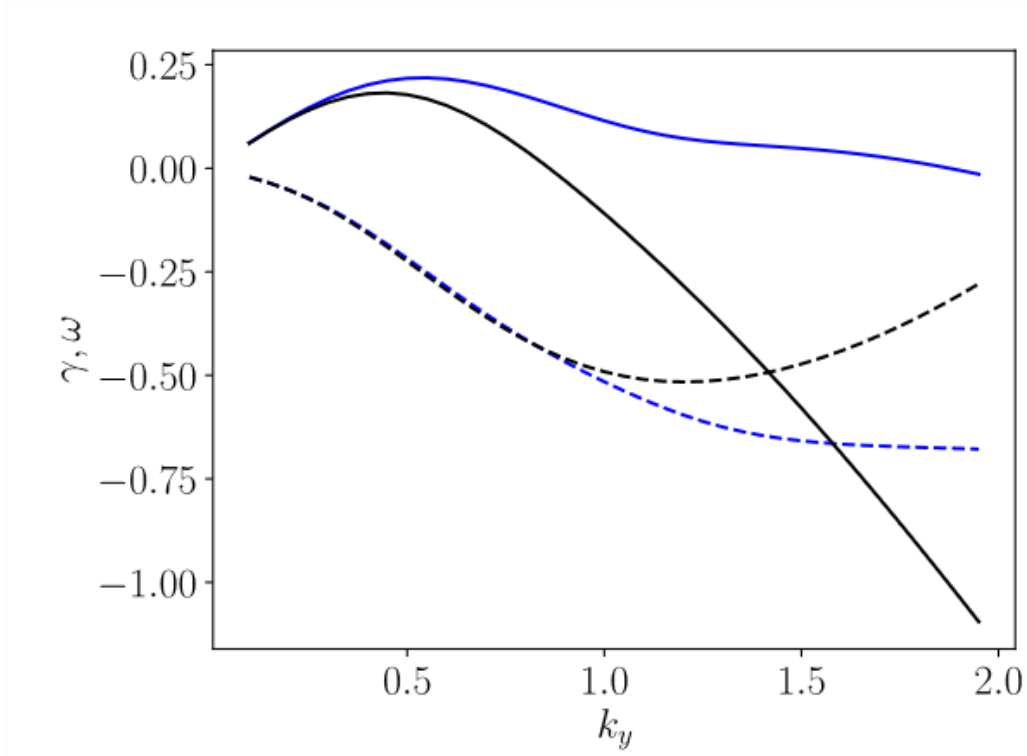
**Şekil 4.52:** Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü  
( $d_3 = 0.1, d_0 = d_1 = d_2 = d_4 = 0.0$ ).

Renormalize edilmiş yerel ITG'den elde edilen plazma dağılım fonksiyonundaki Dupree'nin difüzyon teriminin katsayıları ise Şekil 4.52'de  $d_3 = 0.1, d_0 = d_1 = d_2 = d_4 = 0.0$  olarak seçilmiştir.  $d_3 = 0.1$  ve  $D_D(\mathbf{v})$  polinomunun diğer katsayıları sıfır seçildiğinden Şekil 4.52'de Dupree teriminin  $D_D(\mathbf{v}) = 0.1v_{\perp}$  biçiminde alındığı anlamına gelir. Yani bu kez  $D_D(\mathbf{v})$  sadece dik yöndeki hız bileşenine bağlı olduğu durumdaki etkisi Şekil 4.52'de görülmektedir. Bu kez  $D_D$  teriminin,  $k_y = 0.4$  dolaylarına kadar büyüme oranı  $\gamma$  üzerine ve  $k_y = 1.2$  dolaylarına kadar da  $\omega$  frekansı üzerine etkisi ortaya çıkmamaktadır.  $D_D$  terimi,  $k_y = 0.4$  dolaylarından sonra büyüme oranı  $\gamma$ 'nın azalmasına ve  $k_y = 1.2$  dolaylarından sonra da  $\omega$  frekansının yükselmesine neden olmaktadır. Söz konusu etkilerin artan  $k_y$  değerleriyle arttığı gözlenmektedir.



**Şekil 4.53:** Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü  
( $d_4 = 0.1, d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0.0$ ).

Renormalize edilmiş yerel ITG'den elde edilen plazma dağılım fonksiyonundaki Dupree'nin difüzyon teriminin katsayıları ise Şekil 4.53'te  $d_4 = 0.1, d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0.0$  olarak seçilmiştir.  $d_4 = 0.1$  ve  $D_D(\mathbf{v})$  polinomunun diğer katsayıları sıfır seçildiğinden Şekil 4.53'te Dupree teriminin  $D_D(\mathbf{v}) = 0.1v_{\perp}^2$  biçiminde alındığı anlamına gelir. Yani bu kez  $D_D(\mathbf{v})$  sadece dik yöndeki hız bileşeninin karesine bağlı olduğu durumdaki etkisi Şekil 4.53'te görülmektedir. Bu kez  $D_D$  teriminin,  $k_y = 0.5$  dolaylarına kadar büyüme oranı  $\gamma$  üzerine ve  $k_y = 1.1$  dolaylarına kadar da  $\omega$  frekansı üzerine etkisi ortaya çıkmamaktadır.  $D_D$  terimi,  $k_y = 0.5$  dolaylarından sonra büyüme oranı  $\gamma$ 'nın azalmasına ve  $k_y = 1.1$  dolaylarından sonra da  $\omega$  frekansının yükselmesine neden olmaktadır. Söz konusu etkilerin artan  $k_y$  değerleriyle arttığı gözlenmektedir.



**Şekil 4.54:** Renormalize Edilmiş Yerel ITG Dağılım Bağıntısının Çözümü  
( $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.1$ ).

Renormalize edilmiş yerel ITG'den elde edilen plazma dağılım fonksiyonundaki Dupree'nin difüzyon teriminin katsayıları ise Şekil 4.54'te  $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.1$  olarak seçilmiştir. Böylece  $D_D(\mathbf{v})$  polinomunun tüm katsayıları sıfır seçildiğinden Şekil 4.54'te Dupree teriminin  $D_D(\mathbf{v}) = 0.1 + 0.1v_{\parallel} + 0.1v_{\parallel}^2 + 0.1v_{\perp} + 0.1v_{\perp}^2$  biçiminde alındığı anlamına gelir. Bu kez  $D_D(\mathbf{v})$  hem paralel yöndeki hız bileşenine hem de dik yöndeki hız bileşenine bağlıdır.  $D_D(\mathbf{v})$ 'nin bu durumdaki etkisi Şekil 4.54'te görülmektedir. Bu kez  $D_D$  teriminin,  $k_y = 0.3$  dolaylarına kadar büyüme oranı  $\gamma$  üzerine ve  $k_y = 0.9$  dolaylarına kadar da  $\omega$  frekansı üzerine etkisi ortaya çıkmamaktadır.  $D_D$  terimi,  $k_y = 0.3$  dolaylarından sonra büyüme oranı  $\gamma$ 'nın hızla azalmasına ve  $k_y = 0.9$  dolaylarından sonra da  $\omega$  frekansının yükselmesine neden olmaktadır. Söz konusu etkilerin artan  $k_y$  değerleriyle arttığı gözlenmektedir.

#### 4.7. DUPREE TERİMİNİN POLİNOMİYEL BİÇİMİ

Bu kısımda  $D_D(\mathbf{v}) = d_0 + d_1 v_{\parallel} + d_2 v_{\parallel}^2 + d_3 v_{\perp} + d_4 v_{\perp}^2$  biçiminde olduğunu varsaydığımız Dupree teriminin  $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4$  katsayıları tespit edilecektir. Bunun için elimizdeki temel araçlar (3.38) dağınım bağıntısı, (4.46) biçimindeki  $K_{nm}$  integralleri cinsinden yazılmış dağınım bağıntısı ve (4.37) eşitliği ile tutarlı bir şekilde yazılan

$$D_D(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \sum_k \frac{k^2 J_{0k}^2 |\delta\phi_k|^2}{i(\omega_k^* - \omega_{Dk}(v) - k_{\parallel} v_{\parallel}) + D_D^*(v_{\perp}, v_{\parallel}) k_{\perp}^2} \delta f_k \quad (4.64)$$

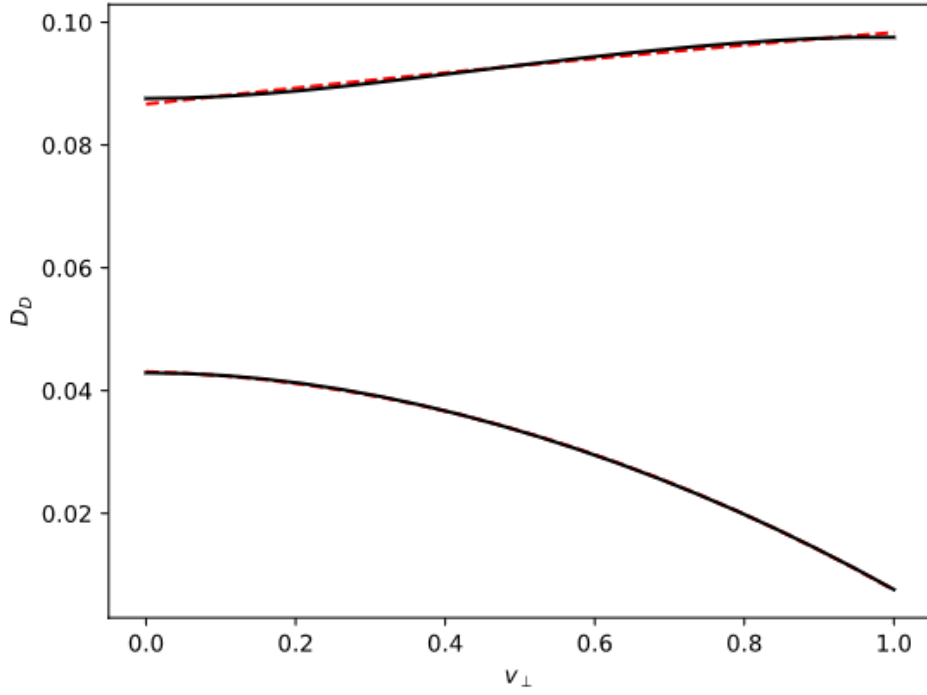
biçimindeki  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$ 'nin açık ifadesidir. Daha önce Balescu'dan aktarılan eşitlik (4.37)'de verilen  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  ifadesi reeldi. Bu noktaya kadar yapılan hesaplar  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  ifadesinin daha genel olarak kompleks olacağını göstermektedir. Bu bakımdan  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  için denklem (4.64)'deki ifade komplekstir. Ayrıca burada  $\omega_k = \omega_{rk}(v) + i\gamma_k$  ve \* üst indisi ise kompleks eşleniği temsil eder.

$d_0, d_1, d_2, d_3, d_4$  katsayılarını tespit etmek için şu şekilde bir algoritma kullanıldı.

- i.) (3.38) dağınım bağıntısında  $D_D(\mathbf{v}) = 0$  alınarak  $\omega$ 'nın değeri bulundu.
- ii.)  $\omega$ 'nın bir önceki adımda bulunan değeri ile  $[-0.5, 0.5]$  aralığında belirli  $v_{\parallel}$  ve  $v_{\perp}$  değerleri (4.64)'deki  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  ifadesinde yerine yazıldı. Böylece yeni bir  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  değeri elde edildi. (Bu seçilen  $v_{\parallel}$  ve  $v_{\perp}$  değerleri amaca göre önce  $v_{\parallel} = 0$  ve  $v_{\perp}$  ise  $[-0.5, 0.5]$  aralığında veya  $v_{\perp} = 0$  ve  $v_{\parallel}$   $[-0.5, 0.5]$  aralığında seçildi.)

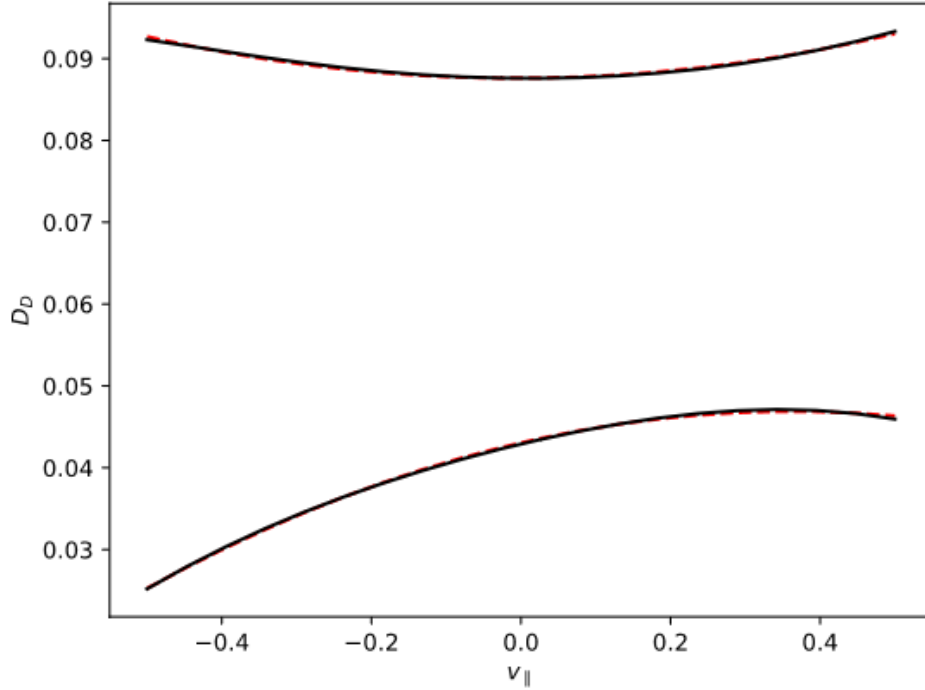
En son elde edilen  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  değeri birinci adımda yeniden kullanılarak yeni bir  $\omega$  değeri bulundu. Böylece bu  $\omega$  değeri ikinci adımda kullanılarak bir yeni  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  değeri daha elde edildi. Bu yöntem sonucunda elde edilen  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  değerleri genellikle birkaç iterasyondan sonra belirli bir  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  değerine yakınsadı. Böylece bu  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  değeri ve  $D_D(\mathbf{v}) = d_0 + d_1 v_{\parallel} + d_2 v_{\parallel}^2 + d_3 v_{\perp} + d_4 v_{\perp}^2$  polinom biçimi kullanılarak  $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4$

katsayıları tespit edildi.  $v_{\parallel} = 0$  ile  $v_{\perp}$  ise  $[-0.5, 0.5]$  aralığında seçildiğinde  $d_0, d_3, d_4$  ve  $v_{\perp} = 0$  ile  $v_{\parallel}$   $[-0.5, 0.5]$  aralığında seçildiğinde ise  $d_0, d_1, d_2$  katsayılarını tespit etmek eğri uydurma yöntemi ile mümkün oldu.



Şekil 4.55:  $v_{\perp}$  için Dupree Difüzyon Katsayısı Polinom Fit.

Şekil 4.55'te grafiğin  $D_D = 0.08$  üzerinde kalan parçası  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$ 'nin reel kısmını  $D_D = 0.05$ 'in altında kalan parçası ise  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$ 'nin sanal kısmını göstermektedir. Siyah çizgiler eşitlik (4.64) ile  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel})$  değerleri hesaplanarak, kırmızı çizgiler ise polinom fiti temsil etmektedir.



Şekil 4.56:  $v_{||}$  için Dupree Difüzyon Katsayısı Polinom Fit.

Şekil 4.56’da grafiğin  $D_D = 0.08$ ’in üzerinde kalan parçası  $D_D(v_{\perp}, v_{||})$ ’nin reel kısmını  $D_D = 0.05$  altında kalan parçası ise  $D_D(v_{\perp}, v_{||})$ ’nin sanal kısmını göstermektedir. Siyah çizgiler eşitlik (4.64) ile  $D_D(v_{\perp}, v_{||})$  değerleri hesaplanarak, kırmızı çizgiler ise polinom fiti temsil etmektedir. Şekil 4.57’de yatay eksen  $k_y$  olmak üzere  $k_y - \gamma$  ve  $k_y - \omega$  uzaylarında dağılım bağıntısının çözümü görülmektedir. Düz çizgiler  $\gamma$ ’yı ve kesikli çizgiler  $\omega$ ’yı temsil etmektedir. Siyah çizgiler  $D_D(v_{\perp}, v_{||}) = 0$  alınmasını, kırmızı çizgiler ise  $D_D(\mathbf{v}) = d_0 + d_1 v_{||} + d_2 v_{||}^2 + d_3 v_{\perp} + d_4 v_{\perp}^2$  açık ifadesinin kullanıldığı durumu temsil etmektedir. Eğri uydurma yöntemi ile elde edilen  $d_0, d_3, d_4$  katsayıları aşağıdadır:

$$d_0 = 0.08667974 + 0.04308331 i$$

$$d_3 = 0.01342785 - 0.00293719 i \quad (4.65)$$

$$d_4 = -0.00176120 - 0.03260807 i$$

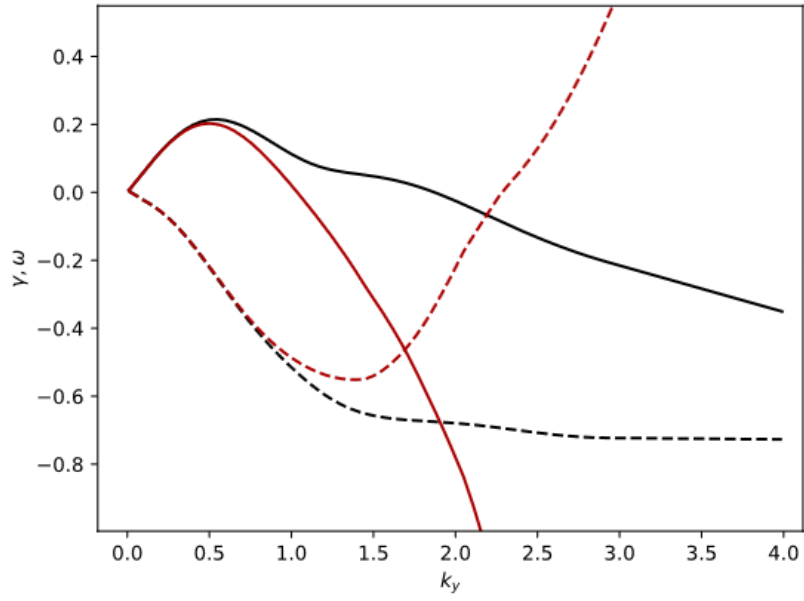
Benzer bir biçimde Şekil 4.58’de yatay eksen  $k_y$  olmak üzere  $k_y - \gamma$  ve  $k_y - \omega$  uzaylarında dağılım bağıntısının çözümü görülmektedir. Burada da düz çizgiler  $\gamma$ ’yı ve kesikli çizgiler  $\omega$ ’yı temsil etmektedir. Siyah çizgiler  $D_D(v_{\perp}, v_{\parallel}) = 0$  alınmasını, kırmızı çizgiler ise  $D_D(\mathbf{v}) = d_0 + d_1 v_{\parallel} + d_2 v_{\parallel}^2 + d_3 v_{\perp} + d_4 v_{\perp}^2$  açık ifadesinin kullanıldığı durumu temsil etmektedir. Eğri uydurma yöntemi ile elde edilen  $d_0, d_1, d_2$  katsayıları aşağıdadır:

$$d_0 = 0.08760955 + 0.04306338 i$$

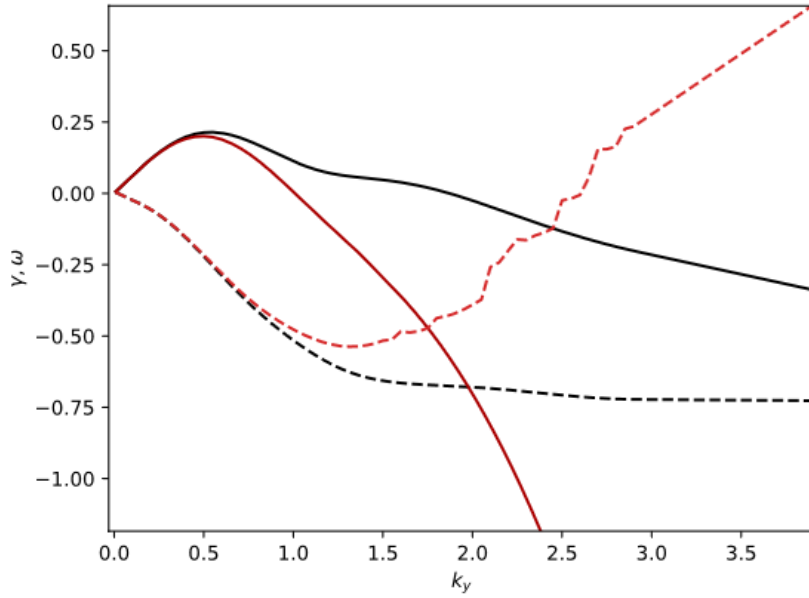
$$d_1 = 0.00034246 + 0.02108074 i \quad (4.66)$$

$$d_2 = 0.02101908 - 0.02903672 i$$

Böylece  $D_D(\mathbf{v})$  için önerdiğimiz polinomial yapının açık ifadesi elde edilmiş oldu.  $D_D(\mathbf{v})$  polinomunun katsayıları denklem (4.46)’da yerine yazılarak dağılım bağıntısı yeniden çözüldü.  $v_{\perp}$  için elde edilen katsayılarla  $k_y - \gamma$  ve  $k_y - \omega$  grafikleri Şekil 4.57’de,  $v_{\parallel}$  için elde edilen katsayılarla  $k_y - \gamma$  ve  $k_y - \omega$  grafikleri ise Şekil 4.58’de görülmektedir. Bu aşama  $D_D(\mathbf{v})$  için elde edilen polinom biçiminin tutarlılığının test edilmesi açısından da önemlidir.



Şekil 4.57:  $v_{\perp}$  için Yapılan Polinom Fit Kullanılarak  $k_y - \gamma$  ve  $k_y - \omega$ .



Şekil 4.58:  $v_{\parallel}$  için Yapılan Polinom Fit Kullanılarak  $k_y - \gamma$  ve  $k_y - \omega$ .

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Manyetize plazmalar üzerine yürütülen araştırmalar astrofizikten termonükleer füzyon olayına kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Özellikle kontrollü termonükleer füzyon olayı için plazmayı hapsedmek amacıyla tokamak ve stellarator gibi cihazlar yoluyla yürütülen deneyler manyetize plazmalar üzerine yapılan teorik çalışmalarını çeşitlendirmektedir. Plazmanın bir tokamak geometrisinde hapsedilmesi konusunda temel sorun çeşitli kararsızlıklar ve türbülans nedeniyle ortaya çıkan anormal madde ve ısı taşınımıdır.

Tokamaklarda ısı mümkün olduğunca duvarlardan uzak tutulup cihazın orta kısmında yoğunlaştırılır. Ancak bu homojen olmayan ısı dağılımını çeşitli salınımlara ve hatta türbülansa neden olur. Isının tokamağın merkezinden duvarlarına doğru taşınması sürecinde rol oynayan en önemli fiziksel etkinin ITG kaynaklı türbülans olduğu düşünülmektedir. Ayrıca manyetize füzyon plazmalarında ITG'nin bilinen yaklaşımlar içinde en iyi gyrokinetik denklem ile betimlendiği bilinmektedir.

Bu tez çalışmasında plazmanın kinetik kuramı bağlamında hem renormalize edilmemiş hem de renormalize edilmiş gyrokinetik denklem ele alınmıştır. Bu amaçla ilk olarak yerel ITG modun elektrostatik limite iyi bir betimleyicisi olan gyrokinetik denklemin adyabatik elektron ve yük nötrlüğü varsayımları altındaki çözümünden elde edilen  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$  biçimindeki dağılım bağıntısının köklerini ayırtmak için Johnson ve Tucker (2009) makalelerinde anlatılan yönteme benzer bir algoritmaya dayanan yeni bir nümerik yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem ile dağılım bağıntısının 4 farklı kökünün  $k_y - \omega$  ve  $k_y - \gamma$  uzayındaki evrimi çizdirilmiştir.

Pek çok durumda kararlı köklerin taşınımına olan etkisi gözardı edilebilir olsa da yarı-lineer teoride lineer olmayan etkileşmeler ortaya çıkabildiği için bu kabul edilebilir bir durum değildir. Elde edilen 4 kökün evrimi incelendiğinde yarı-lineer teoride belli sayıda kararlı veya kararsız modun bir arada göz önüne alınması gerekebileceği durumlar olduğu görülmektedir. Bu nedenle farklı köklerin evrimini izlememizi sağlayan bu çeşit bir sayısal yöntem sadece uygulamada değil aynı zamanda yarı-lineer teorisinin bakış açısından da bazı

kuramsal sonuçlar içerebilir. Literatürde plazma dağılım fonksiyonları nümerik çözümler açısından uygulama kolaylığı sağlayacak biçimde  $\zeta_\alpha > 0$  için  $I_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  olarak adlandırılan fonksiyonlar cinsinden yazılabilmektedir. Böyle bir yeniden yazımın amacı dağılım bağıntısını 2 boyutlu bir integral ile ifade etmek yerine genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonlarının bir kompozisyonu cinsinden 1 boyutlu bir integrale indirgemektir.

Bu tezde geliştirdiğimiz nümerik yöntemi uygulayabilmek için plazma dağılım fonksiyonlarının uzayını,  $I_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  fonksiyonlarının  $\omega$ 'ya göre türevleri olan  $J_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  fonksiyonlarını da işin içine katarak genişletiyoruz. Bu genişletmenin bir zorluğu  $J_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  fonksiyonlarının  $x_{||}$ 'in 4. dereceli terimlerini içermesidir. Bu  $J_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  fonksiyonlarını genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonlarına bağlamak için izlenen standart yöntemin yerine yeni bir yaklaşım getirmeyi zorunlu kılmıştır.

Literatürde  $I_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  integralleri genelleştirilmiş plazma dağılım fonksiyonlarının bir kompozisyonu olarak yazılmaktadır. Bu tezde ise  $I_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  integrallerinin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yeni bir analitik ifadesi bulunmuştur.  $I_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  integrallerini hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazabilmenin bir önemi bilgisayar programlama ile yapılan nümerik hesaplar açısından bu biçimin daha hızlı çalışmasıdır.

Bu tezde aynı zamanda renormalize edilmiş gyrokinetik denklemden elde edilen dağılım bağıntısı ele alınmıştır. Renormalizasyondan gelen terim  $D_D(\mathbf{v})$  Dupree terimidir. Bu lineer olmayan  $D_D(\mathbf{v})$  terimi, türbülansın incelenmesinde kullanılan lineer kararsızlık teorisinde dalgaların enerji yoğunluğunun sonsuza kadar büyümesine engel olarak çözümlerin lineer olmayan fiziksel süreci betimleyebilmesini sağlar.

Ayrıca  $D_D(\mathbf{v})$  terimi tokamak geometrisinden kaçan tanecikler ve ısı için akı hesabında kullanılabilir. Literatürde  $D_D(\mathbf{v})$  Dupree teriminin  $\mathbf{v}$  bağımlılığı biliniyor olsa da uygulamada  $D_D(\mathbf{v})$  terimi için bir analitik ifade bilinmemektedir. Bu tezde Dupree teriminin

$v_{\perp}$  ve  $v_{\parallel}$ 'e bağılı  $D_D(\mathbf{v}) = d_0 + d_1 v_{\parallel} + d_2 v_{\parallel}^2 + d_3 v_{\perp} + d_4 v_{\perp}^2$  biçiminde kompleks katsayılı bir polinom şeklinde yazılabileceği varsayıldı.  $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4$  katsayıları ise aşağıdaki gibi elde edildi:

$$\begin{aligned} d_0 &= 0.08760955 + 0.04306338 i, d_1 = 0.00034246 + 0.02108074 i \\ d_2 &= 0.02101908 - 0.02903672 i, d_3 = 0.01342785 - 0.00293719 i \\ d_4 &= -0.00176120 - 0.03260807 i \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dupree terimi için bu şekilde bir analitik ifade elde edilmesi neoklasik taşınım modelleri ile öngörülemeyen akı miktarlarını uygulamada hesaplayabilme olanağı sunar. Bu akı hesabı bu tezin kapsamı dışındadır. Bu tezde  $D_D(\mathbf{v})$  Dupree teriminin  $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4$  katsayılarının etkisine bakılmış ve grafikler bulgular bölümünde sunulmuştur. Çözümlerden ulaşılan en belirgin sonuç  $D_D(\mathbf{v})$ 'nin etkisinin hem  $\omega$  frekansı hem de  $\gamma$  büyüme oranı için artan  $k_y$  değerleri ile artmasıdır.

$D_D(\mathbf{v})$  için bulunan polinomiye ifadenin denklem (4.46)'da yerine yazılarak çözümlerin yapılmasıyla Dupree teriminin polinomiye biçiminin literatürde kullanılan biçimiyle uyumlu olduğu görülmektedir. Şekil 4.57 ve Şekil 4.58 incelendiğinde  $D_D(\mathbf{v})$ 'nin etkisiyle  $\omega$  büyürken  $\gamma$  büyüme oranı azaldığı için fiziksel olarak  $\omega$ 'nın büyüdüğü pratikte gözlenemez. Dupree terimi için bir analitik ifade elde edebilmek amacıyla renormalize edilmiş gyrokinetik denklemden elde edilen plazma dağılım fonksiyonları, bu tezde tanımlanan  $K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b})$  fonksiyonları cinsinden yazılmıştır.

$K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, \mathbf{b})$  fonksiyonları renormalizasyonun karışık doğası nedeniyle  $I_{nm}(\zeta_{\alpha}, \zeta_{\beta}, \mathbf{b})$  fonksiyonlarından oldukça farklıdır. Bu yaklaşım da bilgisayar programlama ile uygulanan sayısal analiz yöntemleri için ciddi miktarda hız kazandırmıştır. Bu yolla dağılım bağıntısının yarı lineer taşınım problemleri için kullanımı kolaylaşmış ve tercih edilebilirliği artmıştır. Ayrıca  $K_{nm}$  integrallerinin analitik sürekliliğini sağlamak, renormalizasyonun karmaşık doğası nedeniyle literatürde önerilen yöntemlerle mümkün

olmamıştır. Bu nedenle analitik sürekliliği sağlamak için de bu tezde özgün bir yöntem geliştirilmiştir.

Tezde tanımlanan  $K_{nm}(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d, b)$  ve  $J_{nm}(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, b)$  fonksiyonlarının grafikleri farklı parametreler için “Bulgular” bölümünde sunulmuştur. Tezdeki bütün grafikler Python programlama dili kullanılarak çizdirilmiştir. Ayrıca nümerik hesaplamalar çoğunluğu Python ve bir kısmı da Fortran kullanılarak iki programlama dilinin işbirliği ile yapılmıştır.  $I_{nm}$  fonksiyonları üzerine çalışılırken Python arayüzü ile birlikte bir açık kaynak Fortran kütüphanesinden ( <http://github.com/gurcani/zpdgen> ) faydalanılmıştır.



**KAYNAKLAR**

- Balescu, R., 1988, *Transport Processes in Plasmas: Neoclassical Transport Theory*, Elsevier Science, Netherlands, ISBN: 978-0444870926.
- Balescu, R., 2005, *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, London, ISBN: 0-7503-1030-8.
- Bellan, P., M., 2008, *Fundamentals of Plasma Physics*, Cambridge University Press, United Kingdom, ISBN: 978-0-521-5280-09.
- Bethe, H., 1991, *Sakharov's H-Bomb, Sakharov Remembered : A Tribute by Friends and Colleagues*, In: Drell, S.D., Kapitza, S., P. (ed.), 18, . American Institute of Physics, New York, ISBN: 9780883188521, 149-154.
- Bourdelle, C., Garbet, X., Imbeaux, F., Casati, A., Dubuit, N., Guirlet, R., Parisot, T., 2007, A New Gyrokinetic Quasilinear Transport Model Applied to Particle Transport in Tokamak Plasmas, *Physics of Plasmas*, 14, 112501.
- Bromberg, J.L., 1982, *Fusion: Science, Politics, and the Invention of a New Energy Source*, The MIT Press, Cambridge, USA, ISBN: 7258965.
- Campbell, C., 1998, *Destroying the Village: Eisenhower and Thermonuclear War*, Columbia University Press, New York, USA, ISBN: 9780231111232.
- Catto, P. J., 1978, Linearized Gyro-kinetics, *Plasma Physics*, 20 (7) 719-722.
- Chen, F.F., 1984, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Plenum Press, New York, ISBN: 0-306-41332-9.
- Coppi, B., Rosenbluth, M. N., Sagdeev, R.Z., 1967, Instabilities due to Temperature Gradients in Complex Magnetic Field Configurations, *The Physics of Fluids*, 10, 582-588.
- Chen, L., Zonca, F., Lin, Z., 2005, Nonlinear Toroidal Mode Coupling: A New Paradigm for Drift Wave Turbulence in Toroidal Plasmas, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 47 (12), 71-81.
- Davies, B., 1986, Locating the Zeros of an Analytic Function, *Journal of Computational Physics*, 66 (1) 36-49.
- Diamond, P. H., Itoh, S.I., Itoh , K., 2010, *Modern Plasma Physics*, Cambridge University Press, United Kingdom, ISBN: 978-0-521-86920-1.
- Dimits, A.M., Bateman, G., Beer, M.A., Cohen, B.I., Dorland, W., Hammett, G.W., Kim, C., Kinsey, J.E., Kotschenreuther, M., Kritz, A.H., Lao, L.L., Mandrekas, J., Nevins, W.M., Parker, S.E., Redd, A.J., Shumaker, D.E., Sydora, R., Weiland, J., 2000, Comparisons

- and Physics Basis of Tokamak Transport Models and Turbulence Simulations, *Physics of Plasmas* 7, 969-983.
- Dupree, T., H., 1967, Nonlinear Theory of Drift-Wave Turbulence and Enhanced Diffusion, *The Physics of Fluids*, 10, (5) 1049-1059.
- Freeman, M., 2009-2010, 21st Century Science and Technology Winter, 15.
- Fried, B. D., Conte, S.D., 1972, *The Plasma Dispersion Function: The Hilbert Transform of Gaussian*, Academic Press, London, New York, 26 (119) 814.
- Frieman, E.A, Chen, L., 1982, Nonlinear Gyrokinetic Equations for Low-Frequency Electromagnetic Waves in General Plasma Equilibria, *The Physics of Fluids*, 25, 502-508.
- Fujita, T., Tamai, H, Matsukawa, M., Kurita, G., Bialek, J., Aiba, N., Tsuchiya, K., Sakurai, S., Suzuki, Y., Hamamatsu, K., Hayashi, N., Oyama, N., Suzuki, T., Navratil, G., Kamada, Y., Miura, Y., Takase, Y., Campbell, D., Pamela, J., Romanelli, F., Kikuchi, M., 2007, Design Optimization for Plasma Performance and Assessment of Operation Regimes in JT-60SA, *Nuclear Fusion* 47 (11) 1512-1523.
- Gang, F.Y., Diamond, P.H., 1990, A Nonlinear Bounce-Kinetic Equation for Trapped Electrons, *Physics of Plasmas*, 2 (12) 2976-2992.
- Gautschi, W., 1970, Efficient Computation of the Complex Error Function, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 7, 187-198.
- Guzdar, P.N., Chen, L., Tang, W.M., Rutherford, P.H., 1983, Ion-temperature-gradient Instability in Toroidal Plasmas, *Physics of Fluids*, 26, 673-682.
- Gültekin, Ö., Rızaoğlu, E., Akdeniz, K., G., 2013, Ion-Cyclotron Resonance Frequency Interval Dependence on the O VI Ion Number Density in the North Polar Coronal Hole 1.5 R-3R Region, *J. Astrophys. Astr.*, 34, 349-355.
- Gürçan, Ö.D., 2014, Numerical Computation of the Modified Plasma Dispersion Function with Curvature, *Journal of Computational Physics*, 269, 156-167.
- Hahm, T.S., 1988, Nonlinear Gyrokinetic Equations for Tokamak Microturbulence, *Physics of Fluids*, 31, 2670-2673.
- Hahm, T.S., 1992, Flow-shear-induced Compton Scattering of Electron Drift Instability, *Physics of Plasmas*, 4, 2801-2806.
- Hahm, T.S., Tang W.M., 1990, Weak Turbulence Theory of Ion Temperature Gradient Modes for Inverted Density Plasmas, *Physics of Plasmas*, 2, 1815-1821.
- Hahm, T.S., Tang W.M., 1991, Weak Turbulence Theory of Collisionless Trapped Electron Driven Drift Instability in Tokamaks, *Physics of Plasmas*, 3, 989-999.

- Horton, W., 1999, Drift Waves and Transport, *Reviews of Modern Physics*, 71, 735-738.
- Horton, W., Choi, D.I., Tang, W. M., 1981, Toroidal Drift Modes Driven by Ion Pressure Gradient, *Physics of Fluids*, 24, 1077-1085.
- Howes, G.G., Cowley, S.C., Dorland, W., Hammett, G.W., Quataert, E., Schekochihin, A.A., 2006, Astrophysical Gyrokinetics: Basic Equations and Linear Theory, *The Astrophysical Journal*, 651, 590-614.
- Idomura, Y., 2006, Self-organization in Electron Temperature Gradient Driven Turbulence, *Physics of Plasmas*, 13, 080701.
- Jackson, J.D., 1999, *Classical Electrodynamics*, 3<sup>rd</sup> ed., Wiley and Sons, New York, ISBN: 978-0471309321.
- Johnson, T., Tucker, W., 2009, Enclosing All Zeros of an Analytic Function-A Rigorous Approach, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228, 418-423.
- Kadomtsev, B.B., 1992, *Tokamak Plasma: A Complex Physical System*, Institute of Physics Publishing, London, UK., ISBN: 0-7503-0234-8.
- Kasper, J.C., Maruca, B.A., Stevens, M.L., Zaslavsky, 2013, Sensitive Test for Ion-Cyclotron Resonant Heating in the Solar Wind, *Phys. Rev. Lett.*, 110, 1-5.
- Kim, J.Y., Kishimoto, Y., Horton, W., Tajima, 1994, Kinetic Resonance Damping Rate of the Toroidal Ion Temperature Gradient Mode, *Physics of Plasmas* 1(4), 927-936.
- Kim, E.J., Diamond, P.H., Malkov, M., Hahm, T.S., Itoh, K., Itoh, S.I., Champeaux, S., Gruzinov, I., Gurcan, O., Holland, C., 2003, Non-perturbative Models of Intermittency in Drift-wave Turbulence: Towards a Probabilistic Theory of Anomalous Transport, *Nuclear Fusion*, 43 (9) 961-968.
- Kulsrud, R.M., 2005, *Plasma Physics for Astrophysics*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, ISBN: 9780691120737
- Kuroda, T., Sugama, H., Kanno, R., Okamoto, M., Horton, W., 1998, Initial Value Problem of the Toroidal Ion Temperature Gradient Mode, *Journal of the Physical Society of Japan*, 67(11), 3787-3793.
- Lee, G.S., Diamond, P.H., 1986, Theory of Ion-Temperature-Gradient-Driven Turbulence in Tokamaks, *The Physics of Fluids*, 29, 3291-3313.
- Lee, W.W., 1983, Gyrokinetic Approach in Particle Simulation, *The Physics of Fluids*, 26, 556-565.
- Mattor, N., 1992, Can Landau-Fluid Models Describe Nonlinear Landau Damping?, *The Physics of Fluids B*, 4, 3952-3961.

- Mattor, N., Diamond, P.H., 1989, Theory of Weak Ion Temperature Gradient-Driven Turbulence Near the Threshold of Instability, *The Physics of Fluids B*, 1 (10) 1980-1992.
- Meade, D., 2010, 50 Years of Fusion Research, *Nuclear Fusion*, 5, 1-14.
- Moradi, S., Anderson, J., Weysow, B., 2012, *Non-local gyrokinetic model of linear ion-temperature-gradient modes*, physics.plasm-ph, <https://arxiv.org/pdf/1201.2532.pdf>, [Ziyaret tarihi: 4 Kasım 2017].
- Murray L.R., Holbert, K.E., 2014, *Nuclear Energy: An Introduction to the Concepts, Systems and Applications of Nuclear Processes*, Butterworth-Heinemann, USA, ISBN: 978-605-320-174-8.
- Nishikawa, K., Wakatani, M., 2000, *Plasma Physics: Basic Theory with Fusion Applications (Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics)*, Springer, USA, ISBN-13: 978-3540652854.
- Peacock, N.J., Robinson, D.C., Forest, M.J., Wilcock, P.D., Sannikov, V.V., 1969, Measurement of the Electron Temperature by Thomson Scattering in Tokamak T3, *Nature*, 224, 488.
- Proceeding of the 22nd IAEA Fusion Energy Conference (Vienne, IAEA, Geneva, Switzerland), 2008, <http://www-naweb.iaea.org/naweb/physics/FEC/FEC2008/html/index.htm>, [Ziyaret tarihi: 4 Kasım 2017].
- Proceedings of the 21st IAEA Fusion Energy Conference (Vienne, IAEA, Chengdu, China), 2006, [http://www-naweb.iaea.org/naweb/physics/FEC/FEC2006/papers/ov\\_1-1.pdf](http://www-naweb.iaea.org/naweb/physics/FEC/FEC2006/papers/ov_1-1.pdf), [Ziyaret tarihi: 4 Kasım 2017].
- Seshadri, S.R., 1973, *Fundamentals of Plasma Physics*, American Elsevier Pub.Co., USA, ISBN: 0444001255.
- Smilon P.L., Diamond, P.H., 1984, Nonlinear Interaction of Toroidicity-Induced Drift Modes, *Physics of Fluids*, 27, 916-924.
- Smith, R.A., Krommes, J.A., Lee, W.W., 1985, Saturation of Drift Instabilities by Electron Dynamics, *Physics of Fluids*, 28, 1069-1076.
- Taylor, J. B., 1967, Magnetic Moment Under Short-Wave Electrostatic Perturbations, *Physics of Fluids*, 10, 1357-1359.
- Wagner, F., Becker, G., Behringer, K., Campbell, D., Eberhagen, A., Engelhardt, W., Fussmann, G., Gehre, O., Gernhardt, J., Gierke, G.V., Haas, G., Huang, M., Karger, F., Keilhacker, M., Klüber, O., Kornherr, M., Lackner, K., Lisitano, G., Lister, G.G., Mayer, H.M., Meisel, D., Müller, E.R., Murmann, H., Niedermeyer, H., Poschenrieder, W., Rapp, H. Röhr, H., Schneider, F., Siller, G., Speth, E., Stäbler, A., Steuer, K.H., Venus, G., Vollmer, O., Yü, Z., 1982, Regime of Improved Confinement and High

Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak, *Physical Review Letters*, 49 (19) 1408-1412.



## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Özgür GÜLTEKİN
Doğum Yeri	İstanbul
Doğum Tarihi	27.06.1982
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	506 631 25 82
E-Posta Adresi	gultekino@yahoo.com
Web Adresi	www.ozgurgultekin.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü
Mezuniyet Yılı	16.06.2006

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği
Mezuniyet Tarihi	05.01.2010

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı
Mezuniyet Tarihi	05.12.2017

Makale ve Bildiriler	
Gültekin, Ö., Rızaoğlu, E., Akdeniz, K., G., 2013, Ion-Cyclotron Resonance Frequency Interval Dependence on the O VI Ion Number Density in the North Polar Coronal Hole 1.5 R-3R Region, <i>J. Astrophys. Astr.</i> , 34, 349-355.	
Gültekin, Ö., Gürcan, Ö.D., 2017, Stable and Unstable Roots of Ion Temperature Gradient Driven Mode Using Curvature Modified Plasma Dispersion Functions, arXiv:1708.03026.	