

T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



ÇOKLU DİRAC PARÇACIK SİSTEMLERİNİN KUANTUM  
ELEKTRODİNAMİĞİ

Abdullah GÜVENDİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK  
ANABİLİM DALI  
DOKTORA TEZİ

TEMMUZ 2020

ANTALYA

T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



ÇOKLU DİRAC PARÇACIK SİSTEMLERİNİN KUANTUM  
ELEKTRODİNAMİĞİ

Abdullah GÜVENDİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK  
ANABİLİM DALI  
DOKTORA TEZİ

TEMMUZ 2020

ANTALYA

**T.C.**  
**AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇOKLU DİRAC PARÇACIK SİSTEMLERİNİN KUANTUM**  
**ELEKTRODİNAMIĞI**

**Abdullah GÜVENDİ**

**FİZİK**  
**ANABİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

Bu tez 01/07/2020 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf SUCU (Danışman)

Prof. Dr. Özlem YEŞİLTAS

Doç. Dr. Mümin CAN

Doç. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU

## ÖZET

# ÇOKLU DİRAC PARÇACIK SİSTEMLERİNİN KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

**Abdullah GÜVENDİ**

**Doktora Tezi, Fizik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Yusuf SUCU**

**Temmuz 2020; 89 sayfa**

Relativistik Dirac parçacıklarından oluşan, düşük enerjili bağlı durum sistemleri, Kuantum Elektrodinamiğinin en temel problemlerindedir. Bu tezde, eşit kütleyle sahip 2 ve 3 Dirac parçacığından oluşan Pozitronyum, Eksiton, Pozitronyum-iyon ve Yüklü-Eksiton gibi kararsız sistemler için matematiksel modeller geliştirilmiştir. Geliştirilen bu matematiksel modeller, tamamiyle kovaryant formda, Kuantum Elektrodinamiğinden Eylem prensibi kullanılarak elde edilmiş olan 2 ve 3 cisim Dirac denklemlerinin tam çözümleri üzerine kurulmuştur. Farklı fiziksel özelliklere sahip bir kaç uzay-zaman zemininde, etkileşen bir fermiyon-antifermiyondan oluşan nötral kompozit sistemlerin dinamiği incelenmiş ve elde edilen sonuçların birbirlerini desteklediği gösterilerek, literatürde bulunan bazı çelişkili sonuçlar açıklanabilmiştir. Fermiyon-fermiyon sistemleri için geliştirilen matematiksel modelin genişletilmesi ile, etkileşen relativistik 3 fermiyondan oluşan sistemlerin dinamiği incelenmiş ve genel bir Enerji spektrumu elde edilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Eksiton, Fermiyon-Fermiyon sistemleri, İki-cisim problemi, Pozitronyum, Pozitronyum-iyon, Üç-cisim problemi, Yüklü-Eksiton

**JÜRİ:** Doç. Dr. Yusuf SUCU  
Prof. Dr. Özlem YEŞİLTAS  
Doç. Dr. Mümün CAN  
Doç. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA  
Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU

## ABSTRACT

# QUANTUM ELECTRODYNAMICS OF MULTIPLE DIRAC PARTICLE SYSTEMS

Abdullah GÜVENDİ

Phd Thesis in physics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf SUCU

July 2020; pages 89

Low energy bound state systems consisting of Relativistic Dirac particles are one of the main problems of Quantum Electrodynamics. In this thesis, mathematical models are developed for unstable systems such as Positronium, Exciton, Positronium-ion and Charged-Exciton, consisting of 2 and 3 Dirac particles with equal mass. These developed mathematical models are based on the exact solutions of the 2 and 3-body Dirac equations, which are derived from Quantum Electrodynamics in fully-covariant form via the Action principle. In a few space-time backgrounds with different physical properties, the dynamics of neutral composite systems formed by an interacting fermion-antifermion pair have been investigated and some contradictory results in the literature can be explained, by showing that the obtained results support each other. With the expansion of the mathematical model developed for fermion-fermion systems, the dynamics of the systems consisting of interacting 3 relativistic fermions were examined and a general Energy spectrum was obtained.

**KEYWORDS:** Charged Exciton, Exciton, Fermion-Fermion Systems, Positronium, Positronium ion, Three Body Problem, Two Body Problem

**COMMITTEE:** Assoc. Prof. Dr. Yusuf SUCU  
Prof. Dr. Özlem YEŞİLTAS  
Assoc. Prof. Dr. Mümün CAN  
Assoc. Prof. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA  
Assoc. Prof. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU

## ÖNSÖZ

Doktora danışmanlığımı üstlenen Doç. Dr. Yusuf SUCU' ya tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesindeki önerileri için, tez jüri üyeleri Prof. Dr. Özlem YEŞİLTAŞ, Doç. Dr. Mümün CAN, Doç. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA ve Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİ-OĞLU' na ilgileri için, Dr. Aydın YILDIRIM ve Dr. Semra GÜRTAŞ DOĞAN' a tezin hazırlık sürecindeki teknik katkıları için, Prof. Dr. Nuri Ünal, Doç. Dr. Timur Şahin, Doç. Dr. Ramazan Şahin, Dr. Öğretim Üyesi Ganim Geçim ve Dr. Semra GÜRTAŞ DOĞAN' a ise birçok konuda akademik bilgileri ile sundukları destekten dolayı teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

ÖZET . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	ii
ÖNSÖZ . . . . .	iii
AKADEMİK BEYAN . . . . .	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR . . . . .	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .	ix
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. KAYNAK TARAMALARI . . . . .	6
3. MATERYAL VE METOD . . . . .	12
4. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . . .	33
4.1. Spin anti-simetrik bir fermiyon-antifermiyon çifti için matematiksel model . . . . .	33
4.1.1. Radyal Denklemler . . . . .	34
4.1.2. Frekans spektrumu . . . . .	35
4.1.3. Tartışmalar . . . . .	40
4.2. Spin simetrik bir fermiyon-antifermiyon çifti için matematiksel model . . . . .	42
4.2.1. Çiftlenimli Denklem Sistemi . . . . .	43
4.2.2. Frekans Spektrumu . . . . .	44
4.3. Tek katmanlı bir yarı-iletkende Eksiton üzerine çevresel etkiler . . . . .	46
4.3.1. Radyal denklemler . . . . .	48
4.3.2. Enerji spektrumu . . . . .	50
4.3.3. Tartışmalar . . . . .	52
4.4. Statik kozmik sicim uzay-zamanında bir fermiyon antifermiyon çifti . . . . .	53
4.4.1. Radyal denklemler . . . . .	57
4.4.2. Enerji Spektrumu . . . . .	58
4.4.3. Tartışmalar . . . . .	63
4.5. 3-fermiyondan oluşan kompozit sistemler için matematiksel model . . . . .	66
4.5.1. Radyal Denklemler . . . . .	68
4.5.2. Enerji Spektrumu . . . . .	70
4.5.3. Tartışmalar . . . . .	71
5. SONUÇLAR . . . . .	72
6. KAYNAKLAR . . . . .	78

## ÖZGEÇMİŞ



## AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “Çoklu Dirac Parçacık Sistemlerinin Kuantum Elektrodinamiği ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

01 / 07 /2020

Abdullah GÜVENDİ

İmza



## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler:

$\gamma^\mu$	: Genelleştirilmiş Dirac matrisleri
$\Gamma_\mu$	: Fermiyonlar için Spinör Bağlantıları
$\partial_\mu$	: Kovaryant Türev Operatörü
$A_\mu$	: Elektro-Manyetik Vektör Potansiyeli
$\tau$	: Yaşam süresi
$e$	: Pozitron için Elektrik Yüğü
$m_f$	: Fermiyon kütlesi
$m_e$	: Elektron kütlesi
$\hbar$	: İndirgenmiş Planck sabiti
$c$	: Vakumda ışık hızı
$\omega$	: Sistemin toplam Frekansı

### Kısaltmalar:

$P_s$	: Pozitronyum
$GM$	: Gerçek Müonyum
$p - P_s$	: Para-Pozitronyum
$o - P_s$	: Ortho-Pozitronyum
$PALS$	: Pozitron Anihilasyon Spektroskopisi
$Exc$	: Eksiton
$P_s^\pm$	: Pozitronyum-iyon
$Exc^\pm$	: Yüklü-Eksiton
$\mathbf{x}$	: Konum Vektörü
$eV$	: Elektron Volt
$meV$	: Mili Elektron Volt
$s$	: Saniye
$ps$	: Piko Saniye
$ns$	: Nano Saniye

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1.	Dielektrik madde ortamına göre yaşam sürelerinin değişimi . . . . .	39
Şekil 4.2.	Dielektrik madde ortamına göre bağlanma enerjilerinin değişimi . . . . .	39
Şekil 4.3.	(a) $E_n$ ve (b) $\tau_n$ değerlerinin ortama bağlı değişimi . . . . .	53
Şekil 4.4.	Denklem (4.71) ve Denklem (4.72)' nin karşılaştırılması . . . . .	63
Şekil 4.5.	Denklem (4.71) ve (4.72)' nin karşılaştırılması . . . . .	63
Şekil 4.6.	Denklem (4.71) ve Denklem (4.72)' nin karşılaştırılması . . . . .	63
Şekil 4.7.	Uyarılmış enerji seviyelerindeki kaymalar . . . . .	64
Şekil 4.8.	$s = 1, \alpha > 0.9$ için karşılaştırma . . . . .	64
Şekil 4.9.	$s = 1, \alpha > 0.9$ için karşılaştırma . . . . .	64

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<b>Çizelge 4.1.</b> $p - Ps$ sistemi için $l = 0$ enerji seviyelerinin yaşam süreleri . . . . .	37
<b>Çizelge 4.2.</b> $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ için $p - Ps$ sisteminin bağlanma enerjisi değerleri . . . . .	38
<b>Çizelge 4.3.</b> Geçişler için gerekli frekans değerleri ve süreler . . . . .	38
<b>Çizelge 4.4.</b> Eksitonun bağlanma enerjisi ve yaşam süresi değerleri . . . . .	52
<b>Çizelge 4.5.</b> Değişen $\epsilon_{eff}$ değerleri için bağlanma enerjilerinin değişimi . . . . .	71



## 1. GİRİŞ

Özel göreliliğin matematiksel formülasyonu tanıtıldıktan hemen sonra, dış bir kuvvet alanında hareket eden bir parçacığın dinamiği, Hamilton ve Lagrange formalizmleri ile incelenmeye başlanmıştır (Minkowski 1908; Sommerfeld 1916). Bu yeni kuramsal çerçevede, kısa süre içerisinde, iki parçacıktan oluşan sistemler için, parçacıklara ait bağımsız zaman koordinatlarının ne olacağı sorusu temel bir problem oluşturmuştur. Bu sorun, parçacık dinamiğinde bilinen bir yol olarak, sistemi relativistik olmayan duruma indirgeyip, enerjiyi  $\frac{v}{c}$ ' ye göre kuvvet serisine açarak giderilmeye çalışılmıştır <sup>1</sup> (Darwin 1920). Bu şekilde, iki-cisim Kuantum Mekanikinin geliştirilmesinde ana eksen, relativistik formalizmde tam bir kuantizasyon prosedürünün oluşturulmasına doğru yönelmiştir. Dirac denkleminin tanıtılması, bu yönelimdeki en temel gelişmelerden birini sağlamış ve bu denkleme temel benzerlikler gösterecek şekilde, çok sayıda fermiyonun dinamiğinin incelenebilmesi amacıyla yeni dalga denklemleri elde etme çabası başlamıştır. İlk girişimler sonucu elde edilen relativistik iki fermiyon denkleminin temel sorunlar taşıması sebebiyle (Van Alstine ve Crater 1997), Darwin daha önce yaptığı çalışmanın (Darwin 1920) Kuantum versiyonunu (Darwin 1927) tanıttikten sonra, Breit, Dirac matrislerinin yerine elektron hızlarını yazıp, Lienard-Wiechert potansiyelleri aracılığı ile, Darwin Lagranjyenindeki Coulomb potansiyeline birinci mertebeden bir düzeltme elde etmiştir. Breit, elde ettiği sonuçlar ışığında, relativistik bir özellik olarak, elektron hareketi, spin ve manyetik moment arasında kuvvetli bir ilişki olduğunu vurgulamıştır. Kısaca, bu sonuçlar, manyetik terimden gelen katkının, Coulomb potansiyelinden elde edilen sonuçlara birinci mertebeden pertürbasyon olarak eklenebileceği anlamına gelmektedir (Breit 1930). Aynı yıl içerisinde, Plesset, relativistik olmayan bir bakışa dayanarak, vektör çiftleniminde, asimptotik olarak bağlı olmayan potansiyellerin kullanılmasının bağlı durum sonuçları vermeyeceğini göstermiş (Plesset 1932) ve elde edilen bu tip sürekli spektrumlar daha sonraki yıllarda ayrıntılı olarak çalışılmıştır (Giachetti ve Sorace 2008; Giachetti ve Grecchi 2009; Giachetti and Grecchi 2011). Bu çalışmalardaki sonuçlar toplam momentumu sıfır olan referans sisteminde elde edilmiş, ayrıca denklemlerin kovaryant formda olup olmaması göz ardı edilmiştir. Her bir parça-

<sup>1</sup>Burada  $v$  parçacık hızını,  $c$  vakumda ışık hızını temsil eder.

çığın zaman koordinatının ayrımı probleminde çeşitli öneriler mevcut olmasına rağmen, Kuantum Alan Teori ve Relativistik Kuantum Mekaniği ile ilgili olan fiziksel durumların kabul edilebilir relativistik analizi Wigner tarafından yapılmıştır (Wigner 1939). Sonraki yıllarda, kütle merkezinin relativistik tanımına (Pryce 1948) ve temel durumların lokalizasyonuna sadık kalınarak (Newton ve Wigner 1949) bu sonuçlar desteklenmiştir. Daha sonra Dirac tarafından kısıtlama teorisi tanıtılmış, (Dirac 1949; Dirac 1950), bu bağlamda, Bakamjian ve Thomas birbirleriyle etkileşen iki relativistik Dirac parçacığı için bir model geliştirmiştir (Bakamjian ve Thomas 1953). Bu çalışmada kurulan model, Poincare jeneratörlerin yanı sıra global ve görelî operatörlerin kanonik ayrımının tutarlı bir cebirine dayandırılmış olsada, zaman koordinatının öncelikli, farklı bir statüsü olduğu varsayılmıştır. Schrödinger Coulomb dalga fonksiyonları ve yarı klasik Breit yaklaşımı kullanılarak, anihilasyon terimini içerecek şekilde, taban durumdaki bir spin-simetrik pozitronyum ve spin-antisimetrik Pozitronyum için aşırı inceyapı kaymaları hesaplanmış (Pirenne 1947; Berestetskii ve Landau 1949), bir kaç yıl sonra, Kuantum Alan Teorideki gelişmeler ile (Schwinger 1951; Salpeter ve Bethe 1951), bu değişiklikler  $\alpha^5$  terimine kadar elde edilebilmiştir <sup>2</sup> (Karplus ve Klein 1952; Fulton ve Martin 1954). Fakat bu benzeri hesaplamalardan bulunan sonuçların yarı klasik yaklaşımlarla elde edilmiş olması vurgulanmalıdır. Bu tip hesaplamalarda, relativistik olmayan Coulomb dalga fonksiyonunun orjindeki değeri ve buna karşılık gelen  $\delta$  fonksiyonu hayati rol oynar (Radford ve Repko 2007). Daha sonra, bu benzeri sistemlerde, hareketin açık ve kovaryant bir formalizmi için, toplam açısız momentumun diğer bir temel sorun olduğu anlaşılmış ve Kuantum Alan Teorisinin bu sorunun üstesinden gelebileceği düşünülmüştür. Fakat, pertürbatif doğası nedeniyle, Kuantum Alan Teoride bağlı durumları elde etmek oldukça zordur. Bunun en belirgin örneği Bethe-Salpeter formalizmidir (Nakanishi 1965). Etkileşen parçacık modelleri için Kuantum Elektrodinamiğinden gelen yüksek mertebeden düzeltmeler yarı relativistik bir çerçevede inşa edilmiş olsada, düzeltme terimleri, basit atom durumlarının ve enerji seviyelerinin iyi bir doğrulukla açıklanabilmesini sağlayabilmiştir. Özet olarak, birbirleriyle etkileşen relativistik parçacıklardan oluşan kompozit sistemlere ilişkin problemler çok eski bir geçmişe sahip olmalarına rağmen, bu sistemlerin fiziksel özellikleri ve bu sistemleri tam olarak betimleyecek matematiksel özelliklere sahip

<sup>2</sup>Burada  $\alpha$  ince yapı sabitidir.

denklemler, henüz kesin olarak bilinmemektedir.

Relativistik olmayan Kuantum Mekaniğinde, bağlı durumlar, rezonans durumları ve saçılma durumlarının tanımlanması için, iyi kurgulanmış, pertürbatif olmayan yol, parçacıklar arası görelî uzaklığa bağlı olan bir etkileşim potansiyelini ve iki parçacık dalga fonksiyonlarını içeren tek zamanlı denklemlerin kullanılmasıdır. Bu kurgu ile, Hidrojen ve Hidrojen benzeri atomlar için bağlanma enerjileri kabaca hesaplanabilirken, Pozitronyum ( $Ps$ ), Gerçek Müonyum ( $GM$ ) ve Eksiton ( $Exc$ ) gibi etkileşen iki fermiyondan oluşan kararsız sistemlerin temel karakteristik özelliklerini veren enerji spektrumları elde edilememektedir. Relativistik olmayan Kuantum Mekaniğine benzer olarak, Relativistik Kuantum Mekaniği kapsamında, etkileşen iki-parçacık sistemlerinin dinamiğinin anlaşılabilmesi için, genelde, tek zamanlı denklemler kullanılmaktadır (Breit 1929). Bu tip fenomenolojik denklemler, her bir parçacık için yazılan serbest parçacık Hamiltonyenlerini ve parçacıklar arası radyal uzaklığa bağlı olan etkileşme potansiyellerini içerirler (Kemmer 1937; Fermi ve Yang 1949). Bu tip denklemler, uzun yıllardır, Atom Fiziği (Sato 1984), Nükleer Fizik ve Temel Parçacık Fiziği kapsamında kullanılmaktadır (Moseley ve Rosen 1950; Suura 1977). Bu denklemler fenomenolojik olarak kurgulanmışlardır ve etkileşme terimlerinin nasıl seçileceği en temel sorunlardan birisidir. Genelde, etkileşme potansiyelleri fenomenolojik olarak seçilir yada bir-foton/bir-boson değişim potansiyelleri kullanılır. Etkileşen, relativistik iki-Dirac parçacığından oluşan sistemlerinin dinamiğini incelemek amacıyla yazılan ilk denklemler, Dirac denkleminin yazılmasından kısa süre sonra tanıtılmış ve kabul gören ilk denklem (Breit 1929), herbir fermiyon için yazılan serbest Dirac Hamiltonyenlerini ve fenomenolojik bir etkileşme terimini içerecek şekilde kurgulanmıştır. Fakat, parçacıklar arası bağlî uzaklık fazla olduğunda yada parçacıkların hızları çok yüksek olduğunda, gecikme etkileri tam olarak hesaba dahil edilemediği için, bu fenomenolojik denklem iyi sonuçlar verememektedir (Van Alstine ve Crater 1997). Bu problemin giderilmesi amacıyla, tam bir formalizm, Kuantum Alan Teorisinden başlayarak, Bethe ve Salpeter tarafından tanıtılmıştır (Salpeter ve Bethe 1951). Bu formalizm, bağlî durum sistemleri için alternatif bir yaklaşım içersede, parçacıklar arasındaki görelî zaman farkından kaynaklanan, negatif büyüklüğe sahip enerji çözümleri vermektedir. Bu nedenle, o dönemde, daha kabul edilebilir ve 3-boyutta tam olarak çözülebilir bir denkleme ihtiyaç duyulmuştur.

Daha önce tanıtılmış formalizmler modifiye edilerek bazı yaklaşımlar önerilmiş olsada (Salpeter 1952; Todorov 1971), ihtiyaç duyulan denklemin Schrödinger tipi tek parçacık denklemini yada ikinci parçacığın davranışının da hesaba katıldığı, Dirac-Coulomb tipi iki cisim denklemini olması gerektiği düşünülmüştür. Etkileşen iki parçacık için, fenomenolojik olarak, Kemmer, Fermi ve Yang tarafından yazılan denklem büyük ilgi görmüş ve önem kazanmıştır (Kemmer 1937; Fermi ve Yang 1949). Bu denkleme oldukça benzer olan, tamamiyle kovaryant formdaki relativistik iki cisim Dirac denklemini, teorik fiziğin en temel formalizmi olan Eylem prensibi kullanılarak, Kuantum Elektrodinamiğinden türetilmiştir (Barut ve Komy 1985). 3 + 1 boyutlu uzay-zamanda, bu tek-zamanlı denklem,  $16 \times 16$  boyutlu matris denklemdir ve en genel Elektrik-Manyetik potansiyelleri içerir (Barut ve Ünal 1985). Başlangıçta bu denklem, tamamiyle kovaryant formda olacak şekilde, grup teori metodları kullanılarak öncelikle kütle merkezi ve bağıl koordinatlara, sonra radyal ve açısız kısımlara ayrılabilir (Barut ve Ünal 1987a). Bağıl değişkenler cinsinden elde edilen 16 denklem, herbiri 8 denklemden oluşan, iki çiftlenimli denklem setine indirgenebilmiş, fakat sonuç olarak ikinci mertebeden türevli, iki çiftlenimli denklem sistemi elde edilmiştir. Tam bir analitik çözümü bulunamayan bu denklem sistemi, 3+1 boyutta pertürbatif olarak çözülebilmüş ve Hidrojen tipi atomlar için, bilinen enerji spektrumlarına ek olarak pertürbatif düzeltme terimleri elde edilmiştir (Barut ve Ünal 1987b). 3 + 1 boyutta, etkileşen bir fermiyon-fermion sistemi için, henüz tam olarak çözülemeyen bu denklem, düşük boyutlu dinamik simetriye sahip, etkileşen bir fermiyon-fermion çiftinden oluşan kararsız bir sistem için  $M^2 \rightarrow 0$  limitinde tam olarak çözülebilmüşür<sup>3</sup>. Elde edilen enerji spektrumu, literatürdeki mevcut sonuçlardan oldukça farklı yapısal özellikler vermiş ve tek katmanlı yarı iletken malzemelerde, Eksiton olarak adlandırılan, Coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen bir elektron-deşik (hole) çiftinden oluşan kararsız kompozit sistemin, mümkün tüm kuantum durumları için bağlanma enerjilerinin ve bozunma sürelerinin tek bir denklem ile hesaplanabileceğini göstermiştir (Guvendi ve ark. 2019).

Bu tez kapsamında, eşit kütleyle sahip ve birbirleriyle etkileşen relativistik fermiyonlardan oluşan kompozit sistemler incelenmiş, ilk olarak etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çiftinden oluşan Pozitronyum ( $Ps$ ), Eksiton ( $Exc$ ) gibi kararsız kompozit sistemlerin dinamiği araştırılmıştır. Güncel teknolojik ilerlemelerin, madde ortamında bu

<sup>3</sup>Burada  $M$  sistemin toplam kütleini temsil eder.

kompozit sistemlerin fiziksel özelliklerinin bilinmesiyle zengileşebileceği düşüncesiyle, farklı madde ortamlarının (izotropik) optik yada elektriksel özelliklerinde dikkate alındığı özgün bir matematiksel model geliştirilmiştir.  $Ps$  ve  $Exc$  için bulunan sonuçlar, güncel literatür ile detaylı şekilde karşılaştırılmış ve son derece çarpıcı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra bu kompozit sistemlerin topolojik kusurlarla etkileşimi incelenmiş ve daha önce düz Minkowski uzay-zaman zemini için elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak, bu sistemlerin fiziksel özelliklerinin uzay-zaman topolojisine bağlı değişimleri detaylıca tartışılmıştır. Son olarak, iki-cisim için geliştirilen matematiksel metod, matematiksel olarak çözümleri tam olarak yapılamayan Pozitronyum-iyon ( $Ps^\pm$ ) ve yüklü-Eksiton ( $Exc^\pm$ ) gibi sistemlerin incelenmesi amacıyla genişletilmiş ve zıt elektriksel yüke sahip olan fermiyonun, sistemin kütle merkezinde yerleştiği ve durgun olduğu kabul edilerek genel bir enerji spektrumu elde edilmiştir.

## 2. KAYNAK TARAMALARI

$Ps$ , bir elektron ( $e^-$ )-antielektron ( $e^+$ ) (Dirac 1928; Anderson 1933) çiftinden oluşan, nötral ve kararsız bir kompozit yapıdır (Mohorovicic 1934; L'Annunziata 2016; Deutsch 1951).  $Ps$ , bilinen en hafif atomdur ve tamamıyla leptonik yapıdadır. Bu kompozit yapı, ağırlıklı olarak, elektron-antielektron (pozitron) arasındaki, çekici Coulomb kuvveti sebebiyle oluşur ve tamamıyla leptonik yapıda olduğu için, parçacıklar arasındaki çekici elektriksel kuvvet sebebiyle çöker. Çökme sonucunda, parçacıklara ait dalga fonksiyonları tam olarak üst üste biner. Başlangıçta, eşit kütleli ve etkileşen iki fermiyondan oluşan bu kompozit yapı, yaklaşık olarak sistemin toplam durgun kütle enerjisine ( $2m_e c^2$ ) eşit olacak şekilde toplam enerji taşıyan tek yada çift sayıda anihilasyon fotonlarına dönüşür <sup>4</sup> (Platzman ve Mills Jr 1994). S-durumunda ( $l = 0$ ), bir elektron ve bir pozitron, parçacıkların mümkün spin polarizasyonları sebebiyle, iki farklı kuantum durumu oluşturabilir. Mümkün bu iki durum sırasıyla ortho-Pozitronyum ( $o - Ps, {}^3 S_1$ ) ve para-Pozitronyum ( $p - Ps, {}^1 S_0$ ) olarak bilinir. Elektromanyetik olarak etkileşen sistemlerde temel C-simetrisinin korunumu sebebiyle, bu iki sistem çift yada tek sayıda fotonlara dönüşürler (Harpen 2004). N sayıda foton için toplam C-simetri (overall charge conjugation parity)  $-1^N$  dir. Toplam C-simetrisinin  $(-1)^{l+s}$  korunumu sebebiyle, bir  $p - Ps$  ( $l = 0, s = 0$ ) sistemi çift sayıda anihilasyon fotonuna,  $o - Ps$  ( $l = 0, s = 1$ ) sistemi ise tek sayıda (lineer momentum korunumu sebebiyle en az üç) anihilasyon fotonuna dönüşür (Harpen 2004). Yüksek mertebeden anihilasyonlar mümkün olsada, genelde,  $p - Ps$  kuantum durumu 2-fotona,  $o - Ps$  kuantum durumu ise 3-fotona dönüşür (Moskal ve ark. 2014). Her iki anihilasyon süreci sonucunda açığa çıkan fotonların yönelimleri temel korunum yasalarına göre belirlenir. Örneğin,  $p - Ps$  sistemi, kendi kendisini yok etmeden önce toplam momentumu sifıra yaklaşır ve bu nedenle açığa çıkan iki foton lineer momentumunun korunumu nedeni ile zıt yönlerde yayılır (L'Annunziata 2016). Açığa çıkan fotonlar tarafından taşınan toplam enerji, elektron-positron çiftinin toplam durgun kütle enerjisine ( $2m_e c^2$ ) oldukça yakın bir değerdedir (Asoka-Kumar ve ark. 1996). Toplam durgun kütle enerjisi ile anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerji arasındaki fark, bağlanma enerjilerinin negatif olması sebebiyle, her iki kuantum durumu için ( $p - Ps$  ve  $o - Ps$ )

<sup>4</sup>Bu sistemler, momentumun korunumu sebebiyle en az 2 fotona dönüşebilir.

bağlanma enerjileri kadardır. Bu temel, karakteristik özellikleri sebebiyle  $p - Ps$  sistemi, Pozitron yayma Tomografisi (Positron Emission Tomography ( $PET$ )) cihazları ile, rutin medikal görüntüleme işlemlerinde kullanılmaktadır (Gambhir 2002). Standart PET cihazları, zıt yönelime sahip iki anihilasyon fotonunun (gama-fotonu) dedektasyonu üzerine dayanır. Örneğin  $Na^{22}$  gibi bir radyo aktif kaynak tarafından üretilen pozitronlar vücut içerisine yayıldığında, bir elektron tarafından direk yok edilebilir yada çeşitli fiziksel süreçler sonucunda kinetik enerji kaybına uğrayarak, termalize olur (Tao 1972). Termalize olan Pozitronlar, çekici elektriksel kuvvet nedeni ile en yakınındaki elektron tarafından yakalanarak bir  $Ps$  atomu oluşturabilirler. Madde ortamında bir  $Ps$  atomu, kendi-kendisini yok ederek (self-annihilation), yüksek olasılıkla 2-Gama fotonuna dönüştürülür (Garwin 1953). Madde ortamında, çok düşük bir olasılık olsada, self-anihilasyon sonucunda 3-Gama fotonunuda açığa çıkabilmektedir (Moskal ve ark. 2019a; Moskal ve ark. 2019b). Açığa çıkan 3. fotonun yönelimi, lezyonların lakolizasyonlarına dair önemli bir bilgi taşır (Kamińska ve ark. 2016). Bu bilginin, 3-Gama dedektasyonu için, son yıllarda geliştirilen Jagiellonian-Positron Emission Tomograph (J-PET) cihazları ile elde edilebileceği düşünülmektedir (Kamińska ve ark. 2016). Madde ortamında, anihilasyon noktasını çevreleyen ortamın optik yada elektriksel özelliklerine bağlı olarak,  $p - Ps$  ve  $o - Ps$  sistemlerinin toplam yaşam süresinin değiştiği gözlemlenmektedir (Moskal ve ark. 2019a; Tao 1972). Bu sistemlerin, gözlemlenen, madde ortamına bağlı olarak değişen toplam yaşam sürelerinin bir nedeninde, elektron-pozitron çifti arasındaki elektromanyetik çiftlenme geriliminin madde ortamına bağlı olarak değişmesidir. Sistemlerin çökme sürelerindeki etkileyen, bağlanma enerjilerindeki bu değişimler, ayrıca, anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjilerinde değiştirirler. Bu küçük değişimlerin hassas bir dedektasyonu oldukça zor olmasına rağmen, her bir anihilasyon noktası için, ölçülen toplam yaşam süresi ve fotonlar tarafından taşınan toplam enerji, madde ortamındaki o noktayı çevreleyen ortamın morfolojisi, topolojisi, optik ve elektriksel özellikleri gibi özelliklerine dair önemli bilgiler taşıyacağı açıktır (Moskal ve ark. 2019b). Vakumda,  $p - Ps$  ve  $o - Ps$  sistemlerinin toplam yaşam süreleri yaklaşık olarak, sırasıyla, 125 ps ve 142 ns olarak bilinmektedir. Gözlemlenen bu değerler, yarı klasik yöntemlere dayanan ve radyatif düzeltmeleri (loop corrections) içeren matematiksel yaklaşımlar aracılığı ile elde edilen değerlerle oldukça uyumludur (Al-Ramadhan ve Gidley 1994; Vallery ve ark. 2003).  $p - Ps$  ve  $o - Ps$  sis-

temlerinin toplam yaşam süreleri arasında yaklaşık olarak 1000 kat farklılık vardır ve bu farklılığın, spin-spin etkileşme kuvvetleri, faz uzayı, ek ince yapı baskılama faktörü, çöküş süreçlerinde toplam açısal momentumun korunumu gibi sebeplerden kaynaklandığı düşünülmektedir. Herhangi bir madde ortamının varlığında veya bu sistemler üzerine dış bir Elektromanyetik alan uygulandığında,  $p - Ps$  ve  $o - Ps$  sistemlerin bağlanma enerjileri değiştirileceği için, bu dış etkiler, sistemlerin toplam yaşam sürelerini değiştirirler (Alonso ve ark. 2015). Madde ortamına ve dış etkilere bağlı olan bu değişimler deneysel olarak birçok kez gözlenmiştir (Moskal ve ark. 2019a; Moskal ve ark. 2019b). Sistemi bir arada tutan etkileşim için çiftlenme sabiti, her bir madde ortamı için anihilasyon noktasının fiziksel özelliklerine bağlı olan efektif bir değer alır. Yani, herhangi bir  $Ps$  sistemi için toplam yaşam süresi, aynı termal şartlar altında, her bir madde ortamı için ayırt edici bilgi verir. Madde ortamlarında bir  $Ps$  sisteminin oluşum süresi, sistemin çökme süresi ve açığa çıkan gama fotonlarının taşıdığı toplam enerjinin olay-olay bazda tespit edilebilmesi hayati önem taşır. Ayrıca, anihilasyon sonucu açığa çıkan ışınlardaki Doppler genişlemelerinin ölçümü, anihilasyon noktasını çevreleyen elektriksel ortamın yük dağılımı hakkında bilgi sunabilmektedir (Asoka-Kumar ve ark. 1996). Bu bilgiler ışığında, madde ortamındaki elektron yoğunluğunun yüksek olmasının direk anihilasyon olasılığını artıracakını, madde ortamındaki serbest boşlukların ise pozitronların termalizasyon sürelerini etkileyeceğini söyleyebiliriz. Fakat, herhangi bir madde ortamında bir  $Ps$  atomunun oluşum süresi, sistemin ilk olarak hangi kuantum durumunda olduğu ve oluşan kuantum durumu için çevresel faktörlere bağlı olarak değişen yaşam süresi net bir şekilde bilinmemektedir (Moskal ve ark. 2019b).

Eksiton ( $Exc$ ), bazı yönleri ile  $Ps$  sistemine oldukça benzer olan, Coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen bir elektron ve deşikten (hole) oluşan kararsız, kompozit bir kuasi-parçacıktır (Bernd Hönerlage 2018). Elektronun bir foton absorbe ederek yüksek enerji seviyelerine geçmesiyle yada valans bandından iletim bandına geçmesiyle oluşur. Valans bandından iletim bandına geçen elektron, valans bandında pozitif yüklü boş bir durum bırakır (empty state). Bu pozitif yüklü durum deşik yada oyuk olarak adlandırılır. Eksitonların dinamiği, bu elektron-deşik çiftinin etkileşimi tarafından belirlenir. 2-boyutlu (monolayer) sistemlerde, bir Eksitonun bağlanma enerjisi, 3-boyutlu sistemlere göre yaklaşık olarak 10 kat daha fazla olması sebebiyle (Novoselov ve ark. 2005; Hanbicki ve ark. 2015;

Ramasubramaniam 2012), 2+1 boyutta bu sistemin dinamiğinin belirlenmesine yönelik bir çok çalışma bulunmaktadır (Kumar ve ark. 2014; Xiao ve ark. 2017). Ayrıca, iki boyutlu,  $WS_2$ ,  $WSe_2$ ,  $MoS_2$ ,  $MoSe_2$  gibi yarı-iletken malzemeler yada bu malzemelerden oluşan kompozit yapılar, özellikle optoelektronik cihaz uygulamaları için çok önemli bir uygulama potansiyeli taşırlar (Jariwala ve ark. 2014; Xiao ve ark. 2012; Wang ve ark. 2012). Bu nedenle, eksitonların özelliklerinin keşfedilmesi (Ye ve ark. 2014; Chernikov ve ark. 2014; Hanbicki ve ark. 2015) ve bu özellikler aracılığı ile yeni teknolojik uygulamaların gerçekleştirilebilmesi için (Komsa ve Krasheninnikov 2012; Zhu ve ark. 2015), tek katmanlı yarı-iletken malzemelerde eksitonlar, teorik ve deneysel olarak uzun yıllardır çalışılmaktadır (Park ve ark. 2018; Berkelbach ve ark. 2013; He ve ark. 2014). Eksiton bağlanma enerjilerinin tespiti için gerçekleştirilen çalışmalar, farklı tek-katmanlı yarı-iletken malzemelerde, bağlanma enerjisi değerlerinin 0,3-1 eV aralığında değiştiğini söylemektedir (Ye ve ark. 2014; Chernikov ve ark. 2014; Hanbicki ve ark. 2015; Wang ve ark. 2018). Fakat, bazı ölçümler, benzer deneysel düzenekler aracılığı ile, aynı tek katmanlı yarı-iletken malzemelerdeki eksitonlar için bile farklı bağlanma enerjisi değerleri vermektedir. Bu farklılığın, tek katmanlı yarı-iletken malzemenin yerleştirildiği altaş (substrate) kaynaklı olduğu tahmin edilmektedir (Tseng ve ark. 2015; Komsa ve Krasheninnikov 2012; Gunlycke ve Tseng 2016). Ayrıca, malzemelerin topolojik yapısının, sınır koşullarını değiştirerek bu tip sistemlerin enerji seviyelerinde kaymalara sebep olabileceği de tahmin edilmektedir (Cai ve Ren 2018).

Genel görelilik teorisi ile kuantum fiziğini birleştiren bir teori fikri, relativistik dalga denklemlerinin eğri uzay-zaman geometrilerine genelleştirilmesini tetiklemiştir ve Kuantum sistemlerinin eğri uzay-zaman geometrilerinde incelenmesi uzun yıllardır büyük bir ilgi görmüştür. Özellikle eğri bir uzay-zaman geometrisinde bir hidrojen atomu (Parker 1980b; Parker 1980a; Parker 1981; Leen ve ark. 1983; Parker ve Pimentel 1982), genişleyen evrende parçacık yaratımları (Duru and Ünal 1986) ve farklı uzay-zaman geometrileri için enerji momentum tensörünün, yeniden normalize edilmiş beklenen değerlerinin belirlenmesi (Bezerra ve Khusnutdinov 2006), bu alanda yapılmış temel çalışmalar arasındadır. Eğri bir uzay-zaman geometrisinin tek-parçacık durumları üzerindeki etkisinin belirlenmesi, kuantum fiziği ve kütle çekim teorisini birleştiren bir teorinin kurulabilmesi için oldukça önemlidir. Eğri bir uzay-zaman geometrisine yerleştirilmiş bir atomun enerji

seviyeleri, uzay-zamanın eğriliği sebebiyle değişime uğrar (Parker 1980b; Parker 1980a; Parker 1981; Parker ve Pimentel 1982; Leen ve ark. 1983). Bu sebeple, eğri bir uzay-zaman geometrisine yerleştirilmiş bir atomun değiştirilmiş spektral çizgileri, uzay-zaman zemininin özellikleri hakkında önemli bilgiler verir (Marques ve Bezerra 2002). Ayrıca, enerji seviyelerindeki bu kaymalar, bir kuantum sisteminin farklı durumları için aynı şekilde olmayabilir. Bu özellik, uzay-zaman geometrisi kaynaklı etkilerin, Doppler etkisi, kütle çekimsel yada kozmolojik kırmızıya kayma gibi etkilerden ayırt edilebilmesini sağlayabilir. Çünkü, Doppler etkisi, kütle çekimsel yada kozmolojik kırmızıya kayma etkilerinin, incelenen sistemin her enerji seviyesini aynı şekilde değiştirdiği bilinmektedir. Ayrıca, elektromanyetik perturbasyonlardan kaynaklanan enerji kaymalarının, kütle çekimsel etkilerden kaynaklanan kaymalardan farklı olduğu bilinmektedir (Marques ve Bezerra 2002). Genel görelilik teorisi, kütle çekiminin uzayın eğriliği üzerinden fiziksel sistemleri etkilediğini tahmin eder. Bu eğrilik, Riemann tensörü ile karakterize edilir (Parker 1980b; Parker 1980a; Parker 1981; Parker ve Pimentel 1982; Leen ve ark. 1983). Ayrıca, kolay anlaşılmayan (non-trivial) uzay-zaman topolojilerinin, ilginç kütle çekimsel etkilere sebep olabileceği teorik olarak tahmin edilmektedir. Bu nedenle, kolay anlaşılmayan bu topolojilerden kaynaklanan etkilerin, kuantum sistemleri (Skarzhinsky ve ark. 1994) veya test alanlarının relativistik dinamikleri üzerindeki etkilerinin incelenmesi oldukça önemlidir (Andrade ve Silva 2014). Bu tez kapsamında, bu tip bir topolojiye sahip bir uzay-zaman geometrisinde, karşılıklı olarak etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çifti (Guvendi ve ark. 2019) incelenmiş ve sistemin enerji seviyelerinde uzay-zaman yapısından kaynaklanan değişimler tartışılmıştır. Sonuç olarak, bu gibi sistemlerin bir dedektör olarak kullanılabilmesinin mümkün olup olmayacağı sorusu tartışılmıştır.

Kozmik sicim ve monopol gibi objeler, evrenin genişleme sürecinde oluşmuş olduğu tahmin edilen yapılardır. Kozmik sicimler, yüksek ihtimal ile evrenin erken dönemlerindeki faz geçişleri sırasında olduğu tahmin edilen, bir boyutlu topolojik kusurlardır ve bu yapıların günümüze kadar hayatta kalmış olabilecekleri tahmin edilmektedir (Kibble 1976; Vilenkin 1985). Başlangıçta, bu kuramsal objeler Kerr uzay-zamanının 3-boyutlu, genel, relativistik çözümleri olarak tanımlanmış (Deser ve ark. 1984) ve daha sonra bu çözümler doğal olarak 4-boyuta genişletilmiştir (Gott ve Alpert 1984). Bu yapıların varlığı, ayrıca, temel parçacıkların standart modelinin genişletilmiş bir versiyonu

(Hindmarsh ve Kibble 1995) ve extra uzay-zaman boyutlarının varlığı üzerine kurgulanan bir süper sicim teorisi ile desteklenmiştir (Hindmarsh 2011). Kozmik sicim tarafından oluşturulan uzay-zaman geometrisi bir koniksel tekillik içerir. Tekillik dışında, bu geometriler düz bir uzay-zaman zeminini temsil ederler. Fakat, global olarak düz olmayan bu uzay-zaman yapılarının, ilginç kütle çekimsel, kozmolojik yada astrofiziksel etkilere sebep olabilecekleri yaygın olarak düşünülmektedir. Kütle çekimsel mercek etkisi (Gott III 1985), parçacık üretimi (Parker 1987; Harari ve Skarzhinsky 1990), durgun elektrik yüklerine etki eden elektrostatik self kuvvet (Linet 1986; Muniz ve Bezerra 2014), bremsstrahlung etkisi (Aliev ve Gal'Tsov 1989; Audretsch ve ark. 1994) ve kütle çekimsel Aharonov-Bohm etkisi (Ford ve Vilenkin 1981) bu etkiler arasında düşünülebilir. Kozmik sicimler (Deser ve Jackiw 1989; Clement 1990; Jackiw 1985), sicimin lineer kütle yoğunluğunu içeren bir  $\alpha$  açısız açıklık parametresi (Hosseinpour ve ark. 2017; Yeşiltaş 2015) ve kozmik sicimin açısız momentum yoğunluğu cinsinden yazılan bir dönme parametresi ile karakterize edilirler (Medeiros ve de Mello 2012; Bakke ve Furtado 2010). Bu objelerin çeşitli kuantum sistemlerinin ve relativistik test alanlarının üzerinde oluşturabileceği etkiler uzun yıllardır araştırılmaktadır (Santos ve Barros 2018; Bellucci ve ark. 2014; Huang 2020; Cai ve Ren 2018). Bu tez kapsamında, statik bir kozmik sicim tarafından oluşturulan  $2 + 1$  boyutlu uzay-zamanda, Coulomb tipi çekici potansiyel aracılığı ile etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çifti düşünülmüş, (Deser ve Jackiw 1989; Clement 1990; Jackiw 1985), uzay-zaman zemininin, incelenen bu sistemin enerji seviyeleri üzerinde sebep olduğu değişimleri (kaymaları) tespit etmek için, tamamiyle kovaryant formdaki relativistik iki-cisim Dirac denkleminin tam çözümleri araştırılmıştır. Son olarak, bu tez kapsamında fermiyon-fermion sistemleri için geliştirilen matematiksel model, etkileşen 3-Dirac parçacığından oluşan sistemlerin dinamiğinin incelenebilmesi için geliştirilmiş, ve parçacıklardan birinin, uzay-zaman zemininin orjininde yerleştiği ve durgun olduğu varsayılarak genel bir enerji spektrumu elde edilmiştir.

### 3. MATERİYAL VE METOD

2 + 1-boyutlu düz bir Minkowski uzay-zaman geometrisi, kartezyen koordinatlar cinsinden aşağıdaki çizgi elemanı (metrik) ile temsil edilebilir (Peter Collas 2019),

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2.), \quad (3.1)$$

ve bu çizgi elemanı için 3-momentum  $p = (p^0, \mathbf{p})$  şeklinde yazılır. Burada, momentum bileşenleri  $p^0 = P_0$  ve  $p^y = -P_y$ , ( $y = 1, 2.$ ) şeklindedir. Bu momentum bileşenlerine karşılık gelen operatörler aşağıda verilmiştir,

$$P_0 = i\hbar \frac{\partial_t}{c}, \quad P^y = i\hbar \partial_y, \quad (y = 1, 2.).$$

Kanonik momentumlar ( $P_\mu$ ), metriğe göre belirlenen, Lagranjiyenin genelleştirilmiş hızlara göre türevleri alınarak elde edilir,

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu).$$

2+1 boyutlu düz bir Minkowski uzay-zaman geometrisinde hareket eden,  $m$  kütleli, serbest bir fermiyon için, Dirac denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc \mathbf{I}_2) \Psi = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2.),$$

burada  $\mathbf{I}_2$   $2 \times 2$  boyutlu birim matrisi,  $\hbar$  indirgenmiş Planck sabitini ve  $c$  vakumda ışık hızını temsil eder. Bu denklem, daha açık olarak aşağıda verilmiştir,

$$\left( \gamma^t \frac{\partial_t}{c} + \gamma^x \partial_x + \gamma^y \partial_y + i \frac{mc}{\hbar} \mathbf{I}_2 \right) \Psi = 0. \quad (3.2)$$

2 + 1 boyutlu uzayda,  $m$  kütleli Dirac parçacığını temsil eden spinör (Dirac alanı), aşağıda yazıldığı gibi,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

iki bileşenlidir. Denklem (3.2)' de yazılan Dirac denklemi, soldan  $\gamma^t$  ile çarpılarak, aşağıdaki özdeğer denklemi elde edilebilir  $((\gamma^t)^2 = \mathbf{I}_2)$ ,

$$i\partial_t\Psi = \widehat{H}\Psi = \omega\Psi, \quad \left(\omega = \frac{E}{\hbar}\right),$$

ve buradaki  $\widehat{H}$  operatörü,

$$\widehat{H} = \gamma^t \left( -\gamma^k \partial_k + i\frac{mc}{\hbar} \mathbf{I}_2 \right), \quad (k = 1, 2.),$$

şeklindedir.

Eğri bir uzay-zamanda, genelleştirilmiş Dirac matrisleri ( $\gamma^\mu$ ) ile uzay-zaman bağımsız Dirac matrisleri ( $\bar{\gamma}^p$ ) arasındaki ilişki üç bacaklılar ( $e_i^\lambda$ ) aracılığı ile kurulur ve üç bacaklılar aşağıdaki ifade kullanılarak elde edilebilir,

$$\eta_{ij} = e_i^\lambda e_j^\beta g_{\lambda\beta} \Rightarrow \left( \eta_{00} = e_0^\lambda e_0^\beta g_{\lambda\beta} \right), \\ (\lambda, \beta, i, j = 0, 1, 2.),$$

burada  $\eta_{ij}$  2 + 1 boyutlu düz Minkowski uzay-zamanını,  $g_{\lambda\beta}$  ise 2 + 1 boyutlu eğri bir uzay-zaman geometrisini temsil eden metrik tensördür. 2 + 1 boyutlu uzay-zamanda sabit Dirac matrisleri Pauli spin matrislerine indirgenir (Sucu ve Ünal 2007; Peter Collas 2019). Metrik katsayıları için (+, -, -) şeklindeki bir işaret seçiminde, sabit Dirac matrisleri Pauli spin matrisleri cinsinden aşağıdaki gibi seçilebilir,

$$\bar{\gamma}^0 \rightarrow \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^1 \rightarrow i\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^2 \rightarrow i\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Üç bacaklılar aracılığı ile, genelleştirilmiş Dirac matrisleri aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\gamma^\mu(\mathbf{x}) = e_p^\mu(\mathbf{x}) \bar{\gamma}^p, \quad (\mu, p = 0, 1, 2.), \quad (3.4)$$

ve bu matrisler, metrik diyagonal ise, aşağıda verilen antikomütasyon bağıntılarını sağlarlar,

$$\begin{aligned} [\bar{\gamma}^k, \bar{\gamma}^l] &= \varepsilon 2\eta^{kl} \mathbf{I}_2, \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= \varepsilon 2g^{\mu\nu} \mathbf{I}_2, \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\Psi$  spinörünü,  $\tilde{\Psi}_p = \widehat{L}\Psi_n$  şeklinde dönüştüren bir  $\widehat{L}$  operatörü tanımlanabilir. Burada  $\widehat{L}(\mathbf{x})$ , üç bacaklı rotasyonlarının uzay-zaman bağımlı spinör temsilidir. Metrik katsayıları için, (+, -, -) şeklindeki bir işaret seçimi ile, spinörün kovaryant türevi;

$$\tilde{\Psi}_{,v} = \widehat{L}\Psi_{,v} + \widehat{L}_{,v}\Psi \quad (v = 0, 1, 2.),$$

şeklinde olacağı için, bir spinörün kovaryant türevi aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$D_\lambda \Psi = \mathbf{I}\Psi_{,\lambda} + \Gamma_\lambda \Psi, \quad (\lambda = 0, 1, 2.),$$

ve burada  $\Gamma_\lambda$  spinör bağlantılarını temsil eder. Spin bağlantı katsayıları  $(w_{l\lambda}^k)$  aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$w_{l\lambda}^k = -e_l^\mu \left( \partial_\lambda e_\mu^k - \Gamma_{\lambda\mu}^\eta e_\eta^k \right), \quad (\lambda, \mu, \eta, k, l = 0, 1, 2.),$$

ve bu ifade yardımı ile,  $w_{kl\lambda}$ ;

$$\begin{aligned} w_{kl\lambda} &= e_{k\beta} \nabla_\lambda e_l^\beta, \\ &= g_{\beta\mu} e_k^\mu \nabla_\lambda e_l^\beta, \\ &= \eta_{kn} e_\beta^n \nabla_\lambda e_l^\beta, \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Spinör bağlantı katsayıları cinsinden, spinör bağlantıları aşağıdaki ifade

yardımları ile hesaplanabilir,

$$\Gamma_\mu = \frac{\varepsilon}{4} w_{kl\mu} \gamma^k \gamma^l = \frac{\varepsilon}{2} w_{kl\mu} \Sigma^{kl}, \quad \Sigma^{kl} = \frac{1}{4} [\gamma^k, \gamma^l],$$

$$(\mu, k, l = 0, 1, 2.), \quad (3.6)$$

ve burada  $\varepsilon$  (Peter Collas 2019), matris seçimlerine göre pozitif yada negatif değer alabilir ( $\varepsilon = \pm 1$ ). Eğer Dirac parçacığı dış bir elektromanyetik kuvvet alanında ( $A_\mu$ ) hareket ediyor ise, kovaryant operatörler;

$$\Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu,$$

şeklinde yada,

$$D_\mu \rightarrow D_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu,$$

şeklinde değiştirilebilirler. Bu operatörler içerisindeki  $e$ ,  $\Psi$  alanıyla temsil edilen Dirac parçacığının elektriksel yükünü temsil eder.

2 + 1 boyutlu eğri bir uzay-zamanda, dış bir elektromanyetik alan etkisinde hareket eden fermiyonun dinamiği, aşağıdaki denklemle incelenebilir <sup>5</sup>,

$$\left\{ \gamma^\mu(\mathbf{x}) \left( \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(\mathbf{x}) + \Gamma_\mu(\mathbf{x}) \right) + i \frac{mc}{\hbar} \right\} \Psi(\mathbf{x}) = 0.$$

Tüm bu bilgiler göz önünde bulundurularak, etkileşen iki-Dirac parçacığının dinamiğinin incelenebilmesi için, Eylem prensibi kullanılarak Kuantum Elektrodinamiğinden türetilen Dirac-Coulomb tipi iki-parçacık denklemi, genel bir uzay-zaman geometrisi için aşağıdaki formuyla ifade edilebilir (Barut ve Komy 1985; Guvendi ve ark. 2019),

$$\left\{ \left( \gamma^{\mu(1)} \Pi_\mu^{(1)} + ib_1 \right) \otimes \gamma^{0(2)} + \gamma^{0(1)} \otimes \left( \gamma^{\mu(2)} \Pi_\mu^{(2)} + ib_2 \right) \right\} \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0,$$

$$\Pi_\mu^{(1)} = \left( \partial_\mu^{(1)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_\mu^{(2)} - \Gamma_\mu^{(1)} \right), \quad \Pi_\mu^{(2)} = \left( \partial_\mu^{(2)} + \frac{ie_2}{\hbar c} A_\mu^{(1)} - \Gamma_\mu^{(2)} \right),$$

$$\partial_\mu = \left( \frac{\partial_0}{c}, \partial_1, \partial_2, \partial_3 \right), \quad (\mu = 0, 1, 2, 3.), \quad b_q = \frac{m_q c}{\hbar}, \quad (q = 1, 2.),$$

<sup>5</sup>Burada  $\mathbf{x}$ , Dirac parçacığının eğri uzay-zaman geometrisindeki konum vektörünü temsil eder  $(x_0, \vec{\mathbf{x}})$ .

ve bu denklem, etkileşen 3-Dirac parçacığından oluşan bir kompozit sistemin, 2 + 1 boyutlu genel bir uzay-zaman geometrisindeki dinamiğinin incelenebilmesi için aşağıdaki gibi genişletilerek,

$$\begin{aligned}
& \left( \gamma^{\mu(1)} \Pi_{\mu}^{(1)} + ib_1 \mathbf{I}_2 \right) \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi + \gamma^{0(1)} \otimes \left( \gamma^{\mu(2)} \Pi_{\mu}^{(2)} + ib_2 \mathbf{I}_2 \right) \otimes \gamma^{0(3)} \Psi \\
& + \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \left( \gamma^{\mu(3)} \Pi_{\mu}^{(3)} + ib_3 \mathbf{I}_2 \right) \Psi = 0, \\
\Pi_{\mu}^{(1)} &= \left( \partial_{\mu}^{(1)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(1)} \right), \quad \Pi_{\mu}^{(2)} = \left( \partial_{\mu}^{(2)} + \frac{ie_2}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(2)} \right), \\
\Pi_{\mu}^{(3)} &= \left( \partial_{\mu}^{(3)} + \frac{ie_3}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(3)} \right), \\
\partial_{\mu} &= (\partial_0, \partial_1, \partial_2), \quad (\mu = 0, 1, 2.), \quad b_q = \frac{m_q c}{\hbar}, \quad (q = 1, 2, 3.), \quad (3.7)
\end{aligned}$$

3-cisim Dirac denklemi elde edilebilir (Barut ve Strobel 1986; Barut 1991).

Bu tez kapsamında, birbirleriyle etkileşen 2 fermiyondan oluşan,  $Ps$ ,  $Exc$  gibi ve 3 fermiyondan oluşan  $Ps^{\pm}$ ,  $Exc^{\pm}$  gibi kararsız sistemlerin dinamiği ( $l$  iyi kuantum sayısı değil) incelenen sistemlerin dinamik simetrisi sebebiyle, 2 + 1 uzay-zaman boyutunda, iki-cisim ve üç-cisim Dirac denklemlerinin tam çözümleri yapılarak incelenecektir.

İki-cisim Dirac denklemi, genel 2 + 1 boyutlu eğri bir uzay-zamanda elektromanyetik olarak etkileşen iki fermiyon için aşağıdaki gibi yazılabilir <sup>6</sup>,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left( \gamma^{\mu(1)} \Pi_{\mu}^{(1)} + ib_1 \right) \otimes \gamma^{0(2)} + \gamma^{0(1)} \otimes \left( \gamma^{\mu(2)} \Pi_{\mu}^{(2)} + ib_2 \right) \right\} \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0, \\
\Pi_{\mu}^{(1)} &= \left( \partial_{\mu}^{(1)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_{\mu}^{(2)} - \Gamma_{\mu}^{(1)} \right), \quad \Pi_{\mu}^{(2)} = \left( \partial_{\mu}^{(2)} + \frac{ie_2}{\hbar c} A_{\mu}^{(1)} - \Gamma_{\mu}^{(2)} \right), \\
\partial_{\mu} &= \left( \frac{\partial_0}{c}, \partial_1, \partial_2 \right), \quad (\mu = 0, 1, 2.), \quad b_q = \frac{m_q c}{\hbar}, \quad (q = 1, 2.),
\end{aligned}$$

burada,  $A_{\mu}$  ve  $\gamma^{\mu}$  sırasıyla, elektromanyetik vektör potansiyelini ve genelleştirilmiş Dirac matrislerini temsil eder. Bu denklemde, parçacıkların kütleleri ve elektriksel yükleri  $m_1, e_1, m_2, e_2$  ile temsil edilmiştir.  $\Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  her iki parçacığın konum vektörlerine bağlı olan (bi-lokal) spinör alanını temsil eder ve bu kütleli bi-lokal alan, birbirinden farklı olan ve her biri bir kütleyle sahip olan iki Dirac alanının Kronocker yada tensör çarpımı olarakta

<sup>6</sup>Burada (1) ve (2) etiketleri, sırasıyla birinci ve ikinci parçacığı temsil eder.

adlandırılan direkt ( $\otimes$ ) çarpımı ile,

$$\begin{aligned} \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \chi(\mathbf{x}_1) \otimes \varphi(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} \Omega_1(\mathbf{x}_1) \\ \Omega_2(\mathbf{x}_1) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \Lambda_1(\mathbf{x}_2) \\ \Lambda_2(\mathbf{x}_2) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \Omega_1(\mathbf{x}_1) \Lambda_1(\mathbf{x}_2) \\ \Omega_1(\mathbf{x}_1) \Lambda_2(\mathbf{x}_2) \\ \Omega_2(\mathbf{x}_1) \Lambda_1(\mathbf{x}_2) \\ \Omega_2(\mathbf{x}_1) \Lambda_2(\mathbf{x}_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

şeklinde kurulur ve daha açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \psi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \psi_4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Bu denklem, 2 + 1 boyutlu genel bir uzay-zaman geometrisinde birbirleriyle elektromanyetik olarak etkileşen kütleli iki Dirac parçacığı (fermiyon) için, açık olarak aşağıdaki gibi

yazılabilen,

$$\begin{aligned}
& \gamma^{0(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \gamma^{0(2)}(\mathbf{x}_2) \left[ \partial_0^{(1)} + \partial_0^{(2)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_0^{(2)}(\mathbf{x}_1) + \frac{ie_2}{\hbar c} A_0^{(1)}(\mathbf{x}_2) \right] \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& - \left[ \gamma^{0(1)}(\mathbf{x}_1) \Gamma_0^{(1)}(\mathbf{x}_1) \right] \otimes \gamma^{0(2)}(\mathbf{x}_2) \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& - \gamma^{0(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \left[ \gamma^{0(2)}(\mathbf{x}_2) \Gamma_0^{(2)}(\mathbf{x}_2) \right] \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& + \gamma^{1(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \gamma^{0(2)}(\mathbf{x}_2) \left( \partial_1^{(1)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_1^{(2)}(\mathbf{x}_1) \right) \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& - \left[ \gamma^{1(1)}(\mathbf{x}_1) \Gamma_1^{(1)}(\mathbf{x}_1) \right] \otimes \gamma^{0(2)}(\mathbf{x}_2) \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& + \gamma^{0(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \gamma^{1(2)}(\mathbf{x}_2) \left( \partial_1^{(2)} + \frac{ie_2}{\hbar c} A_1^{(1)}(\mathbf{x}_2) \right) \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& - \gamma^{0(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \left[ \gamma^{1(2)}(\mathbf{x}_2) \Gamma_1^{(2)}(\mathbf{x}_2) \right] \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& + \gamma^{2(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \gamma^{0(2)}(\mathbf{x}_2) \left( \partial_2^{(1)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_2^{(2)}(\mathbf{x}_1) \right) \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& - \left[ \gamma^{2(1)}(\mathbf{x}_1) \Gamma_2^{(1)}(\mathbf{x}_1) \right] \otimes \gamma^{0(2)}(\mathbf{x}_2) \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& + \gamma^{0(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \gamma^{2(2)}(\mathbf{x}_2) \left( \partial_2^{(2)} + \frac{ie_2}{\hbar c} A_2^{(1)}(\mathbf{x}_2) \right) \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& - \gamma^{0(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \left[ \gamma^{2(2)}(\mathbf{x}_2) \Gamma_2^{(2)}(\mathbf{x}_2) \right] \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\
& + \left\{ i \frac{m_1 c}{\hbar} \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(2)}(\mathbf{x}_2) + i \frac{m_2 c}{\hbar} \gamma^{0(1)}(\mathbf{x}_1) \otimes \mathbf{I}_2 \right\} \Xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$4 \times 4$  boyutlu bir matris denklemdir. Eğri bir uzay-zamanda, her bir parçacığa ait geliştirilmiş Dirac matrislerini elde etmek için, öncelikle parçacıkların uzay-zaman koordinatlarına bağlı olan üç bacaklıların  $e_i^\lambda(\mathbf{x})$  belirlenmesi gerekir. Eğri bir uzay-zamanda farklı konumlarda bulunan parçacıkların uzay-zaman koordinatları cinsinden yazılan metrik tensör  $g_{\lambda\beta}(\mathbf{x})$  kullanılarak, üç bacaklılar, uzay-zamanda farklı lokalizasyonlara sahip her iki parçacık için ayrı ayrı hesaplanabilir,

$$\begin{aligned}
\eta_{ij}^{\lambda(1)} &= e_i^{\lambda(1)}(\mathbf{x}_1) e_j^{\beta(1)}(\mathbf{x}_1) g_{\lambda\beta}^{(1)}(\mathbf{x}_1), \quad \eta_{ij}^{\lambda(2)} = e_i^{\lambda(2)}(\mathbf{x}_2) e_j^{\beta(2)}(\mathbf{x}_2) g_{\lambda\beta}^{(2)}(\mathbf{x}_2), \\
(i, j, \lambda, \beta &= 0, 1, 2.), \quad \mathbf{x}_1 = \left( x_0^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(1)} \right), \quad \mathbf{x}_2 = \left( x_0^{(2)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)} \right). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Elde edilen üç bacaklılar kullanılarak, geliştirilmiş Dirac matrisleri aşağıdaki gibi, her bir parçacık için elde edilebilir,

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu(1)}(\mathbf{x}_1) &= e_p^{\mu(1)}(\mathbf{x}_1) \bar{\gamma}^p{}^{(1)}, \quad \gamma^{\mu(2)}(\mathbf{x}_2) = e_p^{\mu(2)}(\mathbf{x}_2) \bar{\gamma}^p{}^{(2)}, \\
(\mu, p &= 0, 1, 2.). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

2 + 1 boyutta, herbir parçacık için uzay-zaman bağımsız Dirac matrisleri ise aşağıda açık olarak verilmiştir,

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^{0(1)} = \bar{\gamma}^{0(2)} = \sigma^z &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \bar{\gamma}^{1(1)} = \bar{\gamma}^{1(2)} = i\sigma^x &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\gamma}^{2(1)} = \bar{\gamma}^{2(2)} = i\sigma^y &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Benzer şekilde, Dirac parçacıklarının konum vektörüne bağlı olan, spinör bağlantıları  $\Gamma_\mu(\mathbf{x})$ , her bir parçacık için aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^{(1)}(\mathbf{x}_1) &= \frac{\varepsilon}{4} w_{kl\mu}^{(1)}(\mathbf{x}_1) \gamma^{k(1)} \gamma^{l(1)} = \frac{\varepsilon}{2} w_{kl\mu}^{(1)}(\mathbf{x}_1) \Sigma^{kl(1)}(\mathbf{x}_1), \\ \Sigma^{kl(1)}(\mathbf{x}_1) &= \frac{1}{4} [\gamma^{k(1)}, \gamma^{l(1)}], \\ \Gamma_\mu^{(2)}(\mathbf{x}_2) &= \frac{\varepsilon}{4} w_{kl\mu}^{(2)}(\mathbf{x}_2) \gamma^{k(2)} \gamma^{l(2)} = \frac{\varepsilon}{2} w_{kl\mu}^{(2)}(\mathbf{x}_2) \Sigma^{kl(2)}(\mathbf{x}_2), \\ \Sigma^{kl(2)}(\mathbf{x}_2) &= \frac{1}{4} [\gamma^{k(2)}, \gamma^{l(2)}], \\ (\mu, k, l = 0, 1, 2.), \quad \varepsilon &= \pm 1.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Uzay-zaman geometrisini temsil eden çizgi elemanı için üç bacaklılardan gelen katkılar, Denklem (3.4) kullanılarak hesaplanabilir ve Denklem (3.9)'daki, sabit Dirac matrislerinin direkt çarpımları, katsayı işaretleri +, -, - şeklinde seçilen tüm uzay-

zaman geometrileri için, Denklem (3.3)' teki matris seçimi koşulu ile, aşağıda verilmiştir,

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}^{0(1)} \otimes \bar{\gamma}^{0(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \bar{\gamma}^{1(1)} \otimes \bar{\gamma}^{0(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\bar{\gamma}^{2(1)} \otimes \bar{\gamma}^{0(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{I}_2 \otimes \bar{\gamma}^{0(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\bar{\gamma}^{0(1)} \otimes \bar{\gamma}^{1(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\gamma}^{0(1)} \otimes \bar{\gamma}^{2(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\bar{\gamma}^{0(1)} \otimes \mathbf{I}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Parçacıkların uzay-zaman vektörleri  $\mathbf{x}_1$  ve  $\mathbf{x}_2$  şeklinde temsil edilerek, bu konum vektörleri cinsinden kütle merkezi-bağılı hareket koordinatları ve bu koordinatların diferansiyel formları aşağıdaki şekilde tanımlanabilir,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad M = m_1 + m_2, \\
\mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} (1) \\ t, x, y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} (2) \\ t, x, y \end{pmatrix}, \\
\partial_{x_\mu}^{(1)} &= \partial_{r_\mu} + \frac{m_1}{M} \partial_{R_\mu}, \quad \partial_{x_\mu}^{(2)} = -\partial_{r_\mu} + \frac{m_2}{M} \partial_{R_\mu}, \quad \partial_{x_\mu}^{(1)} + \partial_{x_\mu}^{(2)} = \partial_{R_\mu}, \\
\partial_{r_\mu} &= \frac{1}{M} \left( m_2 \partial_{x_\mu}^{(1)} - m_1 \partial_{x_\mu}^{(2)} \right), \quad \partial_\mu = \left( \frac{\partial}{c}, \partial_x, \partial_y \right) \quad (\mu = 0, 1, 2.).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Uzay-zamanı temsil eden metrik tensör ve parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyelleri göz önünde bulundurularak, Denklem (3.10), Denklem (3.11), Denklem (3.12), Denklem (3.13), Denklem (3.14) ve Denklem (3.15)' ten gelen terimler, Denklem (3.9)' da yerine yazılır ve ilgilenilen sistemin dinamiğini veren çiftlenimli denklem seti elde edilir.

2 + 1-boyutlu düz bir Minkowski uzay-zaman geometrisinde, etkileşen iki parçacık için, tamamiyle kovaryant formdaki iki-cisim Dirac denklemi, aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned} & \left[ H^{(1)} \otimes \gamma^{0(2)} + \gamma^{0(1)} \otimes H^{(2)} \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0, \\ H^{(1)} &= \left( \gamma^{\mu(1)} D_{\mu}^{(1)} + ib_1 \mathbf{I}_2 \right), \quad H^{(2)} = \left( \gamma^{\mu(2)} D_{\mu}^{(2)} + ib_2 \mathbf{I}_2 \right), \\ D_{\mu}^{(1)} &= \left( \partial_{\mu}^{(1)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_{\mu}^{(2)} \right), \quad D_{\mu}^{(2)} = \left( \partial_{\mu}^{(2)} + \frac{ie_2}{\hbar c} A_{\mu}^{(1)} \right), \\ b_q &= \frac{m_q c}{\hbar}, \quad (q = 1, 2.), \quad \partial_{\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bu denklem ilk bakışta, tamamen kovaryant formda görünmemesine rağmen, denklemde kullanılan  $\gamma^0$  Dirac matrisleri aslında  $\gamma^{\mu} \eta_{\mu}$  şeklindedir. Burada  $\eta_{\mu}$  zaman boyutunu (time-like) temsil eden vektördür ve  $\eta_{\mu} = (100)$  için, denklemin yazıldığı form tekrar elde edilebilir. Bu denklem, herbir parçacığa ait Dirac matrislerinin direkt çarpımları ile kurulmuştur (her bir parçacık için  $\gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(2)}$ ) ve bi-lokal, kütleli Dirac alanı,  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \chi_1(\mathbf{x}_1) \otimes \Theta_2(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} D_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ D_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ D_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ D_4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyeli Coulomb tipi bir potansiyel ise,  $A_{\mu}$  elektromanyetik vektör potansiyelinin bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$A_0 = V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad A_1 = A_2 = 0. \quad (3.18)$$

Etkileşen iki-fermion sistemini çevreleyen tek katmanlı bir dielektrik ortam var ise, ortamın optik özelliklerinin homojen olduğu varsayımı ile, bu ortamın dielektrik katsayısı  $\epsilon_{eff}$ ' in sabit bir çarpan olarak cebre dahil edilebilmesi mümkündür. İki-fermionun içinde bulunduğu bu uzay-zaman geometrisi, kartezyen koordinatlar cinsinden aşağıdaki

çizgi elemanı ile temsil edilebilir,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \epsilon_{eff}^{-2} [dx^2 + dy^2]. \quad (3.19)$$

Bu uzay-zaman geometrisinde etkileşen iki-fermiyon sisteminin dinamiği üzerine spinör bağlantı terimlerinden katkı gelmeyeceği Denklem (3.13)' ten kolayca görülebilir. Fakat, üç bacaklılar ve sabit Dirac matrisleri aracılığı ile elde edilen genelleştirilmiş Dirac matrisleri, bu uzay-zaman geometrisinin optik özelliklerine dair bilgi taşırlar ( $\gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a$ ). Böylece, ortamın optik özelliğinin, parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyelini modifiye edeceği görülebilir. Denklem (3.19) ile temsil edilen uzay-zaman geometrisi için, genelleştirilmiş Dirac matrisleri, Denklem (3.10) ve Denklem (3.11) kullanılarak elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen genelleştirilmiş Dirac matrisleri aşağıda verilmiştir,

$$\gamma^0 = \sigma^z, \quad \gamma^1 = \epsilon_{eff} i \sigma^x, \quad \gamma^2 = \epsilon_{eff} i \sigma^y. \quad (3.20)$$

Eğer, bu iki-fermiyondan oluşan sistemin kütle merkezi momentumu bir hareket sabiti ise, Denklem (3.17) ile verilen bi-spinör  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ' nin bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$D_p(\mathbf{r}, R, R_0) := F_p(\mathbf{r}) \Phi_p(\mathbf{R}) e^{-i\omega R_0},$$

$$\Phi_p(\mathbf{R}) := e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}, \quad (p = 1, 2, 3, 4),$$

burada  $\mathbf{K}$  kütle merkezinin uzaysal momentumu ile  $\hbar\mathbf{K}$  şeklinde ilişkilidir.  $R_0$  ve  $\mathbf{R}$  ise, sırasıyla kütle merkezinin zaman ve uzay koordinatlarını temsil eder. Sistemin toplam frekansı  $\omega$  ise, kütle merkezinin zaman koordinatı  $R_0$ ' a göre belirlenir, çünkü parçacıklar arasında bağıl zaman farkı yoktur. Denklem (3.16)' yı, soldan  $\gamma^0 \otimes \gamma^0$  ile çarparak, keyfi kütlelere sahip, efektif bir dielektrik ortamda (izotropik) bulunan ve birbirleri ile etkileşen

relativistik bir fermiyon-fermion sistemi için aşağıda verilen matris denklemi elde edilir<sup>7</sup>,

$$\begin{pmatrix} \Lambda(r) - B & \epsilon_{eff} \widehat{\partial}_- & -\epsilon_{eff} \widehat{\partial}_- & 0 \\ -\epsilon_{eff} \widehat{\partial}_+ & \Lambda(r) - \Delta b & 0 & -\epsilon_{eff} \widehat{\partial}_- \\ \epsilon_{eff} \widehat{\partial}_+ & 0 & \Lambda(r) + \Delta b & \epsilon_{eff} \widehat{\partial}_- \\ 0 & \epsilon_{eff} \widehat{\partial}_+ & -\epsilon_{eff} \widehat{\partial}_+ & \Lambda(r) + B \end{pmatrix} + i \frac{\epsilon_{eff}}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} 0 & -m_2 K_- & -m_1 K_- & 0 \\ m_2 K_+ & 0 & 0 & -m_1 K_- \\ m_1 K_+ & 0 & 0 & -m_2 K_- \\ 0 & m_1 K_+ & m_2 K_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{r}) \\ F_2(\mathbf{r}) \\ F_3(\mathbf{r}) \\ F_4(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.21)$$

$$\widehat{\partial}_\pm = \partial_{r_1} \pm i \partial_{r_2}, \quad K_\pm = K_1 \pm i K_2, \quad \Lambda(r) = \left( \frac{w}{c} - V(\mathbf{r}) \right),$$

$$B = \frac{(m_1 + m_2)c}{\hbar}, \quad \Delta b = \frac{(m_1 - m_2)c}{\hbar},$$

burada 1 ve 2 alt indisleri uzaysal koordinatları,  $V(\mathbf{r})$  parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyelini temsil eder,  $\mathbf{r}$  ise bağlı uzaysal vektördür.

Denklem (3.21)' in, bütün, analitik bir çözümünün yapılabilmesinde iki temel problem vardır. İlk problem, kütle merkezi durgun olsa bile ( $\mathbf{K} = 0$ ), parçacıkların kütle farkından kaynaklanır. Kütle merkezinin durgun olduğu durumun oluşabilmesi, parçacıkların birbirlerine göre zıt momentum taşımalarını gerektirir. Parçacıklar arası etkileşme potansiyeli sadece görece radyal koordinata bağlıdır, fakat ikinci problem,  $m_1 = m_2$  olsa bile, kütle merkezi momentumunun bağlı hareket koordinatları ile çiftlenmesinden kaynaklanır (Berman ve ark. 2013).  $m_1 = m_2$  durumunda, Denklem (3.21) aşağıdaki formda yazılabilir,

$$\epsilon_{eff} \begin{pmatrix} \frac{\Lambda(\mathbf{r}) - B}{\epsilon_{eff}} & \widehat{\partial}_- - i \frac{K_-}{2} & -\left( \widehat{\partial}_- + i \frac{K_-}{2} \right) & 0 \\ -\left( \widehat{\partial}_+ - i \frac{K_+}{2} \right) \widehat{\partial}_+ & \Lambda(\mathbf{r}) & 0 & -\left( \widehat{\partial}_- + i \frac{K_-}{2} \right)_- \\ \widehat{\partial}_+ + i \frac{K_+}{2} & 0 & \Lambda(\mathbf{r}) & \widehat{\partial}_- - i \frac{K_-}{2} \\ 0 & \widehat{\partial}_+ + i \frac{K_+}{2} & -\left( \widehat{\partial}_+ - i \frac{K_+}{2} \right)_- & \frac{\Lambda(\mathbf{r}) + B}{\epsilon_{eff}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{r}) \\ F_2(\mathbf{r}) \\ F_3(\mathbf{r}) \\ F_4(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Bu denklem, parçacıklar arasında genel bir etkileşme potansiyeli terimi içerir ve ilk bakışta hareketli veya durgun, kütleli veya kütesiz bir fermiyon-fermion sisteminin dinamiğinin araştırılması için kullanılabilir şekilde görülebilir. Bu denklem, kütesiz bir fermiyon-fermion sistemi için kullanılamaz, çünkü Denklem (3.22), sadece  $m_1 = m_2 \neq 0$  koşulu altında elde edilebilir. Fermiyonların kütleli olması koşulu ile, Denklem (3.22), bir

<sup>7</sup>Burada  $(\gamma^0 \otimes \gamma^0), (\gamma^0 \otimes \gamma^0)$  çarpımı  $4 \times 4$  boyutlu birim matris  $\mathbf{I}_4$ ' ü verir.

dielektrik ortamda (izotropik) bulunan, statik yada hareketli bir fermiyon-fermion sisteminin dinamiğinin araştırılması için kullanılabilir. Burada parçacıkların kütleli olmalarıyla ilgili olarak yapılan tartışma çok temeldir, fakat fenomenolojik olarak kurulmuş birçok iki-cisim Dirac hamiltoniyeni için, bu gereklilik göz ardı edilmiştir.

Burada, en ilginç durumlardan birisi kütle merkezinin durgun olduğu durumdur ( $\hbar\mathbf{K} = 0$ ). Eşit kütleli iki fermiyon için, bu durum, fermiyonların birbirlerine göre zıt momentum taşımalarını gerektirir. Bu kısmen daha basit bir durumdur, fakat bu durumda herhangi bir çift etkisi önem kazanır. Statik bir elektron-elektron sistemi (kütleli) için, Denklem (3.22) ile verilen matris denklemi aşağıdaki forma indirgenir,

$$\begin{pmatrix} \Lambda(\mathbf{r}) - 2b & \epsilon_{eff}\widehat{\partial}_- & -\epsilon_{eff}\widehat{\partial}_- & 0 \\ -\epsilon_{eff}\widehat{\partial}_+ & \Lambda(\mathbf{r}) & 0 & -\epsilon_{eff}\widehat{\partial}_- \\ \epsilon_{eff}\widehat{\partial}_+ & 0 & \Lambda(\mathbf{r}) & \epsilon_{eff}\widehat{\partial}_- \\ 0 & \epsilon_{eff}\widehat{\partial}_+ & -\epsilon_{eff}\widehat{\partial}_+ & \Lambda(\mathbf{r}) + 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{r}) \\ F_2(\mathbf{r}) \\ F_3(\mathbf{r}) \\ F_4(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.23)$$

burada  $b = \frac{m_e c}{\hbar}$  dir. Bu matris denkleminde, ikinci ve üçüncü satırın taraf tarafa toplanması ile  $F_3(r_1, r_2) = -F_2(r_1, r_2)$  sonucu elde edilebilir. Fakat bu durum sadece ve sadece  $\frac{w}{c} - V(\mathbf{r}) \neq 0$  ise doğrudur. Matematiksel olarak mümkün görünen diğer bir durum ise,  $w = cV(r)$  durumudur. Bu tez kapsamında, sadece  $\frac{w}{c} - V(\mathbf{r}) \neq 0$  olduğu durumla ilgilenilecektir. Eğer  $\frac{w}{c} - V(\mathbf{r}) \neq 0$  ise,  $F_3(r_1, r_2) = -F_2(r_1, r_2)$  olacağı için, Denklem (3.23) aşağıdaki forma indirgenebilir,

$$\begin{pmatrix} \Lambda(\mathbf{r}) - 2b & 2\epsilon_{eff}\widehat{\partial}_- & 0 \\ -\epsilon_{eff}\widehat{\partial}_+ & \Lambda(\mathbf{r}) & -\epsilon_{eff}\widehat{\partial}_- \\ 0 & 2\epsilon_{eff}\widehat{\partial}_+ & \Lambda(\mathbf{r}) + 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{r}) \\ F_2(\mathbf{r}) \\ F_4(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.24)$$

Görelî hareketin uzaysal koordinatları  $(r_1, r_2)$ ,  $F(r_1, r_2) \rightarrow F_g(r, \phi) = F_g(r) e^{is\phi}$ , ( $g = 1, 2, 3, 4$ .) şeklinde dönüştürülmüş spinör bileşenleri cinsinden, polar koordinatlarda  $(r, \phi)$  yazılabilir. Pozitronyum ve Eksiton sistemleri temel olarak birbirlerine benzer yönler

taşırılar. Her iki sistem, birbirlerine göre zıt elektriksel yüke sahip leptonlardan oluşur ve tamamıyla leptonik yapıdan kaynaklı olarak bu sistemler, çekici Coulomb kuvveti nedeniyle çökerek bozunurlar.  $l = 0$  koşulu, her bir parçacığa ait dalga fonksiyonlarının üst üste binme koşulunun sağlanması anlamına gelir ve bozunma durumu ile ilgili bilgiler  $l = 0$  kuantum durumları ile elde edilebilir. Pozitronyum ve Eksiton, relativistik iki-fermiyondan oluşan sistemlerdir ve bu sistemlerin mümkün tüm spin öz-durumları, aşağıda verilen operatörler kullanılarak kurulabilir,

$$\widehat{\partial}_{\mp} = \partial_{r_1} \mp i\partial_{r_2} = e^{\mp i\phi} \left( \mp \frac{i}{r} \partial_{\phi} + \partial_r \right), \quad (3.25)$$

burada verilen  $\widehat{\partial}_-$  ve  $\widehat{\partial}_+$  sırası ile spin alçaltma ve spin yükseltme operatörleridir. Bu operatörler kullanılarak, sistemin bağlı hareketini veren denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\begin{aligned} (\Lambda(r) - 2b) F_1(r, \phi) + 2\epsilon_{eff} \left( \frac{s}{r} + \partial_r \right) F_2(r) &= 0, \\ \Lambda(r) F_2(r) + \epsilon_{eff} \left( \frac{s}{r} - \partial_r \right) F_1(r, \phi) \\ - \epsilon_{eff} \left( \frac{s}{r} + \partial_r \right) F_4(r, \phi) &= 0, \\ (\Lambda(r) + 2b) F_4(r, \phi) - 2\epsilon_{eff} \left( \frac{s}{r} - \partial_r \right) F_2(r) &= 0, \end{aligned}$$

burada,

$$F_1(r, \phi) = F_1(r) e^{i\phi}, \quad F_4(r, \phi) = F_4(r) e^{-i\phi},$$

şeklindedir ve  $s$  ise relativistik iki-fermiyondan oluşan kompozit sistemin toplam spin kuantum sayısıdır. Eğer parçacıkların spinleri anti-simetrik ise (singlet-kuantum durumu) ( $s = 0$ ), bu denklem sistemi en simetrik haline indirgenir. Bu durumda, elde edilen çiftlenimli denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned}\Lambda(r) F_+(r, \phi) - 2bF_-(r, \phi) + 4\epsilon_{eff}\partial_r F_0(r) &= 0, \\ \Lambda(r) F_-(r, \phi) - 2bF_+(r, \phi) &= 0, \\ \Lambda(r) F_0(r) - \epsilon_{eff}\partial_r F_+(r, \phi) &= 0,\end{aligned}$$

burada,

$$\begin{aligned}F_{\pm}(r, \phi) &= F_1(r) e^{i\phi} \pm F_4(r) e^{-i\phi}, \\ F_0(r) &= F_2(r).\end{aligned}$$

Çekici bir Coulomb potansiyeli aracılığı ile ( $V(r) \propto -\alpha/r$ ) etkileşen bir elektron-pozitif elektron sistemi için,  $z = -(\omega r)/(\alpha c)$  şeklinde boyutsuz bir bağımsız değişken tanımlanabilir. Yeni tanımlanan bağımsız değişken cinsinden, bu çiftlenimli denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilebilir <sup>8</sup>,

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z} F_+(z, \phi) - \frac{2bc}{w} F_-(z, \phi) - \frac{4\epsilon_{eff}}{\alpha} \partial_z F_0(z) &= 0, \\ \frac{z-1}{z} F_-(z, \phi) - \frac{2bc}{w} F_+(z, \phi) &= 0, \\ \frac{z-1}{z} F_0(z, \phi) + \frac{\epsilon_{eff}}{\alpha} \partial_z F_+(z, \phi) &= 0,\end{aligned}$$

ve bu denklem sistemi,  $F_+(z)$  için çözümlenerek dalga denklemini elde edilir,

$$\partial_z^2 F_+(z) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) \partial_z F_+(z) + \frac{\alpha^2}{4\epsilon_{eff}^2} \left(\frac{(z-1)^2}{z^2} - \frac{4b^2 c^2}{w^2}\right) F_+(z) = 0. \quad (3.26)$$

Spinör bileşeni için,

$$F_+(z) = z^{i\frac{\alpha}{2\epsilon_{eff}}} e^{\frac{\alpha\sqrt{4b^2 c^2 - w^2}}{2w\epsilon_{eff}} z} \tilde{F}_z(z),$$

<sup>8</sup>Burada  $\alpha$  boyutsuz çiftlenme gerilimidir.

şeklinde bir çözüm önerisi yazılarak, Denklem (3.26) aşağıdaki forma indirgenebilir,

$$\partial_z^2 \tilde{F}_z(z) + \left(\kappa + \frac{1+\beta}{z} + \frac{1+\gamma}{z-1}\right) \partial_z \tilde{F}_z(z) + \left(\frac{\lambda}{z} + \frac{\nu}{z-1}\right) \tilde{F}_z(z). \quad (3.27)$$

Denklem (3.27) Heun diferansiyel denklemlerinin basit bir şeklidir. Bu denklem,  $z = 0$  ve  $z = 1$ ' de regüler tekiliğe,  $z = \infty$ ' da ise irregüler tekiliğe sahiptir.  $z = 0$  regüler tekil nokta civarında, Denklem (3.27),  $\beta$  parametresinin tamsayı olmaması koşulu altında, lineer bağımsız iki çözüm fonksiyonuna sahiptir. Bu çözüm fonksiyonları aşağıda verilmiştir,

$$\tilde{F}_+(z) = C_1 Heun_C(\kappa, \beta, \gamma, \delta, \eta, z) + C_2 z^{-\beta} Heun_C(\kappa, -\beta, \gamma, \delta, \eta, z),$$

burada  $C_1$  ve  $C_2$  keyfi sabitlerdir. Kullanılan parametreler arasındaki ilişki aşağıdaki denklemler ile verilir,

$$\lambda = \frac{\kappa - \beta - \gamma}{2} + \frac{\beta}{2}(\kappa - \gamma) - \eta, \quad \nu = \frac{\kappa + \beta + \gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}(\kappa + \beta) + \delta + \eta.$$

Denklem (3.27) yeniden düzenlenerek,

$$\begin{aligned} z(z-1)H'' + [\kappa z(z-1) + (1+\beta)(z-1) + (1+\gamma)z] H' \\ + [\lambda(z-1) + \nu z] H = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

denklemin  $z = 0$  regüler tekil noktası civarındaki çözümleri, Frobenius metodu kullanılarak elde edilebilir. Çözüm fonksiyonu  $H(z)$  için,

$$H(z) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N Z^N,$$

şeklinde bir çözüm önerisi yazılabilir ve Denklem (3.28) aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} \{(1+N+\beta+\gamma-\kappa)N-\lambda\} a_N Z^N - \sum_{N=0}^{\infty} \{(N+\beta)N\} a_N Z^{N-1} \\ + \sum_{N=0}^{\infty} \{\kappa N + \lambda + \nu\} a_N Z^{N+1}. \end{aligned}$$

Bu denklem düzenlenerek,

$$\sum_{N=0}^{\infty} \{(N + \beta + \gamma - \kappa)(N - 1) - \lambda\} a_{N-1} Z^{N-1} - \sum_{N=0}^{\infty} \{(N + \beta) N\} a_N Z^{N-1} \\ + \sum_{N=2}^{\infty} \{\kappa(N - 2) + \lambda + \nu\} a_{N-2} Z^{N-1},$$

katsayılar için,  $a_{-1} = 0$  ve  $a_0 = 1$  başlangıç koşulları ile aşağıdaki üç terimli tekrarlıma bağıntısı elde edilebilir,

$$A_N a_N = B_N a_{N-1} + C_N a_{N-2},$$

burada,

$$A_N = 1 + \frac{\beta}{N}, \\ B_N = 1 + \frac{-\kappa + \beta + \gamma - 1}{N} + \frac{\eta}{N^2} + \frac{-(-\kappa + \beta + \gamma) - \kappa\beta + \beta\gamma}{2N^2}, \\ C_N = \frac{\kappa}{N^2} \left( \frac{\delta}{\kappa} + \frac{\beta + \gamma}{2} + N + 1 \right),$$

şeklinde bulunur ve  $N \gg 0$  için bu katsayıların sonlu kaldığı gösterilebilir,

$$A_N \implies 1,$$

$$B_N \implies 1,$$

$$C_N \implies 0.$$

$Heun_C$  fonksiyonlarının  $N \geq 0$  dereceden polinom olabilmesi için gerekli koşul aşağıda verilmiştir (Vieira ve Bezerra 2016; Fiziev 2009),

$$\left( N + 1 + \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \kappa = -\delta, \quad (3.29)$$

ve bu koşul ile incelenen sistemin enerji spektrumu elde edilebilir.

Etkileşen 3-Dirac parçacığından oluşan bir kompozit sistemin,  $2 + 1$  boyutlu genel bir uzay-zaman geometrisindeki dinamiği, aşağıda verilen kovaryant 3-cisim Dirac denklemi ile incelenebilir (Barut ve Strobel 1986; Barut 1991),

$$\begin{aligned}
& \left( \gamma^{\mu(1)} \Pi_{\mu}^{(1)} + ib_1 \mathbf{I}_2 \right) \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi + \gamma^{0(1)} \otimes \left( \gamma^{\mu(2)} \Pi_{\mu}^{(2)} + ib_2 \mathbf{I}_2 \right) \otimes \gamma^{0(3)} \Psi \\
& \quad \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \left( \gamma^{\mu(3)} \Pi_{\mu}^{(3)} + ib_3 \mathbf{I}_2 \right) \Psi = 0, \\
& \Pi_{\mu}^{(1)} = \left( \partial_{\mu}^{(1)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(1)} \right), \quad \Pi_{\mu}^{(2)} = \left( \partial_{\mu}^{(2)} + \frac{ie_2}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(2)} \right), \\
& \quad \Pi_{\mu}^{(3)} = \left( \partial_{\mu}^{(3)} + \frac{ie_3}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(3)} \right), \\
& \partial_{\mu} = \left( \frac{\partial_0}{c}, \partial_1, \partial_2 \right), \quad (\mu = 0, 1, 2.), \quad b_q = \frac{mqc}{\hbar}, \quad (q = 1, 2, 3.), \quad (3.30)
\end{aligned}$$

burada  $\gamma^{\mu(q)}$  ile genelleştirilmiş Dirac matrisleri,  $A_{\mu}^{(ex)}$  ile her bir fermiyon için dış elektromanyetik potansiyeller ve  $\mathbf{I}_2$  ile  $2 \times 2$  boyutlu birim matrisler temsil edilmiştir.  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  kompozit alanı aşağıdaki gibi, kütleli 3-Dirac alanının direkt çarpımı ile elde edilir,

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \psi(\mathbf{x}_1) \otimes \chi(\mathbf{x}_2) \otimes \Theta(\mathbf{x}_3).$$

Denklem (3.30) ile verilen 3-cisim Dirac denklemi, tek-zamanlı bir denklemdir. Bu durum, denklemin daha açık olarak aşağıda verilen şekilde yazılması ile kolaylıkla görülebilir,

$$\begin{aligned}
& \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \left( p_0^{(1)} + p_0^{(2)} + p_0^{(3)} \right) \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\
& \quad - m_1 c \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\
& \quad - m_2 c \gamma^{0(1)} \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(3)} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - m_3 c \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \mathbf{I}_2 \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\
& + \left[ \gamma^{k(1)} p_k^{(1)} \right] \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \gamma^{0(1)} \otimes \left[ \gamma^{k(2)} p_k^{(2)} \right] \otimes \gamma^{0(3)} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\
& \quad + \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \left[ \gamma^{k(3)} p_k^{(3)} \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 0, \quad (k = 1, 2.).
\end{aligned}$$

Denklem (3.1) ile temsil edilebilen düz Minkowski uzay-zaman zemini için,  $\Gamma_{\mu}$  spinör bağlantıları sıfır olur. Coulomb tipi potansiyeller aracılığı ile etkileşen bu üç fermiyon için, genelleştirilmiş momentum operatörlerinin bileşenleri aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$p_0^{(q)} = i\hbar \left( \partial_0^{(q)} + i \frac{e_q A_0^{ex}}{\hbar c} \right), \quad p_1^{(q)} = i\hbar \partial_1^{(q)}, \quad p_2^{(q)} = i\hbar \partial_2^{(q)}, \quad (q = 1, 2, 3.).$$

Kütle merkezi momentumu  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$  şeklinde tanımlanarak, eşit kütleli 3

fermiyondan oluşan  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  gibi sistemler için, 3-cisim Dirac denklemi yazılabilir,

$$\begin{aligned} & \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} P_0 \Psi \\ & - mc \left( \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} + \gamma^{0(1)} \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(3)} + \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \mathbf{I}_2 \right) \Psi \\ & + \left[ \gamma^{1(1)} p_1^{(1)} + \gamma^{2(1)} p_2^{(1)} \right] \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi + \gamma^{0(1)} \otimes \left[ \gamma^{1(2)} p_1^{(2)} + \gamma^{2(2)} p_2^{(2)} \right] \otimes \gamma^{0(3)} \Psi \\ & + \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \left[ \gamma^{1(3)} p_1^{(3)} + \gamma^{2(3)} p_2^{(3)} \right] \Psi = 0. \end{aligned}$$

İkinci fermiyonun, koordinat sisteminin orjiniinde ve durgun olduğu durum için, bu denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\left\{ \bar{\mathbf{A}} (\partial_t/c) + ib\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{C}}\partial_x + \bar{\mathbf{D}}\partial_y \right\} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0,$$

burada tanımlanmış olan  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  ve  $\bar{\mathbf{D}}$  operatörleri  $8 \times 8$  boyutlu matrislerdir. Denklem (3.12) ile verilen matris seçimleri için, bu matrisler açık olarak aşağıda verilmiştir,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \sigma^z \otimes \sigma^z & \mathbf{O}_4 \\ \mathbf{O}_4 & -\sigma^z \otimes \sigma^z \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \sigma^z \otimes \sigma^z + [\mathbf{I}_2 \otimes \sigma^z]_+ & \mathbf{O}_4 \\ \mathbf{O}_4 & \sigma^z \otimes \sigma^z - [\mathbf{I}_2 \otimes \sigma^z]_+ \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} -\sigma^z \otimes i\sigma^x & i\sigma^z \otimes \sigma^z \\ i\sigma^z \otimes \sigma^z & \sigma^z \otimes i\sigma^x \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} -\sigma^z \otimes i\sigma^y & \sigma^z \otimes \sigma^z \\ -\sigma^z \otimes \sigma^z & \sigma^z \otimes i\sigma^y \end{pmatrix}, \\ \mathbf{O}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{I}_2 \otimes \sigma^z]_+ = \mathbf{I}_2 \otimes \sigma^z + \sigma^z \otimes \mathbf{I}_2. \end{aligned}$$

Kompozit Dirac alanı,

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \Phi(\mathbf{x}),$$

şeklinde tanımlanabilir ve kütle merkezinin durgun olduğu durum için, 3-cisim Dirac

denklemini aşağıdaki hale indirgenebilir,

$$\sigma^z \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon(r) - b \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \partial_- & -\partial_- & 0 \\ \partial_+ & 0 & 0 & \partial_- \\ -\partial_+ & 0 & 0 & -\partial_- \\ 0 & \partial_+ & -\partial_+ & 0 \end{pmatrix} \right\} \Upsilon(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\partial_{\pm} = (\partial_x \pm i\partial_y).$$

Bu denklem, mümkün spin durumlarının kurulabilmesi için, Denklem (3.25) ile verilen spin alçaltma ve yükseltme operatörleri kullanılarak, polar koordinatlar cinsinden yazılabilir,

$$\begin{aligned} \epsilon(r) F_+(r, \phi) - 3bF_-(r, \phi) + 4\partial_r F_0(r) &= 0, \\ \epsilon(r) F_-(r, \phi) - 3bF_+(r, \phi) &= 0, \\ \epsilon(r) F_0 - j/rF_-(r, \phi) - \partial_r F_+(r) &= 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

burada,

$$\begin{aligned} F_+(r, \phi) &= F_1(r) e^{i\phi} + F_4(r) e^{-i\phi}, \quad F_-(r, \phi) = F_1(r) e^{i\phi} - F_4(r) e^{-i\phi}, \\ F_0(r) &= F_2(r) = -F_3(r), \quad \epsilon(r) = (w/c - V_T(r)), \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır,  $V_T$  ise parçacıklar arasındaki toplam etkileşme potansiyelini temsil eder. Denklem (3.31) ile verilen çiftlenimli denklem sistemi  $F_+$  için çözülerek 2. mertebeden türevli bir dalga denklemi elde edilir,

$$\partial_r^2 F_+(r) + \left[ \frac{j}{r} - \frac{\partial_r \epsilon(r)}{\epsilon(r)} \right] \partial_r F_+(r) + \left[ \frac{\epsilon(r)^2 - 9b^2}{4} - \frac{\partial_r \epsilon(r) j}{\epsilon(r) r} - \frac{j}{r^2} \right] F_+(r) = 0.$$

Parçacıkların sadece Coulomb tipi potansiyeller aracılığı ile etkileştiği düşünülürse, ( $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ ), spinor bileşeni aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$F_+(r) = \overline{F(r)} e^{-\frac{\sqrt{9b^2 c^2 - \omega^2}}{2c} r^{-\frac{j}{2} + \frac{\beta}{2}}},$$

ve  $y = -\frac{\omega r}{\alpha c}$  şeklinde bir boyutsuz bağımsız değişken tanımlanarak, dalga denklemi aşağıdaki halde elde edilebilir,

$$\partial_y^2 \psi(y) + \left[ \Omega + \frac{1+\beta}{y} + \frac{1+\varepsilon}{y-1} \right] \partial_y \psi(y) + \left[ \frac{\Lambda}{y} + \frac{\Lambda}{y-1} \right] \psi(y) = 0, \quad (3.32)$$

burada kullanılan parametreler şu şekildedir,

$$\begin{aligned} \delta &= \Delta + \Lambda - \Omega \frac{(\beta+\varepsilon+2)}{2}, & \delta &= -\frac{\bar{\alpha}^2}{2} \\ \Omega &= \frac{\bar{\alpha}}{\omega} \sqrt{9b^2c^2 - \omega^2}, & \beta &= -\sqrt{j^2 - \bar{\alpha}^2}, & \varepsilon &= -2, \\ \Pi &= (1 + \beta) \frac{\Omega}{2} - \frac{(\beta+\varepsilon+\beta\varepsilon)}{2} - \Delta, & \Pi &= 1 + \frac{\bar{\alpha}^2}{2} - \frac{j}{2}. \end{aligned}$$

Denklem (3.32)' nin lineer bağımsız çözümleri aşağıdaki gibi, *Heun* fonksiyonları cinsinden elde edilmiştir,

$$\psi(y) = Q_1 H_C(\Omega, \beta, \varepsilon, \delta, \Pi, y) + \frac{Q_2}{y^\beta} H_C(\Omega, -\beta, \varepsilon, \delta, \Pi, y),$$

burada  $Q_1$  ve  $Q_2$  keyfi sabitlerdir. Denklem (3.29) kullanılarak, incelenen sistem için enerji spektrumu elde edilebilir.

#### 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda, eşit kütleyle sahip, etkileşen, 2 ve 3 fermiyondan oluşan,  $Ps$ ,  $Exc$ ,  $Ps^\pm$ ,  $Exc^\pm$  gibi kompozit sistemler için, bu sistemlerin dinamik simetrileri göz önünde bulundurularak, matematiksel modeller geliştirilecektir. İlk olarak, etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çiftinden oluşan  $Ps$  ve  $Exc$  gibi nötral kompozit sistemler, 2 + 1 boyutlu düz bir Minkowski uzay-zaman geometrisinde incelenecektir. Vakum durumunda elde edilen enerji spektrumu fenomenolojik olarak modifiye edilecek ve etkileşen fermiyon-fermion sistemini çevreleyen bir dielektrik ortamın varlığında enerji seviyelerindeki değişimler araştırılacaktır. Daha sonra, dielektrik madde ortamında bir Eksitonun dinamiği araştırılırken, madde ortamını temsil eden bir uzay-zaman geometrisi tanımlanacak ve fenomenolojik olarak elde edilen spektrum, matematiksel olarak temellendirilecektir. Elde edilen sonuçlar güncel literatür ile kıyaslanarak detaylı bir şekilde tartışılacaktır. Tez kapsamında kullanılan iki-cisim Dirac denklemi genel bir uzay-zaman geometrisine adapte edilerek birkaç farklı fiziksel özelliğe sahip uzay-zaman geometrisinde fermiyon-fermion sistemleri araştırılacak ve uzay-zaman zemininin bu sistemler üzerindeki etkileri tartışılacaktır. Son olarak, fermiyon-fermion sistemleri için geliştirilen metod, 3-Dirac parçacığından oluşan sistemlerin incelenebilmesi için genişletilecek ve  $Ps^\pm$ ,  $Exc^\pm$  gibi etkileşen 3 Dirac parçacığından oluşan kararsız kompozit sistemler için genel bir enerji spektrumu elde edilecektir.

##### 4.1. Spin anti-simetrik bir fermiyon-antifermiyon çifti için matematiksel model

2 + 1 boyutlu düz bir Minkowski uzay-zamanında elektromanyetik olarak etkileşen iki fermiyonun dinamiği, Denklem (3.16) kullanılarak incelenebilir<sup>9</sup>. Denklem (3.16)' da, elektromanyetik vektör potansiyeli ve genelleştirilmiş Dirac matrisleri sırasıyla  $A_\mu$  ve  $\gamma^\mu$  ile temsil edilmiş, parçacıkların kütleleri ve elektriksel yükleri  $m_1, e_1, m_2, e_2$  ile verilmiştir. Parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyelinin Coulomb tipi bir potansiyel olduğu düşünülerek, elektromanyetik vektör potansiyelinin bileşenleri Denklem (3.18) ile verilen şekilde seçilir.

Denklem (3.1) ile temsil edilebilen (2 + 1) boyutlu bir uzay-zamanda, Denklem

<sup>9</sup>Gerekli tüm kuramsal bilgiler 3. Bölümde verilmiştir.

(3.5) ile verilen cebri sağlayan matrisler, Pauli spin matrisleri cinsinden Denklem (3.3) ile verilmiştir. Kütle merkezi ve bağıl hareket koordinatlarının ayrımı için, Denklem (3.15) ile verilen ifadeler kullanılarak, kütle merkezi momentumunun bir hareket sabiti olduğu durum için, bi-lokal Dirac alanının bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$\begin{aligned}\Psi_p(\mathbf{r}, \mathbf{R}) &:= \xi_p(\mathbf{r}) \varphi_p(\vec{\mathbf{R}}) e^{-i\omega R_0}, \\ \varphi_p(\vec{\mathbf{R}}) &:= e^{-i\vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{R}}}, \quad (p = 1, 2, 3, 4.).\end{aligned}\quad (4.33)$$

Burada  $R_0$  ve  $\mathbf{R}$  sırasıyla, bu kompozit sistemin öz (proper) zamanını ve kütle merkezinin uzaysal koordinatlarını temsil eder.  $\mathbf{K}$  kütle merkezinin momentumu ile  $(\hbar\mathbf{K})$  şeklinde ilişkilidir. Denklem (3.14) ve Denklem (3.16)' dan görülebileceği gibi, parçacıklar arasında bağıl bir zaman farkı yoktur.

#### 4.1.1. Radyal Denklemler

Kütle merkezinin durgun olduğu bir referans sisteminde (rest frame), Denklem (3.14), Denklem (3.15) ve Denklem (3.16) kullanılarak, eşit kütleli ( $m_1 = m_2 = m_f$ ), Coulomb tipi çekici bir potansiyel ( $-\frac{\alpha}{r}$ ) aracılığı ile etkileşen iki fermiyon için, aşağıdaki gibi çiftlenimli bir denklem seti elde edilir,

$$\begin{aligned}(\lambda(r) - 2b) \xi_1(r_1, r_2) - \partial^- \xi_2(r_1, r_2) + \partial^- \xi_3(r_1, r_2) &= 0, \\ \lambda(r) \xi_2(r_1, r_2) + \partial^+ \xi_1(r_1, r_2) + \partial^- \xi_4(r_1, r_2) &= 0, \\ (\lambda(r) + 2b) \xi_4(r_1, r_2) - \partial^+ \xi_2(r_1, r_2) + \partial^+ \xi_3(r_1, r_2) &= 0, \\ \lambda(r) \xi_3(r_1, r_2) - \partial^+ \xi_1(r_1, r_2) - \partial^- \xi_4(r_1, r_2) &= 0,\end{aligned}$$

ve burada kullanılan kısaltmalar şu şekildedir;

$$\begin{aligned}\lambda(r) &= \left(\frac{w}{c} - V(r)\right), \quad V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \\ b &= \frac{m_f c}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}, \quad \partial^\mp = (\partial_{r_1} \mp i\partial_{r_2}).\end{aligned}$$

İncelenen,  $Ps$  ve  $Exc$  gibi sistemler kararsız, tamamen leptonik yapıda olan kompozit sistemlerdir. Bu sistemler, parçacıklar arasındaki çekici Coulomb kuvveti sebebiyle çö-

kerler yani bu sistemler için  $l$  iyi bir kuantum sayısı değildir. Eşit kütleyle sahip, çekici bir Coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen iki fermiyon için mümkün olan tüm spin kuantum durumları, polar uzay-zaman geometrisinin açılal simetrisi kullanılarak kurulabilir. Relativistik iki fermiyondan oluşan kompozit sistemin mümkün tüm spin durumları, aşağıda verilen açılal momentum yaratma ( $\partial^+$ ) ve yok etme ( $\partial^-$ ) operatörleri kullanılarak,

$$\partial_{r_1} \mp i\partial_{r_2} = e^{\mp i\phi} \left( \mp \frac{i}{r} \partial_\phi + \partial_r \right),$$

dönüştürülmüş spinör bileşenleri (polar koordinatlar  $(r, \phi)$ ) cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$\xi_p(r_1, r_2) \rightarrow \xi_p(r, \phi) = \psi_p(r) e^{is\phi}, \quad (p = 1, 2, 3, 4).$$

Denklem (3.24), vakumda ( $\epsilon_{eff} = 1$ ), birbirleri ile çekici bir Coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen ve bir fermiyon-antifermiyon çiftinden oluşan spinsiz kompozit bir sistem için aşağıda verilen denklem setinin elde edilebileceğini açık şekilde göstermektedir,

$$\begin{aligned} \lambda(r) \psi_+(r, \phi) - B\psi_-(r, \phi) + 4\partial_r \psi_0(r) &= 0, \\ \lambda(r) \psi_-(r, \phi) - B\psi_+(r, \phi) &= 0, \\ \lambda(r) \psi_0(r) + \partial_r \psi_+(r, \phi) &= 0, \end{aligned} \tag{4.34}$$

burada kullanılan tanımlamalar şu şekildedir;

$$\begin{aligned} \psi_\pm(r, \phi) &= \psi_1(r) e^{i\phi} \pm \psi_4(r) e^{-i\phi}, \\ \psi_0(r) &= \psi_2(r), \quad B = \frac{2m_f c}{\hbar}. \end{aligned}$$

#### 4.1.2. Frekans spektrumu

Bu kısımda, çekici bir Coulomb kuvveti ile etkileşen, eşit kütleyle sahip iki fermiyondan oluşan, spinsiz nötral bir kompozit sistem için, Denklem (4.34) ile verilen denklem sisteminin tam çözümleri yapılarak pertürbatif olmayan bir frekans spektrumu elde edilecektir. Denklem (4.34)' te verilen çiftlenimli denklem sistemi  $\psi_+(r)$  için çözü-

lerek, ikinci mertebeden türevli dalga denklemi elde edilir,

$$\partial_r^2 \psi_+(r) - \frac{[\partial_r \lambda(r)]}{\lambda(r)} \partial_r \psi_+(r) + \frac{\lambda(r)^2 - B^2}{4} \psi_+(r) = 0.$$

Bu dalga denklemi, spinör bileşeni için,

$$\psi_+(r) = e^{-\frac{r}{2c} \sqrt{B^2 c^2 - \omega^2}} r^{\frac{i\alpha}{2}} \xi_+(r),$$

şeklinde yapılan bir tanım altında ve  $z = -\frac{\omega r}{\alpha c}$  şeklinde bir bağımsız değişken dönüşümü yapılarak aşağıdaki formda yazılabilir,

$$\partial_z^2 \xi_+(z) + \left[ \varepsilon + \frac{1+\zeta}{z} + \frac{1+\kappa}{z-1} \right] \partial_z \xi_+(z) + \left[ \frac{\Delta}{z} + \frac{\Lambda}{z-1} \right] \xi_+(z) = 0. \quad (4.35)$$

Bu denklem, daha önce 3. Bölümde seri çözümü ve enerji kuantizasyon koşulu verilen, Heun diferansiyel denkleminin en basit formu şeklinde elde edilmiştir. Denklem (4.35)' te kullanılan parametreler arasındaki ilişki şu şekildedir,

$$\begin{aligned} \Delta &= (1+\zeta) \frac{\varepsilon}{2} - \frac{(\zeta+\kappa+\zeta\kappa)}{2} - \iota, & \delta &= \Delta + \Lambda - \varepsilon \frac{(\zeta+\kappa+2)}{2}, \\ \varepsilon &= \frac{\alpha}{\omega} \sqrt{B^2 c^2 - \omega^2}, & \zeta &= -i\alpha, & \kappa &= -2, & \delta &= -\frac{\alpha^2}{2}, & \iota &= 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \end{aligned}$$

Denklem (4.35) için, linear bağımsız çözüm fonksiyonları aşağıdaki şekilde elde edilir (Vieira ve Bezerra 2016; Fiziev 2009),

$$\xi_+(z) = C_1 H_C(\varepsilon, \zeta, \kappa, \delta, \iota, z) + \frac{C_2}{z^\zeta} H_C(\varepsilon, -\zeta, \kappa, \delta, \iota, z),$$

burada  $C_1$  ve  $C_2$  keyfi sabitlerdir. Asimptotik olarak kabul edilebilir olan fiziksel çözüm ikinci çözümdür ve bu çözüm fonksiyonu için, polinom olma koşulu aşağıda verilmiştir,

$$\left( n + 1 + \frac{\zeta + \kappa}{2} \right) \varepsilon = -\delta.$$

**Çizelge 4.1.**  $p - Ps$  sistemi için  $l = 0$  enerji seviyelerinin yaşam süreleri

$n$	$\text{Im } \omega_n [Hz]$	$\tau_n [s]$
1	$7,552424 \times 10^{13}$	$0,013240 \times 10^{-12}$
2	$9,440860 \times 10^{12}$	$0,105922 \times 10^{-12}$
3	$2,797310 \times 10^{12}$	$0,357486 \times 10^{-12}$
4	$1,180117 \times 10^{12}$	$0,847373 \times 10^{-12}$
5	$6,042209 \times 10^{11}$	$1,655023 \times 10^{-12}$

Bu ifade yardımıyla pertürbatif olmayan frekans spektrumu elde edilir,

$$\omega(n, \alpha) = \frac{2m_f c^2}{\hbar} \sqrt{\frac{n^4 + \frac{3}{4}n^2\alpha^2 - i\frac{\alpha^3 n}{8}}{n^4 + n^2\alpha^2}}. \quad (4.36)$$

Bu frekans spektrumu, incelenen kararsız sistemin, mümkün olan tüm  $l = 0$  enerji düzeyleri için, sırası ile reel ve sönümlü modlarını veren, reel ve imajiner kısımları içerir. Bu kompleks spektrumlar, literatürde, "quasi-normal-modlar" olarak adlandırılırlar. Denklem (4.36) kullanılarak sistemin enerji spektrumu aşağıdaki şekilde elde edilebilir,

$$E(n, \alpha) = 2m_f c^2 \left[ \frac{n^8 + \frac{3}{2}\alpha^2 n^6 + \frac{9}{16}\alpha^4 n^4 + \alpha^6 n^2/64}{n^8 + 2\alpha^2 n^6 + \alpha^4 n^4} \right]^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad (4.37)$$

burada kullanılan kısaltma aşağıda verilmiştir,

$$\theta = \tan^{-1} \left[ -\frac{\alpha^3 n}{8n^4 + 6\alpha^2 n^2} \right], \quad n \geq 1.$$

Elde edilen bu modlar, bu tür sistemlerin tüm zamanlarda var olamayacağını söyler. Bu frekans spektrumu zamanda exponansiyel olarak sönümlenen titreşimleri verir. Yani özetle, Denklem (4.36) ile verilen kompleks frekans ifadesindeki imajiner kısım (tersi), sistemin bozunma süresini ( $\tau$ ) verir ( $\tau \propto \frac{1}{|\text{Im}\omega|}$ ). Bu spektrum kullanılarak, bir  $p - Ps$  sisteminin mümkün birkaç  $l = 0$  enerji seviyesi için, hesaplanan yaşam süreleri Çizelge 4.1.' de, bağlanma enerjileri ise Çizelge 4.2.' de listelenmiştir. Ayrıca,  $l = 0$  enerji düzeyleri arasındaki geçişler için, geçiş frekanları ve bu sistemin bir enerji durumundan başka bir enerji durumuna geçmesi için gerekli süreler hesaplanmış ve Çizelge 4.3.' te listelenmiştir.

Fenomenolojik olarak, bu  $p - Ps$  sistemini çevreleyen homojen bir dielekt-

**Çizelge 4.2.**  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$  için  $p - Ps$  sisteminin bağlanma enerjisi değerleri

n	$E_n$ [eV]
1	-6,802617
2	-1,700810
3	-0,755846
4	-0,425046
5	-0,272129

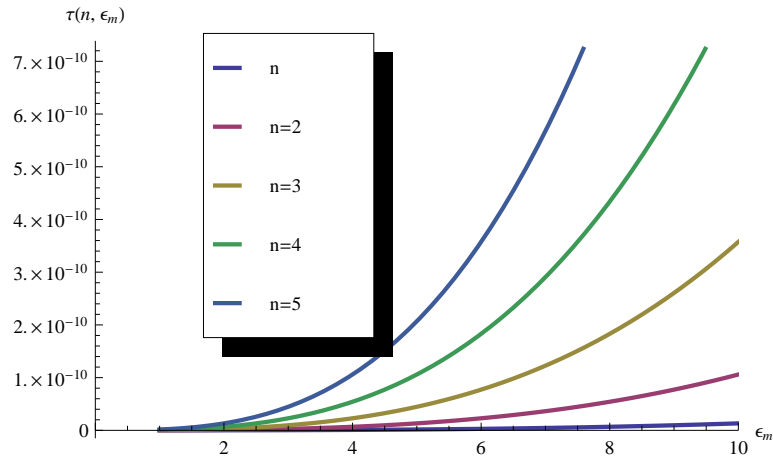
**Çizelge 4.3.** Geçişler için gerekli frekans değerleri ve süreler

$n_i \rightarrow n_f$	$\Delta\omega_{\mathfrak{R}}$ [Hz]	$\Delta\tau$ [s]
2 $\rightarrow$ 1	$12,33624903 \times 10^{14}$	$0,092682 \times 10^{-12}$
3 $\rightarrow$ 1	$14,62116301 \times 10^{14}$	$0,344246 \times 10^{-12}$
4 $\rightarrow$ 1	$15,42103427 \times 10^{14}$	$0,834133 \times 10^{-12}$
5 $\rightarrow$ 1	$15,79078612 \times 10^{14}$	$1,641783 \times 10^{-12}$
3 $\rightarrow$ 2	$2,284913976 \times 10^{14}$	$0,251564 \times 10^{-12}$
4 $\rightarrow$ 2	$3,084790511 \times 10^{14}$	$0,741451 \times 10^{-12}$
5 $\rightarrow$ 2	$3,454437091 \times 10^{14}$	$1,549101 \times 10^{-12}$
4 $\rightarrow$ 3	$0,799871258 \times 10^{14}$	$0,489887 \times 10^{-12}$
5 $\rightarrow$ 3	$1,699623113 \times 10^{14}$	$1,297537 \times 10^{-12}$
5 $\rightarrow$ 4	$0,369751854 \times 10^{14}$	$0,807650 \times 10^{-12}$

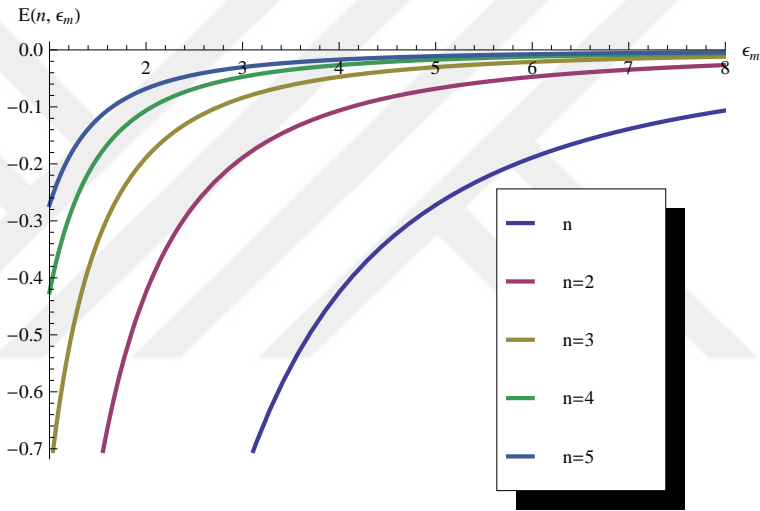
rik ortam düşünülebilir. Sistemi çevreleyen bu ortamın optik yada elektriksel özellikleri, ortamın efektif dielektrik katsayısı ( $\epsilon_m$ ) ile temsil edilerek, bu sistem üzerinde, madde ortamından kaynaklanan etkiler tartışılabilir. Böyle bir dielektrik ortamın varlığında, parçacıklar arasındaki elektromanyetik çiftlenme geriliminin değeri, ortamın optik özelliklerine göre değişecektir ( $\alpha_{eff} \rightarrow \frac{\alpha}{\epsilon_m}$ ). Bu dielektrik madde ortamının, elde edilen spektrumu nasıl değiştirdiğini açıkça görmek için, Denklem (4.36)  $\alpha'$  ya göre kuvvet serisine açılarak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\omega(n, \alpha_{eff}) \approx \frac{2m_f c^2}{\hbar} \left\{ 1 - \frac{\alpha_{eff}^2}{8n^2} - i \frac{\alpha_{eff}^3}{8n^3} \right\}. \quad (4.38)$$

Bu ifadede ilk terim, iki eşit kütleli fermiyondan oluşan bir kompozit sistemin toplam durgun kütle enerjisini, ikinci terim bu sistemin relativistik olmayan bağlanma enerjisini verir (para-Pozitronyum için yaklaşık olarak 6,803 eV). Denklem (4.33) ile verilen tanım kullanılarak, Denklem (4.38) ile verilen spektrumun son terimi aracılığı ile, her bir mod



**Şekil 4.1.** Dielektrik madde ortamına göre yaşam sürelerinin değişimi



**Şekil 4.2.** Dielektrik madde ortamına göre bağlanma enerjilerinin değişimi

için sönüm süreleri yaklaşık olarak aşağıdaki ifade yardımı ile hesaplanabilir.

$$\tau(n, \alpha_{eff}) \approx \frac{4\hbar}{m_f c^2} \frac{n^3}{\alpha_{eff}^3}, \quad \alpha_{eff} = \frac{\alpha}{\epsilon_m}. \quad (4.39)$$

Bu ifade, dielektrik ortamın sistem üzerindeki etkisinin açıkça görülebilmesi için yazılmıştır. Relativistik düzeltmeleri içeren yaşam süresi değerleri Çizelge 4.1.' de, bağlanma enerjileri ise Çizelge 4.2.' de listelenmiştir.

### 4.1.3. Tartışmalar

Burada, eşit kütleyle sahip, Coulomb tipi çekici bir potansiyel aracılığı ile etkileşen bir fermiyon antifermiyon çiftinden oluşan ve toplam spini  $s = 0$  olan nötral kararsız kompozit sistemler için matematiksel bir model geliştirilmiştir. Bu model tamamiyle kovaryant formda olan, eylem prensibi aracılığı ile Kuantum Elektrodinamiğinden türetilmiş olan iki-cisim Dirac denklemin,  $2 + 1$  boyutlu düz bir Minkowski uzay-zaman geometrisinde etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çifti için yapılan tam çözümleri üzerine kurulmuştur. Denklem (4.34) ile verilen çiftlenimli denklem sistemi kullanılarak, toplam spinin  $s = 0$  olduğu durumda ikinci mertebeden bir dalga denklemi elde edilmiştir. Çekici bir Coulomb tipi etkileşme terimi için, elde edilen dalga denklemi herhangi bir yaklaşıklık olmadan çözülmüş ve pertürbatif olmayan bir enerji spektrumu elde edilmiştir. Elde edilen spektrum, kuasi-normal-modlar olarak adlandırılan kompleks bir spektrum formundadır. Literatürdeki önemi ve aktif bir araştırma alanı olması sebebiyle, elde edilen spektrum bir  $p - Ps$  sistemine adapte edilmiştir. Bu spektrum bir  $p - Ps$  sisteminin tüm temel özellikleri yansıtmaktadır fakat radyatif düzeltmeleri içermez. İlgili literatürde ilk olarak, tek bir matematiksel model ile, bir çok farklı kuantum durumu için sistemin bağlanma enerjileri ve bu kuantum durumlarının, sistemin öz zamanına göre ölçülen sönümlenme süreleri elde edilmiştir. Ayrıca bu spektrum, bir  $p - Ps$  sistemi kendi kendisini yok ettikten sonra açığa çıkan anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjiyi de açık şekilde vermektedir. Vakum ortamında, bir kaç  $n$  değeri için elde edilen bağlanma enerjileri, yaşam süreleri ve mümkün geçişler için bulunan geçiş süreleri sırasıyla Çizelge 4.2., Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.3.' te listelenmiştir. Denklem (4.37), Denklem (4.38) ve Çizelge 4.2.' den görülebileceği üzere, anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerji değeri, vakum ortamındaki bir  $p - Ps$  sistemi için  $E_{ann} = 2m_e c^2 - |E_1|$  şeklinde elde edilmiştir. Bu sonuç literatürde daha önce tahmin edilen sonuçları doğrulamaktadır (Asoka-Kumar ve ark. 1996). Fakat, her bir  $l = 0$  kuantum durumu için elde edilen yaşam süreleri bu sistemin toplam yaşam süresini vermez. Elde edilen yaşam süreleri, sistemin deneysel olarak ölçülen toplam bozunma süresinin küçük bir kısmına dair bilgi verir. *PALS* çalışmalarından bilindiği üzere, madde ortamındaki bir  $p - Ps$  sistemi için ölçülen toplam anihilasyon enerjisi değerleri ve toplam bozunma süresi değerleri madde ortamının elektron yoğunluğu, uzay-zamanın izotropisi

ve madde ortamındaki atomlar arası serbest boşluklara bağlı olarak değişmektedir. Radyoaktif kaynaklar aracılığı ile elde edilen pozitronlar, bir madde ortamına girdiklerinde, bir kaç fiziksel süreç sonucunda kinetik enerjilerini kaybederek termalize olabilirler. Yada madde ortamının elektron yoğunluğuna bağlı olarak direkt bir elektron tarafından yok edilebilirler. Termalize olan bir pozitron, çekici Coulomb kuvveti nedeniyle en yakınındaki bir elektron tarafından yakalanarak bir  $Ps$  sistemi oluşabilir. Pozitronların madde ortamlarında termalizasyon süreleri kabaca, bir kaç  $ps$  olarak bilinmektedir (Tao 1972). Fakat herhangi bir  $Ps$  sistemi için, sistemin hangi kuantum durumunda olduğu ve oluşan kuantum durumu üzerinde, madde ortamından kaynaklanan etkiler tam olarak hesaplanamamaktadır. Fenomenolojik olarak, bir  $p - Ps$  sistemini çevreleyen, homojen bir dielektrik ortam düşünebiliriz. Bu ortamın elektrik yada optik özellikleri, bir dielektrik katsayı şeklinde düşünülerek, madde ortamından kaynaklanan etkiler tartışılabilir. Özet olarak, herhangi bir dielektrik ortamda (izotropik), parçacıklar arasındaki elektromanyetik çiftlenme gerilimi, madde ortamından kaynaklanan perdeleme etkileri nedeniyle efektif bir değer olarak, vakum durumuna kıyasla, sistemin reel salınımları ve sönümlü salınımları değiştirilecektir. Bu etki  $\alpha \rightarrow \alpha_{eff}$ , ( $\alpha_{eff} = \frac{\alpha}{\epsilon_m}$ ) şeklinde düşünülebilir. Elde edilen spektrum, bu yaklaşım ile modifiye edilerek, farklı dielektrik sabiti değerleri için, bağlanma enerjileri ve modların sönümlenme süreleri hesaplanmıştır. Madde ortamı, bir perdeleme etkisi yaparak sistemin bağlanma enerjisi değerlerini azaltır ve bu sebeple sistemin toplam yaşam süresini uzatır. Bu etkiler, Şekil 4.2. ve Şekil 4.1.' in, Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2. ile karşılaştırılması ile açık şekilde görülebilir. Bu şekilde, taban durum için bağlanma enerjisi değeri (negatif) azalacaktır. Bu nedenle, büyük dielektrik sabiti değerleri için, anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerji, sistemin toplam durgun kütle enerjisi değerine yaklaşır. Elde edilen sonuçlar, ilgili literatür ile uyumludur ve geliştirilmiş dedektörler aracılığı ile, prensip olarak, dokularda, homojenliğin bozulması, elektronegatifliğin artması ve morfolojik yapının değişimi gibi etkilerin erken dedekte edilebilmesine yönelik bilgiler sağlamaktadır. Ayrıca, burada elde edilen tam çözümler, bir  $p - Ps$  sistemi için yaşam sürelerinin ve sistemin kendisini yok ettikten sonra açığa çıkan anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjilerin, madde ortamlarına bağlı olarak kontrol edilebileceğini işaret eder. Burada elde edilen sonuçların, olay-olay bazında, gama-ışını lazeri ve  $PALS$  çalışmalarına katkıda bulunabileceği düşünülmektedir.

#### 4.2. Spin simetrik bir fermiyon-antifermiyon çifti için matematiksel model

2 + 1 boyutlu genel bir uzay-zaman zemininde elektromanyetik olarak etkileşen eşit kütleli iki fermiyonun dinamiği Denklem (3.9) kullanılarak incelenilebilir <sup>10</sup>. Bu denklem eşit kütleli sahip, etkileşen iki fermiyon için (herbirinin kütlesi  $m_f$ ) şeklinde organize edilebilir. Birbirleriyle etkileşen iki fermiyondan oluşan  $o - Ps$  ve spin-1  $Exc$  gibi nötral kompozit sistemlerin dinamiği, polar uzay-zaman geometrisinde incelenecektir. Polar uzay-zaman geometrisini temsil eden çizgi elemanı aşağıda verilmiştir,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (4.40)$$

2 + 1 boyutlu eğri bir uzay-zaman geometrisi için, geliştirilmiş Dirac matrisleri, Denklem (3.11) kullanılarak, her bir parçacık için bulunabilir. Denklem (4.40) ile temsil edilen uzay-zaman zemininde etkileşen bir fermiyon antifermiyon çifti için geliştirilmiş Dirac matrisleri aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned} \gamma^{t(1)} &= \gamma^{t(2)} = \sigma^z, & \gamma^{r(1)} &= \gamma^{r(2)} = i\sigma^x, \\ \gamma^{\vartheta(1)} &= \frac{i}{r^{(1)}} \sigma^y, & \gamma^{\vartheta(2)} &= \frac{i}{r^{(2)}} \sigma^y. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Spinör bağlantıları ( $\Gamma_\lambda(\mathbf{x})$ ), Denklem (3.6) aracılığı ile yada aşağıdaki gibi,

$$\Gamma_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} g_{\mu\tau}(\mathbf{x}) (e^i_{\nu,\lambda}(\mathbf{x}) e_i^\tau(\mathbf{x}) - \Gamma_{\nu\lambda}^\tau(\mathbf{x})) s^{\mu\nu}(\mathbf{x}),$$

Christoffel sembolleri,  $\Gamma_{\nu\lambda}^\tau(\mathbf{x})$ ,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\tau(\mathbf{x}) = \frac{g^{\tau\epsilon}(\mathbf{x})}{2} \{ \partial_\nu g_{\lambda\tau}(\mathbf{x}) + \partial_\lambda g_{\epsilon\nu}(\mathbf{x}) - \partial_\epsilon g_{\nu\lambda}(\mathbf{x}) \},$$

metrik tensör  $g_{\mu\tau}(\mathbf{x})$  ve spin operatörü,  $s^{\mu\nu}(\mathbf{x})$ ,

$$s^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\gamma^\mu(\mathbf{x}), \gamma^\nu(\mathbf{x})], \quad (i, \mu, \nu, \epsilon, \tau = 0, 1, 2.),$$

<sup>10</sup>Gerekli tüm kuramsal bilgiler 3. Bölümde verilmiştir.

aracılığı ile elde edilir. Denklem (4.40) ile temsil edilen uzay-zaman zemini için, Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı olan bileşenleri aşağıda verilmiştir <sup>11</sup>,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\vartheta\vartheta}^{(1)}(\mathbf{x}_1) &= -r^{(1)}, & \Gamma_{t\vartheta}^{(1)}(\mathbf{x}_1) &= \Gamma_{\vartheta t}^{(1)}(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{r^{(1)}}, \\ \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{(2)}(\mathbf{x}_2) &= -r^{(2)}, & \Gamma_{t\vartheta}^{(2)}(\mathbf{x}_2) &= \Gamma_{\vartheta t}^{(2)}(\mathbf{x}_2) = \frac{1}{r^{(2)}},\end{aligned}$$

ve bu uzay-zaman geometrisi için, spinör bağlantıları şu şekilde bulunur,

$$\begin{aligned}\Gamma_t^{(1)}(\mathbf{x}_1) &= 0, \Gamma_r^{(1)}(\mathbf{x}_1) = 0, \Gamma_\vartheta^{(1)}(\mathbf{x}_1) = \frac{r^{(1)}}{2} \gamma^{\vartheta(1)}(\mathbf{x}_1) \gamma^{r(1)}(\mathbf{x}_1) = \frac{i}{2} \gamma^{t(1)}(\mathbf{x}_1), \\ \Gamma_t^{(2)}(\mathbf{x}_2) &= 0, \Gamma_r^{(2)}(\mathbf{x}_2) = 0, \Gamma_\vartheta^{(2)}(\mathbf{x}_2) = \frac{r^{(2)}}{2} \gamma^{\vartheta(2)}(\mathbf{x}_2) \gamma^{r(2)}(\mathbf{x}_2) = \frac{i}{2} \gamma^{t(2)}(\mathbf{x}_2).\end{aligned}\quad (4.42)$$

Eşit kütleli iki fermiyon için  $m_1 = m_2 = m_f = \frac{M}{2}$ , kütle merkezi ve bağlı hareket koordinatları Denklem (3.15) kullanılarak tanımlanabilir. Parçacıklar arasındaki etkileşimin Coulomb tipi bir etkileşime olduğu durumda, hiçbir dış elektromanyetik alan yok ise, Denklem (3.9)' da verilen elektromanyetik vektör potansiyelinin bileşenleri aşağıdaki gibi alınabilir,

$$A_0 = U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad A_r = 0, \quad A_\vartheta = 0. \quad (4.43)$$

#### 4.2.1. Çiftlenimli Denklem Sistemi

Denklem (4.40) ile temsil edilebilen 2 + 1 boyutlu uzay-zamanda geometrisinde, Coulomb tipi bir potansiyel aracılığı ile etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çifti için, Denklem (3.9), aşağıdaki 4 × 4 boyutlu matris denklemini verir,

$$\begin{aligned}\gamma^{t(1)} \otimes \gamma^{t(2)} \left[ \frac{\partial_t^{(1)}}{c} + \frac{\partial_t^{(2)}}{c} + iA_T \right] \Psi + \gamma^{r(1)} \otimes \gamma^{r(2)} \partial_r^{(1)} \Psi + \gamma^{t(1)} \otimes \gamma^{r(2)} \partial_r^{(2)} \Psi \\ + \gamma^{\vartheta(1)} \otimes \gamma^{t(2)} \partial_\vartheta^{(1)} \Psi + \gamma^{t(1)} \otimes \gamma^{\vartheta(2)} \partial_\vartheta^{(2)} \Psi - \left[ \gamma_\vartheta^{(1)} \Gamma_\vartheta^{(1)} \right] \otimes \gamma^{t(2)} \Psi - \gamma^{t(1)} \otimes \left[ \gamma_\vartheta^{(2)} \Gamma_\vartheta^{(2)} \right] \Psi \\ + i \frac{m_f c}{\hbar} \left[ \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{t(2)} + \gamma^{t(1)} \otimes \mathbf{I}_2 \right] \Psi = 0.\end{aligned}\quad (4.44)$$

<sup>11</sup>Burada (1) ve (2) etiketleri sırasıyla birinci parçacığı ve ikinci parçacığı temsil etmesi amacıyla kullanılmıştır.

Burada, bi-lokal, kütleli Dirac alanının bileşenleri, sistemin toplam açısal momentumunun  $j$  ile temsil edilmesiyle, aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$\Psi(t, r, \vartheta) = e^{-i\omega t} e^{ij\vartheta} \begin{pmatrix} \xi_1(r) \\ \xi_2(r) \\ \xi_3(r) \\ \xi_4(r) \end{pmatrix}.$$

Denklem (4.41), Denklem (4.42), Denklem (4.43) ve Denklem (4.44) kullanılarak, kütle merkezinin lineer momentum taşımadığı durumda, Coulomb tipi bir potansiyel aracılığı ile etkileşen, eşit kütleli iki fermiyondan oluşan spin-1 kompozit sistemin dinamiğini veren çiftlenimli denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} \Theta(r) \chi_1(r) - 2b\chi_2(r) + 2\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right) \chi_3(r) - \frac{4j}{r} \chi_4(r) &= 0, \\ \Theta(r) \chi_2(r) - 2b\chi_1(r) &= 0, \\ \Theta(r) \chi_3(r) - 2\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right) \chi_1(r) &= 0, \\ \Theta(r) \chi_4(r) - \frac{4j}{r} \chi_1(r) &= 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

burada kullanılan tanımlar şu şekildedir,

$$\begin{aligned} \chi_1(r) &= \xi_1(r) + \xi_4(r), & \chi_2(r) &= \xi_1(r) - \xi_4(r), \\ \chi_3(r) &= \xi_2(r) - \xi_3(r), & \chi_4(r) &= \xi_2(r) + \xi_3(r), \\ \Theta(r) &= \frac{\omega}{c} - V(r), & b &= \frac{mfc}{\hbar}. \end{aligned}$$

#### 4.2.2. Frekans Spektrumu

Denklem (4.45) ile verilen çiftlenimli denklem sisteminin  $\chi_1(r)$  için çözümü aşağıdaki dalga denklemini verir,

$$\partial_r^2 \chi_1(r) + \left[ \frac{2}{r} - \frac{(\partial_r \Theta(r))}{\Theta(r)} \right] \partial_r \chi_1(r) + \left[ \frac{\Theta(r)^2 - B^2}{4} - \frac{4j^2}{r^2} - \frac{(\partial_r \Theta(r))}{r\Theta(r)} \right] \chi_1(r) = 0,$$

$$B = 2b.$$

Çekici bir Coulomb potansiyeli için,  $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ , spinör bileşeni şu şekilde tanımlanabilir,

$$\chi_1(r) = \frac{\chi(r)}{r} r^{\frac{\zeta}{2}} e^{-\frac{\sqrt{B^2 - \omega^2}}{2c} r},$$

ve  $y = -\frac{\omega r}{\alpha c}$  şeklinde boyutsuz bir bağımsız değişken tanımı yapılarak, dalga denklemi aşağıdaki formda yazılabilir,

$$\partial_y^2 \chi(y) + \left[ \Omega + \frac{1+\zeta}{y} + \frac{1+\varepsilon}{y-1} \right] \partial_y \chi(y) + \left[ \frac{\Delta}{y} + \frac{\Lambda}{y-1} \right] \chi(y) = 0, \quad (4.46)$$

burada kullanılan parametreler arasındaki ilişki şu şekildedir,

$$\begin{aligned} \delta &= \Delta + \Lambda - \Omega \frac{(\zeta + \varepsilon + 2)}{2}, & \eta &= (1 + \zeta) \frac{\Omega}{2} - \frac{(\zeta + \varepsilon + \zeta \varepsilon)}{2} - \Delta, \\ \Omega &= \frac{\alpha}{\omega} \sqrt{B^2 c^2 - \omega^2}, & \zeta &= -\sqrt{16j^2 - \alpha^2}, & \varepsilon &= -2, \\ \delta &= -\frac{\alpha^2}{2}, & \eta &= \frac{\alpha^2}{2} + 1. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Denklem (4.46) için, çözüm fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur,

$$\chi(y) = N_1 H_C(\Omega, \zeta, \varepsilon, \delta, \eta, y) + \frac{N_2}{y^\zeta} H_C(\Omega, -\zeta, \varepsilon, \delta, \eta, y),$$

burada  $N_1$  ve  $N_2$  keyfi sabitlerdir ve asimptotik olarak kabul edilebilir olan fiziksel çözüm fonksiyonu ikinci çözüm fonksiyonudur. Bu çözüm fonksiyonu için, aşağıda verilen polinom olma koşulu kullanılarak (Vieira ve Bezerra 2016; Fiziev 2009),

$$(n + 1 + \frac{\zeta + \varepsilon}{2}) \Omega = -\delta,$$

çekici bir Coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen, eşit kütleli ve spin simetrik durumdaki iki fermiyondan oluşan nötral kompozit sistemin pertürbatif olmayan enerji spektrumu elde edilir,

$$E = 2m_f c^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4(n^2 - n\sqrt{16j^2 - \alpha^2} + 4j^2)}}, \quad n \geq 1. \quad (4.48)$$

Burada,  $E$ ,  $m_f$ ,  $c$ ,  $j$  ve  $\alpha$  sırasıyla nötral kompozit sistemin toplam enerjisine, fermiyonların kütlesine, vakumda ışık hızına, kompozit sistemin toplam açıl momentumuna ve

parçacıklar arası elektromanyetik çiftlenim gerilimine karşılık gelir. Bu spektrum,  $\alpha$  için kuvvet serisine açılarak,  $s = 1, l = 0$  değerleri için ( $j = 1$ ) aşağıdaki ifade elde edilir,

$$E \approx 2m_e c^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{8n^2} + \frac{\alpha^4}{128n^4} - \frac{3\alpha^6}{4096n^6} \right\} + O(\alpha^8), \quad (4.49)$$

ve bu ifade kullanılarak, taban durumdaki ( $n = 1$ ) bir  $o - Ps$  için bağlanma enerjisi ( $E_1$ ) çok iyi bir doğrulukla aşağıdaki gibi elde edilir;

$$E_1 \approx -6.802822706 \quad [eV].$$

$o - Ps$  için bulunan bu taban durum bağlanma enerjisi değeri, literatürde daha önce elde edilmiş değerler ile oldukça uyumludur (Cassidy 2018). Denklem (4.48)' de elde edilen enerji spektrumu,  $j = 0$  için, Denklem (4.36) ile verilen spektruma indirgenir. Elde edilen bu sonuç, 4.4.1. Bölümde elde edilecek olan enerji spektrumu ile karşılaştırmalı olarak tartışılacaktır.

### 4.3. Tek katmanlı bir yarı-iletkende Eksiton üzerine çevresel etkiler

2 + 1-boyutlu düz bir Minkowski uzay-zaman geometrisinde, etkileşen iki fermiyon için, tamamiyle kovaryant formdaki iki-cisim Dirac denklemi, Denklem (3.16) ile verilmiştir. Bu denklem ile ilgili gerekli tüm bilgi 3. Bölümde bulunmaktadır. Homojen, tek katmanlı bir dielektrik ortamı temsil eden metrik Denklem (3.19) ile tanımlanmış ve bu uzay-zaman geometrisi için genelleştirilmiş Dirac matrisleri Denklem (3.20) ile verilmiştir. İncelenen bu sistem için bi-lokal, kütleli Dirac alanı aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \chi_1(\mathbf{x}_1) \otimes \Theta_2(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} D_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ D_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ D_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ D_4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Dielektrik ortamın homojen olduğu durum için, bu ortamda etkileşen bir elektron-deşik çiftinin dinamiği üzerinde spinör bağlantılarından kaynaklanan katkı gelmeyeceği ise 3.

Bölümde açık olarak anlatılmıştır. Fakat, ortamın optik özelliklerine dair bilgiyi, geliştirilmiş Dirac matrisleri taşımaktadır. Bu durumda, ortamın optik özelliğinin, parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyelini modifiye edeceği Denklem (3.20) aracılığı ile görülebilir. Bu uzay-zaman geometrisi için, geliştirilmiş Dirac matrisleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\gamma^0 = \sigma^z, \quad \gamma^1 = \epsilon_{eff} i \sigma^x, \quad \gamma^2 = \epsilon_{eff} i \sigma^y.$$

Denklem (3.20)' den görülebileceği gibi, uzay-zaman geometrisi izotropik ise, her bir parçacık için elde edilen Dirac matrislerinde uzay koordinatlara bağlı bir farklılık yoktur. Elektron ve deşik çiftinden oluşan sistemin kütle merkezi momentumu bir hareket sabiti ise, Denklem (4.50)' de verilen bi-spinör  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ' nin bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$\begin{aligned} D_p(\mathbf{r}, R, R_0) &:= F_p(\mathbf{r}) \Phi_p(\mathbf{R}) e^{-i\omega R_0}, \\ \Phi_p(\mathbf{R}) &:= e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}, \quad (p = 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \quad (4.51)$$

burada  $\mathbf{K}$  kütle merkezinin uzaysal momentumu ile  $\hbar\mathbf{K}$  şeklinde ilişkilidir,  $R_0$  ve  $\mathbf{R}$  ise, sırasıyla kütle merkezinin zaman ve uzay koordinatlarını temsil eder. Denklem (3.14), Denklem (3.15) ve Denklem (3.16)' dan görülebileceği gibi, parçacıklar arasında bağlı zaman farkı yoktur. Kullanılan denklem tek zamanlıdır ve sistemin toplam enerjisi, kütle merkezinin zaman koordinatı  $R_0$ ' a göre belirlenir. Eksiton' un eşit kütleye ve zıt elektriksel yüklere sahip iki fermiyondan oluştuğu düşünülerek elde edilmiş olan matris denklemi en basit haliyle Denklem (3.24) ile verilmiştir. Kütle merkezinin momentum taşımadığı durum için ( $\mathbf{K} = 0$ ) elde edilen bu denklem şu şekildedir,

$$\begin{pmatrix} \Lambda(\mathbf{r}) - 2b & 2\epsilon_{eff} \widehat{\partial}_- & 0 \\ -\epsilon_{eff} \widehat{\partial}_+ & \Lambda(\mathbf{r}) & -\epsilon_{eff} \widehat{\partial}_- \\ 0 & 2\epsilon_{eff} \widehat{\partial}_+ & \Lambda(\mathbf{r}) + 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{r}) \\ F_2(\mathbf{r}) \\ F_4(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0, \quad \Lambda(\mathbf{r}) = \left( \frac{\omega}{c} - V(\mathbf{r}) \right).$$

Relativistik iki fermiyondan oluşan bu kompozit sistemin, mümkün tüm spin öz-durumları, polar uzay-zaman geometrisinin açıl simetrisi kullanılarak,  $F(r_1, r_2) \rightarrow F_g(r, \phi) =$

$F_g(r) e^{is\phi}$ , ( $g = 1, 2, 3, 4.$ ) şeklinde polar koordinatlar cinsinden yazılmış spinör bileşenleri ve Denklem (3.25) ile verilen spin alçaltma ve yükseltme operatörleri aracılığı ile kurulabilir. Pozitronyum ve Eksiton sistemleri temel olarak birbirlerine benzer yönler taşırlar. Her ikisinde, birbirlerine göre zıt elektriksel yüke sahip iki fermiyondan (leptondan) oluşur ve tamamiyle leptonik yapıda olmaları sebebiyle, bu sistemler, çekici Coulomb kuvveti nedeniyle çökerler. Bu sistemler kararsız sistemlerdir.  $l = 0$  kuantum durumları için her bir parçacığa ait dalga fonksiyonlarının üst üste binme koşulu sağlanır ve sonuç olarak bu sistemler bozunur.

#### 4.3.1. Radyal denklemler

Denklem (3.25) ile verilen spin alçaltma ve yükseltme operatörleri kullanılarak, dönüştürülmüş spinör bileşenleri cinsinden elde edilen çiftlenimli denklem seti aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned}
 (\Lambda(r) - 2b) F_1(r, \phi) + 2\epsilon_{eff} \left( \frac{s}{r} + \partial_r \right) F_2(r) &= 0, \\
 \Lambda(r) F_2(r) + \epsilon_{eff} \left( \frac{s}{r} - \partial_r \right) F_1(r, \phi) \\
 -\epsilon_{eff} \left( \frac{s}{r} + \partial_r \right) F_4(r, \phi) &= 0, \\
 (\Lambda(r) + 2b) F_4(r, \phi) - 2\epsilon_{eff} \left( \frac{s}{r} - \partial_r \right) F_2(r) &= 0, \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

burada,

$$F_1(r, \phi) = F_1(r) e^{i\phi}, \quad F_4(r, \phi) = F_4(r) e^{-i\phi},$$

şeklindedir. Bu denklemde  $s$  sistemin toplam spin kuantum sayısıdır. Bu denklem sisteminin en simetrik olduğu durum, parçacıkların spinlerinin anti-simetrik olduğu durumdur (singlet-kuantum durumu) ( $s = 0$ ). Toplam spini sıfır olan ve tek katmanlı homojen bir dielektrik ortamda çekici Coulomb tipi bir potansiyel aracılığı ile etkileşen iki fermiyon için, Denklem (4.52) ile verilen denklem seti aşağıdaki forma indirgenebilir,

$$\begin{aligned}
\Lambda(r) F_+(r, \phi) - 2bF_-(r, \phi) + 4\epsilon_{eff}\partial_r F_0(r) &= 0, \\
\Lambda(r) F_-(r, \phi) - 2bF_+(r, \phi) &= 0, \\
\Lambda(r) F_0(r) - \epsilon_{eff}\partial_r F_+(r, \phi) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

burada,

$$\begin{aligned}
F_{\pm}(r, \phi) &= F_1(r) e^{i\phi} \pm F_4(r) e^{-i\phi}, \\
F_0(r) &= F_2(r).
\end{aligned}$$

İncelenen sistemde, fermiyonlar zıt elektriksel yüklere sahiptir ve etkileşim potansiyeli çekici bir Coulomb etkileşimi olarak alınır. Denklem (4.53) ile verilen denklem sistemi, etkileşme terimi  $V(r) \propto -\alpha/r$  seçilerek,  $z = -(\omega r)/(\alpha c)$  şeklinde boyutsuz bağımsız değişken tanımı altında aşağıdaki denklem sistemine dönüşür <sup>12</sup>,

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{z} F_+(z, \phi) - \frac{2bc}{w} F_-(z, \phi) - \frac{4\epsilon_{eff}}{\alpha} \partial_z F_0(z) &= 0, \\
\frac{z-1}{z} F_-(z, \phi) - \frac{2bc}{w} F_+(z, \phi) &= 0, \\
\frac{z-1}{z} F_0(z, \phi) + \frac{\epsilon_{eff}}{\alpha} \partial_z F_+(z, \phi) &= 0,
\end{aligned}$$

ve bu denklem sistemi,  $F_+(z)$  için çözümlenerek aşağıda verilen dalga denklemi elde edilebilir,

$$\partial_z^2 F_+(z) + \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) \partial_z F_+(z) + \frac{\alpha^2}{4\epsilon_{eff}^2} \left( \frac{(z-1)^2}{z^2} - \frac{4b^2 c^2}{w^2} \right) F_+(z) = 0.$$

Elde edilen bu denklem,

$$F_+(z) = z^{i\frac{\alpha}{2\epsilon_{eff}}} e^{\frac{\alpha\sqrt{4b^2 c^2 - w^2}}{2w\epsilon_{eff}} z} \tilde{F}_z(z),$$

şeklinde verilen bir çözüm önerisi için, çözümü bilinen bir dalga denklemi formunda elde

<sup>12</sup>Burada  $\alpha$  boyutsuz çiftlenme gerilimidir.

edilebilir,

$$\partial_z^2 \tilde{F}_z(z) + \left( \kappa + \frac{1+\beta}{z} + \frac{1+\gamma}{z-1} \right) \partial_z \tilde{F}_z(z) + \left( \frac{\lambda}{z} + \frac{\nu}{z-1} \right) \tilde{F}_z(z). \quad (4.54)$$

### 4.3.2. Enerji spektrumu

Bu dalga denklemi, genel Heun diferansiyel denkleminin en basit şeklidir. Denklem (4.54),  $z = 0$  ve  $z = 1$ ' de regüler tekilliğe,  $z = \infty$ ' da ise irregüler tekilliğe sahiptir. Bu denklemin  $z = 0$  regüler tekil nokta civarındaki çözümü, Frobenius metodu kullanılarak 3. Bölümde elde edilmiştir. Denklem (4.54) için, çözüm fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\tilde{F}_+(z) = C_1 Heun_C(\kappa, \beta, \gamma, \delta, \eta, z) + C_2 z^{-\beta} Heun_C(\kappa, -\beta, \gamma, \delta, \eta, z),$$

burada  $C_1$  ve  $C_2$  keyfi sabitlerdir. Eğer  $\beta$  parametresi bir tamsayı değil ise, bu iki çözüm fonksiyonu lineer bağımsızdır. Çözüm fonksiyonları içerisinde kullanılan parametreler arasındaki ilişki aşağıdaki denklemler ile verilir,

$$\lambda = \frac{\kappa - \beta - \gamma}{2} + \frac{\beta}{2}(\kappa - \gamma) - \eta, \quad \nu = \frac{\kappa + \beta + \gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}(\kappa + \beta) + \delta + \eta,$$

ve burada

$$\kappa = \frac{\alpha}{\epsilon_{eff} w} \sqrt{4b^2 c^2 - w^2}, \quad \beta = \frac{i\alpha}{\epsilon_{eff}}, \quad \gamma = -2, \\ \delta = -\frac{\alpha^2}{2\epsilon_{eff}^2}, \quad \eta = 1 + \frac{\alpha^2}{2\epsilon_{eff}^2},$$

şeklinde elde edilmiştir.  $Heun_C$  fonksiyonlarının  $N \geq 0$  dereceden polinom olabilmesi için gerekli koşul şu şekildedir (Vieira ve Bezerra 2016; Fiziev 2009),

$$\left( N + 1 + \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \kappa = -\delta,$$

ve bu koşul ile, tek katmanlı izotropik bir dielektrik ortamda birbirleriyle çekici bir Coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen, bir elektron-deşik çiftinin spin-antisimetrik ku-

antum durumu için, aşağıda verilen frekans spektrumu elde edilir,

$$w = \frac{2m_e c^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\left(n^4 + \frac{3}{4} \frac{n^2 \alpha^2}{\epsilon_{eff}^2} - i \frac{\alpha^3}{4 \epsilon_{eff}^3} n\right)}{\left(n^4 + \frac{n^2 \alpha^2}{\epsilon_{eff}^2}\right)}}. \quad (4.55)$$

Bu spektrum, reel ve imajiner kısımlardan oluşur ve incelenen sistemin kararsız olduğunu açıkça gösterir. Bu frekans spektrumunda,  $n$  temel kuantum sayısını,  $m_e$  elektron kütleini,  $c$  ışık hızını,  $\hbar$  indirgenmiş Planck sabitini,  $\alpha$  parçacıklar arası çiftlenme gerilimini ve  $\epsilon_{eff}$  ise ortamın optik özelliklerini temsil eder. Kararsız sistemlerin titreşim modları, tüm zamanlarda bulunamazlar. Denklem (4.51)' de  $\Psi \propto e^{-iwt}$  şeklinde yapılmış tanım altında elde edilen bu kompleks spektrum kullanılarak, sistemin reel ve sönümlü modları elde edilir. Ortamın optik özelliklerinin, sistemin davranışı üzerindeki etkilerini açık şekilde görebilmek için, Denklem (4.55),  $\alpha'$  ya göre kuvvet serisine açılabilir. Bu şekilde, sistemin frekans spektrumu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$w \approx \frac{2m_e c^2}{\hbar} \left[ 1 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{8n^2} \left( 1 - \frac{15\tilde{\alpha}^2}{16n^2} + \frac{105\tilde{\alpha}^4}{128n^4} \right) - i \frac{\tilde{\alpha}^3}{8n^3} \left( 1 - \frac{7\tilde{\alpha}^2}{8n^2} \right) \right],$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\epsilon_{eff}}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}. \quad (4.56)$$

Bu ifadede ilk terim, eşit kütleyle sahip iki fermiyondan oluşan kompozit sistemin durgun kütle enerjisini ( $2m_e c^2$ ), ikinci terim relativistik düzeltmeleride içeren, sistemin reel modlarını verir. İkinci terim kullanılarak, sistemin mümkün tüm  $l = 0$  enerji seviyeleri için, bağlanma enerjisi değerleri ( $E_n$ ),

$$E_n(\epsilon_{eff}) \approx -\frac{m_e c^2 \tilde{\alpha}^2}{4n^2} \left( 1 - \frac{15\tilde{\alpha}^2}{16n^2} + \frac{105\tilde{\alpha}^4}{128n^4} \right), \quad (4.57)$$

ifadesi ile elde edilebilir. Denklem (4.56)' daki son terim (imajiner kısım), sistemin sönümlenen modlarını verir ( $\tau_n \propto \frac{1}{|w_{Im}|}$ ). Her bir  $l = 0$  enerji düzeyi için, sönümlenme

süreleri aşağıdaki ifade kullanılarak hesaplanabilir,

$$\tau_n(\epsilon_{eff}) \approx \frac{4n^3\hbar}{m_e c^2 \tilde{\alpha}^3} \left( \frac{8n^2}{8n^2 - 7\tilde{\alpha}^2} \right). \quad (4.58)$$

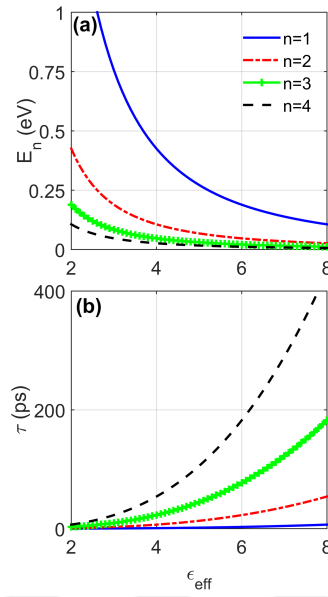
Denklem (4.57) ve Denklem (4.58) kullanılarak, değişen  $\epsilon_{eff}$  değerlerine göre, bir çok  $l = 0$  kuantum durumu için elde edilen bağlanma enerjisi değerleri ve elde edilen sönümlenme süreleri Çizelge 4.4. ile verilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, literatürde çelişkili görünen sonuçları açıklayabilmektedir. Reel modlar ve sönümlenen modlar için elde edilen ifadelerin, değişen  $\epsilon_{eff}$  değerlerine göre değişimi Şekil 4.3. ile gösterilmiştir.

**Çizelge 4.4.** Eksitonun bağlanma enerjisi ve yaşam süresi değerleri

$n$	$\epsilon_{eff}$	$E(n, \epsilon_{eff}) [eV]$	$\tau(n, \epsilon_{eff}) [ps]$
1	3	-0,755	0,357
1	4	-0,425	0,848
1	5	-0,272	1,657
1	6	-0,188	2,863
1	7	-0,138	4,547
1	8	-0,106	6,788
2	2	-0,425	0,848
2	3	-0,188	2,864
2	4	-0,106	6,788
2	5	-0,068	13,25
2	6	-0,047	22,91
2	7	-0,034	36,38
2	8	-0,026	54,30
3	2	-0,189	2,863
3	3	-0,084	9,665
3	4	-0,047	22,91
3	5	-0,030	44,74
3	6	-0,021	77,32
3	7	-0,015	122,7
3	8	-0,011	183,2

### 4.3.3. Tartışmalar

Bu kısımda, izotropik ve tek katmanlı dielektrik bir ortamda, birbirleri ile çekiçi Coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen bir elektron-deşik (hole) sistemi (kararsız) incelenmiş ve elde edilen pertürbatif olmayan frekans spektrumu kullanılarak, sistemin reel ve sönümlü modları tek bir matematiksel formalizm ile elde edilmiştir. İzotropik dielektrik ortamın, spin-0 bir Eksiton sistemi üzerindeki etkisi Denklem (4.56) aracılığı ile



**Şekil 4.3.** (a)  $E_n$  ve (b)  $\tau_n$  değerlerinin ortama bağlı değişimi

açıkça görülebilir. Elde edilen bu enerji ifadesi, ortamdaki kaynaklanan etkilerin, sistemin bağlanma enerjisini azalttığı yani parçacıklar arasında bir perdeleme etkisi oluşturduğunu göstermektedir. Bu sistem parçacıklar arasındaki çekici Coulomb kuvveti nedeniyle bozunmaktadır ve ortamdaki kaynaklı perdeleme etkisi nedeniyle sistemin bozunma süresinin uzadığı elde edilen değerler ile tespit edilmiştir. Farklı dielektrik ortamlar için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.4. ile verilmiştir. Sonuç olarak, spin-0 bir Eksitonun dinamiğinin, uygun  $\epsilon_{eff}$  değerleri ayarlanarak kontrol edilebileceği prensip olarak mümkün görünmektedir.

#### 4.4. Statik kozmik sicim uzay-zamanında bir fermiyon antifermiyon çifti

2 + 1 boyutlu, genel, eğri bir uzay-zaman zemininde, karşılıklı olarak etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çiftinin dinamiğinin incelenmesi için tamamiyle kovaryant formdaki iki-cisim Dirac denklemi (Guvendi ve ark. 2019), açık olarak Denklem (3.9) ile verilmiştir ve bu denklem hakkında gerekli tüm tartışmalar 3. Bölümde bulunmaktadır.

Spinli bir kozmik sicim tarafından oluşturulan 2 + 1 boyutlu uzay-zaman

zeminini temsil eden çizgi elemanı aşağıdaki gibi yazılabilir (Clement 1990),

$$\begin{aligned} ds^2 &= (cdt + \varpi d\vartheta)^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\vartheta^2 \\ &= c^2 dt^2 + 2\varpi c dt d\vartheta - dr^2 - (\alpha^2 r^2 - \varpi^2) d\vartheta^2, \\ \alpha &\in (0, 1], \end{aligned} \quad (4.59)$$

burada, uzay-zaman zemininin açısız açıklık parametresi  $\alpha = 1 - 4\mu_s G/c^2$  kozmik sicimin linear kütle yoğunluğuna ( $\mu_s$ ) ve Newton kütle çekim sabitine ( $G$ ) bağlıdır ( $0 \leq 4\mu_s G/c^2 < 1$ ).  $\varpi = 4j_s G/c^3$  parametresi uzunluk birimindedir ve kozmik sicimin açısız momentum yoğunluğu  $j_s$ ' i içeren dönme parametresi olarak adlandırılır.  $\alpha = 1 - 4\mu_s G/c^2 < 1$  için,  $(r, \vartheta)$ -yüzeyi koniksel bir topoloji verir. Bu uzay-zaman zeminini, koninin tepesinin dışında, lokal olarak düz bir uzay-zamandır.  $\alpha = 1, j_s = 0$  değerleri için Denklem (4.59) polar koordinatlar cinsinden düz bir Minkowski uzay-zamanını tanımlar. Bu nedenle, uzay-zamanın topolojisi ve buna bağlı olarak uzay-zamanın simetrisi,  $\mu_s$  ve  $j_s$  parametreleri ile değiştirilir. Denklem (4.59) ile verilen uzay-zaman zeminine karşılık gelen metrik tensör kovaryant formda,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varpi \\ 0 & -1 & 0 \\ \varpi & 0 & -(\alpha^2 r^2 - \varpi^2) \end{pmatrix},$$

şeklinde yazılır ve metrik tensörün kontravaryant formu aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varpi^2}{\alpha^2 r^2} & 0 & \frac{\varpi}{\alpha^2 r^2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\varpi}{\alpha^2 r^2} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2 r^2} \end{pmatrix}.$$

Uzay-zaman bağımsız Dirac matrisleri ( $\bar{\gamma}^k$ ) cinsinden, üç bacaklılar ( $e_{(k)}^\lambda(\mathbf{x})$ ) aracılığı ile, genelleştirilmiş Dirac matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir (Peter Collas 2019; Sucu ve Ünal 2007),

$$\gamma^\lambda(\mathbf{x}) = e_{(k)}^\lambda(\mathbf{x}) \bar{\gamma}^k, \quad (k, \lambda = 0, 1, 2.). \quad (4.60)$$

3-boyutlu genel bir uzay-zamanda sabit Dirac matrisleri Pauli spin matrislerine indirgenirler. Denklem (4.59) ile temsil edilen uzay-zaman geometrisi için, (Metrik katsayıları için işaretler  $+, -, -$  şeklinde seçilmiştir), sabit Dirac matrisleri Pauli spin matrisleri cinsinden  $\bar{\gamma}^k = (\sigma^z, -i\sigma^x, i\sigma^y)$  şeklinde seçilebilir (Guvendi ve ark. 2019; Peter Collas 2019; Sucu ve Ünal 2007) . Genelleştirilmiş Dirac matrislerinin elde edilebilmesi için gerekli olan üç bacaklılar, sıradaki ifadeler kullanılarak,

$$g_{\mu\tau} = e_{\mu}^{(i)} e_{\tau}^{(j)} \eta_{(i)(j)}, \quad e_{(i)}^{\mu} = g^{\mu\tau} e_{\tau}^{(j)} \eta_{(i)(j)},$$

$$\eta_{(i)(j)} = \text{diag} (1, -1, -1), \quad (\mu, \tau, i, j = 0, 1, 2.), \quad (4.61)$$

aşağıdaki gibi elde edilirler,

$$e_{(i)}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sigma}{ar} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{ar} \end{pmatrix}.$$

Denklem (4.60) ve Denklem (4.61) kullanılarak, genelleştirilmiş Dirac matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\gamma^t = \sigma^z - \frac{\sigma}{ar} i\sigma^y, \quad \gamma^r = i\sigma^x,$$

$$\gamma^{\theta} = \frac{1}{ar} i\sigma^y, \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Spinör bağlantıları  $\Gamma_{\lambda}(\mathbf{x})$ ' ler ise aşağıdaki şekilde,

$$\Gamma_{\lambda}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} g_{\mu\tau}(\mathbf{x}) (e_{v,\lambda}^i(\mathbf{x}) e_i^{\tau}(\mathbf{x}) - \Gamma_{v\lambda}^{\tau}(\mathbf{x})) s^{\mu\nu}(\mathbf{x}),$$

$$(i, \mu, \nu, \epsilon, \tau = 0, 1, 2.), \quad (4.63)$$

spin operatörleri  $s^{\mu\nu}(\mathbf{x})$  (Peter Collas 2019),

$$s^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\gamma^{\mu}(\mathbf{x}), \gamma^{\nu}(\mathbf{x})], \quad (4.64)$$

ve Christoffel sembolleri  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\tau}(\mathbf{x})$ ,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\tau}(\mathbf{x}) = \frac{g^{\tau\epsilon}(\mathbf{x})}{2} \{ \partial_{\nu} g_{\lambda\tau}(\mathbf{x}) + \partial_{\lambda} g_{\epsilon\nu}(\mathbf{x}) - \partial_{\epsilon} g_{\nu\lambda}(\mathbf{x}) \},$$

kullanılarak elde edilir. Burada  $g_{\mu\tau}(\mathbf{x})$  ile uzay-zaman bağımlı metrik tensör temsil edilmiştir.

Denklem (4.59)' da verilen çizgi elemanı kullanılarak, Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı olan bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir,

$$\Gamma_{r\theta}^t = -\frac{\varpi}{r}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\alpha^2 r, \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r}. \quad (4.65)$$

Denklem (4.62), Denklem (4.63), Denklem (4.64), ve Denklem (4.65) ile verilen ifadeler kullanılarak spinör bağlantıları şu şekilde bulunur,

$$\Gamma_t = 0, \quad \Gamma_r = 0, \quad \Gamma_{\theta} = \frac{\alpha}{2} i\sigma^z.$$

Statik kozmik sicim uzay-zaman zemininde, birbirleri ile karşılıklı olarak etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çifti için, genelleştirilmiş Dirac matrisleri ve spinör bağlantıları aşağıda verilmiştir,

$$\begin{aligned} \gamma^{t(1)} = \gamma^{t(2)} &= \sigma^z, & \gamma^{r(1)} = \gamma^{r(2)} &= i\sigma^x, \\ \gamma^{\theta(1)} &= \frac{i}{\alpha r_1} \sigma^y, & \gamma^{\theta(2)} &= \frac{i}{\alpha r_2} \sigma^y, \\ \Gamma_t^{(1)} = \Gamma_t^{(2)} &= 0, & \Gamma_r^{(1)} = \Gamma_r^{(2)} &= 0, \\ \Gamma_{\theta}^{(1)} = \Gamma_{\theta}^{(2)} &= \frac{\alpha}{2} i\sigma^z. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Eşit kütleli ( $m_f$ ), birbirleriyle etkileşen iki fermiyon için daha önce Denklem (3.15) ile tanımlanmış olan kütle merkezi ve bağıl hareket koordinatları aşağıdaki şekilde yazılabilir

(Guvendi ve ark. 2019),

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}, & \mathbf{r} &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \\
\mathbf{x}_1 &= \{t^{(1)}, r^{(1)}, \vartheta^{(1)}\}, & \mathbf{x}_2 &= \{t^{(2)}, r^{(2)}, \vartheta^{(2)}\}, \\
\partial_{x_\lambda}^{(1)} &= \partial_{x_\lambda} + \frac{\partial_{R_\lambda}}{2}, & \partial_{x_\lambda}^{(2)} &= -\partial_{x_\lambda} + \frac{\partial_{R_\lambda}}{2}, \\
M &= 2m_f, & \partial_\lambda &= \left( \frac{\partial_t}{c}, \partial_r, \partial_\vartheta \right), \quad (\lambda = 0, 1, 2.).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Fermiyonlar arasındaki etkileşme potansiyeli, Coulomb tipi merkezci bir potansiyel ise, elektromanyetik vektör potansiyelinin bileşenleri Denklem (3.18) ile verilen şekilde alınır.

#### 4.4.1. Radyal denklemler

Genel 2 + 1 boyutlu bir uzay-zamanda, kovaryant iki-cisim Dirac denklemi  $4 \times 4$  boyutlu matrisleri içerir. Statik bir kozmik sicim tarafından oluşturulan 2 + 1 boyutlu uzay-zaman zemininde karşılıklı olarak, Coulomb tipi bir potansiyel aracılığı ile etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çifti için, kovaryant iki-cisim Dirac deklemini aşağıdaki formda yazılabilir,

$$\begin{aligned}
&\gamma^{t^{(1)}} \otimes \gamma^{t^{(2)}} \left[ \frac{\partial_t^{(1)}}{c} + \frac{\partial_t^{(2)}}{c} + iV \right] \Psi + \gamma^{r^{(1)}} \otimes \gamma^{r^{(2)}} \partial_r^{(1)} \Psi \\
&+ \gamma^{t^{(1)}} \otimes \gamma^{r^{(2)}} \partial_r^{(2)} \Psi + \gamma^{\vartheta^{(1)}} \otimes \gamma^{t^{(2)}} \partial_\vartheta^{(1)} \Psi + \gamma^{t^{(1)}} \otimes \gamma^{\vartheta^{(2)}} \partial_\vartheta^{(2)} \Psi \\
&- \left[ \gamma^{\vartheta^{(1)}} \Gamma_\vartheta^{(1)} \right] \otimes \gamma^{t^{(2)}} \Psi - \gamma^{t^{(1)}} \otimes \left[ \gamma^{\vartheta^{(2)}} \Gamma_\vartheta^{(2)} \right] \Psi \\
&+ i \frac{m_f c}{\hbar} \left[ \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{t^{(2)}} + \gamma^{t^{(1)}} \otimes \mathbf{I}_2 \right] \Psi = 0.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Uzay-zamanın simetrisi ve parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyeli, bi-lokal kütleli Dirac alanının aşağıdaki gibi faktörize edilmesini önerir,

$$\Psi \left( t, \vec{r}, \vec{R} \right) = e^{-i\omega t} e^{is\vartheta} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \\ \psi_3(r) \\ \psi_4(r) \end{pmatrix}. \tag{4.69}$$

Denklem (4.66), Denklem (4.67) ve Denklem (4.69)' un Denklem (4.68)' de kullanılması ile, kütle merkezinin momentum taşımadığı durum için ( $k = 0$ ), aşağıdaki çiftlenimli denklem sistemi elde edilir,

$$\Phi(r) \psi_1(r) - 2b\psi_2(r) - 2\left(\partial_r - \frac{1}{r}\right)\psi_3(r) + \frac{4s}{\alpha r}\psi_4(r) = 0,$$

$$\Phi(r) \psi_2(r) - 2b\psi_1(r) = 0,$$

$$\Phi(r) \psi_3(r) + 2\left(\partial_r - \frac{1}{r}\right)\psi_1(r) = 0,$$

$$\Phi(r) \psi_4(r) + \frac{4s}{\alpha r}\psi_1(r) = 0,$$

burada kullanılan tanımlamalar şu şekildedir,

$$\psi_1(r) = \phi_1(r) + \phi_4(r), \quad \psi_2(r) = \phi_1(r) - \phi_4(r),$$

$$\psi_3(r) = \phi_2(r) - \phi_3(r), \quad \psi_4(r) = \phi_2(r) + \phi_3(r),$$

$$\Phi(r) = \frac{\omega}{c} - V(r), \quad b = \frac{m_f c}{\hbar}.$$

#### 4.4.2. Enerji Spektrumu

$\psi_1(r)$  için, çiftlenimli denklem sistemi çözülerek aşağıdaki dalga denklemini elde edilir,

$$\partial_r^2 \psi_1(r) - \left[\frac{2}{r} + \kappa(r)\right] \partial_r \psi_1(r) + \left[\frac{\Phi(r)^2 - B^2}{4} - \frac{4s^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{\kappa(r)}{r} + \frac{2}{r^2}\right] \psi_1(r) = 0,$$

$$B = 2b, \quad \kappa(r) = \frac{\partial_r \Phi(r)}{\Phi(r)}.$$

Çekici bir Coulomb potansiyeli,  $V(r) = -\frac{a}{r}$ , için spinor bileşeni aşağıdaki gibi tanımlanabilir <sup>13</sup>,

$$\psi_1(r) = \overline{\psi(r)} e^{-\frac{\sqrt{4b^2 c^2 - \omega^2}}{2c} r} r^{1+\frac{\zeta}{2}}.$$

<sup>13</sup>Temsil karmaşasından sakınmak için çiftlenim sabiti  $a$  olarak alınmıştır.

$y = -\frac{\omega r}{ac}$  şeklinde verilen bir boyutsuz bağımsız değişken cinsinden dalga denklemi aşağıdaki halde yeniden yazılabilir,

$$\partial_y^2 \psi(y) + \left[ \Omega + \frac{1+\zeta}{y} + \frac{1+\varepsilon}{y-1} \right] \partial_y \psi(y) + \left[ \frac{\Delta}{y} + \frac{\Lambda}{y-1} \right] \psi(y) = 0, \quad (4.70)$$

burada kullanılan parametreler arasındaki ilişki şu şekildedir,

$$\begin{aligned} \delta &= \Delta + \Lambda - \Omega \frac{(\zeta + \varepsilon + 2)}{2}, \quad \delta = -\frac{a^2}{2} \\ \Omega &= \frac{a}{\omega} \sqrt{4b^2 c^2 - \omega^2}, \quad \zeta = -\frac{\sqrt{16s^2 - a^2 \alpha^2}}{\alpha}, \quad \varepsilon = -2, \\ \Pi &= (1 + \zeta) \frac{\Omega}{2} - \frac{(\zeta + \varepsilon + \zeta \varepsilon)}{2} - \Delta, \quad \Pi = 1 + \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Bu denklemde  $\zeta$ 'nin bir tamsayı olması gerektiğini söyleyen hiçbir fiziksel neden yoktur ve bu nedenle Denklem (4.70)'in çözüm fonksiyonları lineer bağımsızdır. Bu çözümler aşağıdaki gibi Heun fonksiyonları cinsinden elde edilir,

$$\psi(y) = Q_1 H_C(\Omega, \zeta, \varepsilon, \delta, \Pi, y) + \frac{Q_2}{y^\zeta} H_C(\Omega, -\zeta, \varepsilon, \delta, \Pi, y),$$

burada  $Q_1$  ve  $Q_2$  keyfi sabitlerdir. Asimptotik olarak kabul edilebilir fiziksel çözüm ikinci çözümdür. Enerji spektrumunun elde edilmesi için, çözüm fonksiyonunun polinom olma şartı kullanılır.  $\delta_n$  koşulu olarak adlandırılan bu polinom olma koşulu aşağıda verilmiştir (Vieira ve Bezerra 2016; Fiziev 2009),

$$(n + 1 + \frac{\zeta + \varepsilon}{2}) \Omega = -\delta.$$

Bu ifade, sistemin enerji spektrumunu, herhangi bir yaklaşım olmadan aşağıdaki gibi verir,

$$\begin{aligned} \pm \Sigma &= \sqrt{1 - \frac{a^2}{4 \left( n^2 - \frac{n}{\alpha} \sqrt{16s^2 - a^2 \alpha^2} + \frac{4s^2}{\alpha^2} \right)}}, \quad \Sigma = \frac{E}{Mc^2}, \\ \alpha &= \left( 1 - \frac{4\mu_s G}{c^2} \right) \in (0, 1], \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Bu pertürbatif olmayan enerji spektrumunda,  $n$ ,  $E$ ,  $M$ ,  $a$ ,  $s$  ve  $\alpha$  sırası ile temel kuantum sayısını, sistemin toplam enerjisini, fermiyonların toplam kütesini, çiftlenme sabitini, kompozit sistemin toplam spinini ve kozmik sicimin lineer kütle yoğunluğu  $\mu_s$ 'e bağlı

olan, uzay-zaman zemininin açısal açıklık parametresini temsil eder.

Düz Minkowski uzay-zaman geometrisi için ( $\alpha = 1$ ), Denklem (4.71) aşağıdaki haline indirgenir,

$$\pm\Sigma = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4(n^2 - n\sqrt{16s^2 - a^2} + 4s^2)}}, \quad \Sigma = \frac{E}{2m_f c^2}. \quad (4.72)$$

Bu enerji spektrumu,  $a$  için kuvvet serisine açıklarak, ( $n = 1, s = 1$ ) için, aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$E \approx \pm 2m_f c^2 \left\{ 1 - \frac{a^2}{8} + \frac{a^4}{128} - \frac{3a^6}{4096} \right\}, \quad (4.73)$$

$$a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c},$$

Bu enerji spektrumu,  $o - Ps$  için daha önce Denklem (4.49) ile verilen enerji spektrumu ile birebir aynıdır ( $m_f = m_e$  için). Denklem (4.73)' te ilk terim, sistemin toplam durgun kütle enerjisini ( $2m_f c^2$ ), ikinci terim ise ( $\propto a^2$ ), bu sistemin relativistik olmayan bağlanma enerjisini verir ( $-m_f c^2 \frac{a^2}{4}$ ) (Harpen 2004; Cassidy 2018). Sonuçların kontrol edilmesi için, elde edilen bu spektrum bir o-Ps sistemine ( $s = 1$ ) uygulanabilir. Denklem (4.72) aracılığı ile, bir o-Ps sisteminin taban durum bağlanma enerjisi ( $E_{n,s}$ ) (relativistik düzeltmeleri içeren) aşağıdaki gibi elde edilir,

$$E_{1,1} = -6,802822706 [eV].$$

Bu sonuç yaygın literatür ile oldukça uyumludur (Cassidy 2018).

Denklem (4.71)' i  $a'$  ya göre kuvvet serisine açarak aşağıdaki ifade elde edilir,

$$E \approx \pm 2m_f c^2 \left\{ 1 - \frac{a^2 \alpha^2}{8(2-\alpha)^2} + \frac{a^4 \alpha^4 (2\alpha-1)}{128(2-\alpha)^4} - \frac{a^6 \alpha^6 (4-12\alpha+12\alpha^2-\alpha^3)}{4096(2-\alpha)^6} \right\}, \quad (4.74)$$

$$a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}.$$

Bu ifade, her terimin  $\alpha'$  ya bağlılığının ne olduğu söyler.  $\alpha < 1$  için, bu parametrenin, incelenen sistemin taban durum bağlanma enerjisini azaltacağı açık şekilde görülebilmektedir.

Denklem (4.71),  $a'$  ya göre kuvvet serisine açılarak aşağıdaki formda yazılabilir,

$$\Sigma(n, a, \alpha, s) \approx 1 - |E_{n,s}(a, \alpha)|, \quad 0 < |E_{n,s}(a, \alpha)| < 1,$$

burada  $|E_{n,s}(a, \alpha)|$ , incelenen sistemin bağlanma enerjisinin büyüklüğüdür. Bağlanma enerjisinin küçülen değerleri için,  $\Sigma$  fonksiyonunun değeri 1'e yaklaşır. Statik kozmik siccimin, bu sistem üzerindeki etkilerini analiz etmek için Denklem (4.71) ve Denklem (4.72) karşılaştırılabilir. Prensip,  $\alpha$  teriminden kaynaklanan değişimler Şekil 4.4., Şekil 4.5., Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.' de görülebilir. Şekil 4.7.' de uzay-zaman zemininden kaynaklanan etkilerin, sistemin enerji seviyelerinde dejenereliğe sebep olabileceği görülmüşse,  $a'$  nın tahmin edilen değeri 1'e oldukça yakın olması sebebiyle, bu parametrenin gerçekte enerji seviyelerinde dejenereliğe sebep olmayacağı,  $\alpha > 0.9$  değerleri için bile Şekil 4.8. ve Şekil 4.9. ile görülebilir. Öte yandan, Denklem (4.74), bir o-Ps anihilasyon süreci sonucunda açığa çıkan fotonlar tarafından taşınan toplam enerjideki ( $E_{ann}$ ) (Asoka-Kumar ve ark. 1996), uzay-zaman zemininden kaynaklanan etkilerin hesaplanabilmesini mümkün kılmaktadır. Bu fotonlar tarafından taşınan toplam enerji, uzay-zaman zeminin topolojik özelliklerine dair ek bir bilgi edinebilmesinin prensipte mümkün olduğunu söylemektedir. Anihilasyon fotonları tarafından taşınan, etkilenmiş toplam enerji değeri aşağıdaki ifade yardımı ile hesaplanabilir,

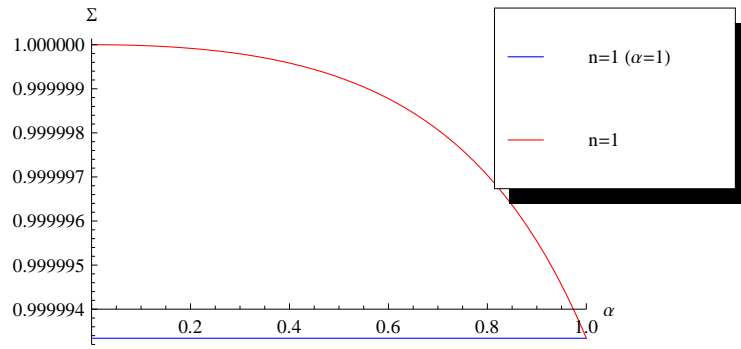
$$E_{ann} = E - |E_{1,1}(a, \alpha)|. \quad (4.75)$$

Ayrıca, enerji seviyeleri üzerindeki değişimlerin, spektrumdaki  $a'$  nın tüm kuvvetleri ile birlikte gelmesi oldukça önem taşımaktadır (Denklem (4.74) ile görülebilir). Bu sonuç, literatürde daha önce elde edilen (Marques ve Bezerra 2002) bulguları destekler. Denklem (4.74)' teki ( $a\alpha$ ) terimleri  $\bar{a} = a\alpha$  şeklinde efektif bir çiftlenim sabiti olarak düşünülebilir. Buradan yola çıkarak, uzay-zaman zemininden kaynaklanan etkilerin, o-Ps gibi kararsız sistemlerin toplam yaşam sürelerini etkileyeceği açıkça görünmektedir (Kataoka ve ark. 2009; Al-Ramadhan ve Gidley 1994). Bu değişimler, o-Ps benzeri sistemlerin yerleştirildiği herhangi bir madde ortamının (Axpe ve ark. 2014) eğriliği ile sistemin etkileşiminden kaynaklanmaktadır. Bu sebeple, prensip olarak, bir o-Ps sisteminin dokulardaki yada tümörlerdeki topolojik yada morfolojik değişimlerin dedekte edilebil-

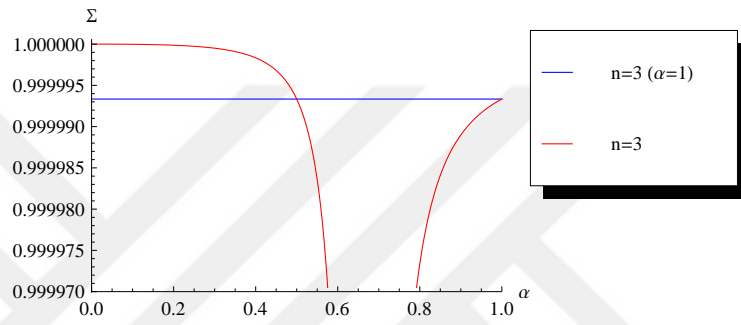
mesi için kullanılabileceği anlamı taşımaktadır (Kamińska ve ark. 2016). Grand Unified Teori' ye göre (Marques ve Bezerra 2002), statik kozmik sicim için, uzay-zaman zeminindeki açılabilir açıklık değeri  $\alpha \sim 1 - 10^{-6}$  olarak tahmin edilmektedir. Bu değer kullanılarak, bir o- $P_s$  sisteminin taban durum bağlanma enerjisindeki kayma miktarı Denklem (4.73) ve Denklem (4.74) kullanılarak hesaplanabilir. Elde edilen bu iki sonuç karşılaştırılarak, bu sistemin taban durumu bağlanma enerjisindeki kayma miktarı, aşağıdaki gibi elde edilmiştir,

$$\begin{aligned} \Delta|E_{1,1}(a, 1 - 10^{-6})| &\approx 2m_e c^2 \times 5 \times 10^{-7} \times (a)^2, \\ &\sim 3 \times 10^{-5} \text{ [eV]}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

burada  $a \sim 1/137.06$  alınmıştır (ince-yapı sabiti).



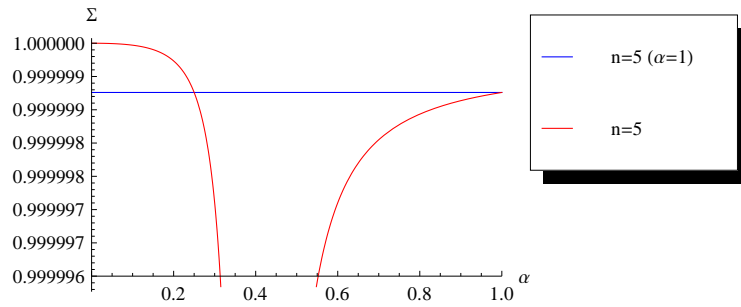
Şekil 4.4. Denklem (4.71) ve Denklem (4.72)' nin karşılaştırılması



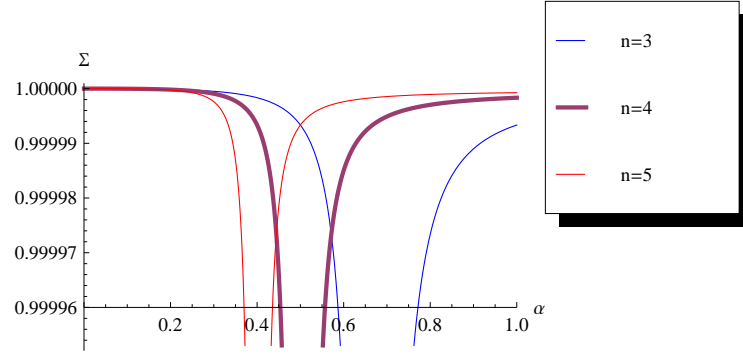
Şekil 4.5. Denklem (4.71) ve (4.72)' nin karşılaştırılması

#### 4.4.3. Tartışmalar

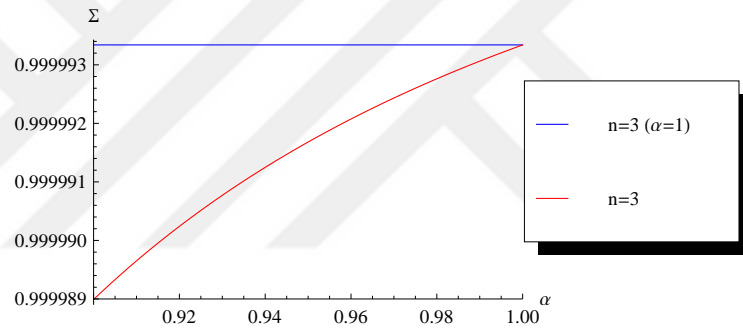
Burada, statik bir kozmik sicim tarafından oluşturulan uzay-zaman zemininde, karşılıklı olarak Coulomb tipi çekici bir potansiyel aracılığı ile etkileşen bir fermiyon anti-fermiyon çifti incelenmiştir. Her bir parçacığın, statik kozmik sicim tarafından oluşturulan uzay-zaman zemininde farklı koordinatlarda bulunduğu varsayılmıştır. Sistemin kütle merkezi hareketi koordinatları ve bağıl hareket koordinatları tanımlanarak, kütle merkezinin



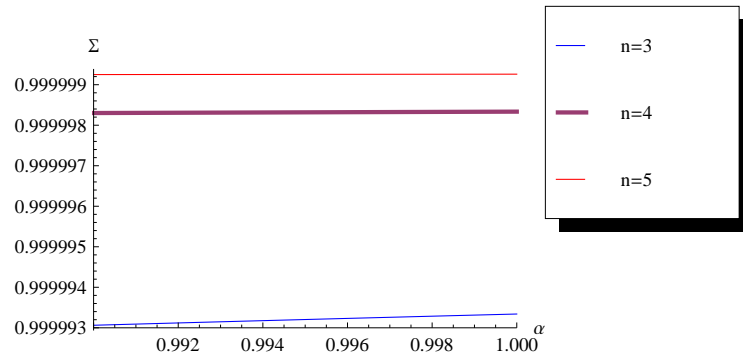
Şekil 4.6. Denklem (4.71) ve Denklem (4.72)' nin karşılaştırılması



Şekil 4.7. Uyarılmış enerji seviyelerindeki kaymalar



Şekil 4.8.  $s = 1$ ,  $\alpha > 0.9$  için karşılaştırma



Şekil 4.9.  $s = 1$ ,  $\alpha > 0.9$  için karşılaştırma

durgun olduğu ve uzay-zaman zemininin orjininde bulunduğu varsayılmıştır. Genel Coulomb tipi merkezci bir etkileşme potansiyeli için, çiftlenimli bir denklem sistemi elde edilmiş ve elde edilen bu denklem sistemi çekici bir Coulomb potansiyeli için tam olarak çözülmüştür. Elde edilen enerji spektrumu, uzay-zaman zemininin topolojik yapısının sistem üzerindeki etkisini açık olarak göstermektedir. Uzay-zaman zemininden kaynaklanan etkilerin analiz edilmesi için, elde edilen bu enerji spektrumu  $\alpha = 1$  için yazılmış ve elde edilen bu ifade sonuçların kontrol edilmesi amacıyla bir o-Ps sistemine uygulanmıştır (Bknz. Denklem (4.71) ve Denklem (4.72)). Bu spektrum, o-Ps için, yaygın literatür ile oldukça uyumlu sonuçlar vermektedir (Cassidy 2018). Elde edilen bu iki enerji spektrumu karşılaştırılarak, matematiksel olarak tanımlı aralıkta ( $0 < \alpha < 1$ ), değişen  $\alpha$  değerleri için incelenmiştir. Bu sonuçlar Şekil 4.4., Şekil 4.5., Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.' de verilmiştir. Prensip, çok büyük lineer kütle yoğunluğu değerleri için, kozmik sicimin, etkileşen bu fermiyon çiftinin bağlanma enerjilerinde bir azalmaya sebep olduğu, yani, parçacıklar arasındaki etkileşim üzerinde bir perdeleme etkisine sebep olduğu görülebilmektedir (Bknz. Şekil 4.4., Şekil 4.5., Şekil 4.6.). Prensip, incelenen sistemin uyarılmış enerji düzeylerinde, uzay-zaman topolojisinden kaynaklanan etkilerin, bağlanma enerjilerinde ciddi artışlara sebep olabileceği mümkün olarak görülebilsede (Bknz. Şekil 4.5., Şekil 4.6., Şekil 4.7. ve Şekil 4.8.),  $\alpha$  parametresinin tahmin edilen değeri 1' e oldukça yakındır. Benzer durumların, enerji seviyelerinde dejenereliğe sebep olabileceğide görünmektedir (Bknz. Şekil 4.7.), fakat gerçekçi değerlere daha yakın olan  $\alpha > 0.9$  değerleri için bile, dejenereliğin söz konusu olmayacağı açıktır (Bknz. Şekil 4.8. ve Şekil 4.9.). Aslında,  $\alpha$ ' nın tahmin edilen değeri  $\alpha \sim 1 - 10^{-6}$ ' dır ve bu değer için elde edilen enerji spektrumları karşılaştırılmış ve taban durumdaki bir  $o - Ps$  için enerji seviyesindeki kayma miktarı elde edilmiş, sonuçlar Denklem (4.74) ile verilmiştir. Ayrıca, Denklem (4.74) bize  $a\alpha$  terimlerinin efektif bir çiftlenme sabiti  $\bar{a} = a\alpha$  şeklinde düşünülebileceğini söyler. Buradan yola çıkarak, uzay-zaman topolojisinin, bir o-Ps sisteminin toplam yaşam süresini direkt olarak etkileyeceğini rahatlıkla söyleyebiliriz. Bu sayede, prensip olarak, dokulardaki ve tümörlerdeki topolojik yada morfolojik değişimlerin, o-Ps sisteminin bağlanma enerjilerinin ölçümü, toplam yaşam sürelerinin ölçümü yada sistemin kendi kendisini yok ettikten sonra açığa çıkan anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjinin ölçümü ile detekte edilebileceği, prensip olarak mümkün görünmektedir. Denklem (4.75) ile ve-

rilen toplam anihilasyon enerjisinin uzay-zamana bağımlı değişimi kullanılarak, bu tip bir topolojiye sahip uzay-zaman geometrileri için,  $o - Ps$  sisteminin bir dedektör gibi kullanılabilmesi mümkün görünmektedir. Çok hassas ölçümler gerektirirse, bu anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjinin, uzay-zaman zemininin topolojisi hakkında ek bir bilgi verebileceği açıktır. Elden edilen sonuçlar, evrende bu tür uzay-zaman geometrilerinin varlığını doğrulamak için, bir  $o - Ps$  sisteminin dedektör olarak kullanılabilmesini, prensip olarak göstermektedir. Taban durumda bir  $o - Ps$  için,  $\alpha \sim 1 - 10^{-6}$  alınarak elde edilen kayma miktarı hesaplanabilmiş ve bu değer  $\sim 3 \times 10^{-5}$  [eV] olarak elde edilmiştir.  $\alpha \sim 1 - 10^{-6}$  değeri için, statik kozmik sicim uzay-zaman zemininin, incelenen sistemin enerji seviyelerinde sebep olduğu kayma miktarlarının oldukça küçük olmasına rağmen, ölçülebilir olması oldukça önemlidir.

#### 4.5. 3-fermiondan oluşan kompozit sistemler için matematiksel model

Etkileşen 3-Dirac parçacığından oluşan bir kompozit sistemin, 2 + 1 boyutlu genel bir uzay-zaman geometrisindeki dinamiği, aşağıda verilen, kovaryant formdaki 3-cisim Dirac denklemi ile incelenebilir,

$$\begin{aligned} & \left( \gamma^{\mu(1)} \Pi_{\mu}^{(1)} + ib_1 \mathbf{I}_2 \right) \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi + \gamma^{0(1)} \otimes \left( \gamma^{\mu(2)} \Pi_{\mu}^{(2)} + ib_2 \mathbf{I}_2 \right) \otimes \gamma^{0(3)} \Psi \\ & + \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \left( \gamma^{\mu(3)} \Pi_{\mu}^{(3)} + ib_3 \mathbf{I}_2 \right) \Psi = 0, \\ & \Pi_{\mu}^{(1)} = \left( \partial_{\mu}^{(1)} + \frac{ie_1}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(1)} \right), \quad \Pi_{\mu}^{(2)} = \left( \partial_{\mu}^{(2)} + \frac{ie_2}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(2)} \right), \\ & \Pi_{\mu}^{(3)} = \left( \partial_{\mu}^{(3)} + \frac{ie_3}{\hbar c} A_{\mu}^{(ex)} - \Gamma_{\mu}^{(3)} \right), \\ & \partial_{\mu} = \left( \frac{\partial_0}{c}, \partial_1, \partial_2 \right), \quad (\mu = 0, 1, 2), \quad b_q = \frac{m_q c}{\hbar}, \quad (q = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.77)$$

burada  $\gamma^{\mu(q)}$  ile genelleştirilmiş Dirac matrisleri,  $A_{\mu}^{(ex)}$  ile her bir fermiyon için dış elektromanyetik potansiyeller ve  $\mathbf{I}_2$  ile 2x2 boyutlu birim matrisler temsil edilmiştir.  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  kompozit alanı aşağıdaki gibi, kütleli 3-Dirac alanının direkt çarpımı ile elde edilir,

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \psi(\mathbf{x}_1) \otimes \chi(\mathbf{x}_2) \otimes \Theta(\mathbf{x}_3).$$

Denklem (4.77) daha açık olarak aşağıdaki gibi yazılarak, etkileşen fermiyonlar arasında bağıl bir zaman farkı olmadığı görülebilir,

$$\begin{aligned}
& \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \left( p_0^{(1)} + p_0^{(2)} + p_0^{(3)} \right) \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\
& - m_1 c \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\
& - m_2 c \gamma^{0(1)} \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(3)} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - m_3 c \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \mathbf{I}_2 \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\
& + \left[ \gamma^{k(1)} p_k^{(1)} \right] \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \gamma^{0(1)} \otimes \left[ \gamma^{k(2)} p_k^{(2)} \right] \otimes \gamma^{0(3)} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\
& + \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \left[ \gamma^{k(3)} p_k^{(3)} \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 0, \quad (k = 1, 2). \quad (4.78)
\end{aligned}$$

Denklem (3.1) ile temsil edilebilen düz Minkowski uzay-zaman zemini için,  $\Gamma_\mu$  spinör bağlantılarından katkı gelmeyeceği Denklem (3.13) aracılığı ile görülebilir. Coulomb tipi potansiyeller aracılığı ile etkileşen bu üç fermiyon için, genelleştirilmiş momentum operatörlerinin bileşenleri aşağıdaki şekilde alınır,

$$p_0^{(q)} = i\hbar \left( \partial_0^{(q)} + i \frac{e_q A_0^{ex}}{\hbar c} \right), \quad p_1^{(q)} = i\hbar \partial_1^{(q)}, \quad p_2^{(q)} = i\hbar \partial_2^{(q)}, \quad (q = 1, 2, 3).$$

Kütle merkezi momentumu  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$  şeklinde tanımlanarak, eşit kütleli 3 fermiyondan oluşan Pozitronyum-iyon ve yüklü-Eksiton gibi sistemler için, 3-cisim Dirac denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned}
& \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} P_0 \Psi \\
& - mc \left( \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} + \gamma^{0(1)} \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \gamma^{0(3)} + \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \mathbf{I}_2 \right) \Psi \\
& + \left[ \gamma^{1(1)} p_1^{(1)} + \gamma^{2(1)} p_2^{(1)} \right] \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \gamma^{0(3)} \Psi + \gamma^{0(1)} \otimes \left[ \gamma^{1(2)} p_1^{(2)} + \gamma^{2(2)} p_2^{(2)} \right] \otimes \gamma^{0(3)} \Psi \\
& + \gamma^{0(1)} \otimes \gamma^{0(2)} \otimes \left[ \gamma^{1(3)} p_1^{(3)} + \gamma^{2(3)} p_2^{(3)} \right] \Psi = 0.
\end{aligned}$$

İkinci fermiyonun, koordinat sisteminin orjinine yerleştirildiği varsayılarak, kütle merkezinin durgun olduğu durumda bu denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\left\{ \overline{\mathbf{A}} (\partial_t / c) + i b \overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{C}} \partial_x + \overline{\mathbf{D}} \partial_y \right\} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (4.79)$$

ve burada kullanılan  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  ve  $\bar{\mathbf{D}}$  operatörleri  $8 \times 8$  boyutlu matrislerdir ve açık olarak

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \sigma^z \otimes \sigma^z & \mathbf{O}_4 \\ \mathbf{O}_4 & -\sigma^z \otimes \sigma^z \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \sigma^z \otimes \sigma^z + [\mathbf{I}_2 \otimes \sigma^z]_+ & \mathbf{O}_4 \\ \mathbf{O}_4 & \sigma^z \otimes \sigma^z - [\mathbf{I}_2 \otimes \sigma^z]_+ \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} -\sigma^z \otimes i\sigma^x & i\sigma^z \otimes \sigma^z \\ i\sigma^z \otimes \sigma^z & \sigma^z \otimes i\sigma^x \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} -\sigma^z \otimes i\sigma^y & \sigma^z \otimes \sigma^z \\ -\sigma^z \otimes \sigma^z & \sigma^z \otimes i\sigma^y \end{pmatrix}, \\ \mathbf{O}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.80}$$

şeklinde yazılabilirler.

#### 4.5.1. Radyal Denklemler

Kompozit Dirac alanı,

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \Phi(\mathbf{x}),$$

şeklinde tanımlanabilir ve Denklem (4.79), Denklem (4.80) aracılığı ile 3-cisim Dirac denklemi aşağıdaki forma indirgenebilir,

$$\sigma^z \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon(r) - b \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \partial_- & -\partial_- & 0 \\ \partial_+ & 0 & 0 & \partial_- \\ -\partial_+ & 0 & 0 & -\partial_- \\ 0 & \partial_+ & -\partial_+ & 0 \end{pmatrix} \right\} \Upsilon(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\partial_{\pm} = (\partial_x \pm i\partial_y).$$

Bu çiftlenimli denklem sistemi, Denklem (3.8) ile verilen spinör formu ve Denklem (3.25) ile verilen spin alçaltma-yükseltme operatörleri kullanılarak, polar koordinatlar cinsinden,

dönüştürülmüş spinör bileşenleri için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}\epsilon(r) F_+(r, \phi) - 3bF_-(r, \phi) + 4\partial_r F_0(r) &= 0, \\ \epsilon(r) F_-(r, \phi) - 3bF_+(r, \phi) &= 0, \\ \epsilon(r) F_0 - j/rF_-(r, \phi) - \partial_r F_+(r) &= 0,\end{aligned}\tag{4.81}$$

burada kullanılan tanımlamalar aşağıda verilmiştir,

$$\begin{aligned}F_+(r, \phi) &= F_1(r) e^{i\phi} + F_4(r) e^{-i\phi}, \quad F_-(r, \phi) = F_1(r) e^{i\phi} - F_4(r) e^{-i\phi}, \\ F_0(r) &= F_2(r) = -F_3(r), \quad \epsilon(r) = (w/c - V_T(r)).\end{aligned}$$

Denklem (4.81) ile verilen çiftlenimli denklem sistemi  $F_+$  için çözülebilir ve bu durumda aşağıdaki dalga denklemi elde edilir,

$$\partial_r^2 F_+(r) + \left[ \frac{j}{r} - \frac{\partial_r \epsilon(r)}{\epsilon(r)} \right] \partial_r F_+(r) + \left[ \frac{\epsilon(r)^2 - 9b^2}{4} - \frac{\partial_r \epsilon(r) j}{\epsilon(r) r} - \frac{j}{r^2} \right] F_+(r) = 0.$$

Bu sistemdeki her bir fermiyon çiftinin Coulomb tipi potansiyeller aracılığı ile etkileştiği düşünülürse, spinor bileşeni aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$F_+(r) = \overline{F}(r) e^{-\frac{\sqrt{9b^2 c^2 - \omega^2}}{2c} r - \frac{j}{2} + \frac{\beta}{2}}.$$

$y = -\frac{\omega r}{\alpha c}$  şeklinde bir boyutsuz bağımsız değişken tanımlanarak, dalga denklemi aşağıdaki halde yeniden yazılabilir,

$$\partial_y^2 \psi(y) + \left[ \Omega + \frac{1+\beta}{y} + \frac{1+\epsilon}{y-1} \right] \partial_y \psi(y) + \left[ \frac{\Delta}{y} + \frac{\Lambda}{y-1} \right] \psi(y) = 0,$$

burada kullanılan parametreler arasındaki ilişki aşağıdaki denklemler ile verilir,

$$\begin{aligned}\delta &= \Delta + \Lambda - \Omega \frac{(\beta+\epsilon+2)}{2}, \quad \delta = -\frac{\bar{\alpha}^2}{2} \\ \Omega &= \frac{\bar{\alpha}}{\omega} \sqrt{9b^2 c^2 - \omega^2}, \quad \beta = -\sqrt{j^2 - \bar{\alpha}^2}, \quad \epsilon = -2, \\ \Pi &= (1 + \beta) \frac{\Omega}{2} - \frac{(\beta+\epsilon+\beta\epsilon)}{2} - \Delta, \quad \Pi = 1 + \frac{\bar{\alpha}^2}{2} - \frac{j}{2}.\end{aligned}$$

### 4.5.2. Enerji Spektrumu

Denklem (4.70)' in lineer bağımsız çözümleri,  $\beta$  parametresi bir tamsayı olamayacağı için, daha önce 3. Bölümde elde edildiği üzere, aşağıdaki gibi Heun fonksiyonları cinsinden bulunur,

$$\psi(y) = Q_1 H_C(\Omega, \beta, \varepsilon, \delta, \Pi, y) + \frac{Q_2}{y^\beta} H_C(\Omega, -\beta, \varepsilon, \delta, \Pi, y),$$

burada  $Q_1$  ve  $Q_2$  keyfi sabitlerdir. Asimptotik olarak kabul edilebilir fiziksel çözüm ikinci çözümdür. Enerji spektrumu,  $\delta_n$  koşulu olarakta adlandırılan, çözüm fonksiyonu için polinom olma koşulu ile (Fiziev 2009),

$$(n + 1 + \frac{\beta + \varepsilon}{2})\Omega = -\delta,$$

aşağıdaki gibi elde edilir,

$$E = 3m_f c^2 \sqrt{1 - \frac{\bar{\alpha}^2}{4(n^2 - n\sqrt{j^2 - \bar{\alpha}^2} + \frac{j^2}{4})}}, \quad j = \pm \frac{1}{2}.$$

Bu enerji spektrumunda,  $n$ ,  $E$ ,  $m_f$ ,  $\bar{\alpha}$  ve  $j$  sırası ile temel kuantum sayısını, sistemin toplam enerjisini, fermiyonların kütesini, efektif çiftlenme sabitini ve sistemin toplam açıl momentum kuantum sayısını temsil eder. Burada elde edilen enerji spektrumu, 2. fermiyonun (zıt elektriksel yüke sahip) kütle merkezinde ve durgun olduğu varsayılp, toplam etkileşme potansiyelinin  $(-\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{2r})$  şeklinde alınması ile bulunmuştur ( $\bar{\alpha} = \frac{3\alpha}{2}$ ). Bu kısımda incelenilen sistemin,  $-$ ,  $+$ ,  $-$  yada  $+$ ,  $-$ ,  $+$  şeklinde elektriksel yüke sahip olan 3 fermiyondan oluştuğu düşünülmüştür. Bu iki farklı yük konfigürasyonu için toplam etkileşme potansiyeli değişmez ve dolayısı ile elde edilen enerji spektrumu  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  sistemlerini kapsar. Ayrıca, bu enerji spektrumunun ( $j = \pm \frac{1}{2}$ ) değerleri için aynı sonucu vereceği açıktır. Elde edilen bu enerji ifadesi  $\alpha'$  ya göre kuvvet serisine açılarak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$E \approx 3m_f c^2 \left\{ 1 - \frac{9\alpha^2}{4(4n-1)^2} + \frac{2592n-81}{32} \frac{\alpha^4}{(4n-1)^4} \right\}. \quad (4.82)$$

Daha önce yapılan tartışmalar aracılığı ile, izotropik ve tek katmanlı bir dielektrik madenin varlığında, elde edilen bu enerji spektrumu aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$E \approx 3m_f c^2 \left\{ 1 - \frac{9\alpha_{eff}^2}{4(4n-1)^2} + \frac{2592n-81}{32} \frac{\alpha_{eff}^4}{(4n-1)^4} \right\}. \quad (4.83)$$

Denklem (4.83) kullanılarak elde edilen, izotropik ve tek katmanlı bir madde ortamında bulunan  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  kompozit sistemleri için bağlanma enerjisi değerleri, Çizelge 4.5.' te listelenmiştir.

**Çizelge 4.5.** Değişen  $\epsilon_{eff}$  değerleri için bağlanma enerjilerinin değişimi

$n$	$\epsilon_{eff}$	$E(n, \epsilon_{eff}) [eV]$
2	3	-0,416
2	4	-0,234
2	5	-0,149
2	6	-0,104
2	7	-0,076
2	8	-0,058
3	3	-0,168
3	4	-0,094
3	5	-0,060
3	6	-0,042
3	7	-0,030
3	8	-0,023

### 4.5.3. Tartışmalar

Burada, farklı elektriksel yüke sahip olan fermiyonun, sistemin kütle merkezinde durgun olduğu kabul edilmiş ve diğer fermiyonların bu merkez etrafında hareket ettikleri düşünülmüştür. Bu nedenle, diğer fermiyonların aynı yörüngede buldukları düşünülerek, Pauli dışarlama ilkesi gereğince bu iki fermiyonun zıt spin polarizasyonlarına sahip olduğu düşünülmüştür. Bu sebeple, sistemin toplam spin kuantum sayısı, orjinde ve çizgisel momentum taşımadığı kabul edilen fermiyonun spin kuantum sayısına eşit olarak alınmış ve  $j = \pm \frac{1}{2}$  şeklinde kısıtlanmıştır. Daha önce, elde edilen sonuçlar ışığında, izotropik bir dielektrik ortamda bulunan  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  gibi sistemler için, fermiyonlar arasındaki efektif çiftlenme gerilimlerinin  $\alpha_{eff} = \frac{\alpha}{\epsilon_{eff}}$  şeklinde alınması ile, herhangi bir tek katmanlı izotropik dielektrik madde ortamı için, Denklem (4.83) kullanılarak, enerji spektrumunun elde edilebileceği açıktır.

## 5. SONUÇLAR

Bu tez kapsamında, eşit kütleyle sahip ve birbirleriyle etkileşen 2 relativistik fermiyondan oluşan  $Ps$  ve  $Exc$  gibi, 3 fermiyondan oluşan  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  gibi sistemler incelenmiştir. Bu sistemlerin dinamiğinin incelenmesi için kullanılan temel fiziksel ve matematiksel bilgiler 3. Bölümde ve 4. Bölümde oldukça açık olarak anlatılmıştır. Birbirleriyle çekici Coulomb tipi potansiyeller aracılığı ile etkileşen relativistik 2 fermiyondan oluşan nötral kompozit sistemlerin mümkün spin kuantum durumları için, farklı fiziksel özelliklere sahip uzay-zaman geometrilerinde elde edilen sonuçların tamamı birbirlerini desteklemektedir.  $Ps$ ,  $Exc$ ,  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  gibi sistemler kararsız kompozit sistemlerdir ( $l$  iyi kuantum sayısı değil) ve bu sistemlerin dinamiği, sistemlerin kararsız olması sebebiyle,  $2 + 1$  boyutlu uzay-zaman geometrilerinde araştırılmıştır. Güncel teknolojik uygulamaları olması sebebiyle,  $Ps$  ve  $Exc$  sistemleri için bulunan sonuçlar detaylı bir şekilde tartışılmış, literatürde çelişkili sonuçlar açıklanabilmiştir. Farklı madde ortamlarının optik yada elektriksel özelliklerinde dikkate alındığı özgün bir matematiksel model geliştirilerek, spin-antisimetrik  $Ps$  ve  $Exc$  için ulaşılan pertürbatif olmayan spektrumlar, bu sistemlerin bağlanma enerjilerinin ve yaşam sürelerinin nasıl kontrol edilebileceğine yönelik çarpıcı sonuçlar vermiştir. Daha sonra,  $Ps$  benzeri kompozit sistemlerin bir topolojik kusurla etkileşimi incelenmiş ve daha önce düz Minkowski uzay-zaman geometrisi için elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak, bu sistemlerin fiziksel özelliklerinin, uzay-zaman topolojisine bağlı olarak değişimleri analiz edilmiştir. Son olarak, iki-cisim için geliştirilen matematiksel model, matematiksel olarak çözümleri tam olarak yapılamayan  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  gibi sistemlerin incelenmesi amacıyla genişletilmiş ve zıt elektriksel yüke sahip fermiyonun kütle merkezinde ve çizgisel momentum taşımadığı kabul edilerek genel bir enerji spektrumu elde edilmiştir.

4.1.1. Bölümde, eşit kütleyle sahip, Coulomb tipi çekici bir potansiyel aracılığı ile etkileşen bir fermiyon-antifermiyon çiftinden oluşan spin-0 nötral kararsız kompozit sistemler için geliştirilen matematiksel model ile ulaşılan sonuçlar, literatürdeki önemi ve güncel teknolojik uygulamaları olması sebebiyle, bir  $p - Ps$  sistemine uygulanmış ve elde edilen enerji spektrumunun,  $p - Ps$  sisteminin tüm temel özelliklerini yansıttığı (radyatif düzeltmeleri içermez) tespit edilmiştir. İncelenen bu sistem kararsızdır ve ilk olarak, tek

bir matematiksel metod ile, sistemin  $l = 0$  kuantum durumları için, reel ve sönümlü modlar elde edilmiştir.  $p - Ps$  sistemi tamamen leptonik yapıda bir kompozit sistemdir ve parçacıklar arasındaki çekici Coulomb kuvveti sebebiyle çöker. Bu şekilde parçacıklara ait dalga fonksiyonları üst üste biner ve sistem kendisini yok ederek anihilasyon fotonları açığa çıkar. Bu anihilasyon fotonlarının sayısı sistemin C-simetrisine göre belirlenir ve  $p - Ps$  sistemi kendisini yok ettiğinde, yüksek mertebeden anihilasyonlar mümkün görülmüş, çok yüksek bir olasılıkla 2 gama fotonu açığa çıkar. Elde edilen enerji spektrumu, ayrıca, bu anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerji değerini açık şekilde verebilmektedir. Vakum ortamında, bir kaç  $n$  değeri için elde edilen bağlanma enerjileri, yaşam süreleri ve mümkün geçişler için bulunan geçiş süreleri sırasıyla Çizelge 4.2., Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.3.' te listelenmiştir. Denklem (4.37), Denklem (4.38) ve Çizelge 4.2.' den görülebileceği üzere, anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerji değeri, vakum ortamındaki bir  $p - Ps$  sistemi için  $E_{ann} = 2m_e c^2 - |E_1|$  şeklinde elde edilmiştir ve literatürde daha önce tahmin edilen sonuçları doğrulayıp (Asoka-Kumar ve ark. 1996) ayrıca bu enerji değerlerine relativistik düzeltmeler sağlamıştır. Fakat, her bir  $l = 0$  kuantum durumu için elde edilen yaşam süreleri bu sistemin toplam yaşam süresini vermez. Elde edilen yaşam süreleri, sistemin deneysel olarak ölçülen toplam bozunma süresinin küçük bir kısmına dair bilgi verir. PALS çalışmalarından bilindiği üzere, madde ortamındaki bir  $p - Ps$  sistemi için ölçülen toplam anihilasyon enerjisi değerleri ve toplam bozunma süresi değerleri madde ortamının elektron yoğunluğu, uzay-zamanın izotropisi ve madde ortamındaki atomlar arası serbest boşluklara bağlı olarak değişmektedir. Radyoaktif kaynaklar aracılığı ile elde edilen pozitronlar, bir madde ortamına girdiklerinde, bir kaç fiziksel süreç sonucunda kinetik enerjilerini kaybederek termalize olabilirler, yada madde ortamının elektron yoğunluğuna bağlı olarak direkt bir elektron tarafından yok edilebilirler. Termalize olan bir pozitron, çekici Coulomb kuvveti nedeniyle en yakınındaki bir elektron tarafından yakalanarak bir  $Ps$  sistemi oluşabilir. Pozitronların madde ortamlarında termalizasyon süreleri kabaca, bir kaç  $ps$  olarak bilinmektedir (Tao 1972). Fakat herhangi bir  $Ps$  sistemi için, sistemin ilk olarak hangi kuantum durumunda olduğu ve oluşan bu kuantum durumu üzerinde, madde ortamından kaynaklanan etkilerin ne olduğu tam olarak hesaplanamamaktadır. Bu kısımda son olarak,  $p - Ps$  sistemini çevreleyen, homojen bir dielektrik ortam düşünülmüş ve vakum durumu için elde edilen enerji spektrumunun, dielektrik ortamın optik özelliklerine bağlı

değişimi fenomenolojik olarak tartışılmıştır. Özet olarak, herhangi bir dielektrik ortamda, parçacıklar arasındaki elektromanyetik çiftlenme sabiti, madde ortamından kaynaklanan perdeleme etkileri nedeniyle efektif bir değer olarak, vakum durumuna kıyasla, sistemin reel modlarını ve sönümlü modlarını değiştirdiği tespit edilmiştir. Madde ortamının etkisi, bağlanma enerjilerine bir perdeleme etkisi yaparak sistemin bağlanma enerjisi değerlerini azaltır ve bu sebeple sistemin toplam yaşam süresini uzatır. Bu etkiler, Şekil 4.2. ve Şekil 4.1.' in, Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2. ile karşılaştırılması ile açık şekilde görülebilir. Bu şekilde, taban durum için bağlanma enerjisi değeri (negatif) azalacaktır. Bu nedenle, efektif dielektrik sabiti büyük olan ortamlarda, anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerji, sistemin toplam durgun kütle enerjisi değerine oldukça yakındır. Elde edilen sonuçlar, ilgili literatür ile uyumludur ve geliştirilmiş dedektörler aracılığı ile, prensip olarak, dokularda, homojenliğin bozulması, elektronegatifliğin artması ve morfolojik yapının değişimi gibi etkilerin erken dedekte edilebilmesine yönelik bilgiler sağlamaktadır. Ayrıca, burada elde edilen tam çözümler, bir  $p - Ps$  sistemi için yaşam sürelerinin ve sistemin kendisini yok ettikten sonra açığa çıkan anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjilerin, madde ortamlarına bağlı olarak kontrol edilebileceğini işaret eder. Burada elde edilen sonuçların, olay-olay bazında, rutin medikal görüntüleme işlemlerine, gamma-ışını lazeri ve *PALS* çalışmalarına katkıda bulunabileceği düşünülmektedir.

4.2.1. Bölümde, toplam spini 1 olan, birbirleriyle Coulomb tipi çekici bir potansiyel aracılığı ile etkileşen bir fermiyon-antifermiyondan oluşan nötral kompozit sistemler, kartezyen koordinatlardan transform edilmeksizin, kullanılan denklem direkt olarak polar uzay-zaman geometrisinde yazılarak incelenmiş ve elde edilen en genel spektrum bir  $o - Ps$  sistemine uygulanarak elde edilen bağlanma enerjisi değeri güncel literatür ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen değerler literatür ile son derece uyumlu olduğu tespit edilmiştir.  $o - Ps$  sistemi toplam C-simetri nedeni ile tek sayıda fotona bozulan kararsız kompozit bir sistemdir. Bu sistemin, temel momentum korunumu sebebiyle, bir fotona bozunması yasaktır.  $o - Ps$  sisteminin çok yüksek bir olasılıkla 3-gama fotonuna bozunduğu bilinmektedir. Bu sistemin temel özellikleri, rutin medikal görüntüleme cihazlarından birisi olan *PET* cihazlarının geliştirilmesi ile elde edilen ve Jagiellonian-Positron Emission Tomography cihazı olarak adlandırılan düzenek ile, günümüzde yoğun olarak çalışılmaktadır.  $o - Ps$  sistemi çöktüğünde açığa çıkan 3 foton içinde, 3. gama fotonu tarafından taşınan

bilgi, herhangi bir madde ortamında, anihilasyon noktasının lokalizasyonuna dair bilgi taşımaktadır. Ayrıca, anihilasyon sonucu açığa çıkan anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjideki değişimler dedekte edilerek, lezyonlarda elektriksel, morfolojik ve topolojik değişimlerin erken dedekte edilebilmesine yönelik önemli bilgiler sağlamaktadır.

4.3.2. Bölümde, daha önce 4.1.1. Bölümde, fenomenolojik olarak tartışılan madde ortamı, matematiksel olarak temellendirilerek, geliştirilen model sonucu ulaşılan sonuçlar, tek katmanlı, izotropik bir dielektrik ortamda bulunan bir elektron-deşik çiftine uygulanmıştır. İncelenen bu sistem kararsızdır ve elde edilen pertürbatif olmayan enerji spektrumu kullanılarak, sistemin reel ve sönümlü modları tek bir matematiksel formalizm ile elde edilmiştir. İzotropik dielektrik ortamın, spin-0 bir Eksiton sistemi üzerindeki etkisi Denklem (4.56) aracılığı ile açıkça görülebilir. Elde edilen bu enerji ifadesi, ortamdan kaynaklanan etkilerin, sistemin bağlanma enerjisi değerlerini azalttığını, yani parçacıklar arasındaki etkileşim üzerinde bir perdeleme etkisi oluşturduğunu göstermektedir. Bu sistem parçacıklar arasındaki çekici Coulomb kuvveti nedeniyle bozunmaktadır ve ortamdaki kaynaklı perdeleme etkisi nedeniyle sistemin bozunma süresinin uzadığı elde edilen değerler ile tespit edilmiştir. Farklı dielektrik ortamlar için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.4. ile verilmiştir. Sonuç olarak, elde edilen sonuçlar ışığında, spin-0 bir Eksiton dinamiğinin uygun  $\epsilon_{eff}$  değerlerinin ayarlanması ile kontrol edilebilmesi, prensip olarak açık bir şekilde mümkün görünmektedir. Bu sonuç, incelenen bu sistemin bağlanma enerjilerinin ve toplam bozunma zamanının dış bir elektromanyetik alan kullanmaksızın kontrol edilebileceği anlamına gelir.

4.4.2. Bölümde, bir fermiyon-antifermiyon sisteminden oluşan nötral kompozit bir sistemin bir boyutlu topolojik bir kusurla etkileşimi araştırılmıştır. Statik bir kozmik sicim tarafından oluşturulan uzay-zaman zemininde, karşılıklı olarak Coulomb tipi çekici bir potansiyel aracılığı ile etkileşen bir fermiyon antifermiyon çifti, kütle merkezinin durgun olduğu ve uzay-zaman zemininin orjininde bulunduğu varsayılarak incelenmiştir. Genel Coulomb tipi merkezci bir etkileşme potansiyeli için, çiftlenimli bir denklem sistemi elde edilmiş ve elde edilen bu denklem sistemi çekici bir Coulomb potansiyeli için tam olarak çözülmüştür. Elde edilen enerji spektrumu, uzay-zaman zemininin topolojik yapısının sistem üzerindeki etkisini açık olarak göstermektedir. Uzay-zaman zemininden kaynaklanan etkilerin, incelenen sistemin enerji seviyelerinde sebep olduğu kaymaların

belirlenebilmesi için, elde edilen bu enerji spektrumu, düz Minkowski uzay-zamanında elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve bir  $o - Ps$  sistemine uyarlanarak, değişen  $\alpha$  değerleri için incelenmiştir. Bu sonuçlar Şekil 4.4., Şekil 4.5., Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.' de verilmiştir. Sonuçlar, çok büyük lineer kütle yoğunluğuna sahip statik kozmik sicimin, etkileşen bu fermiyon çiftinin bağlanma enerjilerinde bir azalmaya sebep olacağını, yani parçacıklar arasındaki etkileşim üzerinde bir perdeleme etkisi oluşturacağını söylemektedir (Şekil 4.4., Şekil 4.5., Şekil 4.6.). İncelenen sistemin uyarılmış enerji düzeylerinde, uzay-zaman topolojisinden kaynaklanan etkilerin, bağlanma enerjilerinde ciddi artışlara sebep olabileceği mümkün olarak görünmesine rağmen (Bknz. Şekil 4.5., Şekil 4.6., Şekil 4.7. ve Şekil 4.8.),  $\alpha$  parametresinin tahmin edilen gerçekçi değerleri 1' e oldukça yakındır. Benzer durumların, enerji seviyelerinde dejenereliğe sebep olabileceğide görünmektedir (Şekil 4.7.), fakat gerçekçi değerlere daha yakın olan  $\alpha > 0.9$  değerleri için bile, dejenereliğin söz konusu olamayacağı açıktır (Şekil 4.8. ve Şekil 4.9.). Aslında,  $\alpha'$  nın tahmin edilen değeri yaklaşık olarak  $\alpha \sim 1 - 10^{-6}$  dır ve bu değer için elde edilen enerji spektrumları karşılaştırılmış ve taban durumdaki bir  $o - Ps$  için enerji seviyesindeki kayma elde edilmiş, sonuçlar Denklem (4.74) ile verilmiştir. Ayrıca, Denklem (4.74) bize  $(a\alpha)$  terimlerinin efektif bir çiftlenme sabiti  $\bar{a} = a\alpha$  şeklinde düşünülebileceğini söyler.  $o - Ps$  sisteminin bozunma oranlarının hesaplanmasında kullanılan matematiksel yöntemler, elektron ve pozitron arasındaki çiftlenme gerilimi değerinin direkt olarak kullanılmasına dayanır. Buradan yola çıkarak, uzay-zaman topolojisinin, bir  $o - Ps$  sisteminin toplam yaşam süresini etkileyeceğini rahatlıkla söyleyebiliriz. Bu durum, prensip olarak, dokulardaki veya lezyonlardaki topolojik değişimlerin,  $o - Ps$  sisteminin bağlanma enerjilerinin ölçümü, toplam yaşam sürelerinin ölçümü yada sistemin kendi kendisini yok ettikten sonra açığa çıkan anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjinin ölçümü ile detekte edilebileceğini söylemektedir. Denklem (4.75) ile verilen toplam anihilasyon enerjisinin uzaya bağımlı değişimi kullanılarak, bu tip bir topolojiye sahip uzay-zaman geometrileri için,  $o - Ps$  sisteminin bir dedektör gibi kullanılabileceği açıktır. Çok hassas ölçümler gerektirmesine rağmen, bu anihilasyon fotonları tarafından taşınan toplam enerjinin, uzay-zaman zemininin topolojisi hakkında ek bir bilgi verebileceğini söyleyebiliriz. Bir  $o - Ps$  sisteminin taban durum bağlanma enerjisindeki kayma miktarı,  $\alpha \sim 1 - 10^{-6}$  alınarak hesaplanabilmiş ve bu değer  $\sim 0,03 \text{ meV}$  olarak elde edilmiştir (Denklem (4.76)).

4.5.3. Bölümde, matematiksel olarak tam çözümleri yapılamayan, eşit kütleli ve birbirleri ile etkileşen 3 fermiyondan oluşan  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  gibi kararsız sistemler için, daha önce fermiyon-antifermiyon sistemleri özelinde geliştirilen model genişletilmiş ve 2. fermiyonun sistemin kütle merkezinde (orjinde)durgun olduğu kabul edilmiştir. Bu yaklaşım ile, incelenen 3 fermiyon sistemleri için genel bir frekans spektrumu elde edilmiştir. İncelenen bu sistemler iki eşit elektriksel yüke ve bir zıt yüke sahip toplam 3 fermiyondan oluşmaktadır. Zıt elektriksel yüke sahip olan fermiyonun, sistemin kütle merkezinde ve lineer momentum taşımadığı durum için elde edilen enerji spektrumunda, diğer fermiyonların bu merkez etrafında hareket ettikleri düşünülmüştür. Bu nedenle, diğer fermiyonların aynı yörüngede buldukları düşünülerek, Pauli dışarlama ilkesi gereğince bu iki fermiyonun birbirlerine göre zıt spin polarizasyonlarına sahip olduğu düşünülmüştür. Bu yaklaşım altında, incelenen sistemlerin kararsız olmaları sebebi ile ( $l$  iyi kuantum sayısı değil), sistemin toplam spin kuantum sayısı, orjinde ve çizgisel momentum taşımadığı kabul edilen fermiyonun spin kuantum sayısına eşit olarak alınmıştır ( $j = \pm\frac{1}{2}$ ). Daha önce 4.3.2. Bölümde elde edilen sonuçlar ışığında, izotropik bir dielektrik ortamda bulunan  $Ps^\pm$  ve  $Exc^\pm$  gibi kompozit sistemler için, Denklem (4.83) ile verilmiş olan enerji spektrumu kullanılarak elde edilen bağlanma enerjisi değerleri Çizelge (4.5.)' te listelenmiştir.

## 6. KAYNAKLAR

- A. H. Al-Ramadhan and D. W. Gidley. New precision measurement of the decay rate of singlet positronium. *Phys. Rev. Lett.*, 72:1632–1635, Mar 1994.
- AN Aliev and DV Gal’Tsov. Gravitational aharonov-bohm radiation in string-generated conical space-time. *Annals of Physics*, 193(1):142–165, 1989.
- A. M. Alonso, B. S. Cooper, A. Deller, S. D. Hogan, and D. B. Cassidy. Controlling positronium annihilation with electric fields. *Phys. Rev. Lett.*, 115:183401, Oct 2015.
- Carl D Anderson. The positive electron. *Physical Review*, 43(6):491, 1933.
- Fabiano M Andrade and Edilberto O Silva. Effects of spin on the dynamics of the 2d dirac oscillator in the magnetic cosmic string background. *The European Physical Journal C*, 74(12):3187, 2014.
- P Asoka-Kumar, M Alatalo, VJ Ghosh, AC Kruseman, B Nielsen, and KG Lynn. Increased elemental specificity of positron annihilation spectra. *Physical Review Letters*, 77(10):2097, 1996.
- Jürgen Audretsch, Ulf Jasper, and Vladimir D Skarzhinsky. Bremsstrahlung in the gravitational field of a cosmic string. *Physical Review D*, 49(12):6576, 1994.
- Eneko Axpe, Tamara Lopez-Euba, Ainara Castellanos-Rubio, David Merida, Jose Angel Garcia, Leticia Plaza-Izurieta, Nora Fernandez-Jimenez, Fernando Plazaola, and Jose Ramon Bilbao. Detection of atomic scale changes in the free volume void size of three-dimensional colorectal cancer cell culture using positron annihilation lifetime spectroscopy. *PloS one*, 9(1), 2014.
- Barkev Bakamjian and LH Thomas. Relativistic particle dynamics. ii. *Physical Review*, 92(5):1300, 1953.
- Knut Bakke and C Furtado. Bound states for neutral particles in a rotating frame in the cosmic string spacetime. *Physical Review D*, 82(8):084025, 2010.

- AO Barut. The covariant many-body problem in quantumelectrodynamics. *Journal of mathematical physics*, 32(4):1091–1095, 1991.
- AO Barut and S Komy. Derivation of nonperturbative relativistic two-body equations from the action principle in quantumelectrodynamics. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, 33(6):309–318, 1985.
- AO Barut and GL Strobel. Center-of-mass motion of a system of relativistic dirac particles. *Few-Body Systems*, 1(4):167–180, 1986.
- AO Barut and Nuri Ünal. Radial equations for the relativistic two-fermion problem with the most general electric and magnetic potentials. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, 33(6):319–332, 1985.
- AO Barut and Nuri Ünal. A new approach to bound-state quantum electrodynamics: I. theory. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 142(1-3):467–487, 1987.
- AO Barut and Nuri Ünal. A new approach to bound-state quantum electrodynamics: II. spectra of positronium, muonium and hydrogen. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 142(1-3):488–497, 1987.
- S Bellucci, ER Bezerra De Mello, A de Padua, and AA Saharian. Fermionic vacuum polarization in compactified cosmic string spacetime. *The European Physical Journal C*, 74(1):2688, 2014.
- VB Berestetskii and LD Landau. On the exchange effects between electron and positron. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 19:673, 1949.
- Timothy C Berkelbach, Mark S Hybertsen, and David R Reichman. Theory of neutral and charged excitons in monolayer transition metal dichalcogenides. *Physical Review B*, 88(4):045318, 2013.
- Oleg L Berman, Roman Ya Kezerashvili, and Klaus Ziegler. Coupling of two dirac particles. *Physical Review A*, 87(4):042513, 2013.

- Ivan Pelant Bernd Hönerlage. *Symmetry and Symmetry-Breaking in Semiconductors: Fine Structure of Exciton States*. Springer Tracts in Modern Physics 279. Springer International Publishing, 1st ed. edition, 2018. ISBN 978-3-319-94234-6;978-3-319-94235-3.
- Valdir B Bezerra and Nail R Khusnutdinov. The vacuum expectation value of the spinor massive field in the cosmic string spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 23 (10):3449, 2006.
- Gregory Breit. The effect of retardation on the interaction of two electrons. *Physical Review*, 34(4):553, 1929.
- Gregory Breit. The fine structure of he as a test of the spin interactions of two electrons. *Physical Review*, 36(3):383, 1930.
- Huabing Cai and Zhongzhou Ren. Transition processes of a static multilevel atom in the cosmic string spacetime with a conducting plane boundary. *Scientific reports*, 8(1): 1–10, 2018.
- David B Cassidy. Experimental progress in positronium laser physics. *The European Physical Journal D*, 72(3):53, 2018.
- Alexey Chernikov, Timothy C Berkelbach, Heather M Hill, Albert Rigosi, Yilei Li, Ozgur Burak Aslan, David R Reichman, Mark S Hybertsen, and Tony F Heinz. Exciton binding energy and nonhydrogenic rydberg series in monolayer ws 2. *Physical review letters*, 113(7):076802, 2014.
- Gerard Clement. Rotating string sources in three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, 201(2):241–257, 1990.
- Charles Galton Darwin. Li. the dynamical motions of charged particles. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(233): 537–551, 1920.
- Charles Galton Darwin. The electron as a vector wave. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 116(773):227–253, 1927.

- Stanley Deser and R Jackiw. String sources in 2+ 1-dimensional gravity. *Annals of Physics*, 192(2):352–367, 1989.
- Stanley Deser, Roman Jackiw, and G't Hooft. Three-dimensional einstein gravity: dynamics of flat space. *Annals of Physics*, 152(1):220–235, 1984.
- Martin Deutsch. Evidence for the formation of positronium in gases. *Phys. Rev.*, 82: 455–456, May 1951.
- Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778):610–624, 1928.
- Paul Adrien Maurice Dirac. Generalized hamiltonian dynamics. *Canadian journal of mathematics*, 2:129–148, 1950.
- Paul AM Dirac. Forms of relativistic dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):392, 1949.
- IH Duru and N Ünal. Particle production in expanding universes with path integrals. *Physical Review D*, 34(4):959, 1986.
- Enrico Fermi and Chen-Ning Yang. Are mesons elementary particles? *Physical Review*, 76(12):1739, 1949.
- Plamen P Fiziev. Novel relations and new properties of confluent heun's functions and their derivatives of arbitrary order. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(3):035203, 2009.
- LH Ford and A Vilenkin. A gravitational analogue of the aharonov-bohm effect. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 14(9):2353, 1981.
- Thomas Fulton and Paul C Martin. Radiative corrections in positronium. *Physical Review*, 93(4):903, 1954.
- Sanjiv Sam Gambhir. Molecular imaging of cancer with positron emission tomography. *Nature Reviews Cancer*, 2(9):683–693, 2002.

- R. L. Garwin. Thermalization of positrons in metals. *Phys. Rev.*, 91:1571–1572, Sep 1953.
- Riccardo Giachetti and Vincenzo Grecchi. Perturbation theory for metastable states of the dirac equation with quadratic vector interaction. *Physical Review A*, 80(3):032107, 2009.
- Riccardo Giachetti and Vincenzo Grecchi. Pt-symmetric operators and metastable states of the 1d relativistic oscillators. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(9):095308, 2011.
- Riccardo Giachetti and Emanuele Sorace. States of the dirac equation in confining potentials. *Physical review letters*, 101(19):190401, 2008.
- J Richard Gott and Mark Alpert. General relativity in a (2+ 1)-dimensional space-time. *General Relativity and Gravitation*, 16(3):243–247, 1984.
- J Richard Gott III. Gravitational lensing effects of vacuum strings-exact solutions. *The Astrophysical Journal*, 288:422–427, 1985.
- Daniel Gunlycke and Frank Tseng. Triangular lattice exciton model. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 18(12):8579–8586, 2016.
- Abdullah Guvendi, Ramazan Sahin, and Yusuf Sucu. Exact solution of an exciton energy for a monolayer medium. *Scientific reports*, 9(1):1–6, 2019.
- AT Hanbicki, M Currie, G Kioseoglou, AL Friedman, and BT Jonker. Measurement of high exciton binding energy in the monolayer transition-metal dichalcogenides ws<sub>2</sub> and wse<sub>2</sub>. *Solid State Communications*, 203:16–20, 2015.
- Diego D Harari and Vladimir D Skarzhinsky. Pair production in the gravitational field of a cosmic string. *Physics Letters B*, 240(3-4):322–326, 1990.
- Michael D Harpen. Positronium: Review of symmetry, conserved quantities and decay for the radiological physicist. *Medical physics*, 31(1):57–61, 2004.

- Keliang He, Nardeep Kumar, Liang Zhao, Zefang Wang, Kin Fai Mak, Hui Zhao, and Jie Shan. Tightly bound excitons in monolayer wse 2. *Physical review letters*, 113(2):026803, 2014.
- M \_ B Hindmarsh and Thomas Walter Bannerman Kibble. Cosmic strings. *Reports on Progress in Physics*, 58(5):477, 1995.
- Mark Hindmarsh. Signals of inflationary models with cosmic strings. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 190:197–228, 2011.
- Mansoureh Hosseinpour, Fabiano M Andrade, Edilberto O Silva, and Hassan Hassanabadi. Scattering and bound states for the hulthén potential in a cosmic string background. *The European Physical Journal C*, 77(5):270, 2017.
- Zhiming Huang. Quantum entanglement of nontrivial spacetime topology. *The European Physical Journal C*, 80(2):1–8, 2020.
- Roman Jackiw. Lower dimensional gravity. *Nuclear Physics B*, 252:343–356, 1985.
- Deep Jariwala, Vinod K Sangwan, Lincoln J Lauhon, Tobin J Marks, and Mark C Hersam. Emerging device applications for semiconducting two-dimensional transition metal dichalcogenides. *ACS nano*, 8(2):1102–1120, 2014.
- D Kamińska, Aleksander Gajos, Eryk Czerwiński, Dominika Alfs, Tomasz Bednarski, Piotr Białas, C Curceanu, Kamil Dulski, Bartosz Głowacz, Neha Gupta-Sharma, et al. A feasibility study of ortho-positronium decays measurement with the j-pet scanner based on plastic scintillators. *The European Physical Journal C*, 76(8):445, 2016.
- Robert Karplus and Abraham Klein. Electrodynamic displacement of atomic energy levels. iii. the hyperfine structure of positronium. *Physical Review*, 87(5):848, 1952.
- Y Kataoka, S Asai, and T Kobayashi. First test of o ( $\alpha$ 2) correction of the orthopositronium decay rate. *Physics Letters B*, 671(2):219–223, 2009.
- N Kemmer. Interaction of nuclear particles. *Nature*, 140(3535):192–193, 1937.

- Thomas WB Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9(8):1387, 1976.
- Hannu-Pekka Komsa and Arkady V Krasheninnikov. Effects of confinement and environment on the electronic structure and exciton binding energy of mos 2 from first principles. *Physical Review B*, 86(24):241201, 2012.
- Nardeep Kumar, Qiannan Cui, Frank Ceballos, Dawei He, Yongsheng Wang, and Hui Zhao. Exciton-exciton annihilation in mose 2 monolayers. *Physical Review B*, 89(12):125427, 2014.
- Michael F. L'Annunziata. *Radioactivity. Introduction and History, from the Quantum to Quarks*. Elsevier, 2 edition, 2016.
- TK Leen, Leonard Parker, and Luis O Pimentel. Remote quantum mechanical detection of gravitational radiation. *General relativity and gravitation*, 15(8):761–776, 1983.
- B Linet. Force on a charge in the space-time of a cosmic string. *Physical Review D*, 33(6):1833, 1986.
- Geusa de A Marques and Valdir B Bezerra. Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects. *Physical Review D*, 66(10):105011, 2002.
- ER Figueiredo Medeiros and ER Bezerra de Mello. Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential. *The European Physical Journal C*, 72(6):2051, 2012.
- Hermann Minkowski. Die grundgleichungen für die elektromagnetischen vorgänge in bewegten körpern. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1908:53–111, 1908.
- Stjepan Mohorovicic. Möglichkeit neuer elemente und ihre bedeutung für die astrophysik. *Astronomische Nachrichten*, 253:93, 1934.
- HM Moseley and Nathan Rosen. The meson as a composite particle. *Physical Review*, 80(2):177, 1950.

- Paweł Moskal, Sz Niedźwiecki, Tomasz Bednarski, Eryk Czerwiński, E Kubicz, I Moskal, M Pawlik-Niedźwiecka, NG Sharma, M Silarski, M Zieliński, et al. Test of a single module of the j-pet scanner based on plastic scintillators. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 764:317–321, 2014.
- Paweł Moskal, Bożena Jasińska, Ewa Ł Stępień, and Steven D Bass. Positronium in medicine and biology. *Nature Reviews Physics*, 1(9):527–529, 2019.
- Paweł Moskal, Daria Kisielewska, Catalina Curceanu, Eryk Czerwiński, Kamil Dulski, Aleksander Gajos, Marek Gorgol, Beatrix C Hiesmayr, Bożena Jasińska, Krzysztof Kacprzak, et al. Feasibility study of the positronium imaging with the j-pet tomograph. *Physics in medicine and biology*, 64(5):055017, 2019.
- CR Muniz and VB Bezerra. Self-force on an electric dipole in the spacetime of a cosmic string. *Annals of Physics*, 340(1):87–93, 2014.
- Noboru Nakanishi. Normalization condition and normal and abnormal solutions of the bethe-salpeter equation. *Physical Review*, 138(5B):B1182, 1965.
- Theodore Duddell Newton and Eugene P Wigner. Localized states for elementary systems. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):400, 1949.
- Kostya S Novoselov, D Jiang, F Schedin, TJ Booth, VV Khotkevich, SV Morozov, and Andre K Geim. Two-dimensional atomic crystals. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(30):10451–10453, 2005.
- Soohyung Park, Niklas Mutz, Thorsten Schultz, Sylke Blumstengel, Ali Han, Areej Aljarb, Lain-Jong Li, Emil JW List-Kratochvil, Patrick Amsalem, and Norbert Koch. Direct determination of monolayer mos<sub>2</sub> and wse<sub>2</sub> exciton binding energies on insulating and metallic substrates. *2D Materials*, 5(2):025003, 2018.
- Leonard Parker. One-electron atom as a probe of spacetime curvature. *Physical Review D*, 22(8):1922, 1980.
- Leonard Parker. One-electron atom in curved space-time. *Physical Review Letters*, 44(23):1559, 1980.

- Leonard Parker. The atom as a probe of curved space-time. *General Relativity and Gravitation*, 13(4):307–311, 1981.
- Leonard Parker. Gravitational particle production in the formation of cosmic strings. *Physical review letters*, 59(12):1369, 1987.
- Leonard Parker and Luis O Pimentel. Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum. *Physical Review D*, 25(12):3180, 1982.
- David Klein Peter Collas. *The Dirac Equation in Curved Spacetime: A Guide for Calculations*. SpringerBriefs in Physics. Springer International Publishing, 1st ed. edition, 2019. ISBN 978-3-030-14824-9,978-3-030-14825-6.
- Jean Pirenne. J. pirenne, arch. sci. phys. et nat. 29, 207 (1947). *Arch. sci. phys. et nat.*, 29: 207, 1947.
- PM Platzman and AP Mills Jr. Possibilities for bose condensation of positronium. *Physical Review B*, 49(1):454, 1994.
- Milton S Plesset. The dirac electron in simple fields. *Physical Review*, 41(3):278, 1932.
- Maurice Henry Lecorney Pryce. The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connexion with the quantum theory of elementary particles. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 195(1040): 62–81, 1948.
- Stanley F Radford and Wayne W Repko. Potential model calculations and predictions for heavy quarkonium. *Physical Review D*, 75(7):074031, 2007.
- Ashwin Ramasubramaniam. Large excitonic effects in monolayers of molybdenum and tungsten dichalcogenides. *Physical Review B*, 86(11):115409, 2012.
- Edwin E Salpeter and Hans Albrecht Bethe. A relativistic equation for bound-state problems. *Physical Review*, 84(6):1232, 1951.
- EE Salpeter. Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms. *Physical Review*, 87(2):328, 1952.

- LCN Santos and CC Barros. Relativistic quantum motion of spin-0 particles under the influence of noninertial effects in the cosmic string spacetime. *The European Physical Journal C*, 78(1):13, 2018.
- S Sato. Nonrelativistic limit of kemmer-fermi-yang equation. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, 82(3):339–350, 1984.
- Julian Schwinger. On the green's functions of quantized fields. i. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 37(7):452–455, 1951.
- Vladimir D Skarzhinsky, Diego D Harari, and Ulf Jasper. Quantum electrodynamics in the gravitational field of a cosmic string. *Physical Review D*, 49(2):755, 1994.
- Arnold Sommerfeld. Zur quantentheorie der spektrallinien. *Annalen der Physik*, 356(17):1–94, 1916.
- Yusuf Sucu and Nuri Ünal. Exact solution of dirac equation in 2+ 1 dimensional gravity. *Journal of mathematical physics*, 48(5):052503, 2007.
- H Suura. Relativistic two-body wave equation and meson spectrum. *Physical Review Letters*, 38(12):636, 1977.
- SJ Tao. Positronium annihilation in molecular substances. *The Journal of Chemical Physics*, 56(11):5499–5510, 1972.
- IT Todorov. Quasipotential equation corresponding to the relativistic eikonal approximation. *Physical Review D*, 3(10):2351, 1971.
- Frank Tseng, Ergun Simsek, and Daniel Gunlycke. Using dark states for exciton storage in transition-metal dichalcogenides. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 28(3):034005, 2015.
- R. S. Vallery, P. W. Zitzewitz, and D. W. Gidley. Resolution of the orthopositronium-lifetime puzzle. *Phys. Rev. Lett.*, 90:203402, May 2003.
- Peter Van Alstine and Horace W Crater. A tale of three equations: Breit, eddington—gaunt, and two-body dirac. *Foundations of Physics*, 27(1):67–79, 1997.

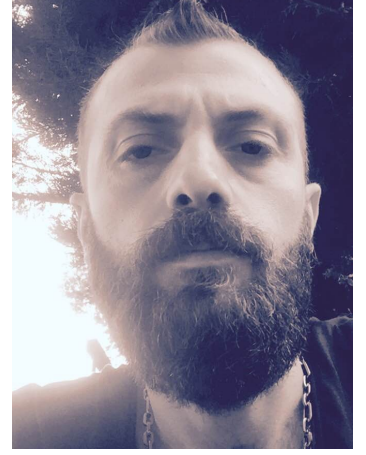
- HS Vieira and VB Bezerra. Confluent heun functions and the physics of black holes: Resonant frequencies, hawking radiation and scattering of scalar waves. *Annals of Physics*, 373:28–42, 2016.
- A Vilenkin. Self-interaction of charged particles in the gravitational field. *Physical Review D*, 20(2):373, 1979.
- Alexander Vilenkin. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Physical Review D*, 23(4):852, 1981.
- Alexander Vilenkin. Cosmic strings and domain walls. *Physics reports*, 121(5):263–315, 1985.
- Gang Wang, Alexey Chernikov, Mikhail M Glazov, Tony F Heinz, Xavier Marie, Thierry Amand, and Bernhard Urbaszek. Colloquium: Excitons in atomically thin transition metal dichalcogenides. *Reviews of Modern Physics*, 90(2):021001, 2018.
- Qing Hua Wang, Kouros Kalantar-Zadeh, Andras Kis, Jonathan N Coleman, and Michael S Strano. Electronics and optoelectronics of two-dimensional transition metal dichalcogenides. *Nature nanotechnology*, 7(11):699, 2012.
- Eugene Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Annals of mathematics*, pages 149–204, 1939.
- Di Xiao, Gui-Bin Liu, Wanxiang Feng, Xiaodong Xu, and Wang Yao. Coupled spin and valley physics in monolayers of mos 2 and other group-vi dichalcogenides. *Physical review letters*, 108(19):196802, 2012.
- Jun Xiao, Mervin Zhao, Yuan Wang, and Xiang Zhang. Excitons in atomically thin 2d semiconductors and their applications. *Nanophotonics*, 6(6):1309–1328, 2017.
- Ziliang Ye, Ting Cao, Kevin O'brien, Hanyu Zhu, Xiaobo Yin, Yuan Wang, Steven G Louie, and Xiang Zhang. Probing excitonic dark states in single-layer tungsten disulphide. *Nature*, 513(7517):214–218, 2014.
- Özlem Yeşiltaş. Su (1, 1) solutions for the relativistic quantum particle in cosmic string spacetime. *The European Physical Journal Plus*, 130(7):128, 2015.

Bairen Zhu, Xi Chen, and Xiaodong Cui. Exciton binding energy of monolayer ws 2. *Scientific reports*, 5:9218, 2015.



## ÖZGEÇMİŞ

ABDULLAH GÜVENDİ  
abdullah.guvendi@ksbu.edu.tr



### ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2016-2020	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Bölümü, Antalya
Yüksek Lisans 2013-2016	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Bölümü, Antalya
Lisans 2009-2013	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Fizik Anabilim Dalı, Antalya
Ön Lisans 2006-2008	Cumhuriyet Üniversitesi Sivas Meslek Yüksekokulu, İnşaat Teknolojisi Programı, Sivas
Lise 2002-2005	Sivas Kongre Lisesi Sivas

## **ESERLER**

### **Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler**

1- Guvendi, A. and Sahin, R. and Sucu, Y. (2019). Exact solution of an exciton energy for a monolayer medium. *Scientific reports*, 9 (1), 1–6. Doi:10.1038/s41598-019-45478-4.

### **Ulusal hakemli dergilerde yayımlanan makaleler**

1- Boztosun, İ. and Dapo, H. and Özmen, S. F. and Çeçen, Y. and Karakoç, M. and Çoban, A. and Cesur, A. and Caner, T. and Bayram, E. and Keller, G. B. and others. (2014). The results of the first photonuclear reaction performed in Turkey: the zinc example. *Turkish Journal of Physics*, 38 (1), 1–9. Doi:10.3906/fiz-1305-19.