

TEMMUZ 2020

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

ŞAİME GÜLTÜRK

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞIRLIKLİ İKİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN
BAZI DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞAİME GÜLTÜRK

TEMMUZ 2020

**AĞIRLIKLİ İKİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN
BAZI DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Abdullah KABLAN

Şaime GÜLTÜRK

Temmuz 2020



© 2020 [Şaime GÜLTÜRK]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Şaime GÜLTÜRK

ABSTRACT
ON SOME TRANSFORMATIONS OF WEIGHTED SECOND-ORDER
DIFFERENCE EQUATIONS

GÜLTÜRK, Şaime
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Abdullah KABLAN
July 2020
42 pages

This Sturm-Liouville problems often appear in mathematics, mechanics, physics. Spectral analysis of Sturm-Liouville operators plays an important role in knowing behaviour of operators. There are two methods to do this analysis. One of these methods is classical method that uses the arguments of differential calculus and other is difference equation form. In this from, continuous Sturm-Liouville operators are converted to discrete form and obtained a difference such an equation is called discrete Sturm-Liouville operator. Sometimes this method could be useful because of using simple operations instead of complicated operations of calculus, [1]. Most of this conversion of continuous Sturm-Liouville operator to discrete Sturm-Liouville difference equation gives a general weighted second-order difference equation. In this review, we consider a weighted second-order difference equation of the form,

$$-\alpha(n)y(n+1) + \beta(n)y(n) - \gamma(n-1)y(n-1) = \alpha(n)\lambda y(n), \quad (1)$$

where $\alpha(n) > 0$ is called weight function and $\beta(n)$ is a potential function, [2], [3]. Here, two transformations are considered. These transformations transform the equation (1) into another weighted second order difference equation. In addition, we study how boundary conditions transform. It is also studied the boundary conditions which depend linearly on the eigen-parameter with various boundary conditions. Finally, we compared the spectrum of original difference equation and transformed difference equation with their boundary conditions.

Key Words: Sturm-Liouville Operators, Difference Equations, Spectral Analysis

ÖZET

AĞIRLIKLİ İKİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN BAZI DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE

GÜLTÜRK, Şaiine
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Prof. Dr. Abdullah KABLAN
Temmuz 2020
42 sayfa

Sturm-Liouville problemleri genellikle matematik, mekanik, fizikte görülür. Sturm-Liouville operatörlerinin spektral analizi, operatörlerin davranışlarını bilmede önemli bir rol oynamaktadır. Bu analizi yapmak için iki yöntem vardır. Bu yöntemlerden biri, diferansiyel hesap argümanlarını kullanan klasik yöntem diğeri ise fark denklem formudur. Burada sürekli Sturm-Liouville operatörleri ayrık forma dönüştürülür ve böyle bir denklemin ayrık Sturm-Liouville operatörü olarak adlandırılan bir fark denklemi elde edilir. Bazen bu yöntem kalkülüsün karmaşık operasyonları yerine basit operasyonlar kullanılması nedeniyle yararlı olabilir [1]. Sürekli Sturm-Liouville operatörünün fark denklemine dönüşümünün çoğu, ikinci dereceden fark denklemini verir. Bu ikinci dereceden fark denklemi formu,

$$-\alpha(n)y(n+1) + \beta(n)y(n) - \gamma(n-1)y(n-1) = \alpha(n)\lambda y(n), \quad (1)$$

dir. Burada $\alpha(n) > 0$ ağırlık fonksiyonu $\beta(n)$ potansiyel fonksiyondur, [2], [3]. Burada iki dönüşüm dikkate alınır. Bu dönüşümler (1) denklemini başka bir ikinci mertebeden fark denklemine dönüştürür. Ayrıca, sınır koşullarının nasıl dönüştüğü incelenir. Ayrıca, çeşitli sınır koşulları ile öz parametresine lineer olarak bağlı olan sınır koşulları da incelenmiştir. Son olarak, orijinal fark denklemi spektrumu ve dönüştürülmüş fark denklemini sınır koşulları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Operatörleri, Fark Denklemleri, Spektral Analiz.

Emine & Dede Arslan ile Burak Gültürk'e...

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca desteğini ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Abdullah KABLAN'a minnettarlığımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.....	8
ÖN HAZIRLIK	8
BÖLÜM 3.....	12
NON-DIRICHLET SINIR ŞARTLARINDAN AFİNE DÖNÜŞÜM	12
BÖLÜM 4.....	21
SPEKTRUMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI.....	21
BÖLÜM 5.....	30
AFİNDEN NON-DIRICHLET SINIR ŞARTLARINA DÖNÜŞÜM	30
BÖLÜM 6.....	40
SONUÇ.....	40
KAYNAKLAR	41

SEMBOLLER LİSTESİ

λ	Özdeğer
$\dot{u}$	u nun türevi
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Matematikte, fizikte ve mühendislikte birçok alan fark denklemleri ve sınır değer problemleri ile doğrudan ilişkilidir. Bu nedenle uygulamaları bakımından fark denklemleri ve sınır değer problemlerini derinlemesine araştırmak ve öğrenmek fayda sağlayacaktır.

Bu tezde Sturm-Liouville denklemine uygulanacak bazı dönüşümler ile fark denklemleri elde edilir. Daha sonra elde edilen fark denklemleri ile ilgili bazı çalışmalar yapılarak tez devam ettirilir.

Tanım 1.1: Sınırlı bir bölgede fizik ile alakalı bir durumun matematiksel olarak nasıl bir davranış sergilediği incelenmek istenirse o sınırlı bölgenin sınırında çoğunlukla bağımsız olmayan değişkene bazı şartlar uygulanır. Bu şartlar aşağıdaki gibidir.

1. Dirichlet Sınır Şartı: v fonksiyon belirtilen bölgenin sınırı üzerinde tanımlansın. L uzunluğu $0 < x < L$ olmak üzere Dirichlet sınır şartları

$$v(0) = \gamma, \quad v(L) = \eta$$

olarak tanımlanır. Buradaki γ ve η sabittir. Dikdörtgensel bir bölge için $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$ olmak üzere Dirichlet sınır şartları

$$v(0, y), v(L_1, y), v(x, 0), v(x, L_2)$$

şeklinde verilir.

2. Neumann Sınır Şartı: Neumann sınır şartı L uzunluğu için

$$v_x(0, t) = \gamma, \quad v_x(L, t) = \eta$$

şeklinde tanımlanır.

3. Robin (Karışık) Sınır Şartı: Robin sınır şartında bağımsız olmayan v değişkeninin lineer kombinasyonu ve $\frac{dv}{dn}$ normal formu belirtilen sınır üzerinde tanımlıdır. Mesela $v(0, y) + v_x(0, y)$ veya $v(L_1, y) + v_x(L_2, y)$ şeklinde ise bunlara Robin (Karışık) sınır şartı denir.

Tanım 1.2: $\square_{\pm} = \{z \in \square \mid \pm \operatorname{Im}(z) > 0\}$ olsun. $m: \square_{+} \rightarrow \square$, $\square_{+}$ ve $m(\square_{+}) \subseteq \square_{+}$ üzerinde analitik ise m bir Nevanlinna/Herglotz fonksiyonudur.

Tanım 1.3: Tezde kullanılan spektrum özdeğerlerin kümesidir.

Tanım 1.4: Sturm-Liouville operatörü

$$\ell \equiv -\frac{d}{dx^2} + g(x)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ℓ operatörünün önemli iki sınır koşulları şunlardır:

- 1)
$$\begin{aligned} u(a) \cos \alpha + \dot{u}(a) \sin \alpha &= 0 \\ u(b) \cos \beta + \dot{u}(b) \sin \beta &= 0 \end{aligned}$$
- 2)
$$\begin{aligned} u(a) &= u(b) \\ \dot{u}(a) &= \dot{u}(b) \end{aligned}$$

Aşağıda verilecek olan sınır değer problemleri ise Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır:

$$\ell u(x) = -\frac{d^2 u}{dx^2} + g(x)u = \lambda u$$

$$\begin{aligned} u(a) \cos \alpha + \dot{u}(a) \sin \alpha &= 0 \\ u(b) \cos \beta + \dot{u}(b) \sin \beta &= 0 \end{aligned}$$

Tanım 1.5: Sturm-Liouville denklemi

$$(f(x)\dot{u})' + (\lambda r(x) + g(x))u = 0$$

şeklinde yazılır. Sturm-Liouville denkleminde ileri fark formülü ve geri fark formülünün uygulanması ile fark denklemi elde edilecektir. Sırası ile ileri fark formülü ve geri fark formülü aşağıdaki gibidir:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n).$$

$$\nabla(n) = f(n) - f(n-1)$$

Şimdi Sturm-Liouville denkleminde fark formülü uygulanırsa,

$$\Delta(f(n-1)\Delta u(n-1)) + g(n)u(n) = -\lambda r(n)u(n)$$

$$\Delta(f(n-1)u(n) - f(n-1)u(n-1)) + g(n)u(n) = -\lambda r(n)u(n)$$

$$f(n)u(n+1) - f(n)u(n) - f(n-1)u(n) + f(n-1)u(n-1) + g(n)u(n) = -\lambda r(n)u(n)$$

$$f(n)u(n+1) - u(n)(f(n) - f(n-1) + g(n)) + f(n-1)u(n-1) = -\lambda r(n)u(n)$$

ve burada $f(n) = a_2(s)$ ve $f(n) - f(n-1) + g(n) = a_1(s)$ denirse (1.1) elde edilir.

Buradaki esas amaç Binding ve Browne'nin yaptığı dönüşümler ([1,2] de kullanılan) ve faktörizasyonun (çarpanlara ayırmayı) ayrık formda yapılmasıdır. Bu sebeple [3-5] de verilen fark denklemleri için dönüşümler fikri kullanılır. Bu tezde yukarıda elde edilen aşağıdaki fark denklemi incelenir.

$$l\varphi := a_2(s)\varphi(s+1) - a_1(s)\varphi(s) + a_2(s-1)\varphi(s-1) = -a_2(s)\lambda\varphi(s) \quad (1.1)$$

$a_2(s) > 0$ ve $a_1(s)$ potansiyel fonksiyondur.

(1.1) ile ilişkili l , biçimsel fark operatörünün birden fazla alternatif faktörizasyonu olmasına karşın (Bakınız [4], [5], [2,6]) daha sonra ispatlanacak olan Teorem 1.1 deki faktörizasyon daha önemli olacaktır; çünkü sürekli Sturm-Liouville durumundakine çok benzemektedir. Şimdi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilen ikinci mertebeden fark denklemi ele alınır.

$$a_2(s)\varphi(s+1) - (a_1(s) - \lambda_0 a_2(s))\varphi(s) + a_2(s-1)\varphi(s-1) = -a_2(s)(\lambda - \lambda_0)\varphi(s) \quad (1.2)$$

Burada $s = 1, \dots, m-1$ dir. λ_0 ile (1.1) in aşağıdaki şartları sağlayan en küçük öz değeri gösterilir.

$$h\varphi(-1) + \varphi(0) = 0, \quad H\varphi(m-1) + \varphi(m) = 0 \quad (1.3)$$

Burada h ve H sabitlerdir (Bakınız [9], [10]). Şimdi aşağıdaki biçimsel operatörün faktörizasyonu bulunur. $s = 0, \dots, m-1$ olmak üzere

$$l\varphi(s) := -\varphi(s+1) + \left(\frac{a_1(s)}{a_2(s)} - \lambda_0 \right) \varphi(s) - \frac{a_2(s-1)}{a_2(s)} \varphi(s-1) = (\lambda - \lambda_0) \varphi(s) \quad (1.4)$$

dir. Öyle ki burada S ve Q nun her ikisi de birinci mertebeden biçimsel fark operatörü olmak üzere $l = SQ$ olacaktır.

Teorem 1.1: $\phi_0(n)$, $\lambda = \lambda_0$ a karşılık gelen (1.1) in bir çözümü olsun ve aşağıdaki biçimsel fark operatörleri tanımlansın.

$$S\varphi(s) = \varphi(s) - \varphi(s-1) \frac{\phi_0(s-1)c(s-1)}{\phi_0(s)c(s)}, \quad s = 0, \dots, m \quad (1.5)$$

$$Q\varphi(s) = \varphi(s+1) - \varphi(s) \frac{\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)}, \quad s = -1, \dots, m-1.$$

O zaman biçimsel olarak $s = 0, \dots, m-1$ için $l\varphi(s) = SQ\varphi(s)$ dir ve bundan sonra dönüştürülmüş operatör olarak adlandırılacak olan $\tilde{l}$ operatörü $s = 0, \dots, m-1$ için $\tilde{l}\tilde{\varphi}(s) = QS\tilde{\varphi}(s)$ ile verilir. Dolayısıyla dönüştürülmüş denklem

$$\tilde{a}_2(s)\tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{a}_1(s)\tilde{\varphi}(s) + \tilde{a}_2(s-1)\tilde{\varphi}(s-1) = -\tilde{a}_2(s)\lambda\tilde{\varphi}(s), \quad s = 0, \dots, m-2 \quad (1.6)$$

dır. Burada $\tilde{a}_2(s)$ ve $\tilde{a}_1(s)$ aşağıdaki biçimdedir.

$$\tilde{a}_2(s) = \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} > 0, \quad s = -1, \dots, m-1 \quad (1.7)$$

$$\tilde{a}_1(s) = \left[\frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)a_2(s+1)} - \frac{a_2(s-1)\phi_0(s-1)}{a_2(s)\phi_0(s)} + \frac{a_1(s)}{a_2(s)} - \lambda_0 \right] \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)}, \quad s = 0, \dots, m-1. \quad (1.8)$$

İspat: S ve Q nun tanımından aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
SQ\varphi(s) &= S \left(\varphi(s+1) - \frac{\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)} \varphi(s) \right) \\
&= \varphi(s+1) - \frac{\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)} \varphi(s) - \left[\varphi(s) - \frac{\phi_0(s)}{\phi_0(s-1)} \varphi(s-1) \right] \frac{\phi_0(s-1)c(s-1)}{\phi_0(s)c(s)}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

(1.4) ifadesi burada $\phi_0(s+1)$ için yerleştirilir ve bazı terimler sadeleştirilirse aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned}
SQ\varphi(s) &= \varphi(s+1) - \frac{1}{\phi_0(s)} \left[\frac{a_1(s)}{a_2(s)} \phi_0(s) - \lambda_0 \phi_0(s) - \frac{a_2(s-1)}{a_2(s)} \phi_0(s-1) \right] \varphi(s) \\
&\quad - \varphi(s) \frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)}{\phi_0(s)a_2(s)} + \varphi(s-1) \frac{a_2(s-1)}{a_2(s)} \\
&= \varphi(s+1) - \frac{1}{\phi_0(s)} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} \phi_0(s) \varphi(s) + \frac{1}{\phi_0(s)} \lambda_0 \phi_0(s) \varphi(s) \\
&\quad + \frac{1}{\phi_0(s)} \frac{a_2(s-1)}{a_2(s)} \phi_0(s-1) \varphi(s) - \varphi(s) \frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)}{\phi_0(s)a_2(s)} + \varphi(s-1) \frac{a_2(s-1)}{a_2(s)} \\
&= \varphi(s+1) - \left(\frac{a_1(s)}{a_2(s)} - \lambda_0 \right) \varphi(s) + \varphi(s-1) \frac{a_2(s-1)}{a_2(s)} \\
&= -(\lambda - \lambda_0) \varphi(s), \quad s = 0, \dots, m-1.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Böylece $l = SQ$ olur. Şimdi $Q\varphi(s) = \tilde{\varphi}(s)$, $s = 0, \dots, m-1$ denirse

$$\begin{aligned}
QS\tilde{\varphi}(s) &= QSQ\varphi(s) \\
&= -Q(\lambda - \lambda_0) \varphi(s) \\
&= -(\lambda - \lambda_0) \tilde{\varphi}(s), \quad s = 0, \dots, m-1
\end{aligned} \tag{1.11}$$

elde edilir ki bu da gösterilmesi gereken dönüştürülmüş denklemdir. $\tilde{l}$ yı bulmak için $QS\tilde{\varphi}(s)$ in belirlenmesi gerekmektedir. Öncelikle

$$S\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s-1) \frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)}{\phi_0(s)a_2(s)}, \quad s = 0, \dots, m-1 \quad (1.12)$$

dir. $s = 0, \dots, m-2$ için

$$\begin{aligned} Q(S\tilde{\varphi}(s)) &= \tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{\varphi}(s) \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)a_2(s+1)} - \left[\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s-1) \frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)}{\phi_0(s)a_2(s)} \right] \frac{\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)} \\ &= \tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{\varphi}(s) \left[\frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)a_2(s+1)} + \frac{\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)} \right] \\ &\quad + \tilde{\varphi}(s-1) \left[\frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)a_2(s)\phi_0(s)} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)}$ ile çarpılır ve (1.11) dikkate alınır

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi}(s+1) \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} - \tilde{\varphi}(s) \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} \left[\frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)a_2(s+1)} + \frac{\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)} \right] \\ &\quad + \tilde{\varphi}(s-1) \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} \left[\frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)a_2(s)\phi_0(s)} \right] \\ &\tilde{\varphi}(s+1) \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} - \tilde{\varphi}(s) \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} \left[\frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)a_2(s+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\phi_0(s)} \left(-\lambda_0 \phi_0(s) - \frac{a_2(s-1)}{a_2(s)} \phi_0(s-1) + \frac{a_1(s)}{a_2(s)} \phi_0(s) \right) \right] + \tilde{\varphi}(s-1) \frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)}{\phi_0(s)} \\ &\tilde{\varphi}(s+1) \frac{\phi_0(s)c(s)}{\phi_0(s+1)} - \tilde{\varphi}(s) \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} \left[\frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)a_2(s+1)} - \lambda_0 - \frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)}{\phi_0(s)a_2(s)} + \frac{a_1(s)}{a_2(s)} \right] \\ &\quad + \tilde{\varphi}(s-1) \frac{\phi_0(s-1)a_2(s-1)}{\phi_0(s)} = -(\lambda - \lambda_0) \tilde{\varphi}(s) \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır ve buradan

$$\tilde{a}_2(s)\tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{a}_1(s)\tilde{\varphi}(s) + \tilde{a}_2(s-1)\tilde{\varphi}(s-1) = -\tilde{a}_2(s)\lambda\tilde{\varphi}(s)$$

elde edilir ki bu da (1.6) nın kendisidir.



BÖLÜM 2

ÖN HAZIRLIK

$s = 0, \dots, m-1$ için h ve H sabit olmak üzere, ikinci dereceden aşağıdaki sınır şartlarına sahip (1.1) fark denklemi göz önüne alınır:

$$h\varphi(-1) + \varphi(0) = 0, \quad H\varphi(m-1) + \varphi(m) = 0. \quad (2.1)$$

Genelliği bozmadan, (1.1), (2.1) in en küçük öz değeri olan λ_0 in $\lambda_0 = 0$ olacak şekilde spektrum ötelenir.

Birinci bölümden aşağıdaki önemli sonuçlar hatırlanır. Şimdi $s = -1, \dots, m-1$ için $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ dönüşümü $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s+1) - \varphi(s)(\phi_0(s+1)/\phi_0(s))$ ile daha önce tanımlanmıştı. Burada $\phi_0(s)$; (1.1), (2.1) in $\lambda_0 = 0$ öz değerine karşılık gelen bir öz fonksiyondur. Bu dönüşüm altında (1.1) denklemi daha önce ispatlanan aşağıdaki dönüştürülmüş denklemi verir,

$$\tilde{a}_2(s)\tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{a}_1(s)\tilde{\varphi}(s) + \tilde{a}_2(s-1)\tilde{\varphi}(s-1) = -\tilde{a}_2(s)\lambda\tilde{\varphi}(s), \quad s = 0, \dots, m-2. \quad (2.2)$$

Burada yine

$$\tilde{a}_1(s) = \left[\frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)a_2(s+1)} - \frac{a_2(s-1)\phi_0(s-1)}{a_2(s)\phi_0(s)} + \frac{a_1(s)}{a_2(s)} - \lambda_0 \right] \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)}, \quad s = 0, \dots, m-2$$

$$\tilde{a}_2(s) = \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} > 0, \quad s = 0, \dots, m-1 \quad (2.3)$$

dir. Ayrıca (2.1) sınır şartlarını sağlayan φ , bu dönüşüm altında aşağıdaki Dirichlet sınır şartlarını sağlayan $\tilde{\varphi}$ ya dönüşür,

$$\tilde{\varphi}(-1) = 0, \quad \tilde{\varphi}(m-1) = 0 \quad (2.4)$$

$z(s) > 0$ için $z(s)$, $\hat{\lambda}_0$ (2.2) nin en küçük öz değerinden daha küçük olmak üzere $\lambda = \hat{\lambda}_0$ iken (2.2) nin bir çözümü olduğundan (2.2) ye $\hat{\phi}(s) = \tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s-1)(z(s)/z(s-1))$ $s = 0, \dots, m-1$ için $\tilde{\phi} \mapsto \hat{\phi}$ biçiminde tanımlanan dönüşüm uygulanırsa $s = -1, \dots, m-1$ için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\hat{a}_2(s)\hat{\phi}(s+1) - \hat{a}_1(s)\hat{\phi}(s) + \hat{a}_2(s-1)\hat{\phi}(s-1) = -\hat{a}_2(s)\lambda\hat{\phi}(s), \quad s = 1, \dots, m-2 \quad (2.5)$$

$s = 0, \dots, m-1$ için

$$\begin{aligned} \hat{a}_2(s) &= \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)} \\ \hat{a}_1(s) &= \left[\frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)} + \frac{z(s)}{z(s-1)} \right] \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

dir. Burada $\hat{a}_2(-1) = a_2(-1)$ alınır, böylece $\hat{a}_2(s)$, $s = -1, \dots, m-1$ için tanımlanır.

Şimdi (2.2) ye $\hat{\phi}(s) = \tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s-1)(z(s)/z(s-1))$ dönüşümü uygulanarak (2.5) in nasıl elde edildiği incelenir. (2.2) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse

$$l_2\tilde{\phi}(s) = -\tilde{\phi}(s+1) + \left(\frac{\tilde{a}_1(s)}{\tilde{a}_2(s)} - \lambda_0 \right) \tilde{\phi}(s) - \frac{\tilde{a}_2(s-1)}{\tilde{a}_2(s)} \tilde{\phi}(s-1) = (\lambda - \lambda_0) \tilde{\phi}(s)$$

elde edilir. Burada P ve R birinci mertebeden fark operatörü olmak üzere $l_2 = PR$ olacaktır.

Teorem 2.1: $P\tilde{\phi}(s) := \tilde{\phi}(s+1) - \tilde{\phi}(s) \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)}$

$$R\tilde{\phi}(s) := \tilde{\phi}(s) - \tilde{\phi}(s-1) \frac{z(s)}{z(s-1)}$$

dir. Dönüşüm denklemi $RP\hat{\phi}(s) = (\lambda - \lambda_0)\hat{\phi}$ yı veren sonuç $l_2 = PR$ ve $\hat{\phi}(s) = R\tilde{\phi}(s)$

dir. $s = 1, \dots, m-1$ için

$$\hat{l}\hat{\phi}(s) := -\hat{a}_2(s)\hat{\phi}(s+1) + \hat{a}_1(s)\hat{\phi}(s) - \hat{a}_2(s-1)\hat{\phi}(s-1) = \hat{a}_2(s)\lambda\hat{\phi}(s)$$

burada, $s = 0, \dots, m-1$ için

$$\hat{a}_2(s) = \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)}$$

$$\hat{a}_1(s) = \left[\frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)} + \frac{z(s)}{z(s-1)} \right] \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)}$$

dir.

İspat: P ve R nin tanımından

$$PR\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{\varphi}(s) \frac{z(s+1)}{z(s)} - \left(\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s-1) \frac{z(s)}{z(s-1)} \right) \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)}$$

$z(s+1)$ yerine $\tilde{\varphi}(s+1)$ yazılır.

O halde

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{\varphi}(s) \left(\frac{\tilde{a}_1(s)}{\tilde{a}_2(s)} - \lambda_0 - \frac{\tilde{a}_2(s-1)z(s-1)}{\tilde{a}_2(s)z(s)} \right) - \frac{\tilde{a}_2(s-1)z(s-1)}{\tilde{a}_2(s)z(s)} \tilde{\varphi}(s) + \frac{\tilde{a}_2(s-1)}{\tilde{a}_2(s)} \tilde{\varphi}(s-1) \\ &= \tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{a}_1(s)}{\tilde{a}_2(s)} + \lambda_0 \tilde{\varphi}(s) + \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{a}_2(s-1)z(s-1)}{\tilde{a}_2(s)z(s)} - \tilde{\varphi}(s) \frac{\tilde{a}_2(s-1)z(s-1)}{\tilde{a}_2(s)z(s)} + \tilde{\varphi}(s-1) \frac{\tilde{a}_2(s-1)}{\tilde{a}_2(s)} \\ &= \tilde{\varphi}(s+1) - \tilde{\varphi}(s) \left(\frac{\tilde{a}_1(s)}{\tilde{a}_2(s)} - \lambda_0 \right) - \tilde{\varphi}(s-1) \frac{\tilde{a}_2(s-1)}{\tilde{a}_2(s)} \\ &= -(\lambda - \lambda_0) \tilde{\varphi}(n) \end{aligned}$$

dir. Böylece $l_2 = PR$ olduğu gösterildi. $\hat{\varphi}(s) = R\tilde{\varphi}(s)$ denirse

$$RP\hat{\varphi}(s) = R(PR\tilde{\varphi}(s)) = -R(\lambda - \lambda_0)\tilde{\varphi}(s) = -(\lambda - \lambda_0)\hat{\varphi}(s)$$

olur. Şimdi dönüştürülmüş denklem elde edilebilir. P ve R nin tanımından

$$P\hat{\varphi}(s) = \hat{\varphi}(s+1) - \hat{\varphi}(s) \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)}$$

$$\begin{aligned}
RP\hat{\phi}(s) &= R\left(\hat{\phi}(s+1) - \hat{\phi}(s) \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)}\right) \\
&= \hat{\phi}(s+1) - \hat{\phi}(s) \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)} - \left(\hat{\phi}(s) - \hat{\phi}(s-1) \frac{z(s-2)\tilde{a}_2(s-2)}{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}\right) \frac{z(s)}{z(s-1)} \\
&= \hat{\phi}(s+1) - \hat{\phi}(s) \left(\frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)} + \frac{z(s)}{z(s-1)}\right) + \hat{\phi}(s-1) \frac{z(s-2)\tilde{a}_2(s-2)z(s)}{z(s)\tilde{a}_2(s-1)z(s-1)} \\
&= -(\lambda - \lambda_0)\hat{\phi}(s)
\end{aligned}$$

dir. Şimdi de her iki tarafı $\frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&= \hat{\phi}(s+1) \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)} - \hat{\phi}(s) \left[\left(\frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)\tilde{a}_2(s)} + \frac{z(s)}{z(s-1)} \right) \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)} \right] \\
&+ \hat{\phi}(s-1) \frac{z(s-2)\tilde{a}_2(s-2)}{z(s)} = -(\lambda - \lambda_0)\hat{\phi}(s) \frac{z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)}{z(s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\hat{a}_2(s)\hat{\phi}(s+1) - \hat{a}_1(s)\hat{\phi}(s) + \hat{a}_2(s-1)\hat{\phi}(s-1) = -\hat{a}_2(s)(\lambda - \lambda_0)\hat{\phi}(s)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca, (2.4) deki Dirichlet sınır şartlarını sağlayan $\tilde{\phi}$, aşağıdaki gibi non-Dirichlet sınır şartlarını sağlayan $\hat{\phi}$ ya dönüşür:

$$\hat{h}\hat{\phi}(-1) + \hat{\phi}(0) = 0, \quad \hat{H}\hat{\phi}(m-1) + \hat{\phi}(m) = 0 \quad (2.7)$$

$$\hat{h} = \left[\frac{\hat{a}_2(0)}{\hat{a}_2(-1)} \left(\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \frac{z(1)}{z(0)} - \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} \right) \right]^{-1} \quad (2.8)$$

$$\hat{H} = \frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-2)} - \frac{\hat{a}_1(m-1)}{\hat{a}_2(m-1)} - \frac{z(m-2)\hat{a}_2(m-2)}{z(m-1)\hat{a}_2(m-1)}.$$

BÖLÜM 3

NON-DIRICHLET SINIR ŞARTLARINDAN AFİNE DÖNÜŞÜM

Bu bölümde non-Dirichlet sınır koşullarını sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}$ nın aşağıdaki dönüşüm altında λ öz değerinin afin formuna bağlı aşağıdaki sınır koşulunu sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$ ya nasıl dönüştüğü gösterilir,

$$\hat{\mathcal{G}}(s) = \tilde{\mathcal{G}}(s) - \tilde{\mathcal{G}}(s-1) \frac{z(s)}{z(s-1)}, \quad s = 0, \dots, m-1. \quad (3.1)$$

Ayrıca bu λ ya bağlı afin formundaki sınır koşullarının bir Nevanlinna/Herglotz fonksiyonu olmasını sağlayan kısıtlamalar elde edilir.

Teorem 3.1: (3.1) dönüşümü altında, $\gamma \neq 0$ için

$$\tilde{\mathcal{G}}(-1) - \gamma \tilde{\mathcal{G}}(0) = 0 \quad (3.2)$$

sınır koşulunu sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}$

$$\hat{\mathcal{G}}(-1) = \hat{\mathcal{G}}(0)(a\lambda + b) \quad (3.3)$$

koşulunu sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$ ya dönüşür. Burada

$$a = \gamma k / [\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - k\gamma(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0))] \\ b = \frac{\hat{a}_1(0)/\hat{a}_2(0) - \gamma k(\hat{a}_1(0)/\hat{a}_2(0)) - \tilde{a}_1(0)/\tilde{a}_2(0) + \gamma(\tilde{a}_2(-1)/\tilde{a}_2(0)) + z(1)/z(0)}{\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - \gamma k(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0))}$$

ve

$$k = z(0)/z(-1)$$

dir. Ayrıca burada $\hat{a}_2(-1) := \tilde{a}_2(-1)$ ve λ_0 , (2.2), (3.2) ve (3.13) ün en küçük özdeğerinden daha küçük olmak üzere $z(s)$, $\lambda = \lambda_0$ için (2.2) nin bir çözümüdür, öyle ki verilen $[-1, m-1]$ aralığında $z(s) > 0$ dır.

İspat: $\hat{\mathcal{G}}$ nin var olduğu s değerleri $s = 0, \dots, m-1$ dir. Bu nedenle $s = -1$ de sınır koşulunu uygulamak için $\hat{\mathcal{G}}$ nin tanım kümesi $s = -1$ i içerecek şekilde genişletilmelidir. Bu (3.3) sınır koşulu uygulanarak yapılr ve denklemin genişletilmiş tanım kümesinde sağlandığı gösterilmelidir.

(2.5) de $\hat{\phi} = \hat{\mathcal{G}}$ alınıp $s = 0$ yazılırsa ve (3.3) kullanılırsa aşağıdakiler elde edilir:

$$\hat{a}_2(0)\hat{\mathcal{G}}(1) - \hat{a}_1(0)\hat{\mathcal{G}}(0) + \hat{a}_2(-1)\hat{\mathcal{G}}(-1) = -\hat{a}_2(0)\lambda\hat{\mathcal{G}}(0)$$

$$\hat{a}_2(0)\hat{\mathcal{G}}(1) - \hat{a}_1(0)\hat{\mathcal{G}}(0) + \hat{a}_2(-1)\hat{\mathcal{G}}(0)(a\lambda + b) = -\hat{a}_2(0)\lambda\hat{\mathcal{G}}(0). \quad (3.4)$$

Ayrıca $s = 1$ ve $s = 0$ için (3.1) den aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}(1) &= \tilde{\mathcal{G}}(1) - \tilde{\mathcal{G}}(0) \frac{z(1)}{z(0)} \\ \hat{\mathcal{G}}(0) &= \tilde{\mathcal{G}}(0) - \tilde{\mathcal{G}}(-1) \frac{z(0)}{z(-1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.2) yukarıdaki denklemde yerleştirilirse aşağıdaki elde edilir.

$$\tilde{\mathcal{G}}(-1) - \gamma\tilde{\mathcal{G}}(0) = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{G}}(-1) = \gamma\tilde{\mathcal{G}}(0)$$

$$\hat{\mathcal{G}}(0) = \tilde{\mathcal{G}}(0) - \gamma\tilde{\mathcal{G}}(0) \frac{z(0)}{z(-1)}$$

$$\hat{\mathcal{G}}(0) = \tilde{\mathcal{G}}(0) \left[1 - \gamma \frac{z(0)}{z(-1)} \right] \quad (3.6)$$

dir. (3.4) yeniden düzenlenirse

$$\hat{a}_2(0)\hat{\mathcal{G}}(1) - \hat{a}_1(0)\hat{\mathcal{G}}(0) + \hat{a}_2(-1)\hat{\mathcal{G}}(0)(a\lambda + b) + \hat{a}_2(0)\lambda\hat{\mathcal{G}}(0) = 0$$

$$\hat{a}_2(0)\hat{\mathcal{G}}(1) + \hat{\mathcal{G}}(0) [-\hat{a}_1(0) + \hat{a}_2(-1)(a\lambda + b) + \hat{a}_2(0)\lambda] = 0$$

$$\hat{a}_2(0)\hat{g}(1) + \hat{g}(0)\left[-\hat{a}_1(0) + \hat{a}_2(-1)b + \lambda(a\hat{a}_2(-1) + \hat{a}_2(0))\right] = 0$$

elde edilir. Şimdi de $\hat{g}(0)$ ve $\hat{g}(1)$ yukarıdaki son denklemde yerlerine yazılırsa (3.4) aşağıdaki şekilde yeniden yazılmış olur.

$$\hat{a}_2(0)\left[\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)\frac{z(1)}{z(0)}\right] + \tilde{g}(0)\left[1 - \gamma\frac{z(0)}{z(-1)}\right]\left[-\hat{a}_1(0) + \hat{a}_2(-1)b + \lambda(a\hat{a}_2(-1) + \hat{a}_2(0))\right] = 0 \quad (3.7)$$

dır. Her iki taraf $\hat{a}_2(0)$ ile bölünüp $-\tilde{g}(0)$ parantezine alınır

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)\left\{\frac{z(1)}{z(0)} - \left(1 - \gamma\frac{z(0)}{z(-1)}\right)\left[-\frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}b + \lambda\left(1 + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}a\right)\right]\right\} = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir. Ayrıca (2.2) de $s = 0$ alınır ve (3.2) kullanılırsa aşağıdaki elde edilir.

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)\left[\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \frac{\tilde{a}_2(-1)}{\tilde{a}_2(0)}\gamma - \lambda\right] = 0 \quad (3.9)$$

(3.9), (3.8) den çıkartılır ve $\tilde{g}(0) \neq 0$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \frac{\tilde{a}_2(-1)}{\tilde{a}_2(0)}\gamma - \lambda - \frac{z(1)}{z(0)} + \left(1 - \gamma\frac{z(0)}{z(-1)}\right)\left[-\frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}b\right] \\ + \lambda\left(1 - \gamma\frac{z(0)}{z(-1)}\right)\left(1 + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}a\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. $k = \frac{z(0)}{z(-1)}$ yerine yazılıp düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \frac{\tilde{a}_2(-1)}{\tilde{a}_2(0)}\gamma - \frac{z(1)}{z(0)} + (1 - \gamma k)\left[-\frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}b\right] + \lambda(1 - \gamma k)\left(1 + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}a\right) = \lambda$$

eşitliğine ulaşılır. Her iki tarafta ki λ katsayıları eşitlenirse

$$\lambda(1 - \gamma k)\left(1 + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}a\right) = \lambda$$

$$(1 - \gamma k)\left(1 + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}a\right) = 1$$

$$a \left(\frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} - \gamma k \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} \right) = \gamma k$$

denklemini elde edilir ki buradan a aşağıdaki gibi bulunur,

$$a = \frac{\gamma k}{\frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} - \gamma k \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}}. \quad (3.11)$$

Şimdi de denklemde λ içermeyen terimler eşitlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \frac{\tilde{a}_2(-1)}{\tilde{a}_2(0)} \gamma - \frac{z(1)}{z(0)} - \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} b + \gamma k \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} - \gamma k \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} b &= 0 \\ \frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \frac{\tilde{a}_2(-1)}{\tilde{a}_2(0)} \gamma - \frac{z(1)}{z(0)} - \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} + \gamma k \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} + b \left(\frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} - \gamma k \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} \right) &= 0 \\ b \left(\frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} - \gamma k \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} \right) &= -\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} + \frac{\tilde{a}_2(-1)}{\tilde{a}_2(0)} \gamma + \frac{z(1)}{z(0)} + \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} - \gamma k \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} \\ b &= \frac{-\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} + \frac{\tilde{a}_2(-1)}{\tilde{a}_2(0)} \gamma + \frac{z(1)}{z(0)} + \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} - \gamma k \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)}}{\frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} - \gamma k \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

biçiminde b de bulunmuş olur. Burada $k = \frac{z(0)}{z(-1)}$ dir ve ayrıca $\hat{a}_2(-1) = \tilde{a}_2(-1)$

olduğu hatırlanmalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2: (3.1) dönüşümü altında $\delta \neq 0$ için

$$\tilde{\mathcal{G}}(m-2) - \delta \tilde{\mathcal{G}}(m-1) = 0 \quad (3.13)$$

sınır koşulunu sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}$,

$$\hat{\mathcal{G}}(m-2) = \hat{\mathcal{G}}(m-1)(p\lambda + q) \quad (3.14)$$

sınır koşulunu sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$ ya dönüşür. Burada

$$p = \delta \tilde{a}_2(m-2) / \{ (1 - \delta K) [-K \tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0 \tilde{a}_2(m-2)] \}$$

$$q = \tilde{a}_2(m-2)[1 - \delta K - \delta \lambda_0] / \{(1 - \delta K)[-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2)]\}$$

ve

$$K = z(m-1)/z(m-2)$$

dir. Burada yine λ_0 , (2.2), (3.2) ve (3.13) ün en küçük öz değerinden daha küçük olmak üzere $z(s)$, $\lambda = \lambda_0$ için (2.2) nin bir çözümüdür öyle ki verilen $[-1, m-1]$ aralığında $z(s) > 0$ dir.

İspat : (3.1) de $s = m-1$ ve $s = m-2$ yazılırsa

$$\hat{\mathcal{G}}(m-1) = \tilde{\mathcal{G}}(m-1) - \tilde{\mathcal{G}}(m-2) \frac{z(m-1)}{z(m-2)} \quad (3.15)$$

$$\hat{\mathcal{G}}(m-2) = \tilde{\mathcal{G}}(m-2) - \tilde{\mathcal{G}}(m-3) \frac{z(m-2)}{z(m-3)} \quad (3.16)$$

eşitlikleri bulunur. Diğer taraftan $s = m-2$ için $\tilde{\mathcal{G}}(n)$ nin (2.2) yi sağladığı dikkate alınırsa,

$$\tilde{v}(m-3) = \left[\frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-3)} - \lambda \frac{\tilde{a}_2(m-2)}{\tilde{a}_2(m-3)} \right] \tilde{v}(m-2) - \frac{\tilde{a}_2(m-2)}{\tilde{a}_2(m-3)} \tilde{v}(m-1) \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.17), (3.16) da yazıldığında aşağıdaki formülü verir.

$$\hat{\mathcal{G}}(m-2) = \tilde{\mathcal{G}}(m-2) \left\{ 1 - \left[\frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-3)} - \lambda \frac{\tilde{a}_2(m-2)}{\tilde{a}_2(m-3)} \right] \frac{z(m-2)}{z(m-3)} \right\} + \tilde{\mathcal{G}}(m-1) \frac{z(m-2)\tilde{a}_2(m-2)}{z(m-3)\tilde{a}_2(m-3)} \quad (3.18)$$

Şimdi (3.15) in sonucu ile (3.13) birlikte kullanıldığında

$$\tilde{\mathcal{G}}(m-1) = \frac{\hat{\mathcal{G}}(m-1)}{1 - \delta(z(m-1)/z(m-2))} \quad (3.19)$$

elde edilir. Bu da (3.13) de yazıldığında aşağıdaki eşitliği verir.

$$\tilde{\mathcal{G}}(m-2) = \frac{\delta \hat{\mathcal{G}}(m-1)}{1 - \delta(z(m-1)/z(m-2))} \quad (3.20)$$

(3.19) ve (3.20), (3.18) de yazıldığında

$$\begin{aligned}\hat{g}(m-2) &= \frac{\delta \hat{g}(m-1)}{1-\delta(z(m-1)/z(m-2))} \left\{ 1 - \left[\frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-3)} - \lambda \frac{\tilde{a}_2(m-2)}{\tilde{a}_2(m-3)} \right] \frac{z(m-2)}{z(m-3)} \right\} \\ &+ \frac{\hat{g}(m-1)z(m-2)\tilde{a}_2(m-2)}{1-\delta(z(m-1)/[z(m-2)z(m-3)\tilde{a}_2(m-3)])}\end{aligned}\quad (3.21)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin düzenlenmiş hali aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\left[1 - \delta \frac{z(m-1)}{z(m-2)} \right] \hat{g}(m-2) \\ = \hat{g}(m-1) \left\{ \frac{\delta [\tilde{a}_2(m-3)z(m-3) - (\tilde{a}_1(m-2) - \lambda \tilde{a}_2(m-2))z(m-2)] + \tilde{a}_2(m-2)z(m-2)}{\tilde{a}_2(m-3)z(m-3)} \right\}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Şimdi $z(s)$, $\lambda = \lambda_0$ için (2.2) nin bir çözümü olduğundan

$$\tilde{a}_2(m-3)z(m-3) = -\tilde{a}_2(m-2)z(m-1) + \tilde{a}_1(m-2)z(m-2) - \lambda_0 \tilde{a}_2(m-2)z(m-2) \quad (3.23)$$

dir. (3.23), (3.22) de yazıldığında

$$\begin{aligned}\left[1 - \delta \frac{z(m-1)}{z(m-2)} \right] \hat{g}(m-2) \\ = \hat{g}(m-1) \left\{ \frac{-\delta \tilde{a}_2(m-2)z(m-1) + \delta (\lambda - \lambda_0) \tilde{a}_2(m-2)z(m-2) + \tilde{a}_2(m-2)z(m-2)}{-\tilde{a}_2(m-2)z(m-1) + \tilde{a}_1(m-2)z(m-2) - \lambda_0 \tilde{a}_2(m-2)z(m-2)} \right\}\end{aligned}\quad (3.24)$$

elde edilir. $z(m-1)/z(m-2) = K$ denirse

$$(1-\delta K) \hat{g}(m-2) = \hat{g}(m-1) \left\{ \frac{-\delta \tilde{a}_2(m-2)K + \delta (\lambda - \lambda_0) \tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_2(m-2)}{-\tilde{a}_2(m-2)K + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0 \tilde{a}_2(m-2)} \right\} \quad (3.25)$$

olur. Bundan dolayı

$$p = \delta \tilde{a}_2(m-2) / \{ (1-\delta K) [-K \tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0 \tilde{a}_2(m-2)] \}$$

$$q = \tilde{a}_2(m-2) [1 - \delta K - \delta \lambda_0] / \{ (1-\delta K) [-K \tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0 \tilde{a}_2(m-2)] \}$$

ve $K = z(m-1)/z(m-1)$, (3.14) de yazıldığında (3.25) elde edilir.

$$\hat{g}(m-2) = \hat{g}(m-1) \left\{ \frac{\delta \tilde{a}_2(m-2)\lambda + \tilde{a}_2(m-2)(\delta K - \delta \lambda_0 + 1)}{(1-\delta K)(-\tilde{a}_2(m-2)K + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0 \tilde{a}_2(m-2))} \right\} \quad (3.26)$$

(3.3) de bir Nevanlinna/Herglotz fonksiyonu olması için $a\lambda + b$ deki $a \geq 0$ olmalıdır. Bu koşul k nın izin verilen değerleri üzerinde kısıtlamalar sağlar.

Teorem 3.3: λ_0 , (2.2), (3.2) ve (3.13) ün en küçük öz değerinden daha küçük olmak üzere $z(s)$, $\lambda = \lambda_0$ için (2.2) nin bir çözümü, öyle ki verilen $[-1, m-1]$ aralığında $z(s) > 0$ olmak üzere eğer $k = \frac{z(0)}{z(-1)}$ ise o zaman (3.3) de $a \geq 0$ olmasını sağlayan, yani (3.3) de $a\lambda + b$ nin bir Nevanlinna fonksiyonu olmasını sağlayan k değerleri aşağıdaki şekildedir:

$$k \in \left(0, \frac{1}{\gamma}\right), \quad \gamma > 0. \quad (3.27)$$

İspat: Teorem (3.1) den dolayı

$$a = \frac{\gamma k}{\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - k\gamma(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0))} \quad (3.28)$$

dır. Varsayalım ki $\gamma > 0$ olsun. Buradan $a \geq 0$ olması için ya $k \geq 0$ ve $\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - k\gamma(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0)) > 0$ olmalı ya da $k \leq 0$ ve $\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - k\gamma(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0)) < 0$ olmalıdır. Birinci durum için $(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0))\gamma > 0$ olduğundan dolayı $k \geq 0$ ve $k < \frac{1}{\gamma}$ denilebilir. İkinci durum için

ise $k \leq 0$ ve $k > \frac{1}{\gamma}$ olur ki buda mümkün değildir. Böylece $\gamma > 0$ için verilen k değeri aşağıdaki gibi olur.

$$k \in \left(0, \frac{1}{\gamma}\right) \quad (3.29)$$

$k = z(0)/z(-1) \neq 0$ dan eğer $\gamma < 0$ ise ya $k \leq 0$ ve $\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - k\gamma(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0)) > 0$ ya da $k \geq 0$ ve $\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - k\gamma(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0)) < 0$ olmalıdır. Birinci durumdaki

$k \leq 0$, $\hat{a}_2(s) = (z(s-1)/z(s))\tilde{a}_2(s-1)$ ve $\hat{a}_2(s), \tilde{a}_2(s-1) > 0$ ki bu da $s = 0$ için $z(s-1)/z(s) > 0$ anlamına gelir ki bu da mümkün değildir. İkinci durum için $k \geq 0$ ve $k < \frac{1}{\gamma}$ alınır ki bu da mümkün değildir.

Ayrıca (3.14) deki $p\lambda + q$ nun bir Nevanlinna/Herglotz fonksiyonu olması için $p \geq 0$ olmalıdır. Buda K nın aşağıda verilen değerinde sağlanır.

Sonuç 3. 5: λ_0 (2.2), (3.2) ve (3.13) ün en küçük öz değerinden daha küçük olmak üzere $z(s)$ $\lambda = \lambda_0$ için (2.2) nin bir çözümü öyle ki verilen $[-1, m-1]$ aralığında $z(s) > 0$ olmak üzere, eğer $K = z(m-1)/z(m-2)$ ise o zaman

$$\begin{aligned} \delta > \frac{\tilde{a}_2(m-2)}{\tilde{a}_1(m-2)} \text{ için } K &\in \left(-\infty, \frac{1}{\delta}\right) \cup \left(\frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-2)}, \infty\right) \\ \delta < \frac{\tilde{a}_2(m-2)}{\tilde{a}_1(m-2)} \text{ için } K &\in \left(-\infty, \frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-2)}\right) \cup \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

dur.

İspat: Genelliği bozmadan (3.2), (3.13) sınır koşulları ile birlikte oluşturulmuş (2.2) probleminin spektrumu, en küçük öz değeri 0 dan kesin büyük olacak şekilde değiştirilebilir, dolayısıyla $\lambda_0 = 0$ olarak kabul edilebilir. $\tilde{a}_2(m-2) > 0$ olduğundan dolayı $\delta > 0$ ve $\delta < 0$ şeklindeki iki durum ele alınır.

Varsayalım ki $\delta > 0$ olsun bu durumda p nin payı kesin pozitifdir. Dolayısıyla $p > 0$ olması için payda da kesin pozitif olmalıdır, yani $(1 - \delta K)[-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2)] > 0$ dır. Bundan dolayı ya $(1 - \delta K) > 0$ ve $-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2) > 0$ ya da $(1 - \delta K) < 0$ ve $-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2) < 0$ dır. Böylece $\lambda_0 = 0$ olduğundan dolayı ya $K < \frac{1}{\delta}$ ve $K <$

$\tilde{a}_1(m-2)/\tilde{a}_2(m-2)$ ya da $K > \frac{1}{\delta}$ ve $K > \tilde{a}_1(m-2)/\tilde{a}_2(m-2)$ dir. Böylece, eğer $\frac{1}{\delta} < \tilde{a}_1(m-2)/\tilde{a}_2(m-2)$ yani $\delta > \tilde{a}_2(m-2)/\tilde{a}_1(m-2)$ ise

$$K \in \left(-\infty, \frac{1}{\delta}\right) \cup \left(\frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-2)}, \infty\right) \quad (3.31)$$

dur ve $\frac{1}{\delta} > \tilde{a}_1(m-2)/\tilde{a}_2(m-2)$ yani $\delta < \tilde{a}_2(m-2)/\tilde{a}_1(m-2)$ ise

$$K \in \left(-\infty, \frac{\tilde{b}(m-2)}{\tilde{c}(m-2)}\right) \cup \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right) \quad (3.32)$$

dur. Şimdi eğer $\delta < 0$ ise o zaman p nin payı kesin negatiftir. Böylece $p > 0$ olması için paydanın da kesin negatif olması gerekir. Yani $(1-\delta K)[-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2)] < 0$ dir. Bundan dolayı ya $(1-\delta K) > 0$ ve $-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2) < 0$ dir ya da $(1-\delta K) < 0$ ve $-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2) > 0$ olur. $\lambda_0 = 0$ olduğundan dolayı ya $K < \frac{1}{\delta}$ ve $K < \tilde{a}_1(m-2)/\tilde{a}_2(m-2)$ ya da $K > \frac{1}{\delta}$ ve $K > \tilde{a}_1(m-2)/\tilde{a}_2(m-2)$ dir. Bunlar da $\delta > 0$ iken K üzerinde elde edilen şartlar ile aynıdır. Bu nedenle δ nın işareti, $p \geq 0$ olması için gerekli K değerlerinin bulunmasında herhangi bir rol oynamaz ve böylece gerekli sonuç elde edilmiş olur.

BÖLÜM 4

SPEKTRUMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde (3.1) dönüşümünün, başlangıç ve uç noktalarında uygulanan çeşitli sınır koşulları ile fark denkleminin spektrumunu nasıl etkilediği gösterilir.

[1] deki sonuçlar ile birlikte Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem 4.1: Varsayalım ki $\tilde{\mathcal{G}}(s)$, (2.2) yi sağlasın. Aşağıdaki dört sınır koşulu göz önünde bulundurulur:

$$\tilde{\mathcal{G}}(-1) = 0, \quad \tilde{\mathcal{G}}(m-1) = 0, \quad (4.1)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}(-1) = 0, \quad \tilde{\mathcal{G}}(m-2) = \delta \tilde{\mathcal{G}}(m-1), \quad (4.2)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}(-1) = \gamma \tilde{\mathcal{G}}(0), \quad \tilde{\mathcal{G}}(m-1) = 0, \quad (4.3)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}(-1) = \gamma \tilde{\mathcal{G}}(0), \quad \tilde{\mathcal{G}}(m-2) = \delta \tilde{\mathcal{G}}(m-1), \quad (4.4)$$

λ_0 , (2.2) nin en küçük özdeğerinden daha küçük ve $z(s)$, $\lambda = \lambda_0$ için (2.2) nin bir çözümü öyle ki verilen $[-1, m-1]$ aralığında $z(s) > 0$ olmak üzere (3.1) dönüşümü, yukarıdaki dört koşuldan biri ile (2.2) yi sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ i (2.5) i sağlayan $\hat{\mathcal{G}}(s)$ e dönüştürür. Ayrıca

(i) (4.1) i sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}$, aşağıdaki şartları sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$ ya dönüşür,

$$\hat{h} \hat{\mathcal{G}}(-1) + \hat{\mathcal{G}}(0) = 0, \quad (4.5)$$

$$\hat{H} \hat{\mathcal{G}}(m-1) + \hat{\mathcal{G}}(m) = 0 \quad (4.6)$$

burada $\hat{h} = \left[(\hat{a}_2(0)/\hat{a}_2(-1))(\tilde{a}_1(0)/\tilde{a}_2(0) - z(1)/z(0) - \hat{a}_1(0)/\hat{a}_2(0)) \right]^{-1}$ dir ve

$\hat{a}_2(-1) = \tilde{a}_2(-1)$ olmak üzere

$$\hat{H} = \tilde{a}_2(m-2)/\tilde{a}_2(m-2) - \hat{a}_1(m-1)/\hat{a}_2(m-1) - z(m-2)\hat{a}_2(m-2)/[z(m-1)\hat{a}_2(m-1)]$$

dir.

(ii) (4.2) yi sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}$ nın (4.5) ve (3.14) ü sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$ ya dönüşümü

(iii) (4.3) ü sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}$ nın (3.3) ve (4.6) yı sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$ ya dönüşümü

(iv) (4.4) ü sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}$ nın (3.3) ve (3.14) ü sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$ ya dönüşümü

Bir sonraki teorem, yukarıdaki teoremde verilen dört tipteki sınır koşulundan biri ve (2.2) yi sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ ile birlikte verilen sınır değer probleminin λ ya göre $(m-1)$. dereceden bir polinomun kökleri olmak suretiyle $m-1$ tane özdeğere sahip olduğunu gösterir. Ayrıca eğer ele alınan sınır değer problemi öz-eşlenik ise özdeğerler reeldir, aksi taktirde eşlenik çiftler halinde ortaya çıkan karmaşık sayılardır.

Teorem 4.2: (2.2) yi sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ ile birlikte (4.1)-(4.4) de verilen sınır şartlarından herhangi biriyle verilen sınır değer problemi $(m-1)$ tane özdeğere sahiptir.

İspat : $\tilde{\mathcal{G}}(s)$, (2.2) yi sağladığından dolayı $s = 0, \dots, m-2$ için

$$\tilde{\mathcal{G}}(s+1) = \frac{-\tilde{a}_2(s-1)\tilde{\mathcal{G}}(s-1)}{\tilde{a}_2(s)} + \left(\frac{\tilde{a}_1(s)}{\tilde{a}_2(s)} - \lambda \right) \tilde{\mathcal{G}}(s) \quad (4.7)$$

eşitliği elde edilir. (4.7) de $s = 0$ yazılırsa,

$$\tilde{\mathcal{G}}(1) = \frac{-\tilde{a}_2(-1)\tilde{\mathcal{G}}(-1)}{\tilde{a}_2(0)} + \left(\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \lambda \right) \tilde{\mathcal{G}}(0) \quad (4.8)$$

olur. (4.1) ve (4.2) şartlarını düşünüldüğünde $\tilde{\mathcal{G}}(-1) = 0$ olduğundan

$$\tilde{\mathcal{G}}(1) = \left(\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \lambda \right) \tilde{\mathcal{G}}(0) := (P_0^1 + P_1^1 \lambda) \tilde{\mathcal{G}}(0) \quad (4.9)$$

dır ki burada P_0^1 ve P_1^1 reel sabitler, yani (4.9), λ ya göre birinci dereceden bir polinomdur.

Ayrıca (4.7) de $s=1$ yazılırsa,

$$\tilde{\mathcal{G}}(2) = \frac{-\tilde{a}_2(0)\tilde{\mathcal{G}}(0)}{\tilde{a}_2(1)} + \left(\frac{\tilde{a}_1(1)}{\tilde{a}_2(1)} - \lambda \right) \tilde{\mathcal{G}}(1) \quad (4.10)$$

olur ve burada (4.9) denkleminde ki $\tilde{\mathcal{G}}(1)$ yerine yazılırsa,

$$\tilde{\mathcal{G}}(2) = \left[\frac{-\tilde{a}_2(0)}{\tilde{a}_2(1)} + \left(\frac{\tilde{a}_1(1)}{\tilde{a}_2(1)} - \lambda \right) \left(\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \lambda \right) \right] \tilde{\mathcal{G}}(0) := [P_0^2 + P_1^2\lambda + P_2^2\lambda^2] \tilde{\mathcal{G}}(0) \quad (4.11)$$

elde edilir. Burada yine P_i^2 , $i=0,1,2$ reel sabitlerdir, yani (4.11), λ ya göre ikinci dereceden bir polinomdur. Böylece tümevarımdan aşağıdakiler kolaylıkla yazılabilir.

$$\tilde{\mathcal{G}}(m-1) = [P_0^{m-1} + P_1^{m-1}\lambda + \dots + P_{m-1}^{m-1}\lambda^{m-1}] \tilde{\mathcal{G}}(0) \quad (4.12)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}(m-2) = [P_0^{m-2} + P_1^{m-2}\lambda + \dots + P_{m-2}^{m-2}\lambda^{m-2}] \tilde{\mathcal{G}}(0)$$

Burada P_i^{m-1} , $i=0,1,\dots,m-1$ ve P_i^{m-2} , $i=0,1,\dots,m-2$ reel sabitlerdir. Yani (4.12), λ ya göre sırası ile $(m-1)$. ve $(m-2)$. dereceden polinomlardır.

Şimdi (4.1) de verilen $\tilde{\mathcal{G}}(m-1) = 0$ dan

$$[P_0^{m-1} + P_1^{m-1}\lambda + \dots + P_{m-1}^{m-1}\lambda^{m-1}] \tilde{\mathcal{G}}(0) = 0 \quad (4.13)$$

olur ki buradan özdeğerleri üreten (öz koşul) fonksiyonu

$$[P_0^{m-1} + P_1^{m-1}\lambda + \dots + P_{m-1}^{m-1}\lambda^{m-1}] = 0 \quad (4.14)$$

biçiminde elde edilir. Bu fonksiyon λ ya göre $(m-1)$. dereceden bir polinomdur ve dolayısıyla $m-1$ köke sahiptir. Bu nedenle (2.2) yi sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ ile (4.1) sınır şartıyla verilen sınır değer problemi $m-1$ özdeğere sahiptir.

Daha sonra (4.2) deki $\tilde{\mathcal{G}}(m-2) = \delta\tilde{\mathcal{G}}(m-1)$ sınır şartından

$$\left[P_0^{m-2} + P_1^{m-2} \lambda + \dots + P_{m-2}^{m-2} \lambda^{m-2} \right] \tilde{\mathcal{G}}(0) = \delta \left[P_0^{m-1} + P_1^{m-1} \lambda + \dots + P_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] \tilde{\mathcal{G}}(0) \quad (4.15)$$

dır ve aşağıdaki öz koşul fonksiyonu elde edilir.

$$\left[P_0^{m-2} + P_1^{m-2} \lambda + \dots + P_{m-2}^{m-2} \lambda^{m-2} \right] = \delta \left[P_0^{m-1} + P_1^{m-1} \lambda + \dots + P_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right]. \quad (4.16)$$

Burada yine bu λ ya göre $(m-1)$. dereceden bir polinomdur ve dolayısıyla $m-1$ tane köke sahiptir. Bu nedenle (2.2) yi sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ ile (4.2) sınır şartıyla verilen sınır değer problemi $m-1$ özdeğere sahiptir.

Şimdi (4.3) ve (4.4) deki sınır koşullarından $\tilde{\mathcal{G}}(-1) = \gamma \tilde{\mathcal{G}}(0)$ kullanılırsa (4.8) şu hale gelir,

$$\tilde{\mathcal{G}}(1) = \left[\frac{-\tilde{a}_2(-1)}{\tilde{a}_2(0)} + \left(\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} - \lambda \right) \frac{1}{\gamma} \right] \tilde{\mathcal{G}}(-1) := (Q_0^1 + Q_1^1 \lambda) \tilde{\mathcal{G}}(-1) \quad (4.17)$$

burada Q_0^1 ve Q_1^1 reel sabitler, yani bu λ ya göre birinci dereceden bir polinomdur.

(4.3) ve (4.4) deki sınır koşullarından $\tilde{\mathcal{G}}(-1) = \gamma \tilde{\mathcal{G}}(0)$ ve (4.17) deki $\tilde{\mathcal{G}}(1)$ kullanılarak $\tilde{\mathcal{G}}(2)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tilde{\mathcal{G}}(2) := \left[Q_0^2 + Q_1^2 \lambda + Q_2^2 \lambda^2 \right] \tilde{\mathcal{G}}(-1) \quad (4.18)$$

burada yine Q_i^2 , $i = 0, 1, 2$ reel sabitler, yani bu λ ya göre ikinci dereceden bir polinomdur. Böylece tümevarımdan,

$$\tilde{\mathcal{G}}(m-1) = \left[Q_0^{m-1} + Q_1^{m-1} \lambda + \dots + Q_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] \tilde{\mathcal{G}}(-1) \quad (4.19)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}(m-2) = \left[Q_0^{m-2} + Q_1^{m-2} \lambda + \dots + Q_{m-2}^{m-2} \lambda^{m-2} \right] \tilde{\mathcal{G}}(-1)$$

dir ve burada Q_i^{m-1} , $i = 0, 1, \dots, m-1$ ve Q_i^{m-2} , $i = 0, 1, \dots, m-2$ reel sabitlerdir. Yani bu λ ya göre sırası ile $(m-1)$. ve $(m-2)$. dereceden bir polinomdur.

Şimdi (4.3) de verilen $\tilde{\mathcal{G}}(m-1)=0$ dan

$$\left[Q_0^{m-1} + Q_1^{m-1} \lambda + \dots + Q_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] \tilde{\mathcal{G}}(-1) = 0 \quad (4.20)$$

yani öz koşul fonksiyonu

$$\left[Q_0^{m-1} + Q_1^{m-1} \lambda + \dots + Q_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] = 0 \quad (4.21)$$

olur. Yani bu λ ya göre $(m-1)$. dereceden bir polinomdur ve dolayısıyla $m-1$ tane köke sahiptir. Bu nedenle (2.2) yi sağlayan $\tilde{g}(s)$ ile (4.3) sınır şartıyla verilen sınır değer problemi $m-1$ özdeğere sahiptir.

Son olarak (4.4) de verilen $\tilde{g}(m-2) = \delta \tilde{g}(m-1)$ sınır şartından

$$\left[Q_0^{m-2} + Q_1^{m-2} \lambda + \dots + Q_{m-2}^{m-2} \lambda^{m-2} \right] \tilde{g}(-1) = \delta \left[Q_0^{m-1} + Q_1^{m-1} \lambda + \dots + Q_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] \tilde{g}(-1) \quad (4.22)$$

olur ve aşağıdaki öz koşul fonksiyonu elde edilir,

$$\left[Q_0^{m-2} + Q_1^{m-2} \lambda + \dots + Q_{m-2}^{m-2} \lambda^{m-2} \right] = \delta \left[Q_0^{m-1} + Q_1^{m-1} \lambda + \dots + Q_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right]. \quad (4.23)$$

Bu da yine λ ya göre $(m-1)$. dereceden bir polinomdur ve dolayısıyla $m-1$ tane köke sahiptir. Böylece (2.2) yi sağlayan $\tilde{g}(s)$ ile (4.4) sınır şartıyla verilen sınır değer problemi $m-1$ özdeğere sahiptir.

Benzer şekilde, Teorem 4.1 de verilen dönüştürülmüş sınır değer problemlerinin m tane özdeğere sahip olduğu ispatlanır ki bu da her durumda spektrumun bir artış gösterdiği anlamına gelir.

Teorem 4.3: $s=1, \dots, m-2$ olmak üzere (2.5) i sağlayan $\hat{g}(s)$ ile birlikte Teorem 4.1 deki (i)-(iv) de verilen dört dönüştürülmüş sınır koşulundan herhangi biri m özdeğerine sahiptir. Özdeğer tam olarak λ ya karşılık gelen Teorem 4.1 verilen $z(s)$ gibidir.

İspat: Teorem 4.2 nin ispatı ile aynı doğrultudadır. Teorem 3.1 e göre $\hat{\phi}(s)$ genişletildi, böylece $\hat{\phi}(s)$, $s=0, \dots, m-1$ için var olacaktır.

$s=0, \dots, m-2$ olmak üzere $\hat{g}(s)$, (2.5) i sağladığından,

$$\hat{g}(s+1) = \frac{-\hat{a}_2(s-1)\hat{g}(s-1)}{\hat{a}_2(s)} + \left(\frac{\hat{a}_1(s)}{\hat{a}_2(s)} - \lambda \right) \hat{g}(s) \quad (4.24)$$

dir. Teorem 4.1 in (i) ve (ii) deki dönüştürülmüş sınır koşulları için (4.5) i sağladığını ve Teorem 4.2 de olduğu gibi tümevarımsal olarak gösterilir ki,

$$\hat{\mathcal{G}}(m-1) = \left[M_0^{m-1} + M_1^{m-1} \lambda + \dots + M_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] \hat{\mathcal{G}}(-1) \quad (4.25)$$

$$\hat{\mathcal{G}}(m-2) = \left[M_0^{m-2} + M_1^{m-2} \lambda + \dots + M_{m-2}^{m-2} \lambda^{m-2} \right] \hat{\mathcal{G}}(-1)$$

dir. Ayrıca [1] tarafından $\hat{\mathcal{G}}(s)$ alanını $s = m$ içerecek şekilde genişletilir bu (4.6) uygulanarak yapılır.

$$\hat{\mathcal{G}}(m) = \left[M_0^m + M_1^m \lambda + \dots + M_m^m \lambda^m \right] \hat{\mathcal{G}}(-1) \quad (4.26)$$

Burada M_i^{m-1} , $i = 0, 1, \dots, m-1$, M_i^{m-2} , $i = 0, 1, \dots, m-2$ ve M_i^m , $i = 0, 1, \dots, m$ reel sabitler ve bu λ ya göre sırası ile $(m-1)$, $(m-2)$ ve m . dereceden polinomlardır.

Şimdi (i) sınır koşullarından (4.6) aşağıdakileri verir,

$$\left[M_0^{m-1} + M_1^{m-1} \lambda + \dots + M_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] \hat{\mathcal{G}}(-1) = \frac{-1}{\hat{H}} \left[M_0^m + M_1^m \lambda + \dots + M_m^m \lambda^m \right] \hat{\mathcal{G}}(-1). \quad (4.27)$$

Bu nedenle öz koşul fonksiyonu

$$\left[M_0^{m-1} + M_1^{m-1} \lambda + \dots + M_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] = \frac{-1}{\hat{H}} \left[M_0^m + M_1^m \lambda + \dots + M_m^m \lambda^m \right] \quad (4.28)$$

dir. Yani bu λ ya göre m . dereceden polinom olduğundan m kökü vardır. Dolayısıyla (2.5) de (i) sınır koşulları tarafından $\hat{\mathcal{G}}(s)$ e dönüştürülmüş, yani (4.5) ve (4.6) yı sağlamak suretiyle verilen sınır değer problemi m tane özdeğere sahiptir.

Ayrıca (ii) sınır koşulu için (3.14) aşağıdakileri verir,

$$\begin{aligned} & \left[M_0^{m-2} + M_1^{m-2} \lambda + \dots + M_{m-2}^{m-2} \lambda^{m-2} \right] \hat{\mathcal{G}}(-1) \\ &= (p\lambda + q) \left[M_0^{m-1} + M_1^{m-1} \lambda + \dots + M_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] \hat{\mathcal{G}}(-1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Bu nedenle öz koşullar

$$\left[M_0^{m-2} + M_1^{m-2} \lambda + \dots + M_{m-2}^{m-2} \lambda^{m-2} \right] = (p\lambda + q) \left[M_0^{m-1} + M_1^{m-1} \lambda + \dots + M_{m-1}^{m-1} \lambda^{m-1} \right] \quad (4.30)$$

dir. λ m . dereceden polinom olduğundan m kökü vardır. Dolayısıyla (2.5) de (ii) sınır koşulları tarafından $\hat{\mathcal{G}}(s)$ e dönüştürülmüş, yani (4.5) ve (3.14) ü sağlamak suretiyle verilen sınır değer problemi m tane özdeğere sahiptir.

(4.23) de $s = 0$ yazılırsa;

$$\hat{\mathcal{G}}(1) = \frac{-\hat{a}_2(-1)\hat{\mathcal{G}}(-1)}{\hat{a}_2(0)} + \left(\frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} - \lambda \right) \hat{\mathcal{G}}(0) \quad (4.31)$$

olur. (iii) ve (iv) deki sınır koşulları (3.3) ü sağladığında

$$\hat{\mathcal{G}}(1) = \left(\frac{-\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} + \left(\frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} - \lambda \right) \frac{1}{a\lambda + b} \right) \hat{\mathcal{G}}(-1) := S_0^1 + \frac{1}{a\lambda + b} (R_0^1 + R_1^1 \lambda) \quad (4.32)$$

elde edilir. Burada S_0^1, R_0^1 ve R_1^1 reel sabitlerdir.

(4.23) de $s = 1$ yazılırsa

$$\hat{\mathcal{G}}(2) = \frac{-\hat{a}_2(0)\hat{\mathcal{G}}(1)}{\hat{a}_2(1)} + \left(\frac{\hat{a}_1(1)}{\hat{a}_2(1)} - \lambda \right) \hat{\mathcal{G}}(1) \quad (4.33)$$

olur. (4.33), (3.3) ü ve (4.32) deki $\hat{\mathcal{G}}(1)$ kullanılarak aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}(2) &= \left[\frac{-\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} \left(\frac{\hat{a}_1(1)}{\hat{a}_2(1)} - \lambda \right) + \left(\frac{-\hat{a}_2(0)}{\hat{a}_2(1)} \left(\frac{\hat{a}_1(1)}{\hat{a}_2(1)} - \lambda \right) \left(\frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} - \lambda \right) \right) \frac{1}{a\lambda + b} \right] \hat{\mathcal{G}}(-1) \\ &:= \left(\left(S_0^2 + S_1^2 \lambda \right) + \left(R_0^2 + R_1^2 \lambda + R_2^2 \lambda^2 \right) \frac{1}{a\lambda + b} \right) \hat{\mathcal{G}}(-1) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$S_0^2, S_1^2, R_0^2, R_1^2, R_2^2$ reel sabitlerdir. Böylece tümevarımsal olarak elde edilir ki;

$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{G}}(m-1) \\ &= \left((S_0^{m-1} + S_1^{m-1}\lambda + \dots + S_{m-2}^{m-1}\lambda^{m-2}) + (R_0^{m-1} + R_1^{m-1}\lambda + \dots + R_{m-1}^{m-1}\lambda^{m-1}) \frac{1}{a\lambda + b} \right) \hat{\mathcal{G}}(-1) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{G}}(m-2) \\ &= \left((S_0^{m-2} + S_1^{m-2}\lambda + \dots + S_{m-3}^{m-2}\lambda^{m-3}) + (R_0^{m-2} + R_1^{m-2}\lambda + \dots + R_{m-2}^{m-2}\lambda^{m-2}) \frac{1}{a\lambda + b} \right) \hat{\mathcal{G}}(-1) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca [1] e göre $\hat{\mathcal{G}}(s)$ alanını tekrar gerekirse $s = m$ içerecek şekilde genişletilir ve bu (4.6) uygulanarak yapılır.

$$\hat{\mathcal{G}}(m) = \left((S_0^m + S_1^m\lambda + \dots + S_{m-1}^m\lambda^{m-1}) + (R_0^m + R_1^m\lambda + \dots + R_m^m\lambda^m) \frac{1}{a\lambda + b} \right) \hat{\mathcal{G}}(-1) \quad (4.36)$$

dir ve λ nın tüm kat sayıları reel sabitlerdir.

(iii) deki dönüştürülmüş sınır şartları için (4.6) sağlanır bu nedenle, öz koşul fonksiyonu

$$\begin{aligned} & (a\lambda + b)(S_0^{m-1} + S_1^{m-1}\lambda + \dots + S_{m-2}^{m-1}\lambda^{m-2}) + (R_0^{m-1} + R_1^{m-1}\lambda + \dots + R_{m-1}^{m-1}\lambda^{m-1}) \\ &= \frac{-1}{\hat{H}} \left[(a\lambda + b)(S_0^m + S_1^m\lambda + \dots + S_{m-1}^m\lambda^{m-1}) + (R_0^m + R_1^m\lambda + \dots + R_m^m\lambda^m) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

dir. Yani bu λ ya göre m . dereceden polinom olduğundan m tane kökü vardır. Dolayısıyla (2.5) de (iii) sınır koşulları tarafından $\hat{\mathcal{G}}(s)$ e dönüştürülmüş, yani (3.3) ve (4.6) yı sağlamak suretiyle verilen sınır değer problemi m tane özdeğere sahiptir.

Ayrıca (iv) deki dönüştürülen sınır koşulları, aşağıdaki öz koşul fonksiyonunu üreten (3.14) ü verir.

$$\begin{aligned} & (a\lambda + b)(S_0^{m-2} + S_1^{m-2}\lambda + \dots + S_{m-3}^{m-2}\lambda^{m-3}) + (R_0^{m-2} + R_1^{m-2}\lambda + \dots + R_{m-2}^{m-2}\lambda^{m-2}) \\ &= (p\lambda + q) \left[(a\lambda + b)(S_0^{m-1} + S_1^{m-1}\lambda + \dots + S_{m-2}^{m-1}\lambda^{m-2}) + (R_0^{m-1} + R_1^{m-1}\lambda + \dots + R_{m-1}^{m-1}\lambda^{m-1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Bu yine λ ya göre m . dereceden polinom olduğundan m kökü vardır. Dolayısıyla (2.5) de (iv) sınır koşulları tarafından $\hat{\mathcal{G}}(s)$ e dönüştürülmüş, yani (3.3) ve (3.14) ü sağlamak suretiyle verilen sınır değer problemi m tane özdeğere sahiptir.

Son olarak (3.1) dönüşümü Teorem 4.2 deki sınır değer problemlerinden herhangi birinin öz fonksiyonlarına karşılık gelen dönüştürülmüş sınır değer probleminin öz fonksiyonlarına dönüştürdüğünü gördük (bakınız Teorem 4.2, [6], [7]). Özellikle, eğer $\lambda_1 < \dots < \lambda_{m-1}$, $\tilde{\phi}_1(s), \dots, \tilde{\phi}_{m-1}(s)$ karşılık gelen öz fonksiyonları ile birlikte orijinal sınır değer probleminin özdeğerleri ise o zaman $z(s)$, $\tilde{\phi}_1(s), \dots, \tilde{\phi}_{m-1}(s)$ de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ özdeğerlerine karşılık gelen dönüştürülmüş sınır değer probleminin öz fonksiyonlarıdır. Dönüştürülmüş sınır değer problemlerinin m tane özdeğere sahip olduğunu bildiğimiz için $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ dönüştürülmüş sınır değer problemlerinin tüm özdeğerlerini oluşturur (bakınız [1], [8], [11]).



BÖLÜM 5

AFİNDEN NON-DIRICHLET SINIR ŞARTLARINA DÖNÜŞÜM

Bu bölümde, Bölüm 3 deki sürecin nasıl tersine çevrilebileceği gösterilir. Bunu aşağıdaki dönüşümü uygulayarak gösterir.

$$\mathcal{G}(s) = \hat{\mathcal{G}}(s+1) - \hat{\mathcal{G}}(s) \frac{\phi_0(s+1)}{\phi_0(s)} \quad (5.1)$$

λ ya bağlı afin sınır koşullarını sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$ yı non-Dirichlet sınır koşullarını sağlayan $\mathcal{G}$ ye dönüştürebilir.

Teorem 5.1: Aşağıdaki koşullar ile birlikte (2.5) i sağlayan $\hat{\mathcal{G}}(s)$ ile verilen sınır değer problemini göz önünde bulunduralım:

$$\hat{\mathcal{G}}(-1) = \hat{\mathcal{G}}(0)(\alpha\lambda + \beta) \quad (5.2)$$

$$\hat{\mathcal{G}}(m-2) = \hat{\mathcal{G}}(m-1)(\zeta\lambda + \eta) \quad (5.3)$$

$\phi_0(s)$; (2.5), (5.2) ve (5.3) ün $\lambda_0 = 0$ özdeğerine karşılık gelen öz fonksiyonu olmak üzere $s = -1, \dots, m-1$ için (5.1) dönüşümü aşağıdaki denklemi verir.

$$a_2(s)\mathcal{G}(s+1) - a_1(s)\mathcal{G}(s) + a_2(s-1)\mathcal{G}(s-1) = -a_2(s)\lambda\mathcal{G}(s), \quad s = 0, \dots, m-3 \quad (5.4)$$

dür. Burada $\hat{a}_2(-1) = \tilde{a}_2(-1)$ için

$$a_2(s) = \frac{\phi_0(s)a_2(s)}{\phi_0(s+1)} > 0, \quad s = -1, \dots, m-2 \quad (5.5)$$

$$a_1(s) = \left[\frac{\phi_0(s)\hat{a}_2(s)}{\phi_0(s+1)\hat{a}_2(s+1)} - \frac{\hat{a}_2(s-1)\phi_0(s-1)}{\hat{a}_2(s)\phi_0(s)} + \frac{\hat{a}_1(s)}{\hat{a}_2(s)} - \lambda_0 \right] \frac{\phi_0(s)\hat{a}_2(s)}{\phi_0(s+1)}, \quad s = 0, \dots, m-2$$

dir. Ek olarak, (5.2) ve (5.3) sağlayan $\hat{\mathcal{G}}$, aşağıdaki non-Dirichlet sınır koşullarını sağlayarak $\mathcal{G}$ ye dönüşür.

$$\mathcal{G}(-1) = B\mathcal{G}(0) \quad (5.6)$$

$$\mathcal{G}(m-2) = A\mathcal{G}(m-1) \quad (5.7)$$

Burada

$$B = \alpha \hat{a}_2(0) / \{(\alpha \lambda_0 + \beta)[\hat{a}_2(0) + \alpha \hat{a}_2(-1)]\}$$

ve

$$A = [\eta(\hat{a}_2(m-2)/\hat{a}_2(m-1) + 1/\zeta)]^{-1}$$

dir.

İspat: (2.5) i sağlayan $\hat{\mathcal{G}}(s)$ nin (5.4) ü sağlayan $\mathcal{G}(s)$ e dönüşmesi [1] de ele alınmıştır. Şimdi $\hat{\mathcal{G}}(s)$, $s = 0, \dots, m-1$ için tanımlanır ve (5.2) ile $s = -1, \dots, m-1$ e genişletilir. Böylece $s = -1, \dots, m-2$ için $\mathcal{G}$ tanımlanır ve (5.4) $s = 0, \dots, m-3$ için geçerlidir. (5.1) de $s = 0$ ve $s = -1$ yazılırsa aşağıdakileri verir.

$$\mathcal{G}(0) = \hat{\mathcal{G}}(1) - \hat{\mathcal{G}}(0) \frac{\phi_0(1)}{\phi_0(0)} \quad (5.8)$$

$$\mathcal{G}(-1) = \hat{\mathcal{G}}(0) - \hat{\mathcal{G}}(-1) \frac{\phi_0(0)}{\phi_0(-1)}. \quad (5.9)$$

(2.5) de $s = 0$ yazılırsa

$$\hat{\mathcal{G}}(1) = -\lambda \hat{\mathcal{G}}(0) + \frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} \hat{\mathcal{G}}(0) - \frac{\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)} \hat{\mathcal{G}}(-1) \quad (5.10)$$

olur. (5.10) daki $\hat{\mathcal{G}}(0)$ yerine (5.2) deki eşiti kullanılarak

$$\hat{\mathcal{G}}(1) = \left[\frac{-\lambda \hat{a}_2(0) + \hat{a}_1(0) - \hat{a}_2(-1)(\alpha \lambda + \beta)}{\hat{a}_2(0)(\alpha \lambda + \beta)} \right] \hat{\mathcal{G}}(-1) \quad (5.11)$$

elde edilir. $\phi_0(s)$, $\lambda = \lambda_0 = 0$ özdeğerine karşılık gelen (2.5), (5.2) ve (5.3) ün öz fonksiyonları olduğundan

$$\frac{\phi_0(-1)}{\phi_0(0)} = \alpha\lambda_0 + \beta \quad (5.12)$$

dır. Bundan dolayı

$$\phi_0(1) = \left[\frac{-\lambda_0 \hat{a}_2(0) + \hat{a}_1(0) - \hat{a}_2(-1)(\alpha\lambda_0 + \beta)}{\hat{a}_2(0)(\alpha\lambda_0 + \beta)} \right] \phi_0(-1) \quad (5.13)$$

dir. (5.11) ve (5.13), (5.8) de yerine yazılırsa ve (5.2) kullanılırsa aşağıdaki elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(0) = & \left[\frac{-\lambda \hat{a}_2(0) + \hat{a}_1(0) - \hat{a}_2(-1)(\alpha\lambda + \beta)}{\hat{a}_2(0)(\alpha\lambda + \beta)} \right] \hat{\mathcal{G}}(-1) \\ & - \frac{\hat{\mathcal{G}}(-1)}{\alpha\lambda + \beta} \left[\frac{-\lambda_0 \hat{a}_2(0) + \hat{a}_1(0) - \hat{a}_2(-1)(\alpha\lambda_0 + \beta)}{\hat{a}_2(0)(\alpha\lambda_0 + \beta)} \right] \frac{\phi_0(-1)}{\phi_0(0)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

$\phi_0(-1)/\phi_0(0) = \alpha\lambda_0 + \beta$ olduğundan (5.14) $\hat{a}_2(0)(\alpha\lambda + \beta)$ ortak paydasında toplanıp $\hat{\mathcal{G}}(-1)$ parantezine alınıp sadeleştirilirse

$$\mathcal{G}(0) = \hat{\mathcal{G}}(-1)(\lambda - \lambda_0) \frac{\hat{a}_2(0) + \alpha\hat{a}_2(-1)}{\hat{a}_2(0)(\alpha\lambda + \beta)} \quad (5.15)$$

olur. Böylece

$$\hat{\mathcal{G}}(-1) = \mathcal{G}(0) \frac{\hat{a}_2(0)(\alpha\lambda + \beta)}{(\lambda - \lambda_0)[\hat{a}_2(0) + \alpha\hat{a}_2(-1)]} \quad (5.16)$$

dir. (5.2) nin (5.9) da yazılması aşağıdakini verir:

$$\mathcal{G}(-1) = \hat{\mathcal{G}}(-1) \frac{\alpha(\lambda - \lambda_0)}{(\alpha\lambda + \beta)(\alpha\lambda_0 + \beta)} \quad (5.17)$$

(5.16), (5.17) de yerine yazılırsa aşağıdaki gibi olur.

$$\mathcal{G}(-1) = \mathcal{G}(0) \left[\frac{\alpha\hat{a}_2(0)}{(\alpha\lambda_0 + \beta)[\hat{a}_2(0) + \alpha\hat{a}_2(-1)]} \right] \quad (5.18)$$

Dolayısıyla (5.7) sınır koşulunu uygulamak için, (5.7) sınır koşulundan yararlanarak ϑ nin tanım kümesini genişletmek gerekir. Daha sonra ϑ nin genişletilmiş tanım kümesindeki denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

(5.4) de $s = m - 2$ yazıp (5.7) yi de kullanılarak aşağıdakiler elde edilir.

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{a_1(m-2)}{a_2(m-2)} + \lambda \right) \vartheta(m-2) + \frac{a_2(m-3)}{a_2(m-2)} \vartheta(m-3) = 0. \quad (5.19)$$

Şimdi (5.3) de $s = m - 2$ ve $s = m - 3$ yazılıp (5.1) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vartheta(m-2) &= \hat{\vartheta}(m-1) - \hat{\vartheta}(m-2) \frac{\phi_0(m-1)}{\phi_0(m-2)} = \hat{\vartheta}(m-1) \left(1 - (\zeta\lambda + \eta) \frac{\phi_0(m-1)}{\phi_0(m-2)} \right) \\ \vartheta(m-3) &= \hat{\vartheta}(m-2) - \hat{\vartheta}(m-3) \frac{\phi_0(m-2)}{\phi_0(m-3)} = \hat{\vartheta}(m-1) (\zeta\lambda + \eta) - \hat{\vartheta}(m-3) \frac{\phi_0(m-2)}{\phi_0(m-3)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

elde edilir. Yukarıdaki iki denklem (5.19) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}(m-1) \left[\left(\frac{1}{A} - \frac{a_1(m-2)}{a_2(m-2)} + \lambda \right) \left(1 - (\zeta\lambda + \eta) \frac{\phi_0(m-1)}{\phi_0(m-2)} \right) + \frac{a_2(m-3)}{a_2(m-2)} (\zeta\lambda + \eta) \right] \\ - \vartheta(m-3) \frac{a_2(m-3)}{a_2(m-2)} \frac{\phi_0(m-2)}{\phi_0(m-3)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

olur. $\phi_0(s)$, $\lambda = \lambda_0 = 0$ özdeğerine karşılık gelen (2.5), (5.2) ve (5.3) ün öz fonksiyonu olduğundan $\phi_0(m-2)/\phi_0(m-1) = \zeta\lambda_0 + \eta = \eta$ dür. Böylece yukarıdaki denklem aşağıdaki şekilde sadeleştirilebilir,

$$\begin{aligned} -\vartheta(m-3) + \hat{\vartheta}(m-1) \\ \times \left[\zeta\lambda \frac{\phi_0(m-1)a_2(m-2)\phi_0(m-3)}{\phi_0(m-2)a_2(m-3)\phi_0(m-2)} \left(-\frac{1}{A} + \frac{a_1(m-2)}{a_2(m-2)} - \lambda \right) + (\zeta\lambda + \eta) \frac{\phi_0(m-3)}{\phi_0(m-2)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ayrıca (2.5), $\hat{\phi} = \hat{\vartheta}$ için $s = m - 2$ yazılır ve (5.3) kullanılırsa

$$\left(\frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-3)} (1 + \zeta\lambda^2 + \eta\lambda) - \frac{\hat{a}_1(m-2)}{\hat{a}_2(m-3)} (\zeta\lambda + \eta) \right) \hat{\vartheta}(m-1) + \hat{\vartheta}(m-3) = 0 \quad (5.23)$$

olur. (5.22) ile (5.23) toplanır ve $\hat{g}(m-1) \neq 0$ gerçeği de göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} & \zeta \lambda \frac{\phi_0(m-1)a_2(m-2)\phi_0(m-3)}{\phi_0(m-2)a_2(m-3)\phi_0(m-2)} \left(-\frac{1}{A} + \frac{a_1(m-2)}{a_2(m-2)} - \lambda \right) + (\zeta \lambda + \eta) \frac{\phi_0(m-3)}{\phi_0(m-2)} \\ & + \frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-3)} (1 + \zeta \lambda^2 + \eta \lambda) - \frac{\hat{a}_1(m-2)}{\hat{a}_2(m-3)} (\zeta \lambda + \eta) = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

eşitliğine ulaşılır. $a_2(m-2)$ ve $a_2(m-3)$ yerine yazılıp tüm λ^2 li terimlerinin yok olduğunu görmek kolaydır. Sonra λ^0 katsayıları incelenir ve $\phi_0(m-2)/\phi_0(m-1) = \eta$ kullanarak λ^0 ın katsayısının

$$\frac{\phi_0(m-3)}{\phi_0(m-1)} + \frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-3)} - \frac{\hat{a}_1(m-2)\phi_0(m-2)}{\hat{a}_2(m-3)\phi_0(m-1)} \quad (5.25)$$

olduğu görülür ki bu da (2.5) den dolayı $s = m-2$ de 0 a eşittir. Böylece, sadece λ lı terimler kalır. İlk olarak $a_2(m-2)$, $a_2(m-3)$ ve $a_1(m-2)$ yerine yazılırsa

$$\frac{\phi_0(m-1)a_2(m-2)\phi_0(m-3)}{\phi_0(m-2)a_2(m-3)\phi_0(m-2)} = \frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-3)} \quad (5.26)$$

$$\frac{a_1(m-2)}{a_2(m-2)} = \frac{\phi_0(m-2)\hat{a}_2(m-2)}{\phi_0(m-1)\hat{a}_2(m-1)} - \frac{\hat{a}_2(m-3)\phi_0(m-3)}{\hat{a}_2(m-2)\phi_0(m-2)} + \frac{\hat{a}_1(m-2)}{\hat{a}_2(m-2)}.$$

bulunur. Böylece λ lı terimlerin katsayıları eşitlenerek aşağıdakine ulaşılır.

$$\frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-3)} \left(-\frac{\zeta}{A} + \zeta \frac{\hat{a}_2(m-2)\phi_0(m-2)}{\hat{a}_2(m-1)\phi_0(m-1)} + \eta \right) = 0. \quad (5.27)$$

$\hat{a}_2(m-2)/\hat{a}_2(m-3) \neq 0$ olduğundan bu denklemde A çekilirse

$$A = \left[\eta \left(\frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-1)} + \frac{1}{\zeta} \right) \right]^{-1} \quad (5.28)$$

elde edilir. $\zeta = 0$, yani non-Dirichlet bir sınır koşulu olması durumunda, $A = 0$, yani $g(m-2) = 0$ elde edilir ki bu da [1] deki sonuçlarla uyumludur.

Şimdi λ_0 , (2.2), (3.2) ve (3.13) ün en küçük özdeğerinden daha küçük, $z(s)$, $\lambda = \lambda_0 = 0$ için (2.2) nin bir çözümü öyle ki verilen $[-1, m-1]$ aralığında $z(s) > 0$ olmak üzere eğer $\phi_0(s) = 1/[z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)]$ ise o zaman $\phi_0(s)$, $\lambda_0 = 0$ özdeğerine karşılık gelen (2.5), (5.2) ve (5.3) ün öz fonksiyonudur. Bunu görmek için tıpkı daha önceden $\hat{I}\phi_0(1) = 0$ daki gibi $\phi_0(s)$ (2.5) i sağlar (bakınız [1], [12]) fakat şimdiki durumda $\phi_0(-1) = \alpha\lambda_0 + \beta = \beta$ dır. Diğer taraftan $\phi_0(s)$ yapısı gereği (5.2) yi sağlar. Biz şimdi ϕ_0 ın (5.3) ü de sağladığı gösterilir. $K = z(m-1)/z(m-2)$ olsun. O zaman

$$\zeta = \frac{\delta\tilde{a}_2(m-2)}{(1-\delta K)[-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2)]} \quad (5.29)$$

$$\eta = \frac{\tilde{a}_2(m-2)[1-\delta K - \delta\lambda_0]}{(1-\delta K)[-K\tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) - \lambda_0\tilde{a}_2(m-2)]}$$

olur. $\lambda = \lambda_0$ için $z(s)$, (2.2) nin çözümü olduğundan aşağıdaki yazılabilir,

$$\frac{\phi_0(m-2)}{\phi_0(m-1)} = \frac{z(m-2)\tilde{a}_2(m-2)}{z(m-3)\tilde{a}_2(m-3)} = \left[-\frac{z(m-1)}{z(m-2)} + \frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-2)} - \lambda_0 \right]^{-1} = \zeta\lambda_0 + \eta = \eta. \quad (5.30)$$

Uyarı 5.2: Yukarıdaki gibi $\phi_0(s)$, α, β, ζ ve η için, Teorem 5.1 deki (5.1) dönüşümü, verilen orijinal sınır değer problemiyle sonuçlanır. Özel olarak Teorem 5.1 den $a_2(s) = \tilde{a}_2(s)$ ve $a_1(s) = \tilde{a}_1(s)$ elde edilir (bakınız [1], [13] Teorem 4.2). Ayrıca,

$$B = \frac{\alpha\hat{a}_2(0)}{(\alpha\lambda_0 + \beta)[\hat{a}_2(0) + \alpha\hat{a}_2(-1)]} = \gamma \quad (5.31)$$

$$A = \left[\eta \left(\frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-1)} + \frac{1}{\zeta} \right) \right]^{-1} = \delta$$

olur, yani (5.2), (5.3) sınır şartları ile (2.5) i sağlayan $\hat{\mathcal{G}}(s)$ ile verilen sınır değer problemi (5.1) altında orijinal sınır değer problemi olan (3.2), (3.13) sınır şartları ile birlikte (2.2) yi sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ e dönüşür.

Şimdi $B = \gamma$ olduğu gösterilir. Öncelikle

$$\beta = \frac{\hat{a}_1(0)/\hat{a}_2(0) - \gamma(z(0)/z(-1))(\hat{a}_1(0)/\hat{a}_2(0)) - \tilde{a}_1(0)/\tilde{a}_2(0) + \gamma(\tilde{a}_2(-1)/\tilde{a}_2(0)) + z(1)/z(0)}{\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - \gamma(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0))(z(0)/z(-1))}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\gamma(z(0)/z(-1))}{\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) - \hat{a}_2(-1)z(0)/[\hat{a}_2(0)z(-1)]} \\ &= \frac{\gamma}{(\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0))(z(-1)/z(0)) - \hat{a}_2(-1)/\hat{c}(0)} \end{aligned} \quad (5.32)$$

olsun. $\hat{a}_2(-1) = \tilde{a}_2(-1)$ olduğundan $\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) = z(0)/z(-1)$ elde edilir. Böylece

$$\alpha = \frac{\gamma}{1 - \gamma(z(0)/z(-1))} \quad (5.33)$$

dir. Ayrıca $B = \alpha\hat{a}_2(0)/((\alpha\lambda_0 + \beta)\hat{a}_2(0) + \alpha\hat{a}_2(-1))$ olur. Bu ifade $\alpha\hat{a}_2(0)$ ile bölünüp, $\lambda_0 = 0$ yazılıp ve $\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) = z(0)/z(-1)$ eşitliği kullanılırsa

$$\frac{1}{B} = \beta \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{z(0)}{z(-1)} \right] \quad (5.34)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi

$$\frac{\hat{a}_1(0)}{\hat{a}_2(0)} = \frac{z(-1)\tilde{a}_2(-1)}{z(0)\tilde{a}_2(0)} + \frac{z(0)}{z(-1)} \quad (5.35)$$

ve $z, \lambda = \lambda_0 = 0$ için $s = 0$ da (2.2) yi sağladığından

$$\frac{\tilde{a}_1(0)}{\tilde{a}_2(0)} = \frac{z(-1)\tilde{a}_2(-1)}{z(0)\tilde{a}_2(0)} + \frac{z(1)}{z(0)} \quad (5.36)$$

olur. Böylece (5.35) ve (5.36) kullanılarak β nın payı sadeleştirilebilir,

$$\frac{z(0)}{z(1)} = \left(1 - \gamma \frac{z(0)}{z(1)} \right). \quad (5.37)$$

β nın paydası $\hat{a}_2(-1)/\hat{a}_2(0) = z(0)/z(-1)$ kullanılarak

$$\frac{z(0)}{z(1)} = \left(1 - \gamma \frac{z(0)}{z(1)} \right) \quad (5.38)$$

biçiminde sadeleştirilir. Böylece $\beta = 1$ elde edilir.

Son olarak α yerine yazılırsa

$$\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{z(0)}{z(-1)} \right] = \frac{1}{\gamma} \quad (5.39)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece $\frac{1}{B} = \frac{1}{\gamma}$ yani $B = \gamma$ dır.

Şimdi de $A = \delta$ olduğunu gösterelim. $\lambda_0 = 0$ ve

$$\frac{1}{A} = \eta \left(\frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-1)} + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (5.40)$$

olduğunu hatırlayalım. Ayrıca

$$\zeta = \frac{\delta \tilde{a}_2(m-2)}{(1 - \delta(z(m-1)/z(m-2))) \left[- (z(m-1)/z(m-2)) \tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2) \right]} \quad (5.41)$$

$$\eta = \frac{\tilde{a}_2(m-2)}{- (z(m-1)/z(m-2)) \tilde{a}_2(m-2) + \tilde{a}_1(m-2)}$$

diyelim. O zaman

$$\frac{\hat{a}_2(m-2)}{\hat{a}_2(m-1)} = \frac{z(m-3)\tilde{a}_2(m-3)z(m-1)}{z(m-2)z(m-2)\tilde{a}_2(m-2)} \quad (5.42)$$

dir. z , $\lambda = \lambda_0 = 0$ için $s = m-2$ de (2.2) yi sağladığından

$$\frac{\tilde{a}_1(m-2)}{\tilde{a}_2(m-1)} = \frac{z(m-3)\tilde{a}_2(m-3)}{z(m-2)\tilde{a}_2(m-2)} + \frac{z(m-1)}{z(m-2)} \quad (5.43)$$

yazılabilir. Şimdi yukarıdaki ζ ve η $\frac{1}{A}$ da yerlerine yerleştirilir ve (5.42) ve (5.43)

kullanılırsa,

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\delta} \quad (5.44)$$

olur. Yani $A = \delta$ dır.

Tüm bu olanlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

(2.5) i sağlayan $\hat{\mathcal{G}}(s)$ i aşağıdaki dört tip sınır koşulundan biriyle göz önüne alınır:

(a) Non-Dirichlet ve non-Dirichlet yani (4.5) ve (4.6),

(b) Non-Dirichlet ve afin yani (4.5) ve (3.14),

(c) Afin ve non-Dirichlet yani (3.3) ve (4.6),

(d) Afin ve afin yani (3.3) ve (3.14).

Teorem 4.3 e göre yukarıdaki sınır değer problemlerinin her birinin m tane özdeğeri vardır.

Şimdi, $\phi_0(s) = 1/z(s-1)\tilde{a}_2(s-1)$ $\lambda = \lambda_0 = 0$ özdeğerine karşılık gelen (a), (sırasıyla (b),(c) ,(d)) sınır koşulları ile (2.5) in öz fonksiyonu olmak üzere (5.1) dönüşümü (2.5) i sağlayan $\hat{\mathcal{G}}(s)$ i (2.2) yi sağlayan $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ e ve aşağıdaki sınır şartlarına dönüştürür:

(1) (a) sınır koşulu $\tilde{\mathcal{G}}(-1) = 0$ ve $\tilde{\mathcal{G}}(m-1) = 0$ a dönüşür.

(2) (b) sınır koşulu $\tilde{\mathcal{G}}(-1) = 0$ ve (3.13) e dönüşür.

(3) (c) sınır koşulu (3.2) ve $\tilde{\mathcal{G}}(m-1) = 0$ a dönüşür.

(4) (d) sınır koşulu (3.2) ve (3.13) e dönüşür.

Teorem 4.2 ye göre, yukarıdaki dönüştürülmüş $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ e göre olan sınır değer problemlerinin her birinin $m-1$ tane özdeğerlere sahip olduğu biliniyor. Özellikle, eğer $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{m-1}$ (2.5) ve (a) (sırasıyla (b), (c), (d)) nın özdeğerleri $\phi_0(s), \hat{\mathcal{G}}_1(s), \dots, \hat{\mathcal{G}}_{(m-1)}(s)$ öz fonksiyonları ise o zaman $\phi_0(s) \equiv 0$ ve $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ (2.2), (1), (sırasıyla (2), (3), (4)) in özdeğerleri ve $\hat{\mathcal{G}}_1(s), \dots, \hat{\mathcal{G}}_{(m-1)}(s)$ de karşılık gelen öz

fonksiyonlardır. Bu sınır değeri problemlerinin $m-1$ tane özdeğere sahip olduğunu bildiğimiz için bütün özdeğerler $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ dir.



BÖLÜM 6

SONUÇ

Sonuç olarak, tüm sürecin nasıl başka bir şekilde gerçekleştirilebileceği özetlenir. Yani, önceki formlarda verilen normal formun, aşağıdaki formlardan birinin sınır koşulları ile birlikte ikinci dereceden bir fark denklemi ile yola çıkılır,

- (i) Başlangıç noktasında non-Dirichlet ve uç noktada afin;
- (ii) Başlangıç noktasında afin ve uç noktada non-Dirichlet;
- (iii) Başlangıç noktasında ve uç noktada afin;

Daha sonra yukarıdaki sınır değer problemini (gerektiğinde alanını daha önce yapıldığı gibi genişleterek) sırasıyla aşağıdaki gibi dönüştürülmüş sınır koşulları ile aynı tipteki bir denkleme dönüştürülebiliyor:

- (A) Başlangıç noktasında Dirichlet ve uç noktada non-Dirichlet;
- (B) Başlangıç noktasında non-Dirichlet ve uç noktada Dirichlet;
- (C) Başlangıç noktasında ve uç noktada non-Dirichlet;

Daha sonra, yukarıdaki dönüştürülmüş sınır değer problemine uygun bir dönüşüm uygulanarak orijinal sınır değer problemine geri dönmek mümkündür.

KAYNAKLAR

- [1] Currie, S., Love, A. D. (2010). Transformations of Difference Equations I. *Advances in Difference Equations*. 947058, 22.
- [2] Currie, S., Love, A. D. (2010). Transformations of Difference Equations II. *Advances in Difference Equations*. 623508, 23.
- [3] Atkinson, F. V. (1964). Discrete and Continuous Boundary Problems. *Mathematics in Science and Engineering* (8). Academic Press, New York, NY, USA.
- [4] Binding, P. A., Browne, P. J., Watson, B. A. (2001). Spectral Isomorphisms Between Generalized Sturm-Liouville Problems. *Linear Operators and Matrices, Operator Theory: Advances and Applications*. 135–152.
- [5] Browne, P. J., Nilsen, R. V. (1983). On Difference Operators and their Factorization. *Canadian Journal of Mathematics*, 35(5), 873-897.
- [6] Binding, P. A., Browne, P. J., Watson, B. A. (2006). Sturm-Liouville Problems with Reducible Boundary Conditions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 49(3), 593-608.
- [7] Binding, P. A., Browne, P. J., Watson, B. A. (2002). Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on the Eigenparameter. II. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 148(1). 147-168.
- [8] Binding, P. A., Browne, P. J., Watson, B. A. (2001). Transformations Between Sturm-Liouville Problems with Eigenvalue Dependent and Independent Boundary Conditions. *The Bulletin of the London Mathematical Society*, 33(6). 749-757.
- [9] Teschl, G. (2000). Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. *Of Mathematical Surveys and Monographs*, (72). American Mathematical Society, Providence, RI, USA.
- [10] Miller, K. S., Benjamin, W. A. (1968). *Linear Difference Equations*.
- [11] Miller, K. S. (1966). *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*. . Dover, New York, NY, USA.

- [12] Gautschi, W. (2004). Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation. *Numerical Mathematics and Scientific Computation*. Oxford University Press, New York, NY, USA.
- [13] Shi, Y., Chen, S. (1999). Spectral Theory of Second-Order Vector Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **239(2)**. 195–212.

