

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİNANSAL ZAMAN SERİLERİNİN OLASILIKLI MODELLENMESİ VE
BENZETİMİ**

Yusuf KARADEDE

**Danışman
Prof. Dr. Gültekin ÖZDEMİR**

**DOKTORA TEZİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2020**



© 2020 [Yusuf KARADEDE]

TEZ ONAYI

Yusuf KARADEDE tarafından hazırlanan "**Finansal Zaman Serilerinin Olasılıklı Modellenmesi ve Benzetimi**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Gültekin ÖZDEMİR
Süleyman Demirel Üniversitesi



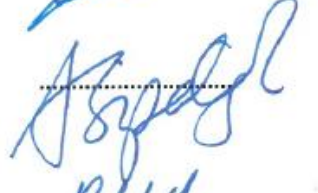
Jüri Üyesi

Prof. Dr. Tuncay YİĞİT
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Aydın SİPAHİOĞLU
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç. Dr. Haluk YAPICIOĞLU
Eskişehir Teknik Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç. Dr. Halil İbrahim KORUCA
Süleyman Demirel Üniversitesi



Enstitü Müdürü

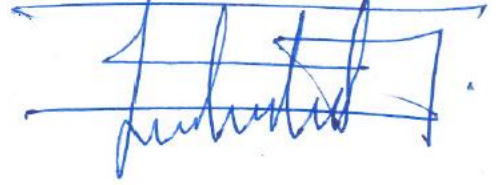
Doç. Dr. Şule Sultan UĞUR

.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm bilimsel yazın bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Yusuf KARADEDE



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. BİLİMSEL YAZIN TARAMASI	11
3. BROWNIAN HAREKET	19
3.1. Rassal Yürüyüş.....	19
3.1.1. Bir Boyutlu Rassal Yürüyüş	21
3.2. Markov Zincirleri	22
3.3. Brownian Hareketin Tanımı.....	24
3.3.1. Brownian Hareket Sürecinin Özellikleri.....	25
3.3.2. Farklı Zaman Ölçeklerinde Brownian Hareketin Yoğunluğu	26
3.3.3. Brownian Hareketin Örnek Yollarının Benzetimi.....	29
4. STOKASTİK İNTEGRAL	34
4.1. Stokastik İntegral Tanımı	34
4.2. Ito Formülü	40
5. ÖNEMLİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	46
5.1. Aritmetik Brownian Hareket.....	46
5.2. Vasicek Ortalamaya Dönme Süreci.....	50
5.2.1. Ortalamaya Dönme Süreci Langevin Denklemi	51
5.2.2. Ortalamaya Dönme Ornstein-Uhlenbeck Süreçler	53
5.2.3. Vasicek $dx(t) = \alpha(\mu - x(t))dt + \sigma dW(t)$ Modelinin Çözümü.	57
6. SİÇRAMALAR ile STOKASTİK SÜREÇLER.....	64
6.1. Poisson Süreci.....	66
6.2. Bileşik Poisson Süreci	67
6.3. Gamma Süreci	68
6.4. Sıçrama Difüzyon Süreci	71
6.5. Merton Sıçrama Difüzyon Süreci	71
7. PERFORMANS DEĞERLENDİRME YÖNTEMLERİ.....	77
7.1. Ortalama Mutlak Yüzde Hata	77
7.2. Nisbi Hata.....	77
7.3. Normalize Edilmiş Kök Ortalama Kare Hata.....	78
7.4. Katsayı Etkinliği	79
7.5. Sinyal İzleme.....	80
8. FİNANSAL ZAMAN SERİLERİNİN MODELLENMESİ VE BENZETİMİ	82
8.1. Monte Carlo $ARIMA(1,1,1)$ Modeli (model-1).....	88
8.2. Sabit Varyanslı Stokastik Model (model-2)	96
8.3. Değişken Varyanslı Stokastik Model (model-3)	111
8.4. Parametreleri Parçacık Sürü Optimizasyonu İle Kestirilen Değişken Varyanslı Stokastik Model (model-4)	121
9. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	135

	Sayfa
KAYNAKLAR	145
EKLER.....	151
EK A. Trend Bileşeni İçin MATLAB Kodu.....	152
EK B. Stokastik Bileşen İçin MATLAB Kodu.....	155
ÖZGEÇMİŞ.....	158



ÖZET

Doktora Tezi

FİNANSAL ZAMAN SERİLERİNİN OLASILIKLI MODELLENMESİ VE BENZETİMİ

Yusuf KARADEDE

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gültekin ÖZDEMİR

Bu tez çalışmasında; finansal zaman serilerinin olasılıklı modellenmesi ve benzetimi için farklı modeller önerilmiştir. Bilimsel yazında en çok değişkenlik gösteren borsalardan biri olan BIST-100 endeksi hisse senedi fiyat hareketlerinin gelişimi örnek alınarak analiz edilmiştir. Önerilen modellerde finansal zaman serisinin trend, ortalamaya geri dönme, değişkenliğin GARCH davranışı ve farklı sıçrama büyüklükleri olmak üzere dört varsayım üzerine inşa edilmiştir.

Bu tez çalışmasında dört model önerilmiştir. Monte Carlo *ARIMA* birinci model, sabit varyans ve trend bileşeni ile sıçramalı *AR(1)* ikinci model, değişen varyans-*GARCH* ve trend bileşeni ile sıçramalı *AR(1)* üçüncü model ve parametreleri Parçacık Sürü Optimizasyonu ile tahmin edilen dördüncü model olarak belirlenmiştir. Fiyatların logaritmik değerleri trend ve stokastik bileşen olmak üzere iki kısım olarak modellenmiştir. Logaritmik fiyatlar kullanılarak trend ve stokastik bileşenin parametreleri Ençok Olabilirlik Metodu ile tahmin edilmiştir. Logaritmik fiyatlardan trend çıkarılmış ve veriler durağan hale getirilmiştir. Verilerin durağan hale getirilmesindeki amaç stokastik bileşenin modellenmesinde kullanılan Vasicek modelinin otoregresif *AR(1)* süreci izlediği kabul edilmiştir. Ayrıca *AR(1)* sürecine sıçramalar; Bernoulli, Poisson ve Gamma süreçleri ve varyansı bir fonksiyon olarak modelleyen *GARCH* süreci dahil edilerek parametreler tahmin edilmiştir.

Monte Carlo benzetimi 10000 deneme için gerçekleştirilmiş ve tekrar trend bileşeni eklenerek logaritmik fiyatlar güncellenmiştir. Böylece logaritmik fiyatların üsteli alınarak fiyatlar simüle edilmiş en uygun performans ölçüt değerlerine sahip yol en iyi tahmin olarak kabul edilmiştir. Önerilen modeller içerisinde en iyi yöntem olarak; değişen varyans- *GARCH* ve trend bileşeni ile sıçramalı *AR(1)* üçüncü modelin sırasıyla Gamma, Poisson, Bernoulli ve MC *ARIMA* şeklinde olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Finansal zaman serileri, Stokastik diferansiyel denklemler, Vasicek modeli, Ençok olabilirlik tahmini, Parçacık sürü optimizasyonu, Benzetim

2020, 158 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

STOCHASTIC MODELING AND SIMULATION OF FINANCIAL TIME SERIES

Yusuf KARADEDE

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Industrial Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Gültekin ÖZDEMİR

Different models are proposed for probabilistic modeling and simulation of financial time series in this study. BIST-100 index, which is one of the most volatile exchanges in the scientific literature, is analyzed by taking as an example the development of stock price movements. The proposed models present a general model class that simultaneously takes into account a number of factors as the trend, mean reverting, GARCH-type behavior and different jump sizes of the financial time series.

This study proposes four models: the first model is, abbreviated as model-1, called as MC *ARIMA*. Second model is, abbreviated as model-2, called as jumping *AR*(1) with fixed variance and trend component, third model is, abbreviated as model-3, jumping *AR*(1) with changing variance- GARCH type behavior and trend component, the fourth model is, abbreviated as model-4, predicted by particle swarm optimization (PSO) with parameters of model-3. The logarithmic values of prices are modeled in two parts as trend and stochastic component. Using logarithmic prices, the parameters of the trend and stochastic component were estimated by the Maximum Likelihood Method (MLE). Trend was removed from the logarithmic prices and the data were made stable. The purpose of making it stationary is that the Vasicek model used in modeling the stochastic component followed the autoregressive *AR*(1) process. Also, parameters were estimated with MLE by including the jumps (Bernoulli, Poisson and Gamma process) and the GARCH process, which models the variance as a function.

Monte Carlo simulation was carried out for 10000 trials and logarithmic prices were updated by adding the trend component again. Thus, by taking the logarithmic prices as the exponential the prices were simulated and accepted as the best estimate that has the most appropriate performance criterion values. As the best method among the proposed models; jumping *AR*(1) with changing variance- GARCH type behavior and trend component was found to be Gamma, Poisson, Bernoulli and MC *ARIMA*, respectively.

Keywords: Financial time series, Stochastic differential equations, Vasicek model, Maximum likelihood method, Particle swarm optimization, Simulation

2020, 158 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma sürecinde kıymetli bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan, çalışma süreci boyunca araştırma ortamı hazırlayan, her türlü ilgi ve desteğini esirgemeyen, yönlendiren, karşılaştığım zorlukları aşmamda yardımcı olan Danışman Hocam Prof. Dr. Sayın Gültekin ÖZDEMİR'e teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Araştırmanın yürütülmesinde yardımlarından ve fikirlerinden yararlandığım değerli Tez İzleme Komitesi (TİK) üyeleri Prof. Dr. Sayın Tuncay YİĞİT ve Doç. Dr. Sayın Halil İbrahim KORUCA'ya teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tezin iyileştirilmesi ve geliştirilmesinde kıymetli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan Prof. Dr. Sayın Aydın SİPAHİOĞLU ve Doç. Dr. Sayın Haluk YAPICIOĞLU'na saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmanın yürütülmesinde maddi ve manevi yardımlarını gördüğüm Isparta halkına ve kıymetli arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Tezimin gerçekleşmesinde bugüne kadar kendilerinden ders aldığım bütün hocalarıma sevgi ve saygılarımı sunarım.

Doktora eğitimim boyunca dolaylı ve dolaysız yardımlarını gördüğüm Süleyman Demirel Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü Öğretim Üyelerine ve çalışanlarına teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca Tezim ile ilgili evrak takibi yapan Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü personeline teşekkür ederim.

ÖYP06660-DR-15 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi **Öğretim Üyesi Yetiştirme Projesi (ÖYP)** Koordinasyon Birimi Başkanlığı'na ve projemizin takibini yapmış personeline teşekkür ederim.

1649B031800070 Başvuru Numarası ile Tezimin gerçekleşmesinde "**2211-C Öncelikli Alanlara Yönelik Yurt İçi Doktora Burs Programı 2018 yılı 1. Dönem**" kapsamında maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK-BİDEB) ve projemizin takibini yapmış personeline teşekkür ederim.

Tezimin her aşamasında maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen beni yalnız bırakmayan başta Sevgili Eşim Ülkü KARADEDE'ye, Aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Yusuf KARADEDE
ISPARTA, 2020

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. BIST-100 endeksi tarihsel fiyatları (2008-2019)	5
Şekil 1.2. BIST-100 endeksi günlük logaritmik getirilerin frekans dağılımı.....	5
Şekil 1.3. BIST-100 endeksi günlük getiri serisi (2008-2019).....	6
Şekil 1.4. Fiyatları öngörmek için kullanılan çözüm tekniklerinin genel akış diyagramı	6
Şekil 3.1. Sıfırdan başlayan ardışık 250 adımlık rassal yürüyüş yol örnekleri	22
Şekil 3.2. Brownian hareket için benzetilmiş örnek beş tane yol.....	27
Şekil 3.3. Farklı zaman(yıl) ölçeklerinde Brownian hareketin yoğunluğu.....	27
Şekil 3.4. Brownian hareket için benzetilmiş örnek elli yol.....	28
Şekil 3.5. Bir rassal yürüyüş olarak Brownian hareket için benzetilmiş 1000 adımlık örnek 100 yol.....	28
Şekil 3.6. Bir rassal yürüyüş olarak Brownian hareket için benzetilmiş 250 adımlık örnek 100 yol.....	29
Şekil 3.7. BH sınırsız toplam değişime(TV) sahip olması.....	33
Şekil 3.8. BH sınırlı kareli değişime (QV) sahip olması.....	33
Şekil 4.1. Adım fonksiyonu $t \rightarrow f(t)$	36
Şekil 4.2. Örnek bir adım fonksiyonu $x \rightarrow f(x)$	37
Şekil 4.3. Adım fonksiyonu $t \rightarrow f^2(t)$	39
Şekil 5.1. Genelleştirilmiş Wiener süreci (ABH).....	50
Şekil 5.2. Farklı adım ve dalgalanma değerleri ile Langevin denkleminin benzetimi.....	52
Şekil 5.3. Vasicek modeli $dX = \alpha(\mu - X)dt + \sigma dW(t)$ simüle edilmiş yolları. Parametreler $x_0 = 0,05$, $\alpha = 10$, $\mu = 0,07$ $\sigma = 0,1$, $nstep = 250$, zaman=1 yıl.	59
Şekil 5.4. Monte Carlo ile teorik beklenen değer ve varyansın karşılaştırılması	60
Şekil 5.5. Farklı zaman dilimlerinde Vasicek modelinin benzetilmiş dağılımı.....	60
Şekil 5.6. Farklı zaman dilimlerinde Vasicek modelinin yoğunluğu.....	61
Şekil 5.7. Vasicek modelinin yoğunluğunun evrimi	61
Şekil 6.1. Üst grafik: Poisson sürecinin benzetilmiş yolları $\lambda = 5$ için $N(t) \sim Poi(\lambda t)$. Orta grafik: Normal sıçrama büyüklükleri ile bileşik poisson sürecinin benzetilmiş yolları (parametreler $\lambda = 5$, $\mu_Z = -0,05$, $\sigma_Z = 0,1$). Alt grafik: Gamma sürecinin $G(t) \sim \Gamma(\alpha t, \lambda)$ benzetilmiş yolları (parametreler $\alpha = 5$, $\lambda = 10$)...	70
Şekil 6.2. Merton sıçrama difüzyon sürecinin benzetilmiş yolları. Parametreler $\mu = -0,0002$, $\sigma = 0,0325$, $\lambda = 0,5175$, $\mu_Z = 0,0064$, $\sigma_Z = 0,1520$	74
Şekil 8.1. Monte Carlo $ARIMA(1,1,1)$ modelinin akış diyagramı (model-1).....	93
Şekil 8.2. Sabit varyanslı stokastik modelin akış diyagramı (model-2) ...	97
Şekil 8.3. BIST-100 endeksinin günlük kapanış fiyat değerleri.....	102

Şekil 8.4.	BIST-100 endeksinin günlük kapanış logaritmik fiyat değerleri.....	102
Şekil 8.5.	BIST-100 endeksinin günlük kapanış logaritmik getiri değerleri.....	105
Şekil 8.6.	Model-2 için trend ile logaritmik fiyatlar (üst grafik). Kaldırılmış trend ile logaritmik fiyatlar	105
Şekil 8.7.	Model-2 için rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatlar (2018-2023).....	107
Şekil 8.8.	Model-2 için rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (2018-2019).....	107
Şekil 8.9.	Model-2 için rassal sayı çekirdeği beş için piyasa ve simüle edilen gelecek fiyatlar(üst grafik). Piyasa fiyat riski (alt grafik)	110
Şekil 8.10.	Değişen varyanslı stokastik modelin akış diyagramı (model-3).....	112
Şekil 8.11.	Model-3 için trend ve logaritmik fiyatlar (üst grafik). Kaldırılmış trend ile logaritmik fiyatlar (alt grafik).....	116
Şekil 8.12.	Model-3 için GARCH(1,1) süreci ile dalgalanmanın zamana göre modellenmesi	117
Şekil 8.13.	Model-3 için rassal sayı çekirdeği dokuz için gerçek ve simüle edilen fiyatlar (2018-2023).....	119
Şekil 8.14.	Model-3 için rassal sayı çekirdeği dokuz için gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (2018-2019).....	119
Şekil 8.15.	Model-3 için rassal sayı çekirdeği dokuz için piyasa ve simüle edilen gelecek fiyatlar (üst grafik). Piyasa fiyat riski	120
Şekil 8.16.	Parçacık sürü optimizasyonu-PSO akış şeması	122
Şekil 8.17.	PSO ile parametreleri kestirilen değişen varyanslı stokastik modelin akış diyagramı (model-4).....	127
Şekil 8.18.	Model-4 için trend ile logaritmik fiyatlar (üst grafik). Kaldırılmış trend ile logaritmik fiyatlar (alt grafik).....	129
Şekil 8.19.	Model-4 için GARCH(1,1) süreci ile dalgalanmanın zamana göre modellenmesi	130
Şekil 8.20.	Model-4 için rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatlar (2018-2023).....	132
Şekil 8.21.	Model-4 için rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (2018-2019).....	133
Şekil 8.22.	Model-4 için rassal sayı çekirdeği beş için piyasa ve simüle edilen gelecek fiyatlar (üst grafik). Piyasa fiyat riski	133
Şekil 9.1.	Seçilen en uygun model (model-3) için sistem akış şeması	135
Şekil 9.2.	Rassal sayı çekirdeği dokuz (9) için 2018-2023 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatlar (model-3).....	140
Şekil 9.3.	Rassal sayı çekirdeği beş (5) için 2018-2023 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatlar (model-4)	141
Şekil 9.4.	Rassal sayı çekirdeği dokuz (9) için 2018-2019 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (model-3).....	141
Şekil 9.5.	Rassal sayı çekirdeği beş (5) için 2018-2019 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (model-4)	142

Şekil 9.6.	Gamma süreci ile rassal sayı çekirdeği dokuz (9) için 10000 MC benzetim sonucu elde edilen en iyi 100 benzetimin sinyal izleme grafiği (model-3).....	143
Şekil 9.7.	Gamma süreci ile rassal sayı çekirdeği dokuz için 10000 MC benzetim sonucu TS değerlerinin sıklığı grafiği (model-3)	143



ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 5.1. Vasicek modelin özellikleri.....	62
Çizelge 6.1. Gamma sürecinin özellikleri	69
Çizelge 6.2. Merton sıçrama difüzyon (Jump-Diffusion) modelinin özellikleri (Ballotta ve Gianluca, 2018).....	75
Çizelge 7.1. Nisbi hataların sınıflandırılması	78
Çizelge 7.2. Katsayı etkinliği performansının sınıflandırılması	80
Çizelge 8.1. Hisse senedi fiyatlarını modellemek için önerilen tahmin modelleri.....	87
Çizelge 8.2. Önerilen model-2 için spot fiyat (P_t) parametre tahminleri ..	104
Çizelge 8.3. Rassal sayı çekirdekleri ile model-2 için performans değerlendirmesi	106
Çizelge 8.4. Önerilen model-3 için spot fiyat (P_t) parametre tahminleri .	116
Çizelge 8.5. Rassal sayı çekirdekleri ile model-3 için performans değerlendirmesi	118
Çizelge 8.6. Önerilen model-4 için trend performans değerlendirmesi.....	126
Çizelge 8.7. Model-4 için spot fiyatların (P_t) PSO ile parametre tahminleri.....	130
Çizelge 8.8. Rassal sayı çekirdekleri ile PSO kullanarak model-4 için performans değerlendirmesi	134
Çizelge 9.1. Rassal sayı çekirdekleri (0-10) koşturularak önerilen modellerin performanslarının karşılaştırılması	136

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$S(t)$	Endeksin t zamandaki değeri
S_0	Endeksin başlangıç değeri
μ	Endeksin getiri oranı
σ	Endeksin standart sapması (dalgalanma)
Δt	Zaman periyodu
$W(t)$	Wiener süreci
dX	Fiyat değişimi
J	Rastsal sıçrama büyüklüğü
X_t	Spot fiyat
α	Ortalama seviyeye dönme hızı
Δq	Poisson süreci
λ	Sıçrama sürecinin yoğunluğu veya sıklığı
P_{ij}	Bir adım geçiş olasılığı
P	Geçiş olasılık matrisi
$c_W(t, s)$	Brownian hareket sürecinin otokovaryans fonksiyonu
$W(t)$	Brownian hareket süreci
$TV(f)$	f fonksiyonu toplam değişimi
$QV(f)$	f fonksiyonu kuadratik (kare) değişimi
$\mathbb{E}$	Sürecin beklenen değeri
Var	Sürecin varyansı
dS_t	Hisse senedindeki değişim
$L^2(\Omega)$	Kare integrallenebilir rastgele değişkenlerin uzayı
$\ *\ _{L^2(\Omega)}$	$L^2(\Omega)$ uzayı üzerinde norm
$I_\sigma(0, T)$	Stokastik integral
Π	Verilen bir aralık parçalanışı
ADD	Adi diferansiyel denklem
SDD	Stokastik diferansiyel denklem
$\frac{\Delta S}{S}$	Fiyat değişiminin fiyata oranı
OU	Ornstein-Uhlenbeck Süreci
$\Gamma(v)$	Gamma fonksiyonu
MLE	Ençok olabilirlik metodu
m	Parçacığın kütlesi
$\phi_Z(u)$	Rastgele Z değişkenin karakteristik fonksiyonu
$N(t)$	Poisson sürecinde gerçekleşen olay sayısı
MAPE	Ortalama mutlak yüzde hata
$s(t)$	Trend bileşeni
PSO	Parçacık sürü optimizasyonu
MR	Vasicek ortalamaya dönme süreci
RE	Nisbi hata
TS	Sinyal izleme
CE	Katsayı etkinliği
NRMSE	Normalize edilmiş kök ortalama kare hata
$\emptyset$	Durağanlık katsayısı (belirli değer etrafında veri ürettiren parametre)
$\mathbb{I}_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$	$(t_{i-1}, t_i]$ zaman aralığı
$f(t)$	Adım fonksiyonu

R_+	Pozitif reel sayılar
$df(x)$	$f'(x)dx$
Δx	Sonsuz küçük bir değer
$(u_i)_{i \in \mathbb{R}_+}$	Sürecin kare integrallenebilir durumu
$(v_i)_{i \in \mathbb{R}_+}$	Sürecin kare integrallenebilir durumu
$\frac{\partial f}{\partial t}$	$f(t, x)$ fonksiyonunda birinci değişkene (zaman) göre kısmi türev
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$f(t, x)$ fonksiyonunda ikinci değişkene (fiyat) göre kısmi türev
$N(\mu, \sigma^2)$	Ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılım
ε	Standart normal dağılım
$\sigma \varepsilon_t$	Rassal terim
$-\beta V_t$	Sürtünme kuvveti
β	Sürtünme katsayısı
γ	Gürültünün gücü
ξ_t	Rastgele kuvvet
h	Adım uzunluğu
CIR	Cox, Ingersoll ve Ross modeli
$\alpha(X^* - X_t)\Delta t$	Ortalamaya dönme terimi
$X_t \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$	Difüzyon terimi
$\ln J \Delta q_t$	Sıçrama terimi
$N(t)$	Belirli bir zaman diliminde gerçekleşen olay sayısı
$Y(t)$	Bileşik Poisson süreci
$\phi_Z(u)$	Karakteristik fonksiyon
$\Gamma(\alpha, \lambda, k)$	Gamma süreci
A_t	Hisse senedi fiyatının t zamanındaki gerçek değeri
F_t	Hisse senedi fiyatının t zamanındaki tahmini değeri
n	Gözlem sayısı
$RMSE$	Kök ortalama kare hata
Q_t	Hisse senedi fiyatının t zamanındaki gerçek değeri
$\widehat{Q}_t$	Hisse senedi fiyatının t zamanındaki tahmini değeri
$\bar{Q}$	Hisse senedi fiyatlarının (gözlemlenen veriler) ortalama değeri
r^2	Belirlilik katsayısı
model-1	Monte Carlo (MC) $ARIMA(1,1,1)$
model-2	Sabit varyans ve trend bileşeni ile sıçramalı $AR(1)$
model-3	Değişen varyans ve trend bileşeni ile sıçramalı $AR(1)$
model-4	Parametreleri PSO ile kestirilen değişken varyanslı stokastik model
$ARIMA$	Birleştirilmiş Otoregresif Hareketli Ortalama
BJ	Box-Jenkins
MLT	Merkezi limit teoremi
AR	Otoregresif
MA	Hareketli ortalama
$ARMA$	Otoregresif hareketli ortalama
a_t	t zamanındaki hata terimi
$\log P_t$	Logaritmik hisse senedi fiyat hareketleri
θ	Parametreler kümesi
dJ	Merton sıçrama difüzyon süreci

<i>rng</i>	Rastgele sayı çekirdeği üreticileri
<i>EKK</i>	En Küçük Kareler
<i>M</i>	Simetrik pozitif tanımlı matris
<i>diag</i>	Matrisin diagonal kısmı
<i>GARCH</i>	Genelleştirilmiş otoregresif koşullu değişen varyans
ω, α ve β	GARCH parametreleri
<i>pbest</i>	Parçacığın en iyi kendi çözümü.
<i>gbest</i>	Tüm parçacıklar arasında en iyi çözüm.
<i>rand₁, rand₂</i>	Rastgele üretilen sayılar ya da değerler.
<i>maxit</i>	Maksimum iterasyon sayısı.
<i>vel</i>	Parçacığın hızı
<i>iter</i>	Sıfırdan başlayıp maksimum iterasyon sayısına kadar ilerleyen sayı.
<i>w</i>	Durağanlık (inertia) faktörü
$c_1 = 1$	Bilişsel parametre-(Cognitive parameter) sabit bir değer
$c_2 = 4 - c_1$	Sosyal parametre-(Social parameter) sabit bir değer
<i>par</i>	Rastgele üretilmiş başlangıç sürüsü
<i>parsize</i>	Sürünün büyüklüğü
<i>npar</i>	Problem boyutu
<i>[ff]</i>	Uygunluk değeri fonksiyonu
<i>A</i>	Bir değişkenin alt sınırı
<i>U</i>	Bir değişkenin üst sınırı
<i>ABH</i>	Aritmetik Brownian hareket
<i>GBH</i>	Geometrik Brownian hareket
V_t	Brownian hareket sürecinin hızı
<i>F</i>	Dış kuvvet
<i>MC</i>	Monte Carlo
<i>N</i>	Adım sayısı
<i>FFT</i>	Hızlı Fourier dönüşümü
<i>PDF</i>	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
<i>TRLIBOR</i>	Türk lirası referans faiz oranı
<i>TSSV</i>	Stokastik değişkenli ayarlanmış kararlı Lévy süreçleri
<i>BNS</i>	Barndorff-Nielsen ve Shephard stokastik modeli
<i>od(t)</i>	Sıfıra gitme eğilimi hızlı olan miktar
<i>d(t)</i>	Çok kısa zaman aralığı
dS_t	Hisse senedindeki değişim

1. GİRİŞ

Bir zaman serisi, bir konuda verilerin zamana bağılı olarak indislenerek toplanmasıyla oluşmaktadır. Zaman serileri, geleceğin tahmini açısından taşıdığı önemden dolayı tarih boyunca insanoğlunun yoğun ilgisini çekmiştir. Günlük hayatta da özellikle en son borsa endeks değerleri, döviz kurları, enerji (elektrik, doğalgaz vs.) fiyatları ve faiz oranları birçok sektör tarafından izlenmektedir. Özel ve kurumsal yatırımcılar, iş adamları, uluslararası ticaretle uğraşan herkes ve komisyoncular ve bu insanlara tavsiyelerde bulunan analistler, fiyat davranışının daha derin bir şekilde analiz edilmesinden faydalanmaktadırlar. Birçok yatırımcı fiyat değişiklikleriyle ilgili riskleri ele almaktadır. Bu riskler, gelecekteki ilgili zaman serisinin değerlerindeki doğrudan farklılıkları veya portföy bağlamında ilgili kovaryanslarla olan ilişkileri ile çoğu kez özetlenebilir. Gelecekteki standart sapma tahminleri, güncel risk göstergeleriyle ilgili bilgi verirken, bu risk göstergeleri kabul edilemez risklerden kaçınmak için kullanılabilir.

Finansal zaman serileriyle ilgili araştırmaların iki temel amacı bulunmaktadır:

- İlk olarak; fiyatların nasıl davrandığını anlamak önemlidir. Zaman serilerinin özellikle varyansı önemlidir. Yarının fiyatı belirsizdir ve bu nedenle bir olasılık dağılımı ile tanımlanmalıdır. Bu istatistiksel yöntemlerin fiyatları araştırmanın doğal yolu olduğu anlamına gelmektedir. Genellikle fiyatları modelleyen kişi, ardışık fiyatların nasıl belirlendiğinin ayrıntılı bir açıklaması olan bir model kurmaktadır.
- İkinci amaç; fiyat davranış bilgisini, riski azaltmak veya daha iyi kararlar almak için kullanmaktır.

Bu çalışmadaki genel amaç; fiyat ya da getirileri en az hata ile doğru bir şekilde modellemek ve yatırımcının önündeki belirsizliği kısmen belirli hale getirerek yatırımcının kar elde etmesini sağlamaktır.

Zaman serisi modelleri; tahmin, opsiyon fiyatlama ve risk yönetimi için kullanılabilir. Finansal varlık fiyatı, hisse senedi fiyat hareketleri, tahvil, döviz fiyat ve/veya getirilerinin belli bir olasılık dağılımı (normal, lognormal vb.)

dahilinde öngörülebilir olması, bu süreç hakkında önceden bilgi sahibi olan yatırımcılara normal üstü getiri sağlama veya uğranılacak bir kaybı giderme fırsatı sağlayacağından finans dünyasında oldukça ilgi çeken bir konudur (İlarslan, 2014).

Bu çalışmada; genel itibari ile bilimsel yazında en çok dalgalanma gösteren hisse senedi fiyatı zaman serilerinden birisi olan Borsa İstanbul BIST-100 endeksinin davranışı incelenmiştir. Önerilen modeller, zaman serilerinin davranışını modelleyecek genel modellerdir. En karmaşık yapıya yani en çok dalgalanma gösteren zaman serisi türü olan hisse senedi fiyat hareketi analiz edilmiş ve geniş kapsamlı bilgi izleyen bölümlerde verilmiştir. Analizin yapılabilmesi için aşamalar alt bölümlere ayrılmış en sonunda bir ürünü oluşturan parçalar gibi bir araya getirilerek veriler modellenmiş ve yorumlanmıştır.

Bir finansal zaman serisinin modellenmesi için öncelikli olarak, zaman serisinin izlediği yolu etkileyen faktörleri anlamakta fayda vardır. Ne tür faktörler bu zaman serisinin zamana bağlı olarak farklı patikalar çizmesine sebep olmaktadır. Zaman serilerinin zamana göre çok farklı dalgalanma ve sıçramalar göstermelerinin altında yatan faktörlerin analizi önemlidir. Bu analizin gerçekleştirilebilmesi için konuyla ilgili bazı terimlerin tanımlamalarının yapılmasında fayda vardır. Bu terimlerin başında borsa kavramı gelmektedir ki hangi faktörlerden etkilendiğinin açıklanması, çalışmanın daha iyi anlaşılması açısından faydalı olacaktır. Borsa, günümüzde en avantajlı ve en çok para kazandırma potansiyeli olan bir yatırım aracı olması açısından önemlidir. Borsa, halka arz edilmiş şirket hisselerinin alınıp satıldığı, ticaretinin yapıldığı piyasalar olarak tanımlanabilir. Borsalarda bono, tahvil, hisse senedi, döviz, emtia, yatırım fonları gibi çeşitli menkul kıymetlerin ticareti gerçekleşmekte ve bu ürünler alınıp satılmaktadır. Borsalarda hisse senetleri alınıp satılarak, alım satım arasındaki fiyat farkından kazanç elde edilir. Genel olarak ister uzman olsun ister yeni öğrenen biri olsun borsa denilince çoğu zaman ilk akla hisse senedi alım satımı gelmektedir.

Hisse senedi fiyat hareketlerinin yapılarının karmaşık olması ve modellenmesi zor olan davranış yapıları üretmelerinden dolayı, borsada hisse senedi alım satımı sonucunda gerçekleşen fiyat dinamikleri bu çalışmada incelenmiştir. Yatırımcılar açısından borsanın işlevi; alım satım yaparak kazanç elde etmek iken, hisselerini dağıtan şirket için ise borsa, nakit olarak sermaye kaynağı oluşturma aracı olarak görülmelidir. Uluslararası platformda Hong Kong, Tokyo, Londra gibi coğrafi ve ticari merkezlerde bulunan küresel piyasaların yanı sıra, her ülkenin kendi içinde oluşturduğu kurumsal borsalar bulunmaktadır. Örneğin, ülkemizde borsa hareketlerinin yapıldığı eski adı İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nın (İMKB) adı 2013 yılında Borsa İstanbul (BIST) olarak değiştirilmiştir. Borsada ticareti yapılan tüm malların fiyatları, serbest piyasa koşullarında arz ve talep dengesine göre belirlenir. Arz ve talep durumu çeşitli etkenlere bağlı olarak sıkça değiştiğinden fiyatlar da sürekli hareket halindedir. Bu etkenler; ekonomi, siyaset gibi genel durumların yanı sıra bir metanın veya değerli belgenin fiyatını doğrudan etkileyebilecek özel koşullar da olabilmektedir. Fiyatların dalgalı olması sayesinde yatırımcılar, fiyatı düşeceği öngörülen mallarda satış işlemi veya yükseleceği öngörülen mallarda alım işlemi yaparak gelir elde edebilmektedir (İnternet 1, 2020). Bu nedenle geleceği en az riskle öngörmek ve daha iyi kararlar verebilmek için finansal zaman serilerinin modellenmesi pek çok araştırmacının ilgi odağı olmuştur. Finansal zaman serilerinin modellenmesinin zor olmasının altında yatan neden ise, dalgalanma değerinin çok yüksek olması ve küresel çapta yaşanan olumsuzluklar ile doğrudan etkilenmesi olarak yorumlanabilir.

Bazı ülkelerde, özellikle dünyanın öncü ekonomi güçleri olarak tanınan Amerika Birleşik Devletleri, Çin, Rusya, Almanya ve İngiltere gibi, yaşanan olumlu ya da olumsuz olaylar hiç ilgisi olmayan başka bir ülkedeki hisse senetleri, petrol, enerji veya farklı emtia değerlerinde ciddi yönlendirmelere neden olabilmektedir (İnternet 1, 2020). Bazen, fiyatlar pozitif veya negatif yönde ani sıçrama gösterebilmektedir. Bu sebeple finansal zaman seri türleri, modellenmesi en zor zaman serisi türlerindendir.

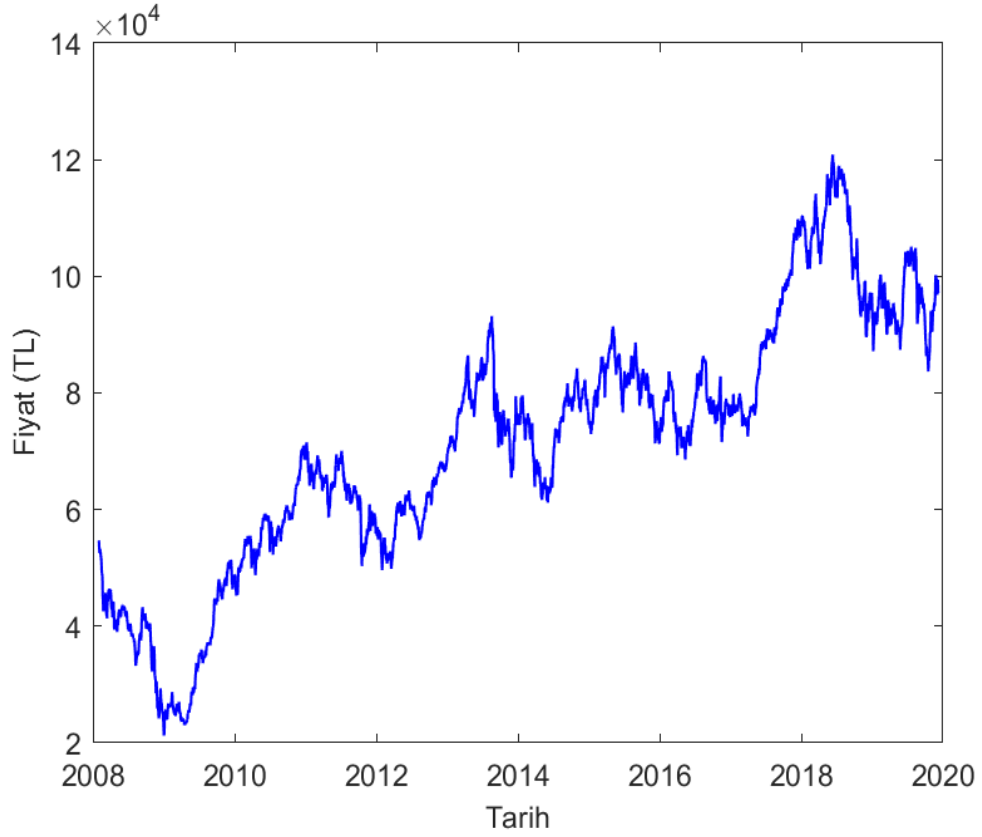
Günümüzde bir finansal piyasadaki tüm işlemler kaydedilmekte ve internette ücretsiz ya da ticari olarak büyük miktarda veriye ulaşılmasına olanak sağlamaktadır. Böylece, çeşitli finansal zaman serileri on yıllardır kaydedilmiş ve incelenmiştir. Ayrıca, finansal zaman serilerinde var olan stokastik (olasılık kurallarına bağlı) belirsizlikler ve bu belirsizliği modellemek için gereken algoritma ve teori pek çok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Belirsizliğe, olayların tutarsızlığından kaynaklanan ve kontrol edilemeyen değişimler neden olmaktadır. Gelecek, doğası gereği belirsizlik ve riskler içermektedir ki tahmin etmek (öngörü) ise geliştirilen modele dayanarak ilgilenilen rassal değişkenin (malların ya da varlıkların fiyatları ya da getirileri) alacağı değerlerin belirlenmesiyle ilgilidir. Dolayısıyla gelecek tahmin edilebilirse riskler fırsata, fırsatlar da kazanca dönüşür (Alp, 2007).

Malların ya da varlıkların fiyatları ya da getirileri zaman serisi yapılarını üretir. Zaman serisine örnek olarak, Borsa İstanbul-BIST endeksinin günlük kapanış değer(ler)i örnek olarak gösterilebilir. BIST-100 endeksinin 2.01.2008 ve 12.07.2019 tarihleri arasında 2902 ardışık günlük kapanış fiyat değerleri Şekil 1.1'de gösterilmiştir. BIST-100 endeksinin verileri www.investing.com internet adresinden alınmıştır. Bu internet adresine kayıt olduktan sonra pek çok yerli ve yabancı hisse senedi veya çeşitli türevlerin verilerine kolayca ulaşılabilinmektedir.

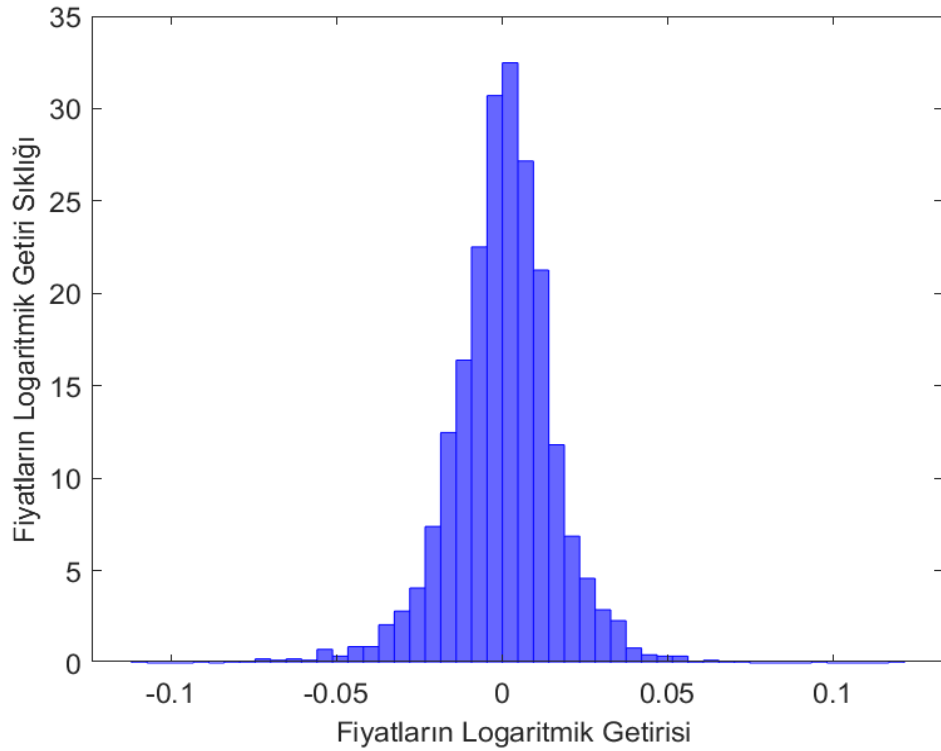
BIST-100 endeksinin 2.01.2008 ve 12.07.2019 tarihleri arasında günlük getirilerinin frekans dağılımını Şekil 1.2 göstermekte iken Şekil 1.3, BIST-100 endeksinin 2.01.2008 ve 12.07.2019 tarihleri arasında günlük getiri serisini göstermektedir. Özellikle, Şekil 1.1 incelendiğinde; fiyatlar dolaylı ve dolaysız pek çok olayın etkisinde kalarak ani sıçramalar göstermektedir. Bundan dolayı, BIST-100 endeksinin modellenmesi zorlaşmaktadır.

Şekil 1.2 ve Şekil 1.3 incelendiğinde ise fiyat getirilerinin durağanlığını bozan ani sıçramaları modellemenin ne kadar zor olduğu görülmektedir. Bu sürecin modellenmesi ve yatırımcıların kar elde edebilmesi için bu süreci modelleyecek esnek ve güçlü bir modele ihtiyaç vardır. Bu modelin kurulması için çeşitli alt

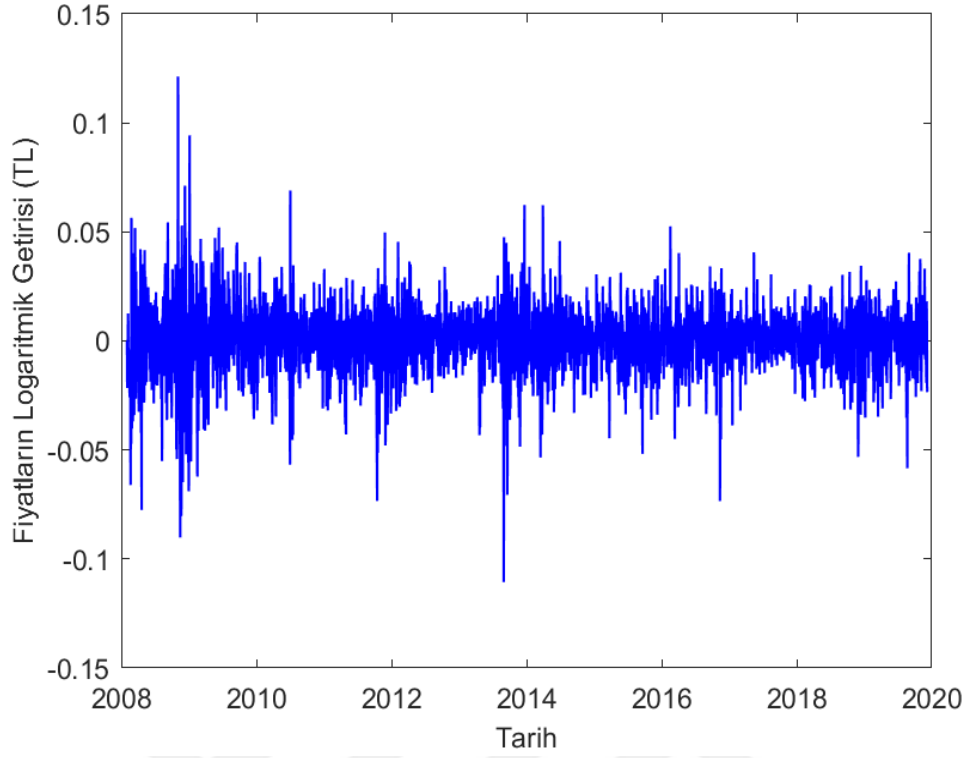
bölümlerde adım adım süreci modelleyecek parçaların tanıtılması daha sonra bu parçaların birleştirilerek bütünü oluşturma aşaması gerçekleştirilecektir.



Şekil 1.1. BIST-100 endeksi tarihsel fiyatları (2008-2019)

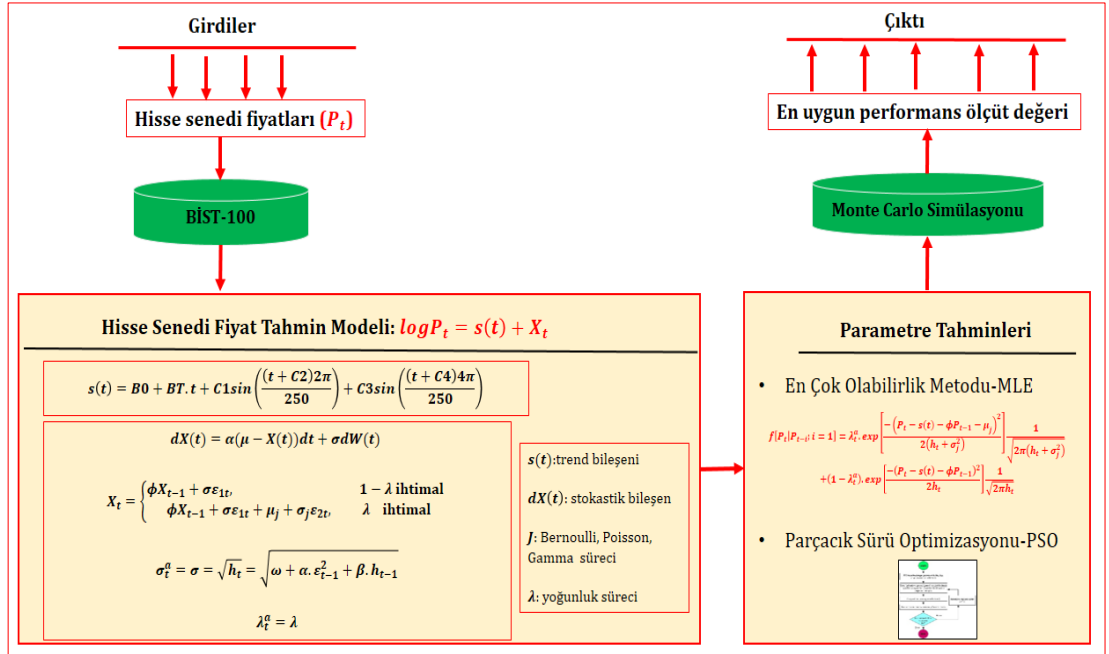


Şekil 1.2. BIST-100 endeksi günlük logaritmik getirilerin frekans dağılımı



Şekil 1.3. BIST-100 endeksi günlük getiri serisi (2008-2019)

Bu tez çalışmasında hisse senedi fiyatlarını öngörmek için kullanılan yöntemler ve takip edilen adımların genel akış diyagramı Şekil 1.4'te verilmiştir.



Şekil 1.4. Fiyatları öngörmek için kullanılan çözüm tekniklerinin genel akış diyagramı

Bu çalışmada önerilen modelleri (model-2, model-3 ve model-4 olarak isimlendirilmişlerdir) bilimsel yazında bilinen diğer yöntemlerden ayıran temel farklar aşağıda özetlenmiştir:

- Brownian Hareket (Wiener Süreci), Geometrik Brownian Hareket, Sıçramalı Stokastik Model, Ortalamaya Döndüren Normal Model (Vasicek modeli) gibi finansal stokastik modellerin diğer bilinen tahmin modellerine (doğrusal/doğrusal olmayan regresyon tabanlı modeller, gri tahminleme türleri, zaman serisi metotları/*ARIMA* modeli, Hareketli ortalama, Üstel düzeltme ve Holt-Winters gibi) göre en büyük üstünlüğü bir üretim sisteminin talebi, hisse senetleri ya da döviz kurlarının periyodik zaman aralıklarında yapılmış gözlemlerini belirli olasılık dağılımlarına göre anlık izleyebilmesi ve sürece dinamizm katabilme özelliklerinin olmasıdır.
- Finansal zaman serilerini modellemek için sinüsoidal fonksiyonlardan oluşan trend bileşeni eklenmiştir. Böylece fiyatların izlediği eğilim yakalanmaya çalışılmıştır.
- Finansal zaman serisi modelleri (Wiener süreci, Aritmetik Brownian Hareket, Geometrik Brownian Hareket vb.) arasında en kapsamlı ve doğa olaylarını modelleyen en popüler model Vasicek modeli sayılabilir. Vasicek modeline Bernoulli, Poisson ve Gamma dağılımını takip eden üç farklı sıçrama eklenerek sıçramalar eş zamanlı olarak modellenmiştir.
- Bu çalışmada, ayrıca Vasicek modelinin momentleri çıkarılmış ve benzetim çalışması detaylıca verilmiştir. Böylece, Vasicek modelinin normal dağılıma dayalı bir stokastik süreç olduğu daha net bir şekilde görülmüştür.
- Vasicek modelinin ayrıştırılması sonucu normal dağılım varsayımından dolayı durağanlık şartını sağladığı ve bilinen stokastik modellerden $AR(1)$ süreci izlediği belirtilmiştir. Böylece momentleri kullanmak yerine $AR(1)$ süreci kullanılmış ve sıçramalar eklenmiştir.
- Bu çalışma ile tüm otoregresyon modellerine sıçramalar eklenerek farklı zaman serileri modellenebilir. Bu özellik çalışmanın en belirgin katkılarından biridir.

- Önerilen modellerde yılda kaç tane ortalama sıçrama olabileceğini model söyleyebilmektedir.
- Zaman boyunca risk (standart sapma) sabit olarak kabul edilmek yerine GARCH türü bir fonksiyon ile modellenerek süreç daha gerçekçi hale getirilmiştir.

Bu çalışmada kullanılan yöntemler aşağıda maddeler halinde sıralanmıştır:

- BIST-100 endeksi verilerinin belirli tarihler arasındaki stokastik davranışını incelemek için Vasicek stokastik diferansiyel denklemi kullanılmıştır.
- BIST-100 endeksi zaman serilerinin genel eğilim yapısını temsil edecek şekilde trigonometrik bir fonksiyon kullanılmıştır.
- BIST-100 endeksinin modellenmesi için ortalamaya döndüren Vasicek modeli kullanılmış ve parametreleri tanıtılmıştır.
- Önerilen model-2 ve model-3'te yer alan parametrelerin tahmininde En çok Olabilirlik Metodu (Maximum Likelihood Method) kullanılmıştır.
- Vasicek modelinin parametreleri elde edildikten sonra farklı sıçrama türleri olan Bernoulli, Poisson ve Gamma süreçleri modele eklenerek Monte Carlo benzetim çalışmasıyla elde edilen sonuçlar verilmiş ve tartışılmıştır.
- Ayrıca, model-4'ün parametrelerinin tahmininde En çok Olabilirlik Metoduna alternatif bir yaklaşım olarak Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) tartışılmıştır. PSO parametre tahmininde En çok Olabilirlik Metoduna alternatif olarak kullanılabilir sonucuna varılmış ve böylece PSO kullanılarak sistem karmaşık matematiksel yapılardan arındırılmıştır. Parçacık sürü optimizasyon algoritması ve diğer modellerin benzetimi Windows MATLAB® R2018a (MathWorks, Massachusetts, USA) yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.
- Öngörülen tahminlerin doğruluğunu ölçmek için kullanılabilecek bir çok ölçüt bulunmaktadır. Bu ölçütlerden en yaygın kullanılanları: Ortalama Mutlak Yüzde Hata (Mean Absolute Percent Error-*MAPE*), Nisbi Hata (Relative error-*RE*), Normalize edilmiş Kök Ortalama Kare Hata (Normalized root-mean-squared error-*NRMSE*) ve Katsayı etkinliği

(Coefficient of efficiency-CE) tahmin sonuçlarının tutarlılığını ölçmek için kullanılmıştır. Bu ölçütlere ait hesaplamalar Windows MATLAB® R2018a (MathWorks, Massachusetts, USA) yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Fiyatları öngörmek için kullanılan çözüm tekniklerinin genel akış diyagramı Şekil 1.4 ile verilmiştir.

Genel olarak; olayların tutarsızlığından kaynaklanan ve kontrol edilemeyen değişimler ya da dalgalanmalar (ekonomik, politik, pandemik hastalıklar ve sosyal birçok faktörün etkisi ile rassal bir şekilde dalgalanma) nedeniyle belirsizlik içeren bir sürecin nasıl seyir izleyebileceği yönünde, yatırımcılara yıllık, aylık, günlük, saatlik ve hatta dakikalık fiyat ya da getiri dağılımlarını net verebilen bir modelin yapılan kapsamlı bilimsel yazın taramasından tam olarak olmadığı görülmesi bu çalışmada geliştirilen modellerin dayanak noktasını oluşturmuştur.

Bu tez çalışması aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

Giriş bölümünde; finansal zaman serilerinin yatırımcılar için önemi ve modelleme zorlukları tartışılmıştır. Bu zorluklara neden olan parametreler verilmiş ve bu parametrelerin nasıl modelleneyeceği konusunda bilgi verilmiştir.

İkinci bölüm; bilimsel yazın taraması başlığı ile verilmiştir. Bilimsel yazında, finansal zaman serilerinin davranış yapıları ve kullanılan modellerin gelişimi konusunda geçmişten bugüne kadar inşa edilen modellerden bahsedilmiştir. Bu modellerin avantaj ve dezavantajları tartışılmıştır.

Üçüncü bölüm; özel bir Markov süreci olan Brownian hareket sürecine ayrılmıştır. Bu bölümde Rassal yürüyüşler, Brownian hareketin tanımı, özellikleri, yoğunluğu ve benzetim çalışmaları kapsamlı bir şekilde tartışılmıştır.

Dördüncü bölümde; Stokastik integralin tanımı ve Ito sürecinin stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanımı tartışılmıştır.

Beşinci bölümde; finansal zaman serilerinin modellenmesinde kullanılan Aritmetik Brownian Hareket (ABH) ve Ortalamaya Dönme Vasicek Modelleri detaylı bir şekilde verilmiştir. Bu bölümde bu modeller deterministik ve stokastik olmak üzere iki kısma ayrılmış ve incelenmiştir. Bu modellerin izlediği yörüngeler, beklenen ve varyans değerleri yapılan benzetim çalışması ile detaylıca incelenmiştir.

Altıncı bölümde; stokastik modellere sıçramaların nasıl ekleneceği ve hangi sıçrama türlerinin kullanılabileceği verilmiştir. Ayrıca, sıçramaların nasıl modellendiği ve gerekli formülasyonlar ve kavramlar bu bölümde incelenmiştir.

Yedinci bölümde; önerilen modellerin performansını değerlendirmek için çeşitli ölçütler tanıtılmış ve formülasyonları verilmiştir.

Sekizinci bölümde; finansal zaman serilerinin nasıl modellendiği, önerilen modellerin özellikleri ve bu modellerde yer alan parametrelerin tanıtılması geniş kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Bu bölümde tek değişkenli zaman serisi yöntemleri ele alınmış ve Vasicek modelinin otoregresif $AR(1)$ süreci izlediği gösterilmiştir. Ayrıca modelde, varyansın modellenmesi GARCH davranış türü ile verilmiştir. Bu bölümde model-1, model-2, model-3 tekniklerinin parametrelerinin En çok Olabilirlik Metodu ile nasıl bulunduğu tartışılmıştır. Ayrıca, önerilen model-4 ile Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) algoritmasının parametre tahmininde nasıl kullanıldığı tartışılmıştır. Parçacık Sürü Optimizasyonu algoritmasının çeşitli özellikleri ve güçlü yönleri verilmiştir.

Son olarak dokuzuncu bölümde ise; tez çalışmasının bilimsel yazına katkısı ve önerilen model(ler)in üstünlüğü tartışılmıştır. Tez çalışmasının devamında yapılabilecek çalışmalar üzerinde durulmuştur.

2. BİLİMSEL YAZIN TARAMASI

Çeşitli finansal varlıkların ve hisse senedi fiyat hareketlerinin bazı olayların tutarsızlığından kaynaklanan ve kontrol edilemeyen sebeplerden dolayı belirsizlik içeren bir sürecin nasıl bir seyir izleyebileceği yönünde bilimsel yazında geliştirilen bazı stokastik finans modelleri ile ilgili çalışmalar bu kısımda özetlenmiştir.

Geometrik Brownian Hareket (GBH), finans ve iktisat bilimsel yazınında hisse senetleri ve döviz kurları dinamiklerini modelleyebilmek için en sık kullanılan stokastik süreçlerden biridir. Finans bilimsel yazınında, Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli ve Samuelson tarafından ortaya konan Varant Değeri Hesaplama modeli gibi önemli modellerin arka planında Geometrik Brownian Hareket süreci bulunmaktadır (Topper, 2005).

Geometrik Brownian Hareketi modeli logaritmik getirilerin normal dağılıma sahip olması sebebiyle riskli finansal varlıkların modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu modelde parametrelerin tahminleri En Çok Olabilirlik Metodu (Maximum Likelihood Method) ile kolaylıkla elde edilmektedir. GBH, günümüz belirsizlik ortamında fiyatların nasıl bir seyir izleyebileceği yönünde yatırımcılara yıllık, aylık, günlük, saatlik ve hatta dakikalık fiyat dağılımlarını verebilen bir model olarak kullanılmaktadır (Özkan ve Güngör, 2017).

Finansal piyasada yatırımcılar finansal varlıkları fiyatlarından ziyade getirileri ile karşılaştırırlar. Bu getirilerin davranışı ile ilgili en sık kullanılan temel varsayım normal dağılıma sahip olduklarıdır. Herhangi bir t -zamanında hisse senedinin logaritmik getirisinin normal dağılıma sahip olduğu kabul edilir. Hisse senedi fiyatının negatif olamayacağı gerçeği, fiyat hareketinin modellenmesinde Geometrik Brownian Hareketinin kullanılmasını gerektirmektedir. Ayrıca bağımsız değişmelere sahip lognormal dağılımlı sürekli zamanlı stokastik bir süreç ancak Geometrik Brownian Hareketi ile açıklanabilir (Demir, 2015).

Önalın (2007) çalışmasında menkul kıymet serilerinin getirilerini modellemek için ortalamaya dönme sıçrama difüzyon sürecini kullanmış ve fiyat

dalgalanmalarının modellenmesi için uzun zamandan bu yana Brownian hareket sürecinin kullanıldığını belirtmiştir. Brownian hareket sürecinin en önemli özelliklerinden birisinin sürecin örneklem eğrilerinin sürekli olduğunun ve diğer bir özelliğinin ise ölçeğe göre değişmemesi olduğunu ifade etmiştir. Ancak, gerçek hayatta fiyatların her zaman sürekli olmadığını, sıçramalara sahip olduğunu ve fiyat davranışlarına yakından bakıldığında fiyatların farklı ölçeklerde farklı davrandığı üzerinde durmuştur. Böylece Brownian hareket sürecinin zaman serilerinin normal dağıldığının fakat deneysel çalışmaların birçok finansal zaman serisinin normal dağılım varsayımını sağlamadığını belirtmiştir. Bu sebeple, ortalamaya dönme sıçrama model(ler)inin finansal zaman serilerinin karakteristik özelliğini daha iyi yansıttığını vurgulamıştır.

Alberg vd. (2008) çalışmalarında, Tel Aviv Menkul Kıymetler Borsası (TASE) endekslerinin ortalama getiri ve koşullu varyansının kapsamlı bir ampirik analizini çeşitli GARCH (Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity) modelleri kullanarak yapmışlardır. Bu koşullu değişen varyans modellerinin tahmin performansını daha yeni asimetrik GJR ve APARCH modelleri ile karşılaştırmışlar, ayrıca haftanın günleri etkisini, kaldıraç etkisini ve asimetrik oynaklığını test etmişlerdir. Sonuçlar göstermiştir ki kalın kuyruklu yoğunluklara sahip asimetrik GARCH modelinin koşullu varyans ölçümü için toplam tahmin doğruluğunu artırdığını vurgulamışlardır. Böylece çarpık bir Student- t dağılımı kullanan Üstel GARCH (EGARCH) modelinin TASE endekslerini tahmin etmek için bu modeller arasında en iyi yöntem olduğunu ifade etmişlerdir. Daha açık bir ifade ile, TA100 ve TA25 gibi iki önemli TASE endeksini tahmin etmek için, asimetrik EGARCH modelinin asimetrik GARCH, GJR ve APARCH modellerinden daha iyi bir tahminleyici olduğunu belirtmişlerdir.

Önalın (2009) VIX dalgalanma endeksi ve U.S. 3-aylık hazine bonusu zaman serilerinin stokastik davranışını modellemek için Vasicek modeli ve CIR (Cox-Ingersoll-Ross) modelini kullanmıştır. Böylece zaman serilerinin geleceğini tahmin etmek için uygun bir stokastik model oluşturmuş ve yukarıdaki iki farklı model ile elde edilen sonuçları tartışmıştır.

Önalan (2009a) çalışmasında Lévy süreci odaklı Ornstein-Uhlenbeck (OU) süreci vasıtasıyla varlık fiyatlarının modellenmesi ile ilgilenmiştir. Barndorff-Nielsen ve Shephard (BNS) stokastik değişkenlik modeli dalgalanma parametresinin kendi kendine ayrışabilen bir dağılım olmasına olanak sağlamaktadır. BNS modelleri esnek modellemeye izin verdiği için IG-Ornstein-Uhlenbeck modelini kullanmıştır. Böylece Lévy ve OU süreçlerinin momentlerini çıkarmış ve bir benzetim çalışması sunmuştur.

Önalan (2011) çalışmasında menkul kıymet fiyatlarına iyi uyum sağlaması açısından Lévy süreçlerinin finans alanında artan bir öneme sahip olduğunu belirtmiştir. Özel bir Lévy süreci olan Meixner sürecinin kapalı bir forma sahip olduğunu ve dört parametreye sahip basit bir marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olması nedeniyle bu süreçlerin kullanımının öne çıktığını vurgulamıştır. Böylece reel efektif döviz kurundaki değişimler Meixner süreci kullanılarak modellenmiş ve gerçekleştirilen deneylerde gerçek verileri iyi bir şekilde temsil ettiğini yaptığı benzetim çalışmasıyla göstermiştir.

Kabakçı (2012) çalışmasında opsiyon duyarlılık parametrelerinin opsiyon fiyat değişimine etkisini incelemiştir. Opsiyon fiyatlarını, Geometrik Brownian Hareket ile türetilmiş hisse senedi fiyatlarından oluşturmuş ve bu fiyatlar kullanılarak duyarlılık parametrelerini hesaplamıştır. Modelde, Black & Scholes Opsiyon fiyatlama teorisini kullanmış, hesaplamalarda bu modelin varsayımları kabul edilmiş ancak bazı sakıncalı durumlarının varlığını belirtmiştir.

Ayrancı ve Özgürel (2014) çalışmalarında faiz oranlarının dönem yapısını incelemek için Vasicek Modelinin Türk Lirası Referans Faiz Oranı (TRLIBOR) verileriyle uygulanmasını incelemişlerdir. Vasicek modelinin parametrelerini belirledikten sonra bu parametrelerin tahmini ile ilgili güven aralıkları vermişlerdir. Böylece, model parametrelerini tahmin etmek için En Küçük Kareler (EKK) yöntemini uyguladıktan sonra Monte Carlo benzetimi kullanarak tahmin edilen parametrelerin dağılımını elde etmişlerdir.

Alp (2015) tarafından yapılan benzer bir çalışmada ise Sıçramalı Difüzyon ve Geometrik Brownian Hareket Difüzyon modellerinin BIST-100 endeksi için kullanılabilirliği üzerinde durulmuştur. Çalışmanın sonucunda piyasada oluşan ani iniş ve çıkışlar sebebi ile sıçramalı difüzyon modelinin BIST-100 endeksi için daha uygun bir model olacağını ifade etmiştir.

Özkan ve Güngör (2017) çalışmalarında finansal piyasaların anlık değişimlerinin, değişimlere bağlı olarak fiyat değişimlerinin yaşandığı piyasalar olduğunu ve bu nedenle son zamanlarda hisse senedi fiyatlarının modellenmesinde araştırmacıların sürekli zamanlı stokastik modeller üzerine yoğunlaştıklarını vurgulamışlardır. Çalışmalarında BIST-30, BIST-100 ve S&P 500 endeks değerlerinin tahminini *ARIMA* ve Geometrik Brownian Hareketi modellerini kullanarak tartışmışlardır. Çalışma sonucunda elde edilen bulgular, Geometrik Brownian Hareketi modelinin BIST-30, BIST-100 ve S&P 500 endeks değerlerinin tahmini için daha uygun olacağını ortaya koymuşlardır.

Bauer vd. (2017) çalışmalarında birçok gerçek dünya dinamik sisteminin stokastik diferansiyel denklemler ile tanımlandığını dolayısıyla parametre tahmini ya da çıkarsınının zorlu ve önemli bir problem olduğunu belirtmişlerdir. Böylece stokastik sistemler için parametre ve durum çıkarsınımını sağlayan esnek bir algoritma geliştirmişlerdir. Sonuç olarak, değişkenliğe dayanan algoritmalarını hem işleyiş süresi hem de hassaslıkta önemli avantajlar sağladığını yeni yöntemlerle karşılaştırarak göstermişlerdir.

Gong ve Zhuang (2017) çalışmalarında finansal varlıkların getirilerinin; çok basıklık, asimetri özellikleri yanısıra kümelenme ve değişen varyans etkileri göz önüne alındığında, stokastik değişkenli ayarlanmış (tempered) kararlı Lévy süreçleri (TSSV) modeli kurmak için normal ayarlanmış kararlı (NTS) ve klasik ayarlanmış kararlı (CTS) dağılımlar vasıtasıyla Heston stokastik değişkenlik modelinde logaritmik normal dağılımlı sıçramalara yer vermişlerdir. TSSV model çerçevesi; çok basıklık, kalın kuyrukluluk ve getirilerin asimetri özelliklerini yakalamak suretiyle, ayarlanmış kararlı süreci stokastik değişkenlik sürecine tabi tutarak finansal piyasalarda sürekli olarak görülen zamanla değişen

dalgalanmanın ve getiri dinamiklerin sonsuz aktif sıçrama davranışlarına izin vermektedir. Böylece analitik karakteristik fonksiyonu ve hızlı Fourier dönüşümü (FFT) tekniğini kullanarak, mevcut yabancı hisse senedi opsiyonunun (FEO) fiyatının belirlenmesi için analitik formülü olan TSSV getirilerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) formülünü türetmişlerdir. Yüksek frekanslı finansal getiri verilerini finansal piyasaların belirli bir biçime uygun olarak yapılmış olgularını yansıtmakta ve önerilen modellerin etkinliğini doğrulamak için kullanmışlardır. Böylece yabancı hisse fiyatlarının ilgili dalgalanmayı ve karşılık gelen parametreleri arasındaki ilişkiyi araştırmak için nümerik analizler yapmışlardır.

Bakar ve Rosbi (2017) çalışmasında, Bitcoin döviz kuru ve getirisinin dalgalanma koşullarını değerlendirmişler ve dalgalanmayı, logaritmik getirilerin standart sapması olarak hesaplamışlardır. Çalışmada, Shapiro-Wilk yöntemiyle normallik testi yapmışlardır. Sonra, yüksek değişkenlik tespitini Box-Whisker kutu ve istatistiksel süreç kontrol şeması kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Betimsel istatistiksel analizde, Bitcoin getirisi için ortalama 0,006 ve sapma 0,04458 olarak raporlanmıştır. Standart hata göstermiştir ki Bitcoin için değişkenlik % 4,458'dir. Bu değer yüksek dalgalanma değeri olarak kabul edilir. Bu yüksek değişkenlik değeri, Bitcoin'e yatırımın yüksek riskli yatırım kategorisine girdiğini göstermektedir. Böylece bu çalışmanın temel amacının, yatırımcılara daha iyi bir kar hedefi, zararın düşürülmesi ve daha iyi yatırım portföyü geliştirmelerinde yardımcı olmak olduğunu vurgulamışlardır.

Wang vd. (2017) çalışmalarında stokastik oynaklığı uzun vadeli ve kısa vadeli oynaklığa ayırarak stokastik dalgalanma ile hassas opsiyonların fiyat durumunu incelemişlerdir. Yazarlar, ortalamaya dönme sürecini kullanarak stokastik değişkenliğin kısa dönem dalgalanması üzerinde durmuşlar ve uzun dönem dalgalanmanın sabit olduğunu varsaymışlardır. Böylece, önerilen modelden yola çıkarak özel durumlarda hassas opsiyonların bir fiyat formülünü türetmişlerdir.

Mariani vd. (2018) çalışmalarında Ornstein-Uhlenbeck tipi modelleri kullanarak finansal zaman serilerinin stokastik değişkenliğini tahmin etmek için bir teknik geliştirmişlerdir. Gelişmiş ve gelişmekte olan borsalardaki günlük kapanış fiyatlarını kullanarak, zamanla değişen parametre tahminine stokastik değişkenliğin dahil edilmesinin En çok Olabilirlik Metodu aracılığıyla tahmin performansını önemli ölçüde geliştirdiğini ortaya koymuşlardır. Dahası, tahmin algoritmalarının büyük veri kümelerine uygulanabilir olduğunu ve iyi yakınsama özelliklerine de sahip olduğunu ifade etmişlerdir.

Lobão vd. (2018) çalışmalarında stokastik diferansiyel denklemlerin sembolik çözümlerini elde etmek için genetik programlama ile birinci ve ikinci dereceden otomatik türev almanın bir birleşimini kullanarak geliştirilen evrimsel algoritmaların varlığını araştırmışlardır. Stokastik hesap teorisine dayanan ve MATLAB® yazılım programlama ortamını kullanarak, yazarlar algoritmalar geliştirmişler ve yeni bir çözüm metodu sunmuşlardır. Diğer yöntemlere nazaran, önerdikleri yöntemin, ilgili denklemin tamamen bilinmediği durumda sembolik formda ve sürekli zamanlarda çözüm üretme ve gerçek veri tabanını kullanarak denklemin spesifikasyonunu ve tahminini gerçekleştiren algoritma seçeneklerini sunma avantajına sahip olduğunu vurgulamışlardır. Bu yöntemin bir diğer avantajı ise problemin uygun bir çözümünü belirleyebilmesi ve analiz durumundaki dinamiği temsil eden stokastik diferansiyel denklem formunun rassal oluşturulması ve eş zamanlı olarak karmaşık yapıları elimine edebilme özelliğinin olmasıdır. Böylece geliştirilen algoritmanın üstünlüğünü ve uygulanabilirliğini test etmek için genellikle finansal varlıklardan elde edilen getirileri ve fiyatları modellemek için kullanılan Geometrik Brownian Hareket modelini kullanmışlardır. Sonuç olarak bu önerilen yöntemin stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünde çok etkili bir alternatif olabileceğini belirtmişlerdir.

Yukarıdaki verilen tüm çalışmalar ve bilimsel yazındaki farklı alanlarda zaman serilerinin modellenmesi için kullanılan teknikler incelendiğinde stokastik modellerin parametrelerinin doğru bir şekilde hesaplanması gerektiği ve daha hassas tekniklere ihtiyaç olduğu açıktır. Ayrıca finansal zaman serilerinin

modellenmesinde trend bileşeninin gözardı edildiği yukarıdaki çalışmalardan görülmektedir.

Bilimsel yazında incelenen konuyla ilgili stokastik modellerde, trend ve stokastik modelleri eş zamanlı kullanarak zaman serisi verilerini modelleyecek bir sistem görülmemiştir. Parametre tahminleri için genel olarak bilimsel yazında, En çok Olabilirlik Metodu (Maximum Likelihood Method) kullanılmıştır. Bu çalışmada parametre tahminleri için En çok Olabilirlik Metoduna alternatif olarak güçlü bir arama tekniği olan Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) kullanılmıştır. Özellikle fiyatların modellenmesi için kullanılan stokastik kısmın parametreleri çok hassastır ki yanlış yönden arama tekniği uygulamak tahmin fiyat değerlerinin patlamasına neden olacak ve çok kötü bir tahmin elde edilecektir. Fiyatların modellenmesinde yer alan stokastik değişkenlik yani varyans, GARCH(1,1) türü olarak modellenmiştir. Sıçrama büyüklükleri Bernoulli, Poisson ve Gamma dağılımı olacak şekilde tartışılmıştır. Trend bileşeninin modellenmesi için farklı modeller test edilmiş ve uygun olduğu düşünülen model (toplam tahmini artıran) bu çalışmada verilmiştir. Fiyatların modellenmesinde yer alan stokastik kısım ortalamaya dönme modeli olan Normal Vasicek modelinin ayrık formunun $AR(1)$ sürecini takip ettiği kabul edilmiştir. Bunun için verilerin durağan hale getirilmesi ayrıca önemli olmakla birlikte, fiyatlar modellenirken logaritmik değerlerinden faydalanılmıştır. Böylece, En Çok Olabilirlik Metodu (MLE) ile trend ve stokastik bileşenin parametreleri kestirilmiştir. Logaritmik fiyatlardan trend bileşeni çıkarılmış veriler durağan hale getirilmiştir. Bu durağan veriler kullanılarak fiyatların trendden arındırılmış şekli ortalamaya dönme sıçrama difüzyon süreci kullanılarak 10000 Monte Carlo benzetim çalışması gerçekleştirilmiş ve akabinde tekrar trend etkisi eklenmiştir. Daha sonra, logaritmik fiyatların üsteli alınarak tahmin değerleri elde edilmiştir. Böylece logaritmik fiyatların üsteli alınarak fiyatlar simüle edilmiş en iyi Ortalama Mutlak Yüzde Hata (Mean Absolute Percentage Errors-*MAPE*), Nisbi Hata (Relative error-*RE*), Normalize edilmiş Kök Ortalama Kare Hata (Normalized root-mean-squared error-*NRMSE*) ve Katsayı etkinliği (Coefficient of efficiency-*CE*) değerlerine sahip yol en iyi tahmin olarak kabul edilmiştir. Aşağıdaki tüm varsayımlar göz önünde

bulundurularak önerilen model(ler) eş zamanlı olarak çalışmakta ve parametreler belirlenmektedir.

Bu tez çalışmasını bilimsel yazında çalışılmış yöntemlerden ayıran temel farklar aşağıda maddeler halinde sıralanmıştır:

- Logaritmik fiyatlar; $\log P_t = s(t) + X_t$ olarak modellenmiştir.
- Trend; $-s(t)$ trigonometrik fonksiyonlar ile modellenmiştir.
- Stokastik bileşenin Ortalamaya Dönme Özelliği; $-X_t$ göstermektedir.
- Yukarıdaki özellikten $-X_t$ sürecinin $AR(1)$ süreci izlediği saptanmıştır.
- Hisse senedi fiyatlarının; Markov Özelliği gösterdiği kabul edilmiştir.
- Sabit $-\sigma^2$ ya da GARCH türü varyans özelliği model(ler)e eklenmiştir.
- Sabit Yoğunluk Süreci; $-\lambda$ (bir yılda ortalama sıçrama sayısı) olarak alınmıştır.
- Farklı Sıçrama Türleri olarak; Bernoulli, Poisson ve Gamma Süreçleri dikkate alınmıştır.
- Parametre tahminleri için MLE ve PSO önerilmiştir.

Yukarıdaki özellikleri eş zamanlı olarak içerisinde barındıran bir sistem hisse senedi fiyat hareketlerini modelleyecek şekilde bulunmamıştır. Önerilen teknikler farklı özelliklerin eklenmesine ayrıca olanak sağlamaktadır. Bu nedenle önerilen modellerin iskelet yapıları aynı kalacak şekilde farklı dağılımı takip eden zaman serileri için de kullanım avantajına sahiptir.

3. BROWNIAN HAREKET

Bu bölümde; Brownian Hareket (BH) süreci tanımlanmış ve temel özellikleri verilmiştir. Brownian hareket aynı zamanda Wiener süreci olarak da adlandırılmaktadır. Stokastik bir süreç, indekslenmiş (sıralanmış) rassal değişkenlerin bir ailesi olduğu düşünülürse, indeks ifadesi zamana karşılık gelmektedir. İndeks zaman olarak tanımlanırsa, zamanın her anını sürekli (stokastik süreç zaman içerisinde sürekli ise) ya da ayrık zamanlarda (stokastik süreç zaman içerisinde ayrık) rassal bir değişken ile gösterilmesi gerektiği anlamına gelir. Yani, stokastik sürecin zaman içerisindeki her anı bir rassal değişken ile temsil edilmek zorundadır. Zamanın her anı için kaydedilen rassal değişkenlerin bir araya gelmesi ile stokastik bir süreç oluşmaktadır. Bu nedenle bu rassal değişkenler seçilip belirlendikten sonra, stokastik sürecin bir yolu veya yörüngesi gözlemlenmiş olmaktadır.

Stokastik süreci net bir şekilde karakterize etmek için stokastik süreci oluşturan rassal değişkenlerin dağılımını ve bu rassal değişkenlerin zamana bağlı özelliklerini, yani bir aylık zaman dilimi için belirlenen rassal değişkenin değeri ile iki aylık zaman dilimi için belirlenen rassal değişkenin değerini nasıl etkileyeceğini belirlemek gerekmektedir. Özetle bu rassal değişkenlerin dağılımının ne olduğunun bilinmesi gerekmektedir. Sürekli zaman içerisinde en basit stokastik süreç Brownian hareketidir.

3.1. Rassal Yürüyüş

Rassal yürüyüş, matematiksel bir nesne olup, bir stokastik veya rassal süreç olarak bilinmektedir. Bu süreç, herhangi bir matematiksel uzayda (örneğin tamsayılar uzayı) atılan rassal adımların toplamından oluşan patikayı tanımlamaya yöneliktir. Örneğin, bir molekülün sıvı veya gaz içerisinde izlediği yol, hayvanların yem arayışında takip ettiği patika, değişkenlik gösteren hisse senedi fiyatları ve bir borsa oyuncusunun finansal durumu rassal yürüyüş modelleri ile tahmin edilebilmek mümkündür. Rassal yürüyüş model(ler)inin birçok bilim dalında uygulama alanı mevcuttur; çevrebilimi, psikoloji, bilgisayar

bilimleri, fizik, kimya, biyoloji ve ekonomi bunlara örnektir. Rassal yürüyüş bahsi geçen alanlarda gözlemlenen birçok süreci açıklamakla beraber kaydedilmiş stokastik aktiviteyi açıklamak için de temel bir model sunar. Rassal yürüyüş ilk defa 1905'te Karl Pearson tarafından ortaya atılmıştır. Rassal yürüyüş modelleri ile ilgili daha geniş bilgiye (Yang, 2010) referansından erişilebilir.

En basit bağlamda rassal yürüyüş, ayrık zaman diliminde doğal sayılar (sayı doğrusu) üzerinde indislenmiş rassal değişkenlerin sıralanışıdır. Bununla birlikte adımların rassal zamanlarda gerçekleştirdiği rassal yürüyüşler tanımlamak da mümkündür ve bu durumda; X_t her zaman $t \in [0, +\infty)$ olarak tanımlanmalıdır. Lévy uçuşu, Brownian hareketi ve difüzyon modelleri özel durumlar içeren rassal yürüyüş modelleridir. Rassal yürüyüş, Markov süreçlerini anlamak için bilinmesi gereken temel modeldir. Bir rassal yürüyüş dizisi ardışık rassal adımdan oluşan bir rassal süreçtir. Matematiksel olarak ifade edilirse, S_N her bir ardışık rassal adım olan X_i değişkenlerinin toplamını gösterdiği kabul edilsin. Bu durumda; S_N , eşitlik 3.1'deki gibi rassal bir yürüyüşü ifade etmektedir.

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i = X_1 + \dots + X_N \quad (3.1)$$

Eşitlik 3.1'de yer alan X_i , rassal bir dağılımdan çekilmiş rassal bir adımdır. Aynı zamanda bu ilişki bir yinelemeli formül ile eşitlik 3.2 olarak tekrar yazılabilir.

$$S_N = \sum_{i=1}^{N-1} X_i + X_N = S_{N-1} + X_N \quad (3.2)$$

Eşitlik 3.2'de yer alan bir sonraki durumu ifade eden S_N sadece mevcut durum olan S_{N-1} durumuna bağlı olacaktır ve X_N mevcut durumdan bir sonraki duruma nasıl hareket edeceği veya nasıl geçiş yapacağı anlamına gelmektedir. Bu olay Markov zincirlerinin özel bir durumudur. Burada bir rassal yürüyüş durumunda adım uzunluğu veya büyüklüğü sabit ya da değişken olabilir.

3.1.1. Bir Boyutlu Rassal Yürüyüş

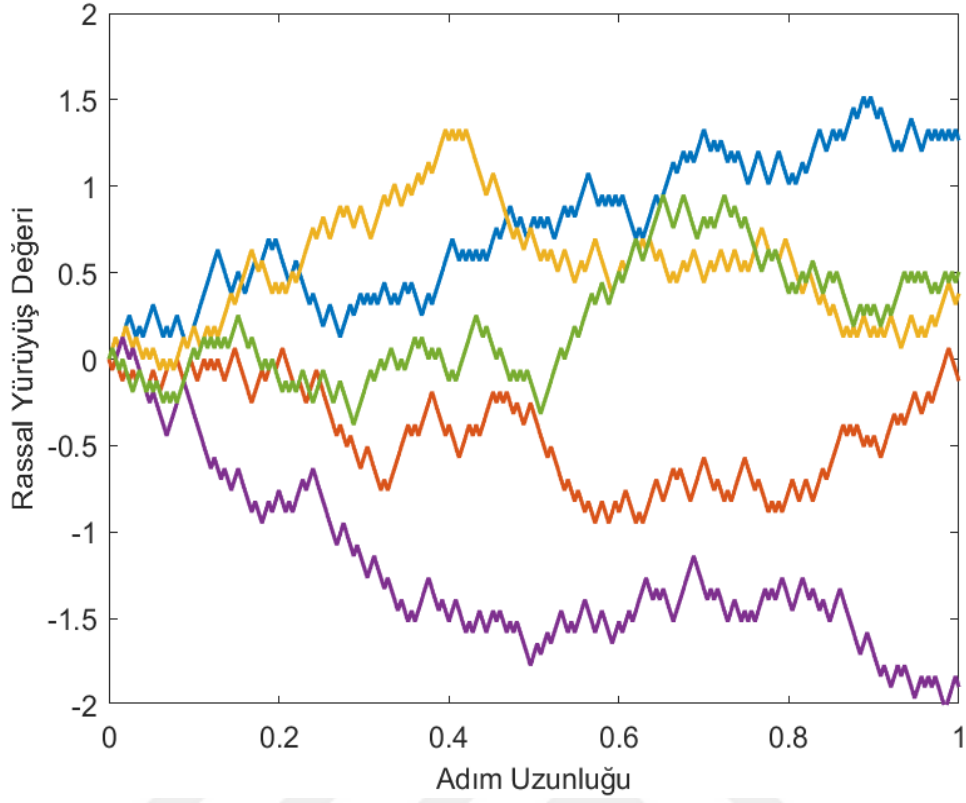
Bir sarhoşun bir sokakta yürüdüğünü ve her bir adımında sarhoşun bir ileri ya da bir geri gittiği varsayılırsa bu durum bir boyutta rassal yürüyüş oluşturmaktadır. Eğer bu sarhoş bir futbol sahasında bir ileri ya da bir geri sendelerse ya da rassal herhangi bir yönde ilerlerse bu durum iki boyutta bir rassal yürüyüş olmaktadır. Matematiksel olarak ifade edilirse bir boyutlu rassal yürüyüş eşitlik 3.3 ile verilmektedir.

$$S_{t+1} = S_t + w_t \quad (3.3)$$

Burada S_t , t zamanındaki mevcut lokasyon ya da durumu ifade etmektedir ve w_t bilinmeyen bir dağılım ile rassal bir değişken ya da adımdır. Bir boyutlu sayı doğrusu üzerinde bir parçacık eşit olasılık ile sağa ya da sola hareket edebilir ve her bir geçiş ancak ve ancak bir adım olabilir. Genellikle geçiş olasılığı olarak adlandırılan bu geçiş eşitlik 3.4 ile verilir.

$$w_t = \begin{cases} 1/2, & \text{eğer } S = +1 \text{ ise} \\ 1/2, & \text{eğer } S = -1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.4)$$

$S_0 = 0$ noktasında başlayan bir parçacığın bir sayı doğrusu boyunca zıpladığı ya da hareket ettiği düşünölsün. Birkaç adım için bu süreç sürdürölsün ve yazı tura atılsın, eğer madeni para tura gelirse sağa doğru hareket ettiği varsayölsün. Diğer taraftan madeni para yazı gelirse parçacığın sol tarafa hareket ettiği düşünölsün. İlk başta bir madeni para havaya atıldığında göröldü ki tura geldi o zaman bu parçacık bir birim sabit adım ile sağa doğru hareket eder ve $S_1 = S_0 + 1 = 1$ olacaktır. Bir sonraki durumda yazı gelmesi parçacığın sola doğru hareket edeceğini ifade etmektedir. Yani, $S_2 = S_1 - 1 = 0$ olacaktır. Madeni para tekrar havaya atılırsa ve yazı gelirse o zaman $S_3 = S_2 - 1 = -1$ olacaktır. Benzer şekilde bu süreç devam ettirilirse ve 250 adımlık rassal yürüyüş Şekil 3.1 ile görselleştirilebilir.



Şekil 3.1. Sıfırdan başlayan ardışık 250 adımlık rassal yürüyüş yol örnekleri

3.2. Markov Zincirleri

Markov zincirlerinden kısaca bahsedilecek olursa, eğer t zamanında $X_t = S_i$ durumundan bir başka $X_{t+1} = S_j$ durumuna geçiş olasılığı sadece mevcut durum X_t ye bağlı ise X rassal değişkeni bir Markov Zinciri olarak adlandırılır ve eşitlik 3.5 ile gösterilir.

$$P_{(t,j)} = P(X_{t+1} = S_j | X_0 = S_p, \dots, X_t = S_i) = P(X_{t+1} = S_j | X_t = S_i) \quad (3.5)$$

Burada; X_{t+1} durumunun olasılığı sadece X_t durum anına bağlı olup, $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ veya X_0 durumuna bağlı değildir. Yani sadece bir önceki adıma bağlı bu özel stokastik sürece Markov Zinciri adı verilir. $P(X_{t+1} = S_j | X_t = S_i)$ koşullu olasılığı bütün t değerleri için aynı ise Markov zinciri zaman-homojen (adım/gün hangi adım olursa olsun olasılıklar eşit ise) olarak adlandırılır. Örnek olarak

$P(X_{i+1} = S_j | X_i = S_i) = P(X_{100+1} = S_j | X_{100} = S_i)$ ile verilir. Bu çalışmada bu tür Markov Zincirleri ile ilgilenilmiştir. Zaman homojen Markov Zincirlerinde $P(X_{t+1} = S_j | X_t = S_i)$ koşullu olasılığı kısaca P_{ij} ($P_{(i,j)}$ veya $P_{i,j}$ de olabilir) ile gösterilir. P_{ij} bir adım geçiş olasılığı olarak adlandırılır ve bu çalışmada her adım bir gün olarak modellenmiştir. Burada i ve j indisleri sürecin durumlarını ifade etmekte ve durumlar gün sonlarındaki hisse senedi fiyatlarını ifade etmektedir. P_{ij} notasyonunda i başlangıç durumunu (t . adım durumu) ve j sonuç durumunu ($t + 1$. adım durumu) göstermektedir. P_{ij} ler olasılık değerleri olduğu için $0 \leq P_{ij} \leq 1 \forall i, j$ şartını sağlamalıdır. P_{ij} olasılıklarının topluca yerleştirildiği matrise Geçiş Olasılık Matrisi (P) denir. Bu matriste satırlar başlangıç durumlarını (i) ve sütunlar sonuç durumlarını (j) gösterir. Eğer geçiş olasılık matrisi elde edilmişse Markov Zinciri modellenmiştir. P, her zaman kare matris olmak zorundadır ve matriste her satır toplamı 1 değerine eşit olmalıdır.

Bir Markov Zinciri ile ilgili şu iki özelliğe dikkat edilmesi gerekir:

- Sistem durumları (i, j),
- Gözlem anları (bu çalışmada gün sonlarındaki hisse senedi fiyatları).

Gerçek hayattaki olaylar bir Markov Zinciri olarak modellenirken bu iki özellik uygun bir biçimde tanımlanmalıdır. P-geçiş olasılığına bağlı olan w_t tarafından yönetilen rassal bir hareketle rassal yürüyüş ilişkisi eşitlik 3.6 ile tekrar aşağıdaki gibi yazılsın.

$$S_{t+1} = S_t + w_t \quad (3.6)$$

Aslında eşitlik 3.6, bir Markov zincirinin özelliklerine sahiptir ve bu nedenle rassal bir yürüyüş ile Markov zinciridir.

Rassal yürüyüşlerin pek çok alanda kullanım ve modelleme özelliği vardır. Bu alanlardan bir tanesi de eniyilemeye dayalı tekniklerdir. Bu çalışmada rassal yürüyüşlerin eniyileme teknikleri ile ilişkisini tartışmakta fayda vardır. Çünkü finansal zaman serilerini simüle edebilmek için eniyileme tekniklerinden PSO

kullanılacaktır. Bir eniyileme problemini çözmek için rassal bir tahmin ile iyi bir başlangıç çözümünden başlayarak rassal bir yürüyüş yaparak çözüm aranabilir. Ancak, basit veya kör rassal yürüyüşler etkili değildir. Yeni çözümler aramada etkili ve etkin hesaplama yapabilmek için, elde edilen en iyi çözümleri kullanmalı ve arama uzayını daha etkin bir şekilde araştırmak için rassal yürüyüşün hareketliliği arttırılmalıdır. En önemlisi, potansiyel en iyi çözümlerden uzaklaşmak yerine, en uygun çözümlere daha hızlı ilerleyebilecek şekilde yürüyüşü kontrol etmenin bir yolu bulunmalıdır. Bunlar çoğu meta sezgisel algoritmalar için zorluklardır ve benzer konular Monte Carlo benzetimleri ve Markov Zinciri örnekleme teknikleri için de önemlidir. Markov Zinciri Monte Carlo yöntemleri, rassal bir yürüyüşün nasıl davrandığını kontrol edecek bir örnekleme teknikleri sınıfıdır.

3.3. Brownian Hareketin Tanımı

$W := \{W(t) : t \geq 0\}$ stokastik süreci, aşağıdaki şartları sağlıyorsa Brownian hareket olarak adlandırılır (Brownian hareket süreci ile ilgili detaylı bilgiye Shreve, 2004 referansından bakınız):

- i) $W(0) = 0$
- ii) $t \rightarrow W_t$ yörüngeleri 1 olasılık ile sürekli. Daha açık bir ifade ile; W stokastik süreci sürekli örneklem yollarına sahiptir. Bu nedenle $W(t)$, $t \geq 0$ süreci t zamanın sürekli fonksiyonlarıdır.
- iii) $s \leq t$ için $W(t) - W(s)$ süreci s -zamanına kadar (s dahil olmak üzere) W stokastik sürecin geçmiş değerlerinden bağımsızdır. Yani Brownian hareket s -zamanına kadar stokastik süreç yoluyla üretilen σ -cebiri $F(s)$ den bağımsız olan artımlarına sahiptir. Özetle; iki zaman aralığındaki sürecin daha önce ya da sonraki zamanlarda ortaya çıkan stokastik süreç ile hiçbir alakası yoktur ve bağımsızdır.
- iv) $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ zamanlarının sonlu bir dizisi için artımlar $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ karşılıklı olarak bağımsız rassal değişkenlerdir.
- v) $0 \leq s \leq t$ için, $W(t) - W(s)$ ve $W(t - s)$ aynı dağılıma sahiptir, bu dağılımın ortalaması sıfır ve varyansı $(t - s)$ olan Normal dağılımdır.

Yani, $W(t) - W(s) \sim W(t - s) \sim N(0, t - s)$ dır. Diğer bir deyişle Brownian hareket durağan artımlara sahiptir.

- vi) Rassal değişken $W_t \sim N(0, t)$ sıfır ortalama ve $t > 0$ varyans ile Normal dağılıma sahiptir.
- vii) Özellik (v) den $0 \leq s \leq t$ için, $E[W_t - W_s] = 0$ ve $\text{Var}[W_t - W_s] = t - s$ olduğu anlaşılmalıdır.

3.3.1. Brownian Hareket Sürecinin Özellikleri

Brownian hareket sürecinin özellikleri aşağıda verilmiştir:

- $W(t)$, tanımından hatırlanacağı gibi t zaman diliminde süreklidir, aynı zamanda bir sürekli durum uzayı sürecidir, yani $W(t)$ sürecinin izlediği yollar (patikalar) ani sıçramalar göstermemektedir.
- Brownian hareket, her yerde sürekli olmasına rağmen hiçbir yerde türevlenebilir değildir.
- Aralık ne kadar küçük olursa olsun (fraktal bir yapıdaki gibi), herhangi bir aralıkta $W(t)$ monoton değildir. Bu özellik, Brownian hareketi ne kadar küçük bir ölçek ile incelenirse incelensin yine kendisine benzer bir yapı göstereceği anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle Brownian hareket fraktal bir yapı göstermektedir.
- $W(t)$, hiçbir yerde türevlenemez. Bu özellik, Brownian hareketin bir sonraki zaman aralığındaki hareketinin öngörülemeyeceği anlamına gelmektedir.
- $W(t)$, sınırlı olmayan bir değişim süreci göstermektedir, yani herhangi bir sonlu zaman dilimi boyunca kat ettiği alan sonsuzdur. Bu özellik, önceki iki özelliğin bir sonucudur. Brownian hareket yolları o kadar düzensizdir ki, uzunlukları ölçülmeye çalışılırsa sonlu bir ölçüm elde edilemez.
- $W(t)$, sınırlı kareli değişim (Quadratic Variation-QV) sürecidir. Kareli değişim, sürecin varyansı ile ilgilidir. Bu nedenle çok düzensiz bir süreç olsa bile sonlu bir zaman diliminde Brownian hareket sonlu bir varyansa sahiptir.
- Brownian hareketi Markov özelliğine sahiptir.

- $\mathbb{E}(W(t)W(s)) = \min(s, t)$ dir. Bu özellik Brownian hareketin zamana bağımlılığı $\min(s, t)$ 'ye kadar gerçekleşen duruma bağlıdır.
- Brownian hareketinin izlediği yol eninde sonunda gerçek değer ne kadar büyük veya küçük olursa olsun bu değere vuracaktır. Brownian hareket yolları o kadar dağılmış (serpilmiştir) ki, Brownian hareketi pozitif olasılıkla sonlu bir zaman dilimi içerisinde istenen herhangi bir seviyeye ulaşabilir.
- Brownian hareketi, bir değeri vurduğu zaman neredeyse o değeri sonsuz sıklıkta tekrar vurur. Yani, Brownian hareket bir noktaya ulaşacak olursa, o noktayı sonsuz defa daha kesecektir.

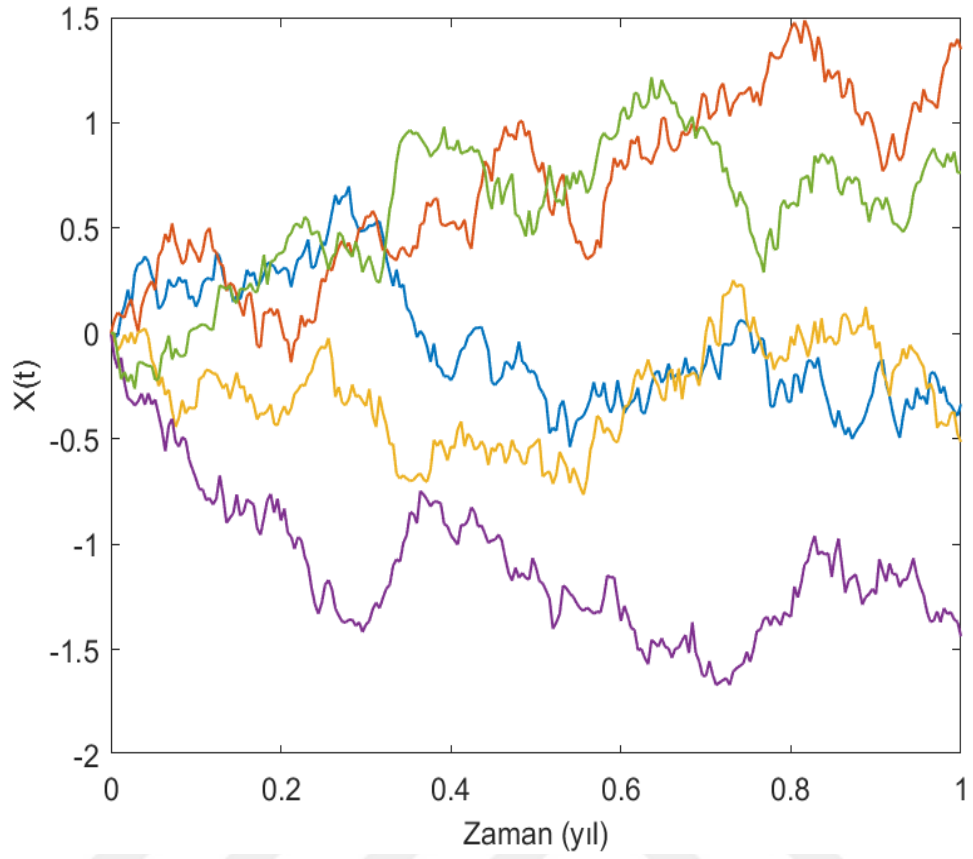
3.3.2. Farklı Zaman Ölçeklerinde Brownian Hareketin Yoğunluğu

Brownian hareketin ya da Wiener süreci tanımından;

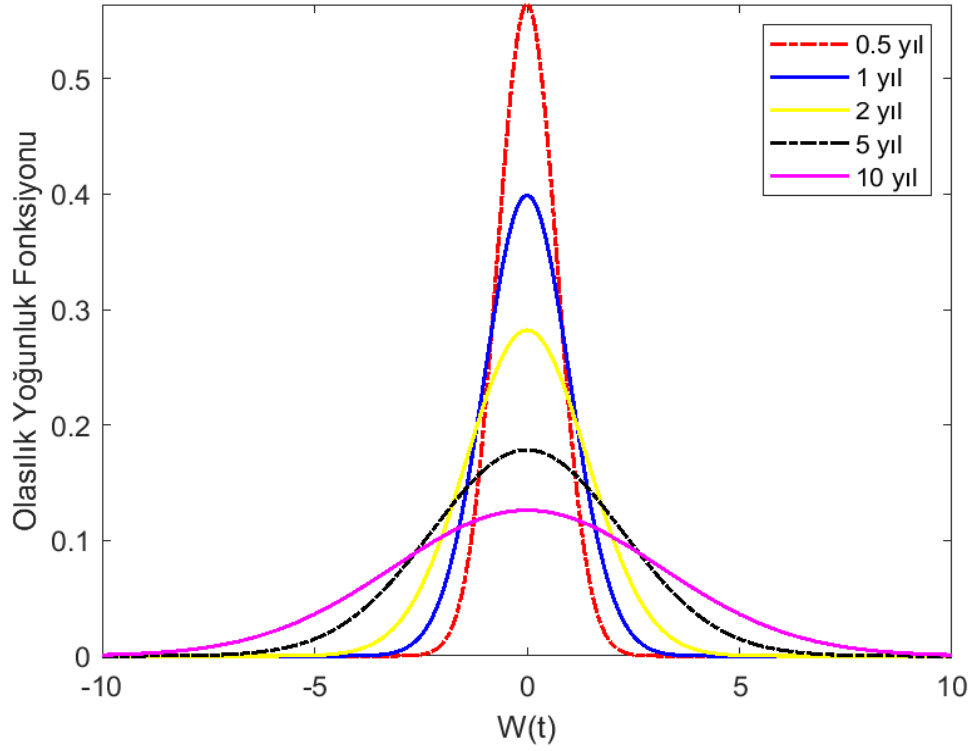
$W(t) - W(s) \sim W(t - s) \sim N(0, t - s)$ olduğu ve bu nedenle $s > 0$ ve $t > s$ zamanı arasında Brownian hareketin artımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonu eşitlik 3.7 ile verilir. Brownian hareket sürecinin yoğunluğu ve benzetimi konusunda detaylı bilgiye (Privault, 2020) referansından erişilebilir.

$$\phi_{0, \sqrt{t-s}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{t-s}}\right)^2\right), \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (3.7)$$

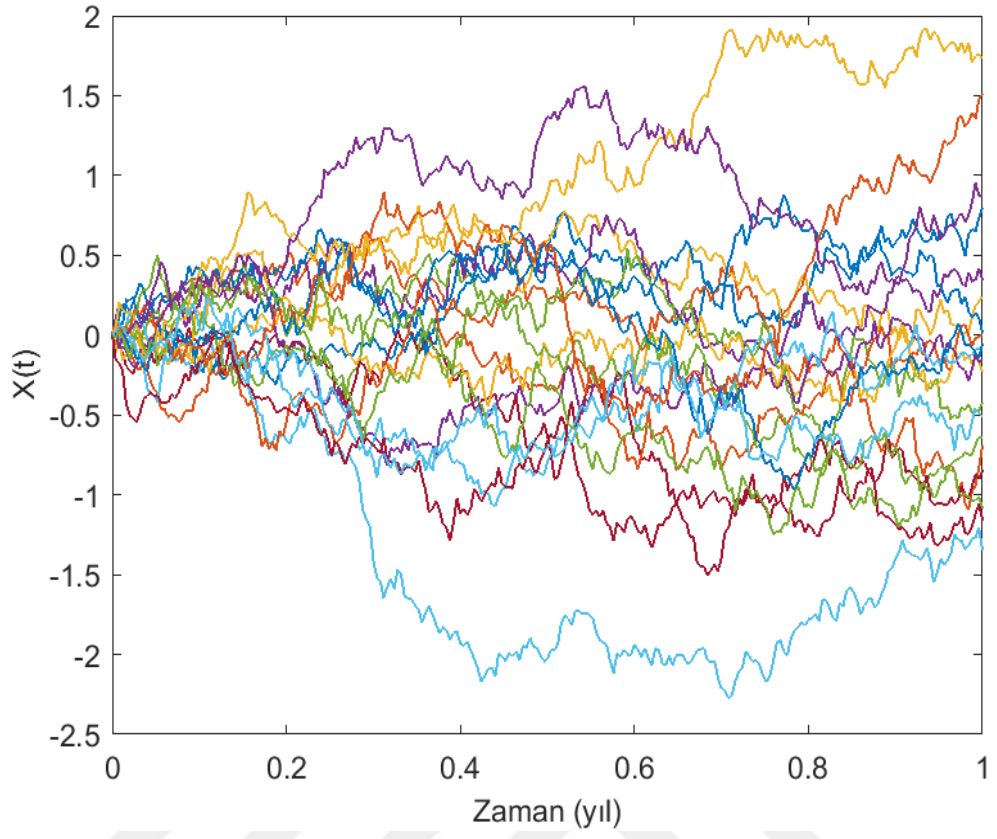
$W(t) = W(t) - W(0) \sim N(0, t)$ normal dağılmaktadır. Varyans ile ölçülen Brownian hareketin yayılımı (saçılımı) t -zamanı ile arttığı Şekil 3.3'te net bir şekilde gözlemlenmektedir. Şekil 3.2 ve Şekil 3.4 farklı adımlar için çizilmiş Brownian hareketin bir rassal yürüyüş olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 bir rassal yürüyüş olarak Brownian hareket için benzetilmiş 1000 ve 250 adımlık örnek 100 yolun benzetimini ve dağılım sürecini göstermektedir.



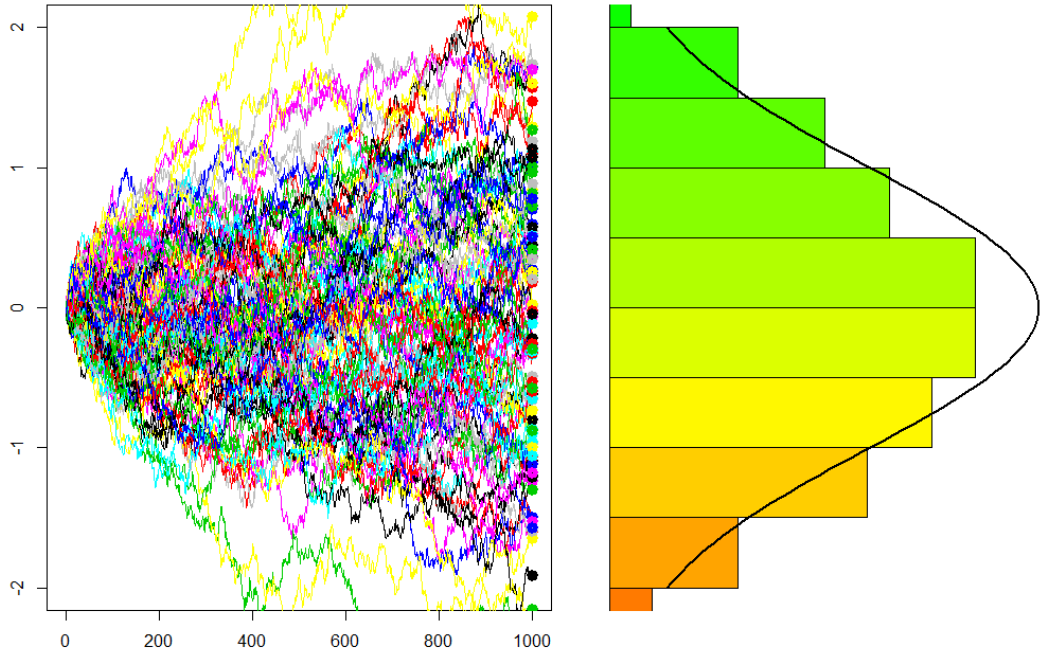
Şekil 3.2. Brownian hareket için benzetilmiş örnek beş tane yol



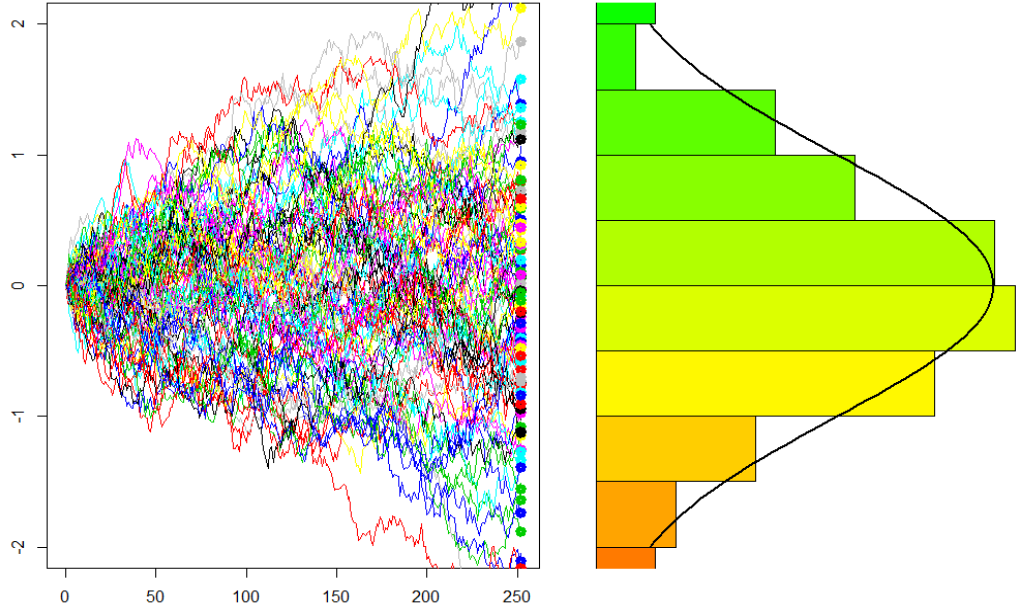
Şekil 3.3. Farklı zaman(yıl) ölçeklerinde Brownian hareketin yoğunluğu



Şekil 3.4. Brownian hareket için benzetilmiş örnek elli yol



Şekil 3.5. Bir rassal yürüyüş olarak Brownian hareket için benzetilmiş 1000 adımlık örnek 100 yol



Şekil 3.6. Bir rassal yürüyüş olarak Brownian hareket için benzetilmiş 250 adımlık örnek 100 yol

3.3.3. Brownian Hareketin Örnek Yollarının Benzetimi

Bir Brownian hareketi $W(t)$ örnek yolunu $[0, T]$ zaman aralığında benzetmek için aşağıdaki adımlar uygulanır (Privault, 2020):

- Bir n tamsayısı seçilsin ve $\Delta t = \frac{T}{n}$ olsun. Öyle ki; $i = 0, 1, \dots, n$ için $t_i = i\Delta t$.
- Bağımsız özdeş dağılmış ratgele değişkenlerin bir dizisi $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ üretilsin.
- $(0,1)$ aralığında düzgün dağılmış rassal değişkenlerin bir dizisi $U_1, \dots, U_n$ üretilsin.
- $\varepsilon_i = \Phi^{-1}(U_i)$ belirlensin ve burada $\Phi^{-1}(x)$ standart normal dağılımın ters birikimli (kümülatif) dağılımı olsun.
- $dW_i = \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$ belirlensin.
- Brownian hareketin örnek yolları özyinelemeli oluşturulması için aşağıdaki maddeler takip edilmiştir:

- $W(0) = 0$
- $W(t_i) = W(t_{i-1}) + dW_i, \quad i = 1, \dots, n.$

Brownian Hareket Sürecinin Toplam Değişimi (Total Variation):

Bir $[x_0, x_n]$ aralığının bir parçalanışı verildiğinde, bir $f(x)$ fonksiyonunun değişimi eşitlik 3.8 ile yukarı ve aşağı hareketlerin toplam miktarı kadardır.

$$TV(f) = \sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad (3.8)$$

Sınırlı olmayan değişim (varyasyon) kavramı, stokastik analizde önemli bir rol oynar, çünkü **varlık fiyatlarını** temsil etmek için kullanılan **sürekli zaman stokastik süreçlerinin** çoğunluğu sınırlı olmayan değişim gösteren yörüngelere sahiptir, yani bu yörüngeler çok düzensizdir ve sınırlı değildir. Sezgisel olarak, sınırlı değişim fonksiyonları aşırı (çok) düzensiz değildir. Aslında herhangi pürüzsüz (düzgün) fonksiyon sınırlı değişime sahiptir.

Brownian hareketin toplam değişimine bakıldığında, Brownian hareket $N \rightarrow \infty$ gittikçe sınırlı olmayan (sınırsız) toplam değişime eşitlik 3.9 ile sahiptir ve burada $[0, t]$ aralığının bir ayrık parçalanışı $t_0, \dots, t_N$ dir.

$$TV(W) = \sum_{i=1}^N |\Delta W(t_i)| \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

Brownian Hareket Sürecinin Kareli Değişimi (Quadratic Variation-QV):

Kareli değişim, ilgili sürecin varyansına bağlıdır ve $[t_0, t_n]$ aralığının bir parçalanışı verildiğinde, bir $f(t)$ fonksiyonunun kareli değişimi eşitlik 3.10 eşitliği ile verilir (Shreve, 2004).

$$QV(f) = \sum_{i=1}^N (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \quad (3.10)$$

Kareli değişim (Quadratic Variation- QV), stokastik analizde önemli bir role sahiptir, ancak pürüzsüz (düz) fonksiyonların sıfır kareli değişime sahip olması nedeniyle standart analizde neredeyse hiç karşılaşılmaz. Bu durum kareli

değişimin varyans ile ilgili olup olmadığını mantıklı yapmaktadır. Örneğin, $X(t) = at$ pürüzsüz (düz) fonksiyonu düşünölsün ve bu fonksiyonun QV değeri aşğıdaki gibi verölsin:

$$\sum_{i=1}^N (a\Delta t_i)^2 = a^2 N \Delta t^2 = a^2 N \left(\frac{t}{N}\right)^2 \rightarrow 0$$

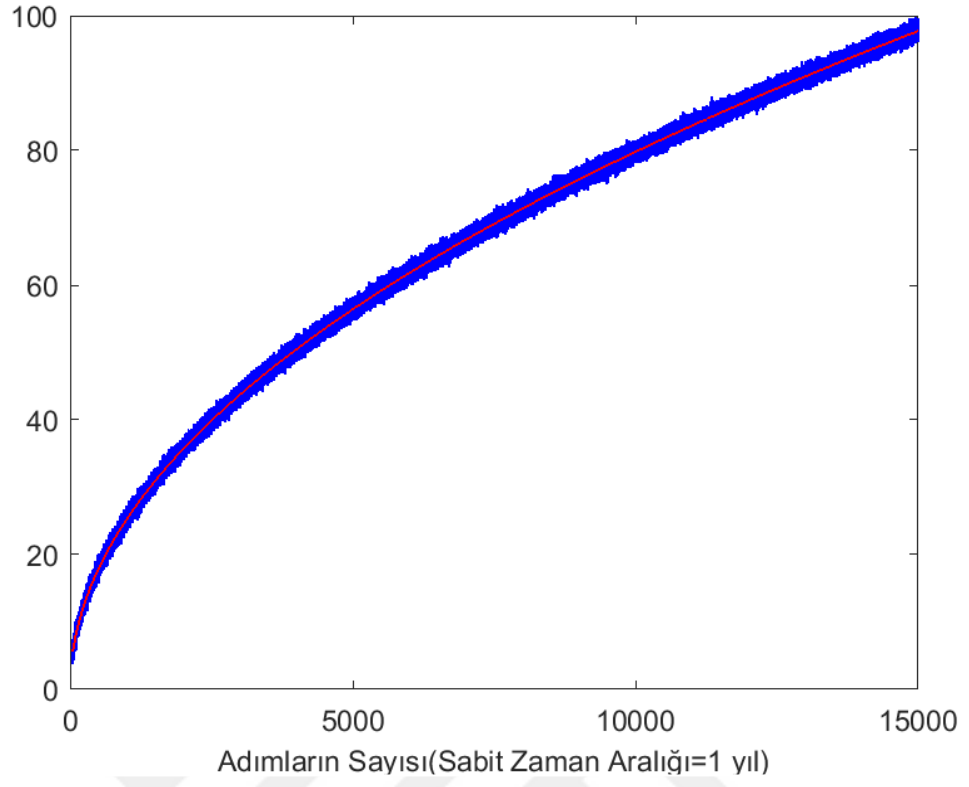
$N \rightarrow \infty$ gittikçe sıfıra yaklaşmakta ve $\Delta t = 1/N$ olarak belirlenmiştir. Brownian hareketinin kareli varyasyonu (değişimi) $[0, t]$ zaman aralğında $N \rightarrow \infty$ gittikçe eşitlik 3.11 ile t eğilimindedir. Burada $[0, t]$ aralğında bir ayırık parçalanış $t_0, t_1, \dots, t_N$ dir.

$$QV(f) = \sum_{i=1}^N (\Delta W(t_i))^2 \rightarrow t \quad (3.11)$$

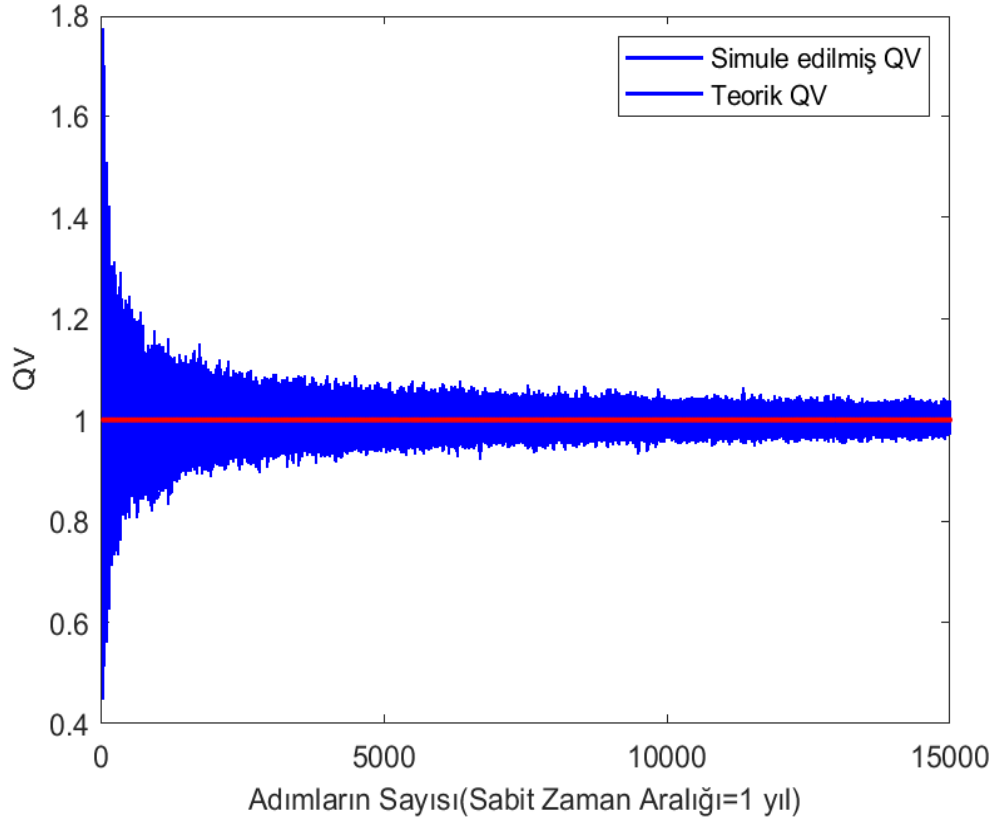
Şekil 3.7’de yer alan kırmızı çizgi toplam değişimin beklenen değeri göstermekte ve parçalanıştaki noktaların sayısı arttıkça simöle edilen değeri (mavi çizgi) artmaktadır. Kareli değişim $(0,1)$ aralğının parçalanışı inceltildikçe aralğın uzunluğuna yaklaşmaktadır. Bu durumda Şekil 3.8’den kareli değişimin beklenen değeri N arttıkça T ye yaklaştığını göstermektedir.

Bu bölümün tez çalışması açısından önemi aşağıda sıralanmıştır:

- Bütün rassal yürüyüşler yani olasılık kurallarına göre değişen modeller gerçekte iki kısma ayrılır:
 - Birincisi deterministik bileşen yani beklenen değerdir ve varyansı sıfır kabul edilir.
 - İkincisi stokastik kısımdır ve Brownian hareket eklenerek model rassal yürüyüş haline getirilir. Böylece izlenen ve çizilen patikaya dalgalanma eklenmektedir.
- Brownian ya da Wiener süreci Markov sürecini izlemektedir. Yani herbir zaman aralığında gerçekleşen fiyat değişimleri birbirinden bağımsızdır. Herbir bağımsız adım toplanarak rassal yürüyüş olan Brownian süreci modellenmektedir.
- Brownian hareket süreci sınırlı olmayan değişime sahiptir. Sınırlı değilse eğrinin uzunluğu hesaplanamaz, uzunluk hesaplanmaz ise eğrinin altında kalan alan hesaplanamaz.
- Ancak, Brownian hareket süreci sınırlı Kareli değişime sahiptir. Bu özellik kullanılarak eğrinin altında kalan alan integral yoluyla hesaplanabilir. Daha açık bir ifade ile sürecin dalgalanma durumu hesaplanarak beklenen değer hesaplanır. Yani deterministik kısma dalgalanma eklenerek fiyatlar modellenmiş olur.
- Özetle, tüm stokastik modellerde Brownian hareket bulunmak zorundadır aksi takdirde sürece dalgalanma eklenemez.



Şekil 3.7. BH sınırsız toplam değişime (TV) sahip olması



Şekil 3.8. BH sınırlı kareli değişime (QV) sahip olması

4. STOKASTİK İNTEGRAL

Brownian hareket örnek yollarının hiçbir yerde diferansiyellenemez ve sınırsız toplam değişime sahip olduğu Bölüm 3'te Toplam Değişim ve Kareli Değişim ile verilmiştir. Ito (1944) ya da stokastik integral, zamanla sayılamayan ve öngörülemeyen rassal adımların toplamını tanımlamanın bir yoludur ve örnek bir toplam eşitlik 4.1 ile verilebilir.

$$\underbrace{\int_0^T \sigma(X(s), s) dW(s)}_{iid \text{ gürültü (noises) toplamı}} \approx \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\sigma(X(t_j), t_j)}_{\substack{t_j \text{ zamanında} \\ \text{dalgalanma} \\ \text{ölçme faktörü}}} \underbrace{[W(t_{j+1}) - W(t_j)]}_{\substack{[t_j, t_{j+1}] \text{ zamanında} \\ \text{gürültü}}} \quad (4.1)$$

Stokastik integralin çözümü için bir teknik bulmak ya da geliştirmek bu sistemler ile modelleme yapabilmek için gereklidir ve şarttır. Çünkü stokastik integralin değeri bilinen sıradan analiz teknikleri ile çözülememekte ve ilgili zaman serisi eğrisi sınırlı olmadığından integral alınamamaktadır.

Stokastik integrali tanımlamadaki problem şu şekilde verilebilir:

Eğer $\int_0^T f(s) dg(s)$ integrali $[0, T]$ zaman aralığı üzerinde tüm sürekli f fonksiyonları için bir Riemann-Stieltjes integrali olarak mevcut ise, g 'nin mutlaka sınırlı değişime sahip olması gerekir. Maalesef, Brownian hareketin sınırsız değişime sahip olduğu Şekil 3.7 ile görselleştirilmiş ve eşitlik 3.9 ile formüle edilmişti. Bu durumda, bazı dönüşümlerin yapılması ve ek koşulların tanımlanması gerekmektedir. Bu bölümde stokastik integralin çözümü için gerekli tanımlamalar verilmiştir.

4.1. Stokastik İntegral Tanımı

Yukarıdaki açıklama dikkate alındığında $[0, T]$ zaman aralığı üzerinde tüm sürekli f fonksiyonları için $\int_0^T f(s) dW(s)$ stokastik integralinin tanımlanma amacı, Riemann-Stieltjes integral yaklaşımı tarafından önerilen adım (pathwise) birleşiminin başarısız olmasıdır, çünkü bu teknik integrallenebilir f

fonksiyonlarının büyük bir sınıfının birleşmesine izin vermemektedir. Brownian hareketin sınırsız değişime sahip olması ve herhangi bir değere yakınsamamasından dolayı, stokastik integralin olasılıksal bir ortalama olarak tanımlanması gerekmektedir. Bu durum Kiyosi Ito'nun 1944 yılında önerdiği **stokastik integral** ile açıklanabilir. İzlenecek tüm adımlar bir stokastik model nasıl çözülür sorusuna cevap niteliğindedir. Eğer çözüm bulunursa bu sistemin momentleri de bulunmuş olacak ve gerekli benzetim çalışmaları gerçekleştirilecektir.

Bu bölümde; Brownian harekete göre zamanın kare integrallenebilir deterministik fonksiyonlarının Wiener (Brownian) stokastik integrali kurulacaktır. Riskli varlıkların fiyatı S_t ile gösterilsin. S_t , Bachelier (1900) tarafından $S_t := \sigma W_t$ olarak modellenmiş olup σ bir dalgalanma parametresidir. Eşitlik 4.2'de verilen stokastik integral, kar ve zararların toplamı $f(t)dS_t$ ifadesi kullanılarak bir portfolyonun değerini temsil etmek için kullanılabilir.

$$\int_0^T f(t)dS_t = \sigma \int_0^T f(t)dW_t \quad (4.2)$$

Burada; dS_t , hisse senedindeki değişmeyi ifade etmektedir ve $f(t)$ ise çok kısa zaman aralığı $[t, t + dt]$ içerisinde varlık fiyatı S_t 'ye yatırılan miktardır.

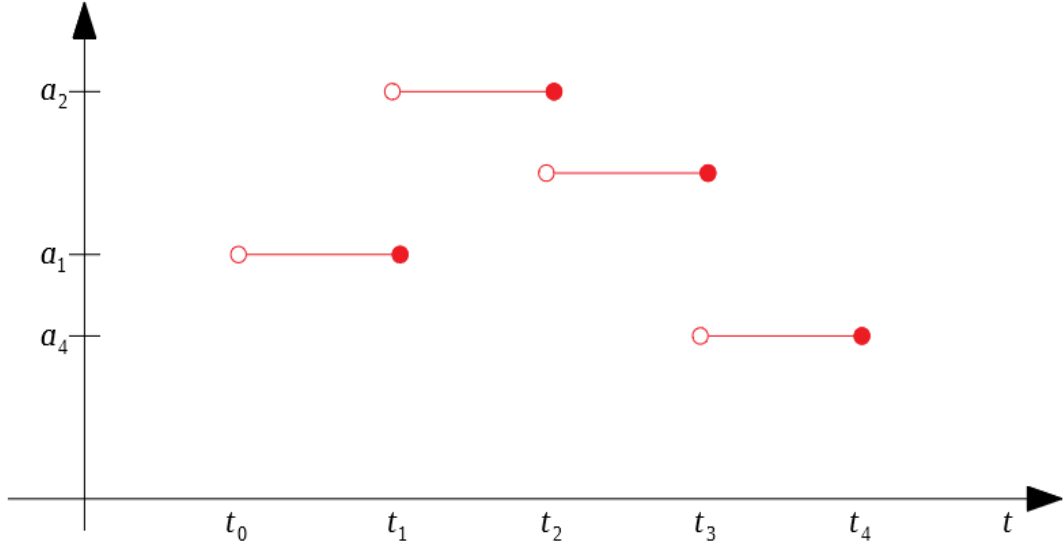
Brownian harekete göre stokastik integralin dt ifadesine dayalı sade tanımı eşitlik 4.3 ile verilen integralin değerlendirilmesi ile oluşturulabilir.

$$\int_0^T f(t)dW_t := \sigma \int_0^T f(t) \frac{dW_t}{dt} dt \quad (4.3)$$

Daha önceden hatırlanacağı üzere Brownian hareketin yolları sürekli olmak ile beraber hiçbir yerde türevlenemediği bilinmektedir. Bu durumu aşmak için Brownian harekete göre Ito'nun stokastik integralin kurulumunun tanıtılması gerekmektedir.

Eşitlik 4.4'te verilen stokastik integraller formun basit adım fonksiyonlarının integrali olarak ilk başta kurulmuştur. Yani, f fonksiyonu $0 \leq t_0 < \dots < t_n < T$ ile $i = 1, 2, \dots, n$, $(t_{i-1}, t_i]$ zaman aralığı üzerinde a_i değerini almakta ve f fonksiyonu Şekil 4.1 ile gösterilmektedir. Adım fonksiyonunun daha belirgin hali Şekil 4.2 ile verilmiştir.

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.4)$$

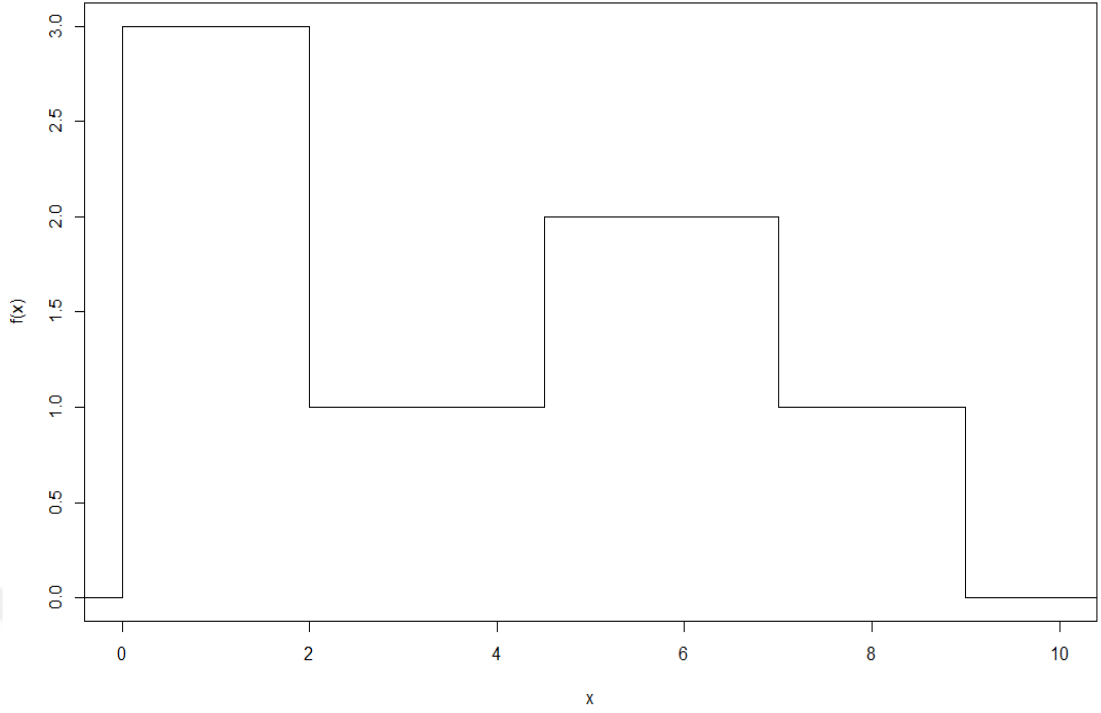


Şekil 4.1. Adım fonksiyonu $t \rightarrow f(t)$

Eşitlik 4.4'te verilen bir f fonksiyonunun klasik integrali, f eğrisinin altında kalan alandır ve eşitlik 4.5 ile hesaplanır.

$$\int_0^T f(t) dt := \sum_{i=1}^n a_i (t_i - t_{i-1}) \quad (4.5)$$

Bir sonraki adımda klasik integral, Brownian harekete genişletilerek stokastik integral gösterilmiş ve gerekli tanımlamaları aşağıda yapılmıştır.



Şekil 4.2. Örnek bir adım fonksiyonu $x \rightarrow f(x)$

Eşitlik 4.6 ile gösterilen stokastik integral fiyat değişimi $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, i = 1, 2, \dots, n)$ zamanlarında olan riskli bir varlığın elde tutulan bir portfolyodaki miktarı a_i olacak şekilde $a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$, $i = 1, 2, \dots, n$ değerindeki zarar ve kazançların toplamı olarak yorumlanabilir. Eşitlik 4.4 formundaki basit adım f fonksiyonunun Brownian harekete $(W_t)_{t \in [0, T]}$ göre stokastik integrali eşitlik 4.6 ile verilmiştir.

$$\int_0^T f(t) dW_t := \sum_{i=1}^n a_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (4.6)$$

$\int_0^T f(t) dW_t$ ifadesinin olasılık dağılımı aşağıda belirlenmiş ve aynı zamanda $f(t)$ için seçilen özel bir seçim ile eşitlik 4.4'ten bağımsız olduğu gösterilmiştir.

Diyelim ki f , eşitlik 4.4 formundaki gibi basit bir f adım fonksiyonu olsun. Eşitlik 4.6 ile tanımlanan $\int_0^T f(t) dW_t$ stokastik integrali; eşitlik 4.7'de verilen Normal dağılıma, eşitlik 4.8'de verilen ortalama ve eşitlik 4.9'da verilen varyansa sahiptir.

Eşitlik 4.9 ile gösterilen varyans, Ito izometri özelliğinden elde edilmiştir. Bu konu ile ilgili detaylı bilgi için Ballotta ve Gianluca, (2018) referansına başvurulabilir.

$$\int_0^T f(t) dW_t \sim N\left(0, \int_0^T |f(t)|^2 dt\right) \quad (4.7)$$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t) dW_t \right] = 0 \quad (4.8)$$

$$\text{Var} \left[\int_0^T f(t) dW_t \right] = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) dW_t \right)^2 \right] = \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad (4.9)$$

Eşitlik 4.9'un ispatı aşağıda verilmiştir. $N(m_1, \sigma_1^2), \dots, N(m_n, \sigma_n^2)$ olasılık dağılımları ile $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız rassal değişkenleri Normal dağılıma sahip olsun. O zaman $N(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$ olasılık dağılımı ile $X_1 + \dots + X_n$ toplamı bir Normal rassal değişkendir. Sonuç olarak, adım fonksiyonu eşitlik 4.10 ile verilir.

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.10)$$

Eşitlik 4.10'un stokastik integral hali eşitlik 4.11 ile verilmiştir.

$$\int_0^T f(t) dW_t := \sum_{k=1}^n a_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \quad (4.11)$$

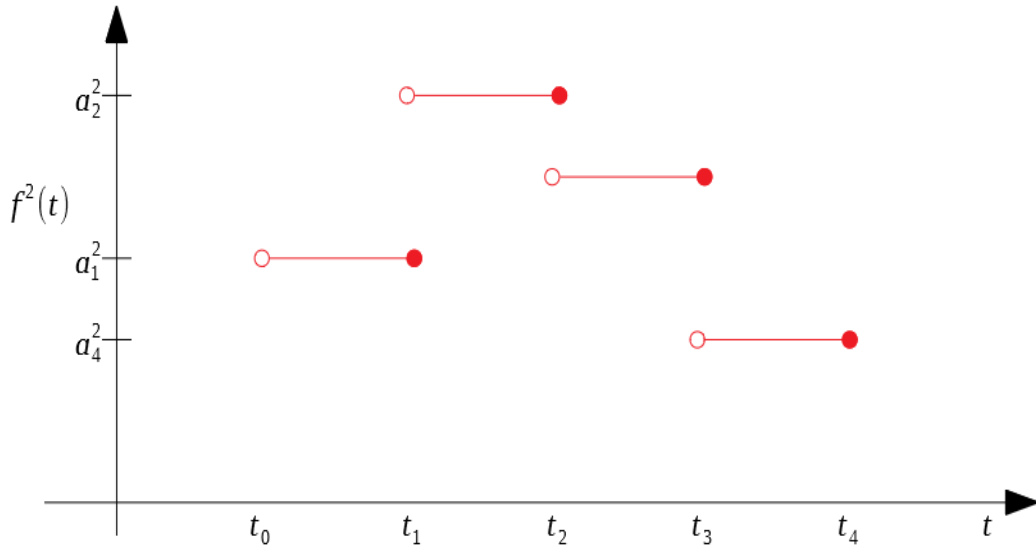
Sıfır ortalama ve eşitlik 4.12 varyans değeri ile merkezi Normal dağılıma sahiptir.

$$\text{Var} \left[\int_0^T f(t) dW_t \right] = \sum_{k=1}^n \text{Var} [a_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \text{Var}[(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})] \\
&= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 (t_k - t_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \\
&= \int_0^T \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \mathbf{1}_{(t_k - t_{k-1}]}(t) dt \\
&= \int_0^T |f(t)|^2 dt \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak; eşitlik 4.13 basit fonksiyonu, $i = 1, 2, \dots, n$, $(t_{i-1}, t_i]$ zaman aralığı üzerinde a_i^2 değerini almakta ve f fonksiyonu Şekil 4.3 ile gösterilmiştir.

$$f^2(t) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad t \in [0, T] \tag{4.13}$$



Şekil 4.3. Adım fonksiyonu $t \rightarrow f^2(t)$

4.2. Ito Formülü

Genellikle stokastik modellerde Brownian süreci vardır ve bu integrali çözmek için Kiyosi Ito'nun 1944 yılında önerdiği ITO formülü ya da lemması kullanılır. Ito formülü hem kullanım açısından hep hesap kolaylığı açısından yaygın bir şekilde stokastik diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılır. Böylece ilgilenilen stokastik model ne kadar karmaşık olursa olsun ITO formülü ile çözümü mümkün ve kolay olmaktadır. Ancak bu formülün uygulanabilmesi için stokastik integral tanımının anlaşılması önemlidir. Riskli varlık getirilerinin $(S_t)_{t \in R_+}$, $t \in R_+$ zamanında stokastik modellenmesi $\mu \in R$ ve $\sigma > 0$ olacak şekilde eşitlik 4.14 ile tanımlanmıştır. Bu konu ile ilgili detaylı bilgiye Privault (2020) kaynağından ulaşılabilir.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (4.14)$$

Herhangi bir $(X_t)_{t \in R_+}$ süreci için, 4.15 ilişkisi kullanılarak eşitlik 4.14 integral formu, eşitlik 4.16 olarak yazılabilir.

$$X_T = X_0 + \int_0^T dX_t, \quad T > 0 \quad (4.15)$$

$$S_t = S_0 + \int_0^T dS_t = S_0 + \mu \int_0^T S_t dt + \sigma \int_0^T S_t dW_t \quad (4.16)$$

Eşitlik 4.16'dan görülmektedir ki; geleneksel dt ifadesine göre integral hesaplamanın yanısıra dW_t 'ye göre bir integralin tanımlanması gereklidir. Yani “ dW_t içeren integral nasıl çözülecek?” sorusunun cevabı aranacaktır. Halihazırda Brownian harekete göre kare integrallenebilir süreçlerin stokastik integrali

tanımlanmıştı. Bu nedenle $(S_t)_{t \in R_+}$ olacak şekilde eşitlik 4.16'daki mantık eşitlik 4.14'deki gibi diferansiyel formda yazılabilen bir süreçtir. Bu model, t zamanında bir riskli varlığın rassal olan S_t fiyatını temsil etmektedir. Burada varlığın getirisi; $\frac{dS_t}{S_t}$ sabit bir μdt getirisi ve bir rassal getiri σdW_t olacak şekilde iki bileşenden oluşmaktadır. Burada σ parametresi dalgalanmayı (oynaklığı) ifade etmektedir.

Burada amaç; ilk önce temel stokastik diferansiyel denklemlerden olan eşitlik 4.14'ün çözülmesi ve diğer stokastik diferansiyel denklemlerin çözümü için stokastik metot olan Ito formülünün sunulmasıdır. Aşağıda önce deterministik daha sonra stokastik analiz anlatılmıştır.

Deterministik hesaplama: Kalkülüsün temel teoremi herhangi sürekli türevlenebilir deterministik fonksiyon f için eşitlik 4.17 integral ilişkisinin elde edilebileceğini ifade etmektedir.

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy \quad (4.17)$$

Diferansiyel gösterim ile bu ilişki birinci dereceden açılımı eşitlik 4.18 olarak yazılabilir ve burada yer alan dx sonsuz küçüklüktedir.

$$df(x) = f'(x)dx \quad (4.18)$$

Taylor'un formülü kullanılarak daha yüksek dereceden açılımlar elde edilebilir ve eşitlik 4.19 ilişkisi kullanılarak eşitlik 4.20 Taylor seri açılımı yazılabilir.

$$\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x) \quad (4.19)$$

$$\Delta f(x) := f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x)(\Delta x)^4 + \dots \quad (4.20)$$

Taylor formülü, eşitlik 4.20'nin birden yüksek açılımlarının ihmal edilmesi sonucu eşitlik 4.18'deki ilişki yani $df(x) = f'(x)dx$ elde edilir.

$(\Delta x)^n \ll \Delta x$, $n \geq 2$ olduğundan Δx sonsuz küçük bir değerdir. Bu durum yukarıda anlatılan deterministik analiz için geçerli olmaktadır. Bu durum aşağıda stokastik analize genişletilmiştir. Taylor'un formülü Brownian harekete göre eşitlik 4.21 ilişkisi kullanılarak uygulanırsa, eşitlik 4.22 elde edilir.

$$\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t \cong \pm\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta f(W_t) := f(W_{t+\Delta t}) - f(W_t) \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta f(W_t) := & f'(W_t)\Delta W_t + \frac{1}{2}f''(W_t)(\Delta W_t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(W_t)(\Delta W_t)^3 \\ & + \frac{1}{4!}f^{(4)}(W_t)(\Delta W_t)^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.22)$$

Brownian hareketin küçük artımları $\Delta W_t = \pm\sqrt{\Delta t}$ kullanılarak, Brownian hareketin oluşturulmasında $(\Delta t)^2$ ve $\Delta t\Delta W_t \cong \pm(\Delta t)^{3/2}$ terimleri Δt 'ye göre Taylor formülünde birinci dereceden yaklaşıldığında ihmal edilebileceği görülmektedir. Ancak ikinci dereceden terim $(\Delta W_t)^2 = (\pm\sqrt{\Delta t})^2 = \Delta t$ ihmal edilemez. Brownian hareket için ikinci derecen Taylor formülü $f \in C^2(\mathbb{R})$ olacak şekilde sonsuz küçük dt değerleri için eşitlik 4.23 şeklini almaktadır.

$$df(W_t) := f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt \quad (4.23)$$

Eşitlik 4.23, eşitlik 4.24 formunda yazıldığında bu yazımın pek mantıklı olmadığı görülmektedir. Çünkü Brownian hareketin t 'ye göre her adım için türevi, eşitlik-4.25 ile mevcut olmadığı net bir şekilde görülmektedir.

$$\frac{df(W_t)}{dt} = f'(W_t)\frac{dW_t}{dt} + \frac{1}{2}f''(W_t) \quad (4.24)$$

$$\frac{dW_t}{dt} \cong \pm \frac{\sqrt{dt}}{dt} \cong \pm \frac{1}{\sqrt{dt}} \cong \pm \infty \quad (4.25)$$

Eşitlik 4.23'ün her iki tarafının integrali alındığında ve $f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t df(W_t)$ ilişkisi kullanıldığında, Brownian hareket için Ito formülünün integral formülü eşitlik 4.26 ile elde edilmiş olur.

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds \quad (4.26)$$

Ito süreçleri için ifade edilen Ito formülün genel formu aşağıda oluşturulmuştur.

Tanım 4.1. Bir Ito süreci, eşitlik 4.27 ile yazılabilen bir stokastik $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sürecidir. Benzer şekilde diferansiyel formu eşitlik 4.28 ile verilmiştir.

$$X_t = X_0 + \int_0^t v_s ds + \int_0^t u_s dW_s, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.27)$$

$$dX_t = v_t dt + u_t dW_t \quad (4.28)$$

Burada; $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ve $(v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ benimsenen sürecin kare integrallenebilir durumudur. $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ üzerinde iki değişkenli bir pürüzsüz (düz) fonksiyon $(t, x) \mapsto f(t, x)$ gözönüne bulundurulduğunda $\frac{\partial f}{\partial t}$ ifadesi, $f(t, x)$ fonksiyonunda birinci değişkene (zaman) göre kısmi türevini göstermekte iken $\frac{\partial f}{\partial x}$ ifadesi $f(t, x)$ fonksiyonunda ikinci değişkene (fiyat) göre kısmi türevi göstermektedir.

Teorem 4.1. (Ito süreci için Ito formülü): Eşitlik 4.27 formunun herhangi bir Ito süreci $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ve her $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ için eşitlik 4.29 elde edilmiştir. Eşitlik 4.29 ifadesi diferansiyel formda eşitlik 4.30 olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t v_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) ds \\
&\quad + \int_0^t u_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t |u_s|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
df(t, X_t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + v_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dt + u_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dW_t \\
&\quad + \frac{1}{2} |u_s|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$x \mapsto f(x)$ olması durumunda t değişkenine bağlı değildir. Eşitlik 4.27'de; $X_t = W_t$, $u_t = 1$ ve $v_t = 0$ ve $X_0 = 0$ alındığında; Ito formülü eşitlik 4.29 ifadesi, eşitlik 4.31 olarak yazılabilir ve benzer şekilde diferansiyel formu ise eşitlik 4.32 olarak verilebilir. Burada anlatılan durum genel itibarı ile tek değişkenli Ito süreci için ele alınmıştır.

$$\begin{aligned}
f(t, W_t) &= f(0, W_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, W_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s) dW_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_s) ds
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$df(t, W_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t) dt \tag{4.32}$$

Bu bölümün tez çalışması açısından önemi aşağıda sıralanmıştır:

- İlgilenilen bir zaman serisinin stokastik modeli kurulduktan sonra çözümü için bazı tanımlamalar ve adımlar bu bölümde verilmiştir. Brownian hareket sürecinin sınırlı toplam değişime sahip olmadığı ancak kareli sınırlı değişime sahip olduğu bilinmektedir. Kareli sınırlı değişime göre eşitlik 4.13 elde edilmiş ve bu formüle göre davranış gösterdiği belirtilmiştir.
- Eşitlik 4.13'e göre davranış gösteren bir stokastik sistemin, Ito formülü ile kolay bir şekilde çözülebileceği belirtilmiştir. Bu formül Japon Matematikçi Kiyosi Ito'nun 1944 yılında önerdiği bir yöntemdir. Eğer stokastik modelin çözümü bulunursa, bu sistemin momentleri de bulunmuş olunacaktır. Böylece gerekli benzetim çalışmaları gerçekleştirilebilir.
- Tek değişkenli Ito süreci eşitlik 4.32 olarak bulunmuştur.

5. ÖNEMLİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, modelleme aşamasında kullanılacak bazı temel stokastik modeller incelenmiştir. Aritmetik Brownian Hareket (ABH), difüzyon süreçlerinin anlaşılmasında en temel stokastik modeldir. Çünkü tüm stokastik modeller deterministik kısım (beklenen değer) ve dalgalanma (difüzyon kısmı) olmak üzere iki kısımda incelenir. Diğer stokastik modeller ise beklenen değer değişmesi ve buna bağlı olarak dalgalanmanın değişmesi ile farklı modeller olmakta ve farklı isimler ile adlandırılmaktadırlar. Örneğin, Vasicek modeli tanımı gereği bazı özelliklere sahiptir. En belirgin özelliği bir ortalama değer etrafında veri üretmesidir. Bu modeller iyi anlaşılırsa birçok gerçek dünya problemi kolaylıkla modellenebilir ve benzetim çalışması gerçekleştirilebilir. Gerçek dünya problemlerinin modellenmesi açısından önemli olan Aritmetik Brownian Hareket, Vasicek ya da bir diğer ismi olan Ortalamaya Dönme modeli bu bölümde incelenmiş ve benzetim sonuçları verilmiştir.

Bu tez çalışmasında; hisse senedi fiyatlarını modellemek için kullanılan stokastik modelleme kısmı Vasicek modelinden oluşmaktadır. Daha sonra Vasicek modeline farklı sıçrama türleri (Bernoulli, Poisson ve Gamma süreci) eklenerek sistem modellenmiştir.

5.1. Aritmetik Brownian Hareket

Değişime sahip bir Brownian hareketine Aritmetik Brownian Hareketi (ABH) denir. Pekçok mühendislik probleminde olduğu gibi finansal piyasa hareketlerinde de bir sürecin bir ölçütünün zamana göre değişimi ile ilgilenilir. Bu ölçüt, tam olarak saptanamıyor (veya tahmin edilemiyor) ise bir rassal değişken olarak modellenir. Herhangi bir rassal değişkenin zaman içerisinde değer değişimleri belirsiz bir davranış sergiliyorsa, bu değişkenin bir stokastik süreç takip ettiği kabul edilir (Karaca ve Alp, 2017). Rassal değişkenin sürekli ve kesikli değerler alması nedeniyle stokastik süreç iki şekilde sınıflandırılabilir. Eğer sürecin incelenen özelliği olan rassal değişken belirli bir aralıkta herhangi bir değeri alıyorsa **sürekli stokastik süreç**, eğer bu süreçte rassal değişken ayrık

değerler alıyor ise **kesikli stokastik süreç** olarak adlandırılır. Bu çalışmada, farklı menkul ve varlıkların fiyatlarındaki değişimler kesikli zaman stokastik süreç olarak ele alınmıştır.

Bir değişkenin sadece bugünkü değerinin geleceği tahmin etmede yeterli olması stokastik sürecin Markov özelliğini ifade eder. Markov süreci, geleceği tahmin etmek için bir değişkenin sadece o günkü değerinin geçerli olduğu özel bir stokastik süreçtir. Yani, değişkenin geçmişteki değer(ler)i ve değişkenin bugünkü değeri birbirinden bağımsızdır denilmektedir. Örneğin, hisse senedi piyasalarının genellikle bir Markov süreci takip ettikleri kabul edilir. Bu nedenle bir hisse senedi fiyatının bugünkü değeri, gelecekle ilgili tahminlerde kullanılabilecek tek geçerli bilgidir. Bir Markov stokastik süreç, $N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilen ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılıma sahiptir. Markov özelliği taşıyan bir değişkenin bir yıl süresince gözlemlenen değer değişimlerinin dağılımı $N(0, 1)$ ise, aynı değişkenin iki yıl içindeki değer değişimleri dağılımı, ortalaması sıfır ve varyansı 1 olan iki normal dağılımın toplamına eşit olur. $N(0, 1)$ özelliğine sahip iki normal dağılım toplandığında sonuç, ortalaması ortalamalar toplamı ve varyansı varyanslar toplamı olan yeni bir normal dağılımdır. Öyleyse, göz önünde bulundurulanan değişken için iki yıllık değer değişiminin ortalaması sıfır ve standart sapması $\sqrt{2}$ olur. Böylece, değişkenin iki yıl süresince değer değişim dağılımı $N(0, 2)$ olarak ifade edilir ve bu özellik Merkezi Limit Teoremi'nden gelmektedir. Genel olarak, değişkenin herhangi bir T uzunluğuna sahip bir dönemdeki değer değişimlerinin olasılık dağılımı $N(0, T)$ olarak ifade edilir. Çok kısa süreyi ifade eden Δt (sürekli zaman stokastik süreçlerde çok kısa süreyi ifade eden gösterim dt olarak gösterilir) zaman aralığındaki değer değişiminin olasılık dağılımı da $N(0, \Delta t)$ olarak gösterilebilir. Markov özelliği taşıyan ve $N(0, 1)$ dağılımına sahip olan bir değişken **Wiener süreci** izler. Wiener süreci ortalaması sıfır ve varyansı 1 olan Markov stokastik sürecin özel bir durumudur. Wiener süreci fizikte çok sayıda moleküler şoklara maruz kalan parçacıkların hareketlerini açıklamada kullanılır ve Brownian hareketi (Brownian motion) olarak da adlandırılır. Bir z-değişkeni aşağıdaki iki özelliğe sahip ise bu değişken bir Wiener süreci izler.

Özellik 1: Küçük bir Δt zaman dilimindeki değişim $\Delta z = dW$ eşitlik 5.1 ile yazılabilir. Burada, ε standart normal dağılımdan, yani $N(0,1)$ dan rassal bir seçimdir.

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (5.1)$$

Özellik 2: Herhangi iki farklı kısa Δt zaman aralığındaki $\Delta z = dW$ değerleri birbirinden bağımsızdır.

Birinci özellik Δz 'nin ortalaması sıfır, standart sapması $\sqrt{\Delta t}$ ve varyansı Δt olan normal dağılıma sahip olduğunu ifade eder. İkinci özellik ise, z -değişkeninin bir Markov süreci izlediğini anlatır. Uzun bir T -zaman dilimi içerisinde z -değerindeki değişim $z(T) - z(0)$, eşitlik 5.3 olarak ifade edilebilir. Bu değişim, eşitlik 5.2'de Δt uzunluğundaki N adet küçük zaman aralığında z -değerindeki değişimlerin toplamıdır.

$$\Delta t = T/N \quad (5.2)$$

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (5.3)$$

Burada; $\varepsilon_i = 1, 2, 3, \dots, N$ adet standart normal dağılımdan, $N(0,1)$ tesadüfi seçimler olmak üzere yazılabilir ve ε_i değerleri birbirinden bağımsızdır. Eşitlik 5.4'de görüldüğü gibi $z(T) - z(0)$ değişiminin ortalaması sıfır, varyansı $N\Delta t = T$, standart sapması ise $\sqrt{T}$ olan normal dağılıma sahip olduğu anlaşılır.

$$z(T) - z(0) \sim N(0, N\Delta t = T) \quad (5.4)$$

Bu stokastik süreçte z değişkeni, küçük değişimlerin sıfıra yaklaşma limiti, $\frac{dy}{dx}$ değişimini $\frac{dy}{dx}$ ifadesine dönüştürür. Stokastik süreçte de z değişkeni için küçük değişimlerin (dz) çok kısa süre içinde $\Delta t \rightarrow 0$ (dt) sıfıra yaklaşması ($\Delta z \rightarrow 0$) bir Wiener sürecini ifade eder. Wiener sürecinde, dz 'nin sürüklenme oranı (drift

rate) sıfır ve varyansı 1'dir. Sıfır sürüklenme oranı gelecekte herhangi bir zamandaki z 'nin beklenen değerinin başlangıç değerine eşit olması anlamını taşır. Varyansın 1 olması da T uzunluğundaki bir zaman aralığında z değerindeki değişimin varyansının T olduğu anlamındadır. Sürüklenme oranı (drift rate) sıfırdan farklı olan bir Wiener süreci **Genelleştirilmiş Wiener süreci** olarak adlandırılır ve Şekil 5.1 ile gösterilmiştir. Genelleştirilmiş Wiener süreci X değişkeni için dz 'ye bağlı olarak eşitlik 5.5 ile tanımlanabilir.

$$dX = \alpha dt + \beta dz \quad (5.5)$$

Eşitlik 5.5'de yer alan dz ifadesi ile dW aynıdır.

Aritmetik Brownian Hareket sürecinin benzetim aşamaları aşağıda verilmiştir:

1. Eşitlik 5.6 modellenmek istenmektedir.

$$dX = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (5.6)$$

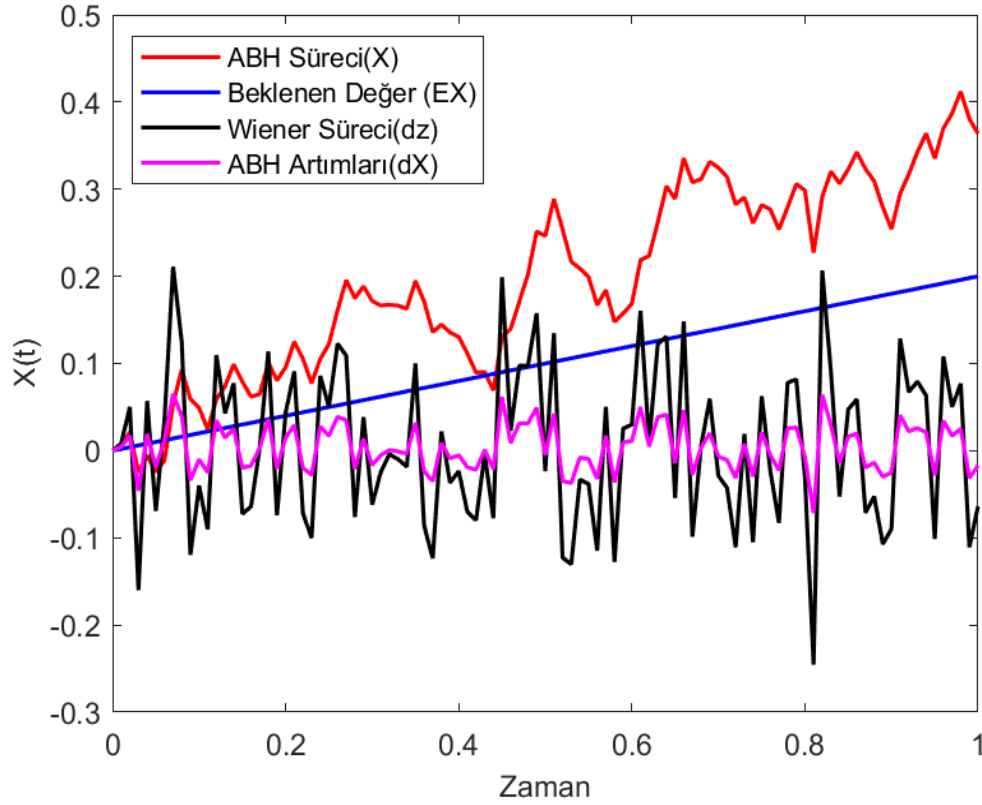
2. Eşitlik 5.7 ile her bir artım toplanıp simüle edilmelidir.

$$dX(t) \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt) \quad (5.7)$$

3. Eşitlik 5.8 kullanılarak, $X(t)$ süreci yani hisse senedi fiyatlarının benzetimi yapılır.

$$X(t) = \sum_{j=0}^{n-1} dX(jdt) \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt) \quad (5.8)$$

Eşitlik 5.5 ve eşitlik 5.8'in benzetimi sonucunda Şekil 5.1 elde edilmiştir.



Şekil 5.1. Genelleştirilmiş Wiener Süreci (ABH)

5.2. Vasicek Ortalamaya Dönme Süreci

Finansal menkul kıymet zaman serilerinin fiyatlarını ya da getirilerini modellemek için ortalamaya dönme sıçrama difüzyon süreci modeli kullanılabilir. Hisse senedi piyasalarında fiyatların genellikle serbest bir şekilde değiştiği gözlemlenmektedir. Bu değişimde birçok faktör etkili olmaktadır. Bu nedenle de fiyatlar çok oynak (dalgalanma) bir yapıya sahiptir. Fiyatların zamana göre değişimini modellemek için kullanılabilecek en uygun matematiksel araç ise stokastik süreçler teorisidir. Bu süreçler kullanılarak, gelecekte ortaya çıkması muhtemel olaylara olasılık ataması yapılabilir.

Finans alanındaki zaman serileri uzun süre Normal süreçler (Brownian hareket) kullanılarak modellenmiştir. Fakat finansal piyasalardaki gerçek zaman serileri analiz edildiğinde bunların çoğunlukla, sola veya sağa çarpık, ortalama civarında normal dağılıma göre daha sivri ve kalın kuyruklarla karakterize edildiği görülmektedir. Örneğin menkul kıymet piyasalarında, eğer hisse senedi fiyatları

bir rassal yürüyüş süreci izliyorsa, hisse senedinin geçmişteki fiyatlarının bilinmesi geleceğin kestirimi için hiçbir ek bilgi sağlamaz. Bununla birlikte rassal yürüyüş süreci fiyatları bağımsız aynı dağılıma sahip rassal değişkenler olarak ele alır ve fiyatların istatistiksel özelliklerinin anlaşılmasına yardımcı olur. Hisse senedi fiyatları kesikli zamanlı, kesikli değişkenli stokastik süreçler olmalarına rağmen, hisse senedi fiyat dinamiklerini modellemek için sürekli zamanlı değişkenler ile modellemek uygundur (Önalın, 2007).

Bu bölümde; çalışmanın temelini oluşturan Vasicek Modelinin (Ortalamaya Dönme Normal Modeli yada Ornstein-Uhlenbeck Süreci) iki modeli olan Langevin Denklemi ve Ornstein-Uhlenbeck süreci olan Vasicek Modeli ayrıık formda incelenmiştir.

5.2.1. Ortalamaya Dönme Süreci Langevin Denklemi

Langevin denklemi, rassal ortamlardaki genel rassal bir hareketin temel özelliklerini tanımlar. Bu denklem Langevin tarafından üretilmiştir (Langevin, 1908) ve özellikle Fizik'teki en temel stokastik diferansiyel denklemlerden biri haline gelmiştir (Eliazar ve Shlesinger, 2012). Langevin yaklaşımı, parçacığın akışkan ortamda hareket ettiğini, dış kuvvet ve sürtünmenin etkisiyle Newton mekaniğini takip ettiğini varsaymaktadır. Çevreleyen ortam moleküllerinin etkisi, rassal bir gürültü terimi ile modellenmiştir. Bu denklemin Biyoloji, Fiziksel Kimya ve Mühendislik alanlarında da uygulamaları vardır. İki kuvvete maruz kalan bir doğru boyunca hareket eden bir m -kütleli parçacığın olduğu düşünölsün ve dış kuvvet F 'in sıfır olduğu kabul edilsin. Parçacık hızıyla orantılı olan fraksiyonel bir kuvvet ve rassal bir beyaz gürültü kuvveti rassal dalgalanmaları modellemektedir. t -zamanında bir akışkandaki serbest bir Brownian hareket parçacığın hızı V_t ile gösterilsin. Bir boyutlu Langevin denklemi eşitlik 5.9'da verilmiştir.

$$m \frac{dV_t}{dt} = -\beta V_t + \gamma \xi_t \quad (5.9)$$

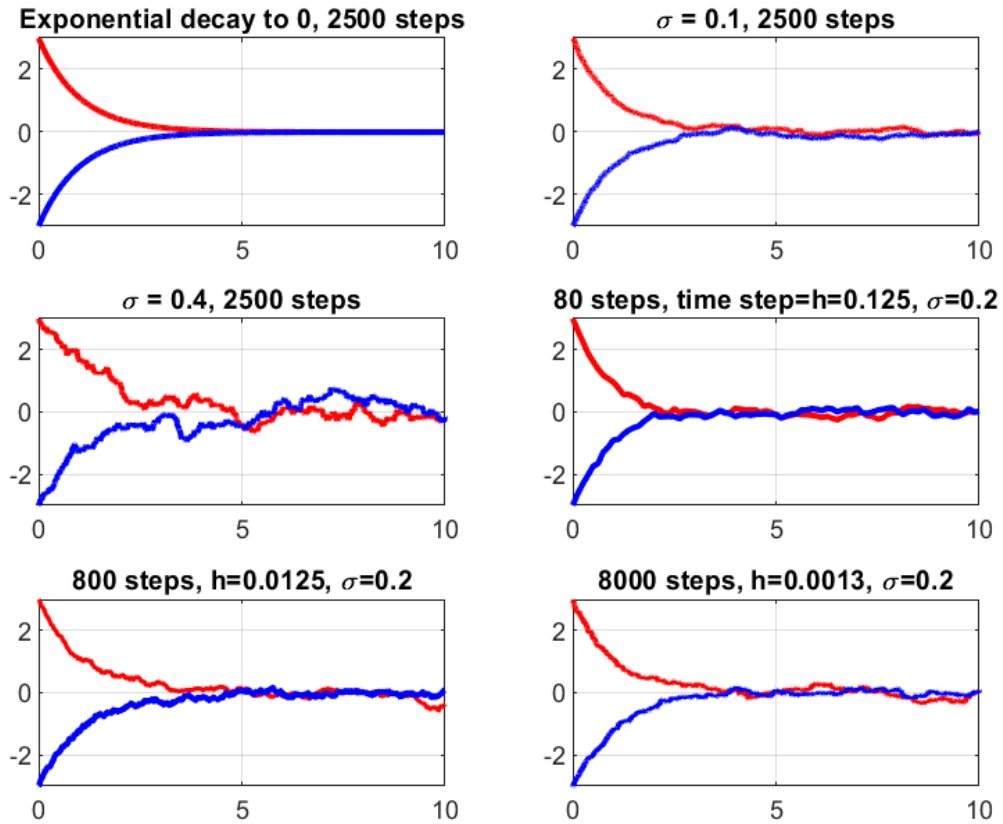
Burada; m parçacığın kütlesini, $-\beta V_t$ sürtünme kuvvetini, β sürtünme katsayısını, γ gürültünün gücünü, ξ_t rassal kuvveti göstermektedir. Eşitlik 5.9 m değerine bölünürse, eşitlik 5.10 elde edilir.

$$\frac{dV_t}{dt} = -\kappa V_t + \sigma \xi_t \quad (5.10)$$

Burada; $\kappa = \beta/m > 0$ ve $\sigma = \gamma/m$ sabittir (Hunter, 2009). ξ_t nin yerine $\frac{dB_t}{dt}$ kullanılırsa, eşitlik 5.10'dan eşitlik 5.11 elde edilir.

$$dV_t = -\kappa V_t dt + \sigma dB_t \quad (5.11)$$

Burada; $V_0 = v_0$ deterministik miktar olarak sabitlenmiş ve B_t ise standart Brownian harekettir. Eşitlik 5.10'ın benzetimi, Şekil 5.2'de farklı adım sayısı, farklı adım uzunluğu (h) ve dalgalanma (σ) değerleri için çizilmiştir.



Şekil 5.2. Farklı adım ve dalgalanma değerleri ile Langevin denkleminin benzetimi

5.2.2. Ortalamaya Dönme Ornstein-Uhlenbeck Süreçler

Klasik Ornstein-Uhlenbeck süreci (OU), 1930'da G.E Uhlenbeck ve L.S. Ornstein tarafından önerilmiştir (Uhlenbeck ve Ornstein, 1930). Temel olarak, bu model bir sıvıya batırılmış Brownian parçacığının hızını tanımlamayı önermektedir. Durağan bir dağılıma sahip tek sürekli zaman Markov sürecidir. Lévy süreçleri tarafından yürütülen Ornstein-Uhlenbeck süreçleri sıçramalarla Markov süreçlerinin özel bir durumudur (ShiBin ve Sheng, 2013). Eşitlik 5.10 ile verilen Langevin denklemini karşılayan V_t süreci eşitlik 5.12'de verilen Ornstein-Uhlenbeck sürecidir.

$$V_t = v_0 e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} \xi_s ds \quad (5.12)$$

Eşitlik 5.13'te verilen Vasicek modeli, anlık faiz oranının ($x_t = V_t$) sabit κ, μ, σ katsayıları ile bir Ornstein-Uhlenbeck süreç izlediğini kabul eder.

$$dx_t = \kappa(\mu - x_t)dt + \sigma dB_t \quad \kappa > 0 \quad (5.13)$$

s ve t durumları arasında, eşitlik 5.13 denkleminin doğrudan çözümü kolaylıkla Ornstein-Uhlenbeck stokastik diferansiyel denklem (SDD) çözümünden, eşitlik 5.14 ile elde edilir.

$$x_t = \mu(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + x_s e^{-\kappa(t-s)} + \sigma e^{-\kappa t} \int_s^t e^{\kappa u} dB_u \quad (5.14)$$

Burada;

μ : uzun dönem ortalamayı,

κ : sürecin uzun dönem ortalama hızını göstermektedir.

x_s verildiğinde x_{s+t} koşullu ortalama eşitlik 5.15 ve varyansı eşitlik 5.16 ile tanımlanır.

$$E(x_t | x_s) = \mu + (x_s - \mu)e^{-\kappa(t-s)} \quad (5.15)$$

$$Var(x_t|x_s) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \quad (5.16)$$

Zaman arttıkça, ortalama uzun dönem μ değerine eğilim gösterir ve varyans sınırlı ise bu ortalamaya dönme süreci anlamına gelir. İki farklı t ve $t + s$ zamanında sürecin kovaryansı eşitlik 5.17’de verilmiştir. Benzer şekilde, x_s verildiğinde x_{s+t} koşullu dağılımı, eşitlik 5.18’de verilmiştir.

$$Cov(x_t, x_{t+s}) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) e^{-\kappa s} \quad t, s > 0 \quad (5.17)$$

$$x_t \sim N\left(\mu + (x_s - \mu)e^{-\kappa(t-s)}, \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)})\right) \quad (5.18)$$

$t \rightarrow \infty$ olduğu zaman Ornstein-Uhlenbeck sürecinin dağılımı μ ortalama ve $\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}}$ standart sapma ile Normal ve durağandır. Ornstein-Uhlenbeck sürecinin geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu eşitlik 5.19’da verilmiştir.

$$p(x, t|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{[x - \mu_t]^2}{2\sigma_t^2}\right\} \quad (5.19)$$

Yukarıdaki Ornstein-Uhlenbeck süreci $\{x_t\}_{t \geq 0}$ aynı zamanda bir zaman ölçekli Brownian hareket olarak eşitlik 5.20 ile gösterilebilir.

$$x_t = x_0 e^{-\kappa t} + \mu(1 - e^{-\kappa t}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} B(e^{2\kappa t} - 1) e^{-\kappa t} \quad (5.20)$$

Zaman ve uzay küçültükçe, özbenzeş Brownian hareket durağan Ornstein-Uhlenbeck sürecine dönüştürülebilir (Magdziarz ve Weron, 2011). Bu süreç $\{x_t\}_{t \geq 0}$, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ zaman adımı ile Euler Şeması kullanılarak eşitlik 5.21’de verildiği şekilde ayrıştırılabilir ve burada $Z_t \sim N(0,1)$ dir.

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \kappa(\mu - x_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t \quad (5.21)$$

Uygulamada sonlu uzaydan ayırık zaman noktalarındaki gözlemler elde edilebilir. $T < \infty$ tüm uzayı kapsadığı varsayıldığında; $\Delta t > 0$ örneklem aralığı ve $n = T/\Delta t$ gözlemlerin sayısı olsun. Bu sürecin ayırık zaman noktalarında gözlemlendiği varsayılın. Ayırık zaman gözlemleri $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ile gösterilirse, Ornstein-Uhlenbeck süreci $Z_i \sim N(0,1)$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olacak şekilde eşitlik 5.22 ile verilir.

$$x_{i\Delta t} = e^{-\kappa t} x_{(i-1)\Delta t} + \mu(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{2\kappa\Delta t})}{2\kappa}} Z_i \quad (5.22)$$

x_{i-1} verilmişken x_i oranının koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) eşitlik 5.23'te verilmiştir (Zoglat vd., 2013).

$$p(x_i|x_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{[x_i - \mu - (x_{i-1} - \mu)e^{-\kappa}]^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (5.23)$$

Ornstein-Uhlenbeck süreçlerinin parametre tahminleri, En Çok Olabilirlik Metodu (Maximum Likelihood Method) ile eşitlikler 5.24, 5.25 ve 5.26'da verilmiştir.

$$\begin{aligned} \hat{\kappa} = & \ln\left(n \sum_{t=1}^n x_{t-1}^2 - \left[\sum_{t=1}^n x_{t-1}\right]^2\right) \\ & - \ln\left(n \sum_{t=1}^n x_t x_{t-1} - \sum_{t=1}^n x_{t-1} \sum_{t=1}^n x_t\right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{1 - e^{-\hat{\kappa}}} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - x_{t-1} e^{-\hat{\kappa}}) \quad (5.25)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\kappa}}{1 - e^{-2\hat{\kappa}}} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [x_t - \hat{\mu} - (x_{t-1} - \hat{\mu})e^{-\hat{\kappa}}]^2 \quad (5.26)$$

OU süreçlerinin parametre tahminleri, aynı zamanda En Küçük Kareler Metodu-EKK (Ordinary Least Squares-OLS Method) kullanılarak da tahmin edilebilir. Bu metotta x_{t-1} verilmişken, t zamanında x rassal değeri, eşitlik 5.27'teki gibi yazılabilir.

$$x_t = \mu(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + x_{t-1}e^{-\kappa\Delta t} + \sigma \int_{t-1}^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s \quad (5.27)$$

Eğer ayırık zaman artımları $\Delta t = 1$ olarak ve eşitlik 5.27 dikkate alındığında; $x_t = c + bx_{t-1} + \delta\varepsilon_t$ ifadesinin $AR(1)$ süreci takip ettiği kabulü ile, $AR(1)$ modeli, eşitlikler 5.28 olarak düzenlenebilir. Bu durumda; EKK tahminleri eşitlikler 5.29 olarak elde edilir (Önalın, 2015).

$$c = \mu(1 - e^{-\kappa}), \quad b = e^{-\kappa}, \quad \text{ve} \quad \delta = \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\kappa})}{2\kappa}} \quad (5.28)$$

$$\hat{\kappa} = -\ln(\hat{b}), \quad \hat{\mu} = \frac{\hat{c}}{1 - \hat{b}} \quad \text{ve} \quad \hat{\sigma} = \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{(\hat{b}^2 - 1)/2\ln(\hat{b})}} \quad (5.29)$$

Burada; $\hat{\delta}$ ifadesi $x_t = \hat{c} + \hat{b}x_{t-1} + e_t$ otoregresyon denklemi hatalarının standart sapmasıdır. Ortalamaya dönme sürecinde eşitlik 5.30 kullanılır.

$$dX = X_{t+1} - X_t = \alpha(\mu - X_t) + \sigma\varepsilon_t \quad (5.30)$$

Burada;

- $X_{t+1} - X_t$: Fiyat değişimi,
- $\alpha(\mu - X_t)$: Ortalamaya dönme,
- $\sigma\varepsilon_t$: Rassal terim,
- μ : Dönülen ortalama seviye veya uzun vadeli denge fiyatı,
- X_t : Spot fiyat,
- α : Ortalamaya dönme oranı,
- σ : Dalgalanma,
- ε_t : t ve $t + 1$ zamanları arasında fiyatı etkileyen rassal şoklar.

Ortalamaya dönme süreci ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir:

- Ortalamaya dönme süreci, faiz oranları, enflasyon oranları ve hatta emtia fiyatları gibi çeşitli ekonomik değişkenlerin bir ampirik özelliği, çok yüksek (düşük) olduğunda düşük seviyelere (yüksek seviyelere) eğilim gösterir.
- Bu özellik ortalamaya dönme (mean-reversion) olarak adlandırılır ve bu özellik ortalamaya geri dönme süreci (Mean Reverting-MR) ile modellenenir.
- Bu ortalamaya geri dönme süreci (Vasicek modeli) aşağıdaki stokastik diferansiyel denklem ile tanımlanır.

$$dX(t) = \alpha(\mu - X(t))dt + \sigma dW(t), \quad \mu \in \mathbb{R}; \quad \alpha, \sigma > 0$$

- Bu süreç, faiz oranlarını modellemek için Vasicek (1977) tarafından finansa girmiştir. Bununla birlikte, bu sürecin kökeni fizikte ortalamaya geri dönme (Ornstein-Uhlenbeck –OU) sürecine dayanmakta ve bu durum Langevin denklemi olarak geniş ölçüde benzetimi ile birlikte verilmiştir.
- Vasicek (ortalamaya dönme) modelinin beklenen değeri;
 $\mathbb{E}_t[dX(t)] = \alpha(\mu - X(t))dt$, dir. Eğer $X(t) < \mu$ olduğu zaman $\alpha > 0$, $\mathbb{E}_t[dX(t)] > 0$ dir, yani μ seviyesinin altında (üstünde) olduğu zaman faiz oranı seviyesinde bir artış (azalma) olmaktadır.
- α değeri, ne kadar büyük olursa, μ seviyesine geri dönüşü o kadar hızlı olur. α ortalamaya dönme hızı olarak adlandırılırken, μ uzun süreli ortalama seviyeyi belirler.
- Herhangi bir zamanda X sürecinin gelecekteki dağılımı Normal'dir, dolayısıyla negatif değerlere izin vermektedir.
- Pozitif faiz oranlarını garantileyen modeli genişletme işlemi Cox, Ingersoll ve Ross (CIR modeli) tarafından önerilmiştir.

5.2.3. Vasicek $dx(t) = \alpha(\mu - x(t))dt + \sigma dW(t)$ modelinin çözümü

Bu bölümde; Vasicek modelinin stokastik kısmı da dikkate alınarak çözümü gerçekleştirilmiş ve benzetimi Şekil 5.4 ile verilmiştir.

Vasicek $dx(t) = \alpha(\mu - x(t))dt + \sigma dW(t)$ diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Adi diferansiyel denkleme benzer şekilde, $Y(t) = g(t, X(t)) = e^{\alpha t} X(t)$ olarak tanımlarsa ve Ito formülü uygulanırsa aşağıdaki çözüm elde edilir. Bu durumda aşağıdaki süreç elde edilmiş olur.

$$dY(t) = \left(\underbrace{\frac{\partial g(t, X)}{\partial t}}_{\alpha e^{\alpha t} X} + \alpha(\mu - X) \underbrace{\frac{\partial g(t, X)}{\partial X}}_{e^{\alpha t}} + \frac{1}{2} \sigma^2 \underbrace{\frac{\partial^2 g(t, X)}{\partial X^2}}_0 \right) dt + \sigma \underbrace{\frac{\partial g(t, X)}{\partial X}}_{e^{\alpha t}} dW(t)$$

$$= (\alpha e^{\alpha t} X + \alpha(\mu - X)e^{\alpha t})dt + \sigma e^{\alpha t} dW(t)$$

$$= \alpha \mu e^{\alpha t} dt + \sigma e^{\alpha t} dW(t)$$

$Y(t)$ süreci aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y(0) + \int_0^t \alpha \mu e^{\alpha s} ds + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW(s) \\ &= Y(0) + \mu(e^{\alpha t} - 1) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW(s) \end{aligned}$$

Stokastik diferansiyel denklem $dx(t) = \alpha(\mu - x(t))dt + \sigma dW(t)$ çözümü eşitlik 5.31 ile verilmiştir.

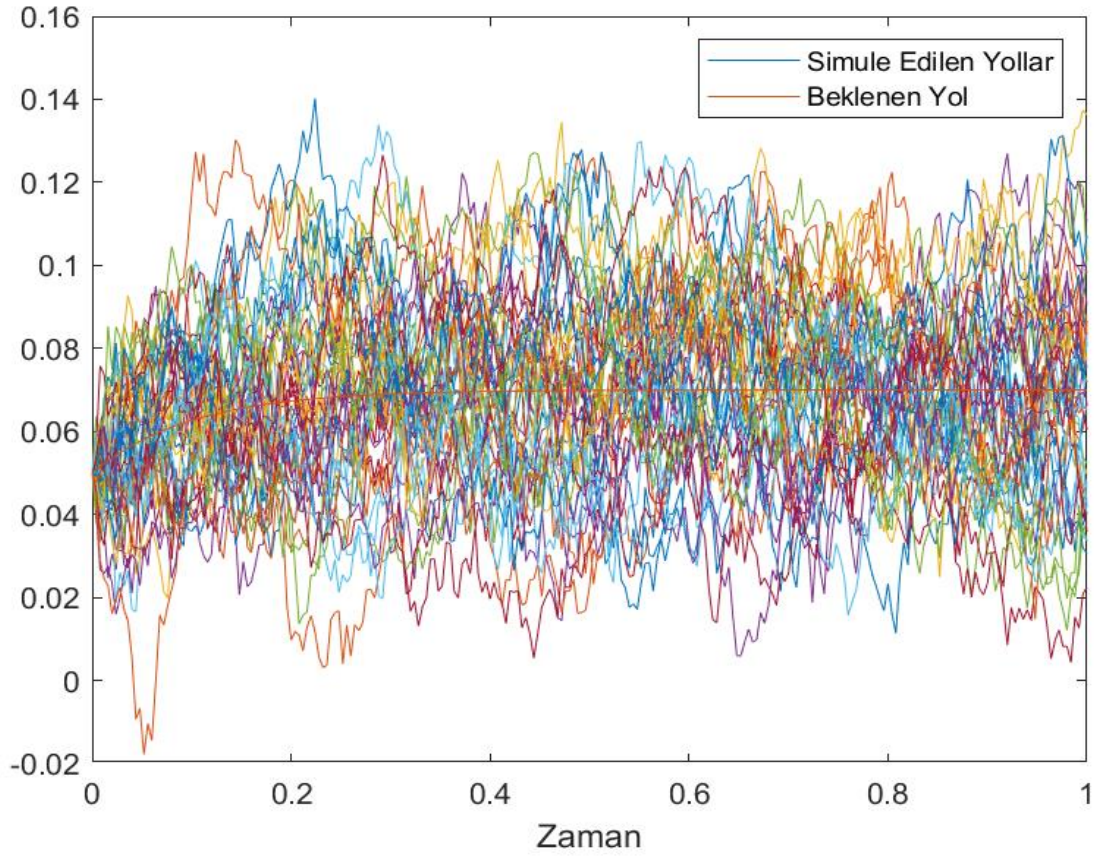
$$X(t) = e^{-\alpha t} Y(t) = e^{-\alpha t} X(0) + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \quad (5.31)$$

Vasicek modeli, $X(t) \sim N(\mathbb{E}_0(X(t)), \text{Var}_0(X(t)))$ sürecindedir ve beklenen değer ve varyansı sırasıyla eşitlik 5.32 ve eşitlik 5.33 eşitliklerinde verilmiştir. Varyansı hesaplamak için Ito izometriden yararlanılmıştır.

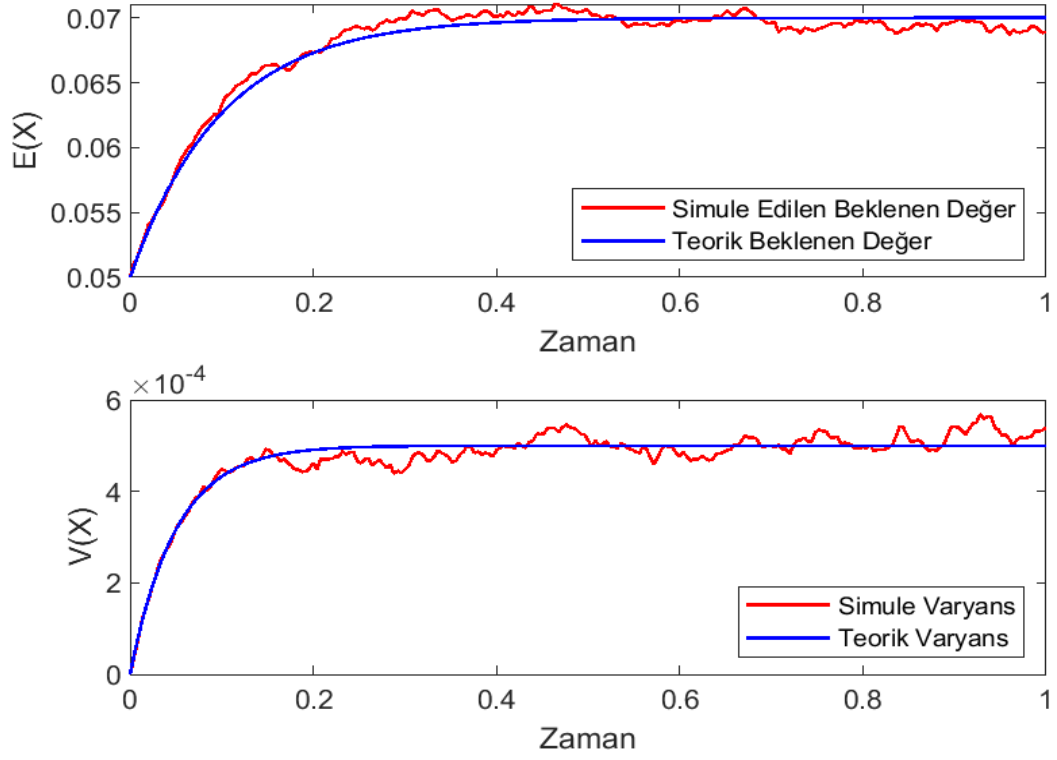
$$\mathbb{E}_0(X(t)) = e^{-\alpha t}X(0) + \mu(1 - e^{-\alpha t}) \quad (5.32)$$

$$\mathbb{Var}_0(X(t)) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (5.33)$$

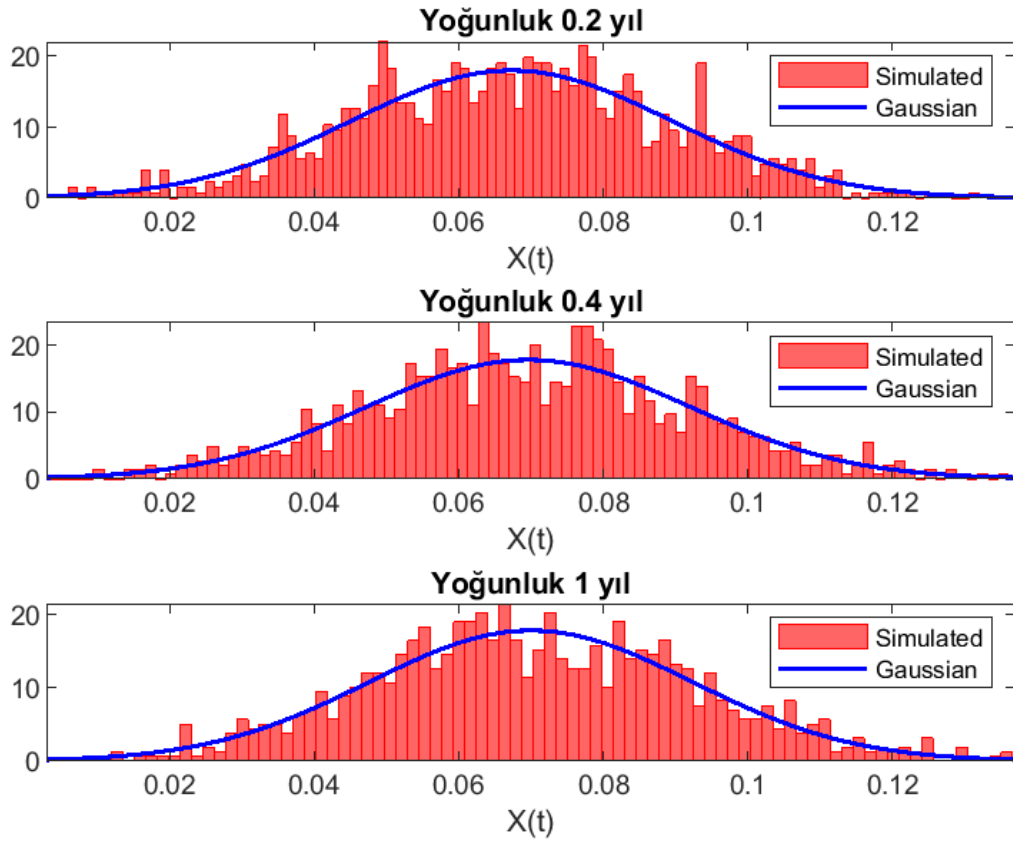
Eşitlik 5.32 ve eşitlik 5.33'ün benzetimi Şekil 5.3'te verilmiştir ki bu şekil simüle edilmiş yolların bir örneğidir. Farklı zaman ufuklarında (dilimlerinde) ortaya çıkan dağılımlar Şekiller 5.4-5.7 ile verilmiştir. Vasicek Modelinin özellikleri Çizelge 5.1'de verilmiştir.



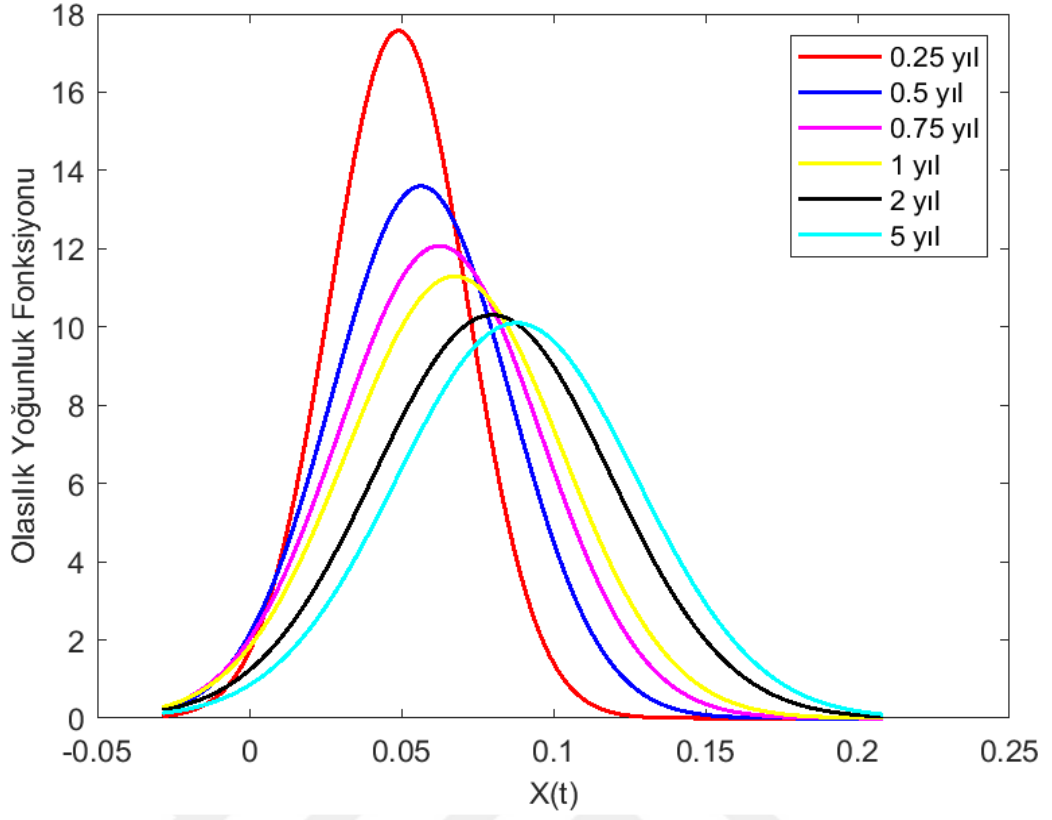
Şekil 5.3. Vasicek modeli $dX = \alpha(\mu - X)dt + \sigma dW(t)$ simüle edilmiş yolları. Parametreler $x_0 = 0,05$, $\alpha = 10$, $\mu = 0,7$ $\sigma = 0,1$, $nstep = 250$, zaman=1 yıl.



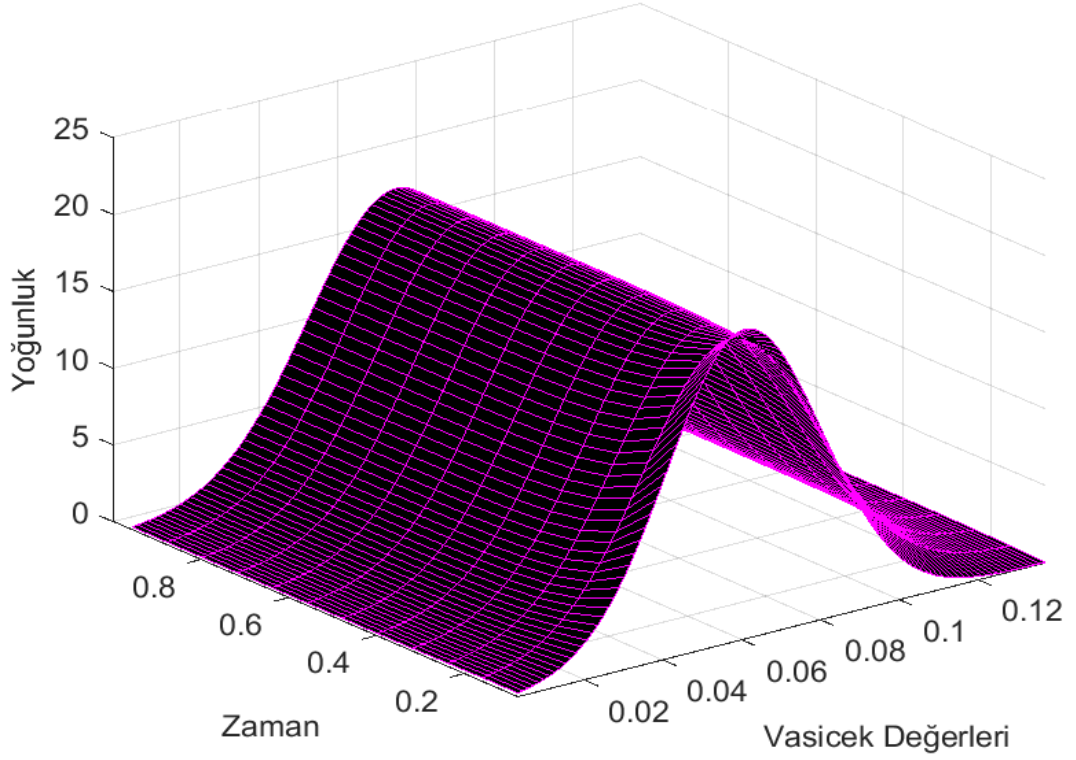
Şekil 5.4. Monte Carlo ile teorik beklenen değer ve varyansın karşılaştırılması



Şekil 5.5. Farklı zaman dilimlerinde Vasicek modelinin benzetilmiş dağılımı



Şekil 5.6. Farklı zaman dilimlerinde Vasicek modelinin yoğunluğu



Şekil 5.7. Vasicek modelinin yoğunluğunun evrimi

Çizelge 5.1. Vasicek Modelin Özellikleri

Ortalamaya Dönme Süreci-Vasicek Modeli- $MR(\alpha, \mu, \sigma)$
Stokastik diferansiyel denklem:
$dX(t) = \alpha(\mu - X(t))dt + \sigma dW(t), \quad X(0) = x_0$
Çözüm:
$X(t) = e^{-\alpha t}X(0) + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW(s)$
$X(t)$ sürecinin dağılımı:
$X(t) \sim N\left(\mathbb{E}_0(X(t)), \mathbb{V}ar_0(X(t))\right)$
$X(t)$ sürecinin ortalaması:
$\mathbb{E}_0(X(t)) = e^{-\alpha t}X(0) + \mu(1 - e^{-\alpha t})$
$X(t)$ sürecinin varyansı:
$\mathbb{V}ar_0(X(t)) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})$
$X(t)$ sürecinin $t \rightarrow \infty$ için durağan dağılımı:
$X(t) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right), \text{ eğer } \alpha > 0$

Bu bölümün tez çalışması açısından önemi aşağıda sıralanmıştır:

- Tez çalışmasında önerilen modelin stokastik kısmını oluşturan ortalamaya dönme Vasicek- Normal Model tanıtılmıştır.
- Bu kapsamda ortalamaya dönme süreçleri ilk önce Langevin daha sonra Ornstein-Uhlenbeck süreci ve nihayetinde Vasicek modeli şeklinde gelişim göstermiştir.
- Ornstein-Uhlenbeck süreci uzun dönem ortalamayı sıfır kabul ederek sıfır değer etrafında değerler üretmektedir.
- Vasicek modeli en gelişmiş ortalamaya döndüren modellerden biridir.
- Çalışmamızda veriler durağan hale getirildikten sonra Vasicek modelin özelliğini göstermektedir. Bu amaçla bu model ile ilgili momentler çıkarılmış ve benzetim çalışmaları verilmiştir. Ayrıca bu model için izlediği özel durum olan $AR(1)$ süreci için parametrelerin nasıl bulunacağı tartışılmıştır.
- Eğer $AR(1)$ süreci tercih edilmezse parametre tahminleri yukarıda elde edilmiş momentler üzerinden yola çıkılarak kestirilir.
- Vasicek modelin normal dağılıma dayalı bir stokastik süreç olduğu ve aşırılıklara izin vermediği belirli değer etrafında veri ürettiği belirtilmiştir. Yani finansal zaman serilerinde meydana gelen sıçramaları genel olarak yakalayamaz ve modelleyemez.
- Bu durumu aşmak için bir sonraki bölümde sıçrama türleri tartışılmıştır.

6. SIÇRAMALAR İLE STOKASTİK SÜREÇLER

Daha önceki bölümlerde açıklanan ortamaya dönme süreci olsun difüzyon süreci olsun bu özellikler çalışmada kurulmuş olan model(ler)in birer parçası olacaktır. Bu bölümde anlatılacak sıçrama süreci de kurulacak modelin bir parçasıdır. Daha önceki bölümlerde varlık fiyatlarının farklı nedenlerden dolayı her zaman sürekli bir yapıya sahip olmadıkları, sıçramalara (bir anda eğride oluşan kopukluk) sahip oldukları ifade edilmişti. Bu sıçramalar nasıl modellenecek, ne sıklıkta ortaya çıkmaktadır ve şiddeti ne kadar olacaktır gibi sorular ortaya çıkmaktadır. Bu bölümde, önerilecek model(ler)de yer alacak olan sıçrama parçası üzerinde durulacaktır. Farklı sıçrama modellerini birbirinden ayıran temel özellik; artımlar hangi dağılım olacak ve bunların büyüklüğü hangi dağılıma göre belirlenecektir? Bu soruya cevap bulunduğunda model(ler)de yer alacak olan sıçrama kısmında modellenmiş olacaktır.

Fiyatların genel bildik alışık olunan, öngörü dışında fazla olmayan belirli bir ortalama etrafında artması ya da azalması beklenir. Ama bazen siyasi, çevresel, deprem, doğa olayları, küresel salgın hastalıklar, savaş, terör, medya, arz-talep dengesi vb. gibi birçok olaydan dolayı fiyatlar ani yükseliş/düşüş gösterir hatta bu yükseliş/düşüş belirli bir zaman devam edebilir. Ancak mevcut olayın etkisi azalınca ve önemini yitirince fiyatların yine kısmen düşüşe/yükselişe geçtiğini ileriki zamanlarda aslında öngürülebilecek eski fiyatın civarında seyrettiği görülür. Böylece insanların beklentisi etrafında fiyatlar dolanmaya başlar ve fiyatların bu durumu **ortalamaya dönme süreci** olarak adlandırılmıştır. Bu durum, bu özelliği içerisinde barındıracak sisteme yani modele yansıtılmalıdır. Finansal zaman serisinin özelliği gereği etkilenen olaylar çerçevesinde meydana gelen eğriyi modelleyecek farklı teknikler düşünülmesi gerekmektedir.

Difüzyon süreci hatırlanacak olunursa; ortalama civarında fazla aşırılıklar içermeyen bir Brownian hareket süreci izlediği ve bu yolun verilerden elde edilmiş bir standart sapma değeri ile çarpılması ve yolun patikasının biraz daha standart hale getirilmesi olayıdır. Yani, ortalama sürece gürültü ya da dalgalanma eklenmesidir. Yukarıdaki tüm açıklamalar dikkate alındığında bu süreç difüzyon

bileşenine birde sıçrama bileşeni eklenerek örnek bir gösterim eşitlik 6.1'de modellenmiştir.

$$X_{t+1} - X_t = \alpha(\mu - X_t)\Delta t + X_t\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t} + InJ\Delta q_t \quad (6.1)$$

Burada;

$dX = X_{t+1} - X_t$	: Spot fiyat değişimi,
$\alpha(X^* - X_t)\Delta t$	: Ortalamaya dönme terimi,
$X_t\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}$	: Difüzyon terimi,
$InJ\Delta q_t$	: Sıçrama terimi,
J	: Rastsal sıçrama büyüklüğü,
μ	: Dönülen ortalama seviye veya uzun vadeli denge fiyatı,
X_t	: Spot fiyat,
α	: Ortalama seviyeye dönme hızı,
σ	: Dalgalanma,
Δq	: Bernoulli, Poisson ya da Gamma süreci,
λ	: Sıçrama sürecinin yoğunluğu veya sıklığı,
Δt	: Çok kısa zaman aralığı.

Eşitlik 6.1, Vasicek ortalamaya dönme modelinin ayrıştırılmış şeklidir. Bu model normal dağılım özelliği gösterdiğinden dolayı, belirli özellikte veri üretmekte ancak sıçramaları yakalayamamaktadır. Dikkat edilirse bu problemin aşılması için $InJ\Delta q_t$ ifadesi eklenmiştir. Burada, Δq ifadesi Bernoulli, Poisson ya da Gamma sürecini ifade etmektedir. Yani çok kısa zaman aralığında sıçrama olacak mı olmayacak mı anlamına gelmektedir. Benzer şekilde InJ ifadesi sıçrama büyüklüğünü göstermektedir. Yani Δq ifadesi sıçrama olup olmayacağına karar verirken, InJ ifadesi bu sıçramanın büyüklüğü ile ilgilenmektedir.

Eşitlik 6.2 ile gösterilen Δq ifadesi kısaca sıçrama gerçekleşecek ise 1, sıçrama olmayacak ise sıfır değerini her artım (adım) için atayan bir operatör ya da bir fonksiyon olarak tanımlanabilir.

$$\Delta q_t = \begin{cases} 1, & \lambda \Delta t \\ 0, & 1 - \lambda \Delta t \end{cases} \quad (6.2)$$

Bu operatör ile J değeri çarpıldığında ise sıçramanın büyüklüğü artan ya da azalan yönde olmaktadır. Sıçrama büyüklüğünün (J) Normal olduğu kabul edilir. Sıçrama büyüklüğü J için farklı varsayımlar kabul edilmektedir, burada J lognormal dağılıma uygun olduğu varsayılmıştır. Yani $\ln J \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ dir. Yani sıçramaların büyüklüğü μ_j ortalama ve σ_j^2 varyans ile Normal dağılama uymaktadır.

Sıçrama bileşeninde yer alabilecek muhtemel sıçrama süreçleri ile ilgili bilgiler aşağıdaki gibi verilmiştir.

- Brownian hareketi, zaman ve uzay bakımından sürekli olan bir stokastik süreçtir. Bunun bir sonucu olarak, örneğin piyasa çöküşleri gibi uç hareketleri yakalayamaz.
- Brownian hareketi aslında Normaldir, yani sıfır çokbasıklık ile simetrik bir dağılıma sahiptir.
- Çarpıklık ve çokbasıklık sıçramaların ortaya çıkması durumunda (yani uzaydaki süreksizlik-kopukluk) meydana gelmektedir.
- Bu tür süreçlerin olası örnekleri
 - Jump Difüzyon (JD)süreçleri, örneğin Merton JD ya da Kou JD
 - Bağlı (Subordinated) Brownian hareket, yani VG süreci gibi.

6.1. Poisson Süreci

Poisson süreci anlık varış hızı (oranı) ($\lambda > 0$) ile Poisson dağılmış olan bağımsız ve durağan artışlar ile N doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı pozitif artan stokastik bir $N(t)$ sürecidir. Başka bir deyişle, $0 < s < t$ için aşağıdaki durumlar

mevcuttur. Kısaca Poisson süreci belirli bir zaman aralığında gerçekleşen olayları saymaktadır ve bu olayları sayma süreci $N(t)$ ile verilmektedir (Shreve, 2004).

- $N(0) = 0$
- $N(t) - N(s)$, s zamanına kadar üretilen $F(s)$ bilgi setinden bağımsızdır.
- $N(t) - N(s) \sim N(t - s) \sim Poi(\lambda(t - s))$

İkinci özellik, $0 < s < t$ zaman aralığında kaç tane olay olmaktadır ifadesi ile eşdeğerdir. $N(t)$ sayma sürecinin karakteristik fonksiyonu eşitlik 6.3 ile verilmektedir. Burada $i = \sqrt{-1}$ karmaşık sayıların sanal birimidir. Ek olarak aşağıda Poisson sürecinin beklenen değeri eşitlik 6.4 ve varyansı eşitlik 6.5'te verilmiştir.

$$\phi_N(u; t) = e^{\lambda t(e^{iu} - 1)} \quad (6.3)$$

$$\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t \quad (6.4)$$

$$\text{Var}(N(t)) = \lambda t \quad (6.5)$$

6.2. Bileşik Poisson Süreci

Sıçramaların boyutunun (büyüklüğü) modellenmesinde bazı ekstra esneklikler elde etmek ve bu büyüklüklere spesifik bir dağılım atayarak daha esnek bir süreç oluşturmak için Poisson süreci kullanılabilir. Bir Bileşik Poisson Süreci (Compound Poisson Process) bir stokastik $Y(t)$ sürecidir ve eşitlik 6.6 ile gösterilmiştir.

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \quad (6.6)$$

$\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bağımsız ve özdeş dağılmış rassal değişkenlerin bir dizisidir. Bu rassal değişkenlerin bağımsız Poisson süreci $N(t)$ olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca

Bileşik Poisson süreci, eşitlik 6.7’de verilen karakteristik fonksiyona sahiptir. Burada; $\phi_Z(u)$, rassal Z değişkenin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir. Burada $\phi_Z(u)$ rassal Z değişkenin beklenen değeri, eşitlik 6.8 ve varyansı, eşitlik 6.9’da verilmiştir.

$$\phi_Y(u; t) = e^{\lambda t(\phi_Z(u)-1)} \quad (6.7)$$

$$\mathbb{E}(Y(t)) = \lambda \mathbb{E}(Z)t \quad (6.8)$$

$$\text{Var}(Y(t)) = \lambda \mathbb{E}(Z^2)t \quad (6.9)$$

Bileşik Poisson Süreci aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- t zamanında bir sıçrama meydana gelir.
- Bu sıçrama meydana geldiğinde, Poisson süreci 1 birim artar.
- Aynı zamanda, sıçrama büyüklüğünü ölçmek için verilen bir dağılımdan rassal bir Z çekilir ve önceki zaman noktasından sürecin değerine kadar bu rassal değişken toplanır.
- Bileşik Poisson süreci, Poisson sürecinde olduğu gibi, sonlu aktiviteye sahiptir.

6.3. Gamma Süreci

Bileşik Poisson süreci gibi sıçramaların varış ve büyüklüğünü eş zamanlı yakalayan alternatif süreçler de vardır. Bu alternatif süreçlere örnek Gamma süreci verilebilir. Bir Gamma dağılımını takip eden bağımsız (aralıklar birbirini kesmiyor) ve durağan (tüm aralıklar eşit uzunlukta) artışlarla pozitif ve azalmayan bir stokastik $Y(t)$ sürecine bir Gamma süreci denilmektedir ve aşağıdaki özellikleri taşımaktadır:

- $Y(0) = 0$,
- $Y(t) - Y(s)$, $s < t$ zamanına kadar kurulan bilgidan bağımsızdır,
- $Y(t) - Y(s) \sim Y(t - s) \sim \Gamma(\alpha(t - s), \lambda)$.

Çizelge 6.1. Gamma Sürecinin Özellikleri

Gamma Süreci – $\Gamma(\alpha, \lambda, k)$
Bir Gamma süreci, bağımsız Gamma dağılımlı artışlara sahiptir.
$X(t)$ sürecinin dağılımı
$\frac{\lambda^{\alpha t}}{\Gamma(\alpha t)} x^{\alpha t-1} e^{-\lambda x}$
$\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonunu göstermektedir.
$X(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonu
$\phi_X(u; t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu} \right)^{\alpha t}$
$X(t)$ sürecinin ortalaması
$\mathbb{E}(X(t)) = \frac{\alpha}{\lambda} t$
$X(t)$ sürecinin varyansı
$\mathbb{V}ar(X(t)) = \frac{\alpha}{\lambda^2} t$
$X(t)$ sürecinin otokovaryansı
$c_X(t, s) = \sqrt{\frac{s}{t}}, \quad s < t.$

Gamma sürecinin karakteristik fonksiyonu eşitlik 6.10'daki gibidir. Gamma Sürecinin beklenen değeri, eşitlik 6.11'de ve varyansı, eşitlik 6.12'de verilmiştir.

$$\phi_Y(u; t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu} \right)^{\alpha t} \quad (6.10)$$

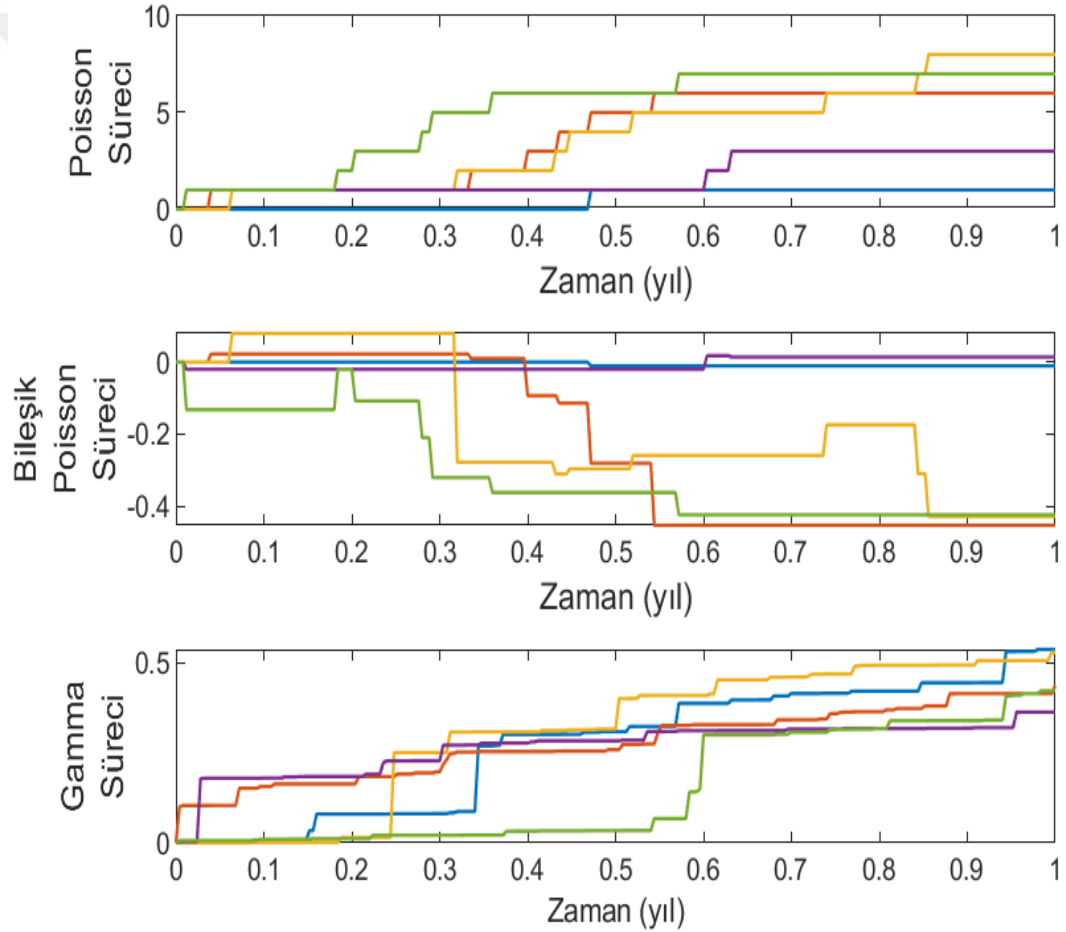
$$\mathbb{E}(Y(t)) = \frac{\alpha}{\lambda} t \quad (6.11)$$

$$\mathbb{V}ar(Y(t)) = \frac{\alpha}{\lambda^2} t \quad (6.12)$$

Gamma Süreci, Bileşik Poisson Sürecinden iki açıdan ayrılmaktadır:

- Gamma süreci sonsuz aktiviteye sahiptir. Çünkü herhangi bir sonlu zaman diliminde çok küçük boyutta sonsuz sayıda sıçrama olabilir.
- Gamma süreci durumunda sıçramaların varış hızlarını dağılımlarından ayırmak mümkün değildir.

Gamma sürecinin temel özellikleri Çizelge 6.1’de verilmiştir. Poisson süreci, Bileşik Poisson süreci ve Gamma sürecinin örnek yörüngeleri Şekil 6.1’de örnek olarak çizilmiştir.



Şekil 6.1. Üst grafik: Poisson Sürecinin benzetilmiş yolları $\lambda = 5$ için $N(t) \sim Poi(\lambda t)$. Orta grafik: Normal sıçrama büyüklükleri ile Bileşik Poisson sürecinin benzetilmiş yolları (parametreler $\lambda = 5$, $\mu_Z = -0.05$, $\sigma_Z = 0.1$). Alt grafik: Gamma Sürecinin $G(t) \sim \Gamma(\alpha t, \lambda)$ benzetilmiş yolları (parametreler $\alpha = 5$, $\lambda = 10$).

6.4. Sıçrama Difüzyon Süreci

Bir sıçrama difüzyon süreci (Jump Diffusion Process) bir Aritmetik Brownian Hareketi ve bağımsız bir Bileşik Poisson Sürecinin toplamı olarak elde edilen bağımsız ve durağan artışlar ile stokastik bir $X(t)$ sürecidir ve eşitlik 6.13'te verilmektedir.

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t) + \sum_{j=1}^{N(t)} Z_k \quad (6.13)$$

Burada;

- $\mu \in R, \sigma > 0$ dır.
- $W(t)$ bir Brownian harekettir.
- $N(t), W(t)$ sürecinden bağımsız ve anlık varış oranı $\lambda > 0$ ile bir Poisson sürecidir.
- $\{Z_k\}_{k \in N}$ ifadesi, Poisson Süreci ve Brownian hareketin her ikisinin bağımsız olduğu bağımsız ve özdeş dağılmış rassal değişkenlerin bir dizisidir.
- Sıçrama büyüklüğü dağılımını belirleyerek sıçrama difüzyon (JD) sürecinin Bileşik Poisson kısmı ayrıca uzmanlaştırılabilir. Finansal uygulamalarda bu dağılım için yaygın seçimler Normal dağılım ve Üstel dağılımdır.

6.5. Merton Sıçrama Difüzyon Süreci

Sıçrama büyüklüklerinin (şiddetlerinin) bir Normal dağılım takip ettiği varsayılın, yani $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ dır. Sıçrama difüzyon süreci $X(t)$ bir Merton Sıçrama Difüzyon (The Merton Jump Diffusion Process) Sürecidir (Craine, 2000). Bu süreç adını ilk defa 1976 yılında finansal uygulamalarda kullanan Robert Merton'dan almaktadır. Bir JD (sıçrama difüzyon) süreci kullanarak modelleme dinamiklerinin seçimi, hisse senedi fiyatlarının çoğu zaman sürekli küçük hareketlere sahip olduğu görüldüğünden dolayı (örneğin, talep ve arz arasındaki

geçici dengesizlik nedeniyle) finansal uygulamalarda oldukça yaygındır. Bazen marjinal bir etkiden daha fazla önemli bir bilgi geldiğinde hisse senedi fiyatlarında büyük sıçramalar meydana gelmektedir. Doğası gereği, önemli bilgi zaman içerisinde sınırlı sayıda noktaya ulaşır, bu nedenle sıçramalar sonlu aktiviteye sahiptir.

Merton Sıçrama Difüzyon (JD) sürecinin özellikleri aşağıda verilmiştir:

Merton (1976) modelinde yoğunluk fonksiyonu iki şekilde elde edilebilir. Farklı ortalama ve varyanslar ile sonsuz sayıda Normal yoğunluklarının ağırlıklı ortalaması olduğu için; ağırlıklar Poisson dağılımına göre hesaplanır (Craine vd., 2000). Eşitlik 6.14'de yer alan $n(x, m, s)$ ortalaması m ve standart sapması s olan Normal olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$$f_X(x) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j n\left(x, \mu_j, \sqrt{\sigma_j^2}\right) \quad (6.14)$$

$$w_j = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!}, \quad \mu_j = \mu + j\mu_z, \quad \sigma_j^2 = \sigma^2 + j\sigma_z^2$$

Hesaplama açısından bakınca, yukarıdaki ağırlıkların toplamı 1'e yakın olacak şekilde N_{max} değerinde kesilir ve bu değer eşitlik 6.15'te verilmiştir.

$$\sum_{j=0}^{N_{max}} w_j > 1 - 10^{-8} \quad (6.15)$$

Bir diğer mümkün durum ise ağırlıklar çok küçük ($w_{N_{max}} < 10^{-8}$) olduğu zaman kesilir. Sayısal olarak karakteristik fonksiyonu eşitlik 6.16 ile ters çevrilirse, $X(t)$ sürecinin momentleri kapalı formda eşitlik 6.17 ve eşitlik 6.18 gibi elde edilir. Benzer şekilde çarpıklık ve çokbasıklık (excess kurtosis) indeksleri sırasıyla eşitlik 6.19 ve eşitlik 6.20 ile verilmiştir.

$$\mathbb{E}(e^{iuX(t)}) = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right)t + \lambda(\exp(iu\mu_Z - 0.5u^2\sigma_Z^2) - 1)t\right) \quad (6.16)$$

$$\mathbb{E}(X(t)) = (\mu + \lambda\mu_Z)t \quad (6.17)$$

$$\text{Var}(X(t)) = (\sigma^2 + \lambda(\mu_Z^2 + \sigma_Z^2))t \quad (6.18)$$

$$\text{Skew}(t) = \frac{\lambda\mu_Z(\mu_Z^2 + 3\sigma_Z^2)}{(\sigma^2 + \lambda(\mu_Z^2 + \sigma_Z^2))^{3/2} \sqrt{t}} \quad (6.19)$$

$$\mathbb{E}\text{Kurt}(t) = \frac{\lambda(\mu_Z^4 + 6\mu_Z^2\sigma_Z^2 + 3\sigma_Z^4)}{(\sigma^2 + \lambda(\mu_Z^2 + \sigma_Z^2))^2 t} \quad (6.20)$$

Merton Sıçrama Difüzyon Süreci parametrelerinin yorumlanması aşağıda verilmiştir:

- μ , Sürecin difüzyon bileşeninin sürüklenme parametresi,
- σ , Brownian hareketin oynaklığı,
- λ , Sıçramaların varış oranı, aşırı basıklık seviyesini kontrol eder,
- μ_Z , Sıçrama büyüklüklerinin (şiddetinin) ortalaması ve çarpıklık indeksinin işaretini kontrol eder. Bu nedenle Merton sıçrama difüzyonu $\mu_Z < 0$ ise sola çarpık ve $\mu_Z > 0$ ise sağa çarpık bir dağılıma sahiptir,
- σ_Z , Sıçrama büyüklüğünün oynaklığı, bu dalgalanma arttıkça sürecin çokbasıklılığı da artar.

Merton sıçrama difüzyon (JD) sürecinin benzetimi aşağıda verilmiştir:

Merton Sıçrama Difüzyon sürecinin yörüngeleri için benzetim prosedürü aşağıdaki gözlemlere dayanmaktadır. Poisson sürecinin artışları bağımsızdır ve $\lambda(t_{j+1} - t_j)$ oranı ile Poisson dağılımını takip eder. t_j ve t_{j+1} noktaları arasında meydana gelen sıçrama sayısına bağlı olarak, sıçrama büyüklüklerinin (şiddetinin) toplamı verilen ortalama ve varyans ile Normal'dir. Dolayısıyla benzetim algoritması aşağıdaki gibi dört adım ile düzenlenebilir (Craine, 2000).

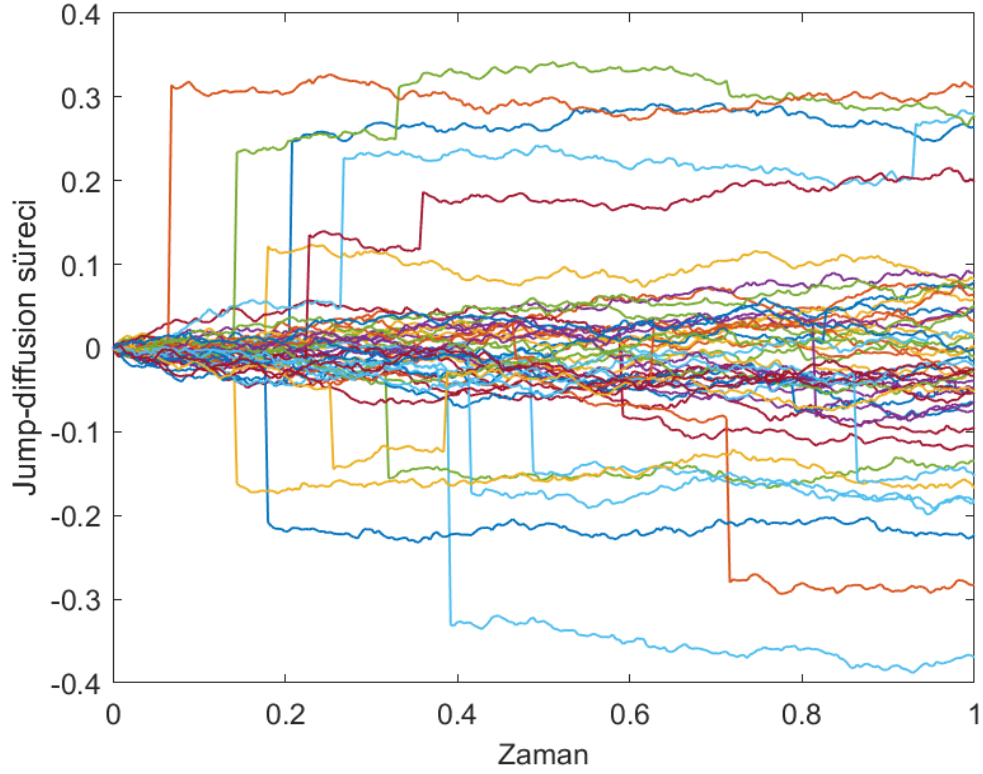
Adım 1: Sıçrama difüzyon sürecinin sürekli kısmını, yani Aritmetik Brownian Hareket süreci ile verilen zaman parçalanışı ile simüle et.

Adım 2: t_j ve t_{j+1} arasında ortaya çıkan sıçrama sayısını simüle et, yani $N \sim Poi(\lambda(t_j, t_{j+1}))$.

Adım 3: $\varepsilon \sim N(0,1)$ üret ve $j = \mu_Z N + \sigma_Z \sqrt{N} \varepsilon$ oluştur.

Adım 4: ABH ve J değerlerini topla.

Merton Sıçrama Difüzyon sürecinin simüle edilmiş yolları Şekil 6.2’de gösterilmiştir.



Şekil 6.2. Merton sıçrama difüzyon sürecinin benzetilmiş yolları. Parametreler $\mu = -0.0002$, $\sigma = 0.0325$, $\lambda = 0.5175$, $\mu_Z = 0.0064$, $\sigma_Z = 0.1520$

Merton Sıçrama Difüzyon (Jump-Diffusion) Modelinin Özellikleri Çizelge 6.2’de özetlenmiştir (Ballotta ve Gianluca, 2018).

Çizelge 6.2. Merton Sıçrama Difüzyon (Jump-Diffusion) Modelinin Özellikleri (Ballotta ve Gianluca, 2018)

Merton Sıçrama Difüzyon Süreci ($\mu, \sigma, \lambda, \mu_z, \sigma_z$)
Sıçrama Difüzyon Süreci (The Jump-diffusion process)
$X(t) = \mu t + \sigma W(t) + \sum_{j=1}^{N(t)} Z_k, \quad Z_k \sim N(\mu_z, \sigma_z)$ $N(t)$, λ yoğunluğu ile Poisson sürecidir.
$X(t)$ Sürecinin dağılımı
$f_X(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x - (\mu + j\mu_z)t)^2}{(\sigma^2 + j\sigma_z^2)t} \right)}$ yani $\mu + j\mu_z$ ortalama ve $\sigma^2 + j\sigma_z^2$ varyans ile Normal pdf in ağırlıklı ortalaması. Bu ağırlıklar t zamanına kadar j sıçramaya sahip Poisson olasılığı ile verilir.
$X(t)$ Sürecinin karakteristik fonksiyonu
$\psi(u, t) = \mathbb{E}(e^{-iuX(t)}) = \exp \left(iu\mu t - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 t + \lambda \left(e^{iu\mu_z - u^2 \sigma_z^2 / 2} - 1 \right) t \right)$
$X(t)$ Sürecinin ortalaması
$(\mu + \lambda\mu_z)t$
$X(t)$ Sürecinin varyansı
$(\sigma^2 + \lambda(\mu_z^2 + \sigma_z^2))t$
$X(t)$ Sürecinin çarpıklığı
$\frac{\lambda\mu_z(\mu_z^2 + 3\sigma_z^2)}{(\sigma^2 + \lambda(\mu_z^2 + \sigma_z^2))^{3/2} \sqrt{t}}$
$X(t)$ Sürecinin çokbasıklılığı
$\frac{\lambda(\mu_z^4 + 6\mu_z^2\sigma_z^2 + 3\sigma_z^4)}{(\sigma^2 + \lambda(\mu_z^2 + \sigma_z^2))^2 t}$
$X(t)$ Sürecinin durağan dağılımı ($t \rightarrow \infty$)
mevcut değil
Büyük t değeri için çarpıklık ve çokbasıklık sıfıra(0) doğru gitmektedir.
$X(t)$ Sürecinin otokovaryansı
$c_X(t, s) = \text{Var}(X_1) \min(t, s) = (\sigma^2 + \lambda(\mu_z^2 + \sigma_z^2)) \min(t, s)$

Bu bölümün tez çalışması açısından önemi aşağıda sıralanmıştır:

- Finansal zaman serilerinin en önemli özelliklerinden biri çeşitli nedenlerden dolayı ani sıçramalar göstermesidir. Bu bölümde de bu sıçramaları modelleyecek Bernoulli, Poisson ve Gamma gibi süreçler tanıtılmıştır. Bu süreçlerin ne tür özellikler gösterdiği momentleri ve yoğunluk süreçleri gösterilmiştir.
- Finansal zaman serilerinin getirileri normal dağılıma göre daha kalın kuyruklu ve sivri bir tepeye sahiptir. Oysaki, Vasicek modeli normal dağılıma dayalı bir stokastik süreçtir. Böylece, Merton sıçrama modeli eklenince Vasicek modelinin ürettiği veriler daha kalın kuyruklu ve sivri bir tepeye benzemeye çalışacaktır.
- Sıçramaların büyüklüğü normal dağılıma uyduğu kabul edilirken ortaya çıkma durumu Bernoulli, Poisson ve Gamma olmak üzere üç farklı şekilde modellenmiştir.

7. PERFORMANS DEĞERLENDİRME YÖNTEMLERİ

Gerçek dünya ölçümü altında bir problem modellenirken bu model(ler)in performansını değerlendirmek için çeşitli kriterler mevcuttur. Bazen problemin çeşitliliğine ve karmaşıklığına bağlı olarak bazı performans ölçütleri iyi başarımlar gösterememektedir. Stokastik modellerin performansının değerlendirilmesi için önerilen bazı ölçütler bu bölümde incelenmiştir. Model performans değerlendirmesi için aşağıda önerilen kriterler çeşitli ölçümler yapılarak stokastik modellerin değerlendirilmesi için uygun ölçütler olduğu yapılan çeşitli çalışmalardan anlaşılmaktadır. Model performansının değerlendirilmesi için önerilen ölçütler için detaylı bilgiye Cheng vd. (2017) çalışmasından bakınız.

7.1. Ortalama Mutlak Yüzde Hata

Ortalama Mutlak Yüzde Hata (*MAPE*), zaman serisi veya diğer tahminler için ortak bir doğruluk ve hata ölçüsüdür. *MAPE* kavramı bir tahmin modelinin, tahmin doğruluğunun bir ölçüsüdür ve doğruluğu genellikle yüzde olarak ifade eder. Gerçek ve tahmini hisse senedi fiyatları arasındaki *MAPE* değeri eşitlik 7.1'de verilmiştir (Karadede vd., 2017).

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{A_t - F_t}{A_t} \right| * 100 \quad (7.1)$$

Burada,

A_t : Hisse senedi fiyatının t zamanındaki gerçek değerini ifade etmektedir.

F_t : Hisse senedi fiyatının t zamanındaki tahmini değerini ifade etmektedir.

n : Gözlem sayısını ifade etmektedir.

7.2. Nisbi Hata

Nisbi Hata (*RE*), gerçek değer ile yaklaşık değer farklarının, gerçek değere oranı olarak tanımlanır ve matematiksel olarak eşitlik 7.2 ile gösterilir. Model

performans değerlendirmesi için Nisbi Hata kullanıldığında fonksiyonun gerçek değeri sıfıra eşit olduğunda Nisbi hata tanımsız olacağından dolayı her problem için kullanışlı değildir.

$$RE_t = \left| \frac{A_t - F_t}{A_t} \right| * 100 \% \quad (7.2)$$

Burada,

A_t : Hisse senedi fiyatının t zamanındaki gerçek değerini ifade etmektedir.

F_t : Hisse senedi fiyatının t zamanındaki tahmini değerini ifade etmektedir.

Nisbi Hata, izelge 7.1’de verilen üç gruptan birine ait olan örneklem yüzdelelerini tanımlamak için kullanılır (Corzo ve Solomatine, 2007).

Çizelge 7.1. Nisbi Hataların Sınıflandırılması

Düşük Nisbi Hata	$RE \leq \% 15$
Ortalama Nisbi Hata	$\% 15 < RE \leq \% 35$
Yüksek Nisbi Hata	$RE > \% 35$

7.3. Normalize Edilmiş Kök Ortalama Kare Hata

İstatistiksel modellemede önerilen model(ler)in gerçek veriye uyum kalitesini ölçmenin yaygın bir yolu Kök ortalama kare hata ($RMSE$) ile ölçülür ve eşitlik 7.3 ile verilir. Eğer tahmini değerler gerçek değere çok yakın ise, $RMSE$ küçük bir değer olacaktır. Eğer gerçek ve tahmini değerler bazı gözlemler için en azından önemli ölçüde farklı ise $RMSE$ değeri büyük çıkacaktır. Genel olarak stokastik modellerin performans değerlerini ölçmek için kullanılan yaygın yöntemlerden birisi, Normalize Edilmiş Kök Ortalama Kare Hata ($NRMSE$)’dir ve eşitlik 7.5’de verilmiştir. Bu yöntem ile ilgili daha kapsamlı bilgiye (Corzo ve Solomatine, 2007; Pebesma vd., 2007) alışmalarından ulaşılabilir.

$$RMSE = \sqrt{\frac{SSE}{n}} \quad (7.3)$$

$$SSE = \sum_{t=1}^n (Q_t - \widehat{Q}_t)^2 \quad (7.4)$$

$$NRMSE = \frac{RMSE}{\bar{Q}} \quad (7.5)$$

Burada;

Q_t : Hisse senedi fiyatının t zamanındaki gerçek değerini ifade etmektedir.

$\widehat{Q}_t$: Hisse senedi fiyatının t zamanındaki tahmini değerini ifade etmektedir.

$\bar{Q}$: Hisse senedi fiyatlarının (gözlemlenen veriler) ortalama değeridir.

n : Gözlem sayısını ifade etmektedir.

7.4. Katsayı Etkinliği

Katsayı etkinliği (CE), gözlemlenen verilere bağlı olarak modelin performansını ölçmekte ve aldığı değer 1 ile $-\infty$ arasında değişmektedir. Bir (1) değerine ne kadar yakın ise model veriye o kadar iyi uyum gösterir. CE kriterinin negatif değer alması halinde tahmin performansının kötü olduğu anlaşılır. Daha iyi kavranması açısından doğrusal regresyon modelleri için kullanılan belirlilik katsayısı (r^2) ile stokastik modeller için kullanılan CE aynı şeyi ifade etmektedir. Ama şu bir gerçektir ki CE iyi uyum açısından belirlilik katsayısına göre çok üstün bir ölçüm metodudur (Willmott 1981; Legates ve McCabe 1999; Harmel ve Smith 2007). CE ölçüm metodunun matematiksel formülü eşitlik 7.6'da verilmiştir.

$$CE = 1 - \frac{SSE}{SSE_N} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n (Q_t - \widehat{Q}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (Q_t - \bar{Q})^2} \quad (7.6)$$

$$SSE = \sum_{t=1}^n (Q_t - \widehat{Q}_t)^2 \quad (7.7)$$

$$SSE_N = \sum_{t=1}^n (Q_t - \bar{Q})^2 \quad (7.8)$$

Burada;

Q_t : Hisse senedi fiyatının t zamanındaki gerçek değerini ifade etmektedir.

$\widehat{Q}_t$: Hisse senedi fiyatının t zamanındaki tahmini değerini ifade etmektedir.

$\bar{Q}$: Hisse senedi fiyatlarının ortalama değerini ifade etmektedir.

n : Gözlem sayısını ifade etmektedir.

Katsayı etkinliğinin performansını değerlendirmek için Moriasi vd. (2007) tarafından Çizelge 7.2 ile verilen oranlar tavsiye edilmiştir.

Çizelge 7.2. Katsayı Etkinliği Performansının Sınıflandırılması

$CE \leq 0,50$	Tatmin edici değil (yetersiz)
$0,50 < CE \leq 0,65$	Tatmin edici
$0,65 < CE \leq 0,75$	İyi
$0,75 < CE \leq 1,00$	Çok iyi

7.5. Sinyal İzleme-TS

Sinyal izlemenin (TS) bir formu, tahmini hataların birikimli toplamının (gerçek değerler ve tahmini öngörü arasındaki sapmalar) ortalama mutlak sapmaya oranı olarak verilebilir. Sinyal izlemenin bir formunun formülü eşitlik 7.9'da verilmiştir. Eşitlik 7.9'da yer alan ortalama mutlak sapma (MAD), eşitlik 7.10'da verilmiştir (Alstrom ve Madsen, 1996).

$$TS = \frac{\sum(A_t - F_t)}{MAD} \quad (7.9)$$

$$MAD = \frac{\sum|A_t - F_t|}{n} \quad (7.10)$$

Burada;

A_t : Tahmin edilen miktarın t zamanındaki gerçek değerini ifade etmektedir.

F_t : Tahmin edilen miktarın t zamanındaki tahmini değerini ifade etmektedir.

n : Gözlem sayısını ifade etmektedir.

8. FİNANSAL ZAMAN SERİLERİNİN MODELLENMESİ VE BENZETİMİ

Bu bölümde piyasada modellenmesi en zor ve en çok dalgalanma gösteren zaman serilerinden BIST-100 endeksinin modellenmesi için dört model önerilmiştir.

Birinci model (model-1); $ARIMA(1,1,1)$ olarak belirlenmiştir. Özellikle fiyatları modellemek için kullanılan Vasicek stokastik diferansiyel denklemin $AR(1)$ sürecini izlediği ve hisse senedi fiyatlarının Markov özelliğinden $ARIMA$ modelinin dereceleri bir olarak atanmıştır. Bu modelin parametreleri en çok olabilirlik metodu ile bulunmuştur.

İkinci model (model-2); ilki trend ve ikincisi sıçramalı $AR(1)$ sürecini takip eden stokastik model olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Ancak burada yer alan stokastik kısmın varyansı zaman boyunca sabit kabul edilmiştir. Bu modelin bir diğer özelliği, sıçramaların günlük ortaya çıkma olasılığı λ (lambda) göre gerçekleştiğinden modelin stokastik kısmına eklenmiştir. Modelin parametreleri birinci modele benzer şekilde en çok olabilirlik metodu ile kestirilmiştir.

Üçüncü model (model-3); türünü yapısal olarak ikinci modelden ayıran ek bir özellik eklenmiştir. Bu modelde ikinci modele benzer şekilde hem trend hem de stokastik kısım olmak üzere iki bileşenden oluşmaktadır. Bu modeli ikinci modelden ayıran temel özellik varyans zamana göre değişerek $GARCH(1,1)$ olarak modellenmiş ve performansı incelenmiştir. Bu modelin parametreleri en çok olabilirlik metodu ile bulunmuştur.

Dördüncü model (model-4); yapısal olarak üçüncü model ile aynıdır. Bu model türünde hem trend hem de stokastik kısmın parametreleri Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) algoritması ile bulunmuştur. Bu önerilen model türünde parametreler en çok olabilirlik metodu yerine sezgisel algoritmalar kullanılabilir mi, sorusuna cevap aramak için önerilmiştir. Yani model yapısal olarak verildikten sonra parametrelerin PSO ile bulunabileceği aşağıdaki bölümde detaylıca tartışılmıştır.

Önerilen modeller hakkında verilen kısa bilgilerden yola çıkılarak yapısal olarak en gelişmiş model, önerilen üçüncü (model-3) modeldir. Modellerin parametreleri ya en çok olabilirlik metodu ile ya da PSO ile tahmin edilmiştir. Önerilen tüm modeller için veriler www.investing.com adresinden alınmıştır.

Finansal piyasaların taşıdığı belirsizlik nedeni ile tahminleme konusu birçok araştırmacının ilgisini çekmekte ve çalışma alanı açısından ilgi odağı olmuştur. Çeşitli varlık fiyatlarındaki dalgalanmaların neden yüksek olduğunu açıklayan birkaç unsur mevcuttur. Hisse senedi almayı düşünen pek çok kimse “hisse senedi fiyatları nasıl belirlenir, nasıl oluşur ve neye göre değişir” sorularını merak edip öğrenmek istemektedir. Bu nedenle her bir yatırımcı para kazanabilmek için hangi hisse senedine yatırım yapacak ise hisse senedinin alış ve satış fiyatının neye göre ve nasıl belirlendiğini mutlaka bilmek (öğrenmek) zorundadır, böylece konuyla ilgili bir fikri olsun ve kar elde edebilsin.

Kar elde etmenin ya da para kazanmanın temel prensibi iyi kararlar alıp akabinde uygulama aşamasına geçmektir. Hisse senedi fiyat dinamiğinin modellenebilmesi için hisse senedi fiyat hareketlerinin çeşitli birçok faktöre göre belirlendiğini ve değiştiğini bilmek gerekmektedir. Bu çeşitli faktörlerin hisse senedi fiyatları üzerinde etkisi aynı şiddette olmamaktadır. Dolayısıyla hisse senedi fiyatlarını etkileyen faktörler ve bu faktörlerin şiddetinin farklı olması özelliğini modele yansıtmak gerekir. Yani farklı zamanlarda hisse senetlerinde etki oluşturacak bir bileşenin tanımlanması gerekmektedir. Yukarıdaki modellere $AR(1)$ sürecine belirli bazı dağılımları (Bernoulli, Poisson ve Gamma gibi.) takip eden sıramaların eklenmesi bu amaç ile modellere dahil edilmiştir. Bu çeşitli faktörlerin her birinin oluşturduğu etkilerin tamamı da genel olarak borsaları ve hisse senedi fiyatlarını oluşturmaktadır. Bu faktörler aşağıda anlatılmış ve hisse senedi fiyat hareketlerini etkileyen faktörler hakkında detaylı bilgiye (İnternet 1, 2019) referans kaynağından ulaşılabilir.

Hisse senedi fiyat hareketlerini etkileyen faktörlerden bir tanesi **arz ve talep** olmaktadır. Bu faktöre göre bir hisse senedini almayı çok kişi tercih ederse fiyatı

yüksek olurken, alıcısı az olan hisse senedinin fiyatı düşük olur veya düşme eğilimi gösterir.

Hisse senedi fiyatlarını etkileyen bir diğer faktör ise **ekonomik göstergelerdir**. Bir ülkede ekonomik göstergeler iyi ise pozitif yönde gelişim gösteriyorsa bu durum istikrarlı borsaya işaret eder, güçlü ve yatırım yapılabilir olduğunu gösterir. Ancak bir ülkede faizler çok yüksek olursa, alıcılar borsaya yatırım yapacaklarına faiz getirisi yüksek olan çeşitli fonları almayı tercih ederler. Bu nedenle denilebilir ki faiz oranları yüksek olursa, hisse senedi fiyatları düşme eğilimi gösterir (talep az olduğu için), tam tersi durumda faiz oranları azalırsa hisse senedi fiyatlarında artış olması beklenir.

Hisse senedi fiyat hareketlerini etkileyen bir diğer faktör ise **şirket haberleri, beklentiler ve spekülasyonlar** ile ilgili olmaktadır. Hisse senedine sahip olan bir şirket için ilan ettiği resmi bildiriler ve şirket ile ilgili haberler de hisse senedi fiyatlarını etkilemektedir. Eğer hisse senedine sahip olan bir şirket bir satın alma işlemi gerçekleştirmeye karar verirse, eğer bu satın alma işlemi şirket için iyi olacağı öngörülüyor ise şirketin hisse fiyatları yükselir. Ayrıca, burada güven kavramı da önemlidir. Alıcılar güven duydukları hisse senetlerini almaya çok istekli olurken, güvenmedikleri hisse senetlerini almak istemezler.

Hisse senedi fiyat hareketlerini etkileyen bir diğer faktör **siyasi olaylar** sayılabilir. Bir ülke içerisinde yaşanan siyasi, politik olaylar da borsa üzerinde önemli etkiye sahiptir. Özellikle ülke içerisinde yaşanan gerilimler, ülke yönetimine yapılan askeri darbeler, ülke yönetiminde yaşanan yolsuzluklar, hükümete duyulan güvenin azalması, parlamentodaki derin kutuplaşmalar gibi problemler borsa üzerinde negatif etkiye sahiptir.

Hisse senedi fiyat hareketlerini etkileyen bir diğer faktör ise şirket ile ilgili büyük **skandallar ve güçlü medya** ile ilgili olmaktadır. Şirket ile ilgili; gazeteler, haber siteleri ve çeşitli medya araçları üzerinden yapılan skandal haberler borsa üzerinde önem arz eder. Ayrıca, finansal araçların içinde patlak veren sorunlar,

hileler, hapis cezaları, dolandırıcılıklar, yargılamalar, davalar gibi benzeri skandal olaylar da hisse senedi fiyatları üzerinde etkiye sebep olabilir.

Hisse senedi fiyat hareketlerini etkileyen bir diğer faktör, **küresel olaylar ve gelişmeler** ile ilgili olmaktadır. Uluslararası gelişmeler ve olaylar özellikle gelişmekte olan ülke borsaları üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Döviz kurları, ticaret anlaşmaları ve değişen uluslararası ilişkiler hisse senedi fiyatlarını etkileyebilmektedir. Bunların dışında güçlü ekonomiye sahip olan ülkelerdeki gelişmeler ve olaylar doğrudan hisse senedi piyasaları üzerinde büyük etki yaratabilir.

Hisse senedi fiyat hareketlerini etkileyen bir diğer faktör ise **doğal afetler**dir. Bir ülkede ya da bir coğrafyada yaşanan doğal afetler genelde piyasalar üzerinde olumsuz etki yaratmaktadır. Depremler, seller, kasırgalar gibi büyük afetler, çoğu zaman iyi sonuçları beraberinde getirmemektedir. Örneğin, Türkiye’de 17 Ağustos 1999 tarihinde yaşanan deprem sonrası faizler yüzde 115’leri bulmuş, borsada yüzde 10,3 düşüş meydana gelmiştir.

Hisse senedi fiyat hareketlerini etkileyen bir diğer faktör ise **savaş ve terör olaylarıdır**. Çoğu zaman savaş hali, piyasalarda terör olaylarından daha büyük bir etkiye sahiptir. Yine de terörizm ve terör olayları da borsaları etkilemektedir. Örneğin, Amerika Birleşik Devletleri’nde (ABD) yaşanan 11 Eylül 2001 saldırıları sonrasında ABD borsalarında yaklaşık 1,4 trilyon dolarlık zarar meydana gelmiştir. Bu nedenle denilebilir ki dünyada kaos yaratan durumların ülke borsasını olumlu etkilediği söylenemez.

Bu faktörlerin zamansal olarak değişkenlik göstermesi ve şiddetinin farklı olması, hisse senedi fiyat modelinde farklı sıçrama türleri olarak eklenmiştir. Zamansal olarak değişkenlik göstermesi ise dağılımsal olarak modellenmiştir.

Bu faktörler ilgili modellere **sıçrama bileşeni** adı ile eklenmiştir. Bu modellerin menkul kıymetler borsası endekslerinin, özellikle hisse senedi fiyat hareketlerinin davranış yapısının oluşturulması, bu özelliklerin daha iyi

anlaşılması için geniş kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. **Stokastik finans modellerin** kullanımındaki temel amaç; herhangi bir zaman serisi verisi üzerinde daha net yorum yapabilmek, sistemi görselleştirmek ve bu sistemin tahmin değerlerinin gerçek değerlerden en az sapmayla modelleyen fonksiyonu/modeli/eğriyi bulmaktır. Bu uygun fonksiyonun sistemi kısmen temsil edeceği düşünülmektedir.

Pek çok mühendislik dalında veya başka alanlarda olduğu gibi veri grubuna uygun eğri uydurma problemi yaklaşık üç yüz yıl önce ortaya çıkmasına rağmen (Angeline, 1996), **genel bir uygulamaya** sahip bir yöntem hala bulunamamıştır. Bu, kısmen problem alanlarının çeşitliliğinden dolayı ve kısmen de bu problem alanlarının geniş kapsamının sadece bir kısmını ele alan çeşitli yaklaşımların hesaplama sınırlamalarından/kısıtlamalarından kaynaklanmaktadır (Gulsen ve Smith, 1999).

Bir sürecin/sistemin ne oranda çalıştığını ne yönde performans gösterdiğini görselleştirmek için matematiksel bir model kurabilmek oldukça önem arz etmektedir. Bazen matematiksel modeli, sistemden deney yoluyla elde edilmiş veri grubuna dayanarak oluşturmak gerekebilir. Bu durumda veri grubu ile model/denklem belirli bir hata oranıyla yazılır ve sistem hakkında yorum yapma imkânı bulunur (Gulsen vd., 1995).

Bu çalışma kapsamında; gerçek hayatta deneysel ya da çeşitli yollar kullanılarak elde edilmiş yaklaşık normal dağılıma dayalı herhangi bir veri grubu üzerinde daha net, gözlemlenebilir ve araştırmacıya veriler hakkında hızlı yorum yapmasını sağlayacak bir sistem oluşturmak amaçlanmıştır.

Önerilen modellerin genel yapıları Çizelge 8.1’de verilmiştir. Alt bölümlerde bu modeller ayrıntılı olarak tartışılmıştır.

Çizelge 8.1. Hisse senedi fiyatlarını modellemek için önerilen tahmin modelleri

Hisse Senedi Fiyat Tahmin Modeli: $\log P_t = s(t) + X_t$		(8.18)
$s(t) = B0 + BT \cdot t + C1 \sin\left(\frac{(t + C2)2\pi}{250}\right) + C3 \sin\left(\frac{(t + C4)4\pi}{250}\right)$		(8.19)
model -1: Monte Carlo (MC) ARIMA (1,1,1)	$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$	(8.20)
model- 2: Sabit varyans-σ^2 ve trend bileşeni-$s(t)$ ile sıçramalı AR(1)	$X_t = \begin{cases} \phi X_{t-1} + \sigma \varepsilon_{1t}, & 1 - \lambda \text{ ihtimal} \\ \phi X_{t-1} + \sigma \varepsilon_{1t} + \mu_j + \sigma_j \varepsilon_{2t}, & \lambda \text{ ihtimal} \end{cases}$ $\sigma_t^a = \sigma$ $\lambda_t^a = \lambda$	(8.21)
model- 3: Değişen varyans-GARCH(1,1) ve trend bileşeni -$s(t)$ ile sıçramalı AR(1)	$X_t = \begin{cases} \phi X_{t-1} + \sigma \varepsilon_{1t}, & 1 - \lambda \text{ ihtimal} \\ \phi X_{t-1} + \sigma \varepsilon_{1t} + \mu_j + \sigma_j \varepsilon_{2t}, & \lambda \text{ ihtimal} \end{cases}$ $\sigma_t^a = \sigma = \sqrt{h_t} = \sqrt{\omega + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \cdot h_{t-1}}$ $\lambda_t^a = \lambda$	(8.22)
model- 4: Değişen varyans GARCH(1,1) ve trend bileşeni-$s(t)$ ile sıçramalı AR(1) -Hem trend hem de stokastik kısmın parametreleri PSO ile tahmin edilmiş ve benzetim gerçekleştirilmiştir.	$X_t = \begin{cases} \phi X_{t-1} + \sigma \varepsilon_{1t}, & 1 - \lambda \text{ ihtimal} \\ \phi X_{t-1} + \sigma \varepsilon_{1t} + \mu_j + \sigma_j \varepsilon_{2t}, & \lambda \text{ ihtimal} \end{cases}$ $\sigma_t^a = \sigma = \sqrt{h_t} = \sqrt{\omega + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \cdot h_{t-1}}$ $\lambda_t^a = \lambda$	(8.23)
model-2-3-4 için farklı sıçrama türleri	$j_t^a = j = \text{Bernoulli Süreci}$	(8.24)
	$j_t^b = j = \text{Poisson Süreci}$	
	$j_t^c = j = \text{Gamma Süreci}$	

8.1. Monte Carlo *ARIMA* (1,1,1) Modeli (model-1)

Finansal zaman serilerinin modellenmesi için G. P. E. Box ve G. M. Jenkins tarafından ortaya konulan ve tek değişkenli zaman serilerinin tahmininde kullanılan Birleştirilmiş Otoregresif Hareketli Ortalama (AutoRegresive Integrated Moving Average-*ARIMA*) yöntemi birinci model (model-1) olarak önerilmiştir. Bu yöntem yaygın olarak Box-Jenkins (BJ) yöntemi olarak da bilinmektedir.

Bu öngörü yönteminde; bağımlı değişkenin (x_t) , açıklayıcı değişkenler (regressorlar) tarafından açıklandığı regresyon modellerinin tersine, birleştirilmiş otoregresif hareketli ortalama türü zaman serisi modellerinde bağımlı değişken, geçmiş dönem veya gecikmeli değerleri ve rassal hata terimleri ile açıklanabilir. Bu sebeple, tek değişkenli bir istatistiksel öngörü yöntemidir.

Finansal zaman serilerinin modellenmesi için Birleştirilmiş Otoregresif Hareketli Ortalama-*ARIMA*(1,1,1) modeli önerilmiştir. *ARIMA*(1,1,1) modelinin tanıtılması için birinci dereceden otoregresyon-*AR*(1) ve hareketli ortalama-*MA*(1) süreçlerinin formülasyonları aşağıda verilmiştir. Özellikle birinci dereceden süreçlerin ele alınması finansal zaman serilerinin Markov özelliği takip etmesi olarak yorumlanmalıdır. *ARIMA* modeli tanıtıldıktan sonra veriler durağan hale getirilmiş ve ilgili serinin standart sapması bulunduğundan sonra hatalar elde edilmiştir. Hatalar kullanılarak parametre tahminleri en çok olabilirlik yöntemi ile bulunmuştur. Bu parametreler 10000 Monte Carlo benzetimine tabi tutularak farklı performans ölçütleri ile model test edilmiş ve öngörü işlemi gerçekleştirilmiştir.

Hareketli ortalama öngörü yöntemlerinin aksine, birleştirilmiş otoregresif hareketli ortalama modellerinin kullanılması, çeşitli model seçenekleri arasında uygun olanı seçme ve seçilen modelin kurulmasındaki her aşamada modelin incelenen probleme uygunluğunu denetleme gibi üstünlüklere sahiptir. Bu nedenle, söz konusu öngörü modelleri kullanım alanları yönünden çok farklı nitelikteki verilere uygulanabilme özelliğine sahiptir.

Birleştirilmiş otoregresif hareketli ortalama yöntemi, eşit zaman aralıklarıyla elde edilen gözlem değerlerinden oluşan kesikli ve durağan zaman serileri için ileriye dönük öngörü modellerinin kurulması ve öngöründe bulunulması bakımından sistematik bir yaklaşım getirmektedir. Eşit zaman aralıklarıyla elde edilen gözlemlerden oluşan serinin kesikli ve durağan olması yöntemin en önemli varsayımlarıdır (Özmen, 1986). Eğer veriler eşit zaman aralıklarında elde edilmişse bu eşit zaman aralıklarında gerçekleşen fiyat değişimi bir dağılımı (ya da olasılığa bağlı bir durum, bir dağılımı takip etmek zorunda değil) takip edecektir. Merkezi Limit Teoremine (MLT) göre bu eşit aralıkların dağılımları kümülatif olarak toplanırsa fiyatlar simüle edilmiş olunur. Aslında stokastik sistemlerin temel mantığı bu şekilde yorumlanabilir.

Durağan olmayan zaman serilerinin ileriye yönelik tahmininde Box-Jenkins yönteminin uygulanabilmesi için önce serinin durağan hale getirilmesi gerekmektedir. Durağanlık varsayımı, ilgili sürecin belli bir değer etrafında dengede olmasını yani sürecin özel bir istatistiksel denge izlemesi olarak yorumlanabilir (Box ve Jenkins, 1976). Durağan olmayan yani bir kesimden diğer bir kesime büyük değişiklikler gösteren serilere belirli olasılık kuralları uygulanamaz ve seri belirli bir modelle gösterilemez. Durağan olmayan seriler; analizlerde bazı dönüşüm yöntemleri (örneğin; serinin logaritmasını alma, serilerinin farkını alma gibi) kullanılarak durağan hale dönüştürülmelidir.

Bu çalışmada verilen modeller; zamana bağlı rassal nitelikteki olaylar ve bu olaylarla ilgili zaman serilerinin ise rassal (stokastik) süreç olduğu varsayımına dayanılarak geliştirilmiştir. Hisse senedi fiyatlarını modellemek için otoregresif modellerin kullanılması eşit zaman aralıklarında fiyat değişimlerinin rassal nitelikte olasılık kurallarına bağlı olarak değişim göstermesi varsayımından gelmektedir. Ayrıca, bu modellerde zaman serisi gözlem değerleri (rassal değişkenler) arasında var olan iç bağımlılık en etkili bir şekilde dikkate alınmaktadır. Bu nedenle, söz konusu modellere doğrusal rassal modeller adı verilmektedir. Doğrusal stokastik modeller incelenen rassal süreçlerin (zaman serilerinin) durağan olup olmamasına göre doğrusal durağan stokastik modeller ve durağan olmayan doğrusal rassal modeller olarak iki gruba ayrılır.

Uygulamada, zaman serilerinin modellenmesinde kullanılan doğrusal durağan rassal süreçler sınıfında yer alan önemli öngörü modelleri, otoregresif (AR), hareketli ortalama (MA) ve otoregresif hareketli ortalama ($ARMA$) modelleridir. Eşitlik 8.1’de $AR(1)$ ile gösterilen birinci dereceden otoregresif süreç verilmiştir (Cheng vd., 2017).

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t \quad (8.1)$$

Burada;

X_t : t zamanındaki gözlem değeri ya da hisse senedi fiyatını,

a_t : t zamanındaki hata terimini,

ϕ : Durağanlık (ortalama civarında denge) katsayısını göstermektedir.

Birinci dereceden otoregresif süreç, en basit otoregresif süreçtir ve t zamanındaki gözlem değeri sadece bir önceki gözleme bağlı olduğundan Markov süreci olarak isimlendirilir. Daha yüksek dereceden otoregresif süreçler, geçmiş iki veya daha fazla gözleme bağlı olduğundan Markov süreci değildir. Oturegresif ifadesinin kullanılması eşitlik 8.1 esas olarak, X_t sürecinin bir bağımsız değişkenler kümesi yerine kendi geçmiş değerleri ile ilgili olan bir regresyon denklemi olduğu varsayımından gelmektedir (Nelson, 1973). Böylece, p dereceden bir otoregresif süreç [$AR(p)$] genel olarak eşitlik 8.2 ile verilir.

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = a_t \quad (8.2)$$

Burada;

a_t : t zamanındaki hata terimidir.

θ : hata terimi katsayısı

Eşitlik 8.3’te verilen sürece, birinci dereceden hareketli ortalama süreci denir ve $MA(1)$ olarak gösterilir.

$$X_t = a_t - \theta a_{t-1} \quad (8.3)$$

Zaman serilerinin modellenmesinde esneklik sağlamak ve en az sayıda parametre ilkesini gerçekleştirmek amacıyla modele hem otoregresif hem de hareketli ortalama parametrelerinin alınması düşüncesi her iki modelin kombinasyonu olan karışık otoregresif hareketli ortalama sürecini ortaya çıkarmıştır. $AR(1)$ ve $MA(1)$ modellerinin bir kombinasyonu olan birinci dereceden otoregresif hareketli ortalama süreci eşitlik 8.4'te verilen $ARMA(1,1)$ şeklinde gösterilir.

$$X_t - \phi X_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1}$$

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} \quad (8.4)$$

Genel $ARMA(p, q)$ süreçleri, $AR(p)$ ve $MA(q)$ süreçleri birleştirilerek eşitlik 8.5 olarak yazılabilir.

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (8.5)$$

Pratikte karşılaşılan ekonometrik zaman serilerinin çoğu durağan değildir. Böyle durağan olmayan rassal süreçlerin modellerle gösterilebilmesi seride durağanlığın sağlanmasına bağlıdır. Doğadaki pek çok olay normal dağılım varsayımına göre çalışmaktadır. Eğer zaman serisi durağan değilse normallik varsayımı büyük ölçüde bozulur. Box ve Jenkins tarafından geliştirilen $ARIMA$ yöntemi, serilerin uygun derecede farkını alma gibi işlemlerle durağan ve çevrilebilir bir $ARMA$ modeli biçimine dönüştürülebileceği fikrine dayanır. Böylece seride oluşan durağanlık ile hatalar yaklaşık normal dağılım özelliği gösterir. Durağan seri kullanılarak, uygun modelin parametreleri bulunur ve benzetim gerçekleştirilir. $ARIMA$ modellerinde fark alma işlemi ile trend ortadan kaldırılarak seri durağan hale dönüştürülür. Hisse senedi fiyatlarındaki değişimin bağımsız olduğu görüşünü yansıtan rassal yürüyüş (random walk) hipotezine göre, hisse senedi fiyatları durağan olmayan bir süreçtir, $\{a_t\}$ hata terimi, ortalaması μ , varyansı σ^2 olan ve aralarında korelasyon olmayan bir seri olarak eşitlik 8.6 ile modellenebilir.

$$X_t = X_{t-1} + a_t \quad (8.6)$$

Eşitlik 8.6 serisinin bir rassal yürüyüş olduğu söylenir. Bu modelde, t zamanında X sürecinin değeri, $t - 1$ zamanındaki değeri ile bir hata teriminin toplamına eşittir. Genel $ARIMA(p, d, q)$ modelinin ifadesi eşitlik 8.7 olarak verilmiştir.

$$\begin{aligned} w_t = & \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \dots + \phi_p w_{t-p} \\ & + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Bu eşitlik, eşitlik 8.5'deki $ARMA$ eşitliğinde X_t sürecinin yerine X_t 'lerin farkı olan w_t alınarak elde edilmiştir. Eğer birinci farklar ($d = 1$) seride durağanlığı sağlıyorsa, eşitlik 8.8 elde edilir.

$$w_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t = \Delta X_t \quad (8.8)$$

Burada; Δ birinci fark işlemcisidir. w_t , yerine $X_t - X_{t-1}$ yazılırsa, X_t gözlem serisi doğrudan eşitlik 8.9 olacaktır.

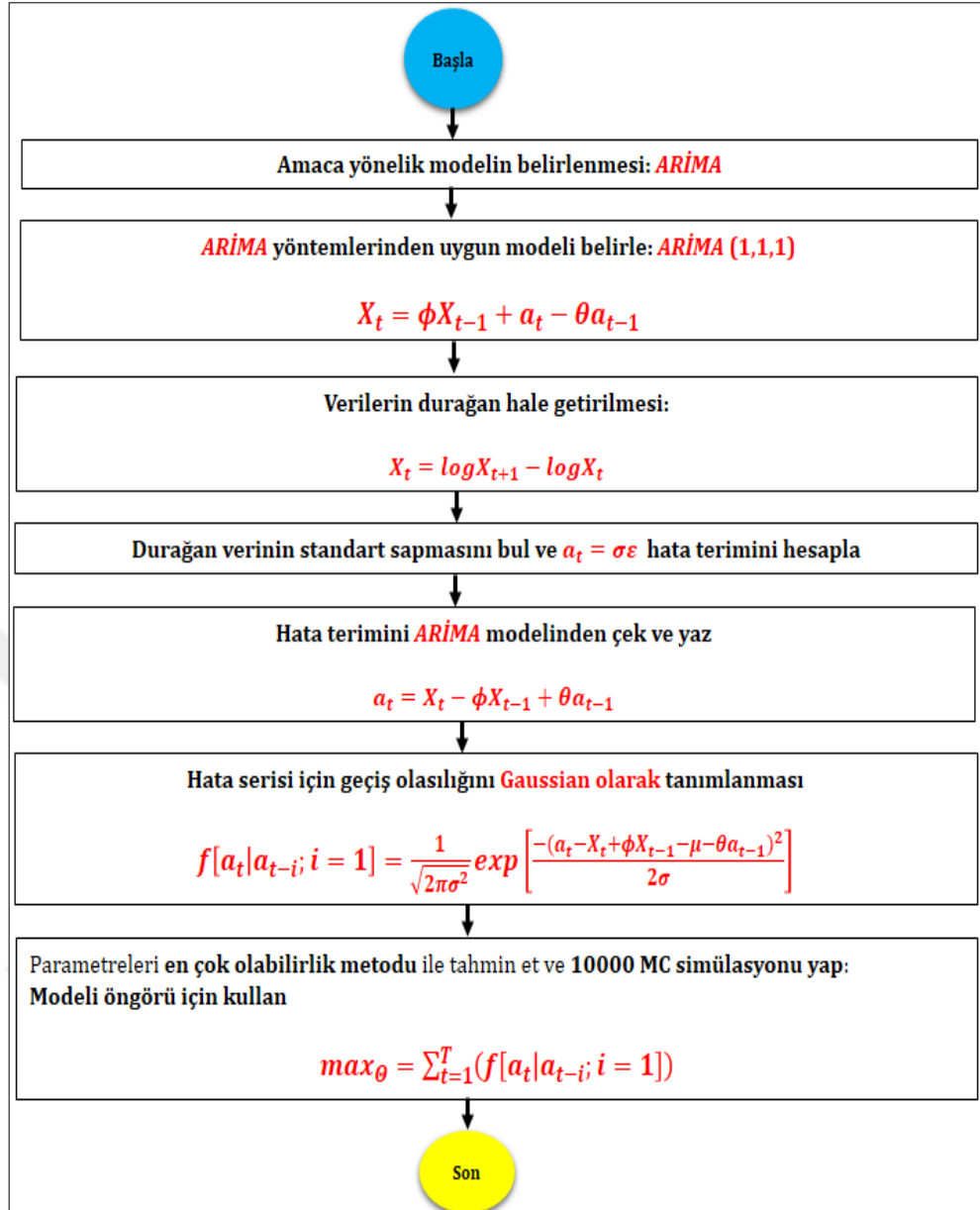
$$\begin{aligned} X_t = & X_{t-1} + \phi_1(X_{t-1} - X_{t-2}) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - X_{t-p-1}) \\ & + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Burada, X_t sürecinin bütün geçmiş değişimlerin toplamı olduğu görülmektedir. Bu durum, eşitlik 8.10'da verilmiştir.

$$X_t = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + \dots \quad (8.10)$$

Eşitlik 8.10'da X_t , w_t dizisi ile eşitlik 8.7 sürecinin birleştirilmiş halidir ve birleştirilmiş otoregresif hareketli ortalama süreci (*Autoregressive Integrated Moving Average-ARIMA*) olarak isimlendirilir. Bu çalışmada finansal zaman serilerinin Markov özelliği takip etmesi açısından $AR(1)$ ve $MA(1)$ kombinasyonundan oluşan $ARIMA(1,1,1)$ kullanılmıştır. $ARIMA(1,1,1)$ stokastik modeli (model-1), eşitlik 8.11 ve Şekil 8.1 akış diyagramında verilmiştir.

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} \quad (8.11)$$



Şekil 8.1. Monte Carlo $ARIMA(1,1,1)$ modelinin akış diyagramı (model-1)

Eşitlik 8.11 ile verilen ve Şekil 8.1 akış diyagramına göre $ARIMA(1,1,1)$ modelinin işleyebilmesi için serinin durağan hale getirilmesi gerekmektedir. İlk önce fiyatların logaritmaları alınarak verilerin durağan hale getirilmesi gerekmektedir. Ancak tam durağanlık sağlanmadığı için logaritmik fiyat farklarının ($d = 1$) alınmasına ihtiyaç vardır. X_t hisse senedi fiyatı durağanlığının sağlanması eşitlik 8.12 ile tanımlanmıştır.

$$X_t = \log X_{t+1} - \log X_t \quad (8.12)$$

Daha sonra X_t logaritmik getiri serisinin varyansı ve ilgili zaman serisinin dalgalanmasını ifade eden standart sapması- σ hesaplanmalıdır. Eşitlik 8.11'de yer alan a_t hata terimi, $\sigma\varepsilon$ çarpımına eşit olmaktadır. Burada ε standart normal dağılımından çekilmiş rassal örnektir. Eşitlik 8.11 hata terimi açısından tekrar düzenlenip eşitlik 8.13 olarak yazılabilir.

$$a_t = X_t - \phi X_{t-1} + \theta a_{t-1} \quad (8.13)$$

Bir zaman serisi için model belirlendikten sonra, gerçek öngörünün yapılabilmesi için önce en iyi ve en etkin parametre tahminlerinin elde edilmesi gereklidir. Gözlemlerin normal dağıldıkları varsayımı altında en çok olabilirlik (Maximum Likelihood) fonksiyonunu en büyükleyen tahminler etkin tahminlerdir. Başlangıç koşulları hakkında uygun varsayımlar yapılarak, bu tahmin ediciler hata kareleri toplamını en küçükleyecek şekilde elde edilebilir. Başlangıç değerleri belirleme aşamasında hesaplanan geçici parametre değerleridir. Bu işlemler *ARIMA* için iterasyon yöntemiyle yapılır.

En büyük olabilirlik tahminlerinin kullanılmasının önemli bir pratik sebebi, p, d ve q terimlerinin belirli değerleri ve veriler ne olursa olsun herhangi bir karışık otoregresif hareketli ortalama modeli için bu tahminleri ortaya koyan bir hesaplama yöntemi olmasıdır. *ARIMA* modeli için parametreler a_t gözlemlerin durağan farklarının serisi kullanılarak $\theta = \{\phi, \theta, \mu, \sigma^2\}$ cinsinden ifade edilir. Gözlemlenen herhangi bir örneklemin birleşik olasılığını tanımlayan fonksiyona değişkenin olabilirlik fonksiyonu denir. Bir hata teriminin dağılım fonksiyonu eşitlik 8.15 ile verilir. Model parametreleri en çok olabilirlik metodu (Maximum Likelihood-ML) eşitlik 8.14 ile tahmin edilir.

$$\max_{\theta} = \sum_{t=1}^T (f[a_t | a_{t-i}; i = 1]) \quad (8.14)$$

Hisse senedi fiyat hareketleri için hata serilerinin geçiş olasılıkları eşitlik 8.15'te verilen Normal dağılım sürecini takip etmektedir.

$$f[a_t|a_{t-i}; i = 1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[\frac{-(a_t - X_t + \phi X_{t-1} - \mu - \theta a_{t-1})^2}{2\sigma} \right] \quad (8.15)$$

Daha sonra, eşitlik 8.15 olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak Windows MATLAB® R2018a (MathWorks, Massachusetts, USA) yazılımı ortamında İstatistik ve Makine Öğrenme Araçtutusunda (Statistics and Machine Learning Toolbox™) *mle* fonksiyonu kullanılarak parametreler bulunmuştur. *mle* fonksiyonu birçok karmaşık durumdan kurtulmak için önemli bir fonksiyondur. Her bir parametre için bir başlangıç çözümü belirlenmeli ve bu parametreler için alt ve üst değerler tanımlanmalıdır.

En çok olabilirlik metodu ile $ARIMA(1,1,1)$ modelinin $\theta = \{\phi, \theta, \mu, \sigma^2\}$ parametreleri hesaplanmıştır. Önerilen model-1 için parametre tahminleri $\phi(\phi) = 0,0103$, $\theta(\theta) = 0,0631$, $\mu(\mu) = -2,2674e - 04$ ve $\sigma(\sigma) = 0,0234$ olarak elde edilmiştir. Bu parametreler kullanılarak 10000 Monte Carlo benzetimi gerçekleştirilmiş en iyi değer 713. benzetim ile bulunmuştur. Önerilen model-1 (2018-2023) yılları arasında Monte Carlo benzetim çalışması gerçekleştirilmiş ve fiyatlar elde edilmiştir. Monte Carlo benzetim çalışması rassal sayı çekirdekleri (0-10) koşturularak elde edilen performans ölçüt değerleri Çizelge 8.3, Çizelge 8.5 ve Çizelge 8.8 ile verilmiştir. En iyi performans ölçüt değerleri model-2, model-3 ve model-4 için Çizelge 9.1'de verilmiştir.

Önerilen Monte Carlo $ARIMA(1,1,1)$ modeli (model-1) için elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

- Önerilen model-1 diğer modellere göre Çizelge 8.3, Çizelge 8.5 ve Çizelge 8.8'deki performans ölçütlerine göre karşılaştırıldığında genel olarak fazla iyi başarımlar gösterememiş bir modeldir.
- Çizelge 8.3 incelendiğinde rassal sayı çekirdekleri koşturulduğunda ikinci çekirdekte en iyi sonuç elde edilmiştir. Önerilen model-1 için *MAPE* değeri 0.0407, *RE* değeri 0,0034, *NRMSE* değeri 0.0508 ve *CE* değeri 0,6918 olarak bulunmuştur. Rassal sayı çekirdeği iki (2) için *CE* değeri Çizelge 7.2'ye bakılarak incelendiğinde iyi bir performans gösterdiği söylenebilir.

- Çizelge 8.3 incelendiğinde rassal sayı çekirdekleri koşturulması sonucunda önerilen model-1 için ortalama *MAPE* değeri 0,0507, ortalama *RE* değeri 0,0841, ortalama *NRMSE* değeri 0,0642 ve ortalama *CE* değeri 0,5033 olarak bulunmuştur. Rassal sayı çekirdeklerinin ortalama katsayı etkinliği-*CE* için Çizelge 7.2 incelendiğinde 0,50 değerini geçtiği için tatmin edici model olarak kullanılabilir.
- Rassal sayı çekirdekleri koşturularak önerilen modellerin performanslarının karşılaştırılması için detaylı bilgiye Çizelge 9.1 ile ulaşılabilir.
- Sonuç olarak diğer modeller arasında en kötü performansı model-1 göstermiştir. Bu modelleme şekli ile model-1 tavsiye edilmez ancak farklı özellikler model-1'e kazandırılarak başarımı artırılabilir.

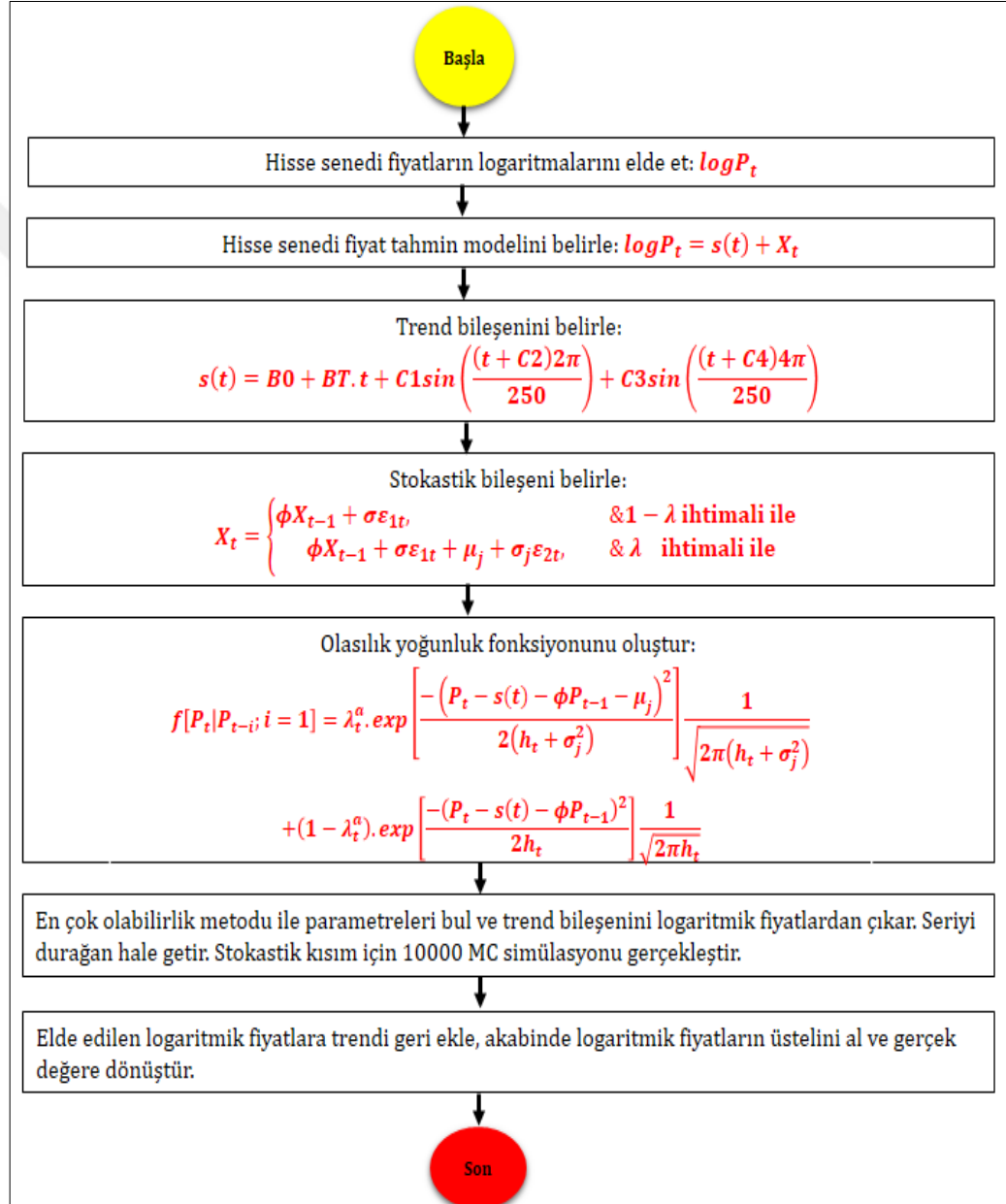
8.2. Sabit Varyanslı Stokastik Model (model-2)

Önerilen bu model türü Çizelge 8.1'de model-2 olarak eşitlik 8.21 ile modellenmiş ve akış diyagramı Şekil 8.2'de verilmiştir. Logaritmik hisse senedi fiyat hareketleri $\log P_t = s(t) + X_t$ (Lucia ve Schwartz, 2002) tarafından takip edilen süreç iki bileşenin toplamı olarak eşitlik 8.18 olarak modellenmiştir. Bileşenlerin birincisi $s(t)$ ile sembolize edilen deterministik bileşen ikincisi ise X_t ile sembolize edilen stokastik bileşendir. Deterministik bileşen $s(t)$, eşitlik 8.19 (Seifert ve Uhrig-Homburg, 2007) ve stokastik bileşen eşitlik 8.21 olarak verilmiştir (Escríbano vd., 2011).

Çizelge 8.1'de önerilen model-2 aşağıdaki altı varsayım üzerine inşa edilmiştir: İlk varsayım, modelin trend bileşeni- $s(t)$ ile ilgili iken geriye kalan beş özellik stokastik bileşen- X_t ile ilgilidir. Özellikle, Şekil 8.4 incelendiğinde logaritmik fiyatların sinüsoidal olarak artan bir trende sahip olduğu görülmektedir. Trend bileşeni eşitlik 8.19 ile bir doğrusal fonksiyon ($B0 + BT.t$) ve trigonometrik fonksiyonların birleşimi şeklinde modellenebilir.

Trend bileşeni ve sabit varyanslı sıçramalı $AR(1)$ süreci olarak ifade edilen model-2 aşağıdaki varsayımlar üzerine inşa edilmiştir:

- Trend Bileşeni,
- Ortalamaya Dönme Özelliği (verilerin belli bir değer etrafında hareketi),
- Hisse Senedi Fiyatlarının Markov Özelliği,
- Sabit Varyans (σ^2),
- Sabit Yoğunluk Süreci (λ) (bir sıçramanın günde ortaya çıkma olasılığı),
- Farklı Sıçrama Türleri (Bernoulli, Poisson ve Gamma Süreçleri).



Şekil 8.2. Sabit varyanslı stokastik modelin akış diyagramı (model-2)

Stokastik kısım (X_t) modellenirken Vasicek modelin $AR(1)$ süreci takip ettiği varsayılmıştır. X_t , s-zamanına kadar elde edilen bilgiye bağlı olarak, ortalaması $X_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu(1 - e^{-\alpha(t-s)})$ ve varyansı $\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(t-s)})$ olan normal dağılmış bir rassal değişkendir. Önce zaman aralığı $t_0, t_1, \dots, t_n$ zaman noktaları ile her bir zaman aralığının uzunluğu eşit ve $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ olacak şekilde kesikli hale getirilir. Vasicek Modeli ya da Ornstein-Uhlenbeck süreci;

$X_t = a + bX_{t-1} + \sigma\varepsilon_t$ şeklinde $AR(1)$ süreci izlediği aşağıda verilmiştir. Vasicek modelinin sürekli versiyonu;

$dX = \alpha(\mu - X)dt + \sigma dW$ şeklinde ifade edildiği daha önce verilmişti. Bu durumda modelin kesikli versiyonu aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \alpha(\mu - X_{t-1})\Delta t + \sigma dW, \quad \text{burada } dW \sim N(0,1) \text{ dir.}$$

Eğer $\Delta t = 1$ (veriler günlük alındığı için) ise;

$X_t - X_{t-1} = \alpha\mu\Delta t - \alpha X_{t-1}\Delta t + \sigma dW$ şeklinde yazılabilir. X_t denklemden çekilirse; $X_t = \alpha\mu\Delta t + (1 - \alpha\Delta t)X_{t-1} + \sigma\Delta W$ elde edilir.

Denklemden yer alan;

$a = \alpha\mu\Delta t$, $\phi = (1 - \alpha\Delta t)$ ve $\Delta W = \varepsilon \sim N(0,1)$ olarak belirlenip tekrar düzenlenirse, X_t stokastik süreci eşitlik 8.16 olarak $AR(1)$ formunu alır.

$$X_t = a + \phi X_{t-1} + \sigma\varepsilon \quad (8.16)$$

Bu çalışmada, X_t stokastik süreci logaritmik fiyatlardan trend bileşeni çıkarılarak seri durağan hale getirilmekte ve böylece zaman serisi sıfır ortalama civarında dönmektedir. Bu nedenle; $\mu = 0$ olarak ele alınırsa $a = 0$ olur. X_t stokastik süreci eşitlik 8.17 şeklini almaktadır.

$$X_t = \phi X_{t-1} + \sigma\varepsilon \quad (8.17)$$

Yani yukarıdaki bu stokastik modelin $AR(1)$ süreci izlediği bulunmasa idi stokastik bileşenin momentlerinden yola çıkılarak gerekli benzetim çalışması gerçekleştirilecekti. X_t stokastik sürecinde $0 < \phi < 1$ aralığında olmalıdır. ϕ

parametresi durağanlığı (verilerin ilgili serinin ortalaması etrafında hareket etmesi) sağlayan önemli bir parametredir.

Hisse senedi fiyatlarının Markov Özelliği takip ettiği varsayılmıştır. Kısaca, $X_0, X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ stokastik süreci $P[X_{n+1} = j | X_0, X_1, \dots, X_n = i] = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$, $\forall i, j$ ise Markov Zinciri olarak adlandırılır. Yani yarının fiyatı sadece ve sadece bugünkü fiyata bağlıdır. Diğer günlerin fiyat değerlerinin bilinmesi önemli değildir.

Çizelge 8.1'deki model-2 incelendiğinde X_t değerinin sadece X_{t-1} değerine bağlı olduğu görülmektedir. Önerilen model-2 için bir diğer varsayım varyansın zaman boyunca sabit olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca yoğunluk süreci (λ) sabit kabul edilmiştir. Yoğunluk süreci parametresi bir yılda ortalama kaç tane sıçrama meydana geldiğini ifade etmektedir. Bu model için bir diğer varsayım ise modele sıçrama eklenmesidir. Bu sıçrama türleri ise üç farklı dağılımı takip edecek şekilde tasarlanmıştır. Bu sıçrama türleri **Merton sıçrama difüzyon** sürecinin bir parçası olarak stokastik kısma eklenmiştir. Ayrık zaman modellerinin genel sınıfı Çizelge 8.1'de özetlenmiştir (Seifert ve Uhrig-Homburg, 2007; Escríbano vd., 2011).

Önerilen model-2'de yer alan ε_{1t} ve $\varepsilon_{2t} \sim i.i.d. N(0,1)$ bağımsız özdeş dağılmış standart normal dağılımdan seçilmiş tesadüfi değerlerdir. model-2 için 01.02.2008-12.29.2017 tarihleri arasındaki veriler kullanılarak deterministik ve stokastik bileşenin parametreleri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen parametreler kullanılarak 2018-2023 yılları arasında 10000 tane Monte Carlo benzetim çalışması gerçekleştirilmiş ve sonuçları aşağıda tartışılmıştır. Çizelge 8.1'de verilen bu modellerin benzetimi gerçekleştirilirken trend bileşeni ve stokastik bileşenin nasıl modellendiği ve modellerde yer alan bazı parametrelerin sabit ya da bir fonksiyona bağlı olarak modellenmesinin performansı ne yönde etkilediği tartışılmıştır.

Eşitlik 8.21 Vasicek modelinin (yani ortalamaya döndüren Normal model) ayrık hali olan $AR(1)$ sürecini takip ettiği kabul edilmiş ve yukarıda ispat edilmiştir.

Daha açık bir ifade ile; eşitlik 8.21 bir stokastik diferansiyel denklemin ayrık versiyonudur. $AR(1)$ süreci otoregresif durağan süreçlerden bir modeldir. Durağanlığın sağlanması için çeşitli dönüşümler yapılarak durağanlık sağlanmış ve benzetim çalışması gerçekleştirilmiştir.

İlk aşamada durağanlığın sağlanması için fiyatların logaritmaları alınmıştır. Fiyatların logaritmaları kullanılarak trend ve stokastik bileşenin parametreleri Windows MATLAB® R2018a (MathWorks, Massachusetts, USA) yazılım ortamında İstatistik ve Makine Öğrenme Araçkutusunda (Statistics and Machine Learning Toolbox™) *mle* fonksiyonu kullanılarak parametreler en çok olabilirlik metodu ile bulunmuştur. Çözüm gerçekleştirilip trend ve stokastik bileşenin parametreleri bulunduktan sonra fiyatların logaritmalarından trend bileşeni çıkarılmış ve Şekil 8.6 ile görselleştirilmiştir.

Veriler logaritmik değerlere çevrildikten sonra her bir parametre için bir başlangıç çözümü belirlenmeli ve bu parametreler için alt ve üst değerler tanımlanmalıdır. Böylece en çok olabilirlik metodu ile $\theta = \{B0, BT, C1, C2, C3, C4, \alpha, \phi, \mu_j, \sigma^2, \sigma_j^2, \lambda\}$ parametreleri elde edilir. Logaritmik fiyatlardan trend bileşeni çıkarılmış stokastik bileşen için beş yıllık (2018-2023) benzetim çalışması gerçekleştirilmiştir. Tekrar trend bileşeni eklenerek simüle edilmiş logaritmik fiyatlar bulunmuş ve logaritmik fiyatların üsteli (*exp*) alınarak hisse senedi fiyatları elde edilmiştir.

Bu modellerde $AR(1)$ sürecinin özellikleri ve durağanlığın oluşturulması çok önemlidir.

Stokastik bileşende yani model-2’de yer alan μ_j ve σ_j normal olarak dağıldığı varsayılan sıçramaların ortalama ve standart sapmasını temsil etmektedir. Parametre lambda (λ) ise bir yılda (bir yıl 250 ya da 251 gün bazen 252 olabilir) kaç tane sıçrama gerçekleştiğini ifade etmektedir. Örneğin, bu veri seti ve model-2 için $\lambda = 45,4737$ olarak bulunmuştur. Yani bir yılda yaklaşık olarak 45 tane sıçrama meydana gelmektedir. Bir gün için sıçramanın ortaya çıkma olasılığı

hesaplanacak olunursa λ ile $dt = 1/250$ değerin çarpılması sonucu $\lambda * dt = 0,1819$ değeri elde edilmektedir.

Bernoulli dağılımına göre bir günde sıçramanın gerçekleşme ihtimali de bilindiğinden (2018-2023) yılları arasında yaklaşık 227 civarı sıçrama olacağı çıkarılabilir.

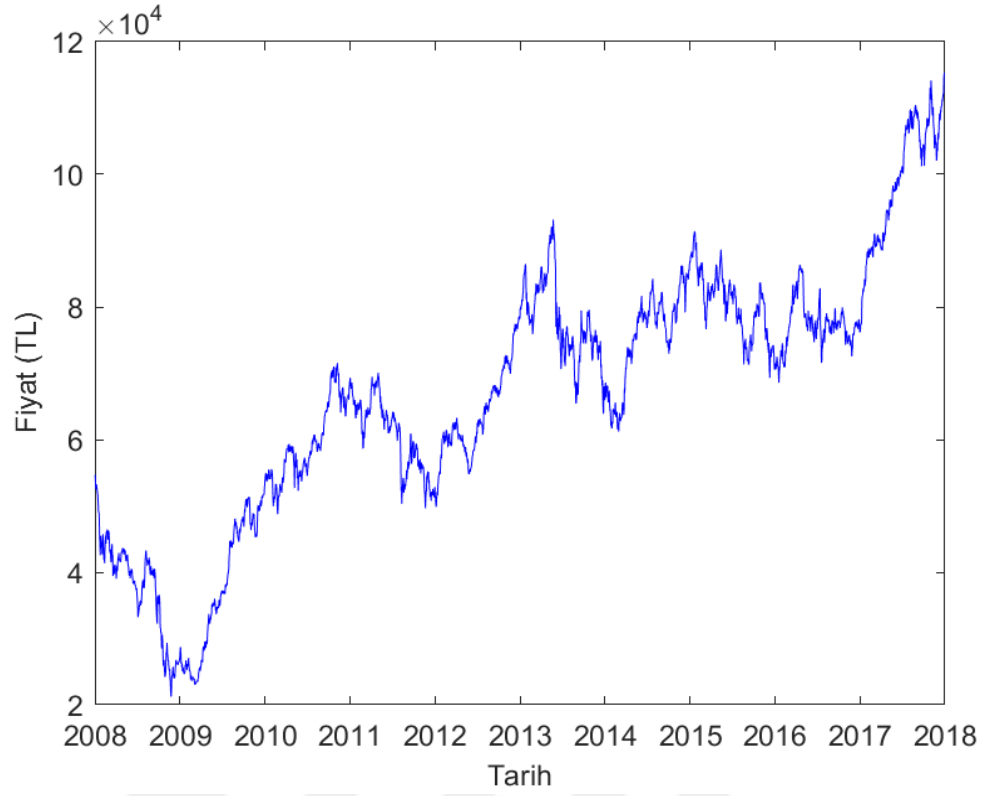
Benzer şekilde, Poisson süreci için yukarıda anlatıldığı gibi λ parametresi bir yıl içerisinde ortaya çıkan ortalama sıçrama sayısını ifade etmektedir. Böylece $\lambda * dt$ ise çok kısa bir zaman içerisinde bir sıçramanın ortalama ortaya çıkma olasılığıdır. O zaman denilebilir ki belirli $\lambda * dt$ parametre oranı ile Poisson dağılımından rassal sayılar üretilmektedir.

Gamma süreci de $\lambda * dt$ şekil parametresi ile Gamma dağılımından rassal sayılar üretmektedir. Merton sıçrama difüzyon süreci $dJ = \mu_j * J + \sigma_j * \text{sqrt}(J) * \varepsilon$, $\varepsilon \sim N(0,1)$ olarak tanımlanırsa J ifadesi Bernoulli, Poisson ve Gamma sürecini ifade etmektedir. Vasicek modeli fiyatları simüle ederken bu bileşende eklenerek beş yıl içerisinde rassal sıçramalar eklenerek hisse senedi fiyat hareketleri modellenmeye çalışılmıştır. Bu model ile aşırıliklar yakalanmaya çalışılmıştır.

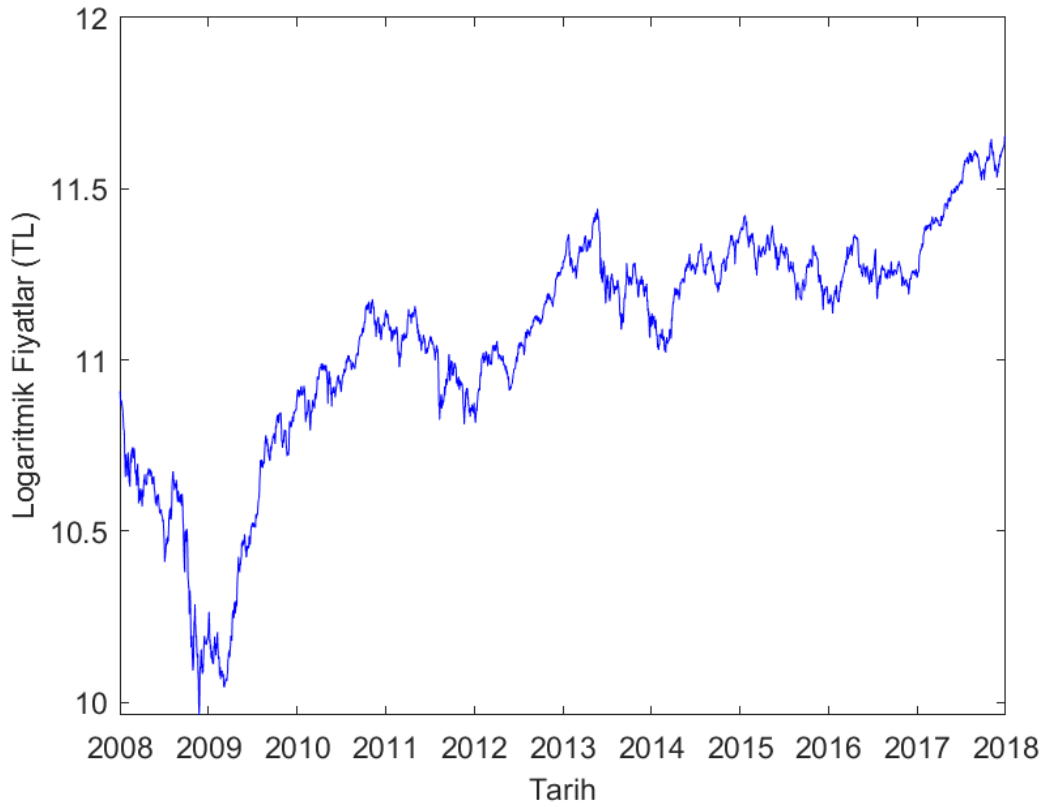
Önerilen bu model türü için parametre kavramları ve nasıl bulundukları anlatıldıktan sonra finansal zaman serilerinin nasıl modellendiği aşağıda görsel olarak verilmiştir. Şekil 8.3 BIST-100 endeksinin 01.02.2008-12.29.2017 tarihleri arasında ardışık günlük kapanış fiyat değerlerini gösterirken, Şekil 8.4 BIST-100 endeksinin 01.02.2008-12.29.2017 tarihleri arasında ardışık günlük kapanış logaritmik fiyat değerlerini göstermektedir. Önerilen model-2 için logaritmik fiyatların modellenmesinde yer alan parametreler (8.25) ile verilmiştir.

$$\{B0, BT, C1, C2, C3, C4, \emptyset, \mu_j, \sigma^2, \sigma_j^2, \lambda\} \quad (8.25)$$

Önerilen model-2'de yer alan parametreler için kısıtlar $\emptyset < 1$, $\sigma^2 > 0$, $\sigma_j^2 > 0$ ve $0 < \lambda * dt < 1$ dir. Burada $\emptyset = 1 - \kappa \Delta t$ değerine eşittir. İlk eşitsizlik kısıtı $\emptyset < 1$ olduğu için $\kappa > 0$ olmak zorundadır. Parametre $\emptyset < 1$ olması durağanlığın sağlanmasını garanti etmektedir.



Şekil 8.3. BIST-100 endeksinin günlük kapanış fiyat değerleri



Şekil 8.4. BIST-100 endeksinin günlük kapanış logaritmik fiyat değerleri

Burada, dalgalanmalar (standart sapmalar) σ ve σ_j pozitif olmak zorundadır. Son eşitsizlik $\lambda * dt$ sıfır ve bir değeri arasında olmalıdır. Çünkü $\lambda * dt$ bir sıçramanın günde ortaya çıkma olasılığını ifade etmektedir. Trend parametreleri için herhangi bir kısıt olmamakla birlikte parametre değerleri alt ve üst sınırdan sınırsızdır denilebilir. Tüm parametreler aşağıdaki gibi en çok olabilirlik metodu (MLE) ile tahmin edilmiştir.

model-1'e benzer şekilde model-2 için parametrelerin en çok olabilirlik metodu ile nasıl bulunduğunu ne tür fonksiyonların kullanıldığı aşağıda verilmiştir. P_t logaritmik fiyatları ve P_{t-1} ise bir önceki veriyi göstermekte olup sürecin Markov özelliği gösterdiği daha önce ifade edilmiştir. En çok olabilirlik metodu eşitlik 8.26 fonksiyonu ile verilmiştir.

$$\max_{\theta} = \sum_{t=1}^T (\log(f[P_t|P_{t-1}; i = 1])) \quad (8.26)$$

Hisse senedi fiyat hareketleri için geçiş olasılıkları model-2 için eşitlik 8.27 ile Poisson-Normal sürecini takip etmektedir. Yani, eşitlik 8.27, karışık normal dağılımlar ile gerçek Poisson-Gaussian yoğunluğuna yaklaşmaktadır (Villaplana, 2003; Escríbano vd., 2011). Döviz kurlarındaki bazı uygulamalar için Vlaar ve Palm (1993), Nieuwland vd. (1994) ve Neely (1999) ve faiz oranları uygulamaları için Das (2001) çalışmalarına detaylıca bakılabilir.

$$\begin{aligned} f[P_t|P_{t-1}; i = 1] &= \lambda_t^a \cdot \exp \left[\frac{-(P_t - s(t) - \phi P_{t-1} - \mu_j)^2}{2(\sigma^2 + \sigma_j^2)} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \sigma_j^2)}} \\ &+ (1 - \lambda_t^a) \cdot \exp \left[\frac{-(P_t - s(t) - \phi P_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \end{aligned} \quad (8.27)$$

En çok olabilirlik metodu, eşitlik 8.26 kullanılarak tahmin edilir. En çok olabilirlik problemini çözmek için Windows MATLAB® R2018a (MathWorks, Massachusetts, USA) yazılım ortamında *mle* fonksiyonu kullanılmıştır.

Önerilen model-2’de yer alan trend ve stokastik bileşen için tahmin edilen parametreler Çizelge 8.2’de verilmiştir. Çizelge 8.2’deki parametreler ve Çizelge 8.1’deki ayırık modeller, hisse senedi fiyat hareketlerinin bilgisayar ortamında simüle edilmesine izin vermektedir.

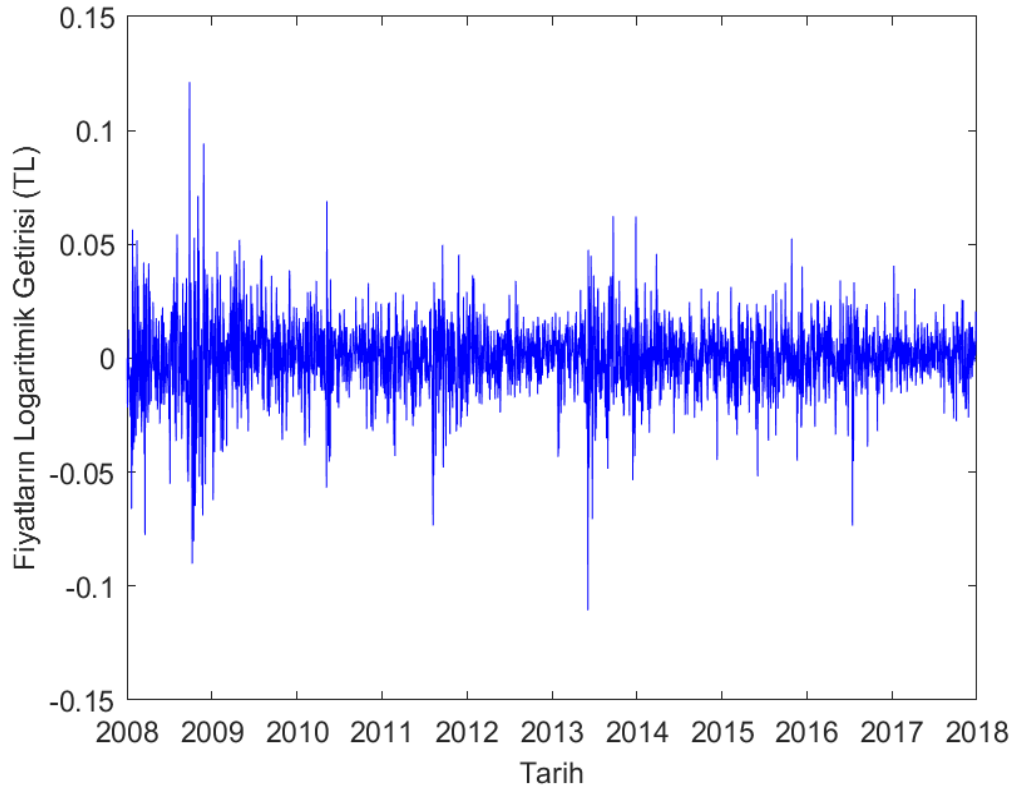
Çizelge 8.2. Önerilen model-2 için spot fiyat (P_t) parametre tahminleri

Trend Bileşeni Parametreleri- $s(t)$		Stokastik Bileşen Parametreleri- (X_t)	
$B0$	0,0359	$\phi(\emptyset)$	0,9936
BT	-0,0072	$\kappa(\kappa)$	1,5889
$C1$	0,2133	$\mu_j=\mu_j$	-0,0050
$C2$	-0,9289	$\sigma=\sigma$	0,1826
$C3$	0,0715	$\sigma_j=\sigma_j$	0,0268
$C4$	10,6489	$\lambda(\lambda)$	0,1819

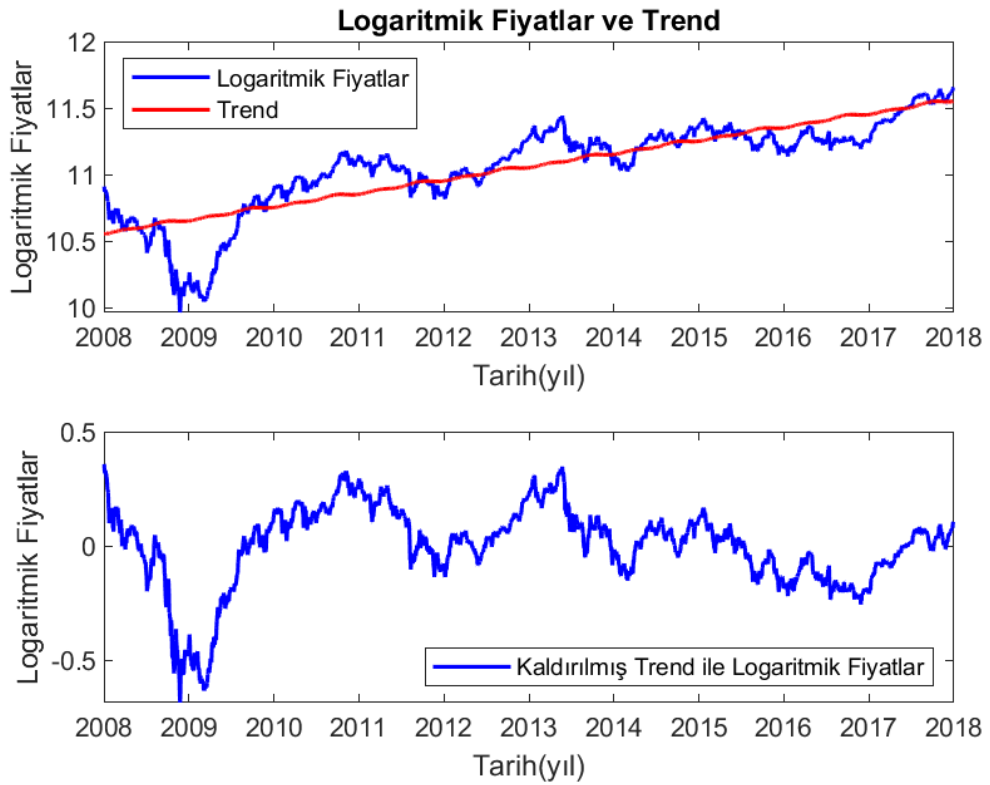
Çizelge 8.3’de Windows MATLAB® R2018a (MathWorks, Massachusetts, USA) yazılımı ortamında rassal sayı çekirdekleri (random number generator-rng) 0 ile 10 arasında çalıştırılarak model-2 için performans değerlendirmesini göstermektedir. Şekil 8.5 ile BIST-100 endeksinin 01.02.2008-12.29.2017 tarihleri arasında 2518 ardışık günlük logaritmik getiri değişim değerleri gösterilmiştir. Logaritmik fiyatların trend ve trendin kaldırılması model-2 için verilmiş ve seri durağan hale Şekil 8.6’de getirilmiştir.

Şimdi gelecek fiyatlar (2018-2019) kullanılarak riskin piyasa değeri (fiyatı) bulunmuştur. Bir sonraki adım daha önce kalibre edilen model parametreleri kullanılarak riske duyarsız Monte Carlo benzetimi gerçekleştirilmiş ve riskin piyasa fiyatı elde edilmiştir.

model-2’de rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatlar (2018-2023) Şekil 8.7’de verilmiştir. model-2 için rassal sayı çekirdeği-beş kullanılarak gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (2018-2019) Şekil 8.8’de verilmiştir.

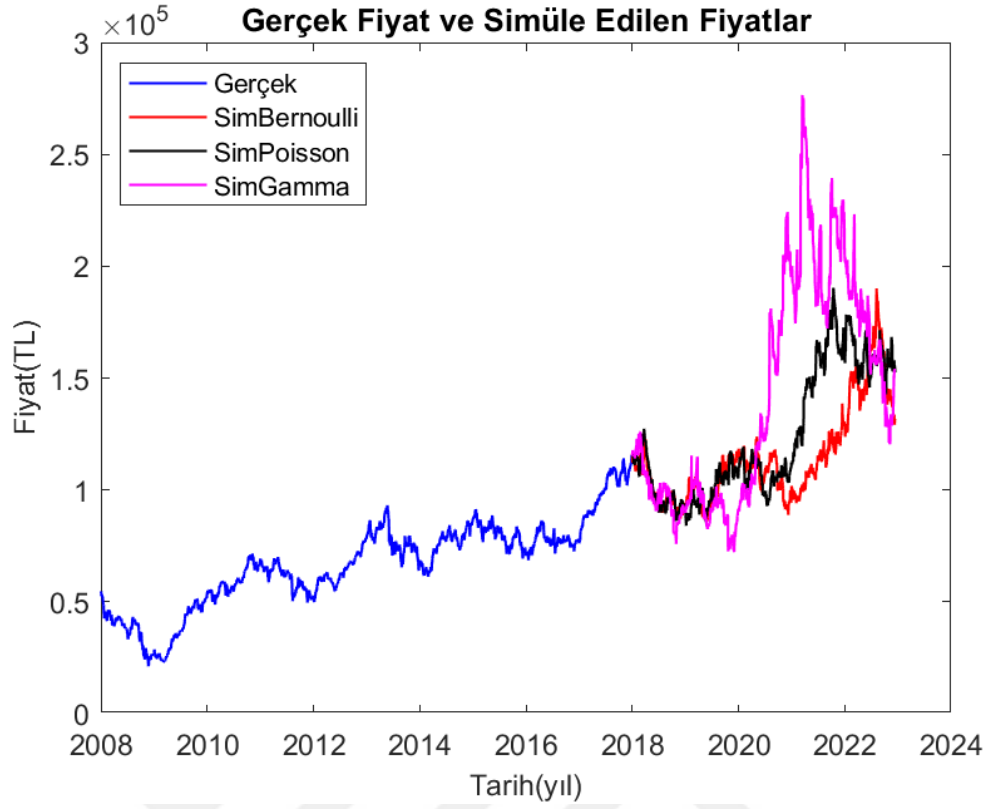


Şekil 8.5. BIST-100 endeksinin günlük kapanış logaritmik getiri değerleri

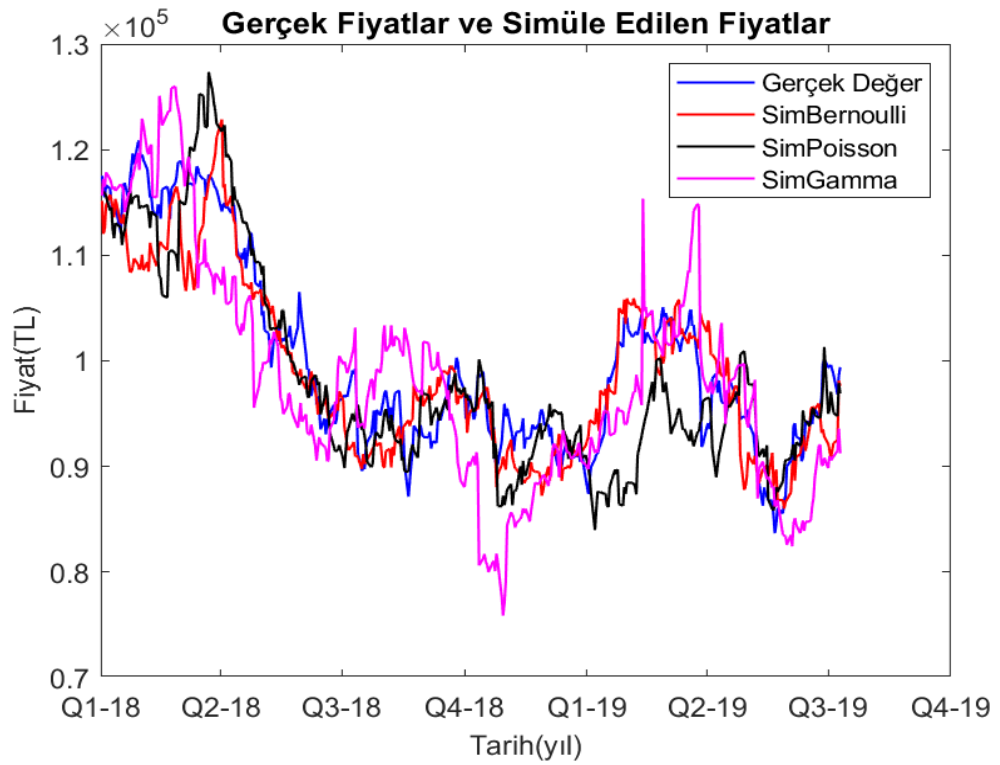


Şekil 8.6. Model-2 için trend ile logaritmik fiyatlar (üst grafik). Kaldırılmış trend ile logaritmik fiyatlar (alt grafik)

Çizelge 8.3. Rassal Sayı Çekirdekleri ile model-2 için Performans Değerlendirmesi														
Standart Sapma	Ortalama	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Sıçrama Türleri	Performans Ölçütleri
0.0036	0.0384	0.0401	0.0423	0.0390	0.0410	0.0386	0.0314	0.0342	0.0424	0.0410	0.0350	0.0372	Bernoulli	MAPE
0.0021	0.0398	0.0426	0.0366	0.0377	0.0420	0.0423	0.0389	0.0378	0.0397	0.0419	0.0398	0.0387	Poisson	
0.0044	0.0471	0.0476	0.0496	0.0444	0.0450	0.0486	0.0523	0.0432	0.0511	0.0484	0.0504	0.0371	Gamma	
0.0045	0.0507	0.0491	0.0561	0.0528	0.0494	0.0525	0.0576	0.0524	0.0491	0.0407	0.0472	0.0512	MC-Arima	
0.0369	0.0460	0.0748	0.0055	0.0092	0.1019	0.0358	0.0127	0.0657	0.0529	0.1055	0.0105	0.0320	Bernoulli	RE
0.0290	0.0411	0.0372	0.1076	0.0125	0.0754	0.0501	0.0152	0.0363	0.0518	0.0200	0.0196	0.0267	Poisson	
0.0895	0.0874	0.3019	0.0503	0.0216	0.0025	0.0344	0.0584	0.0981	0.1889	0.1277	0.0190	0.0591	Gamma	
0.0652	0.0841	0.1452	0.0309	0.0721	0.1144	0.2008	0.0163	0.1300	0.0686	0.0034	0.0107	0.1330	MC-Arima	
0.0044	0.0480	0.0481	0.0522	0.0483	0.0534	0.0478	0.0407	0.0436	0.0536	0.0513	0.0429	0.0465	Bernoulli	NRMSE
0.0034	0.0497	0.0553	0.0463	0.0453	0.0510	0.0538	0.0518	0.0464	0.0497	0.0525	0.0483	0.0467	Poisson	
0.0055	0.0598	0.0612	0.0639	0.0575	0.0588	0.0590	0.0637	0.0572	0.0663	0.0579	0.0658	0.0468	Gamma	
0.0060	0.0642	0.0607	0.0726	0.0639	0.0635	0.0673	0.0696	0.0685	0.0614	0.0508	0.0601	0.0679	MC-Arima	
0.0496	0.7222	0.7233	0.6739	0.7207	0.6598	0.7271	0.8023	0.7728	0.6571	0.6852	0.7805	0.7413	Bernoulli	CE
0.0406	0.7032	0.6340	0.7437	0.7548	0.6897	0.6544	0.6796	0.7424	0.7051	0.6705	0.7211	0.7397	Poisson	
0.0748	0.5691	0.5527	0.5120	0.6050	0.5869	0.5835	0.5151	0.6094	0.4744	0.5997	0.4829	0.7384	Gamma	
0.0888	0.5033	0.5602	0.3702	0.5119	0.5181	0.4579	0.4210	0.4399	0.5491	0.6913	0.5687	0.4480	MC-Arima	
508.522	-138.055	-405.670	-647.179	409.059	-204.227	117.541	492.190	736.246	-861.335	-495.386	-326.800	-333.047	Bernoulli	TS
712.225	-60.737	-667.303	843.149	351.286	-35.283	-119.599	766.668	1016.74	-1033.706	-426.143	-772.182	-591.725	Poisson	
647.401	84.885	388.690	169.992	1142.343	-1.090.22	358.304	795.161	-638.176	450.517	-415.188	-231.842	0.4151	Gamma	
110.0044	25.2837	66.9254	205.879	45.0390	169.7298	-56.9440	-92.5940	-153.704	-9.3693	-0.4409	-16.9169	120.517	MC-Arima	



Şekil 8.7. Model-2 için rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatlar (2018-2023)



Şekil 8.8. Model-2 için rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (2018-2019)

Riskin piyasa fiyatını ayarlamak için takip edilmesi gereken adımlar aşağıda sıralanabilir:

Model parametreleri gerçek dünya olasılığı altında kalibre edilmelidir. Bu kalibrasyon ile fiyat seçebilmek için, riske duyarsız olasılık altında benzetime ihtiyaç vardır. Riske duyarsız parametreleri türetmek için vadeli (gelecek) işlem fiyatlarından riskin piyasa fiyatı hesaplanmıştır. Sözleşme ayı boyunca günlük olarak düzenlenmiş olan piyasada aylık vadeli işlem sözleşmeleri olduğu varsayılın. Vadeli işlemler, sözleşme ayı boyunca günlük olarak düzenlenmektedir. Bu nedenle, vadeli işlem değerinin sözleşme ayı için sabit olduğu varsayılarak günlük vadeli işlem değerleri elde edilebilmektedir.

Riskin piyasa fiyatının hesaplanması için gerçek dünya olasılığı ölçümünden beklenen vadeli fiyatlara ihtiyaç vardır. Bu yukarıda gerçekleştirilen benzetim çalışmasından elde edilebilir. Yani 2018 ve 2023 yıllarının benzetim sonuçları model-2 için tahmin edilmişti ve bu benzetimin her gün için gerçekleştirilen Monte Carlo benzetim ortalamaları ele alınarak elde edilmiştir. Günlük gelecek fiyatlar simüle edilen gün kadar elde edilir. Daha sonra gerçek dünya ölçümü altında beklenen gelecek fiyatlar elde edilir. Böylece gelecek fiyatlara karşı riskin piyasa değerini ayarlamak için eşitlik 8.28 kullanılmıştır (Seifert ve Uhrig-Homburg, 2007).

$$\frac{-\log\left(\frac{F_t}{E_t}\right)}{\sigma e^{-\kappa t}} = \int_0^t e^{\kappa s} m_s ds \quad (8.28)$$

Eşitlik 8.28, m_s değerlerinin bulunması için Önkosullu Eşlenik Gradyan Yöntemi ile (Preconditioned Conjugate Gradient Method) çözülmüştür. Bu çözüm yöntemine detaylı bilgi için (İnternet 2, 2020) referans kaynağından ulaşabilir. Eşitlik 8.28'de; F_t , t zamanında gözlemlenen gelecek değerlerdir. E_t ise t zamanında gerçek dünya ölçümü altında beklenen değerdir. Kısaca gerçekleştirilen benzetimlerin ortalamasıdır. Önkosullu Eşlenik Gradyan yöntemi ile eşitlik 8.28 adım adım aşağıdaki gibi çözülmüştür. Genellikle

parametrelerin tahmini için kullanılan En Küçük Kareler (EKK), x için $Ax = b$ doğrusal denklem sistemi Windows MATLAB® R2018a (MathWorks, Massachusetts, USA) yazılım ortamında eşitlik 8.28 matris boyutları farklı olduğu için çözülememektedir. Bu formata çevirebilmek için önkoşul fikri ortaya atılmıştır. Yapılan küçük bir dönüşüm ile eşitlik 8.28, MATLAB® yazılım ortamında eşitlik 8.31 sağlanarak çözülebilmektedir. Önkoşullama fikri, A koşulunun sayısını azaltmak için doğrusal sistemi ön işleme tabi tutmak gerekmektedir. Burada M matrisi simetrik pozitif tanımlıdır (Symetric Positive Definite-SPD). Eşitlik 8.31’de, x riskin piyasa fiyatının çözümünü gösteren bir vektör iken diag ifadesi matrisin diagonal kısmını ifade etmektedir.

$$b = \frac{-\log\left(\frac{F_t}{E_t}\right)}{\sigma e^{-\kappa t}} \quad (8.29)$$

$$A = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa t} \quad (8.30)$$

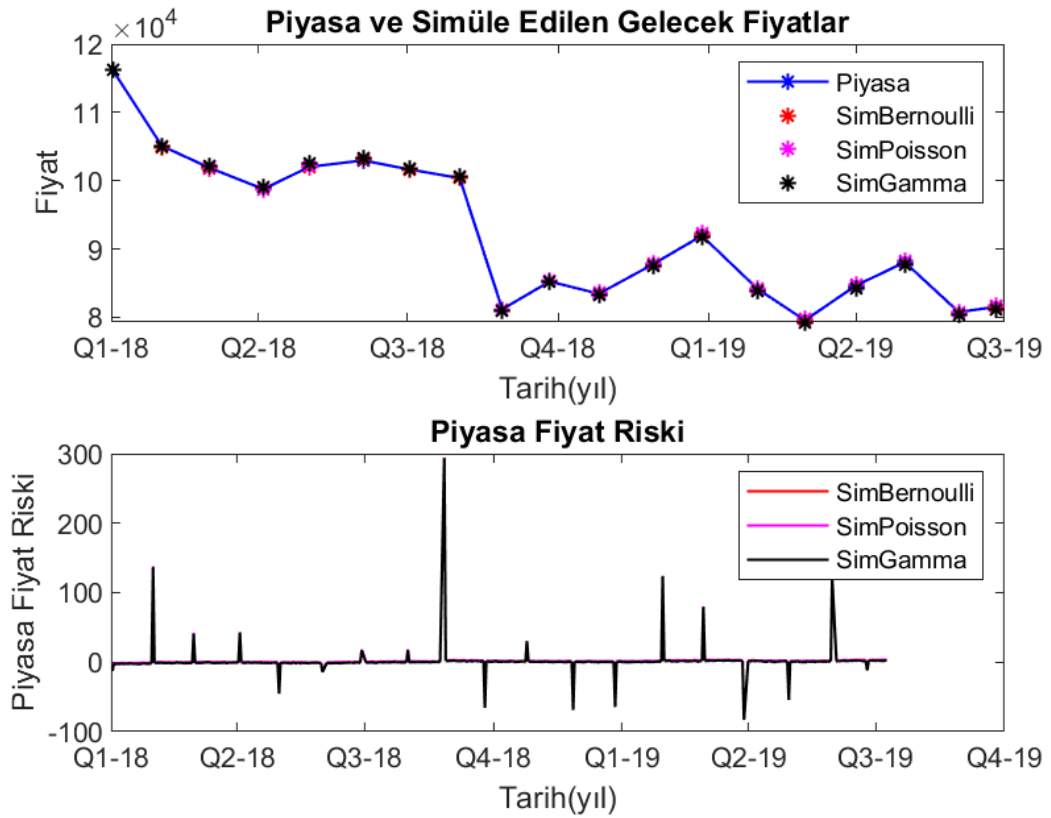
$$Ax = b \Leftrightarrow M^{-1}Ax = M^{-1}b, \quad M^{-1} = \text{diag}(1./\text{diag}(A)) \quad (8.31)$$

Riskin piyasa değeri hesaplandıktan sonraki adım riske duyarsız fiyatların benzetimlerinin gerçekleştirilmesidir. Logaritmik fiyatların benzetimini gerçekleştirmek için kullanılan eşitlik 8.18’i tekrar düzenlenirse riskin piyasa değerini simüle etmek için eşitlik 8.32 formu kullanılır (Seifert ve Uhrig-Homburg, 2007). Eşitlik 8.32’de yer alan m_t , eşitlik 8.31 ile bulunan x değerine karşılık gelmektedir.

$$X_t = \begin{cases} \phi X_{t-1} - \sigma m_{t-1} \Delta t + \sigma \varepsilon_{1t}, & 1 - \lambda \text{ ile} \\ \phi X_{t-1} - \sigma m_{t-1} \Delta t + \sigma \varepsilon_{1t} + \mu_j + \sigma_j \varepsilon_{2t}, & \lambda \text{ ile} \end{cases} \quad (8.32)$$

Eşitlik 8.32 dinamiği kullanılarak daha önce bulunan parametre değerleri Çizelge 8.2 kullanılarak benzetim gerçekleştirilmiştir. Akabinde tekrar trend etkisi eklenmiş ve logaritmik fiyatların üsteli alınarak normal fiyat değerlerine çevrilmiştir. Böylece riske duyarsız ölçüm altında elde edilen benzetimlerin

beklenen değeri ve piyasanın gelecek değerleri Şekil 8.9 ile görselleştirilmiştir. Riske duyarsız benzetimin piyasanın gelecek değerlerini yakından ürettiğini doğrulamaktadır. Burada simüle edilen gelecek fiyatlardan riskin çıkartılmasının amacı özellikle çeşitli enerji fiyatlarını (elektrik, doğalgaz gibi.) modellemek için kullanılmaktadır. Yani aylık yapılan sözleşmeler çerçevesinde bir ay boyunca fiyatların sabit olduğu ve bir sonraki ay için tekrar güncellendiği durumlarda geçerlidir. Böylece sıçramalı Vasicek modeli tarafından üretilen gelecek fiyatlardan riskin çıkartılması gerekmektedir. Çünkü ay boyunca fiyatlar sabit ve eşittir. Bu durum gerçekleştirildiğinde her ay sonu bilinen hisse senedi fiyatları olduğu farzedilmiş ve riskin olmadığı durumda modelin tutarlılığı görselleştirilmiştir.



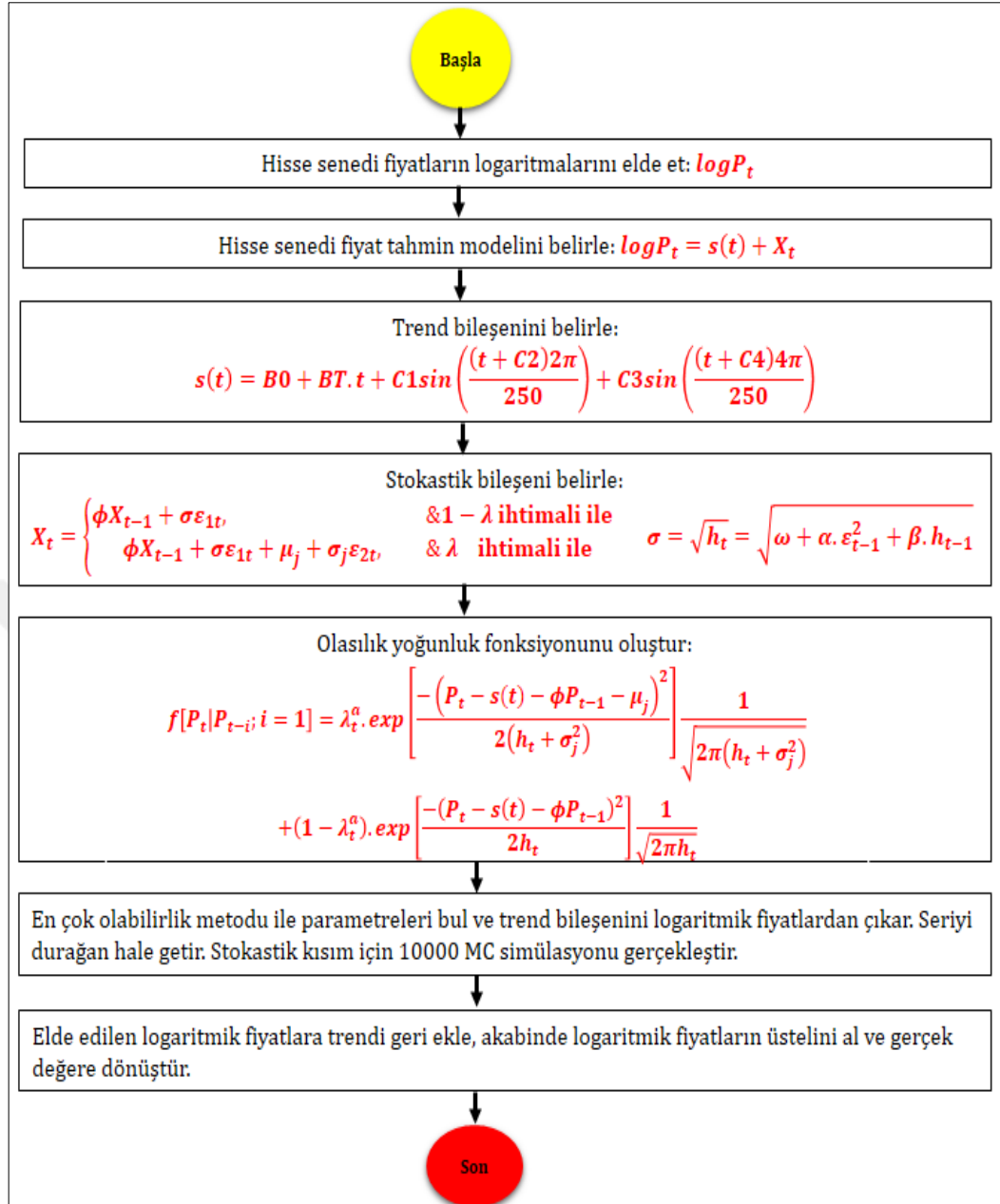
Şekil 8.9. Model-2 için rassal sayı çekirdeği beş için piyasa ve simüle edilen gelecek fiyatlar(üst grafik). Piyasa fiyat riski (alt grafik)

Sabit varyanslı stokastik model (model-2) için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- Trend bileşeni ile sabit varyanslı sıçramalı $AR(1)$ süreci modeli rassal sayı çekirdekleri (0-10) ile performans değerlendirmesi Çizelge 8.3 ile verilmiştir. Farklı çekirdekler içerisinde en iyi değerler beşinci (5) çekirdekte elde edilmiştir. Tüm modeller değerlendirildiğinde sırasıyla en iyi başarıyı Bernoulli, Poisson, Gamma ve MC $ARIMA$ göstermiştir.
- Bu model türü özelliği için yani model-2 de yer alan parametrelerin sabit kabul edilmesi açısından Gamma kötü sonuç vermiştir. En iyi başarıyı Bernoulli göstermiştir. Bernoulli için $MAPE$ değeri 0,0314, RE değeri 0,0127, $NRMSE$ değeri 0,0407, CE değeri 0,8023 olarak bulunmuştur. İkinci en iyi başarıyı ise Poisson göstermiştir. Poisson için $MAPE$ değeri 0,0389, RE değeri 0,0152, $NRMSE$ değeri 0,0518, CE değeri 0,6796 olarak bulunmuştur.
- Bu model türü ve özelliği için Gamma ve $ARIMA$ önerilmez. Tüm parametreler sabit iken Bernoulli ve Poisson kullanımı önerilir.

8.3. Değişken Varyanslı Stokastik Model (model-3)

model-3, Çizelge 8.1'de eşitlik (8.22) ile verilmiştir ve değişken varyans ve trend bileşeni ile sıçramalı $AR(1)$ süreci olarak adlandırılmıştır. Önceki bölümde önerilen model-2'de varyans sabit kabul edilirken model-3'de varyans $GARCH(1,1)$ davranış türü olarak modellenmiştir. Geriye kalan tüm varsayımlar ve özellikler önceki bölümde önerilen model-2 ile aynı olmaktadır. Önerilen model-3 için akış diyagramı Şekil 8.10'da verilmiştir.



Şekil 8.10. Değişen varyanslı stokastik modelin akış diyagramı (model-3)

Önerilen model-3 aşağıda verilen altı varsayım üzerine inşa edilmiştir:

- Trend Bileşeni,
- Ortalamaya Dönme Özelliği,
- Hisse Senedi Fiyatlarının Markov Özelliği,
- Değişen Varyans GARCH(1,1) süreci: $\sigma = \sqrt{h_t} = \sqrt{\omega + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \cdot h_{t-1}}$
- Sabit Yoğunluk Süreci (λ),
- Farklı Sıçrama Türleri (Bernoulli, Poisson ve Gamma Süreçleri).

İlk varsayım modelin trend bileşeni— $s(t)$ ile ilgili iken geriye kalan beş özellik stokastik bileşen— X_t ile ilgilidir.

model-3 için takip edilmesi gereken adımlar aşağıda sıralanmıştır:

- İlk önce verilerin logaritmaları elde edilmeli ve kullanılacak hisse senedi fiyat modeli tanımlanmalıdır.
- Veriye uygun trend bileşeni ve kullanılacak stokastik bileşen tanımlanmalıdır. Ayrıca stokastik bileşene ne tür özelliklerin ekleneceği belirlenmelidir (örneğin; sıçramalar, değişen varyans vb.).
- Daha sonra trend ve stokastik kısmın parametrelerini bulmak için Normal olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanmalıdır.
- Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak parametreler en çok olabilirlik metoduna göre bulunmalıdır. Elde edilen parametreler kullanılarak logaritmik fiyatlardan trend bileşeni çıkartılıp seri durağan hale getirilmelidir. Stokastik model kullanılarak 10000 Monte Carlo benzetimi gerçekleştirilmeli ve tekrar trend bileşeni eklenmelidir.
- Logaritmik fiyatların üsteli alınarak tahmini fiyat değerleri elde edilir.

Önerilen model-3 için logaritmik fiyatların modellenmesinde yer alan parametreler, 8.33 ile verilmiştir.

$$\{B0, BT, C1, C2, C3, C4, \alpha, \emptyset, \mu_j, \sigma^2, \sigma_j^2, \omega, \alpha, \beta, \lambda\} \quad (8.33)$$

model-3’de yer alan parametreler için kısıtlar $\emptyset < 1$, $\sigma^2 > 0$, $\sigma_j^2 > 0$ ve $0 < \lambda * dt < 1$ dır. Burada $\emptyset = 1 - \kappa \Delta t$ değerine eşittir. İlk eşitsizlik kısıtı $\emptyset < 1$ olduğu için $\kappa > 0$ olmak zorundadır. Parametre $\emptyset < 1$ olması durağanlığın sağlanmasını garanti etmektedir. Burada riski temsil eden σ ve σ_j parametreleri pozitif olmalı ve $\lambda * dt$ parametresi sıfır ve bir değeri arasında olmalıdır. Çünkü $\lambda * dt$ bir sıçramanın günde ortaya çıkma olasılığını temsil etmektedir. Trend bileşeni parametreleri için herhangi bir kısıt olmamak ile beraber parametre değerleri alt ve üst sınırdan sınırsızdır denilebilir. Önerilen model-3’de yer alan ε_{1t} ve $\varepsilon_{2t} \sim i. i. d. N(0,1)$ bağımsız özdeş dağılmış standart normal dağılımdan gelmekte

ve modelde yer alan μ_j ve σ_j normal olarak dağıldığı varsayılan sıçramaların ortalama ve standart sapmasını temsil etmektedir. Negatif olmayan ω, α ve β parametreleri GARCH(1,1) sürecinin dinamik yapısını karakterize etmektedir ($\omega > 0; \alpha, \beta \geq 0$). Negatif olmayan kısıtlar sürecin pozitif olduğunu garanti etmek zorundadır. Eğer $\alpha + \beta < 1$ ise, o zaman bu varyans sürecin koşullu ortalamasına $\omega/(1 - \alpha - \beta)$ dönme eğilimi gösterir.

GARCH modellerinde sıçramalara izin verildiğinde, dalgalanma sürecinin istenen durağanlığını geri kazanması beklenmektedir. Öte yandan, sıçrama difüzyon sürecinde bir GARCH davranışına izin vererek, daha önce tamamen sıçrama modeli tarafından yakalanan daha küçük sıçramaların bir kısmı şimdi GARCH bileşeninin bir parçası olduğundan, bir sıçrama gözlemleme olasılığını azaltmaktadır. Sıçrama sürecinin yoğunluğunun (λ) ve dalgalanmanın (GARCH) eşzamanlı olarak modellenmesine izin veren bu model türünde esnekliğe dikkat etmek önemlidir.

model-3 için parametrelerin ençok olabilirlik metodu ile nasıl bulunduğunu ve ne tür fonksiyonların kullanıldığı aşağıda verilmiştir. P_t logaritmik fiyatları ve P_{t-1} ise bir önceki değeri göstermekte olup sürecin Markov özelliğini göstermekte ve eşitlik 8.34'te verilmektedir.

$$\max_{\theta} = \sum_{t=1}^T (\log(f[P_t|P_{t-i}; i = 1])) \quad (8.34)$$

Hisse senedi fiyat hareketleri için geçiş olasılıkları model-3 için eşitlik 8.35'te verilen Poisson-Normal sürecini takip etmektedir. Yani, eşitlik 8.35 karışık normal dağılımlar ile gerçek Poisson-Gaussian yoğunluğuna yaklaşmaktadır (Villaplana, 2003; Escríbano vd., 2011).

Burada Poisson-Normal sürecini takip eden geçiş olasılığında model-2'den farklı olarak değişen varyans özelliğini yansıtan GARCH süreci eklenmiştir.

$$f[P_t|P_{t-i}; i = 1] = \lambda_t^a \cdot \exp \left[\frac{-(P_t - s(t) - \phi P_{t-1} - \mu_j)^2}{2(h_t + \sigma_j^2)} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(h_t + \sigma_j^2)}} \\ + (1 - \lambda_t^a) \cdot \exp \left[\frac{-(P_t - s(t) - \phi P_{t-1})^2}{2h_t} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \quad (8.35)$$

Eşitlik 8.35 olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak en çok olabilirlik metodu (8.34) eşitliğinin özelliğini sağlayacak şekilde çözüm MATLAB® yazılımı ortamında *mle* fonksiyonu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. model-3 için tahmin parametre değerleri Çizelge 8.4 ile verilmiştir. Bu parametreler hisse senedi fiyatlarının yönünün tahmin edilmesine yardımcı olmaktadır. Ayrıca, stokastik modelde varyansın GARCH(1,1) sürecini izlediği varsayımı üzerine ω , α ve β parametreleri de Çizelge 8.4'de verilmiştir.

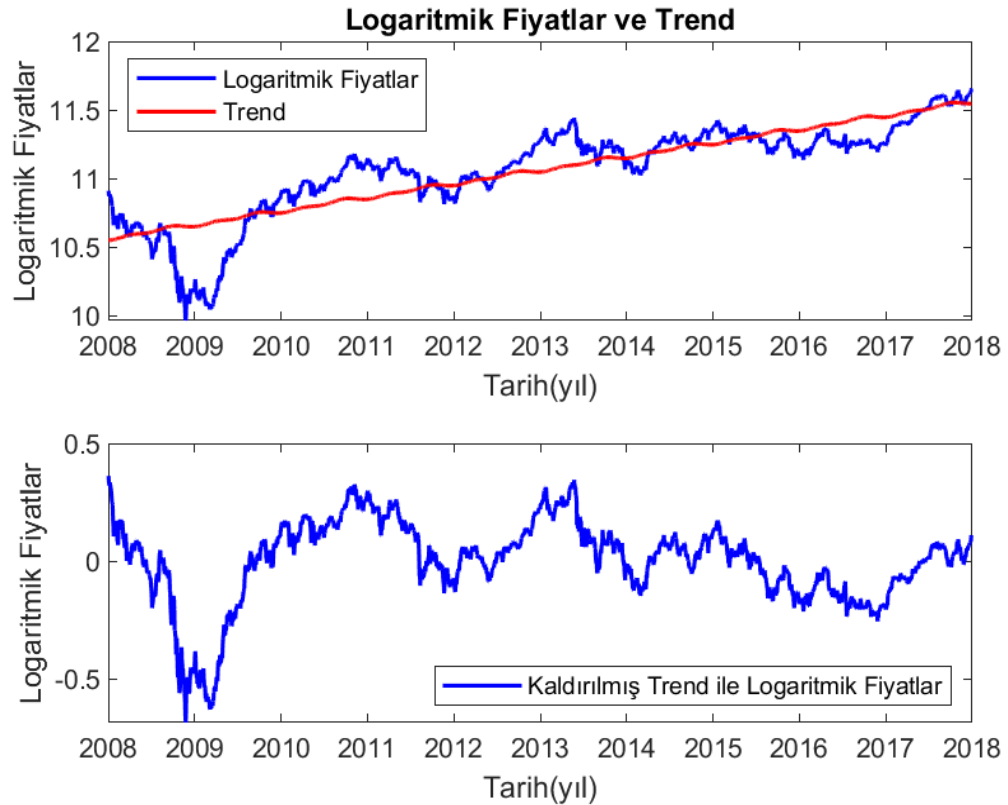
Çizelge 8.4'deki parametreler ve ayırık modeller hisse senedi fiyat hareketlerinin simüle edilmesine izin vermektedir. Benzetim 10000 Monte Carlo denemesi ile yaklaşık beş yıl için gerçekleştirilmiştir. Monte Carlo benzetimi gerçekleştirildikten sonra tekrar trend etkisi eklenmiş akabinde fiyatların üsteli alınarak hisse senedi fiyatları güncellenmiştir.

Çizelge 8.5'de MATLAB® yazılımı ortamında rassal sayı çekirdekleri (random number generator-rng) 0 ile 10 arasında çalıştırılarak model-3 için performans değerlendirmesini göstermektedir. Önerilen model-3 için logaritmik fiyatlardan trend ve trendin kaldırılması Şekil 8.11 ile verilmiş ve seri durağan hale getirilmiştir. Sonrasında model-3 için varyansın GARCH davranışı Çizelge 8.4'deki parametreler kullanılarak Şekil 8.12 ile görselleştirilmiştir.

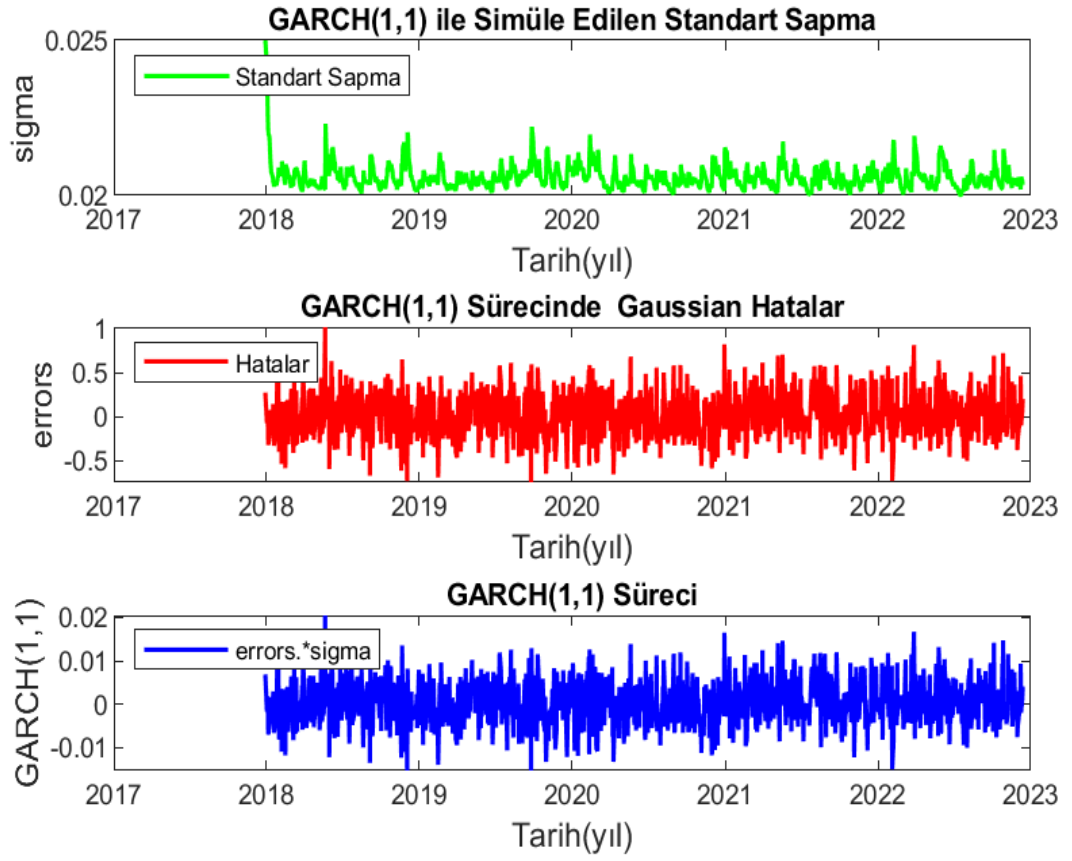
Önerilen model-3 için Çizelge 8.5'de verilen rassal sayı çekirdeği-dokuz için gerçek ve simüle edilen fiyatlar (2018-2023) yılları için Şekil 8.13 ile görselleştirilmiştir. Benzer şekilde, model-3 için Çizelge 8.5'de verilen rassal sayı çekirdeği dokuz için gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (2018-2019 yılları için) Şekil 8.14 ile verilmiştir.

Çizelge 8.4. Önerilen model-3 için spot fiyat (P_t) parametre tahminleri

Trend Bileşeni Parametreleri- $s(t)$		Stokastik Bileşen Parametreleri- (X_t)	
$B0$	0,0593	phi($\emptyset$)	0,9942
BT	0,0179	kappa(κ)	1,4591
$C1$	-1,3586	mu_j= μ_j	-0,0050
$C2$	-0,4037	sigma= σ	1,4060
$C3$	0,3392	sigma_j= σ_j	0,0266
$C4$	-0,6220	lambda(λ)	0,1866
		omega(ω)	8,7177e-05
		alpha(α)	0,2205
		errors	0,2593
		beta (β)	0,7795

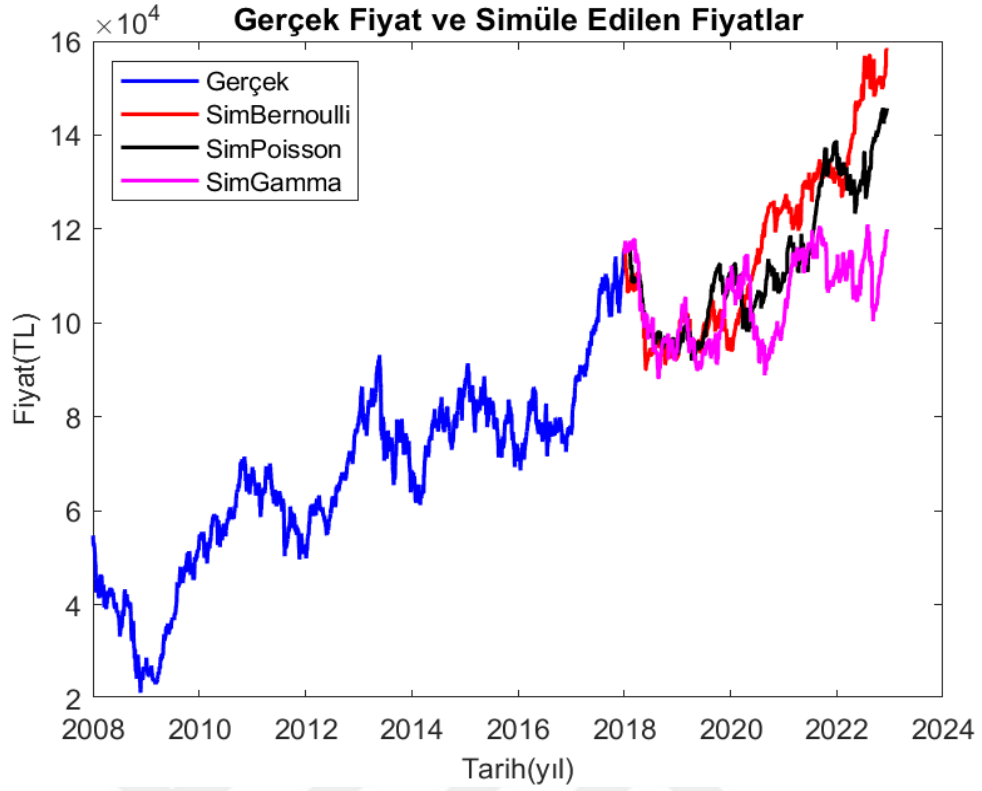


Şekil 8.11. Model-3 için trend ve logaritmik fiyatlar (üst grafik).
Kaldırılmış trend ile logaritmik fiyatlar (alt grafik).

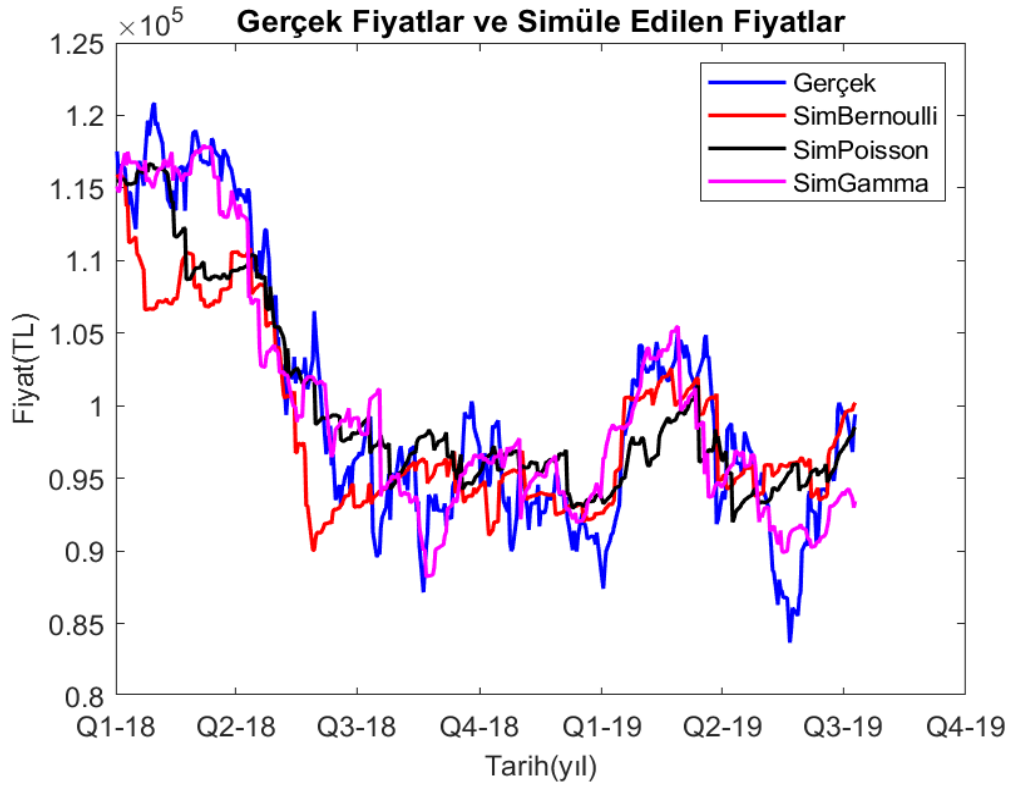


Şekil 8.12. Model-3 için GARCH(1,1) süreci ile dalgalanmanın zamana göre modellenmesi

Çizelge 8.5. Rassal Sayı Çekirdekleri ile model-3 için Performans Değerlendirmesi														
Standart Sapma	Ortalama	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Sıçrama Türleri	Performans Ölçütleri
0.0021	0.0341	0.0378	0.0358	0.0313	0.0344	0.0356	0.0353	0.0332	0.0326	0.0307	0.0337	0.0352	Bernoulli	MAPE
0.0015	0.0337	0.0354	0.0344	0.0354	0.0322	0.0345	0.0336	0.0353	0.0324	0.0341	0.0318	0.0313	Poisson	
0.0020	0.0318	0.0327	0.0262	0.0322	0.0322	0.0336	0.0329	0.0303	0.0317	0.0328	0.0317	0.0331	Gamma	
0.0045	0.0507	0.0491	0.0561	0.0528	0.0494	0.0525	0.0576	0.0524	0.0491	0.0407	0.0472	0.0512	MC-Arima	
0.0308	0.0265	0.0189	0.0064	0.0221	0.0074	0.0130	0.0203	0.0550	0.1075	0.0322	0.0042	0.0044	Bernoulli	RE
0.0123	0.0251	0.0332	0.0103	0.0175	0.0287	0.0070	0.0232	0.0226	0.0199	0.0317	0.0304	0.0521	Poisson	
0.0325	0.0572	0.0736	0.0646	0.0034	0.0270	0.0983	0.0841	0.0943	0.0562	0.0775	0.0338	0.0163	Gamma	
0.0652	0.0841	0.1452	0.0309	0.0721	0.1144	0.2008	0.0163	0.1300	0.0686	0.0034	0.0107	0.1330	MC-Arima	
0.0031	0.0432	0.0459	0.0498	0.0405	0.0435	0.0436	0.0451	0.0419	0.0408	0.0395	0.0402	0.0445	Bernoulli	NRMSE
0.0023	0.0420	0.0425	0.0426	0.0437	0.0402	0.0435	0.0412	0.0431	0.0396	0.0464	0.0383	0.0407	Poisson	
0.0031	0.0399	0.0423	0.0329	0.0395	0.0447	0.0400	0.0410	0.0370	0.0390	0.0419	0.0393	0.0416	Gamma	
0.0060	0.0642	0.0607	0.0726	0.0639	0.0635	0.0673	0.0696	0.0685	0.0614	0.0508	0.0601	0.0679	MC-Arima	
0.0324	0.7758	0.7480	0.7039	0.8042	0.7733	0.7728	0.7571	0.7904	0.8008	0.8131	0.8070	0.7633	Bernoulli	CE
0.0229	0.7889	0.7840	0.7832	0.7723	0.8069	0.7735	0.7971	0.7784	0.8127	0.7427	0.8250	0.8025	Poisson	
0.0285	0.8084	0.7861	0.8705	0.8131	0.7617	0.8086	0.7988	0.8363	0.8187	0.7903	0.8150	0.7930	Gamma	
0.0888	0.5033	0.5602	0.3702	0.5119	0.5181	0.4579	0.4210	0.4399	0.5491	0.6913	0.5687	0.4480	MC-Arima	
55.8313	17.2177	-3.5994	72.6488	27.8559	59.2679	79.1276	-40.7762	113.079	-30.5624	-48.6907	-25.7415	-13.2145	Bernoulli	TS
46.7225	20.7050	-3.3094	7.5544	15.7857	33.7060	39.6031	-41.0906	-13.0689	40.7528	111.8026	-40.5369	76.5558	Poisson	
43.3195	10.4211	75.8807	2.2965	10.8464	-67.8843	-10.8674	49.5740	-2.9339	-14.7802	52.6816	52.9026	-33.0834	Gamma	
110.0044	25.2837	66.9254	205.879	45.0390	169.7298	-56.9440	-92.5940	-153.704	-9.3693	-0.4409	-16.9169	120.5169	MC-Arima	



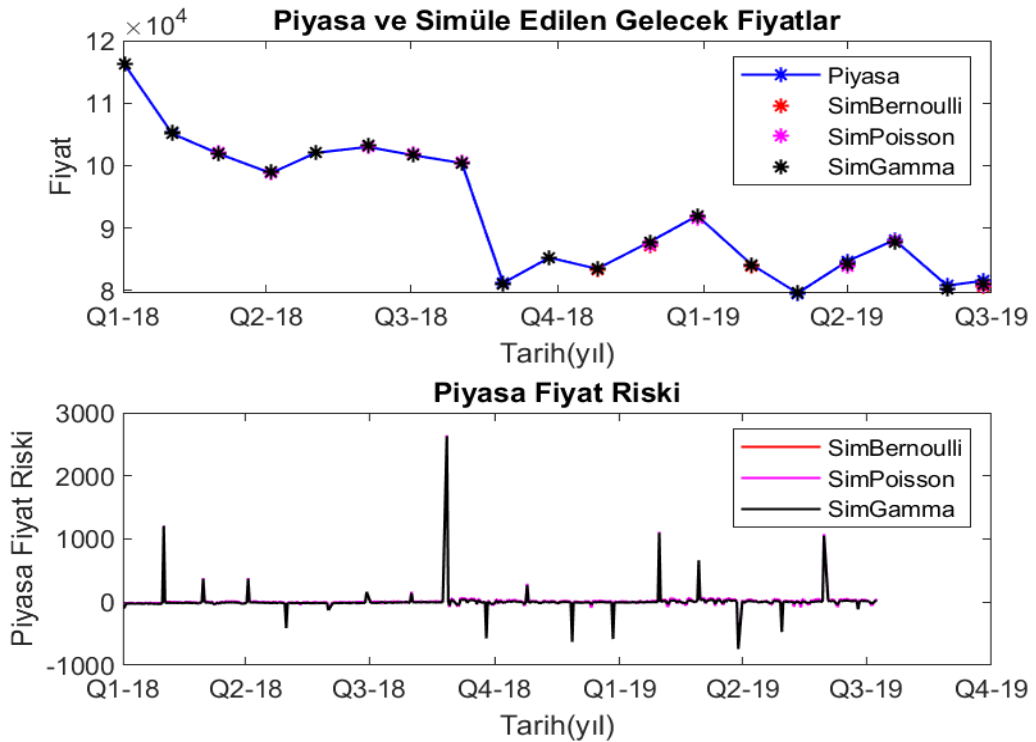
Şekil 8.13. Model-3 için rassal sayı çekirdeği dokuz için gerçek ve simüle edilen fiyatlar (2018-2023)



Şekil 8.14. Model-3 için rassal sayı çekirdeği dokuz için gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (2018-2019)

Bir sonraki adımda daha önce Çizelge 8.4 ile kalibre edilen model parametreleri kullanılarak riske duyarsız Monte Carlo benzetimi gerçekleştirilmiş ve riskin piyasa fiyatı bulunmuştur.

Bir önceki bölümde önerilen model-2’de verilen eşitlik 8.32 dinamiği ile Çizelge 8.4’de yer alan parametre değerleri kullanılarak benzetim gerçekleştirilmiş ve riskin piyasa değeri hesaplanmıştır. Riskin piyasa fiyatını ayarlamak için sırasıyla takip edilmesi gereken adımlar model-2 ile aynı olmak ile birlikte ekstra bilgi verilmemiştir. Trendi kaldırılmış logaritmik fiyatlar üzerine eşitlik 8.32 dinamiği kullanılarak benzetim elde edilmiştir. Elde edilen benzetime tekrar trend eklenmiş ve fiyatlar elde edilmiştir. Böylece riske duyarsız ölçüm altında elde edilen benzetimlerin beklenen değeri ve piyasanın gelecek değerleri Şekil 8.15 ile görselleştirilmiştir.



Şekil 8.15. Model-3 ile rassal sayı çekirdeği dokuz için piyasa ve simüle edilen gelecek fiyatlar(üst grafik). Piyasa fiyat riski (alt grafik)

Trend bileşeni ve değişen varyans ile sıçramalı stokastik $AR(1)$ süreci model-3 olarak belirlenmiş ve Çizelge 8.5 ile analiz edilmiştir. Bu model ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- Rassal sayı çekirdekleri (0-10) koşturulduğunda performans ölçütlerine göre en iyi sonuç dokuzuncu çekirdekte elde edilmiştir. Burada model-3 için başarımlar sırası Gamma, Poisson, Bernoulli ve AR/MA olmaktadır.
- Modelde varyansın fonksiyon olarak modellenmesi Bernoulli sürecinin başarımlarını azaltmıştır. Gamma daha iyi performans göstermeye başlamıştır. Rassal sayı çekirdeği dokuz için; Gamma için $MAPE$ değeri 0,0262, RE değeri 0,0646, $NMRSE$ değeri 0,0329, CE değeri 0,8705 olarak hesaplanmıştır.

8.4. Parametreleri Parçacık Sürü Optimizasyonu İle Kestirilen Değişken Varyanslı Stokastik Model (model-4)

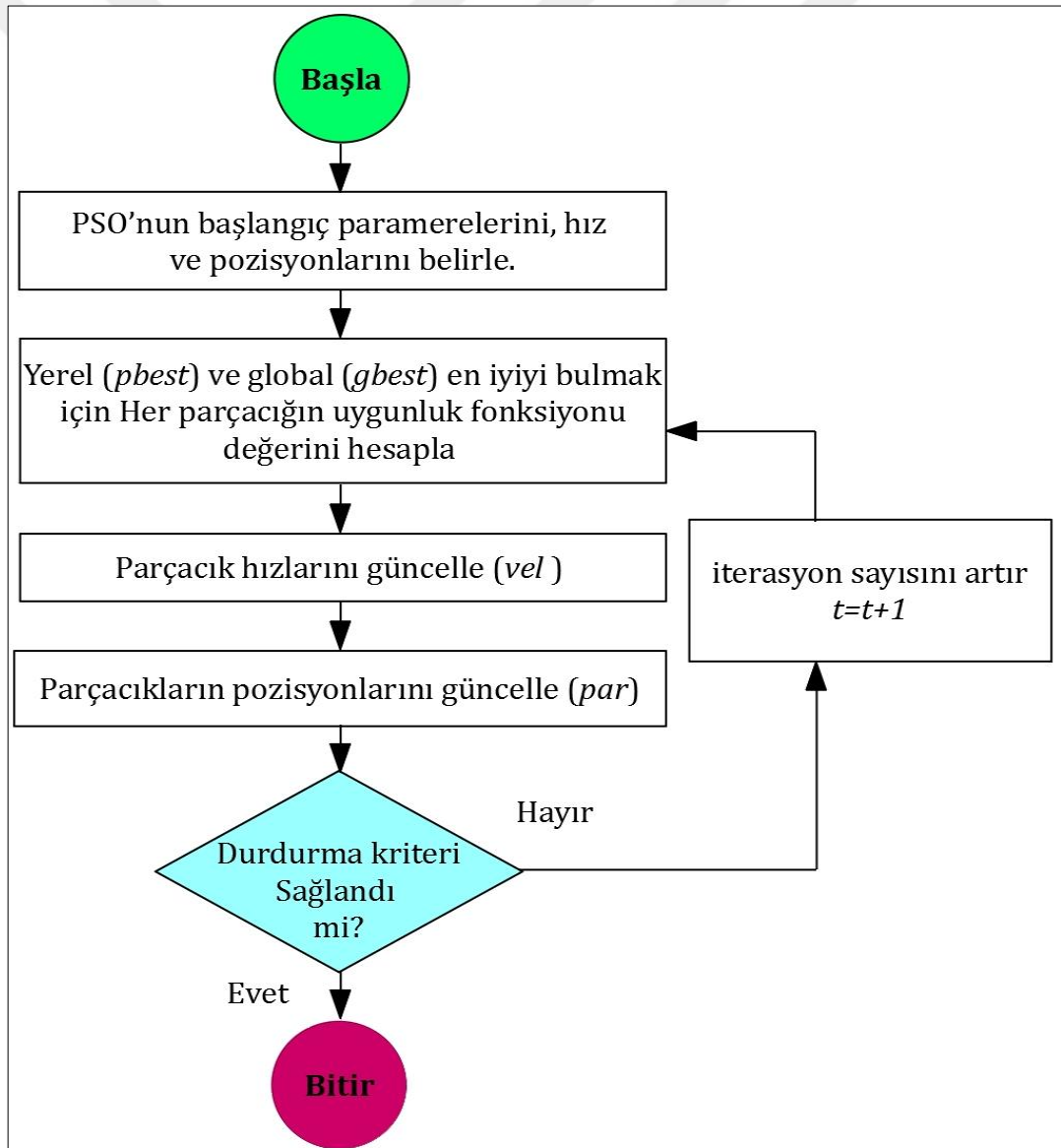
Önerilen model-4 ile hisse senedi fiyat hareketleri için tanımlanan modellerin parametre tahminleri en çok olabilirlik ve diğer karmaşık matematik formüllerine dayalı metotların yerine sezgisel algoritmalar ile parametre tahmini yapılabilir mi, sorusu tartışılmıştır. model-4 olarak tanımlanan yöntem formülasyon ve modelleme açısından model-3 ile aynıdır. Ancak parametre tahminleri en çok olabilirlik metoduna alternatif olarak Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) ile kestirilmiştir.

model-4 parametrelerinin tahmini için önerilen PSO algoritması aşağıda verilmiştir:

PSO, sürü halinde hareket eden bazı hayvanların yiyecek bulmak gibi temel ihtiyaçlarını giderirken sergiledikleri hareketlerin, sürüdeki diğer bireyleri etkilediğinin ve sürünün amacına daha kolay ulaştığının gözlemlenmesinden esinlenerek Dr. Kennedy ve Dr. Eberhart tarafından 1995 yılında geliştirilmiş bir eniyileme algoritmasıdır. Birçok eniyileme problemi geleneksel matematiksel yöntemler aracılığıyla çözülebilmektedir. Bu tür yöntemlerin esnek olmaması ve matematiksel fonksiyonlar ile tanımlama ihtiyacı duyması araştırmacıları farklı

teknikler geliştirmeye sevk etmiştir. Araştırmacılar büyük boyutlu eniyileme problemlerini çözmek için doğa esinli sezgisel algoritmalar geliştirmişlerdir. Böylece doğa olaylarının sosyal davranışları bilgisayar ortamında benzetimi yapılarak çeşitli sezgisel algoritmalar geliştirmişlerdir.

Sezgisel algoritmalar biyolojik evrimin işleyiş biçimini taklit eden ve bazı doğal olayları modelleyen stokastik algoritmalardır. Böylece, sezgisel algoritmalar doğa olaylarının davranışına göre modellenmekte ve bu davranışa göre sezgisel algoritmaların performansı değişmektedir (Wilke, 2005). Parçacık sürü optimizasyonu algoritmasının akış şeması ve adımları şekil 8.16'da verilmiştir.



şekil 8.16. Parçacık sürü optimizasyonu-PSO akış şeması

Temel olarak sürü zekâsının temel alındığı algorithmada, bireyler arasındaki sosyal bilgi paylaşımı esas alınır. Algorithmada tüm çözümler sürü (swarm) olarak adlandırılır ve en iyi çözüme yakınsaması daha hızlıdır. Sürüyü oluşturan her bir kuş ya da birey bir parçacık (particle) olarak adlandırılır. Parçacık sürü algoritmasında parçacık olarak adlandırılan potansiyel çözümler mevcut en iyi çözümleri takip ederek problem uzayında gezinirler. Böylece her bir parçacık kendi pozisyonunu bir önceki parçacığın tecrübesinden yararlanarak sürüdeki en iyi pozisyona doğru ayarlar (Özsağlam ve Çunkaş, 2008).

Bir parçacığın çözüme ne kadar yakın olduğunu anlamak için uygunluk fonksiyonu kullanılır. Örneğin d değişkenli bir problemin uygunluk fonksiyonu hesabı için n adet parçacık ile bir başlangıç çözümü (8.36) ile verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1d} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nd} \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

Sürüdeki i . parçacık için uygunluk fonksiyonu eşitlik 8.37 ile verilmiştir.

$$f_{uygunluk\ değeri} = f(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{id}) \quad (8.37)$$

(8.36) matrisinde parçacık olarak adlandırılan her bir satır bir çözümü ifade etmekte ve n parçacık için n adet çözüm elde edilir (Erdoğan ve Yalçın, 2015).

Parçacık sürü optimizasyonu temel olarak aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

- PSO rassal üretilmiş başlangıç pozisyonları ve hızları ile belirli sayıda çözümle (parçacıkla) başlatılır ve parçacıklar güncellenerek en uygun çözüm değeri araştırılır.
- İlk önce sürü içerisindeki tüm parçacıkların uygunluk değerleri hesaplanır.
- Parçacıkların her biri, parçacığın en iyi kendi çözümü ($pbest$) ve tüm parçacıkların en iyi çözümü ($gbest$) kullanılarak güncellenir. Bu değerler hafızada saklanır.

- Mevcut jenerasyondaki yerel eniyiler içerisinde küresel en iyi (*gbest*) seçilir.
- Değişim hızı fonksiyonu ile her parçacığın yapacağı hareket belirlenir ve yeni durumlar ayarlanır. Yani, her parçacığın hız ve pozisyonları sırasıyla eşitlik 8.38 ve eşitlik 8.39 ile güncellenir.
- Akabinde, uygunluk fonksiyonu ile çözüme ne kadar yaklaşıldığı kontrol edilir. Bu döngü, durma kriterine ulaşıncaya kadar tekrarlanır.

$$vel = C * (w * vel + c_1 * rand_1 * (pbest - par) + c_2 * rand_2 * (ones(parsize, 1) * gbest - par)) \quad (8.38)$$

$$par = par + vel \quad (8.39)$$

Burada;

pbest :Parçacığın çözüme en çok yaklaştığı durum, yani parçacığın en iyi kendi çözümü.

gbest :Tüm parçacıklar arasında çözüme en çok yaklaşılan durum, yani tüm parçacıklar arasında en iyi çözüm.

par :Parçacığın değeri

rand₁, rand₂ :Rassal üretilen sayılar ya da değerler.

maxit :Maksimum iterasyon sayısı.

vel :Parçacığın hızı

iter :Sıfırdan başlayıp maksimum iterasyon sayısına kadar ilerleyen sayaç.

$w = (maxit - iter)/maxit$:Durağanlık (inertia) faktörü

$c_1 = 1$:Bilişsel parametre-(Cognitive parameter) sabit bir değerdir.

$c_2 = 4 - c_1$: Sosyal parametre-(Social parameter) sabit bir değerdir.

c :Daraltma faktörü-(Constriction factor) genellikle 1 değerini almaktadır. Bazen ilgilenilen problem türüne göre parçacık değerlerinin patlamasına izin vermemek için bu değer çok küçük olarak alınmaktadır.

Çizelge 8.1’de parametreleri PSO ile kestirilen değişken varyanslı stokastik model (model-4) verilmişti, ancak modelin daha açık ifadesi konunun daha iyi kavranması açısından eşitlikler-8.40-8.44 ile verilmiştir. Modelin hem deterministik hem de stokastik bileşenin parametreleri PSO kullanılarak tahmin edilmiştir.

PSO’nun parametre tahminleri için güçlü bir arama tekniği olduğu ve fiyatların modellenmesinde kullanılan metotların parametre tahminlerinde kolaylıkla kullanılabileceği anlaşılmıştır. Bu algoritma ile hem trend hemde stokastik bileşenin parametre tahminleri için kullanılan karmaşık matematik bilgisinden arındırılmış ve parametre tahminleri için esnek bir yöntem oluşturulmuştur.

Bu önerilen model tüm özellikleri ile logaritmik fiyatların modellenmesi için uygun bir modeldir.

$$\log P_t = s(t) + X_t \quad (8.40)$$

$$s(t) = B0 + BT.t + C1\sin\left(\frac{(t + C2)2\pi}{250}\right) + C3\sin\left(\frac{(t + C4)4\pi}{250}\right) \quad (8.41)$$

$$X_t = \begin{cases} \phi X_{t-1} + \sigma \varepsilon_{1t}, & 1 - \lambda \text{ ihtimali ile} \\ \phi X_{t-1} + \sigma \varepsilon_{1t} + \mu_j + \sigma_j \varepsilon_{2t}, & \lambda \text{ ihtimali ile} \end{cases} \quad (8.42)$$

$$j_t^a = j = \text{Bernoulli Süreci}$$

$$j_t^b = j = \text{Poisson Süreci}$$

$$j_t^c = j = \text{Gamma Süreci}$$

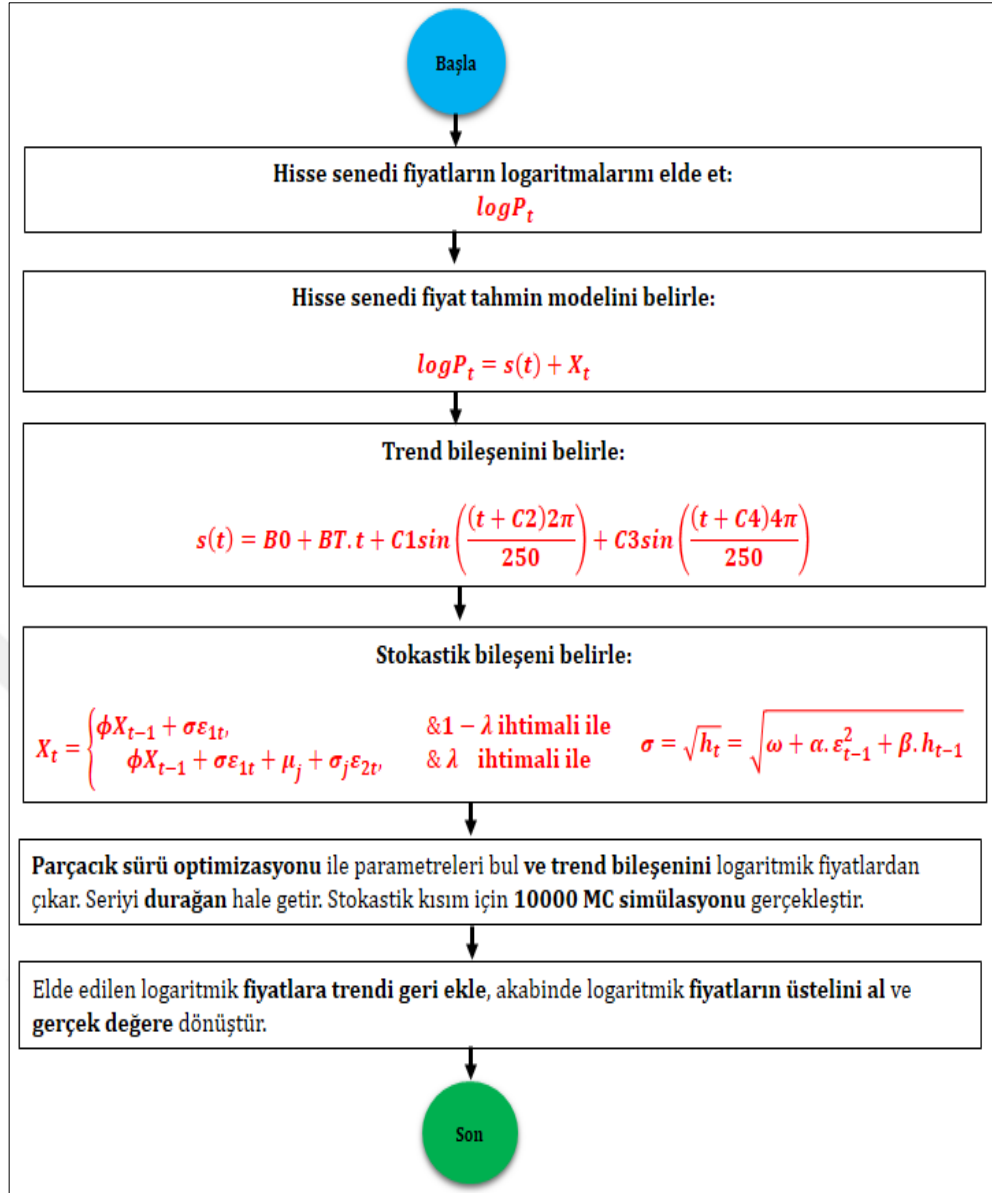
$$\lambda_t^a = \lambda \quad (8.43)$$

$$\sigma_t^a = \sigma = \sqrt{h_t} = \sqrt{\omega + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \cdot h_{t-1}} \quad (8.44)$$

PSO ile parametreleri kestirilen model-4 için akış diyagramı Şekil 8.17’de verilmiştir. Modelin ilk önce $s(t)$ yani deterministik kısmının toplam altı $\theta = \{B0, BT, C1, C2, C3, C4\}$ parametresi PSO ile bulunmuştur. Trend bileşeni– $s(t)$ yani deterministik kısmın toplam altı parametresi; $\theta = \{B0, BT, C1, C2, C3, C4\}$ için MATLAB kodu Ek A kısmında verilmiştir. Yüz iterasyon için döngü gerçekleştirildiğinde gerçek değer olan $\log Prices$ değerlerine en çok yaklaşan değer olarak ölçülen eğri Çizelge 8.6’daki performans ölçüt değerleri baz alınarak seçilmiştir.

Çizelge 8.6. Önerilen model-4 için trend performans değerlendirmesi

<i>MAPE</i>	0,0120
<i>RE</i>	0,0105
<i>NRMSE</i>	0,0160
<i>CE</i>	0,7260
<i>TS</i>	3,7052E-11



Şekil 8.17. PSO ile parametreleri kestirilen değişen varyanslı stokastik modelin akış diyagramı (model-4)

Ek A kısmında yer alan $[ff]_{2518 \times 20}$ matrisi 2518x20 boyutunda bir matristir. 2518 satır 2008-2017 yılları arasındaki gün sayısını ifade etmekte iken 20 sütun sayısı ise parçacık sürüsünün büyüklüğünü ifade etmektedir. En düşük *MAPE* değeri 0,0120 ile *sutun_seasonality*=8. sütunda elde edilmiştir.

Stokastik kısmın parametrelerini kestirmek için; logaritmik verilerden ilk önce trend bileşeni çıkarıldıktan sonra durağan hale getirilmiş ve eğri uydurma işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu kez en uygun eğrinin ayarlanması için eşitlik 8.42;

$\theta = \{errors, \emptyset, \mu_j, \sigma^2, \sigma_j^2, \omega, \alpha, \beta, \lambda\}$ parametrelerinin kestirimi için PSO çalıştırılmıştır.

Yukarıdaki trend bileşeni için gerçekleştirilen tüm adımlar stokastik bileşen için de aynı olmakta ve yapılan gerekli değişiklikler ve ilgili MATLAB kodu Ek B kısmında verilmiştir.

Ek B kısmında verilen $[Stoc_ff]_{2518 \times 20}$ matrisi 2518×20 boyutunda bir matristir. 2518 satır, 2008-2017 yılları arasındaki gün sayısını ifade etmekte iken 20 sütun ise parçacık sürüsünün büyüklüğünü ifade etmektedir. En düşük *MAPE* değeri 5,4054 ile 14. sütunda elde edilmiştir. Stokastik kısımda, sıçramalı Vasicek modeli eğrisinin durağan hale getirilen verinin ortasından geçecek şekilde eğri ayarlanmalıdır. Akabinde sıçramalar ve trend bileşeni eklenince gerçek bir sistemi temsil eden bir mekanizmaya dönüşmüştür.

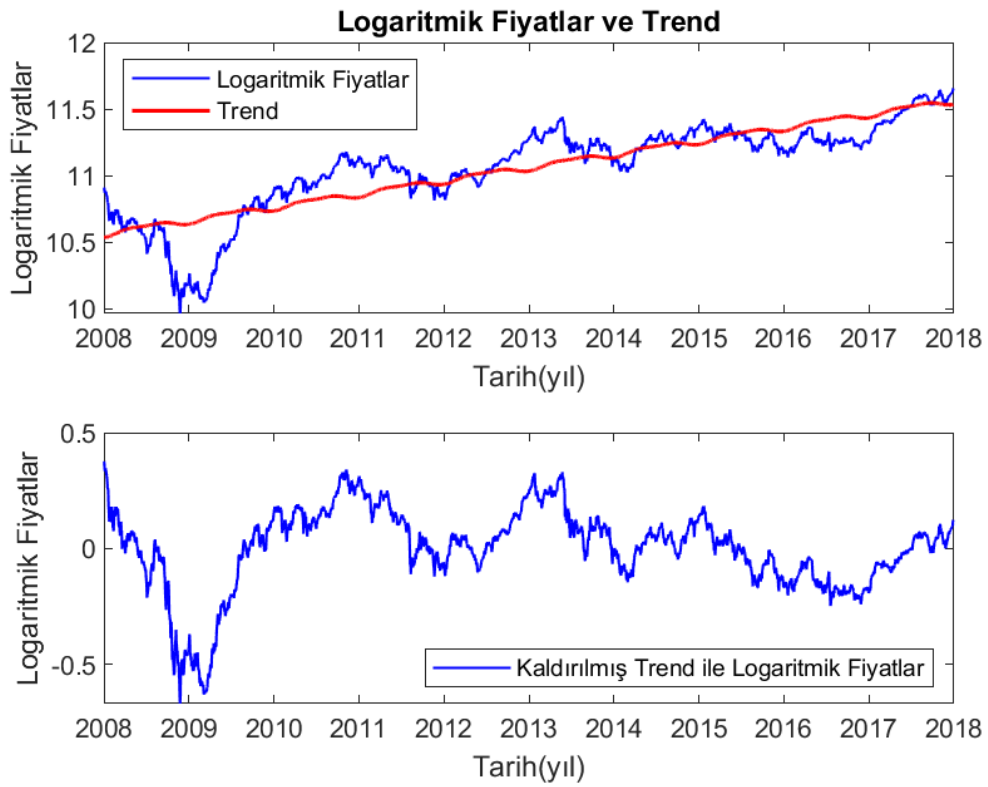
Önerilen PSO sezgisel algoritması ile modelin parametre tahmini için kullanılması, kullanıcıları hem ciddi matematik bilgisinden kurtaracak hem de kolay ve esnetilebilir bir sistem elde edilecektir. PSO kullanılarak trend ve stokastik bileşen için elde edilen parametreler Çizelge 8.7 ile verilmiştir. Logaritmik fiyatların trend ve trendin kaldırılması ile ilgili görselleri Şekil 8.18 ile çizilmiştir.

GARCH(1,1) süreci ile dalgalanmanın zamana göre modellenmesinin PSO ile stokastik modellerde yer alabileceği ve parametre tahmininin yapılabileceği Şekil 8.19 ile görülmektedir. Gerçek ve farklı sıçrama büyüklüklerine göre simüle edilen fiyatlar Şekil 8.20 ile görselleştirilmiştir. Benzer şekilde, 2018 ve 2019 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması Şekil 8.21 ile verilmiştir. Piyasa ve farklı sıçrama büyüklükleri ile simüle edilen gelecek fiyatlar ve piyasa fiyat riski Şekil 8.22 ile gösterilmiştir.

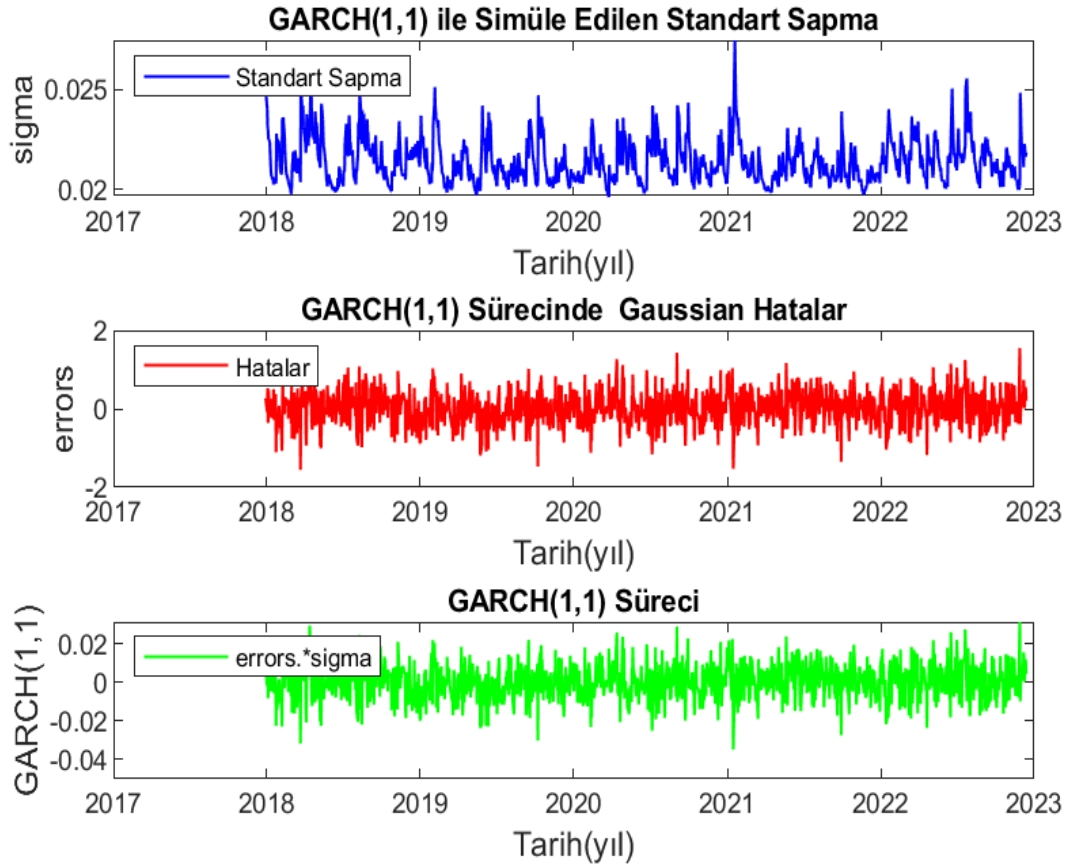
Trend bileşeni için parametre sınırları ± 10 olarak belirlenmiştir. PSO için başlangıç sürüsü 20 olarak belirlenmiş ve 100 iterasyon sonucu Çizelge 8.7'deki değerler elde edilmiştir. Stokastik bileşen için her parametrenin kısıtları

gözönünde bulundurularak parametrelerin değerleri atanmıştır. Negatif değer alması muhtemel parametreler için ± 1 belirlenirken, pozitif değer alan parametreler sıfır (0) ile +1 olarak atanmıştır.

Benzetim 10000 Monte Carlo denemesi ile yaklaşık beş yıl için yapılmış akabinde tekrar trend etkisi eklenmiştir. Böylece benzetim sonucu elde edilen yollardan en iyi performans ölçüt değerlerine sahip yol(lar) çizilmiştir.



Şekil 8.18. Model-4 için trend ile logaritmik fiyatlar (üst grafik).
Kaldırılmış trend ile logaritmik fiyatlar (alt grafik).



Şekil 8.19. Model-4 için GARCH(1,1) süreci ile dalgalanmanın zamana göre modellenmesi

Çizelge 8.7. Model-4 için spot fiyatların (P_t) PSO ile parametre tahminleri

Trend Bileşeni Parametreleri- $s(t)$		Stokastik Bileşen Parametreleri- (X_t)	
$B0$	0,9376	$\phi(\emptyset)$	0,9947
BT	-2,1555	$\kappa(\kappa)$	1,3212
$C1$	2,9263	$\mu_j=\mu_j$	-0,0049
$C2$	-7,2275	$\sigma=\sigma$	0,0245
$C3$	5,0746	$\sigma_j=\sigma_j$	0,0188
$C4$	3,0816	$\lambda(\lambda)$	0,1906
		$\omega(\omega)$	8,7178e-05
		$\alpha(\alpha)$	0,2266
		errors	0,0270
		$\beta(\beta)$	0,7707

Riske duyarsız ölçüm altında eşitlik 8.45 benzetimi (Seifert ve Uhrig-Homburg, 2007) tabi tutularak ve Çizelge 8.7'deki parametre değerleri kullanılarak benzetim gerçekleştirilmiş ve sonrasında tekrar trend etkisi eklenmiştir. Logaritmik fiyatların üsteli alınarak normal fiyat değerlerine çevrilmiştir. Riske duyarsız benzetimin piyasanın gelecek değerlerini yakından ürettiği görülmektedir (Seifert ve Uhrig-Homburg, 2007).

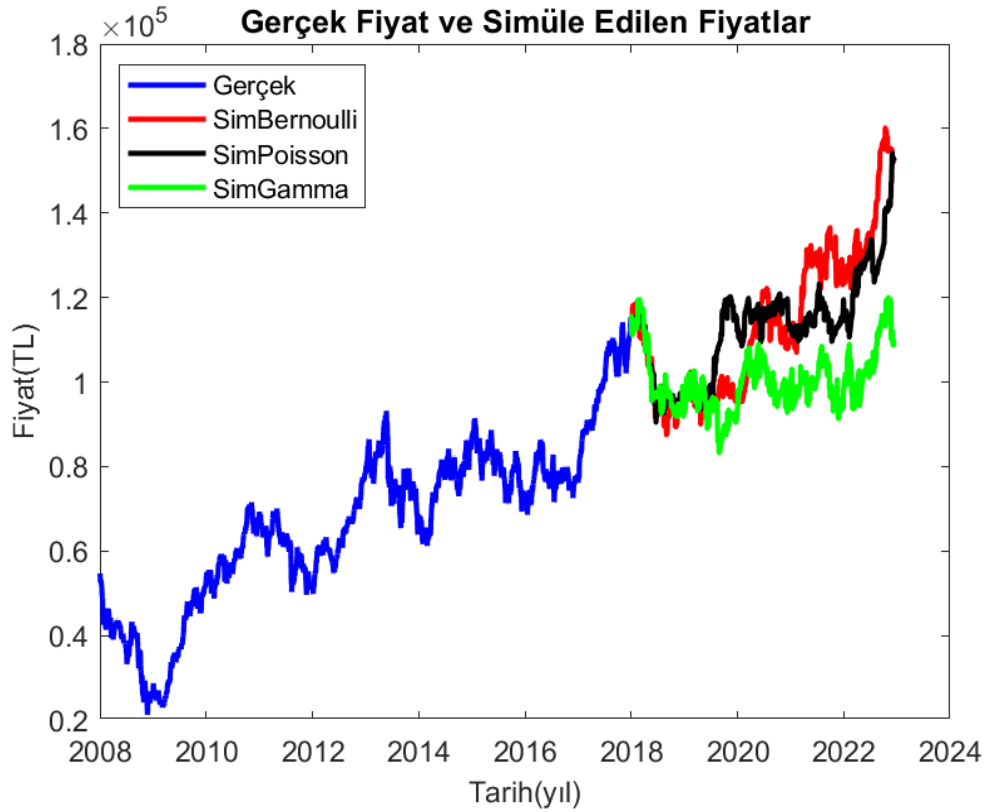
$$X_t = \begin{cases} \phi X_{t-1} - \sigma m_{t-1} \Delta t + \sigma \varepsilon_{1t}, & 1 - \lambda \text{ ile} \\ \phi X_{t-1} - \sigma m_{t-1} \Delta t + \sigma \varepsilon_{1t} + \mu_j + \sigma_j \varepsilon_{2t}, & \lambda \text{ ile} \end{cases} \quad (8.45)$$

Parametreleri PSO ile kestirilen değişken varyanslı stokastik model (model-4) için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

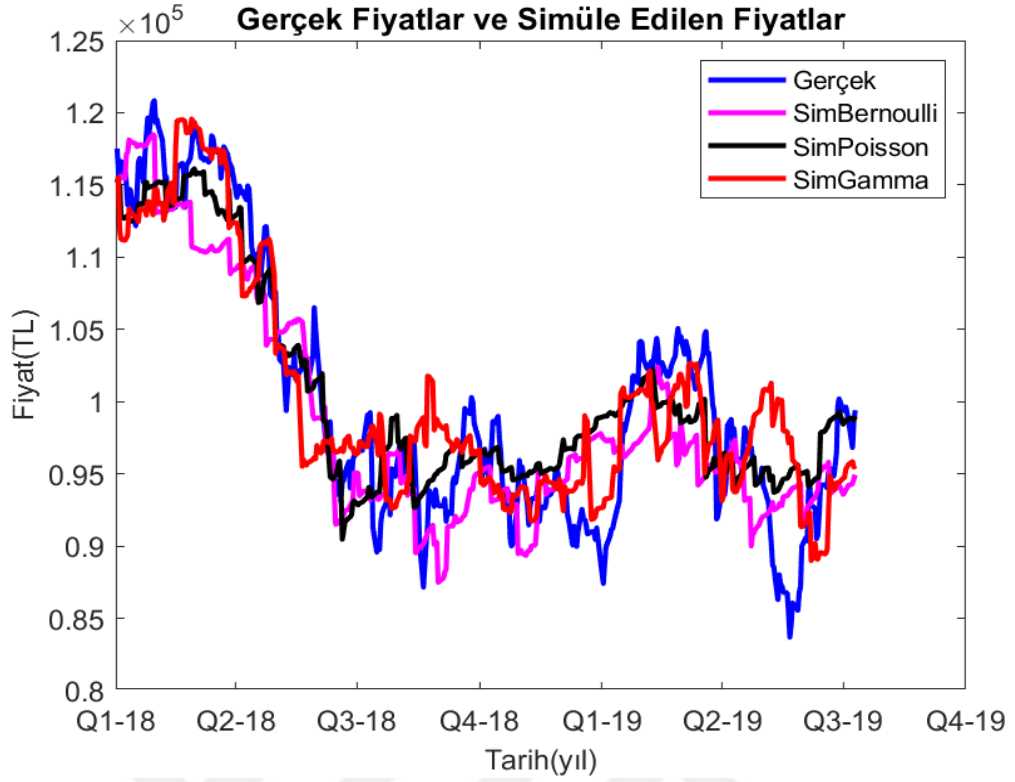
- Rassal sayı çekirdekleri (0-10) koşturularak model-4 için performans değerlendirmesi Çizelge 8.8 ile verilmiştir. Çizelge 8.8 incelendiğinde rassal sayı çekirdeği beş (5) için en uygun performans ölçüt değerleri elde edilmiştir.
- En iyi başarımlar sıralaması sırasıyla Poisson, Gamma, Bernoulli ve MC *ARIMA* olarak tespit edilmiştir. Poisson için *MAPE* değeri 0,0299, *RE* değeri 0,0432, *NRMSE* değeri 0,0363 ve *CE* değeri 0,8425 olarak hesaplanmıştır.
- İkinci sırada başarımlar gösteren Gamma için *MAPE* değeri 0,0345, *RE* değeri 0,0508, *NRMSE* değeri 0,0434 ve *CE* değeri 0,7752 olarak elde edilmiştir. Böylece hem model-3 hem de model-4 için Poisson ve Gamma süreçlerinin iyi başarımlar gösterdiği söylenebilir. Bu sıralama Poisson ve Gamma arasında değişim göstermektedir.
- Zaman serilerini modellemek için önerilen modellerin parametrelerinin PSO ile kestirilebileceği tespit edilmiştir.
- Özellikle sıçrama parametreleri olsun stokastik modelde fonksiyon olarak tanımlanan bileşenlerin parametreleri olsun eş zamanlı olarak parametre tahmini yapılması zor iştir. PSO'nun modele eklenen tüm bileşenlerin parametre tahminleri yapabileceği üstün nitelikte arama algoritması olduğu bu model türünde belirtilmiştir.
- Şekil 8.20 incelendiğinde rassal sayı çekirdeği beş için öngörölmüş fiyatlar bulunmaktadır. Poisson sürecinin benzetim açısından Gamma ile iniş ve

çıkışlarda benzerlik gösterdiği 2020 yılının ilk dönemlerinde bir düşüş gösterdiği akabinde belli bir dönem yükselişe geçtiği görülmektedir. 2021 yılı etrafında durağan bir seriyi izleyecek şekilde yol izlediği ciddi yükseliş ve azalışların olmadığı görülmektedir. BIST-100 endeksinin 2022 yılından başlayan ani bir yükselişe geçtiği söylenebilir.

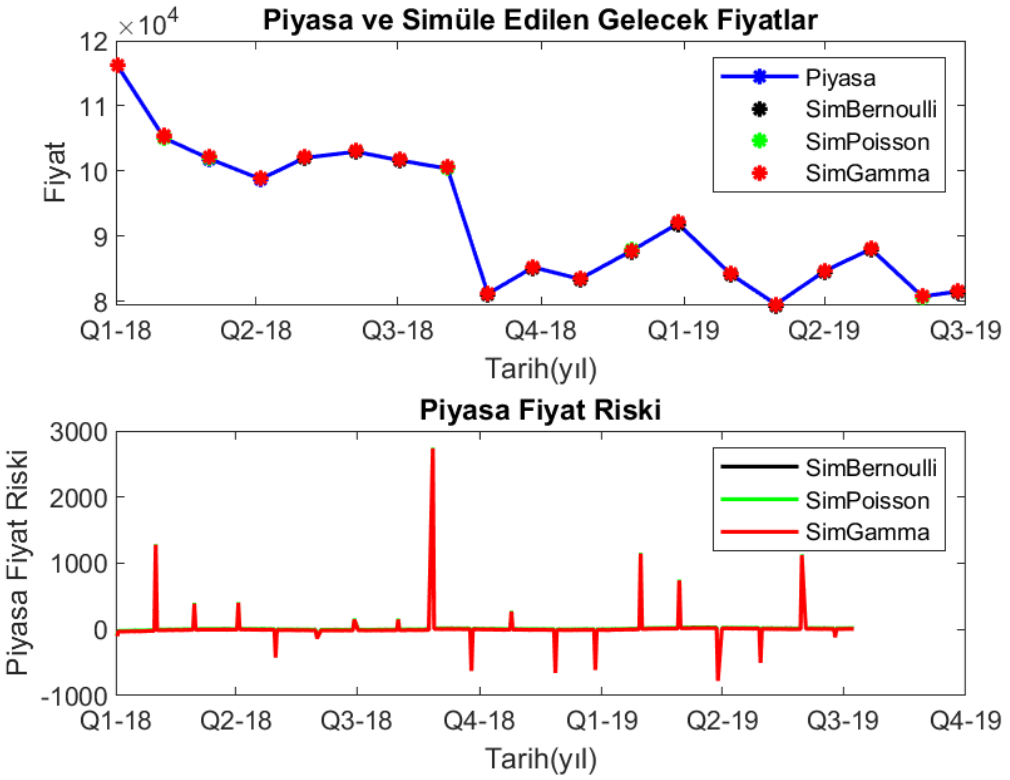
- Şekil 8.21 incelendiğinde Poisson ve Gamma süreçlerinin 2018-2019 yılında trendleri yakalayabildiği söylenebilir. Başarım yetersizliği açısından *ARIMA* modelinin yorumlanmasına yer verilmemiştir. Ancak bu durum *ARIMA* modelinin öngörü için kullanılmayacağı anlamına gelmemelidir. *ARIMA* modeline sıçramalar eklendiğinde performansının değişeceği ve kısmen iyi başarımlar gösterebileceği düşünülmektedir.



Şekil 8.20. Model-4 için rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatlar (2018-2023)



Şekil 8.21. Model-4 için rassal sayı çekirdeği beş için gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (2018-2019)

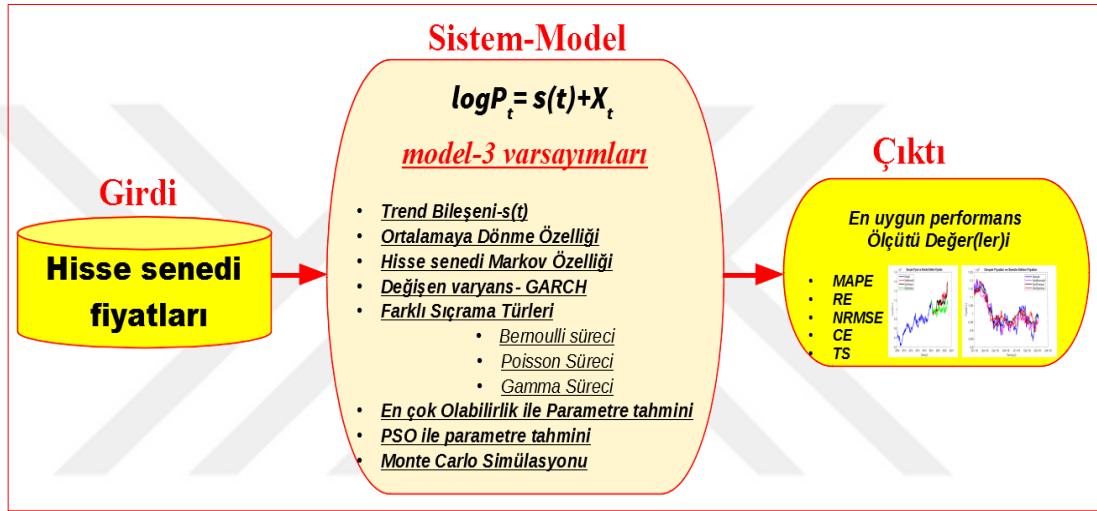


Şekil 8.22. Model-4 için rassal sayı çekirdeği beş için piyasa ve simüle edilen gelecek fiyatlar(üst grafik). Piyasa fiyat riski (alt grafik)

Çizelge 8.8. Rassal Sayı Çekirdekleri ile PSO kullanarak model-4 için Performans Değerlendirmesi														
Standart Sapma	Ortalama	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Sıçrama Türleri	Performans Ölçütleri
0.0018	0.0337	0.0326	0.0335	0.0350	0.0338	0.0355	0.0367	0.0315	0.0351	0.0326	0.0305	0.0337	Bernoulli	MAPE
0.0020	0.0330	0.0375	0.0336	0.0314	0.0316	0.0333	0.0299	0.0337	0.0343	0.0322	0.0320	0.0336	Poisson	
0.0013	0.0335	0.0354	0.0347	0.0340	0.0340	0.0330	0.0345	0.0307	0.0323	0.0336	0.0330	0.0335	Gamma	
0.0045	0.0507	0.0491	0.0561	0.0528	0.0494	0.0525	0.0576	0.0524	0.0491	0.0407	0.0472	0.0512	MC-Arima	
0.0348	0.0482	0.0082	0.0071	0.0145	0.0766	0.1130	0.0630	0.0422	0.0917	0.0269	0.0462	0.0405	Bernoulli	RE
0.0272	0.0373	0.0049	0.0363	0.0257	0.0103	0.0125	0.0432	0.0537	0.0800	0.0380	0.0193	0.0863	Poisson	
0.0231	0.0659	0.0633	0.0539	0.0388	0.0846	0.0786	0.0508	0.1127	0.0761	0.0717	0.0290	0.0652	Gamma	
0.0652	0.0841	0.1452	0.0309	0.0721	0.1144	0.2008	0.0163	0.1300	0.0686	0.0034	0.0107	0.1330	MC-Arima	
0.0024	0.0419	0.0396	0.0409	0.0451	0.0412	0.0439	0.0452	0.0390	0.0447	0.0408	0.0392	0.0408	Bernoulli	NRMSE
0.0040	0.0418	0.0497	0.0458	0.0381	0.0386	0.0445	0.0363	0.0414	0.0447	0.0408	0.0381	0.0416	Poisson	
0.0021	0.0424	0.0463	0.0441	0.0414	0.0433	0.0419	0.0434	0.0395	0.0388	0.0423	0.0426	0.0432	Gamma	
0.0060	0.0642	0.0607	0.0726	0.0639	0.0635	0.0673	0.0696	0.0685	0.0614	0.0508	0.0601	0.0679	MC-Arima	
0.0244	0.7901	0.8128	0.7999	0.7573	0.7969	0.7701	0.7556	0.8185	0.7608	0.8010	0.8167	0.8013	Bernoulli	CE
0.0403	0.7924	0.7048	0.7488	0.8267	0.8219	0.7632	0.8425	0.7947	0.7927	0.8015	0.8265	0.7928	Poisson	
0.0210	0.7844	0.7439	0.7677	0.7948	0.7764	0.7901	0.7752	0.8137	0.8201	0.7863	0.7828	0.7773	Gamma	
0.0888	0.5033	0.5602	0.3702	0.5119	0.5181	0.4579	0.4210	0.4399	0.5491	0.6913	0.5687	0.4480	MC-Arima	
39.9125	-12.9599	-33.0235	-78.7464	36.6918	19.9700	6.9204	-3.1749	-45.7327	-44.8268	-1.3371	48.2047	-47.5040	Bernoulli	TS
44.9507	9.0206	-69.4044	71.1471	-23.8267	-22.8561	81.1959	-12.5430	32.1331	-1.5369	17.0051	-14.9229	42.8351	Poisson	
53.6473	38.0329	107.7930	63.6004	-8.3563	107.7911	56.8347	20.3538	69.3597	-12.4220	16.5467	-66.5718	63.4322	Gamma	
110.0044	25.2837	66.9254	205.879	45.0390	169.7298	-56.9440	-92.5940	-153.704	-9.3693	-0.4409	-16.9169	120.5169	MC-Arima	

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında bilimsel yazında en çok değişkenlik gösteren BIST-100 endeksi hisse senedi fiyat hareketleri analiz edilmiştir. Önerilen modellerde finansal zaman serisinin trend, ortalamaya geri dönme, değişkenliğin GARCH davranışı ve farklı sıçrama büyüklükleri ile eş zamanlı olarak modellenmiş ve ilgili akış şeması Şekil 9.1’de verilmiştir. Farklı rassal sayı çekirdekleri koşturularak önerilen modellerin performansları Çizelge 9.1’de özetlenmiştir.



Şekil 9.1. Seçilen en uygun model (model-3) için sistem akış şeması

Çizelge 9.1. Rassal Sayı Çekirdekleri (0-10) Koşturularak Önerilen Modellerin Performanslarının Karşılaştırılması										
model-4 için Standart Sapma	model-4 için Ortalama	model-4 Tahmini	model-3 için Standart Sapma	model-3 için Ortalama	model-3 Tahmini	model-2 için Standart Sapma	model-2 için Ortalama	model-2 Tahmini	Sıçrama Türleri	Performans Ölçütleri
0.0018	0.0337	0.0367	0.0021	0.0341	0.0358	0.0036	0.0384	0.0314	Bernoulli	MAPE
0.0020	0.0330	0.0299	0.0015	0.0337	0.0344	0.0021	0.0398	0.0389	Poisson	
0.0013	0.0335	0.0345	0.0020	0.0318	0.0262	0.0044	0.0471	0.0523	Gamma	
0.0045	0.0507	0.0576	0.0045	0.0507	0.0561	0.0045	0.0507	0.0576	MC-Arima	
0.0348	0.0482	0.0630	0.0308	0.0265	0.0064	0.0369	0.0460	0.0127	Bernoulli	RE
0.0272	0.0373	0.0432	0.0123	0.0251	0.0103	0.0290	0.0411	0.0152	Poisson	
0.0231	0.0659	0.0508	0.0325	0.0572	0.0646	0.0895	0.0874	0.0584	Gamma	
0.0652	0.0841	0.0163	0.0652	0.0841	0.0309	0.0652	0.0841	0.0163	MC-Arima	
0.0024	0.0419	0.0452	0.0031	0.0432	0.0498	0.0044	0.0480	0.0407	Bernoulli	NRMSE
0.0040	0.0418	0.0363	0.0023	0.0420	0.0426	0.0034	0.0497	0.0518	Poisson	
0.0021	0.0424	0.0434	0.0031	0.0399	0.0329	0.0055	0.0598	0.0637	Gamma	
0.0060	0.0642	0.0696	0.0060	0.0642	0.0726	0.0060	0.0642	0.0696	MC-Arima	
0.0244	0.7901	0.7556	0.0324	0.7758	0.7039	0.0496	0.7222	0.8023	Bernoulli	CE
0.0403	0.7924	0.8425	0.0229	0.7889	0.7832	0.0406	0.7032	0.6796	Poisson	
0.0210	0.7844	0.7752	0.0285	0.8084	0.8705	0.0748	0.5691	0.5151	Gamma	
0.0888	0.5033	0.4210	0.0888	0.5033	0.3702	0.0888	0.5033	0.4210	MC-Arima	
39.9125	-12.9599	-3.1749	55.8313	17.2177	72.6488	508.522	-138.055	492.190	Bernoulli	TS
44.9507	9.0206	-12.5430	46.7225	20.7050	7.5544	712.225	-60.737	766.668	Poisson	
53.6473	38.0329	20.3538	43.3195	10.4211	2.2965	647.401	84.885	795.161	Gamma	
110.0044	25.2837	-92.5940	110.0044	25.2837	205.879	110.0044	25.2837	-92.5940	MC-Arima	

Çizelge 9.1 analiz edildiğinde; performans ölçüt değerleri model-2 için maddeler halinde aşağıda tartışılmıştır:

- Çizelge 9.1’de önerilen model-2 (sabit varyanslı stokastik model) rassal sayı çekirdekleri (0-10) arasında koşturularak beşinci (5) koşturmada en iyi performans değerleri sırasıyla Bernoulli, Poisson, Gamma ve *ARİMA*(1,1,1) olacak şekilde bulunmuştur.
- Önerilen model-2 için her dört yöntem performans kriteri *MAPE* açısından değerlendirildiğinde; Bernoulli *MAPE* değeri 0,0314, Poisson *MAPE* değeri 0,0389, Gamma *MAPE* değeri 0,0523 ve Monte Carlo(MC) *ARİMA*(1,1,1) *MAPE* değeri 0,0576 olarak bulunmuştur. model-2 için en düşük (iyi) *MAPE* değeri sıralaması Bernoulli, Poisson, Gamma ve *ARİMA* olarak bulunmuştur.
- Benzer şekilde, model-2 için nisbi hata (*RE*) değerlendirilecek olursa; Bernoulli *RE* değeri % 1,27, Poisson *RE* değeri % 1,52, Gamma *RE* değeri % 5,84 ve MC *ARİMA* için *RE* değeri % 1,63 olarak bulunmuştur. Yöntemler, nisbi hatalar açısından Çizelge 7.1 esas alınarak değerlendirildiğinde dört yöntemde düşük nisbi hata sınıfına düşmektedir. Sıralama olarak Bernoulli, Poisson, MC *ARİMA* ve Gamma olmaktadır.
- Normalize Edilmiş Kök Ortalama Kare Hata-*NRMSE* açısından model-2 değerlendirilecek olunursa; Bernoulli için *NRMSE* değeri 0,0407, Poisson için *NRMSE* değeri 0,0518, Gamma için *NRMSE* değeri 0,0637 ve MC *ARİMA* için *NRMSE* değeri 0,0696 olarak elde edilmiştir. Yöntemlerin en düşük *NRMSE* değeri açısından sıralanması ise Bernoulli, Poisson, Gamma ve *ARİMA* olmaktadır.
- Katsayı etkinliği (*CE*) açısından model-2 değerlendirilecek olunursa; Bernoulli için *CE* değeri 0,8023, Poisson için *CE* değeri 0,6796, Gamma için *CE* değeri 0,5151 ve *ARİMA* için 0,4210 olarak hesaplanmıştır. Katsayı etkinliği performansının sınıflandırılması için Çizelge 7.2’ye bakıldığında sırasıyla en uygun modeller Bernoulli, Poisson, Gamma ve *ARİMA* olmaktadır.

- Sinyal izleme kriteri performans ölçütleri açısından en iyi model-3 için grafiği çizilip yorumlanmıştır.
- Böylece model-2 için özetle denilebilir ki yukarıdaki yöntemlerden en iyi yöntem Bernoulli sürecidir. Bernoulli *MAPE* değeri 0,0314, *RE* değeri 0,0127, *NRMSE* değeri 0,0407 ve *CE* değeri 0,8023 olarak bulunmuştur.

Çizelge 9.1 analiz edildiğinde; performans ölçüt değerleri model-3 için maddeler halinde aşağıda tartışılmıştır:

- Çizelge 9.1’de önerilen model-3 (değişken varyanslı stokastik model) için rassal sayı çekirdekleri (0-10) arasında koşturularak dokuzuncu (9) koşturmada en iyi performans değerleri genel olarak sırasıyla Gamma, Poisson, Bernoulli ve *ARİMA*(1,1,1) olacak şekilde bulunmuştur.
- Her dört yöntemin performans kriteri *MAPE* açısından model-3 için değerlendirilirse; Gamma *MAPE* değeri 0,0262, Poisson *MAPE* değeri 0,0344, Bernoulli *MAPE* değeri 0,0358 ve MC *ARİMA*(1,1,1) *MAPE* değeri 0,0561 olarak bulunmuştur. model-3 için en düşük *MAPE* değerleri sırasıyla Gamma, Poisson, Bernoulli ve MC *ARİMA* olarak bulunmuştur.
- Nisbi hata(*RE*) model-3 için değerlendirilecek olunursa; Gamma *RE* değeri % 6,46, Poisson *RE* değeri % 1,03, Bernoulli *RE* değeri % 0,64 ve MC *ARİMA* için *RE* değeri % 3,09 olarak bulunmuştur. Yöntemler, nisbi hatalar açısından Çizelge 7.1 esas alınarak değerlendirildiğinde dört yöntemde düşük nisbi hata sınıfına düşmektedir. Sıralama olarak Bernoulli, Poisson, MC *ARİMA* ve Gamma olmaktadır.
- Normalize Edilmiş Kök Ortalama Kare Hata-*NRMSE* açısından model-3 değerlendirildiğinde; Gamma için *NRMSE* değeri 0,0329, Poisson için *NRMSE* değeri 0,0426, Bernoulli için *NRMSE* değeri 0,0498 ve MC *ARİMA* için *NRMSE* değeri 0,0726 olarak hesaplanmıştır. Yöntemlerin en düşük *NRMSE* değeri açısından sıralanması ise Gamma, Poisson, Bernoulli ve *ARİMA* olmaktadır.
- Katsayı etkinliği (*CE*) açısından model-3 değerlendirildiğinde; Gamma için *CE* değeri 0,8705, Poisson için *CE* değeri 0,7832, Bernoulli için *CE* değeri 0,7039 ve *ARİMA* için 0,3702 olarak bulunmuştur. Katsayı etkinliği

performansının sınıflandırılması için Çizelge 7.2'ye bakıldığında sırasıyla en uygun modeller Gamma, Poisson, Bernoulli ve *ARIMA* olmaktadır.

- Genel olarak model-3 için bir özetleme yapılırsa; yukarıdaki yöntemlerden en iyi yöntem Gamma sürecidir. Gamma *MAPE* değeri 0,0262, *RE* değeri 0,0646, *NRMSE* değeri 0,0329 ve *CE* değeri 0,8705 olarak bulunmuştur.

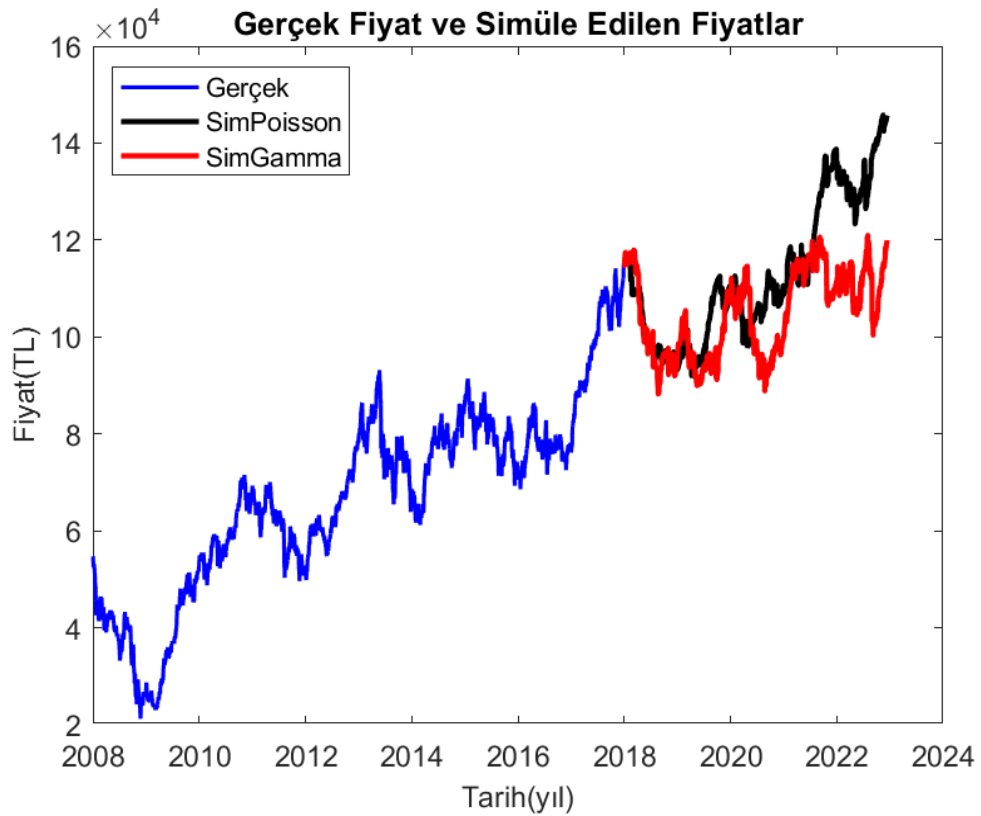
Çizelge 9.1 analiz edildiğinde; performans ölçüt değerleri model-4 için maddeler halinde aşağıda tartışılmıştır:

- Çizelge 9.1'de parametreleri PSO ile kestirilen değişen varyans ve trend bileşeni ile sıçramalı *AR(1)* modeli (model-4) için rassal sayı (0-10) çekirdekleri koşturularak beşinci (5) koşturmada en iyi performans değerleri elde edilmiş ve sırasıyla Poisson, Gamma, Bernoulli ve *ARIMA* yöntemleri olarak bulunmuştur.
- *MAPE* açısından model-4 değerlendirildiğinde; Poisson *MAPE* değeri 0,0299, Gamma *MAPE* değeri 0,0345, Bernoulli *MAPE* değeri 0,0367 ve MC *ARIMA* *MAPE* değeri 0,0576 olarak bulunmuştur. Önerilen model-4 için en düşük *MAPE* değerleri sırasıyla Poisson, Gamma, Bernoulli ve MC *ARIMA* olarak elde edilmiştir.
- Nisbi hata (*RE*) model-4 için değerlendirildiğinde; Poisson *RE* değeri % 4,32, Gamma *RE* değeri % 5,08, Bernoulli *RE* değeri % 6,30 ve MC *ARIMA* için *RE* değeri % 1,63 olarak bulunmuştur. Yöntemler, nisbi hatalar Çizelge 7.1 esas alınarak değerlendirildiğinde dört yöntemde düşük nisbi hata sınıfına düşmektedir. Sıralama olarak MC *ARIMA*, Poisson, Gamma ve Bernoulli olmaktadır.
- *NRMSE* açısından model-4 değerlendirildiğinde; Poisson için *NRMSE* değeri 0,0363, Gamma için *NRMSE* değeri 0,0434, Bernoulli için *NRMSE* değeri 0,0452 ve MC *ARIMA* için *NRMSE* değeri 0,0696 olarak hesaplanmıştır. Yöntemlerin en düşük *NRMSE* değeri açısından sıralanması sırasıyla Poisson, Gamma, Bernoulli ve *ARIMA* olmaktadır.
- Katsayı etkinliği (*CE*) açısından model-4 değerlendirildiğinde; Poisson için *CE* değeri 0,8425, Gamma için *CE* değeri 0,7752, Bernoulli için *CE* değeri

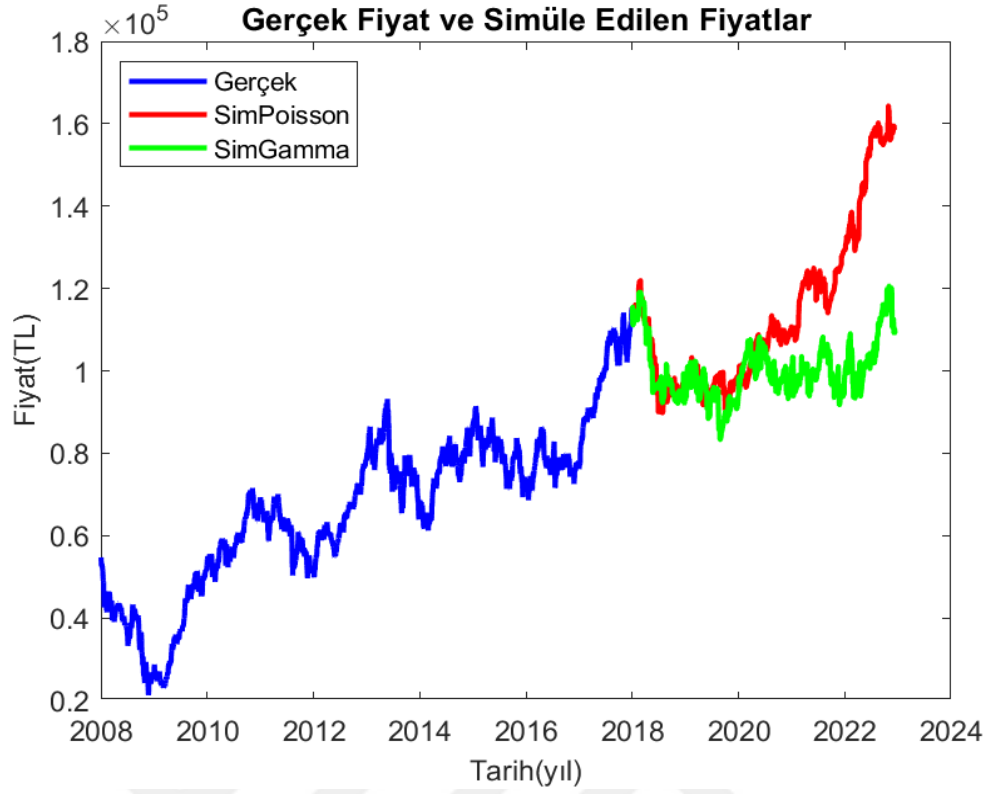
0,7556 ve *ARİMA* için 0,4210 olarak bulunmuştur. Katsayı Etkinliği performansının sınıflandırılması için Çizelge 7.2'ye bakıldığında sırasıyla en uygun modeller Poisson, Gamma, Bernoulli ve *ARİMA* olmaktadır.

- model-4 için yukarıdaki yöntemlerden en iyi yöntem Poisson olarak bulunmuştur. Poisson *MAPE* değeri 0,0299, *RE* değeri 0,0432, *NRMSE* değeri 0,0363 ve *CE* değeri 0,8425 olarak elde edilmiştir.

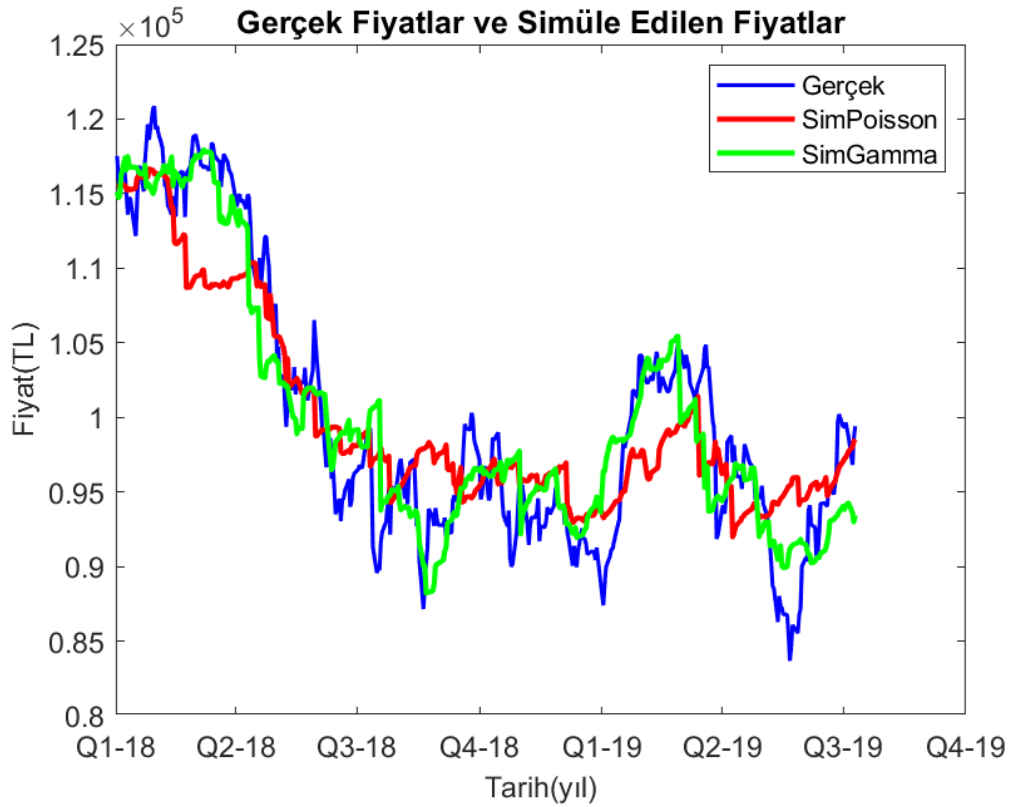
Rassal Sayı Çekirdeği dokuz (9) için 2018-2023 yılları arasında Gerçek ve Simüle edilen fiyatlar (model-3) Şekil 9.2'de verilmiştir. Rassal Sayı Çekirdeği beş (5) için 2018-2023 yılları arasında Gerçek ve Simüle edilen fiyatlar (model-4) Şekil 9.3'de verilmiştir. Rassal Sayı Çekirdeği dokuz (9) için 2018-2019 yılları arasında Gerçek ve Simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (model-3) Şekil 9.4'de verilmiştir.



Şekil 9.2. Rassal sayı çekirdeği dokuz (9) için 2018-2023 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatlar (model-3)

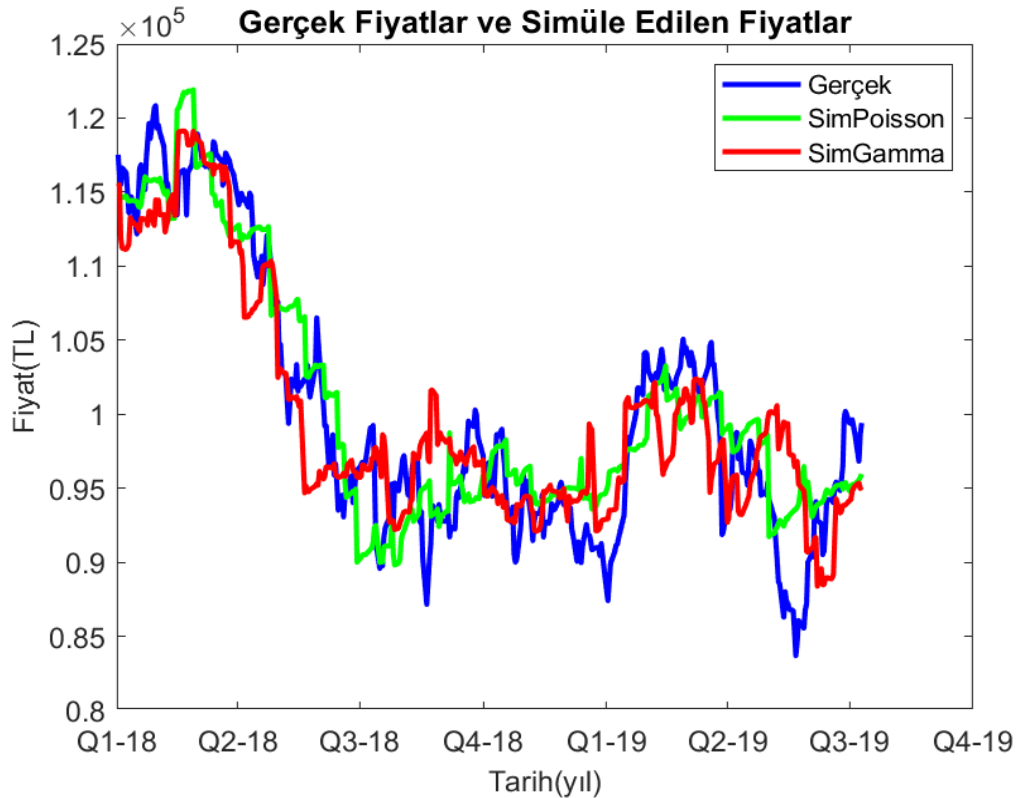


Şekil 9.3. Rassal sayı çekirdeği beş (5) için 2018-2023 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatlar (model-4)

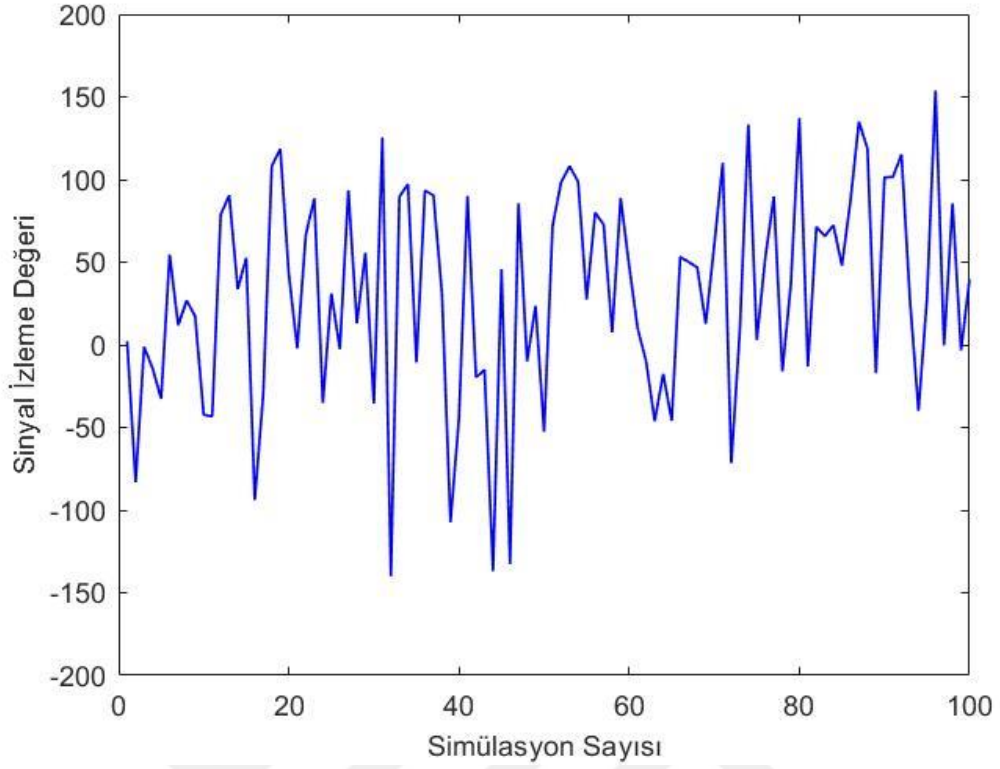


Şekil 9.4. Rassal sayı çekirdeği dokuz (9) için 2018-2019 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (model-3)

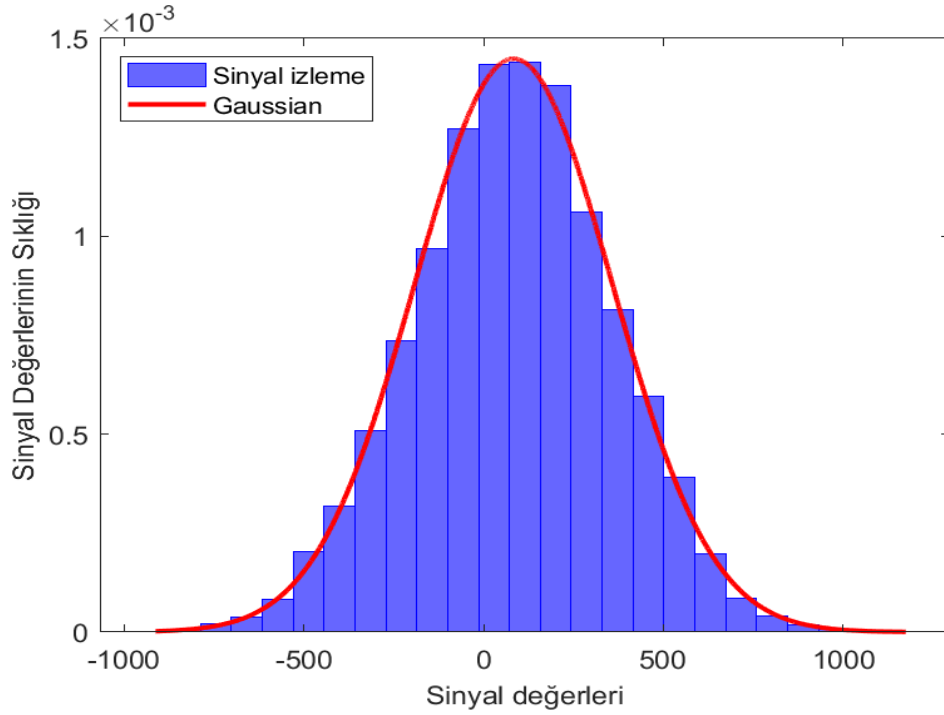
En iyi model olarak belirlenen model-3'de yer alan Gamma süreci ile rassal sayı çekirdeği dokuz için gerçekleştirilen 10000 Monte Carlo benzetimi için Sinyal izleme (TS) değerleri en iyi yüz (100) sonuç için Şekil 9.5 ile görselleştirilmiştir. Gamma süreci için sinyal izleme değeri 2,2965 ve Poisson için TS değeri 7,5544 olarak bulunmuştur. Çizelge 8.5'te verilen rassal sayı çekirdeği için 10000 MC benzetiminin sinyal izleme değerleri ortalaması 83,3345 ve standart sapmaları 275,3667 olarak bulunmuştur. Bu durum $\mp 3\sigma$ için düşünüldüğünde kontrol dışına çıkan herhangi bir durum söz konusu olmayıp Çizelge 8.5 incelendiğinde Gamma için sinyal izleme- TS değeri 2,2965, Poisson için TS değeri 7,5544, Bernoulli için TS değeri 72,6488 ve $ARIMA$ için TS değeri 205,879 olarak bulunmuştur. Şekil 9.6 yorumlandığında Gamma süreci ile rassal sayı çekirdeği dokuz için 10000 MC benzetim sonucu sinyal izleme değerlerinin sıklığı grafiğini (model-3) göstermektedir. Sinyal izleme değerlerinin normal dağılım özelliği gösterdiği Şekil 9.6 ile görselleştirilmiştir. Gamma süreci ile rassal sayı çekirdeği dokuz için 10000 MC benzetim sonucu sinyal izleme değerlerinin sıklığı grafiği (model-3) Şekil 9.7'de verilmiştir.



Şekil 9.5. Rassal sayı çekirdeği beş (5) için 2018-2019 yılları arasında gerçek ve simüle edilen fiyatların karşılaştırılması (model-4)



Şekil 9.6. Gamma süreci ile rassal sayı çekirdeği dokuz için 10000 MC benzetim sonucu elde edilen en iyi 100 benzetimin sinyal izleme değeri grafiği (model-3)



Şekil 9.7. Gamma süreci ile rassal sayı çekirdeği dokuz için 10000 MC benzetim sonucu sinyal izleme değerlerinin sıklığı grafiği (model-3)

Bu tez çalışmasında geliştirilen modeller için gelecek çalışmalar olarak aşağıdaki öneriler verilmiştir:

- Önerilen değişken varyanslı stokastik model (model-3) yapısal olarak uygun bir modeldir. Bu modelin yılda ortalama sıçrama sayısını belirten λ parametresi ilgili zaman serisinin yapısını yansıtacak şekilde bir fonksiyon olarak modele dahil edilebilir. Böylece model başarımının artacağı ve sıçrama yoğunluğunun ilgili fonksiyona göre yorumlanabileceği avantajı ortaya çıkabilir.
- Yapısal olarak zaman serisinin dönem yapısını yansıtacak şekilde trend bileşeni başarımı arttıracak şekilde farklı şekilde modellenenebilir.
- Stokastik kısım bir otoregresyon $AR(1)$ süreci yerine doğrusal ya da doğrusal olmayan bir regresyon şekli ile modellenenebilir. Bu önerilen model bu duruma imkan sağlamaktadır. Ayrıca doğrusal olmayan otoregresyon stokastik kısma monte edilerek modelin performansı artırılabilir.
- Bilindiği gibi yapay sinir ağları modeli, doğrusal olmayan otoregresyon modelleri ile işlemektedir. Ancak λ olasılığına bağlı olarak bu durum gerçekleşmemektedir. Bu olasılık durumuna göre doğrusal olmayan sıçramalı otoregresyon modelleri kullanılabilir ve böylece modelin başarımı artırılabilir.
- Ayrıca önerilen modelin hatalarının normal dağılım gösterdiği varsayımı üzerine olasılık yoğunluk fonksiyonu Normal olarak kabul edilmiştir. Daha farklı verilerin hatalarını temsil edecek dağılımlar tespit edilip modelin işleyiş durumuna monte edilerek daha uygun ve verimli bir sonuç elde edilebilir.
- Önerilen modelin finansal zaman serileri dışında diğer zaman serisi verilerine de uygulanabileceği hatta başka zaman serilerinde Markov özelliği olmaması durumundan otoregresyon denkleminin dereceleri (örneğin $AR(4)$ gibi) arttırılarak öngörünün daha da iyileştirilebileceği düşünülmektedir.
- Parametre tahmini için farklı sezgisel algoritmalar kullanılabilir gibi farklı matematiksel modeller de ayrıca parametre tahmini için kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Angeline, Peter J., (1996). Two self-adaptive crossover operators for genetic programming, *Advances in Genetic Programming Volume II* (editors: Peter J. Angeline and Kenneth E. Kinneer, Jr.), MIT Press, Cambridge MA, 89-109.
- Alberg, D., Shalit, H., and Yosef, R., (2008). Estimating stock market volatility using asymmetric GARCH models, *Applied Financial Economics*, 18, 1201-1208. DOI: [10.1080/09603100701604225](https://doi.org/10.1080/09603100701604225)
- Alstrom, P., Madsen, P. (1996). Tracking signals in inventory control systems: A simulation study, *International Journal of Production Economics*, 45 (1-3), 293-302, DOI: [10.1016/0925-5273\(95\)00120-4](https://doi.org/10.1016/0925-5273(95)00120-4)
- Ayrancı, G., and Özgürel, B., (2014). Monte Carlo Simulation for Vasicek Interest Rate Model Parameters, *Digital Proceeding Of The ISDS'2014*, -Side, Turkey, May 10-14.
- Alp, Ö. S., (2015). Sıçramalı Difüzyon Modelinin Sürekli Zaman Portföy Seçimine Etkisi: Borsa İstanbul Üzerine Bir Uygulama, *Muhasebe Bilim Dünyası Dergisi*, 17 (2), 331-346.
- Alp, S., (2007). Türkiye’de Eğitim Sürecinin Markov Geçiş Modeli, 8. Türkiye Ekonometri ve İstatistik Kongresi, 24-25 Mayıs 2007, İnönü Üniversitesi, Malatya.
- Aygören, H., (2006). İMKB-100 Endeks Davranışının Monte Carlo Benzetimi ile İncelenmesi, *MUFAD Muhasebe ve Finansman Dergisi*, Sayı 29, 197-205.
- Bakar, A. N., Rosbi, S., (2017). High Volatility Detection Method Using Statistical Process Control for Cryptocurrency Exchange Rate: A Case Study of Bitcoin, *The International Journal of Engineering and Science(IJES)*, 6(11), 39-48, DOI: [10.9790/1813-0611013948](https://doi.org/10.9790/1813-0611013948)
- Bauer, S., Gorbach, S. N., Miladinovic, D., Buhmann, M. J., (2017). Efficient and Flexible Inference for Stochastic Systems, 31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017), Long Beach, CA, USA.
- Box, G.E.D., Jenkins, G. M., 1976. *Time Series Analysis Forecasting and Control*, San Francisco, Halden-Day Inc., s.26.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heterokedasticity, *Journal of Econometrics*, Vol. 31, pp. 307-327.
- Bollerslev, T. and Ghysels, E. (1996). Periodic autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 14, pp. 139-151.

- Craine, R., Lochstoer, L.A., Syrtveit, K., (2000). Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model, University of California at Berkeley.
- Cheng, K-S., Lien, Y-T, Wu, Y-C, Su, Y-F.,(2017). On the criteria of model performance evaluation for real-time flood Forecasting, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 31,1123-1146, DOI: [10.1007/s00477-016-1322-7](https://doi.org/10.1007/s00477-016-1322-7)
- Corzo G, Solomatine D (2007) Baseflow separation techniques for modular artificial neural network modelling in flow forecasting. Hydrol Sci J 52(3):491–507
- Das, S. R. (2001). The surprise element: jumps in interest rate diffusions, Journal of Econometrics, Vol. 106, pp. 27–65.
- Demir, S. (2015). Finansal Stokastik Süreçler. İzmir: Kitap Ana Basım Yayın.
- Erdoğan, P., Yalçın, E., (2015).Parçacık Sürü Eniyileme ile Kısıtsız Eniyileme Test Problemlerinin Çözümü, İleri Teknoloji Bilimleri Dergisi,4(1),14-22.
- Escribano, A., Peña, J. I., and Villaplana, P., (2011). Modeling Electricity Prices: International Evidence, OXFORD BULLETIN OF ECONOMICS AND STATISTICS,73,5
- Eliazar, I. I., and, Shlesinger, M .F., (2012). Langevin unification of fractional motion, J. Phys. A: Math. Theor. 45, pp.162002.
- Gulsen, M., Smith, A. E. and Tate, D. M., (1995). A Genetic Algorithm Approach to Curve Fitting, 33, 7, 1911-1923.
- Gulsen, M., and Smith, A.E., (1999). A Hierarchical Genetic Algorithm for System Identification and Curve Fitting with a Supercomputer Implementation. IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Evolutionary Algorithms, Springer-Verlag, 111-138, New York
- Gong, X., Zhuang, A., (2017). Pricing foreign equity option under Stochastic volatility tempered stable Lévy Processes, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,483,83-93.
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.04.147>
- Harmel RD, Smith PK (2007) Consideration of measurement uncertainty in the evaluation of goodness-of-fit in hydrologic and water quality modeling. J Hydrol 337:326–336
- Hunter, J., (2009). Lecture notes on Applied Mathematics: Methods and Models, Department of Mathematics, University of California, Davis. ch.5.

- İnternet 1, 2020. Borsa Nedir? 10 Adımda Borsayı Öğrenin. Erişim Tarihi: 03.09.2019. <https://konupara.com/yatirim/borsa/borsayiogrenin-10-adimdaborsa-nedir-1815/>
- İnternet 2, 2020. Systems of Linear Equations, Functions for Iterative Methods for Sparse Systems, Erişim Tarihi: 03.06.2019. <https://www.mathworks.com/help/matlab/math/sparse-matrix-operations.html>
- İlarslan, K., (2014). Hisse Senedi Fiyat Hareketlerinin Tahmin Edilmesinde Markov Zincirlerinin Kullanılması: İMKB 10 Bankacılık Endeksi İşletmeleri Üzerine Ampirik Bir Çalışma, Journal of Yasar University, 9(35), 6099-6260.
- Kabakçı, A., (2012). Opsiyon Duyarlılık Parametrelerinin İncelenmesine Yönelik Bir Araştırma, Dokuz Eylül Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Cilt 14, Sayı 2, 87-103.
- Karaca, M. E. ve Alp, S., (2017). Markov Zincirleri Yöntemi Kullanılarak Altın Fiyatları ile BIST 100 Endeksi Arasındaki İlişkinin Analizi, Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Dergisi, 19 (40).
- Karadede, Y., Ozdemir, G., Aydemir, E., (2017). Breeder hybrid algorithm approach for natural gas demand forecasting model. Energy 141:1269–1284.
- Kayım, H., (1985). İstatistiksel Ön Tahmin Yöntemleri, Ankara, H.Ü. İİBF, s.275.
- Kennedy, J., Eberhart, R. C., (1995). Particle Swarm Optimization, Proc. Of the IEEE Int. Conference on Neural Networks,4,1942-1948.
- Itô, Kiyosi (1944). Stochastic integral. Proc. Imp. Acad. 20, no. 8, 519--524. <https://projecteuclid.org/euclid.pja/1195572786>
- Langevin, P., (1908). Sur la théorie de mouvement Brownien, C.R. Acad. Sci. Paris, 146, pp. 530–533.
- Legates DR, McCabe GJ Jr (1999) Evaluating the use of “goodness- of-fit” measures in hydrologic and hydroclimatic model validation. Water Resour Res 35(1):233–241
- Lobão, W. J. A., Pacheco, M. A. C., Dias, D. M., Abreu, A. C. A., (2018). Solving Stochastic Differential Equations Through Genetic Programming and Automatic Differentiation, Engineering Applications of Artificial Intelligence,68,110-120. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.10.021>

- Lucia, J. J., and Schwartz, S. E. (2002). Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange, *Review of Derivatives Research*, 5, 5-50.
- Mariani, C. M., Bhuiyan, M. A.M., Tweneboah, O. K., (2018). Estimation of Stochastic Volatility By Using Ornstein–Uhlenbeck Type Models, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 491, 167-176. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.153>
- Magdziarz, M., and Weron, A., (2011). Ergodic properties of anomalous diffusion processes, *Annals of Physics* 326, pp. 2431-2445
- Moriasi DN, Arnold JG, Liew MWV, Bingner RL, Harmel RD, Veith TL (2007) Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations. *Transactions of the American Society of Agricultural and Biological Engineers* 50(3):885–900
- Nelson, C.R., (1973). *Applied Time Series Analysis For Managerial Forecasting*, Holden-Day, Inc., San Francisco, s.38.
- Neely, C. J. (1999). Target zones and conditional volatility: the role of realignments, *Journal of Empirical Finance*, Vol. 6, pp. 177–192.
- Nieuwland, F., Verschoor, W. and Wolff, C. (1994). Stochastic trends and jumps in EMS exchange rates, *Journal of International Money and Finance*, Vol. 13, pp. 699–727.
- Önal, Ö., (2009). Vasicek ve CIR modelleri kullanılarak Dalgalanma ve Faiz Oranlarının Modellenmesi, *Marmara Üniversitesi, İ.İ.B.F. Dergisi, Cilt XXVII, sayı II*, 329-344.
- Önal, Ö., (2007). Finansal Zaman Serileri İçin Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Modeli, *Marmara Üniversitesi, İ.İ.B.F. Dergisi, Cilt XXII, Sayı 1*.
- Önal, Ö., (2009a). Financial Modelling with Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by Lévy Process, *Proceedings of World Congress on Engineering, Vol II, WCE 2009, July 1-3, 2009, London, U.K.*
- Önal, Ö., (2011). Meixner Süreci İle Reel Efektif Döviz Kurunun Modellenmesi, *Marmara Üniversitesi, İ.İ.B.F. Dergisi, Cilt XXX, Sayı I*, 263-281.
- Özkan, T., Güngör, B., (2017). Geometrik Brownian Hareketi Modeli ile Endeks Dalgalanmalarını Değerlendirme: BIST-30, BIST-100 ve S&P Endeksleri Üzerine Bir Uygulama, *Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 31(2), 377-395.
- Özsağlam, M. Y., Çunkaş, M., (2008). Eniyileme Problemlerinin Çözümü için Parçacık Sürü Eniyileme Algoritması, *Politeknik Dergisi*, 11(4), 299-305.

- Önalın, Ö., (2015). Subdiffusive Ornstein-Uhlenbeck Processes and Applications to Finance, Proceedings of the World Congress on Engineering 2015 Vol II, WCE 2015, July 1-3, London, U.K.
- Özmen, A., (1986). Zaman Serisi Analizinde Box-Jenkins Yöntemi ve Banka Mevduat Tahmininde Uygulama Denemesi, Eskişehir, Anadolu Üniversitesi Basımevi, s.17.
- Pebesma EJ, Switzer P, Loague K (2007) Error analysis for the evaluation of model performance: rainfall-runoff event summary variables. *Hydrol Process* 21: 3009–3024
- Privault, N., 2020. Notes on Stochastic Finance, Chapter 4 (125-147), <http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/index.html>
- Seifert, Jan, Uhrig-Homburg, Marliese., 2007. Modelling Jumps in Electricity Prices: Theory and Empirical Evidence. *Review of Derivatives Research*. Vol. 10, pp 59-85.
- Shreve, S.E., 2004. Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models, Springer Finance, pp 550.
- ShiBin, Z and Sheng, Z. X, (2013). Test for autocorrelation change in discretely observed Ornstein-Uhlenbeck processes driven by Levy processes, *Sci.Cina Math.*,56(2).
- Topper, J. (2005). Financial Engineering with Finite Elements. West Sussex: John Wiley and Sons.
- Uhlenbeck, G.E., and Ornstein, L.S., (1930). On the theory of Brownian motion, *Phys. Rev.* , 36, pp. 823–841.
- Vlaar, P. and Palm, F. C. (1993). The message in weekly exchange rates in the European monetary system: mean reversion, conditional heterokedasticity and jumps, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 11, pp. 351–360.
- Vasicek, O., (1977). An equilibrium characterization of the term structure", *J.Financial Economics* 5, pp. 177–188
- Villaplana, Pablo., 2003. Pricing Power Derivatives: A Two-Factor Jump-Diffusion Approach." Universidad Carlos III de Madrid, Working Paper 03-18.
- Wang G., Wang, X., Zhou, K., (2017). Pricing vulnerable options with stochastic volatility, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*,485,91-103, <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2017.04.146>
- Willmott CJ (1981) On the validation of models. *Phys Geogr* 2: 184–194

- Wilke, D. N., (2005). Analysis of the Particle Swarm Optimization Algorithm, Master Thesis, Mechanical and Aeronautical Engineering, University of Pretoria.
- Yang, Xin-She, (2010). Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristics Applications, Chapter 10: Random Walk and Markov Chain (153-158), A John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Zoglat A., et al., (2013). A mean-reverting model of the short term interbank interest rate: the Moroccan case, Journal of Finance and Investment Analysis, 2(3), pp.55-67.



EKLER

EK A. Trend Bileşeni İçin MATLAB Kodu

EK B. Stokastik Bileşen İçin MATLAB Kodu



EK A. Trend Bileşeni İçin MATLAB Kodu

% Trend bileşeni için başlangıç parametreleri aşağıda tanımlanmıştır:

% Başlangıç değişkenlerinin belirlenmesi

```
parsize = 20;    % Sürünün Büyüklüğü
npar = 6;        % Problem Boyutu (altı tane parametre tahmin edilmektedir).
maxit = 100;     % Maksimum iterasyon sayısı
c1 = 0.01;      % Bilişsel parametre
c2 = 4 - c1;    % Sosyal parametre
C = 0.1;         % Daraltma faktörü
```

Yukarıda başlangıç parametreleri tanımlandıktan sonra başlangıç sürü ve hızlarının belirlenmesi aşağıda verilmiştir:

% Başlangıç sürüsünün belirlenmesi

```
par = A + (U - A).*rand(parsize,npar);
par = [-10 + 20.*rand(parsize,npar)];
```

Başlangıç sürüsünde tüm parametreler için alt sınır (A) -10 olarak belirlenirken üst sınır (U) için +10 olarak belirlenmiştir.

% Başlangıç hızlarının belirlenmesi

```
vel = rand(parsize,npar);
```

% Her parçacık için uygunluk değerinin belirlenmesi

```
[ff] = amac_seasonality(logPrices,par,PriceTimes);
eval_seasonality = amac_function_seasonality(ff,par,logPrices);
```

[ff] fonksiyonunda *PriceTimes* ifadesi 2008-2017 yılları arasında yıl sayısının gün sayısına bölünerek yıllıklaştırılmış zaman faktörünün birikimli toplamı anlamına gelmektedir. Ayrıca *logPrices* ifadesi hisse senedi fiyatlarının logaritmasını temsil etmektedir. [ff] fonksiyonu ile her bir parçacığın rassal değeri $s(t)$ amaç fonksiyonunda yerine konularak tahmini *logPrices* değerleri elde edilmiştir. Akabinde *eval_seasonality* fonksiyonu ile gerçek *logPrices* değerleri ile tahmini *logPrices* değerleri arasındaki farkı minimize

edecek şekilde *MAPE* ve diğer performans ölçüt değeri(ler)i hesaplanmıştır. Yani başlangıç sürüsünün değeri *eval_seasonality* fonksiyonu ile hesaplanmıştır. Sürüde her bir parçacığın performans ölçüt değeri hesaplandıktan sonra *pbest* ve *gbest* değeri bulunmuştur. Daha sonra aşağıdaki durumlar algoritma adımlarının gerçekleştirilmesinde elde edilmiştir.

% Tüm sürüdeki en iyi parçacık (minimum değere sahip *MAPE* değeri)

minc(1) = *min(eval_seasonality(:,2))*;

% Tüm sürüdeki ortalama değere sahip parçacık (ortalama *MAPE* değeri)

meanc(1) = *mean(eval_seasonality(:,2))*;

% Tüm sürüdeki en iyi parçacığı bir değişkene ata (en küçük *MAPE* değeri)

globalmin = *minc*(1);

% Her bir parçacığın yerel minimum yeri- *pbest* ve değerini belirle.

pbest = *par*;

yereval = *eval_seasonality(:,2)*;

% Başlangıç sürüsündeki en iyi parçacığı *gbest* belirle.

[*globaleval*, *indx*] = *min(eval_seasonality(:,2))*;

gbest = *par(indx,:)*;

Yukarıdaki işlemler tamamlandıktan sonra aynı işlem, hızlar her iterasyonda güncellenerek 100 iterasyon için aşağıda gerçekleştirilmiştir:

% Başlangıç iterasyonları

iter = 0; % Sayaç

while iter < *maxit*

iter = *iter* + 1;

% Hızları güncelle=vel

w = (*maxit* - *iter*)/*maxit*;

% durağanlık (denge) faktörü

*rand*₁ = *rand(parsize, npar)*;

% rassal sayılar

*rand*₂ = *rand(parsize, npar)*;

% rassal sayılar

```

vel = C * [w * vel + c1 * rand1. * (pbest - par) + c2 * rand2.
           * (ones(parsize, 1) * gbest - par)];

% Parçacıkların yeni pozisyonlarını güncelle
par = par + vel;

% Yeni sürüyü değerlendir
eval_seasonality = amac_function_seasonality(ff, par, logPrices);

% Herbir parçacık için en iyi yerel pozisyonu güncelle
dahaiyi = eval_seasonality(:, 2) < yereleval;

% yereleval değerini ve pbest değerini güncelle
yereleval = yereleval.* not(dahaiyi) + eval_seasonality(:, 2).* dahaiyi;
pbest(find(dahaiyi), :) = par(find(dahaiyi), :);

% Şimdi küresel en iyi olanı güncelle
[tau, r] = min(yereleval);
if tau < globaleval
    gbest = par(t, :); indx = r; globaleval = tau;
end

minc(iter + 1) = min(eval_seasonality(:, 2));    % Bu iterasyon için en iyi
globalmin(iter + 1) = globaleval;                % Şimdiye kadar ki en iyi
end

```

EK B. Stokastik Bileşen İçin MATLAB Kodu

% Stokastik kısmın parametrelerini kestirmek için aşağıdaki adımlar izlenmiştir:

Stokastik kısım için; logaritmik verilerden ilk önce trend bileşeni çıkarıldıktan sonra durağan hale getirilmiş ve eğri uydurma işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu kez en uygun eğrinin ayarlanması için eşitlik 8.42;

$\theta = \{errors, \emptyset, \mu_j, \sigma^2, \sigma_f^2, \omega, \alpha, \beta, \lambda\}$ parametrelerinin kestirimi için PSO çalıştırılmıştır. Yukarıdaki trend bileşeni için gerçekleştirilen tüm adımlar aynı olmakta ve yapılan gerekli değişiklikler aşağıda verilmiştir.

% İlk önce veriler durağan hale getirilmiştir.

% Yani logaritmik fiyatlardan trend bileşeni çıkartılmıştır.

$X = \logPrices - ff(:, sutun_seasonality);$

% Başlangıç değişkenlerinin belirlenmesi

$Stoc_parsize = 20;$	% Sürünün Büyüklüğü
$Stoc_npar = 9;$	% Problem Boyutu (dokuz tane parametre)
$Stoc_maxit = 100;$	% Maksimum iterasyon sayısı
$Stoc_c_1 = 0.01;$	% Bilişsel parametre
$Stoc_c_2 = 4 - Stoc_c_1;$	% Sosyal parametre
$Stoc_C = 0.1;$	% Daraltma faktörü

Yukarıda başlangıç parametreleri tanımlandıktan sonra başlangıç sürü ve hızlarının belirlenmesi aşağıdaki gibi verilmiştir:

% Başlangıç sürüsünün belirlenmesi

$Stoc_par = A + (U - A) * rand(Stoc_parsize, Stoc_npar);$

Başlangıç sürüsünde tüm parametreler için alt sınır (A) sıfır (0) olarak belirlenirken üst sınır (U) için +1 olarak belirlenmiştir. Yalnızca sıçramaların ortalaması olan μ_j için $A = -1$ iken $U = +1$ olarak seçilmiştir.

% Başlangıç hızlarının belirlenmesi

$Stoc_vel = [rand(Stoc_parsize, Stoc_npar)];$

% Her parçacık için uygunluk değerinin belirlenmesi

Stoc_ff = *Stoc_amac_SimPrices*(*Stoc_par*, *X*);

Stoc_eval = *Stoc_amac_run_model*(*Stoc_par*, *Stoc_ff*, *X*);

[*Stoc_ff*] fonksiyonunda *X* ifadesi logaritmik hisse senedi fiyatlarından trend bileşenin çıkarılmasını ifade etmektedir. *Stoc_ff* fonksiyonu ile herbir parçacığın rassal değeri X_t fonksiyonunda yerine konularak tahmini *X* değerleri elde edilmiştir. Akabinde *Stoc_eval* fonksiyonu ile gerçek *X* değerleri ile tahmini *X* değerleri arasındaki farkı minimize edecek şekilde *MAPE* değer(ler)i hesaplanmıştır. Yani başlangıç sürüsünün değeri *Stoc_eval* fonksiyonu ile hesaplanmıştır. Sürüde herbir parçacığın *MAPE* değeri hesaplandıktan sonra *pbest* ve *gbest* değerleri bulunmuş, akabinde aşağıdaki ifadeler algoritma adımlarının çalıştırılması ile elde edilmiştir.

% Tüm sürüdeki en iyi parçacık (en küçük *MAPE* değeri)

Stoc_minc(1) = *min*(*Stoc_eval*(:,2));

% Tüm sürüdeki ortalama değere sahip parçacık (ortalama *MAPE* değeri)

Stoc_meanc(1) = *mean*(*Stoc_eval*(:,2));

% Tüm sürüdeki en iyi parçacığı bir değişkene ata (en küçük *MAPE* değeri)

Stoc_globalmin = *Stoc_minc*(1);

% Herbir parçacığın yerel minimum yeri- *pbest* ve değerini belirle.

Stoc_pbest = *Stoc_par*;

Stoc_yereval = *Stoc_eval*(:,2);

% Başlangıç sürüsündeki en iyi parçacığı *gbest* belirle.

[*Stoc_globaleval*, *Stoc_indx*] = *min*(*Stoc_eval*(:,2));

Stoc_gbest = *Stoc_par*(*Stoc_indx*,:);

Yukarıdaki işlemler tamamlandıktan sonra aynı işlem; hızlar her iterasyonda güncellenerek 100 iterasyon için gerçekleştirilmiştir.

% Başlangıç iterasyonları

Stoc_iter = 0; % Sayaç

```

while Stoc_iter < Stoc_maxit
Stoc_iter = Stoc_iter + 1;

% Hızlar güncelle=vel
Stoc_w = (Stoc_maxit - Stoc_iter)/ Stoc_maxit;      % durağanlık faktörü
Stoc_rand1 = rand(Stoc_parsize,Stoc_npar);          % rassal sayılar
Stoc_rand2 = rand(Stoc_parsize,Stoc_npar);          % rassal sayılar

Stoc_vel = Stoc_C * [Stoc_w * Stoc_vel + Stoc_c1 * Stoc_rand1.
                    * (Stoc_pbest - Stoc_par) + Stoc_c2 * Stoc_rand2.
                    * (ones(Stoc_parsize,1) * Stoc_gbest - Stoc_par)];

% Parçacıkların pozisyonlarını güncelle
Stoc_par = Stoc_par + Stoc_vel;

% Yeni sürüyü değerlendir
Stoc_eval = Stoc_amac_run_model(Stoc_par,Stoc_ff,X);

% Herbir parçacık için en iyi yerel pozisyonu güncelle
Stoc_dahaiyi = Stoc_eval(:,2) < Stoc_yereleval;

% yereleval değerini ve pbest değerini güncelle
Stoc_yereleval = Stoc_yereleval.* not(Stoc_dahaiyi) + Stoc_eval(:,2)
                    * Stoc_dahaiyi;

Stoc_pbest(find(Stoc_dahaiyi),:) = Stoc_par(find(Stoc_dahaiyi),:);

% Şimdi global en iyi güncelle
[Stoc_tau,Stoc_r] = min(Stoc_yereleval);

if Stoc_tau < Stoc_globaleval
    Stoc_gbest = Stoc_par(Stoc_t,:); Stoc_indx = Stoc_r;
    Stoc_globaleval = Stoc_tau;
end

Stoc_minc(Stoc_iter + 1) = min(Stoc_eval(:,2));      % Bu iterasyon için en iyi
Stoc_globalmin(Stoc_iter + 1) = Stoc_globaleval;     % Şimdiye kadar ki en iyi
end

```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yusuf KARADEDE

Doğum Yeri ve Yılı : Samsat, 1987

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : yusufkaradede@sdu.edu.tr
: ysfkrdede@gmail.com
: yusufkaradede@hotmail.com



Eğitim Durumu

Lise : Samsat Lisesi, 2004

Lisans : SDÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik, 2010

Yüksek Lisans : SDÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, 2011-2014

Doktora : SDÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, 2015-2020

Mesleki Deneyim

Kafkas Üniv. Mühendislik-Mimarlık Fak. Endüstri Müh. Böl. : 2014-2015

SDÜ Mühendislik Fak. Endüstri Mühendisliği Bölümü : 2015-2020

Yayınlar

Karadede, Y., Özdemir, G., 2018. A hierarchical soft computing model for parameter estimation of curve fitting problems, Soft Computing, 22(20), pp 6937–6964.

Akdeniz, F., Biçil, M., Karadede, Y., Özbek, F. E., Özdemir, G., 2018. Application of real valued genetic algorithm on prediction of higher heating values of various lignocellulosic materials using lignin and extractive contents, Energy, 160, pp 1047-1054.

Karadede Y., Ozdemir G., Aydemir E., 2017. Breeder Hybrid Algorithm Approach for Natural Gas Demand Forecasting Model, Energy, 141, pp. 1269-1284.
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2017.09.130>