HAZİRAN 2020 Doktora Tezi-Matematik NURBİGE TURAN ZABUN

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN EVRENSEL MODÜLLERİN FİTTİNG İDEALLERİ

MATEMATİK

DOKTORA TEZİ

NURBİGE TURAN ZABUN

HAZİRAN 2020

YÜKSEK MERTEBEDEN EVRENSEL MODÜLLERİN FİTTİNG İDEALLERİ

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Doktora Tezi

Danışman

Doç. Dr. Necati OLGUN

Nurbige TURAN ZABUN

Haziran 2020

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Nurbige TURAN ZABUN

ABSTRACT

FITTING IDEALS OF HIGH ORDER UNIVERSAL MODULES

TURAN ZABUN, Nurbige
Ph.D. in Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. Necati OLGUN
June 2020
79 pages

Working with Fitting ideals of a module in Commutative Algebra is one of the important tools in examining the structure of the module and determining the regularity of the ring. In addition, Fitting ideals are used to solve some problems of physics related to dynamic systems. The main purpose of this thesis is to examine the algebraic properties of the universal module defined on the tensor product, such as freeness, projective dimension, in case the Fitting ideals of universal modules are invertible and to apply these results on the samples. In the introduction part of the thesis, studies on literature related to Fitting ideals and universal modules are mentioned. In the second part of the thesis, basic definitions such as ideal, module, tensor product, and some related features are given. In the third chapter, basic definitions, theorems and properties of universal modules are given. Then, the projective dimensions of the universal modules are examined on the samples. In the fourth chapter, definition and properties of Fitting ideal of universal modules are given. In the fifth chapter, after giving the definition and properties of the invertible ideal, the results obtained in the case of Fitting ideals of the first and second order universal modules defined on the tensor product of the two rings are expressed with proofs. In the sixth chapter, by giving the definition and properties of the symmetric power module of a module, the projective dimensions of the first and second order universal module defined on the tensor product of the two rings are examined.

Keywords: Fitting Ideals, Universal Modules, Projective Dimension, Tensor Product, Symmetric Power Modules.

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN EVRENSEL MODÜLLERİN FİTTİNG İDEALLERİ

TURAN ZABUN, Nurbige
Doktora Tezi, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Necati OLGUN
Haziran 2020
79 sayfa

Değişmeli Cebirde, bir modülün Fitting idealleriyle çalışmak modülün yapısını incelemede ve halkanın regülerliğini belirlemede önemli araçlardan biridir. Ayrıca Fitting idealler fiziğin dinamik sistemlerle ilgili bazı problemlerinin çözümünde de kullanılmaktadır. Bu tezin temel amacı, evrensel modüllerin Fitting ideallerinin terslenebilir olma durumunda tensor çarpım üzerinde tanımlanan evrensel modülün serbestlik, projektif boyut gibi cebirsel özelliklerini incelemek ve elde edilen bu sonuçları örnekler üzerinde uygulamaktır. Tezin giriş bölümünde, Fitting idealler ve evrensel modüllerle ilgili literatürde yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, çalışmamızda geçen ideal, modül, tensor çarpım gibi temel tanımlar ve bunlarla ilgili bazı özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, evrensel modüllerle ilgili temel tanım, teorem ve özellikler verilmiştir. Daha sonra örnekler üzerinde, evrensel modüllerin projektif boyutları incelenmiştir. Dördüncü bölümde, evrensel modüllerin Fitting ideal tanımı ve özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde, terslenebilir ideal tanımı ve özellikleri verildikten sonra iki halkanın tensor çarpımı üzerinde tanımlanan birinci ve ikinci mertebeden evrensel modüllerin Fitting ideallerinin terslenebilir olması durumunda elde edilen sonuçlar ispatlarıyla ifade edilmiştir. Altıncı bölümde, bir modülün simetrik kuvvet modülünün tanımı ve özellikleri verilerek, iki halkanın tensor çarpımı üzerinde tanımlanan birinci ve ikinci mertebeden evrensel modülünün projektif boyutları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fitting İdealler, Evrensel Modüller, Projektif Boyut, Tensör Çarpım, Simetrik Kuvvet Modülleri.

"Canım kızıma, eşime ve aileme"

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimimde tez çalışmalarım süresince bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr. Necati OLGUN´a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar destekleriyle her zaman yanımda olan, maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan canım aileme ve sevgili eşim Ömer ZABUN' a sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma sırasında bana maddi destek sağlayan, bilim ve bilim insanının destekçisi TÜBİTAK'a (2211-A Yurtiçi Doktora Bursu) teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER LİSTESİ

$F_i(M)$	M, R-modülünün i. Fitting ideali
$\mu(M)$	M modülünün minimal üreteç sayısı
$D_R^n(M, N)$	n. mertebeden diferansiyel operatörlerin kümesi
$Der_R^n(M, N)$	n. mertebeden türev operatörlerin kümesi
$J_n(R)$	n. mertebeden evrensel diferansiyel modülü
$\Omega_n(R)$	n. mertebeden evrensel türev modülü
$S^n(M)$	M modülünün n. mertebeden simetrik kuvvet modülü
$Q(R)$	R tamlık bölgesinin kesir cismi
$I(M)$	M modülünün sıfırdan farklı ilk Fitting ideali
[f , r]	fr-rf
< a , b >	a ve b elemanları ile üretilen ideal
Spec(R)	R halkasının asal ideallerinin kümesi

KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathrm{pd}_R(M)$	M, R-modülünün projektif boyutu
$T(M)$	M, R-modülünün burulmalı elemanlarının kümesi
Jac(R)	R halkasının Jacobson radikali
Im f	f fonksiyonunun görüntü kümesi
Çek f	f fonksiyonunun çekirdek kümesi
$\mathrm{Hom}_k(M,N)$	M modülünden N ye olan homomorfizmaların kümesi
$\mathrm{Ann}_R(M)$	M, R-modülünün sıfırlayanı
dimR	R halkasının Krull boyutu
$\mathrm{vdim}_k W$	k üzerindeki W vektör uzayının vektörel boyutu
Min(R)	R halkasının minimal asal ideallerinin kümesi
M^n	n tane M modülünün kartezyen çarpımı
detA	A matrisinin determinantı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fitting ideal tanımı, 1936 yılında Hans Fitting tarafından yapılmıştır [9]. Fitting idealler bir halkanın regülerliğini belirlemede ve bir modülün yapısını incelemede önemli kolaylıklar sağlar. Örneğin, M nin projektif bir R-modül olması sıfırdan farklı ilk Fitting idealinin R olmasına denktir [5]. Fitting ideallerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Fermat' ın Son Teoremi olarak bilinen ünlü problemi çözen Wiles, Iwasawa varsayımının ispatında Fitting ideal teorisinden yararlanmıştır [42]. Einsiedler ve Ward, sonlu üretilmiş bir modülün Fitting ideallerine bakarak, Fizikte bir sistemin dinamik özelliklerini incelemiştir [6]. Grime, tezinde değişmeli olmayan halkaların Fitting idealleriyle ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir [10]. Macrae, Fitting idealleri kullanarak bir ideal tanımlamış ve bu idealin Fitting ideallerle benzer özellikleri sağladığını göstermiştir [21]. Lipman, R yerel bir halka ve M sonlu üretilmiş bir R-modül olmak üzere, M nin $F_r(M)$ idealinin regülerliği ile $M/T(M)$ modülünün rankı r olan bir R-modül ve $pd(M) \leq 1$ olmasına denk olduğunu ispatlamıştır [20]. Ohm, Lipman'ın bu sonucunu herhangi bir değişmeli halka için genelleştirmiştir [30]. Hadjirezaei ve Karimzadeh, çarpımsal ve eş çarpımsal bir modülün Fitting ideallerini incelemiştir [13], [17]. Ayrıca sıfırdan farklı ilk Fitting idealin maksimal olması durumunda bir regüler halka üzerindeki tüm serbest burulmalı olmayan modülleri karakterize etmişlerdir ve sıfırdan farklı ilk Fitting idealin $annT(M)$ nin bir alt kümesi olduğunu göstermişlerdir [12], [15]. Hadjirezaei ve Hedayat, tek şekilde çarpanlara ayırma bölgesi üzerindeki bir modülün sıfırdan farklı ilk Fitting idealine bakarak modülün projektif boyutuyla ilgili sonuçlar elde etmişlerdir [14]. Ayrıca bu Fitting idealin maksimal olması durumunda, modülün yapısıyla ilgili önemli sonuçlara ulaşmışlardır [11].

Evrensel modüller cebirsel kümelerle ilgili problemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden biridir. Evrensel modüller ilk olarak 1960 yılında Nakai tarafından tanımlanmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir [27]. Ayrıca, Nakai R afin bir k-cebir olmak üzere, R nin regüler olması ile $\Omega_1(R)$ evrensel türev modülünün projektif olmasının birbirine denk olduğunu ispatlamıştır [28]. Böylece bir halkanın regülerliğini belirlemede kullanılan Jacobian Kriterine alternatif bir çözüm vermiştir. Matsuoka ve Vasconcelos, yaptıkları çalışmalarda $\Omega_1(R)$ nin projektif boyutuyla ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir [24], [43]. Osborn, Heyneman ve Sweedler yüksek mertebeden diferansiyel operatörlerin evrensel modüllerini incelemiştir [36], [37], [39]. Erdoğan, tezinde R bir hiperyüzey ise $J_n(R)$ nin homolojik boyutunun bir veya birden küçük olduğunu ispatlamıştır [7].

Bir halkanın regülerliği ve modülün yapısı ile ilgili özelliklerin incelenmesinde Fitting idealler önemli bir yere sahiptir. Evrensel modüllerin Fitting idealleriyle ilgili literatürde çok az çalışma vardır. Bunlardan birkaçı şöyledir: Kunz, birinci mertebeden evrensel modüllerin Fitting idealleriyle ilgili sonuçlara kitabında bir bölüm ayırmıştır [18]. Olgun, tezinde evrensel modüllerin Fitting ideallerinin nasıl bulunduğunu ve evrensel modüllerin Fitting idealleriyle ilgili elde ettiği sonuçları vermiştir [31]. Bu tez çalışmasının amacı, evrensel modüllerin Fitting ideallerini kapsamlı bir şekilde incelemek ve evrensel modüllerin projektifliği ve halkayla ilgili yeni sonuçlar elde etmektir.

Tezde ilk olarak, Fitting ideallerle ilgili literatürde var olan çalışmalardan bahsebildi. İkinci bölümde, ideal, modül, modüllerin tensör çarpımı gibi temel kavramlar ve sonuçlar verildi. Üçüncü bölümde, evrensel modüllerle ilgili temel tanım, teorem ve özellikler incelendi. Daha sonra $R \otimes_k S$ halkası üzerindeki evrensel türev modülleri ile ilgili literatürde var olan çalışmalardan bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, bir modülün Fitting idealinin tanımı ve özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Sonrasında evrensel türev modüllerin Fitting ideal tanımı verilmiş, literatürde var olan önemli sonuçlar ispatlarıyla birlikte incelenmiştir. Bölümün sonunda verilen bu bilgiler örnekler üzerinde uygulanmıştır. Beşinci bölümde, terslenebilir idealler genel özellikleriyle verilmiştir. Sonra evrensel türev modüllerin Fitting ideallerinin terslenebilirliği ile ilgili var olan sonuçlar incelenmiştir. Birinci ve ikinci mertebeden evrensel türev modüllerin Fitting ideallerinin terslenebilir ideal olduğu durumda sırasıyla $\Omega_1(R \otimes_k S)$ ve $\Omega_2(R \otimes_k S)$ modüllerinin projektif boyutunun bir veya birden küçük olduğu ispatlanmıştır. Böylece Olgun' un $\Omega_2(R \otimes_k S)$ modülünün projektif boyutuyla ilgili çalışmasına Fitting idealleri kullanarak alternatif bir çözüm üretilmiştir [33]. Sonrasında $F_i(\Omega_1(R \otimes_k S))$

ve $F_i(\Omega_2(R \otimes_k S))$ idealleri terslenebilir idealler cinsinden ifade edilmiştir. Altıncı bölümde, bir modülün simetrik kuvvet modülü tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. Özel olarak, evrensel türev modüllerin ikinci mertebeden simetrik kuvvet modülleri incelenmiş, literatürde var olan sonuçlar verilmiştir. Bu bölümde, $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ evrensel türev modüllerinin projektif olması durumunda $\Omega_1(R \otimes_k S)$ nin projektif olacağı, simetrik kuvvet modüllerini kullanarak ispatlanmıştır. Sonuç olarak R ve S halkalarının regüler olması durumunda $\Omega_1(R \otimes_k S)$ modülünün projektif olacağı belirtilmiştir. Benzer şekilde, $\Omega_2(R \otimes_k S)$ nin serbest modül olmasının hangi durumda mümkün olduğu, evrensel modüllerin simetrik kuvvet modüllerinin özellikleri kullanılarak ispatlanmıştır. Bu tez çalışmasının beşinci ve altıncı bölümlerinde elde ettiğimiz sonuçlar evrensel modüllerin projektif boyutlarının incelenmesinde farklı bir bakış açısı sunmuştur. Yedinci bölüm, tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezimizde geçen çalışmaların ve sonuçların daha iyi anlaşılması için gerekli olan halka, ideal, modül, modüllerin tensör çarpımı gibi temel tanımlar ve bunlarla ilgili temel özellikler verilecektir. Bu bölümde verilen bilgiler Lang [19], Sharp [38], Çallıalp ve Tekir [4] kaynaklarından alınmıştır.

2.1 Halkalar ve İdealler

Tanım 2.1.1. *İki işlemli,* $(R, +, .)$ *cebirsel yapısı verilsin. Her* a, b, c *için*

i) $a + b = b + a$

ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$

iii) $\forall a \in R$ *için* $a + 0_R$ *olacak şekilde* $0_R \in R$ *var,*

iv) $\forall a \in R$ *için* $a + (-a) = 0_R$ *olacak şekilde* $-a \in R$ *var,*

v) $(a.b).c = a.(b.c)$

vi) $a.(b + c) = a.b + a.c$ *ve* $(a + b).c = a.c + b.c$

koşulları sağlanıyorsa R ye bir halka denir.

Tanım 2.1.2. *R değişmeli bir halka olsun. R halkasının I alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa I kümesine R nin bir ideali denir:*

(i) $I \neq \emptyset$

(ii) $\forall a, b \in I$ *için* $a + b \in I$

(iii) $\forall a \in I$ *ve* $\forall r \in R$ *için* $ra \in I$

Örnek 2.1.3. *$n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ olmak üzere $n\mathbb{Z} = \{nr \mid r \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bir idealidir.*

Tanım 2.1.4. *R değişmeli bir halka olsun. I ve J, R halkasının birer ideali olsun. İdeal bölümü $(I : J) = \{a \in R : aJ \subseteq I\}$ ile tanımlanır. Özel olarak $I = 0$ ise $(0 : J) = \{a \in R : aJ = 0\} = \{a \in R : ab = 0, \forall b \in J\}$ kümesi J idealinin sıfırlayanı olarak adlandırılır. $Ann_R J$ ile gösterilir.*

Tanım 2.1.5. *R değişmeli bir halka ve $m \neq R$ olmak üzere m, R' nin bir ideali olsun. $m \subset I \subset R$ durumunda $I = m$ veya $I = R$ oluyorsa m idealine R halkasının bir maksimal ideali denir.*

Lemma 2.1.6. *R değişmeli bir halka olsun. m idealinin maksimal ideal olması için gerek ve yeter koşul R/m bölüm halkasının bir cisim olmasıdır.*

Örnek 2.1.7. *k bir cisim ve $a \in k$ olsun. $L = \{f \in k[X] : f(a) = 0\}$ ile tanımlanan küme $k[X]$ halkasının bir maksimal idealidir.*

Tanım 2.1.8. *R değişmeli bir halka olsun. R halkasının bir tek maksimal ideali varsa R halkasına yerel halka denir. m, R nin maksimal ideali olmak üzere (R, m) ile ifade edilir. m tek maksimal ideal ise R/m cismine kalıntı (rezidü) cismi denir.*

Tanım 2.1.9. *R değişmeli bir halka ve $P \neq R$ olmak üzere P, R halkasının bir ideali olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P idealine R nin bir asal ideali denir.*

Tanım 2.1.10. *R birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka ise R ye tamlık bölgesi denir.*

Lemma 2.1.11. *R değişmeli bir halka olsun. P idealinin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul R/P bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır.*

Örnek 2.1.12. *$\mathbb{Z}[X]$ halkasında $\langle n, X\rangle$ idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul n sayısının asal olmasıdır.*

Çözüm 2.1.13. *$\langle n, X\rangle$ ideali bir asal ideal olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}[X]/\langle n, X\rangle$ bir tamlık bölgesidir. $\mathbb{Z}[X]/\langle n, X\rangle \cong \mathbb{Z}_n$ izomorfizmasından $\mathbb{Z}_n$ bir tamlık bölgesidir. Bu ise n sayısının asal olmasını gerektirir. Tersi de benzer şekilde $\mathbb{Z}[X]/\langle n, X\rangle \cong \mathbb{Z}_n$ izomorfizmasını kullanarak yapılır.*

Tanım 2.1.14. *R ve S değişmeli halkalar olsun. Eğer $f : R \longrightarrow S$ olacak şekilde bir halka homomorfizması varsa S ye R-cebir denir.*

2.2 Modüller

Tanım 2.2.1. *R birimli ve değişmeli bir halka, M bir değişmeli grup olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $f(r, m) = r.m$ şeklinde tanımlanan $f : RxM \to M$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M ye R üzerinde bir R-modül denir:*

(i) $\forall r \in R$ *ve* $\forall m, n \in M$ *için* $r.(m + n) = r.m + r.n$

(ii) $\forall r, s \in R$ *ve* $\forall m \in M$ *için* $(r + s).m = r.m + s.m$

(iii) $\forall r, s \in R$ *ve* $\forall m \in M$ *için* $(rs).m = r.(s.m)$

(iv) $\forall m \in M$ *için* $1_R.m = m$ *dir.*

Örnek 2.2.2. *Her M toplamsal grubu bir $\mathbb{Z}$-modüldür.*

Örnek 2.2.3. *I, R halkasının bir ideali ise I bir R-modüldür.*

Önerme 2.2.4. *R değişmeli bir halka, I, R halkasının bir ideali ve M bir R-modül olsun.*

$$IM = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i : a_i \in I, m_i \in M, i = 1, 2, ...n \Big\}$$

kümesi M nin bir alt modülüdür.

Tanım 2.2.5. *R değişmeli bir halka olsun. Eğer*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

formundaki R-modüllerin dizisi, $Imf = Çekg$ koşulunu sağlıyorsa kısa tam dizi olarak adlandırılır. $Imf = Çekg$ modülü M nin bir direkt toplananı ise bu diziye ayrışan (split) dizi denir.

Örnek 2.2.6. *R değişmeli bir halka olsun. O zaman*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi} M_2 \longrightarrow 0$$

R-modüllerinin dizisi kısa ayrışan tam dizidir.

Tanım 2.2.7. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve $S = \{y_\lambda\}_{\lambda\in I}$ de M nin bir üreteç sistemi olsun. $\forall m \in M$ elemanı, r_λ, y_λ için $m = \sum_{\lambda\in I} r_\lambda y_\lambda$ şeklinde sonlu olarak tek türlü yazılıyorsa S kümesine M nin bir tabanı denir. M modülüne ise serbest modül denir.*

Önerme 2.2.8. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül olsun. M nin sıfırdan farklı bir serbest modül olması için gerek ve yeter şart $\forall\lambda \in I$ için $R = R_\lambda$ iken $M \cong \oplus_{\lambda\in I} R_\lambda = R^I$ olmasıdır.*

Lemma 2.2.9 (Nakayama)**.** *R değişmeli bir halka, M sonlu üretilmiş bir R-modül ve $I \subseteq Jac(R)$ (burada $Jac(R)$ Jacobson radikalini ifade ediyor) olacak şekilde bir ideal olsun. Eğer $M = IM$ ise $M = 0$ dır.*

Tanım 2.2.10. *R değişmeli bir halka ve M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. $0 \neq r \in R$ için $rm = 0$ oluyorsa m elemanına M modülünün bir burulmalı elemanı denir. R değişmeli bir halka olduğunda burulmalı elemanların kümesi bir alt modül oluşturur. Bu alt modüle M nin burulmalı alt modülü denir ve $T(M)$ ile gösterilir. $T(M) = 0$ ise M modülüne serbest burulmalı; $T(M) = M$ ise burulmalı modül denir.*

Önerme 2.2.11. *R bir tamlık bölgesi, M bir R-modül ise $M/T(M)$ serbest burulmalı bir R-modüldür.*

İspat. $M/T(M)$ nin serbest burulmalı olduğunu göstermek için $M/T(M) \subset T(M)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x + T(M) \in M/T(M)$ olsun. Bu durumda $r(x + T(M)) = T(M)$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ vardır. Buradan $rx \in T(M)$ elde edilir. Böylece sıfırdan farklı bir $r' \in R$ için $rr'x = 0$ dır. R bir tamlık bölgesi olduğundan $rr' \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda $x \in T(M)$ elde edilir. Böylece $M/T(M) \subset T(M)$' dir. Sonuç olarak $x + T(M) = T(M)$ olduğundan $M/T(M)$ serbest burulmalı modüldür. □

Tanım 2.2.12. *R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun.*

$$(0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$$

idealine M modülünün sıfırlayanı denir ve $Ann(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.13. *R değişmeli bir halka ve S, R halkasının bir alt kümesi olsun. $1_R \in S$ ve $x, y \in S$ için $xy \in S$ oluyorsa S ye R halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi denir.*

Tanım 2.2.14. *S, R değişmeli halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. $M \times S$ üzerindeki aşağıdaki gibi tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $(m, s), (n, t) \in M \times S$ için*

$$(m, s) \sim (n, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S \text{ öyle ki } u(tm - sn) = 0$$

$(m, s) \in M \times S$ nin belirttiği denklik sınıfına kesir denir ve $\frac{m}{s}$ ile gösterilir. Bu denklik sınıflarının kümesi $S^{-1}M$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.15. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül olsun. $S^{-1}M$ bir $S^{-1}R$-modüldür ($S^{-1}M$ kesir modülü olarak adlandırılır).*

Tanım 2.2.16. *R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun. S çarpımsal kapalı kümesi P asal idealinin tümleyeni olarak alınırsa $S^{-1}M$ kesir modülüne M nin P idealindeki yerelleştirmesi denir ve M_p ile gösterilir.*

2.3 Modüllerin Tensör Çarpımı

Tanım 2.3.1. *R değişmeli bir halka olsun. M ve N birer R-modül ise $M \otimes_R N$ tensor çarpımı aşağıdaki evrensellik özelliğini sağlayan bir R-modül olarak adlandırılır. İlk olarak $f : M \times N \longrightarrow M \otimes N$ ile tanımlanan bir R-bilineer dönüşümü vardır. İkinci olarak, herhangi bir E R-modülü ve $g : M \times N \longrightarrow E$ bilineer dönüşümü için $hf = g$ olacak şekilde tek bir $h : M \otimes N \longrightarrow E$ R-modül homomorfizması vardır ve*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \otimes N \arrow[dl, "\exists ! h"] \\ E & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

$M \otimes_R N$ tensör çarpımının elemanları aşağıdaki özellikleri sağlar:

Tanım 2.3.2. *R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $M \otimes_R N$ tensör çarpımı, $\forall x \in M$ ve $\forall y \in N$ olmak üzere $x \otimes y$ ile üretilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir R-modül olarak tanımlanır:*

(i) $\forall r \in R$ *için* $x \otimes ry = r(x \otimes y)$ *dir.*

(ii) $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$ *dir.*

(iii) $\forall r \in R$ *için* $rx \otimes y = r(x \otimes y)$ *dir.*

(iv) $(x + y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$ *dir*

Örnek 2.3.3. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = 0$ *dır. Çünkü* $a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *için* $5a \equiv a$ *dır. Bu durumda* $b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *olmak üzere* $a \otimes b = 5a \otimes b = a \otimes 5b = a \otimes 0 = 0$ *elde edilir.*

Lemma 2.3.4. *R değişmeli bir halka olsun. Herhangi M, N ve P R-modülleri için aşağıdaki izomorfizmalar sağlanır:*

(a) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$

(b) $M \otimes_R R \cong M$

(c) $(M \oplus N) \otimes_R P \cong (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$

(d) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$

Teorem 2.3.5. *R değişmeli bir halka olsun.*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

R-modüllerin kısa bir tam dizisi ise M bir R-modül olmak üzere

$$M \otimes_R A \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_R B \xrightarrow{1 \otimes g} M \otimes_R C \longrightarrow 0$$

kısa bir tam dizidir.

Tanım 2.3.6. *R değişmeli bir halka ve P bir R-modül olsun. P modülü aşağıdaki denk koşullardan birini sağlarsa P ye projektif modül denir. M ve N birer R-modül olsun.*

(i) *Her* $M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$ *dizisi için* $f\tilde{f} = 1_P$ *olacak şekilde bir* $\tilde{f} : P \longrightarrow M$ *R-modül homomorfizması vardır.*

(ii) *P, bir F serbest R-modülünün direkt toplananıdır.*

(iii) *Her* $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *dizisi ve* $h : P \longrightarrow N$ *R-modül homomorfizması için,* $g\tilde{h} = h$ *olacak şekilde* $\tilde{h} : P \longrightarrow M$ *R-modül homomorfizması vardır. Bu özellik*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\tilde{h}"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramıyla da ifade edilebilir.

Teorem 2.3.7. *R değişmeli bir halka olsun.*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

R-modüllerin kısa bir tam dizisi ise M bir projektif R-modül olmak üzere

$$0 \longrightarrow M \otimes_R A \xrightarrow{1\otimes f} M \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes g} M \otimes_R C \longrightarrow 0$$

kısa bir tam dizidir.

Teorem 2.3.8. *R değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda* $R/I \otimes_R M \cong M/IM$ *izomorfizması vardır.*

Önerme 2.3.9. *R değişmeli bir halka ve S kümesi R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ise* $S^{-1}M \cong S^{-1}R \otimes_R M$ *izomorfizması vardır.*

Teorem 2.3.10. *R değişmeli bir halka ve S kümesi R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun.*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

R-modüllerin kısa bir tam dizisi ise

$$0 \longrightarrow S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}B \longrightarrow S^{-1}C \longrightarrow 0$$

kısa bir tam dizidir.

Teorem 2.3.11. *R değişmeli bir halka olsun. M tabanı $\{e_i\}_{i\in I}$ kümesi olan serbest bir R-modül ve N tabanı $\{e'_j\}_{j\in J}$ kümesi olan serbest R-modül ise $M\otimes_R N$ tabanı $\{e_i\otimes e'_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ olan bir serbest R-modüldür.*

Teorem 2.3.12. *R bir tamlık bölgesi ve K, R nin kesir cismi olsun. M herhangi bir R-modül olmak üzere*

$$K\otimes_R M \cong K\otimes_R (M/T(M))$$

izomorfizması vardır.

Sonuç 2.3.13. *R bir tamlık bölgesi ve K, R nin kesir cismi olsun. M burulmalı bir R-modül ise $K\otimes_R M = 0$ dır. M burulmalı bir R-modül değil ise $K\otimes_R M \neq 0$ dır.*

Teorem 2.3.14. *R değişmeli bir halka ve M ile N birer R-modül olsun. $f(m/s\otimes n/t) = (m\otimes n)/st$ ile tanımlanan tek bir $f : S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}(M\otimes_R N)$ izomorfizması vardır. Özel olarak, P eğer bir asal ideal ise*

$$M_P\otimes_{R_P} N_P \cong (M\otimes_R N)_P$$

şeklindedir.

İspat. Önerme 2.3.9 den dolayı M bir R-modül olmak üzere $S^{-1}M \cong S^{-1}R\otimes_R M$ izomorfizmasının varlığını biliyoruz. Bu özelliği kullanarak

$$S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \cong (M\otimes_R S^{-1}R)\otimes_{S^{-1}R}(N\otimes_R S^{-1}R)$$

izomorfizması elde edilir.

$$\varphi : (M\otimes_R S^{-1}R)\otimes_{S^{-1}R}(N\otimes_R S^{-1}R) \longrightarrow (M\otimes_R N)\otimes_{S^{-1}R}(S^{-1}R\otimes_R S^{-1}R)$$

dönüşümünün $\varphi((m\otimes r)\otimes(n\otimes s)) = (m\otimes n)\otimes(r\otimes s)$ tanımıyla bir izomorfizma olduğu görülür. Lemma 2.3.4 den dolayı

$$(M\otimes_R N)\otimes_{S^{-1}R}(S^{-1}R\otimes_R S^{-1}R) \cong (M\otimes_R N)\otimes_{S^{-1}R}(S^{-1}R)$$

izomorfizması vardır. Önerme 2.3.9 den dolayı

$$(M \otimes_R N) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1}R) \cong S^{-1}(M \otimes_R N)$$

izomorfizması elde edilir. Böylece

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_R N)$$

sonucuna ulaşılır. □

Tanım 2.3.15. *R değişmeli bir halka ve $P_0, P_1, \ldots, P_n$ asal idealler olsun. $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ zincirine, n-uzunluğunda bir asal ideal zinciri denir. R halkasının tüm asal ideal zincirlerinin en küçük üst sınırına R nin (Krull) boyutu denir ve dimR ile gösterilir.*

Teorem 2.3.16. *R değişmeli bir halka olsun. (R, m) yerel bir halka ise $dimR \leq vdim_{R/m} m/m^2$ dir. Burada $vdim_{R/m} m/m^2$, m/m^2 vektör uzayının R/m cismi üzerindeki vektörel boyutunu ifade ediyor.*

Tanım 2.3.17. *R değişmeli bir halka ve (R, m) yerel bir halka olsun. $dimR = vdim_{R/m} m/m^2$ ise R halkasına regüler halka denir.*

Aşağıda yerel regüler halkaya bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.3.18. *$R = k[x_1, ..., x_n]$ polinom halkası ve k, R üzerinde bir cisim olsun. $a_1, \ldots, a_n \in k$ olmak üzere $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ ideali R halkasının, yüksekliği n olan bir asal idealidir ve n eleman tarafından üretilir. Böylece $k[x_1, ..., x_n]_{\langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle}$ boyutu n olan regüler yerel bir halkadır.*

BÖLÜM 3

EVRENSEL MODÜLLER

3.1 Diferansiyel Operatör Modülleri ve Evrensel Diferansiyel Modülleri

Bu kısımda, ilk olarak diferansiyel operatör modülü tanımı ve özellikleri verilecektir. Sonrasında evrensel diferansiyel modül tanımı yapılarak diferansiyel operatör modülüyle arasındaki bağıntı verilecektir. Bu kısımda verilen bilgiler [31] ve [27] den alınmıştır.

Bu tez çalışmasında aksi belirtilmedikçe R birimli ve değişmeli bir halka alınacaktır. R karakteristiği sıfır olan k cismi üzerinde bir k-cebir, M ve N birer R-modül olsun. $Hom_k(M,N) = \{f \mid f : M \longrightarrow N$ k-lineer dönüşüm$\}$ olduğunu varsayalım. $f \in Hom_k(M,N)$ için $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere

$$rf : m \to rf(m) \text{ ve } fr : m \to f(rm)$$

ile tanımlı ikili modül yapısı kurulabilir. $[f,r] \in Hom_k(M,N)$ değişmeli elemanı $[f,r] = fr - rf$ ile tanımlanır.

Tanım 3.1.1. *$D^0(M,N) = \{f \in Hom_k(M,N) : [f,r] = 0 \;\; \forall\, r \in R\}$=$Hom_k(M,N)$ ve $D^{n-1}(M,N)$ tanımlanmış olsun. Bu durumda*

$$D^n_R(M,N) = \{f \in Hom_k(M,N) : [f,r] \in D^{n-1}(M,N), \;\; \forall\, r \in R\}$$

ile tanımlanır. $\forall n \geq 0$ için $D^n(M,N)$ modülüne mertebesi n veya n den küçük olan diferansiyel operatörlerin modülü denir. Mertebesi n veya n den küçük olan f diferansiyel operatörü ve $\forall r_0, r_1, ..., r_n \in R$ için $[...[[[f,r_0],r_1],r_2]...,r_n] = 0$ eşitliği sağlanır.

Tanım 3.1.2. *$D_R(M,N)$, k-lineer diferansiyel operatör uzayı,*
$D_R(M,N) := \bigcup_{n=0}^{\infty} D^n_R(M,N)$ ile tanımlanır.

Şimdi diferansiyel operatör modülleri ile ilgili bir örnek verelim.

Örnek 3.1.3. *$R = k[x, y, z]$ olsun.*

$D^0_R(R, R) = D^0(R) \cong k[x, y, z]$

$D^1(R) = \langle 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$

$D^2(R) = \langle 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \rangle$

$\vdots$

$D^n(R) = \langle 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^n}{\partial y^n}, \frac{\partial^n}{\partial z^n} \rangle$

Lemma 3.1.4. *M, N ve K birer R-modül olsun. $f \in D^n_R(M, N)$ ve $g \in D^n_R(N, K)$ ise $g \circ f \in D^{m+n}_R(M, K)$ dır.*

Önerme 3.1.5. *R ve S birer k-cebir olsun. $R \otimes_k S$ tensör çarpımı, $r_i, k_j \in R$ ve $s_i, l_j \in S$ olmak üzere*

$$(\sum_i r_i \otimes s_i)(\sum_j k_j \otimes l_j) = \sum_{i,j} r_i k_j \otimes s_i l_j$$

çarpımı ile değişmeli bir halkadır.

Önerme 3.1.6. *$f : R \longrightarrow R'$ ve $g : S \longrightarrow S'$ k-cebir homomorfizmaları olsun. Bu durumda $f \otimes g : R \otimes_k S \longrightarrow R' \otimes_k S'$ bir k-cebir homomorfizmasıdır.*

Lemma 3.1.7. *$0 \longrightarrow Çek\theta \longrightarrow R \otimes_k R \xrightarrow{\theta} R \longrightarrow 0$ kısa tam dizisinin çekirdeği $\{1 \otimes r - r \otimes 1 \mid \forall r \in R\}$ kümesi ile üretilir. Burada $\theta(\sum_i r_i \otimes s_i) = \sum_i r_i s_i$ ile tanımlanan bir çarpımsal dönüşümdür.*

Uyarı 3.1.8. *M ve N birer R-modül, $f \in Hom_k(M, N)$ olsun. O zaman $\forall m \in M$ ve $r \in R$ için*

$$\begin{aligned}
[f, r](m) &= f(rm) - rf(m) = fr(m) - rf(m) \\
&= (1 \otimes rf(m) - (r \otimes 1)f(m)) \\
&= (1 \otimes r - r \otimes 1)f(m)
\end{aligned}$$

Böylece $[f, r] = (1 \otimes r - r \otimes 1)f$ dir.

Tanım 3.1.9. *I, $R \otimes_k R$ halkasının $\{1 \otimes r - r \otimes 1 \mid \forall r \in R\}$ kümesi ile üretilen bir ideali ise I^{n+1} ideali $\{\prod_{i=0}^n (1 \otimes r_i - r_i \otimes 1) \mid r_i \in R\}$ kümesi ile üretilen bir idealidir.*

Önerme 3.1.10. *M ve N birer R-modül olsun. $f : M \longrightarrow N$ k-lineer dönüşüm olmak üzere f mertebesi n olan bir diferansiyel operatördür ancak ve ancak $I^{n+1}.f = 0$ olmalıdır.*

Tanım 3.1.11. *M ve N birer R-modül olsun. K herhangi bir R-modül olmak üzere $f : M \longrightarrow K$ bir n. mertebeden diferansiyel operatör olsun. $\triangle_n : M \longrightarrow N$ bir diferansiyel operatör olmak üzere*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_n"'] & K \\ N \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek α R-modül homomorfizması vardır. Bu koşulları sağlayan Δ_n diferansiyel operatörüne evrensel diferansiyel operatör denir.

Teorem 3.1.12. *M bir R-modül olsun.*

$$M \xrightarrow{i} R \otimes_k M \xrightarrow{p} \frac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$$

dizisinde $pi(m) = 1 \otimes m + I^{n+1}(R \otimes_k M)$ birleşimi, mertebesi n olan bir diferansiyel operatördür.

Tanım 3.1.13. *$\dfrac{R \otimes_k M}{I^{n+1}(R \otimes_k M)}$ modülüne M üzerinde n. dereceden evrensel diferansiyel modül denir ve $J_n(M)$ ile gösterilir. Burada M yerine R alınırsa $J_n(R) = \dfrac{R \otimes_k R}{I^{n+1}}$ olarak elde edilir.*

Teorem 3.1.14. *M bir R-modül olsun. $\Delta_n : M \longrightarrow J_n(M)$ olmak üzere $\Delta'_n : M \longrightarrow J'_n(M)$ evrensellik özelliğini sağlıyorsa $\Delta'_n = \alpha\Delta_n$ olacak şekilde bir $\alpha : J_n(M) \longrightarrow J'_n(M)$ R-modül izomorfizması vardır, yani $J_n(M) \cong J'_n(M)$ dir.*

Teorem 3.1.15. *$\delta_n : R/I \longrightarrow J_n(R/I)$ dönüşümü n. mertebeden diferansiyel bir operatör olmak üzere $J_n(R/I)$ modülü $\{\delta_n(x^\alpha + I) : |\alpha| < n\}$ kümesi tarafindan üretilir.*

Örnek 3.1.16. *$R = k[x_1, x_2, ..., x_s]$ polinomlar cebiri ve $\delta_n : R \longrightarrow J_n(R)$ dönüşümü n. mertebeden evrensel diferansiyel operatör olsun. Bu durumda*

$$J_n(R) = \langle \left\{ \delta_n(x^\gamma) : \ x^\gamma = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} ... x_s^{\gamma_s}, \ |\gamma| \le n \right\} \rangle$$

ile üretilen serbest bir R-modüldür.

Aşağıdaki önerme diferansiyel operatör modülleri ile evrensel diferansiyel modülleri arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Önerme 3.1.17. *M ve N birer R-modül olsun. O zaman $\phi : Hom_R(J_n(M), N) \longrightarrow D^n_R(M, N)$ olmak üzere $\alpha \longrightarrow \alpha\Delta_n$ ile tanımlı bir R-modül izomorfizması vardır. Yani $D^n_R(M, N) \cong Hom_R(J_n(M), N)$' dir.*

Sonuç 3.1.18. *$M = N = R$ ise $D^n_R(R) = Hom_R(J_n(R), R)$ sağlanır.*

Teorem 3.1.19. *M bir R-modül olsun. O zaman $\varphi : J_n(M) \longrightarrow J_n(R) \otimes_R M$ dönüşümü $r \otimes sm + I^{n+1}(R \otimes_k M) \longrightarrow (r \otimes s + I^{n+1}) \otimes_R m$ tanımı ile $J_n(M) \cong J_n(R) \otimes_R M$ R-modül izomorfizmasını verir.*

Sonuç 3.1.20. *$\{M_i\}$ ve N birer R-modül olsun.*

(i) $J_n(\oplus M_i) \cong \bigoplus_i J_n(M_i)$ izomorfizması vardır.

(ii) $\{M_i\}$ kümesi sonlu ise $D^n_R(\oplus M_i, N) \cong \bigoplus_i D^n_R(M_i, N)$ özellikleri sağlanır.

Lemma 3.1.21. *R bir tamlık bölgesi, L ise R nin kesir cismi olsun. M nin sonlu üretilmiş R-modül olduğunu varsayalım. Bu durumda M nin serbest modül olması için gerek ve yeter koşul $dim_L(L \otimes_R M) = \mu(M)$ olmasıdır ($\mu(M)$: M yi üreten minimum eleman sayısıdır). $dim_L(L \otimes_R M)$ sayısına M modülünün rankı denir.*

Önerme 3.1.22 ([40])**.** *R s-boyutlu regüler yerel k-cebir ise $J_n(R)$ serbest bir R-modüldür.*

Teorem 3.1.23 ([40])**.** *R regüler afin k-cebir ise $J_n(R)$ projektif R-modüldür.*

İspat. m, R halkasının bir maksimal ideali olsun. Bu durumda R_m regüler yerel k-cebir olur. Önerme 3.1.22 den $J_n(R_m)$ serbest R-modüldür. $J_n(R_m) \cong R_m \otimes_R J_n(R)$ olduğundan $J_n(R)$ serbest modüldür. □

Teorem 3.1.24 ([28])**.** *R afin k-cebir olmak üzere R halkasının regülerliği $J_1(R)$ evrensel diferansiyel modülünün projektifliğine denktir.*

3.2 Türev Modülleri ve Evrensel Türev Modülleri

Bu kısımda, türev modülü ve evrensel türev modülü tanımları verilecek ve aralarındaki ilişkiden bahsedilecektir. Bu kısımda verilen bilgiler [27] ve [31] den alınmıştır.

Tanım 3.2.1. *M bir R-modül olsun. $\{D \in D_R^n(R, M) \mid D(1) = 0\}$ kümesine mertebesi n veya n den küçük olan türevlerin modülü denir ve $Der_R^n(R, M)$ ile gösterilir.*

Önerme 3.2.2. *M bir R-modül olsun. $f : J_n(R) \longrightarrow R$ bir R-modül homomorfizması olmak üzere $p : J_n(R) \longrightarrow$ Çek$f$ örten bir R-modül homomorfizması ise o zaman*

(i) $p\Delta_n$ mertebesi n olan bir diferansiyel operatördür ve $p\Delta_n(1) = 0$ dır.

(ii) $D \in Der_R^n(R, M)$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "D"] \arrow[d, "p\Delta_n"'] & M \\ \text{Çek}f \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan tek bir $\alpha :$ Çek$f \longrightarrow M$ R-modül homomorfizması vardır.

Tanım 3.2.3. *$\Omega_n(R) :=$ Çek$f$ modülüne mertebesi n veya n den küçük olan türevlerin evrensel modülü denir. $p\Delta_n$ dönüşümüne mertebesi n olan evrensel türev operatörü denir ve d_n ile gösterilir. $r \in R$ olmak üzere, $d_n(r) = (1 \otimes r - r \otimes 1) + I^{n+1}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $J_n(R) \cong \Omega_n(R) \oplus R$ izomorfizması vardır.*

Teorem 3.2.4. *R bir k-cebir olsun. $R \otimes_k R \longrightarrow R$ homomorfizmasının çekirdeği I ise $\Omega_n(R) \cong I/I^{n+1}$ R-modül izomorfizması vardır.*

Önerme 3.2.5. *$J_n(R)$ evrensel diferansiyel modülünün projektif olması için gerek ve yeter koşul $\Omega_n(R)$ evrensel türev modülünün projektif olmasıdır.*

İspat. $J_n(R)$ projektif R-modül olsun. O zaman F bir serbest modül olmak üzere, $F = P \oplus J_n(R)$ olacak şekilde bir P modülü vardır. Aynı zamanda $J_n(R) \cong R \oplus \Omega_n(R)$ olduğundan $\Omega_n(R)$, F serbest modülünün direkt toplamıdır. Böylece $\Omega_n(R)$ serbest bir R-modüldür. Tersine, $\Omega_n(R)$ projektif R-modül olsun. Bu durumda F bir serbest modül olmak üzere, $F = Q \oplus \Omega_n(R)$ olacak şekilde bir Q modülü vardır. $J_n(R) \cong R \oplus \Omega_n(R)$ için $F \oplus R = Q \oplus \Omega_n(R) \oplus R$ bir serbest modül olduğundan $J_n(R)$ serbest bir modülün direkt toplamına izomorftur. Böylece $J_n(R)$ projektif R-modüldür. $\square$

Evrensel türev modülü ile türev modülü arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.2.6. *M bir R-modül olsun. $Der_R^n(R, M) \cong Hom_R(\Omega_n(R), M)$ izomorfizması vardır.*

Örnek 3.2.7. *$R = k[x_1, x_2, ..., x_s]$ bir polinom cebiri ve $d_n : R \longrightarrow \Omega_n(R)$ evrensel türev operatörü olmak üzere, $\Omega_n(R)$ evrensel türev modülü*

$$\left\{d_n(x^\alpha) : \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_s^{\alpha_s}, \ 1 \leq |\alpha| \leq n\right\}$$

kümesi ile üretilen bir serbest R-modüldür.

Örnek 3.2.8. *$R = k[x_1, x_2]$ polinom cebiri için $d_3 : R \longrightarrow \Omega_3(R)$ evrensel türev operatörü olmak üzere, $\Omega_3(R)$ evrensel türev modülü*

$$\left\{d_3(x_1), d_3(x_2), d_3(x_1x_2), d_3(x_1^2), d_3(x_2^2), d_3(x_1x_2^2), d_3(x_1^2x_2), d_3(x_1^3), d_3(x_1^3)\right\}$$

kümesi ile üretilen bir serbest R-modüldür.

3.3 Evrensel Diferansiyel ve Evrensel Türev Modüllerin Projektif Boyutları

Bu kısımda, evrensel modüllerin projektif boyutları ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar verilecektir. Bu kısımda verilen bilgiler [27], [31] ve [22] dan alınmıştır. Örnekler üzerinde evrensel modüllerin projektif boyutları incelenecektir.

Tanım 3.3.1. *M bir R-modül ve $X_0, X_1, \ldots, X_n$ projektif R-modüller olsun.*

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tam dizisi M modülünün, uzunluğu n olan projektif çözünürlüğü olarak adlandırılır. Bu şekildeki en küçük n sayısına M nin projektif boyutu denir. M nin projektif boyutu $pd_R(M)$ veya $pd(M)$ ile gösterilir. Eğer M nin böyle bir projektif çözünürlüğü yoksa $pd(M) = \infty$ kabul edilir.

Lemma 3.3.2. *M projektif bir R-modüldür ancak ve ancak $pd(M) = 0$ dır.*

İspat. M projektif bir R-modül olsun. O halde

$$0 \longrightarrow X_0 = M \xrightarrow{i} M \longrightarrow 0$$

tam dizisi M nin bir projektif çözünürlüğüdür, burada i birim dönüşümdür. Böylece $pd(M) = 0$ dır. Tersine $0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ dizisi M nin projektif çözünürlüğü ise $M \cong X_0$ elde edilir. Bu durumda M projektiftir. □

Teorem 3.3.3. *R regüler afin cebir ise $pd(J_n(R)) = 0$ dır.*

Teorem 3.3.4 ([7])**.** *$S = k[x_1, x_2, ..., x_s]/\langle f \rangle$ afin tamlık bölgesi ise $pd(J_n(R)) \leq 1$ dir.*

Örnek 3.3.5. *$R = k[x, y]$ polinomlar cebiri ve I ideali $f = y^3 - x^4$ ile üretilen R nin bir ideali olsun. $S = R/I$ alalım. S afin tamlık bölgesi olup boyutu 1 dir. Sırasıyla $J_1(S)$ ve $J_2(S)$ nin projektif boyutunu bulalım.*

F, tabanı $\{\Delta_1(x), \Delta_1(y), \Delta_1(z)\}$ kümesi olan serbest bir S-modül ve N, $\Delta_1(f)$ elemanı ile üretilen F nin bir alt modülü olsun. $\Delta_1(f) = \Delta_1(y^3 - x^4) = 3y^2\Delta_1(y) - 4x^3\Delta_1(x)$ olup, Teorem 3.1.15 den dolayı $J_1(S) \cong F/N$ dir. Bu durumda $rankN = rankF - rankJ_1(S) = 3 - 2 = 1$ dir. Böylece N serbest bir modüldür. Bu durumda

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} J_1(S) \longrightarrow 0$$

tam dizisi $J_1(S)$ nin serbest çözünürlüğü olup $pdJ_1(S) \leq 1$ dir.

F', tabanı $\{\Delta_2(x), \Delta_2(x^2), \Delta_2(y), \Delta_2(y^2), \Delta_2(xy), \Delta_2(1)\}$ kümesi olan bir serbest S-modül ve N', $\{\Delta_2(f), \Delta_2(xf), \Delta_2(yf)\}$ kümesi tarafından üretilen F' nün bir alt S-modülü olsun.

$$\begin{aligned}
\Delta_2(f) = {} & \Delta_2(y^3 - x^4) = 3y\Delta_2(y^2) - 3y^2\Delta_2(y) - 6x^2\Delta_2(x^2) + 8x^3\Delta_2(x) - 2x^4\Delta_2(1) \\
\Delta_2(xf) = {} & \Delta_2(xy^3 - x^5) = x\Delta_2(y^3) + 3y\Delta_2(xy^2) - 3xy\Delta_2(y^2) - 3y^2\Delta_2(xy) + 3xy^2\Delta_2(y) \\
& -50x^3\Delta_2(x^2) - 25x^5\Delta_2(1) \\
\Delta_2(yf) = {} & \Delta_2(y^4 - yx^4) = 6y^2\Delta_2(y^2) - 6y^3\Delta_2(y) - 6x^2y\Delta_2(x^2) - 3x^3\Delta_2(xy) + 12xy\Delta_2(x) \\
& +9x^4y\Delta_2(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.1.15 den dolayı $J_2(S) \cong F'/N'$ dir. Bu durumda $rankN' =$

$rankF' - rankJ_2(S) = 6 - 3 = 3$ *olup* N' *serbest bir* S*-modüldür. O halde*

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow F' \xrightarrow{\beta} J_2(S) \longrightarrow 0$$

tam dizisi alınabilir. Bu dizi $J_2(S)$ *nin serbest çözünürlüğü olup* $pdJ_2(S) \leq 1$ *dir.*

Örnek 3.3.6. $R = k[x, y]$ *polinomlar cebiri,* I *ise* $f = y^2 - x^5$ *polinomu ile üretilen bir ideal olsun.* $S = R/I$ *alalım.* S *afin tamlık bölgesi olup boyutu* 1 *dir.* $\Omega_1(S)$ *ve* $\Omega_2(S)$ *modüllerinin projektif boyutlarını inceleyelim.*

F *tabanı* $\{d_1(x), d_1(y)\}$ *kümesi olan bir serbest* S*-modül ve* N*,* $\{d_1(f)\}$ *ile üretilen* F *in bir alt modülü olsun.* $\Omega_1(S) \cong F/N$ *olduğundan* $rankN = rankF - rank\Omega_1(S)$ *dir.* $rank\Omega_1(S) = \binom{1+1}{1} - 1 = 1$ *olduğundan* $rankN = 1$ *elde edilir. Böylece* N *serbest bir* S*-modüldür. O halde*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} \Omega_1(S) \longrightarrow 0$$

tam dizisi $\Omega_1(S)$ *nin serbest çözünürlüğü olup* $pd\Omega_1(S) \leq 1$ *dir.*

F' *tabanı* $\{\delta_2(x), \delta_2(y), \delta_2(x^2), \delta_2(xy), \delta_2(y^2)\}$ *kümesi olan bir serbest* S*-modül ve* N $\{\delta_2(f), \delta_2(xf), \delta_2(yf)\}$ *ile üretilen* F' *nün bir alt modülü olsun.* $\Omega_2(S) \cong F'/N'$ *olduğundan* $rankN' = rankF' - rank\Omega_2(S) = 5 - 2 = 3$ *elde edilir. Böylece* N' *serbest bir* S*-modüldür. O halde*

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow F' \xrightarrow{\alpha} \Omega_2(S) \longrightarrow 0$$

tam dizisi $\Omega_2(S)$ *nin serbest çözünürlüğü olup* $pd\Omega_2(S) \leq 1$ *dir.*

3.4 $R \otimes_k S$ Halkası Üzerindeki Evrensel Türev Modüller

Bu kısımda, $R \otimes_k S$ halkası üzerindeki evrensel türev modülleriyle ilgili temel özellik, teorem ve ispatlar verilecektir.

Önerme 3.4.1 ([29]). *R ve S afin k-cebir olsun. I, R halkasının bir ideali ve J, S nin bir ideali olsun.* $R \longrightarrow R/I$ *ve* $S \longrightarrow S/J$ *doğal k-cebir homomorfizmaları olmak üzere* $R \otimes_k S \longrightarrow R/I \otimes_k S/J$ *örten k-cebir homomorfizmasıdır.*

Önerme 3.4.2 ([29]). *R ve S afin k-cebir olsun. I, R halkasının bir ideali ve J, S nin bir ideali olmak üzere*

$$\frac{R \otimes_k S}{I \otimes_k S + R \otimes_k J} \cong R/I \otimes_k S/J$$

izomorfizması vardır.

Teorem 3.4.3 ([28]). *R ve S afin k-cebirler olsun. I, R nin bir ideali ve $\delta_n : R \longrightarrow \Omega_n(R)$ n. mertebeden türev operatörü olsun. N ise $\Omega_n(R)$ nin $x \in I$ olmak üzere $\delta_n(x)$ formundaki elemanlarla üretilen bir alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdaki dizi kısa tam dizidir:*

$$0 \longrightarrow \frac{N + I\Omega_n(R)}{I\Omega_n(R)} \longrightarrow \frac{\Omega_n(R)}{I\Omega_n(R)} \longrightarrow \Omega_1(R/I) \longrightarrow 0$$

Önerme 3.4.4 ([32]). *R ve S afin k-cebirler olsun. I, R nin bir ideali ve J, S nin bir ideali olsun.*

$$0 \longrightarrow \text{Çek}\theta \longrightarrow \Omega_n(R \otimes_k S) \xrightarrow{\theta} \Omega_n(R/I \otimes_k S/J) \longrightarrow 0$$

dizisi $R \otimes_k S$ modüllerinin kısa bir tam dizisidir.

Teorem 3.4.5 ([32]). *R ve S afin k-cebirler olsun. I, R nin bir ideali ve J, S nin bir ideali ve $K = I \otimes_k S + R \otimes_k J$ olsun. N, $\Omega_n(R \otimes_k S)$ nin $x \in K$ olmak üzere $\delta_n(x)$ formundaki elemanlarla üretilen bir alt modülü olsun.*

$$0 \longrightarrow \frac{N + K\Omega_n(R \otimes_k S)}{K\Omega_n(R \otimes_k S)} \longrightarrow \frac{\Omega_n(R \otimes_k S)}{K\Omega_n(R \otimes_k S)} \longrightarrow \Omega_1(R \otimes_k S/K) \longrightarrow 0$$

dizisi $\frac{R\otimes_k S}{K}$-modüllerin bir tam dizisidir.

İspat. Teorem 3.4.3 deki kısa tam dizide R yerine $R \otimes_k S$ ve I yerine K alınırsa istenen dizi elde edilir. □

Önerme 3.4.6 ([32]). *$R = k[x_1, \ldots, x_s]$ ve $S = k[y_1, \ldots, y_t]$ polinom cebirleri olsun. I, R nin $\{f_1, \ldots, f_k\}$ kümesi ile üretilen bir ideali; J, S nin $\{g_1, \ldots, g_l\}$ kümesi ile üretilen bir ideali olsun. $K = I \otimes_k S + R \otimes_k J$ olmak üzere K,*

$$\{f_i \otimes 1, 1 \otimes g_j \ : \ f_i \in I, g_j \in J, \}$$

kümesi ile üretilir.

Önerme 3.4.7 ([32]). *$R = k[x_1, \ldots, x_s]$ ve $S = k[y_1, \ldots, y_t]$ polinom cebirleri olsun. I, R nin $\{f_1, \ldots, f_k\}$ kümesi ile üretilen bir ideali; J, S nin $\{g_1, \ldots, g_l\}$ kümesi ile üretilen bir ideali olsun. $K = I \otimes_k S + R \otimes_k J$ ve L,*

$$\{\delta_n(x^\alpha f_i \otimes y^\beta), \delta_n(x^\mu \otimes y^\gamma g_j) \mid 1 \leq \alpha + \beta < n,\ 1 \leq \gamma + \mu < n\}$$

kümesi ile üretilen $\Omega_n(R \otimes_k S)$ nin bir alt modülü ise aşağıdaki kapsama sağlanır:

$$(R \otimes_k S)\delta_n(K) \subseteq L + K\Omega_n(R \otimes_k S)$$

Sonuç 3.4.8 ([32]). *$\delta_n : R\otimes_k S \longrightarrow \Omega_n(R\otimes_k S)$ ve $d_n : \frac{R\otimes_k S}{K} \longrightarrow \Omega_n(\frac{R\otimes_k S}{K})$ n. mertebeden evrensel türev operatörleri olsun. O zaman $\Omega_n(\frac{R\otimes_k S}{K})$ modülü*

$$\{d_n(x^\alpha \otimes y^\beta + K)\ :\ 1 \leq |\alpha| + |\beta| \leq n\}$$

kümesi ile üretilir.

Teorem 3.4.9 ([32]). *R ve S afin k-cebirler olsun. I, R nin bir ideali ve J, S nin bir ideali ve $K = I\otimes_k S + R\otimes_k J$ olsun. N, $\Omega_n(R\otimes_k S)$ nin $x \in K$ olmak üzere $\delta_n(x)$ formundaki elemanlarla üretilen bir alt modülü olsun. Burada $\delta_n : R \otimes_k S \longrightarrow \Omega_n(R \otimes_k S)$ şeklinde n. mertebeden türev operatörüdür. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*

(i) $pd(\frac{N+K\Omega_n(R\otimes_k S)}{K\Omega_n(R\otimes_k S)}) < \infty$ ancak ve ancak $pd(\Omega_n(\frac{R\otimes_k S}{K})) < \infty$

(ii) $pd(\frac{N+K\Omega_n(R\otimes_k S)}{K\Omega_n(R\otimes_k S)}) = \infty$ ancak ve ancak $pd(\Omega_n(\frac{R\otimes_k S}{K})) = \infty$

Teorem 3.4.10 ([28]). *R ve S k-cebir olsun. O zaman*

$$\Omega_n(R \otimes_k S) \cong (\Omega_n(R) \otimes_k S) \oplus (\Omega_n(S) \otimes_k R) \oplus U$$

$R \otimes_k S$-modül izomorfizması vardır. Burada U evrensellik özelliğini sağlayan $\Omega_n(R \otimes_k S)$' nin bir alt modülüdür. Özel olarak $n = 1$ için

$$\Omega_1(R \otimes_k S) \cong (\Omega_1(R) \otimes_k S) \oplus (\Omega_1(S) \otimes_k R)$$

izomorfizması vardır.

Lemma 3.4.11 ([33]). *R ve S k-cebirler olsun. $\delta_1 : R \longrightarrow M$ r. mertebeden diferansiyel operatör ve $\delta_2 : S \longrightarrow N$ s. mertebeden diferansiyel operatörler olsun. Bu durumda $\delta_1 \otimes_k \delta_2$ dönüşümü $(r+s)$. mertebeden diferansiyel operatörlerdir.*

İspat. $\delta_1 \in Der_k^n(R, M)$ ve $\delta_2 \in Der_k^s(S, N)$ diferansiyel operatörler olsun. O zaman

$$\delta_1 \otimes_k 1_S : R \otimes_k S \longrightarrow (R \otimes_R M) \otimes_k S$$

dönüşümü r. mertebeden diferansiyel operatördür. Benzer şekilde,

$$1_{R\otimes_R M} \otimes_k \delta_2 : (R \otimes_R M) \otimes_k S \longrightarrow (R \otimes_R M) \otimes_k (S \otimes_S N)$$

dönüşümü s. mertebeden diferansiyel operatördür. Bu diferansiyel operatörlerin birleşimini alırsak:

$$\delta_1 \otimes_k \delta_2 : R \otimes_k S \longrightarrow (R \otimes_R M) \otimes_k S \longrightarrow (R \otimes_R M) \otimes_k (S \otimes_S N)$$

dönüşümü $(r+s)$. mertebeden diferansiyel operatördür. □

Teorem 3.4.12 ([33]). *R ve S $k-$cebir olsun. O zaman*

$$0 \longrightarrow \c{C}ek\theta \longrightarrow \Omega_2(R \otimes_k S) \xrightarrow{\theta} \Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S) \longrightarrow 0 \tag{3.4.0.1}$$

ayrışan kısa tam dizisi vardır ve $\c{C}ek\theta \cong (\Omega_2(R) \otimes_k S) \oplus (R \otimes_k \Omega_2(S))$ olur.

İspat. $\delta_1 : R \longrightarrow \Omega_1(R)$ ve $\delta_1' : S \longrightarrow \Omega_1(S)$ 1. mertebeden evrensel türev operatörleri olmak üzere $\delta(r \otimes_k s) = \delta_1(r) \otimes_k \delta_1'(s)$ ile tanımlı $\delta : R \otimes_k S \longrightarrow \Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)$ dönüşümünü düşünelim. Önteorem 3.4.11 den δ ikinci mertebeden türev operatördür. Böylece $\Omega_2(R \otimes_k S)$ türev modülünün evrensellik özelliği kullanılarak aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_k S \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta_2"'] & \Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S) \\
\Omega_2(R \otimes_k S) \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Diyagramdan $(\theta\delta_2)(r\otimes s) = \delta(r\otimes s) = \delta_1(r)\otimes_k \delta_1'(s)$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten dolayı θ örtendir. Bu durumda

$$0 \longrightarrow \text{Çek}\theta \longrightarrow \Omega_2(R\otimes_k S) \longrightarrow \Omega_1(R)\otimes_k \Omega_1(S) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi yazılabilir. $f_R(r) = r\otimes 1$ ile tanımlanan $f_R : R \longrightarrow R\otimes_k S$ doğal homomorfizmasıyla $R\otimes_k S$ halkası bir R-cebirdir. Benzer şekilde, $f_S(s) = 1\otimes s$ ile tanımlanan $f_S : S \longrightarrow R\otimes_k S$ doğal homomorfizmasıyla $R\otimes_k S$ halkası bir S-cebirdir. δ dönüşümü, $R\otimes_k S$ modülünün ikinci mertebeden türev operatörü olduğundan $\delta(f_R(r)) = 0$ ve $\delta(f_S(s)) = 0$ dır. Böylece $\text{Çek}\theta \cong \Omega_2(R)\otimes_k S \oplus R\otimes\Omega_2(S)$ dir.
Şimdi (3.4.0.1) dizisinin ayrışan dizi olduğunu gösterelim.
$\delta : R\otimes_k S \longrightarrow \Omega_2(R\otimes_k S)$ ikinci mertebeden bir türev operatörü olsun.
$\delta_1 : R \longrightarrow \Omega_2(R)$ ve $\delta_2 : S \longrightarrow \Omega_2(S)$ sırasıyla R ve S nin ikinci mertebeden türev operatörleri olsun.
$f_R : R \longrightarrow R\otimes_k S$, $f_R(r) = r\otimes 1$ ve $f_S : S \longrightarrow R\otimes_k S$, $f_S(s) = s\otimes 1$ sırasıyla R ve S nin doğal homomorfizmaları olsun. O zaman $\Phi_R(\delta_1\otimes s) = (1\otimes s)\delta(r\otimes 1)$ ile tanımlı

$$\Phi_R : \Omega_2(R)\otimes_k S \longrightarrow \Omega_2(R\otimes_k S)$$

homomorfizması ve $\Phi_S(r\otimes\delta_1) = (r\otimes 1)\delta(1\otimes s)$ ile tanımlı

$$\Phi_S : R\otimes_k \Omega_2(S) \longrightarrow \Omega_2(R\otimes_k S)$$

homomorfizması vardır. Aşağıdaki dönüşümleri düşünelim.

$$D_1 : R\otimes_k S \longrightarrow \Omega_2(R)\otimes_k S$$

$$D_1(r\otimes s) = \delta_1\otimes s$$

$$D_2 : R\otimes_k S \longrightarrow R\otimes_k \Omega_2(S)$$

$$D_2(r\otimes s) = r\otimes\delta_2$$

D_1 ve D_2 ikinci mertebeden türev operatörleridir. Böylece, $\Omega_2(R\otimes_k S)$ modülünün evrensellik özelliği kullanılarak

$$\begin{tikzcd} R \otimes_k S \arrow[r, "D_1"] \arrow[d, "\delta"'] & \Omega_2(R) \otimes_k S \\ \Omega_2(R \otimes_k S) \arrow[ur, "\alpha_R"'] & \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} R \otimes_k S \arrow[r, "D_2"] \arrow[d, "\delta"'] & R \otimes_k \Omega_2(S) \\ \Omega_2(R \otimes_k S) \arrow[ur, "\alpha_S"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramlarını değişmeli yapan

$$\alpha_r : \Omega_2(R \otimes_k S) \longrightarrow \Omega_2(R) \otimes_k S) \text{ ve } \alpha_s : \Omega_2(R \otimes_k S) \longrightarrow R \otimes_k \Omega_2(S)$$

modül homomorfizmaları elde edilir. Bu diyagramlardan
$\alpha_R\delta(r \otimes s) = D_1(r \otimes s) = \delta_1(r) \otimes s$ ve $\alpha_S\delta(r \otimes s) = D_2(r \otimes s) = r \otimes \delta_2(s)$ elde edilir. Bu eşitliklerden yararlanarak
$\alpha_R\Phi_R = 1_{\Omega_2(R)\otimes_k S}$, $\alpha_R\Phi_R = 0$, $\alpha_S\Phi_S = 1_{R\otimes_k\Omega_2(S)}$ ve $\alpha_S\Phi_R = 0$ bulunur. Böylece (3.4.0.1) dizisi ayrışan dizidir. □

Sonuç 3.4.13 ([33]). *R ve S afin k-cebir olsun. $\Omega_2(R)$ projektif boyutu sonlu ve S regüler bir halka ise $\Omega_2(R \otimes_k S)$ modülünün projektif boyutu sonludur.*

İspat. S afin bir k-cebir olduğundan $\forall n$ için $J_n(S)$ bir projektif S-modüldür. Dolayısıyla $\Omega_n(S)$ projektif bir S-modüldür (Önerme 3.2.5). Böylece $pd\Omega_1(S) = 0$ ve $pd\Omega_2(S) = 0$ dır. Teorem 3.4.12 den aşağıdaki izomorfizma vardır:

$$\Omega_2(R \otimes_k S) \cong (\Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)) \oplus (\Omega_2(R) \otimes_k S) \oplus (R \otimes_k \Omega_2(S))$$

Bu izomorfizmadan yararlanarak $\Omega_2(R \otimes_k S)$ modülünün projektif boyutu sonludur. □

Teorem 3.4.14 ([33]). *$R = k[x_1, \ldots, x_s]$ ve $S = k[y_1, \ldots, y_t]$ polinomlar cebiri, I ideali $f_1, \ldots, f_m$ polinomları ile üretilen R nin bir ideali olsun. R/I boyutu $s - m$ olan k-cebir ve $pd\Omega_2(R/I) \leq 1$ ise $pd\Omega_2(R/I \otimes_k S) \leq 1$ dir.*

İspat. $R/I = k[x_1,\ldots,x_s]/\langle f_1,\ldots f_m\rangle$ boyutu $s-m$ olan afin k-cebir ve $S = k[y_1,\ldots,y_t]$ polinom cebiri olsun. Varsayalım ki $pd\Omega_2(R/I) \leq 1$ olsun. F, $\{d_2(x^\alpha) : 1 \leq |\alpha| \leq 2\}$ kümesi ile üretilen serbest R/I- modül ve N, $\{d_2(x^\alpha fi) : 1 \leq |\alpha| \leq 2, i = 1,\ldots,m\}$ kümesi ile üretilen F nin bir alt modülü olsun. $\Omega_2(R/I) \cong F/N$ olduğu için

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \Omega_2(R/I) \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Burada

$$rankF = \binom{2+s}{s} - 1 = \frac{(s+2)!}{s!2!} - 1 = \frac{s^2+3s}{2}$$

$$rank\Omega_2(R/I) = \binom{2+s-m}{s-m} - 1 = \frac{(2+s-m)!}{(s-m)!2!} - 1 = \frac{s^2+m^2-2sm+3s-3m}{2}$$

$$rankN = rankF - rank\Omega_2(R/I) = \frac{s^2+3s}{2} - \frac{s^2+m^2-2sm+3s-3m}{2} = \frac{2sm+3m-m^2}{2}$$

bulunur. $pd\Omega_2(R/I) \leq 1$ kabulümüzden, N rankı $\dfrac{2sm+3m-m^2}{2}$ olan serbest bir R/I-modüldür.

$$R/I \otimes_k S \cong \frac{k[x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t]}{\langle f_1,\ldots,f_m\rangle}$$

izomorfizmasını kullanarak $\Omega_2(R/I \otimes_k S)$ için benzer işlemleri yapalım. Serbest bir F' alt modülü ve N' modülü için $\Omega_2(R/I \otimes_k S) \cong F'/N'$ izomorfizması vardır.

$$rankF' = \binom{2+s+t}{s+t} = \frac{(s+t+2)!}{(s+t)!2!} - 1 = \frac{s^2+t^2+2st+3s+3t}{2}$$

$$rank\Omega_2(R/I\otimes_k S) = \binom{2+s+t-m}{s+t-m} - 1 = \frac{s^2+t^2+m^2-2sm-2tm+2ts+3s+3t-3m}{2}$$

$$rankN' = rankF' - rank\Omega_2(R/I \otimes_k S) = \frac{2sm+3m-m^2}{2} + tm$$

elde edilir. Varsayalım ki $N' = N + K$ olsun. N serbest bir modül olduğundan K' nın serbest modül olduğunu göstermek yeterlidir. K' nın üreteçlerinin kümesi

$$\{d_2(y^\beta) : 1 \leq |\beta| \leq 2, i = 1,\ldots,m\}$$

ile verilir. Bu küme lineer bağımlı olsaydı, N' modülünün rankı üreteç sayısından daha büyük olurdu. Bu durum bir modülün rankının, daima üreteç kümesinin eleman sayısından küçük veya eşit olmasıyla çelişir. O zaman bu küme lineer bağımsız olmalıdı. Böylece K serbest bir modüldür. Dolayısıyla N' serbest bir modül olup $pd\Omega_2(R/I \otimes_k S) \leq 1$ dir. $\square$

Örnek 3.4.15. *$R = k[x,y]$ ve $S = k[u,v]$ polinomlar cebiri, $I = \langle y^2 - x^3 \rangle$, R nin bir ideali olsun. R/I afin bölgesi olup boyutu 1 dir. $\Omega_2(R/I \otimes_k S)$ modülünün projektif boyutunu bulalım.*

F modülü tabanı $\{d_2(x), d_2(y), d_2(x^2), d_2(y^2), d_2(xy)\}$ kümesi olan bir serbest R/I-modül olsun. N, $\{d_2(f), d_2(xf), d_2(yf)\}$ kümesi ile üretilen F in bir alt modülü olsun.

$$\begin{aligned}
d_2(f) &= d_2(y^2) - 3xd_2(x^2) + 3x^2d_2(x)\\
d_2(xf) &= xd_2(y^2) - 6x^2d_2(x^2) + 2yd_2(y) + 7x^3d_2(x) - 2xyd_2(y)\\
d_2(yf) &= 3yd_2(y^2) - 3xyd_2(x^2) - 3x^2d_2(xy) + 6x^2yd_2(x) - y^2d_2(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\Omega_2(R/I) \cong F/N$ olduğundan

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \Omega_2(R/I) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. $rank\Omega_2(R/I) = 2$ olduğu için $rankN = rankF - rank\Omega_2(R/I) = 5 - 2 = 3$ olur. $rankN = \mu(N) = 3$ olduğundan N serbest bir R/I-modüldür. Böylece $pd\Omega_2(R/I) \leq 1$ elde edilir. Teorem 3.4.14 den dolayı $pd\Omega_2(R/I \otimes_k S) \leq 1$ olur.

BÖLÜM 4

FİTTİNG İDEALLER

Bu bölümde Fitting ideallerle ilgili temel tanım, teorem ve özellikler verilecektir. Bu bölümde [9], [20], [3] [18] ve [31] den yararlanılmıştır.

4.1 Fitting İdeal Tanımı ve Özellikleri

R birimli ve değişmeli bir halka olsun. M, $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ tarafından üretilen bir R-modül olsun. Bu durumda

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

şeklinde R-modüllerin bir tam dizisi oluşur. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kümesi R^n nin bir standart tabanı olmak üzere, $f(e_i) = m_i$ örten bir homomorfizmadır. $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $K := \c{C}ekf$ kümesini üreten elemanlar ve $v_\lambda = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, \ldots, x_n^\lambda) \in R^n$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_n^1 \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrise M modülünün $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ üreteç sistemine göre bağıntı matrisi denir. Bu matriste $(n-i)\times(n-i)$ tipindeki alt matrislerin determinantının ürettiği ideale, M R-modülünün i. Fitting ideali denir. M nin i. Fitting ideali $F_i(M)$ ile gösterilir. $i \geq n$ ise $F_i(M) = R$ kabul edilir. Şimdi Fitting ideallere birkaç örnek verelim.

Örnek 4.1.1. *$R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olsun. M sonlu üretilmiş bir $\mathbb{Z}$-modüldür. M nin bir üretecini $\beta = \left\{\beta_1 = (\overline{0}, \overline{1}), \beta_2 = (\overline{1}, \overline{0})\right\}$ olarak alalım. O zaman*

$$0 \longrightarrow \c{C}ekf \longrightarrow R^2 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. $f(r_1e_1 + r_2e_2) = r_1m_1 + r_2m_2$ *olarak tanımlanır. Çek* f*' nin bir tabanı* $\alpha = \{2e_1, 2e_2\}$ *alınırsa*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{Z})$$

$F_0(M) = 4\mathbb{Z}$, $F_1(M) = 2\mathbb{Z}$, $F_2(M) = \mathbb{Z}$ olarak hesaplanır.

Örnek 4.1.2. *p bir asal sayı olmak üzere,* $M = \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(p^3)$ *ve* $N = \mathbb{Z}/(p^2) \oplus \mathbb{Z}/(p^2)$ $\mathbb{Z}$*-modüllerinin Fitting ideallerini inceleyelim.* M *nin bağıntı matrisi*

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^3 \end{pmatrix}$$

N *nin bağıntı matrisi*

$$B = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

olarak alınabilir. Buna göre $F_0(M) = (p^4) = F_0(N)$*,* $F_1(M) = (p)$*,* $F_1(N) = (p^2)$*,* $F_2(M) = \mathbb{Z} = F_2(N)$ *elde edilir. Bu örnekte Fitting idealler, üreteç sayıları aynı olan farklı modüllerin olduğunu gösterir.*

Örnek 4.1.3. *p bir asal sayı olmak üzere,* $M = \mathbb{Z}/(p^2)$ *ve* $N = \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(p)$*,* $\mathbb{Z}$*-modüllerinin Fitting ideallerini inceleyelim.* $F_0(M) = (p^2)$*,* $F_1(M) = \mathbb{Z}$ *ve* $F_0(N) = (p^2)$*,* $F_1(N) = (p)$*,* $F_2(N) = \mathbb{Z}$ *olur. Bu örnekte ise modüllerin Fitting ideallerine bakılarak mertebeleri aynı olan farklı modüllerin olduğu görülür.*

Lemma 4.1.4. *M bir R-modül ve* $M = \langle\{m_1, m_2, ..., m_n\}\rangle$ *olsun. Aşağıdakiler sağlanır:*

(a) $F_i(M)$ *ideali* $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ *üreteç sisteminin seçiminden bağımsızdır.*

(b) $F_i(M)$ *bağıntı matrisinin seçiminden bağımsızdır.*

İspat. *a*) Herhangi bir $m \in M$ için $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ ile $\{m_1, m_2, \ldots, m_n, m\}$ üreteç sistemleri yer değiştirdiğinde $F_i(M)$ nın değişmeyeceğini göstermek yeterlidir. $F_i(A)$, M nin A bağıntı matrisine göre Fitting ideallerini; $F_i(B)$, M nin B bağıntı matrisine göre

Fitting ideallerini göstersin. $m = r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_nm_n$ $(r_i \in R)$ yazalım ve

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow R^{n+1} \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

M nin $\{m_1, m_2, \ldots, m_n, m\}$ ile bir gösterimi olsun. $K^{'}$ kümesinin üreteç kümesi

$$\begin{aligned} v &:= (-r_1, -r_2, \ldots, -r_n, 1) \\ \overline{v_\lambda} &:= (x_1^\lambda, x_2^\lambda, \ldots, x_n^\lambda, 0) \quad (\lambda \in \Lambda) \end{aligned}$$

ile verilir. B bu satırların matrisi olsun. $F_n(B) = (1) = F_n(A)$ olduğu kolayca görülür. $i = 0, 1, \ldots, n-1$ için B nin $(n+1-i)$ satırlı alt determinantları; ya $A = (x_\lambda^i)$ orjinal bağıntı matrisinin $(n+1-i)$ satırlı alt determinantlarıdır; ya da v elemanından gelen bir satır içerirler. İkinci durumda, alt determinantlar $F_i(A)$ nın elemanlarının lineer kombinasyonu olduğundan, A nın herhangi $(n-i)$ satırlı alt determinantı yeni matrisin $(n+1-i)$ satırlı alt determinantıdır. Böylece yeni bağıntı matrisi aynı idealleri tanımlar.

□

İspat. *b)* $v' = (y_v^1, y_v^2, \ldots, y_v^n) \in R^n$ olmak üzere $\{v'\}_{v\in\mathbb{N}}$, K nın başka bir üreteç kümesi olsun. $B := (y_v^k)$ bağıntı matrisinin $\Delta(v_1, v_2, \ldots, v_{n-i}; k_1, k_2, \ldots, k_{n-i})$ alt determinantını düşünelim burada $v \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-i}\}$ ve $k \in \{k_1, k_2, \ldots, k_{n-i}\}$' dir. Sadece sonlu sayıda $r_j^\lambda \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$v^{'}_{v_j} = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_j^\lambda v_\lambda, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-i, r_j^\lambda \in R)$$

Bu bağıntıda sadece sonlu sayıda v_λ oluşur. Böylece, $\Delta(v_1, v_2, \ldots, v_{n-i}, k_1, k_2, \ldots, k_{n-i})$ A nın $(n-i)$ satırlı alt determinantlarının bir lineer kombinasyonudur, bu durumda bu determinant $F_i(A)$ da içerilir.

$F_i(B)$, B nin $(n-i)$ satırlı minörleri tarafından üretilen bir ideal ise $F_i(B) \subset F_i(A)$ olur. Simetriden dolayı $F_i(A) = F_i(B)$ elde edilir. □

Önerme 4.1.5. *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(a) M nin Fitting idealleri artan bir ideal zinciri oluşturur. Yani M nin Fitting idealleri arasında aşağıdaki sıralama vardır:
$F_0(M) \subseteq F_1(M) \subseteq \cdots \subseteq F_i(M) \subseteq \cdots$ ve her $i \geq \mu(M)$ için $F_i(M) = R$ dir.

(b) M sonlu gösterime sahipse, $i \in \mathbb{N}$ için $F_i(M)$ sonlu üretilmiş idealdir.

(c) $\alpha : M \rightarrow M'$ bir $R-$ modül ise $F_i(M) \subseteq F_i(M')$ $(i \in \mathbb{N})$ dir.

(d) M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. Her S/R cebiri için $F_i(S \otimes_R M) = S.F_i(M)$ $(i \in \mathbb{N})$ dir.

(e) $S \subset R$ çarpımsal kapalı bir alt küme olmak üzere $F_i(S^{-1}M) = F_i(M)S^{-1}R$ $(i \in \mathbb{N})$ dir.

(f) I, R' nin bir ideali olmak üzere $F_i(M/IM) = \overline{F_i(M)}$ $(i \in \mathbb{N})$ dir. Buradaki $\overline{F_i(M)}$; $F_i(M)$ idealinin R/I daki görüntüsüdür.

İspat. (a), (b) ve (c) Fitting ideallerin tanımından açıktır.

(d) S bir R-cebir olduğu için $g : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması vardır. M sonlu üretilmiş bir R-modül olduğu için M modülünün $\beta = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ biçiminde bir tabanı vardır. Bu durumda

$$0 \longrightarrow K = \text{Çek} f \xrightarrow{h} R^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0 \tag{4.1.0.1}$$

tam dizisi oluşur ve $\forall j = 1, 2, ..., n$ için $f(e_j) = m_j$ dir. $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$, K nın bir tabanı olsun. $\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_j$ olarak yazılabilir. (4.1.0.1) dizisinin S modülü ile tensör çarpımından

$$K \otimes_R S \xrightarrow{h \otimes 1} R^n \otimes_R S \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_R S \longrightarrow 0$$

şeklinde S-modüllerin bir tam dizisi elde edilir. Ayrıca $R^n \otimes_R S \cong S^n$ izomorfizması vardır. Bu dizi bir tam dizi olduğundan $Im(h \otimes 1) = \text{Çek}(f \otimes 1)$ dir. $Im(h \otimes 1)$ kümesi, $\{(h \otimes 1)(\alpha_1 \otimes 1), ..., (h \otimes 1)(\alpha_m \otimes 1)\}$ kümesi tarafından üretilir. $(h \otimes 1)(\alpha_1 \otimes 1)$ elemanı $R^n \otimes_R S \cong S^n$ izomorfizması altında $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} g(c_{ij}) e_j^t$ elemanına gider.

Böylece $M \otimes_R S$ modülünün bir gösterimi elde edilir. Bu durumda aşağıdaki eşitlik

$$F_i(M \otimes_R S) = S F_i(M) \text{ elde edilir.}$$

(e) S kümesi R halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi olmak üzere, $M \otimes_R S^{-1}R \cong S^{-1}M$ izomorfizması ve (d)' deki özellik kullanılarak

$F_i(S^{-1}M) = F_i(M \otimes_R S^{-1}R) = F_i(M)S^{-1}R$ eşitliği elde edilir. Özel olarak, P ideali R halkasının bir asal ideali olmak üzere,

$$F_i(M_P) = F_i(M)_P \text{ dir.}$$

(f) I, R nin bir ideali olsun. $M/IM \cong R/I \otimes_R M$ izomorfizması ve (d) şıkkı kullanılarak $F_i(M/IM) = F_i(R/I \otimes_R M) = R/I.F_i(M) = \overline{F_i(M)}$ eşitliği elde edilir. □

Teorem 4.1.6. *M bir R-modül ve R bir temel ideal bölgesi ise $M \cong R/\langle e_1\rangle \oplus R/\langle e_2\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle e_s\rangle \oplus R^r$ dir, burada $e_i \in R\backslash\{0\}$ tersinir olmayan elemanlar ve $\forall i = 1, 2, \ldots, s-1$ için $e_i \mid e_{i+1}$ dir. Buradan*

$$F_i(M) = \begin{cases} (0), & i = 0, 1, \ldots, r-1 \text{ ise} \\ \langle e_1 \ldots . e_j\rangle, & i = r+s-j \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \text{ ise} \\ R, & i \geq r+s = \mu(M) \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Önerme 4.1.7. *M rankı r olan bir R-modül olsun. Buna göre $\forall\ i = 0, 1, \ldots, r-1$ için $F_i(M) = 0$ ve $i \geq r$ için $F_i(M) \neq 0$' dır.*

İspat. Özellik (d) den dolayı $Q(R)$, R halkasının kesir cismi olmak üzere $\forall i \in \mathbb{N}$ için $F_i(Q(R) \otimes_R M) = Q(R).F_i(M)$, olduğunu biliyoruz. $Q(R) \otimes_R M$, rankı r olan serbest bir $Q(R)$-modül olduğundan $i = 0, 1, \ldots, r-1$ için $F_i(Q(R) \otimes_R M) = 0$ ve $i \geq r$ için $F_i(Q(R) \otimes_R M) = Q(R)$ elde edilir. $R \to Q(R)$ birebir bir halka homomorfizması olduğundan $F_i(M) \neq 0$' dır. □

Önerme 4.1.8. *(R, m) yerel bir halka olsun. O zaman $\mu(M) = min\{n \mid F_n(M) = R\}$ dir. Dahası, aşağıdakiler birbirine denktir:*

a) M, rankı r olan serbest bir modüldür.

b) $i = 0, 1, \ldots, r-1$ için $F_i(M) = 0$ ve $i \geq r$ için $F_i(M) = R$ dir.

İspat. $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ kümesi M modülünün minimal bir üreteç kümesi olsun. Buna göre

$$0 \longrightarrow \text{Çek} f \longrightarrow R^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

M nin bir sonlu gösterimidir. $v_\lambda = (a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, ..., a_{\lambda n}) \in R^n$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

matrisi M modülünün bir bağıntı matrisi olsun. Üreteç sistemi minimal olduğu için A matrisinin bileşenleri m maksimal idealinin elemanlarıdır. Böylece $F_{n-1}(M) \subset m$ ve $F_n(M) = R$ dir. Bu durumda $\mu(M) = min\{n \mid F_n(M) = R\}$ formülü elde edilir.

$a) \Rightarrow b)$: M rankı r olan serbest bir R-modül ise $\c{C}ekf = 0$ dır. Buna göre bağıntı matrisi sıfır matrisi olacağından $i = 0, 1, ..., r-1$ için $F_i(M) = 0$ ve $i \geq r$ için $F_i(M) = R$ elde edilir.

$b) \Rightarrow a)$: $i \geq r$ için $F_i(M) = R$ olduğundan $n = r$ ve $F_{n-1}(M) = 0$ dır. Buna göre A bağıntı matrisi sıfır matrisidir. Böylece $M \cong R^r$ dir. □

Sonuç 4.1.9. *Herhangi bir R halkası ve $P \in Spec(R)$ için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(a) $\mu(M) = n$

(b) $F_{n-1}(M) \subseteq P$ *ve* $F_n(M) \nsubseteq P$ *dir.*

Sonuç 4.1.10. *M sonlu üretilmiş bir R-modül için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(a) M rankı r olan projektif modüldür.

(b) $i = 0, 1, \ldots, r-1$ *için* $F_i(M) = 0$ *ve* $i \geq r$ *için* $F_i(M) = R$*' dir.*

Önerme 4.1.11. *M, n eleman ile üretilen bir R-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki önerme sağlanır:*

$$(Ann_R(M))^n \subseteq F_0(M) \subseteq Ann_R(M)$$

Özel olarak M modülü, bir eleman tarafindan üretiliyorsa $F_0(M) = Ann_R(M)$ dir.

İspat. M modülü $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ kümesi ile üretilsin ve $a_1,\ a_2, \ldots, a_n \in Ann_R M$ olsun. $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $a_i m_i = 0$ olduğundan $a_1.a_2...a_n \in F_0(M)$ olur. Böylece $(Ann_R(M))^n \subset F_0(M)$ sağlanır. Şimdi $F_0(M) \subseteq AnnM$ önermesini gösterelim.

Diğer taraftan, A matrisi M modülünün bir bağıntı matrisi olsun. Cramer Kuralından dolayı $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $detA.m_i = 0$ dır. Böylece $detA \in Ann_R M$ dir. $F_0(M)$, $n \times n$ tipindeki bu tip matrislerin determinantları ile üretildiğinden $F_0(M) \subset Ann_R(M)$ sağlanır. □

Sonuç 4.1.12. *I, R halkasının bir ideali ve $M = R/I$ ise $F_0(M) = I$ dır.*

İspat. $M = R/I$ modülü bir eleman tarafından üretildiği için Önerme 4.1.11 den dolayı $F_0(M) = Ann_R(R/I) = I$ elde edilir. □

Önerme 4.1.13 ([23]). *R bir halka ve M sonlu üretilmiş bir modül olsun. $(F_0(M))$ regüler idealdir ancak ve ancak M burulmalı modüldür.*

İspat. $Ann_R(M)^m \subseteq F_0(M) \subseteq Ann_R M$ olduğu için $\sqrt{F_0(M)} = \sqrt{Ann_R M}$. Böylece $F_0(M)$ regüler ideal iken $Ann_R M$ de regülerdir. $F_0(M)$ regüler ideal olduğundan $Ann_R M$ regüler ideal olur. Böylece M burulmalı modüldür. Diğer taraftan, M burulmalı modül ve $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ M nin üreteç sistemi olsun. $\forall i$ için $Ann_R x_i$ regüler ideal olduğundan $Ann_R M$ regülerdir. Dolayısıyla $F_0(M)$ regülerdir. □

Lemma 4.1.14 ([15]). *M nin sıfırdan farklı ilk Fitting ideali $I(M)$ ile gösterilsin. M sonlu üretilmiş bir R-modül ise $I(M) \subseteq Ann_R(T(M))$ dir.*

İspat. M modülü $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesi ile üretilsin. $A = (a_{ij})_{n*m}$ bu üreteç kümesinin bir sunum matrisi olsun. $y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \in T(M)$ ve $B := (b_1 \ldots b_n)^t \in M_{n*1}(R)$ alalım. Buna göre $y \in T(M)$ ise $gy = 0$ olacak şekilde g regüler elemanı vardır. Eğer $(r_1 \ldots r_n)^t \in \langle B|A \rangle$ ise $g(r_1 \ldots r_n)^t \in \langle A \rangle$ dır. Böylece $g\langle B|A \rangle \subseteq \langle A \rangle$ olmalıdır. g regüler bir eleman olduğu için $rankA \leq rank(B|A) = rankg(B|A) \leq rankA$ sağlandığından $rankA = rank(B|A)$ elde edilir.

$q > 0$ için $I(M) = F_{n-q}(M)$ olsun. Böylece $rankA = q$ olur. $D \in (B|A)$ olmak üzere

$$D = \begin{pmatrix} b_1 & a_{11} & \ldots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q+1} & a_{(q+1)1} & \ldots & a_{(q+1)q} \end{pmatrix}$$

matrisini düşünelim. $g_1, g_2, \ldots, g_{q+1}$, D nin birinci sütuna göre kofaktörü olsun. Örneğin, $g_1 = detC$ öyle ki C matrisi aşağıdaki gibidir.

$$D = \begin{pmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(q+1)1} & \ldots & a_{(q+1)q} \end{pmatrix}$$

$g_1 y = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. $rankA = rank(B|A)$ olduğundan $rank(B|A) = q$ olur. Böylece $\sum_{i=1}^{q+1} b_i g_i = detD = 0$ olur. Böylece

$$b_1 g_1 = -\sum_{i=2}^{q+1} b_i g_i \tag{4.1.0.2}$$

$i = 2, \ldots, q+1$ ve $j = 1, \ldots, q$ için f_{ij}, $a_{ij} \in C$ bileşenine göre kofaktörü olsun. Buna göre $k = 1, \ldots, q$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\sum_{j=1}^{q} f_{ij} a_{kj} = \begin{cases} 0, & i \neq k \neq 1 \\ g_1, & i = k \\ -g_i, & i \neq k = 1 \end{cases} \tag{4.1.0.3}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{q} \Big(\sum_{i=2}^{q+1} b_i f_{ij}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k\Big)$$

$$0 = \sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{n} f_{ij} a_{kj} x_k$$

eşitliğinden

$$\sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} f_{ij} a_{1j} x_1 + \sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} f_{ij} a_{ij} x_i = -\sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=2, k\neq i}^{n} f_{ij} a_{kj} x_k \tag{4.1.0.4}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} g_1 y = {} & g_1 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ = {} & b_1 g_1 x_1 + \sum_{i=2}^{q+1} b_i g_1 x_i + \sum_{k=q+2}^{n} b_k g_1 x_k \\ = {} & \Big(-\sum_{i=2}^{q+1} b_i g_i\Big) x_1 + \sum_{i=2}^{q+1} b_i g_1 x_i + \sum_{k=q+2}^{n} b_k g_1 x_k \\ = {} & \sum_{i=2}^{q+1} b_i \Big(\sum_{j=1}^{q} f_{ij} a_{1j} x_1\Big) + \sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} f_{ij} a_{ij} x_i + \\ & \sum_{k=q+2}^{n} b_k g_1 x_k \qquad \text{(denklem (4.1.0.2) kullanılır)} \\ = {} & -\sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=2, k\neq i}^{n} f_{ij} a_{kj} x_k + \\ & \sum_{k=q+2}^{n} b_k g_1 x_k \qquad \text{(denklem (4.1.0.3) kullanılır)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & -\sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=2,k\neq i}^{q+1} f_{ij}a_{kj}x_k - \sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=q+2}^{n} f_{ij}a_{kj}x_k + \\
& \sum_{k=q+2}^{n} b_k g_1 x_k \qquad \text{(denklem (4.1.0.4) kullanılır)} \\
= & -\sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{k=2,k\neq i}^{q+1} (\sum_{j=1}^{q} f_{ij}a_{kj})x_k + \\
& \sum_{k=q+2}^{n} (-\sum_{i=2}^{q+1} b_i \sum_{j=1}^{q} f_{ij}a_{kj} + b_k g_1)x_k
\end{aligned}
$$

Böylece $g_1 y = 0$ elde edilir. $rank(B|A) = q$ olduğundan $k = q+2, \ldots, n$ için

$$
\begin{vmatrix}
b_2 & a_{21} & \ldots & a_{2q} \\
\vdots & a_{31} & \ddots & \vdots \\
b_{q+1} & a_{(q+1)1} & \ldots & a_{(q+1)q} \\
b_k & a_{k1} & \ldots & a_{kq}
\end{vmatrix} = 0
$$

elde edilir. Böylece A matrisinin $q \times q$ tipindeki alt matrislerinin determinantı y elemanını sıfırlar. $I(M)$ bu tipteki determinantlarla üretildiğinden $I(M) \subseteq Ann_R(T(M))$ dir. □

Önerme 4.1.15. *M, N ve P sonlu üretilmiş R-modüller olmak üzere*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

tam dizisi verilsin. $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ *için* $F_m(N)F_n(P) \subseteq F_{m+n}(M)$ *eşitsizliği vardır. Özel olarak* $m = n = 0$ *için* $F_0(N)F_0(P) \subseteq F_0(M)$ *sağlanır.*

İspat. N modülünün M nin bir alt modülü olduğunu varsayalım. $x_1, x_2, ..., x_p$ elemanları N nin üreteçleri; $y_1, y_2, ..., y_q \in M$ olmak üzere P nin üreteçleri de $f(y_1), f(y_2), ..., f(y_q)$ olsun. O zaman (x, y) ikilileri M nin üreteçlerinin bir ailesidir. İspatı aşağıdaki durumlara göre yapalım.

(i) $m \leq p$ ve $n \leq q$ olduğunu varsayalım. A matrisi q sütunlu olmak üzere P modülünün bir bağıntı matrisi olsun. $(a_1, a_2, ..., a_q)$ bir bağıntı ise $a_1 y_1 + ... + a_q y_q \in N$ dir. Böylece $\sum a_i y_i + \sum b_j y_j = 0$ koşulunu sağlayan $b_1, b_2, ..., b_p \in R$ vardır. Bu durumda (x, y) ile ilgili olan (B, A) matrisini elde ederiz. Burada B matrisi sütun sayısı p olan ve A ile aynı satır sayısına sahip bir matristir. C matrisi

$(x_1, x_2, ..., x_p)$ ile ilgili olmak üzere

$$\begin{pmatrix} B & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

(x, y) nin bir bağıntı matrisidir. Eğer D'', A matrisinin $(q-n)\times(q-n)$ boyutundaki alt determinantı; D', C nin $(p-m)\times(p-m)$ boyutundaki bir alt determinantı ise $D''D'$;

$$\begin{pmatrix} B & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin $(p+q-m-n)\times(p+q-m-n)$ boyutundaki bir alt determinantıdır. Böylece $D''D' \in F_{m+n}(M)$ dir. $F_m(M)$; D' matrisi gibi matrislerin determinantı ile üretildiğinden, $F_n(P)$ ise D' matrisi gibi matrislerin determinantı ile üretildiğinden önerme sağlanır.

(ii) $m > p$ ve $n > q$ ise $F_{m+n}(M) = F_m(N) = F_n(P) = R$ olduğundan önerme sağlanır.

(iii) $m \leq p$ ve $n > q$ olsun. O zaman $F_n(P) = R = F_q(P)$ dir ve $F_m(N).F_n(P) = F_m(N).F_q(P) \subset F_{m+q}(M) \subset F_{m+n}(M)$ elde edilir. $m > p$ ve $n \leq q$ durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

□

Önerme 4.1.16. *M ve N sonlu üretilmiş R-modüller olsun.* $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ *için*

$$F_n(M \oplus N) = \sum_{r+s=n} F_r(M).F_s(N) \text{ dir.}$$

İspat. $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$, M modülünün bir üreteç kümesi, $\{y_1, y_2, ..., y_q\}$, N modülünün bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda (x, y) ikilileri $M \oplus N$ yi üretir. Önerme 4.1.15 den $\sum_{r+s=n} F_r(M).F_s(N) \subset F_n(M \oplus N)$ eşitsizliği sağlanır. Şimdi diğer kapsamanın da sağlandığını gösterelim. İspatı iki durum için yapalım.

(i) $n \geq p+q$ ise $r \geq p$ veya $s \geq q$ alabiliriz. Bu durumda $F_r(M) = F_s(N) = F_n(M \oplus N) = R$ olacağından eşitlik sağlanır.

(ii) $n < p + q$ olsun. (x, y) için bağıntı matrisi

$$C = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

formundadır, burada A', (x) için bir bağıntı matrisi; A'' ise (y) için bir bağıntı matrisidir. Böylece $F_{m+n}(M \oplus N) = \sum I_{p+q-n}(C))$ yazılabilir (burada $I_{p+q-n}(C)$ ideali C matrisinde $(p + q - n) \times (p + q - n)$ boyutundaki matrislerin determinantlarının ürettiği ideali ifade ediyor). D, $(p + q - n) \times (p + q - n)$ boyutundaki alt matrislerin determinantı olsun. Bu durumda B' matrisi $k' \times (p - r)$ boyutlu; B'', $k'' \times (q - s)$ boyutlu matrisler olmak üzere

$$D = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$$

formundadır. Burada $k' + k'' = p + q - n$ ve $r + s = n$ koşulunu sağlamaktadır. $k' \neq p-r$ ve $k'' \neq q-s$ ise $D = 0$ dır. $k' = p-r$ ve $k'' = q-s$ ise $D = detB'.detB'' \in F_r(M)F_s(N)$ dir. Böylece $F_n(M \oplus N) \subset \sum_{r+s=n} F_r(M).F_s(N)$ eşitsizliği sağlanır.

□

Sonuç 4.1.17. *$i = 1, 2, ..., s$ için I_i, R halkasının bir ideali olmak üzere*

$$M = \oplus_{i=1}^{s} R/I_i \Rightarrow F_0(M) = I_1.I_2...I_s.$$

İspat. $M = \oplus_{i=1}^{s} R/I_i$ ise Önerme 4.1.16 den dolayı

$$F_0(M) = F_0(R/I_1).F_0(R/I_2)...F_0(R/I_s)$$

eşitliği vardır. Sonuç 4.1.12 dan $\forall i = 1, 2, ..., s$ için $F_0(R/I_i) = I_i$ olduğundan $F_0(M) = I_1.I_2...I_s$ elde edilir. □

Sonuç 4.1.18. *M sonlu üretilmiş bir R-modül ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman $R^m \oplus M$ modülünün Fitting ideali aşağıdaki gibidir:*

$$F_i(R^m \oplus M) = \begin{cases} (0), & i = 0, 1, \ldots, m-1 \ ise \\ F_{i-m}(M), & i \geq m \ ise. \end{cases}$$

İspat. R^m nin rankı m olduğundan $i = 0, 1, ..., m-1$ için $F_i(R^m) = 0$ dır. Buna göre $F_i(R^m \oplus M) = \sum_{r+s=i} F_r(R^m).F_s(M)$ eşitliğinden dolayı $i = 0, 1, ..., m-1$ için $F_i(R^m \oplus M) = 0$ elde edlir. $i \geq m$ için $F_i(R^m) = R$ olduğundan $F_i(R^m \oplus M) = \sum_{r+s=i} F_r(R^m).F_s(M) = F_{i-m}(M)$ dir. □

Teorem 4.1.19 ([20]). *(R, m) yerel bir halka ve M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(a) Sıfırdan farklı ilk Fitting ideal $F_r(M)$ regüler bir eleman tarafından üretilir.

(b) $M/T(M)$ rankı r olan serbest bir R-modüldür ve $pd_R(M) \leq 1$ dir.

İspat. (b) $\Rightarrow$ (a): $M/T(M)$ rankı r olan serbest bir R-modül olsun. Bu durumda $M/T(M) \cong R^r$ ve $M \cong T(M) \oplus R^r$ dir. Genelliği bozmayacağından $M = T(M) \oplus R^r$ kabul edelim. Teorem 4.1.6 den $\forall p \geq 0$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$F_p(M) = F_{p-r}(M)$$

$T(M)$ sonlu üretilmiş bir alt modül olduğundan $T(M)$ nin kısa bir tam dizisi vardır:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} R^n \xrightarrow{f} T(M) \longrightarrow 0 \tag{4.1.0.5}$$

Burada $K = R\alpha_1 + R\alpha_2 + \cdots + R\alpha_m$ öyle ki $\alpha_i = \sum_{i=1}^n c_{ij}e_j$ $(j = 1, 2, ..., m)$ olsun. O zaman $C = (c_{ij})$, $T(M)$ modülünün bir bağıntı matrisidir. (4.1.0.5) dizisini ve M nin kısa tam dizisini birlikte düşünerek aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & R^n & \xrightarrow{f} & T(M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow i & & \\
0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{i} & R^{n+r} & \xrightarrow{f'} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Diyagramda i içerim dönüşümünü gösterir. $\{e'_1, e'_2, ..., e'_{n+r}\}$ kümesi R^{n+1} halkasının standart tabanı, $\{e_1, e_2, ..., e_{n+r}\}$ kümesi R^n' nin bir tabanı olmak üzere $\theta(e_i) = e'_i$ ile verilir. Ayrıca $i = 1, 2, ..., n$ için $f'(e'_i) = e_i$; $i = n+1, n+2, ..., n+r$ için $f'(e'_i) = (0, 0, ...0, 1, ..0)^t \in R^r$ dir. $M = T(M) \oplus R^r$ olduğu için f' iyi tanımlıdır ve

$\theta(K) = K'$ olur.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \dots & c_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times n+r}(R) \tag{4.1.0.6}$$

matrisi M nin bir bağıntı matrisidir. Böylece $\forall p \geq 0$ için $F_p(M) = F_{p-r}(T(M))$ dir. Sıfır bölen olmayan bir $a \in R$ için $aT(M) = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durum aynı zamanda $a \in Ann(T(M))$ ile ifade edilebilir. Böylece Fitting ideallerin özelliğinden $F_0(T(M))$ ideali R nin bir regüler elamanını içerir. Eğer $p\langle r$ ise $F_p(M) = F_{p-r}(T(M)) = 0$ dır. Böylece $F_r(M)$ sıfırdan farklı ilk Fitting idealdir.

$M = T(M) \oplus R^r$ olduğu için $pd_R(T(M)) \leq pd_R(M)$ dir. Hipotezden dolayı, $pd_R(M) \leq 1$ olduğu için $pd_R(T(M)) \leq 1$ dir. Bu durumda $s \leq n$ olmak üzere aşağıdaki kısa tam diziyi yazabiliriz:

$$0 \longrightarrow R^s \longrightarrow R^n \longrightarrow T(M) \longrightarrow 0$$

Varsayalım ki $s\langle n$ olsun. Bu durumda $F_0(T(M)) = 0$ olacaktır. Bu durumda $F_0(T(M)) = F_r(M) \neq 0$ ile çelişeceğinden $s = n$ olmalıdır. Böylece $T(M)$ nin bağıntı matrisi $n \times n$ tipinde olur. Bu matrisin determinantına a denilirse
$F_r(M) = F_0(T(M)) = Ra$ elde edilir. $F_r(M)$ regüler bir eleman içerdiğinden a regüler olmalıdır. Böylece $F_r(M)$ ideali regüler bir eleman tarafından üretilir.

(a) $\Leftarrow$ (b): $\beta = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ kümesi M nin bir tabanı olsun.

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} R^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

M nin kısa bir tam dizisi olsun. $\forall j = 1, 2, ..., n$ için $f(e_i) = m_i$ ve $K = \text{Çek} f$ dir. Varsayalım ki $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}e_j$ $(i = 1, 2, ..., m)$ için $K = R\beta_1 + R\beta_2 + \cdots + R\beta_m$ olduğunu varsayalım. $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ M nin bağıntı matrisidir. Herhangi bir a regüler elemanı için $F_r(M) = Ra$ olsun. $F_r(M)$, C nin $(n-r)\times(n-r)$ minörleri tarafından üretilir. R yerel bir halka olduğundan $F_r(M)$ bu minörlerden biri ile üretilir. $\triangle = \triangle(1, 2, ..., n - r; 1, 2, ..., n - r)$, $F_r(M)$ yi üreten minör olsun. $R\triangle = F_r(M)$ olduğundan, hipotezden $\triangle$

regüler bir elemandır. Böylece a bir regüler eleman ve $F_r(M) = Ra$ olmak üzere

$$a = det\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-r,1} & \cdots & c_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

C' matrisi C nin $n-r \times n$ tipinde bir alt matrisi olsun.

$$C' = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-r} & c_{1,n-r+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-r,1} & \cdots & c_{n-r,n-r} & c_{n-r,n-r+1} & \cdots & c_{n-r,n} \end{pmatrix} \tag{4.1.0.7}$$

$$D = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-r,1} & \cdots & c_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \tag{4.1.0.8}$$

olsun. $h \in \{1, 2, ..., n-r\}$ olmak üzere; H_{ih}, D matrisinin (i, h). kofaktörü olsun. Laplace açılımından

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_{ih} H_{ih} \tag{4.1.0.9}$$

ve $1 \leq k \neq h \leq n-r$ için $\sum_{i=1}^{n-r} c_{ik} H_{ih} = 0$ dır. C' matrisinin her satırı için $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} m_j = 0$ $(i = 1, 2, ..., n-r)$ sağlanır. Özel olarak; $H_{1,h} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} m_j = \cdots = H_{n-r,h} \sum_{j=1}^{n} c_{n-r,j} m_j = 0$ Bu denklemleri (4.1.0.9) ile birlikte kullanırsak,

$$\begin{aligned} 0 &= H_{1,h} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} m_j + H_{2,h} \sum_{j=1}^{n} c_{2,j} m_j + \cdots + H_{n-r,h} \sum_{j=1}^{n} c_{n-r,j} m_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-r} H_{i,h} \Big(\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} m_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n-r} c_{i,j} H_{i,h} \Big) m_j \\ &= a m_h + \sum_{j=n-r+1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n-r} c_{i,j} H_{i,h} \Big) m_j \end{aligned}$$

$j = (n-r+1), \ldots, n$ için

$$d_j = \sum_{i=1}^{n-r} c_{i,j} H_{i,h}$$

olsun. Böylece $am_h + \sum_{j=n-r+1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n-r} d_j m_j\Big) = 0$ ve $d_{n-r+1}, ..., d_n \in F_r(M) = Ra$ olur. $a\Big(m_h + \sum_{j=n-r+1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n-r}(d_j/x)m_j\Big)\Big) = 0$ yazılabilir. a regüler bir eleman olduğundan

$$m_h + \sum_{j=n-r+1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n-r}(d_j/x)m_j\Big) \in T(M) \text{ dir.}$$

$\overline{m_1}, \overline{m_2}, ..., \overline{m_n}$ elemanları $m_1, m_2, ..., m_n$ elemanlarının $M/T(M)$ deki görüntüsü olsun. Böylece

$M/T(M) = R\overline{m_{n-r+1}} + \cdots + R\overline{m_n}$ dir. $\alpha = \{\overline{m_{n-r+1}}, ..., \overline{m_n}\}$ kümesi $M/T(M)$ nin üreteç kümesidir. Şimdi bu kümenin aynı zamanda lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

S tüm regüler elemanların kümesi olsun. Q, R halkasının bölüm halkasını göstermek üzere $Q = S^{-1}R$ dir. $T(M)$ burulmalı modül olduğu için $T(M) \otimes_R Q = 0$ dır.

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T(M) \longrightarrow 0$$

bir tam dizi olduğundan bu dizinin Q ile tensör çarpımından $M \otimes_R Q \simeq M/T(M) \otimes_R Q$ elde edilir. $M/T(M)$ serbest burulmalı modül olduğundan $M/T(M) \longrightarrow M/T(M) \otimes_R Q$, $z \longmapsto z \otimes 1$ ile tanımlı injektif bir homomorfizmadır. Böylece $M/T(M)$, $M \otimes_R Q$ nun bir alt modülü ile belirlidir. Ayrıca α, $M \otimes_R Q$ nun bir tabanıdır.

Özellik (d) den dolayı $\forall i \in \mathbb{Z}$ için $F_i(M \otimes_R Q) = F_i(M)Q$ olur. $i = r$ için $F_r(M \otimes_R Q) = F_r(M)Q = aQ = Q$ dır. Hipotezden dolayı $F_r(M)$ sıfırdan farklı ilk Fitting ideal olduğundan $p\langle r$ için $F_p(M) = 0$. Varsayalım ki $s_j \in R$ için $\sum_{j=n-r+1}^{n} s_j\overline{m_j}$ olsun. α, $M \otimes_R Q$ modülünün bir tabanı olduğundan aşağıdaki tam dizi vardır:

$$0 \longrightarrow Çek\mu \longrightarrow Q^r \xrightarrow{\mu} M \otimes_R Q \longrightarrow 0$$

$i = 1, 2, ..., r$ için $\mu(e_i) = \overline{m_{n-r+1}} \otimes 1$ ile verilen Q-modül homomorfizmasıdır. $(s_{n-r+1}, ..., s_n)^t \in Çek\mu$ olur. Böylece $j = n-r+1, ..., n$ için $s_j \in F_{r-1}(M \otimes_R Q) = 0$ dır. Bu durumda α lineer bağımsızdır. Böylece $M/T(M)$ rankı r olan serbest modüldür.

Şimdi $pd_R(M) \leq 1$ olduğunu gösterelim.

İddia : (4.1.0.7) matrisinin satırları lineer bağımsızdır. $(a_1, a_2, ..., a_{n-r})C' = 0$ olsun. Bu durumda $(a_1, a_2, ..., a_{n-r})D = 0$ olmalıdır. a bir regüler eleman olmak üzere $detD = a$ olduğundan $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-r} = 0$ dır. Böylece C' matrisinin satırları lineer bağımsızdır. Varsayalım ki $\sum_{j=1}^{n} a_j m_j = 0$ olsun.

$$C_h = \begin{pmatrix} c_{1,h}; & c_{1,1} & \dots & c_{1,n-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-r,h}; & c_{n-r,1} & \dots & c_{n-r,n-r} \\ a_h; & a_1 & \dots & a_{n-r} \end{pmatrix} \in M_{(n-r+1)\times(n-r+1)}$$

matrisini düşünelim. $\sum_{j=1}^{n} a_j m_j = 0$ olduğundan, C bağıntı matrisine $(a_1, a_2, ..., a_n)$ bir satır olarak eklenebilir. O zaman $h = 1, 2, ..., n - r$ için $det(C_h) = 0$ dır. $h = n - r + 1, 2, ..., n$ için $det(C_h) \in F_{r-1}(M) = 0$ olur. Böylece $\forall h = 1, ..., n$ için $det(C_h) = 0$ dır. Laplace Teoremini kullanarak C_h matrisinin determinantını birinci sütuna göre hesaplarsak :

$$0 = a.a_h + \sum_{i=1}^{n-r} c_{ih} d_i \qquad (d_i \in F_r(M) = Ra)$$

elde edilir. a regüler bir eleman olduğundan, $\forall h = 1, ..., n$ için $a_h + \sum_{i=1}^{n-r} c_{ih}(d_i/a) = 0$ dır. $x_i = d_i/a \in R$ diyelim. Bu durumda $\forall h = 1, ..., n$ için $a_h + \sum_{i=1}^{n-r} c_{ih} x_i = 0$ olduğundan $(a_1, a_2, ..., a_n)$, C' matrisinin satır uzayındadır. Böylece C' matrisi M modülünün bir bağıntı matrisidir. Aşağıdaki kısa tam dizi vardır:

$$0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} R\delta_i \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Burada δ_i, C' matrisinin i. satırının transpozudur. C' matrisinin satırları lineer bağımsız olduğundan $\sum_{i=1}^{n-r} R\delta_i$ serbest R-modüldür. Böylece $pd_R(M) \leq 1$ dir. □

Not 4.1.20. *Ohm, Teorem 4.1.19' yi herhangi bir değişmeli halka için genelleştirmiştir [30].*

4.2 Evrensel Türev Modüllerin Fitting İdealleri

Bu kısımda, ilk olarak evrensel türev modüllerinin Fitting ideal tanımı verilecek, sonrasında evrensel modüllerin projektif boyutları ve Fitting idealleri arasındaki bağıntılar incelenecektir. Bu kısımda, [31] ve [1] dan yararlanılmıştır.

Tanım 4.2.1. *$R = k[x_1, x_2, \ldots, x_s]/\langle f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ afin $k-$cebir ve $\Omega_n(R)$ de R nin n. dereceden evrensel türev modülü olsun. F, $\{\delta_n(x^\alpha) : 0 < |\alpha| \leq n\}$ kümesi tarafından üretilen, rankı $\binom{n+s}{s} - 1$ olan serbest bir R-modül ve N, $\{\delta_n(x^\alpha f_i) : 0 < |\alpha| < n,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ kümesi tarafından üretilen F nin bir alt modülü olsun. Burada $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_s^{\alpha_s}$ ve $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ şeklindedir. $\Omega_n(R) \cong F/N$ olduğundan*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\theta} F \longrightarrow \Omega_n(R) \longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. Bu dizideki θ, $\Omega_n(R)$' nin bağıntı matrisi olur. Bu matrise göre rank$F$-i minörleri tarafından üretilen $F_i(\Omega_n(R))$ idealine $\Omega_n(R)$' nin i. Fitting ideali denir.

Örnek 4.2.2. *$R = k[x_1, x_2, \ldots, x_s]/\langle f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ afin $k-$cebir olmak üzere $\Omega_1(R)$ nin Fitting ideallerini bulalım. F, $\{d(x_i) : i = 1, 2, ..., s\}$ kümesi ile verilen rankı s olan serbest R-modül ve N, $\{d(f_j) : j = 1, 2, ..., m\}$ ile üretilen F nin bir alt modülü olsun. $\Omega_1(R) \cong F/N$ olduğundan*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\theta} F \longrightarrow \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Bu dizide θ, $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i})_{i=1,2,...,s, j=1,2,...,m}$ Jacobian matrisi olup $\Omega_1(R)$ nin bağıntı matrisidir. $F_i(\Omega_1(R))$ Fitting ideali Jacobian matrisinin $s-i$ minörlerinin üretttiği bir idealdir.

Örnek 4.2.3. *$f \in k[x, y]$ olmak üzere, $R = k[x, y]/\langle f\rangle$ olsun. $\Omega_1(R)$ nin Fitting ideallerini hesaplayalım. F, $\{d(x), d(y)\}$ kümesi ile üretilen rankı 2 olan serbest bir R-modül ve N, $\{d(f)\}$ ile üretilen F modülünün bir alt modülü olsun. $\Omega_1(R) \cong F/N$ olduğundan*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\theta} F \longrightarrow \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Bu dizide $\theta = [\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}]$ tipinde bir Jacobian matristir. $F_0(\Omega_1(R)) = 0$, $F_1(\Omega_1(R)) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\rangle$, $F_2(\Omega_1(R)) = R$ dir.

Teorem 4.2.4 ([31])**.** *R afin k-cebir, $\Omega_1(R)$ birinci dereceden evrensel türev modül olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) *R regüler bir halkadır.*

(ii) $\Omega_1(R)$ *rankı r olan projektif modüldür.*

(iii) $i = 0, 1, \ldots, r-1$ *için* $F_i(\Omega_1(R)) = 0$ *ve* $i \geq r$ *için* $F_i(\Omega_1(R)) = R$*' dir.*

Teorem 4.2.5 ([1]). *k perfect cisim,* $S = k[x_1, x_2, \ldots, x_s]/\langle f \rangle$ *hiperyüzey ve* $\tilde{m}$ *bir maksimal ideal olmak üzere* $R = S_{\tilde{m}}$ *olsun. m, R nin maksimal ideali ve* $k = R/m$ *olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) *R regüler bir halkadır.*

(ii) $\Omega_n(R)$ *rankı* $\binom{n+s-1}{s-1} - 1$ *olan serbest bir modüldür*

(iii) $i = 0, 1, \ldots, \binom{n+s-1}{s-1} - 1$ *için* $F_i(\Omega_n(R)) = 0$ *ve* $i \geq \binom{n+s-1}{s-1} - 1$ *için* $F_i(\Omega_n(R)) = R$*' dir.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: R regüler bir halka olsun. Bu durumda $\Omega_1(R)$ rankı $dimR = s-1$ olan bir serbest modüldür. $\Omega_n(R) \cong I/I^{n+1}$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow I^n/I^{n+1} \longrightarrow I/I^{n+1} \longrightarrow I/I^n \longrightarrow 0 \tag{4.2.0.1}$$

tam dizisini kullanarak tümevarim yöntemiyle $\Omega_n(R)$ modülünün serbest R-modül olduğunu gösterelim. $S^n(.)$ n. mertebeden simetrik çarpım modülü olmak üzere $S^n(I/I^2) = I^n/I^{n+1}$ dir. Böylece $dim_R(I^n/I^{n+1}) = \binom{n+s-2}{s-2}$ dir. Tümevarımdan dolayı, $dim_R(I/I^n) = \binom{n+s-2}{s-2} - 1$ olsun. (4.2.0.1) dizisinin tamlığından dolayı
$dim_R(I/I^{n+1}) = \binom{n+s-2}{s-2} + \binom{n+s-2}{s-1} - 1 = \binom{n+s-1}{s-1} - 1$ elde edilir.
Tersine, $\Omega_n(R)$ rankı $L-1$ olan bir serbest modül olsun. $\Omega_n(R) \otimes k \cong m/m^{n+1}$ izomorfizmasından dolayı $m/m^{n+1} \cong k^{L-1}$ olur. Böylece $dim_R m/m^{n+1} = L-1$ dir. İspatın devamında $dim_R m/m^{n+1} = L-1$ ise $dim_R m/m^2 = s-1$ olduğunu göstereceğiz böylece R halkası regüler olacak. □

Lemma 4.2.6. *Eğer* $dim\ m/m^{n+1} = L-1$ *ise* $dim\ m/m^2 = s-1$ *dir.*

İspat. Lemmanın ispatı 3 adımda yapılacaktır.

1. $\alpha = \langle x^\alpha \rangle \subseteq A$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_s^{\alpha_s}$, $\alpha_1 > 0$ ve $m = \langle x_1, x_2, ..., x_s \rangle \subseteq A/\alpha$ olsun.

$$dim_R \tilde{m}/\tilde{m}^{n+1} \geq \binom{n+s-2}{s-2} \tag{4.2.0.2}$$

olduğunu gösterelim. $l = |\gamma| = \gamma_1 + \cdots \gamma_s$ olsun.

Birinci Durum: $n < l$ olsun.

$dim\ \tilde{m}^n/m^{\tilde{n}+1} = \binom{n+s-1}{s-1} > \binom{n+s-2}{s-2}$ olduğundan (4.2.0.2) sağlanır.

İkinci Durum: $n > l$ olsun. $n = l + j$ ve $j \geq 0$ diyelim.

$C = \{x^k \notin \alpha \mid |k| = l + j\}$ olsun. C nin görüntüsü $\tilde{m}^n/m^{\tilde{n}+1}$ kümesini üretir. α monomial olduğu için bu küme lineer bağımsızdır.

$L_j := |\{x^k \in \alpha \mid |k| = l + j\}|$ olsun. $|C| = \binom{s-1+l+j}{s-1} - L_j$ dir. Diğer taraftan $|k| = l + j$ olmak üzere x^k monomiallerinin kardinalitesi $\binom{s-2+l+j}{s-1}$ dir. Böylece $\binom{s-1+l+j}{s-1} - L_j \geq \binom{s-1+l+j}{s-1} - \binom{s-2+l+j}{s-1} = \binom{s-2+l+j}{s-2}$ elde edilir.

2. $f \in A$ olsun. $\tilde{m} = \langle x_1, x_2, ..., x_s \rangle \subseteq A/\langle f \rangle$ olsun.
İddia: $dim\ \tilde{m}^n/m^{\tilde{n}+1} \geq \binom{s-2+n}{s-2}$ olur. (4.2.0.2) eşitsizliğinden ve $A/\langle f \rangle$, $A/\langle f_0 \rangle$ ve $A/\langle in_>(f_0) \rangle$ Hilbert fonksiyonların çakışmasından dolayı iddia sağlanır.

3. $m/m^{n+1} \cong \tilde{m}/m^{\tilde{n}+1}$ olduğu için ispatı $\tilde{m}/m^{\tilde{n}+1}$ için yapmamız yeterlidir.

$$0 \longrightarrow \tilde{m}^n/m^{\tilde{n}+1} \longrightarrow \tilde{m}/m^{\tilde{n}+1} \longrightarrow \tilde{m}/\tilde{m}^n \longrightarrow 0$$

tam dizisini ele alalım. Varsayalım ki $\tilde{m}/m^{\tilde{2}} > s - 1$ olsun.

$dim\ \tilde{m}/m^{\tilde{n}+1} = dim\ \tilde{m}/\tilde{m}^n + dim\ \tilde{m}^n/m^{\tilde{n}+1}$ yazılabilir. Tümevarımdan $dim\ \tilde{m}/m^{\tilde{n}+1} > \binom{s-2+n}{s-1} - 1$ eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Buna göre

$$dim\ \tilde{m}/m^{\tilde{n}+1} > \binom{s-2+n}{s-1} - 1 + \binom{s-2+n}{s-2} = \binom{s-1+n}{s-1} - 1 = L - 1$$

elde edilir. Böylece $\Omega_n(R)$ serbest modül iken R nin regüler olduğu ispatlanır. (R regülerdir $\Longleftrightarrow dim\ R = dim_{R/m} m/m^2 = s - 1$)

□

Sonuç 4.2.7. *(R, m) yukarıdaki gibi olsun. Bu durumda $J_n(R) = R \otimes_k R/I^{n+1}$ rankı $\binom{n+s-1}{s-1} - 1$ olan serbest modüldür ancak ve ancak R regülerdir (bu sonuç [8] de karakteristiği sıfır olan cisimler için ispatlanmıştır).*

Şimdi yukarıdaki teorem ve sonuçları kullanarak evrensel modüllerin Fitting idealleri ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 4.2.8. *$R = k[x, y]/\langle x^2 + y^2 - 4\rangle$ bir polinom halkası olsun. $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_2(R)$ nin Fitting ideallerini bulalım.*
F, $\{d_1(x), d_1(y)\}$ kümesi ile üretilen bir serbest R-modül ve N, $\{d_1(x^2 + y^2 - 4)\}$ kümesi ile üretilen F nin bir alt modülü olsun.

$$d_1(x^2 + y^2 - 4) = d_1(x^2) + d_1(y^2) - d_1(4) = 2xd_1(x) + 2yd_1(y)$$

şeklindedir. $\Omega_1(R) \cong F/N$ olduğundan $rankN = rankF - rank\Omega_1(R) = 2 - 1 = 1$ olduğundan N bir serbest modüldür ve

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} F \longrightarrow \Omega_1(R) \cong F/N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizidir. Bu dizi $\Omega_1(R)$ nin serbest çözünürlüğü olup $pd\Omega_1(R) \leq 1$ dir. $\Omega_1(R)$ nin bağıntı matrisi

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

ile verilir. Buna göre $\Omega_1(R)$ nin Fitting idealleri

$$F_0(\Omega_1(R)) = 0 \text{ ve } F_1(\Omega_1(R)) = (x, y) = R$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.2.4 den $\Omega_1(R)$ projektif modüldür ve R regüler bir halkadır. Böylece Teorem 3.1.23 den $\Omega_n(R)$ projektiftir.
$\Omega_2(R) \cong F'/N'$ olsun. F', $\{d_2(x), d_2(y), d_2(x^2), d_2(xy), d_2(y^2)\}$ kümesi ile üretilen bir serbest R-modül ve N', $\{d_2(x^2)\}$ ile üretilen F' nün bir alt modülüdür.

$$d_2(f) = d_2(x^2) + d_2(y^2) - d_2(4) = d_2(x^2) + d_2(y^2)$$

olduğundan $\Omega_2(R)$ nin bağıntı matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile verilir. Buna göre $\Omega_2(R)$ nin Fitting idealleri

$$i = 0, 1, 2, 3 \text{ için } F_i(\Omega_2(R)) = 0, \; i \geq 4 \text{ için } F_i(\Omega_2(R)) = R$$

elde edilir. Sonuç 4.1.10 den rank$\Omega_2(R) = 4$ dir.

$\Omega_2(R) \cong F'/N'$ olduğundan rankN' = rankF' − rank$\Omega_2(R) = 5 - 4 = 1$ bulunur. Böylece N' serbest bir R-modüldür.

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow F' \longrightarrow \Omega_2(R) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi $\Omega_2(R)$ nin serbest çözünürlüğü olup pd$\Omega_2(R) \leq 1$ dir.

Örnek 4.2.9. *$S = k[x, y, z]/\langle y^2 - xz\rangle$ olsun. $\Omega_1(S)$ ve $\Omega_2(S)$ nin Fitting ideallerini bulalım.*

F, $\{d_1(x), d_1(y), d_1(z)\}$ ile üretilen serbest S-modül ve N, $\{d_1(y^2 - xz)\}$ ile üretilen F nin bir alt modülü olsun.

$$d_1(f) = d_1(y^2 - xz) = 2yd_1(y) - xd_1(z) - zd_1(x)$$

şeklindedir. $\Omega_1(S) = F/N$ olduğundan rank$N$ = rank$F$ − rank$\Omega_1(S) = 3 - 2 = 1$ elde edilir. Böylece N serbest bir modüldür. Buna göre

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \Omega_1(S) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi $\Omega_1(S)$ nin serbest çözünürlüğüdür ve pd$\Omega_1(S) \leq 1$ dir. $\Omega_1(S)$ nin bağıntı matrisi

$$\begin{pmatrix} -z & -x & 2y \end{pmatrix}$$

ile verilir. $\Omega_1(S)$ nin Fitting idealleri $F_0(\Omega_1(S)) = 0 = F_1(\Omega_1(S))$ ve $F_2(\Omega_1(S)) = (x, y, z) \neq S$ şeklindedir. Teorem 4.2.4 den $\Omega_1(S)$ projektif değildir. Dolayısıyla S halkası regüler değildir.

F', tabanı $\{d_2(x), d_2(y), d_2(z), d_2(x^2), d_2(y^2), d_2(z^2), d_2(xy), d_2(xz), d_2(yz)\}$ olan serbest bir S-modül ve N' ise $\{d_2(f), d_2(xf), d_2(yf), d_2(zf)\}$ kümesi ile üretilen F' nin bir alt modülü olsun.

$$
\begin{aligned}
d_2(f) &= d_2(y^2 - xz) = d_2(y^2) - d_2(xz)\\
d_2(xf) &= d_2(xy^2 - x^2z)\\
&= -zd_2(x^2) + xd_2(y^2) + 2yd_2(xy) + 2xd_2(xz) + xzd_2(x) - 2xyd_2(y) + x^2d_2(z)\\
d_2(yf) &= d_2(y^3 - xyz)\\
&= 3yd_2(y^2) - zd_2(xy) - yd_2(xz) - xd_2(yz) + yzd_2(x) - 2xzd_2(y) + xyd_2(z)\\
d_2(zf) &= d_2(y_2z - xz^2)\\
&= zd_2(y^2) - xd_2(z^2) - 2zd_2(xz) + 2yd_2(yz) - z^2d_2(x) - 2yzd_2(y) + xzd_2(z)
\end{aligned}
$$

$rankN' = rankF' - rank\Omega_2(S) = 9 - 5 = 4$ ise $\mu(N') = rankN'$ olduğundan N' serbest bir S-modüldür.

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow F' \longrightarrow \Omega_2(S) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi $\Omega_2(S)$ nin serbest çözünürlüğüdür ve $pd\Omega_2(S) \leq 1$ dir. $\Omega_2(S)$ nin bağıntı matrisi aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-z & x & 0 & 2y & -2x & 0 & xz & -2xy & x^2\\
0 & 3y & 0 & -z & -y & -x & yz & -2xz & xy\\
0 & z & -x & 0 & -2z & 2y & z^2 & -2yz & xz
\end{pmatrix}
$$

$\Omega_2(S)$ nin Fitting idealleri $i = 0, 1, 2, 3, 4$ için $F_i(\Omega_2(S)) = 0$ ve $i > 4$ için $F_i(\Omega_2(S)) \neq 0$ elde edilir.

Örnek 4.2.10. *$f = x^3 - y(z + 1)$, $g = y^2 - xz$ ve $h = x^2y - z(z + 1)$ olmak üzere $R = k[x, y, z]/(f, g, h)$ olsun. R nin boyutu 1 ise, $\Omega_1(R))$ nin projektif boyutunu bulalım. F, $\{d_1(x), d_1(y), d_1(z)\}$ kümesi ile üretilen serbest bir R-modül ve N, $\{d_1(f), d_1(g), d_1(h)\}$ ile üretilen F nin bir alt modülü olsun.*

$$
\begin{aligned}
d_1(f) &= d_1(x^3 - y(z + 1)) = d_1(x^3) - d_1(yz) - d_1(y)\\
&= 3x^2d_1(x) - yd_1(z) - zd_1(y) - d_1(y) = 3x^2d_1(x) - (1 + z)d_1(y) - yd_1(z)\\
d_1(g) &= d_1(y^2 - xz) = d_1(y^2) - d_1(xz) = 2yd_1(y) - xd_1(z) - zd_1(x)\\
d_1(h) &= d_1(x^2y - z(z + 1)) = d_1(x^2y) - d_1(z^2) - d_1(z)\\
&= 2xyd_1(x) + x^2d_1(y) - (2z + 1)d_1(z)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & -(1+z) & -y \\ -z & 2y & -x \\ 2xy & x^2 & -(2z+1) \end{pmatrix}$$

matrisi $\Omega_1(R))$ *nin bağıntı matrisidir.* $\Omega_1(R))$ *nin Fitting idealleri*

$F_0(\Omega_1(R)) = (z)$ *ve* $F_1(\Omega_1(R)) = R$ *dir.* $rank\Omega_1(R)) = 1$ *ve* $F_1(\Omega_1(R)) = R$ *olduğu için Teorem 4.2.4 gereğince* $\Omega_1(R))$ *projektif modüldür. Böylece* $\Omega_1(R))$ *nin projektif boyutu* 0 *dır.*

Örnek 4.2.11. $f = y^2 - xz$, $g = yz - x^3$, $h = z^2 - x^2y$ *olmak üzere* $S = k[x, y, z]/\langle f, g, h\rangle$ *olsun.* $\Omega_1(S))$ *nin Fitting ideallerini bulalım.*

F, $\{d_1(x), d_1(y), d_1(z)\}$ *kümesi üretilen serbest bir* S*-modül ve* N, $\{d_1(f), d_1(g), d_1(h)\}$ *ile üretilen* F *nin bir alt modülü olsun.*

$$\begin{aligned} d_1(f) &= d_1(y^2 - xz) = 2yd_1(y) - zd_1(x) - xd_1(z) \\ d_1(g) &= d_1(yz - x^3) = zd_1(y) + yd_1(z) - 3x^2d_1(x) \\ d_1(h) &= d_1(z^2 - x^2y) = 2zd_1(z) - 2xyd_1(x) - x^2d_1(y) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buna göre

$$\begin{pmatrix} -z & -3x^2 & -2xy \\ 2y & z & -x^2 \\ -x & y & 2z \end{pmatrix}$$

matrisi $\Omega_1(S))$ *nin bağıntı matrisidir.* $\Omega_1(S))$ *nin Fitting idealleri*

$F_0(\Omega_1(S)) = 0 = F_1(\Omega_1(S))$ *ve* $F_2(\Omega_1(S)) = (x, y, z) \subseteq F_3(\Omega_1(S)) = S$ *olarak bulunur.* $rank\Omega_1(S) = 2$ *ve* $F_2(\Omega_1(S)) = (x, y, z) \neq S$ *olduğundan Teorem 4.2.4 gereğince* $\Omega_1(S)$ *projektif değildir. Dolayısıyla* S *regüler bir halka değildir.*

BÖLÜM 5

TERSLENEBİLİR İDEALLER

5.1 Terslenebilir İdeal Tanımı ve Özellikleri

Bu kısımda, terslenebilir ideal tanımı ve literatürde yer alan terslenebilir ideallerle ilgili temel özellik ve sonuçlar verilecektir. Bu kısımda [31], [4] ve [26] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 5.1.1. *R tamlık bölgesi Q, R 'nin kesir cismi olsun. I, Q cisminin sıfırdan farklı bir alt R-altmodülü ve bir $d \neq 0 \in R$ için, $dI \subseteq R$ ise I ya R nin kesirsel ideali denir. $I^{-1} = \{d \in Q : \quad dI \subseteq R\}$ yine bir kesirsel idealdir. $II^{-1} = R$ oluyorsa I idealine terslenebilir ideal denir.*

Örnek 5.1.2. *R bir tamlık bölgesi ve Q, R nin kesir cismi olsun. R nin sıfırdan farklı her ideali kesirseldir. R de kapsanan her kesirsel ideal de R nin bir idealidir.*

Örnek 5.1.3. *$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminde, $\frac{1}{5}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin kesirsel bir idealidir. $\frac{1}{5}\mathbb{Z}$ terslenebilir kesirsel idealdir ve tersi $5\mathbb{Z}$ dir.*

Teorem 5.1.4. *R tamlık bölgesi, Q kesir cismi ve I, R nin kesirsel ideali olsun. I terslenebilir ise sonlu üretilmiştir.*

***İspat*.** I herhangi bir terslenebilir ideal olsun. $I^{-1}I = R$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 1$ olacak şekilde $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $u_i \in I^{-1}$ ve $v_i \in I$ vardır. Herhangi bir $x \in I$ için $x = x\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}(u_i x)v_i$ ve $u_i x \in R$ dir. Böylece I, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ tarafından üretilmiş bir idealdir. □

Teorem 5.1.5. (R, m) *bir yerel halka olsun. Herhangi bir terslenebilir ideal temel idealdir.*

Teorem 5.1.6. *R bir tamlık bölgesi ve I terslenebilir bir ideali olsun. S, R'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ise $S^{-1}I$ terslenebilir idealdir.*

Teorem 5.1.7 ([16])**.** *R bir tamlık bölgesi ve I, R nin sonlu üretilmiş bir ideali olsun. I terslenebilirdir ancak ve ancak $\forall m$ maksimal ideali için I_m bir temel idealdir.*

İspat. Teorem 5.1.6 den I terslenebilir ideal ise m herhangi bir maksimal ideal olmak üzere I_m terslenebilirdir. Böylece Teorem 5.1.5 den I_m sonlu üretilmiştir. Diğer taraftan, her I_m bir temel ideal olsun. Varsayalım ki I terslenebilir olmasın, yani $II^{-1} \neq R$ olsun. Böylece $II^{-1} \subseteq m$ olacak şekilde bir m maksimal ideali vardır. I_m temel ideal olduğundan $i \in I$ ve $s \in R \setminus M$ için $I_m = \langle \frac{i}{s} \rangle$ diyelim. $I = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ olsun. $\exists s_j \in R \setminus m$ öyle ki $s_j a_j \in \langle i \rangle$ dir. $s = s_1 ... s_n$ diyelim. Bu durumda $si^{-1} \in I^{-1}$ olur.
$s = si^{-1}i \in I^{-1}I \subseteq m$ olduğundan $s \in m$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O zaman $II^{-1} = R$ olmalıdır. □

Teorem 5.1.8. *R bir tamlık bölgesi ve $I_1, I_2, ..., I_n$ kesirsel idealler olsun. $I_1 I_2 ... I_n$ ideal çarpımının terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için I_i kesirsel ideallerinin terslenebilir olmasıdır.*

Teorem 5.1.9 ([26])**.** *Eğer A ideali terslenebilir bir B ideali tarafından içeriliyorsa $A = BC$ olacak şekilde bir C ideali vardır.*

5.2 Evrensel Türev Modüllerin Fitting İdeallerinin Terslenebilirliği

Bu kısımda, $\Omega_1(R \otimes_k S)$ nin Fitting ideallerinin terslenebilirliği ile ilgili elde ettiğimiz sonuçlar yer almaktadır. Ayrıca $\Omega_1(R \otimes_k S)$ ve $\Omega_2(R \otimes_k S)$ nin Fitting ideallerini $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_2(S)$ nin Fitting idealleri cinsinden ifade ettik. Burada da terslenebilir ideallerin özelliklerinden yararlandık.

Teorem 5.2.1 ([18])**.** *R Noetherian bir halka, $Ass(R) = Min(R)$ ve $\Omega_n(R)$ de n-inci dereceden evrensel R-modül olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.*

i) $\Omega_n(R)/T(\Omega_n(R))$ *rankı r olan projektif R modüldür ve* $pd_R \Omega_n(R) \leq 1$ *dir.*

ii) $i = 0, 1, ..., r-1$ *için* $F_i(\Omega_n(R)) = 0$ *ve* $F_r(\Omega_n(R))$ *terslenebilir idealdir.*

İspat. $\Omega_n(R)/T(\Omega_n(R))$ rankı r olan projektif bir R modüldür ve $pd_R\Omega_n(R) \leq 1$ olsun. Bu durumda $(\Omega_n(R)/T(\Omega_n(R)))_m$ modülü rankı r olan serbest bir R-modüldür. $(\Omega_n(R)/T(\Omega_n(R)))_m \cong (\Omega_n(R))_m/T(\Omega_n(R))_m \cong \Omega_n(R)_m/T(\Omega_n(R)_m)$ izomorfizması ve Teorem 4.1.19 den dolayı $i = 0, 1, ..., r-1$ için $F_i(\Omega_n(R)_m) = 0$ dır, $F_r(\Omega_n(R)_m)$ regüler bir eleman tarafından üretilir. $i = 0, 1, ..., r-1$ için $F_i(\Omega_n(R))_m = 0$ ise $F_i(\Omega_n(R)) = 0$ dır. $F_r(\Omega_n(R)_m)$ bir temel ideal olduğundan Teorem 5.1.7 den dolayı $F_r(\Omega_n(R)$ bir terslenebilir idealdir. Böylece ispat tamamlanır. Tersi de benzer şekilde yapılır. □

Sonuç 5.2.2 ([31]). *R bir Noetherian tamlık bölgesi ve $\Omega_n(R)$ 'nin rankı r olsun. $F_r(\Omega_n(R))$ terslenebilir ideal ise $pd_R\Omega_n(R) \leq 1$ dir.*

Teorem 5.2.3 ([31]). *R bir Noetherian tamlık bölgesi olsun. Eğer herhangi bir $n \in N$ için $F_n(\Omega_1(R))$ terslenebilir ideal değilse R regüler halka değildir.*

İspat. R regüler halka olsun. R regüler olduğundan $J_1(R)$ projektiftir. Bu durumda $\Omega_1(R)$ projektif olacaktır. $\Omega_1(R)$'nin rankı r olsun. $\Omega_1(R)$ rankı r olan projektif bir modül olduğundan $i = 0, 1, ..., r-1$ için $F_i(\Omega_1(R)) = 0$ ve $i \geq r$ için $F_i(\Omega_1(R)) = R$ olup istenen elde edilir. □

Teorem 5.2.4 ([18]). *R ve S birer k-cebir, $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ sonlu üretilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$F_i(\Omega_1(R \otimes_k S)) = \sum_{p+q=i} F_p(\Omega_1(R)) \otimes_k F_q(\Omega_1(S))$$

Özel olarak, $F_0(\Omega_1(R \otimes_k S)) = F_0(\Omega_1(R)) \otimes_k F_0(\Omega_1(S))$ dir.

İspat. Teorem 3.4.10 den dolayı $\Omega_1(R \otimes_k S) \cong (\Omega_1(R) \otimes_k S) \oplus (\Omega_1(S) \otimes_k R)$ izomorfizması vardır. Bu izomorfizmayı kullanarak $F_i(\Omega_1(R \otimes_k S))$ Fitting idealinin eşitini bulalım.

$$\begin{aligned}
F_i(\Omega_1(R \otimes_k S)) &= \sum_{p+q=i} F_p(\Omega_1(R) \otimes_k S)\, F_q(R \otimes_k \Omega_1(S)) \\
&= \sum_{p+q=i} S F_p(\Omega_1(R)) \otimes_k RF_q(\Omega_1(S)) \text{ (Önerme 4.1.5)} \\
&= \sum_{p+q=i} RF_p(\Omega_1(R)) \otimes_k S F_q(\Omega_1(S)) \\
&= \sum_{p+q=i} F_p(\Omega_1(R)) \otimes_k F_q(\Omega_1(S))
\end{aligned}$$

□

$\Omega_1(R/I\otimes_k S/J)$ ve $\Omega_2(R/I\otimes_k S/J)$ modüllerinin Fitting ideallerinin terslenebilirliği ile ilgili elde ettiğimiz sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 5.2.5. *$R = k[x_1, x_2, ..., x_s]$ ve $S = k[y_1, y_2, ..., y_t]$ polinom cebirleri, $R/I = \dfrac{k[x_1, x_2, ..., x_s]}{\langle f_1, f_2, ..., f_m\rangle}$ ve $S/J = \dfrac{k[y_1, y_2, ..., y_t]}{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle}$ afin k-cebirler olsun. Eğer $rank\Omega_1(R/I) = i$, $rank\Omega_1(S/J) = j$, $F_i(\Omega_1(R/I))$ ve $F_j(\Omega_1(S/J))$ terslenebilir idealler ise $F_{i+j}(\Omega_1(R/I\otimes_k S/J))$ bir terslenebilir idealdir.*

İspat. Herhangi bir $i \in I$ için

$$F_i(\Omega_1(R/I\otimes_k S/J)) = \sum_{p+q=i} F_p(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_q(\Omega_1(S/J))$$

olduğunu biliyoruz [18]. $rank\Omega_1(R/I) = i$ ise $k < i$ için $F_k(\Omega_1(R/I)) = 0$; $k \geq i$ için $F_k(\Omega_1(R/I)) \neq 0$ olur. Benzer şekilde $rank\Omega_1(S) = j$ ise $l < j$ için $F_l(\Omega_1(S)) = 0$; $l \geq j$ için $F_l(\Omega_1(S)) \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
F_{i+j}(\Omega_1(R/I\otimes_k S/J)) &= \sum_{p+q=i+j} F_p(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_q(\Omega_1(S/J)) \\
F_{i+j}(\Omega_1(R/I\otimes_k S/J)) &= F_0(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_{i+j}(\Omega_1(S/J)) + F_1(\Omega_1(R/I))\otimes_k \\
&\quad F_{i+j-1}(\Omega_1(S/J)) + \cdots + F_{i-1}(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_{j+1}(\Omega_1(S/J)) + \\
&\quad F_i(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S/J)) + F_{i+1}(\Omega_1(R/I))\otimes_k \\
&\quad F_{j-1}(\Omega_1(S/J)) + \cdots + F_{i+j}(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_0(\Omega_1(S/J)) \\
&= 0 \otimes_k F_{i+j}(\Omega_1(S/J)) + 0 \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_1(S/J)) + \cdots + \\
&\quad 0 \otimes_k F_{j+1}(\Omega_1(S/J)) + F_i(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S/J)) + \\
&\quad F_{i+1}(\Omega_1(R/I)) \otimes_k 0 + \cdots + F_{i+j}(\Omega_1(R/I)) \otimes_k 0 \\
F_{i+j}(\Omega_1(R/I\otimes_k S/J)) &= F_i(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S/J))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. R/I ve S/J tamlık bölgesi olduğundan $R/I\otimes_k S/J$ tamlık bölgesidir. Böylece

$$F_{i+j}(\Omega_1(R/I\otimes_k S/J)) = F_i(\Omega_1(R/I)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S/J)) \neq 0$$

elde edilir. Bu eşitliği $R/I\otimes_k S/J$ halkasının bir m maksimal ideali ile lokalize edelim ve Teorem 2.3.14 deki izomorfizmayı kullanalım:

$$\begin{aligned}
[F_{i+j}(\Omega_1(R/I\otimes_k S/J))]_m &= [F_i(\Omega_1(R/I) \otimes_k F_j(\Omega_1(S/J))]_m \\
&= [F_i(\Omega_1(R/I)]_m \otimes_{k_m} [F_j(\Omega_1(S/J))]_m
\end{aligned}$$

Teorem 5.1.7 dan dolayı $F_i(\Omega_1(R/I))$ ve $F_j(\Omega_1(S/J))$ terslenebilir idealler olduğundan $[F_i(\Omega_1(R/I))]_m$ ve $[F_j(\Omega_1(S/J))]_m$ temel ideallerdir. Bu ideallerin tensör çarpımı da temel ideal olacağından $[F_{i+j}(\Omega_1(R/I \otimes_k S/J))]_m$ bir temel idealdir. Teorem 5.1.7 den dolayı $F_{i+j}(\Omega_1(R/I \otimes_k S/J))$ bir terslenebilir idealdir. □

Bu teoremi aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz:

Teorem 5.2.6. *R/I ve S/J Teorem 5.2.5 deki gibi olsun. Eğer $\Omega_1(R/I)$ ve $\Omega_1(S/J)$ birinci mertebeden evrensel türev modüllerinin sıfırdan farklı ilk Fitting idealleri terslenebilir ise $\Omega_1(R/I \otimes_k S/J)$ nin sıfırdan farklı ilk Fitting ideali terslenebilirdir.*

Sonuç 5.2.7. *$rank\Omega_1(R/I) = i$ ve $rank\Omega_1(S/J) = j$ olsun. $F_i(\Omega_1(R/I))$ ve $F_j(\Omega_1(S/J))$ terslenebilir idealler ise $pd\Omega_1(R/I \otimes_k S/J) \leq 1$ dir.*

İspat. Teorem 5.2.5' den, $F_i(\Omega_1(R/I))$ ve $F_j(\Omega_1(S/J))$ terslenebilir idealler ise $F_{i+j}(\Omega_1(R/I \otimes_k S/J))$ terslenebilirdir. Sonuç 5.2.2'den $pd\Omega_1(R/I \otimes_k S/J) \leq 1$ olmalıdır. □

Sonuç 5.2.8. *$R = k[x_1, x_2, ...x_s]$ ve $S = k[y_1, y_2, ...y_t]$ polinom cebirleri, $S/J = \dfrac{k[y_1, y_2, ..., y_t]}{\langle g_1, g_2, ..., g_n\rangle}$ afin k-cebir olsun. Herhangi bir n sayısı için $F_n(\Omega_1(R/I \otimes_k S/J))$ terslenebilir bir ideal değilse $\Omega_1(S/J)$ projektif değildir.*

Lemma 5.2.9. *$R = k[x_1, x_2, ...x_s]$ ve $S = k[y_1, y_2, ..., y_t]$ polinom cebirleri, $R/I = \dfrac{k[x_1, x_2, ..., x_s]}{\langle f_1, f_2, ..., f_m\rangle}$ ve $\dim(R/I) = s - m$ olsun. $rank\Omega_2(R/I) = i$, $rank\Omega_2(S) = j$ olduğunu varsayalım. $\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S)$ nin sıfırdan farklı ilk Fitting ideali $F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S))$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S)) = F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S)) \otimes_k F_i(\Omega_2(R/I)) \otimes_k F_j(\Omega_2(S))$$

İspat. Genelliği bozmayacağından $rank\Omega_2(R/I) = i$, $rank\Omega_2(S) = j$ olmak üzere $i < j$ olduğunu varsayalım. Teorem 3.4.12 den

$$\Omega_2(R/I \otimes_k S) \cong (\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S)) \oplus (\Omega_2(R/I) \otimes_k S) \oplus (R/I \otimes_k \Omega_2(S))$$

izomorfizmasının varlığını biliyoruz. Bu izomorfizmayı kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I\otimes_k S)) = \;& F_{(s-m)t+i+j}[(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S))\oplus(\Omega_2(R/I)\otimes_k S) \\ & \oplus(R/I\otimes_k \Omega_2(S))] \\ = \;& \sum_{p+q=(s-m)t+i+j} F_p(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S))\otimes_R \\ & F_q[\Omega_2(R/I)\otimes_k S)\oplus(R/I\otimes_k \Omega_2(S))] \end{aligned}$$

$A := \Omega_2(R/I)\otimes_k S)\oplus(R/I\otimes_k \Omega_2(S))$ diyelim. Buna göre

$$\begin{aligned} F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I\otimes_k S)) = \;& F_0(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S))\otimes_k F_{(s-m)t+i+j}(A)+\cdots \\ & +F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S))\otimes_k F_{i+j}(A)+ \\ & F_{(s-m)t+1}(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S))\otimes_k F_{i+j-1}(A) \\ & +\cdots+F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S))\otimes_k F_0(A) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Hipotezden $\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S)$' nin sıfırdan farklı ilk Fitting ideali $F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S))$ olduğundan aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$F_0(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S)) = \cdots = F_{(s-m)t-1}(\Omega_1(R/I)\otimes_k \Omega_1(S)) = 0 \text{ dır.}$$

Şimdi $F_{i+j}(A), F_{i+j-1}(A), ..., F_0(A)$ ideallerini inceleyelim.

$$F_{i+j}(A) = \sum_{p+q=i+j} F_p(\Omega_2(R/I)\otimes_k F_q(\Omega_2(S)$$

$rank\Omega_2(R/I) = i$ olduğundan $F_0(\Omega_2(R/I)) = \cdots = F_{i-1}(\Omega_2(R/I)) = 0$ dır.
$rank\Omega_2(S) = j$ olduğundan $F_0(\Omega_2(S)) = \cdots = F_{j-1}(\Omega_2(S)) = 0$ dır. Böylece $F_{i+j}(A)$' nin eşiti aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_{i+j}(A) = F_i(\Omega_2(R/I))\otimes_k F_j(\Omega_2(S)).$$

Şimdi $F_{i+j-1}(A)$' nin eşitini bulalım.

$$\begin{aligned} F_{i+j-1}(A) = \;& \sum_{p+q=i+j-1} F_p(\Omega_2(R/I)\otimes_k F_q(\Omega_2(S) \\ = \;& F_0(\Omega_2(R/I))\otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_2(S)) + F_1(\Omega_2(R/I))\otimes_k \\ & F_{i+j-2}(\Omega_2(S)) + \cdots + F_i(\Omega_2(R/I))\otimes_k F_{j-1}(\Omega_2(S))+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F_{i+1}(\Omega_2(R/I)) \otimes_k F_{j-2}(\Omega_2(S)) + \cdots + F_j(\Omega_2(R/I)) \otimes_k \\ & F_{i-1}(\Omega_2(S)) + \cdots + F_{i+j-1}(\Omega_2(R/I)) \otimes_k F_0(\Omega_2(S)) \\ = \; & 0 \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_2(S)) + 0 \otimes_k F_{i+j-2}(\Omega_2(S)) + \cdots + \\ & F_i(\Omega_2(R/I)) \otimes_k 0 + \cdots + F_{i+j-1}(\Omega_2(R/I)) \otimes_k 0. \end{aligned}$$

$0 \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_2(S)) = 0 \otimes_k F_{i+j-2}(\Omega_2(S)) = \cdots = F_i(\Omega_2(R/I)) \otimes_k 0 = \cdots = F_{i+j-1}(\Omega_2(R/I)) \otimes_k 0 = 0$ olduğundan $F_{i+j-1}(A) = 0$ olur. Benzer şekilde $F_0(A), \ldots, F_{i+j-2}(A)$ Fitting ideallerinin sıfır olduğu görülür. Böylece

$$F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S)) = F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S)) \otimes_k F_i(\Omega_2(R/I)) \otimes_k F_j(\Omega_2(S))$$

olduğundan $F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S) \neq 0$ elde edilir. □

Teorem 5.2.10. *$R = k[x_1, x_2, ...x_s]$ ve $S = k[y_1, y_2, ...y_t]$ polinom cebirleri, $R/I = \dfrac{k[x_1, x_2, ..., x_s]}{\langle f_1, f_2, ..., f_m \rangle}$ ve $\dim(R/I) = s-m$ olarak verilsin. $rank\Omega_2(R/I) = i$, $rank\Omega_2(S) = j$ ve $\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S)$ nin sıfırdan farklı ilk Fitting ideali $F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S))$ terslenebilir olsun. $F_i(\Omega_2(R/I))$ ve $F_j(\Omega_2(S))$ terslenebilir idealler ise $F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S))$ ideali terslenebilirdir.*

İspat. m bir maksimal ideal olmak üzere, $F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S)$ Fitting idealini m ile lokalize edelim ve Teorem 2.3.14' deki izomorfizmayı kullanalım:

$$[F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S)]_m = [F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S)) \otimes_k F_i(\Omega_2(R/I)) \otimes_k F_j(\Omega_2(S))]_m$$

$$[F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S)]_m = [F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S))]_m \otimes_{k_m} [F_i(\Omega_2(R/I))]_m \otimes_{k_m} [F_j(\Omega_2(S))]_m \; .$$

$F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S))$, $F_i(\Omega_2(R/I))$ ve $F_j(\Omega_2(S))$ terslenebilir idealler olduğundan, Teorem 5.1.7' den dolayı bu ideallerin m ile lokalizasyonu temel idealdir. Bu ideallerin tensör çarpımları da temel ideal olacağından $[F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S))]_m$ ideali temel idealdir. Yine Teorem 5.1.7' den dolayı $F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S))$ bir terslenebilir idealdir. □

Sonuç 5.2.11. *$R = k[x_1, x_2, ...x_s]$ ve $S = k[y_1, y_2, ...y_t]$ polinom cebirleri, $R/I = \dfrac{k[x_1, x_2, ..., x_s]}{\langle f_1, f_2, ..., f_m \rangle}$ ve $\dim(R/I) = s-m$ olarak verilsin. $rank\Omega_2(R/I) = i$, $rank\Omega_2(S) = j$ ve $\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S)$' nin sıfırdan farklı ilk Fitting ideali $F_{(s-m)t}(\Omega_1(R/I) \otimes_k \Omega_1(S))$ terslenebilir olsun. $F_i(\Omega_2(R/I))$ ve $F_j(\Omega_2(S))$ terslenebilir idealler ise $pd\Omega_2(R/I \otimes_k S) \leq 1$'*

dir.

İspat. Teorem 5.2.10' dan dolayı $F_{(s-m)t+i+j}(\Omega_2(R/I \otimes_k S))$ terslenebilir bir idealdir. Bu durumda Sonuç 5.2.2' den $pd\Omega_2(R/I \otimes_k S) \leq 1$ olmalıdır. □

Önerme 5.2.12. *R ve S afin k-cebirler olsun. $F_i(\Omega_1(R))$ ve $F_j(\Omega_1(S))$ terslenebilir idealler ise $F_{i+j}(\Omega_1(R \otimes_k S))$ ve $F_{i+j}(\Omega_2(R \otimes_k S))$ idealleri $F_i(\Omega_1(R))$ ve $F_j(\Omega_1(S))$ idealleri cinsinden yazılır.*

İspat. Teorem 3.4.10 den

$$\Omega_1(R \otimes_k S) \cong \Omega_1(R) \otimes_k S \oplus R \otimes_k \Omega_1(S)$$

izomorfizması vardır. Bu izomorfizma kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} F_{i+j}(\Omega_1(R \otimes_k S)) = \;& F_{i+j}[\Omega_1(R) \otimes_k S \oplus R \otimes_k \Omega_1(S)] \\ = \;& \textstyle\sum_{p+q=i+j} F_p(\Omega_1(R)) \otimes_k F_q(\Omega_1(S)) \\ = \;& F_0(\Omega_1(R)) \otimes_k F_{i+j}(\Omega_1(S)) + F_1(\Omega_1(R)) \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_1(S)) + \\ & F_2(\Omega_1(R)) \otimes_k F_{i+j-2}(\Omega_1(S)) + \cdots + F_i(\Omega_1(R)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S)) + \\ & F_{i+1}(\Omega_1(R)) \otimes_k F_{j-1}(\Omega_1(S)) + \cdots + F_{i+j}(\Omega_1(R)) \otimes_k F_0(\Omega_1(S)) \end{aligned}$$

Teorem 5.1.9 kullanılarak $F_i(\Omega_1(R))$ terslenebilir ise $0 \leq k < i$ için $F_k(\Omega_1(R)) \subset F_i(\Omega_1(R))$ olduğundan bir C_k ideali vardır öyle ki

$$F_k(\Omega_1(R)) = F_i(\Omega_1(R))C_k$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $0 \leq l < j$ için $F_l(\Omega_1(S)) \subset F_j(\Omega_1(S))$ olduğundan bir D_l ideali için

$$F_l(\Omega_1(S)) = F_j(\Omega_1(S))D_l$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $F_{i+j}(\Omega_1(R \otimes_k S))$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} F_{i+j}(\Omega_1(R \otimes_k S)) = \;& C_0F_i(\Omega_1(R)) \otimes_k F_{i+j}(\Omega_1(S)) + C_1F_i(\Omega_1(R)) \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_1(S)) + \\ & C_2F_i(\Omega_1(R)) \otimes_k F_{i+j-2}(\Omega_1(S)) + \cdots + F_i(\Omega_1(R)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S)) + \\ & F_{i+1}(\Omega_1(R)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S))D_{j-1} + F_{i+2}(\Omega_1(R)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S))D_{j-2} + \\ & \cdots + F_{i+j}(\Omega_1(R)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S))D_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F_i(\Omega_1(R)).[C_0 \otimes_k F_{i+j}(\Omega_1(S)) + C_1 \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_1(S)) + \cdots + \\
&\quad C_{i-1} \otimes_k F_{j+1}(\Omega_1(S))] + F_i(\Omega_1(R)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S)) + \\
&\quad F_j(\Omega_1(S))[D_0 \otimes_k F_{i+j}(\Omega_1(R)) + D_1 \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_1(R)) + \cdots + \\
&\quad D_{j-1} \otimes_k F_{i+1}(\Omega_1(R))]
\end{aligned}
$$

$C := C_0 \otimes_k F_{i+j}(\Omega_1(S)) + C_1 \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_1(S)) + \cdots + C_{i-1} \otimes_k F_{j+1}(\Omega_1(S))$ ve $D := D_0 \otimes_k F_{i+j}(\Omega_1(R)) + D_1 \otimes_k F_{i+j-1}(\Omega_1(R)) + \cdots + D_{j-1} \otimes_k F_{i+1}(\Omega_1(R))$ diyelim. Bu eşitlikleri kullanarak $F_{i+j}(\Omega_1(R \otimes_k S))$ idealinin eşitini yazalım:

$$F_{i+j}(\Omega_1(R \otimes_k S)) = F_i(\Omega_1(R)).C + F_i(\Omega_1(R)) \otimes_k F_j(\Omega_1(S)) + F_j(\Omega_1(S)).D$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $F_{i+j}(\Omega_2(R \otimes_k S))$ idealini terslenebilir $F_i(\Omega_2(R))$ ve $F_j(\Omega_2(S))$ ideallerini kullanarak ifade edelim. Teorem 3.4.12' den

$$\Omega_2(R \otimes_k S) \cong (\Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)) \oplus (\Omega_2(R) \otimes_k S) \oplus (R \otimes_k \Omega_2(S))$$

izomorfizması vardır. $F_i(\Omega_1(R))$ ideali terslenebilir olduğundan
$0 \leq k < i$ ise $F_k(\Omega_2(R)) \subset F_i(\Omega_2(R))$ için $\exists C_k$ ideali vardır öyle ki

$$F_k(\Omega_2(R)) = F_i(\Omega_2(R))C_k$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $0 \leq l < j \Rightarrow F_l(\Omega_2(S)) \subset F_j(\Omega_2(S))$ $\exists D_l$ ideali vardır öyle ki

$$F_l(\Omega_2(S)) = F_j(\Omega_2(S))D_l$$

eşitliği vardır. Bu eşitlikleri ve yukarıdaki izomorfizmayı kullanarak $F_{i+j}(\Omega_2(R \otimes_k S))$ idealini yeniden yazalım:

$$
\begin{aligned}
F_{i+j}(\Omega_2(R \otimes_k S)) &= F_{i+j}[(\Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)) \oplus (\Omega_2(R) \otimes_k S) \oplus (R \otimes_k \Omega_2(S))] \\
&= \sum_{p+q=i+j} F_p(\Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)) \otimes_R F_q[\Omega_2(R) \otimes_k S) \oplus (R \otimes_k \Omega_2(S))] \\
&= \sum_{p+q=i+j} F_p(\Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)) \otimes_R [\sum_{k+l=q} F_k(\Omega_2(R)) \otimes_k F_l(\Omega_2(S))] \\
&= F_0[\Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)] \otimes_k [\sum_{k+l=i+j} F_k(\Omega_2(R) \otimes_k F_l \Omega_2(S))] + \\
&\quad F_1[\Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)] \otimes_k [\sum_{k+l=i+j-1} F_k(\Omega_2(R) \otimes_k F_l(\Omega_2(S)))] + \cdots +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& F_{i+j}[\Omega_1(R)\otimes_k \Omega_1(S)]\otimes_k [\sum_{k+l=0} F_k(\Omega_2(R)\otimes_k F_l\Omega_2(S))] \\
= \; & F_0[\Omega_1(R)\otimes_k \Omega_1(S)]\otimes_k [F_i(\Omega_2(R)).C_0 + F_i(\Omega_2(R))\otimes_k F_j(\Omega_2(S))+ \\
& D_0F_j(\Omega_2(S))] + F_1[\Omega_1(R)\otimes_k \Omega_1(S)]\otimes_k [F_i(\Omega_2(R)).C_1+ \\
& F_j(\Omega_2(S))D_1] + F_{i+j}[\Omega_1(R)\otimes_k \Omega_1(S)]\otimes_k [F_i(\Omega_2(R)).C_{i+j}+ \\
& F_j(\Omega_2(S))D_{i+j}]
\end{aligned}
$$

□

Örnek 5.2.13. *$R/I = k[x,y]/\langle y^2 - x^3\rangle$, $S/J = k[z,t]/\langle z^2 - t^3\rangle$ afin k-cebirler ve $K = I\otimes_k S + R\otimes_k J$ olsun. F, $\{\delta_1(x\otimes 1), \delta_1(y\otimes 1), \delta_1(1\otimes z), \delta_1(1\otimes t)\}$ ile üretilen bir $R\otimes_k S$-modül; N ise $\{\delta_1(f\otimes 1), \delta_1(1\otimes g)\}$ ile üretilen F' nin bir alt modülü olsun. $\Omega_1(\dfrac{R\otimes_k S}{K})\cong F/N$ olduğu için aşağıdaki kısa tam dizi elde edilir:*

$$0\longrightarrow N\longrightarrow F\longrightarrow \Omega_1(\frac{R\otimes_k S}{K})\longrightarrow 0$$

$rankN = rankF - rank\Omega_1(\dfrac{R\otimes_k S}{K}) = 4-2 = 2$ olduğu için N bir serbest modüldür. Böylece yukarıdaki tam dizi $\Omega_1(\dfrac{R\otimes_k S}{K})$' nin bir serbest çözünürlüğüdür. Bu durumda $pd\Omega_1(\dfrac{R\otimes_k S}{K})\leq 1$ dir.

$$\delta_1(f\otimes 1) = \delta_1(y^2\otimes 1) - \delta_2(x^3\otimes 1) = (2y\otimes 1)\delta_1(y\otimes 1) - (3x^2\otimes 1)\delta_1(x\otimes 1)$$
$$\delta_1(1\otimes g) = \delta_1(1\otimes z^2) - \delta_2(1\otimes t^3) = (1\otimes 2z)\delta_1(1\otimes z) - (1\otimes 3t^2)\delta_1(1\otimes t)$$

$$\begin{pmatrix} -(3x^2\otimes 1) & 2y\otimes 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1\otimes 3t^2) & 1\otimes 2z \end{pmatrix}$$

$\Omega_1(\frac{R\otimes_k S}{K})$ nin Fitting idealleri aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
& F_0(\Omega_1(\frac{R\otimes_k S}{K})) = 0 = F_1(\Omega_1(\frac{R\otimes_k S}{K})) \\
& F_2(\Omega_1(\frac{R\otimes_k S}{K})) = (x^2\otimes t^2, x^2\otimes z, y\otimes t^2, y\otimes z) \\
& F_3(\Omega_1(\frac{R\otimes_k S}{K})) = (x^2\otimes 1, y\otimes 1, 1\otimes t^2, 1\otimes z) \\
& F_4(\Omega_1(\frac{R\otimes_k S}{K})) = \frac{R\otimes_k S}{K}
\end{aligned}
$$

$rank\Omega_1(\dfrac{R\otimes_k S}{K}) = 2$ ve $F_2(\Omega_1(\dfrac{R\otimes_k S}{K})) \neq \dfrac{R\otimes_k S}{K}$ olduğu için, $\Omega_1(\frac{R\otimes_k S}{K})$ projektif

değildir. Böylece $\frac{R\otimes_k S}{K}$ *regüler değildir. Bu durumda* $pd\Omega_1(\dfrac{R\otimes_k S}{K}) = 1$.

F', $\{\delta_2(x\otimes 1), \delta_2(y\otimes 1), \delta_2(1\otimes z), \delta_2(1\otimes t), \delta_2(x\otimes z), \delta_2(x\otimes \delta_2(x\otimes t), \delta_2(y\otimes z), \delta_2(y\otimes t), \delta_2(x^2\otimes 1), \delta_2(y^2\otimes 1), \delta_2(1\otimes z^2), \delta_2(1\otimes t^2), \delta_2(xy\otimes 1), \delta_2(1\otimes zt)\}$ kümesi tarafindan üretilen serbest $R\otimes_k S$-modüldür.

N', $\{\delta_2(f\otimes 1), \delta_2(1\otimes g), \delta_2(fx\otimes 1), \delta_2(fy\otimes 1), \delta_2(1\otimes zg), \delta_2(1\otimes \delta_2(1\otimes tg), \delta_2(f\otimes z), \delta_2(f\otimes t), \delta_2(x\otimes g), \delta_2(y\otimes g)\}$ ile üretilen F' modülünün bir alt modülüdür. $\Omega_2(\dfrac{R\otimes_k S}{K}) \cong F'/N'$ olduğu için aşağıdaki kısa tam dizi elde edilir:

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow F' \longrightarrow \Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K}) \longrightarrow 0$$

$$rankN' = rankF' - rank\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K}) = 14 - 5 = 9$$

olduğu için, N' serbest modül değildir.

$$\begin{aligned}
\delta_2(f\otimes 1) &= \delta_2(y^2\otimes 1) - (3x\otimes 1)\delta_2(x^2\otimes 1) - (3x^2\otimes 1)\delta_2(x\otimes 1)\\
\delta_2(1\otimes g) &= \delta_2(1\otimes t^2) - (1\otimes 3z)\delta_2(1\otimes z^2) - (1\otimes 3z^2)\delta_2(1\otimes z)\\
\delta_2(xf\otimes 1) &= (x\otimes 1)\delta_2(y^2\otimes 1) - (2y\otimes 1)\delta_2(xy\otimes 1) + (7x^3\otimes 1)\delta_2(x\otimes 1)\\
&\quad + (2xy\otimes 1)\delta_2(y\otimes 1) - (6x^2\otimes 1)\delta_2(x^2\otimes 1)\\
\delta_2(yf\otimes 1) &= (3y\otimes 1)\delta_2(y^2\otimes 1) - (x^3\otimes 1)\delta_2(y\otimes 1) - (3xy\otimes 1)\delta_2(x^2\otimes 1)\\
&\quad - (3x^2\otimes 1)\delta_2(xy\otimes 1) + (6x^2y\otimes 1)\delta_2(x\otimes 1)\\
\delta_2(f\otimes z) &= (1\otimes z)\delta_2(y^2\otimes 1) + (2y\otimes 1)\delta_2(y\otimes z) - (2y\otimes z)\delta_2(y\otimes 1)\\
&\quad + (x^3\otimes 1)\delta_2(1\otimes z) - (3x\otimes z)\delta_2(x^2\otimes 1) + (6x^2\otimes z)\delta_2(x\otimes 1)\\
\delta_2(x\otimes g) &= (x\otimes 1)\delta_2(1\otimes t^2) + (2\otimes t)\delta_2(x\otimes t) - (2x\otimes t)\delta_2(1\otimes t)\\
&\quad + (1\otimes z^3)\delta_2(x\otimes 1) - (3x\otimes z)\delta_2(1\otimes z^2) - (1\otimes 3z^2)\delta_2(x\otimes z)\\
&\quad + (6x\otimes z^2)\delta_2(1\otimes z)\\
\delta_2(y\otimes g) &= (y\otimes 1)\delta_2(1\otimes t^2) + (1\otimes 2t)\delta_2(y\otimes t) - (2y\otimes t)\delta_2(1\otimes t)\\
&\quad + (1\otimes z^3)\delta_2(y\otimes 1) - (3y\otimes z)\delta_2(1\otimes z^2) - (3\otimes z^2)\delta_2(y\otimes z)\\
&\quad + (6y\otimes z^2)\delta_2(1\otimes z)\\
\delta_2(z\otimes g) &= (1\otimes z)\delta_2(1\otimes t^2) + (2\otimes t)\delta_2(1\otimes zt) + (7\otimes z^3)\delta_2(1\otimes z)\\
&\quad - (2z\otimes t)\delta_2(1\otimes t) - (6\otimes z^2)\delta_2(1\otimes z^2)
\end{aligned}$$

$$\delta_2(t\otimes g) = (3\otimes t)\delta_2(1\otimes t^2) - (1\otimes z^3)\delta_2(1\otimes t) - (1\otimes zt)\delta_2(1\otimes z^2)$$
$$- (3\otimes z^2)\delta_2(1\otimes zt) + (1\otimes z^2t)\delta_2(1\otimes z)$$

$\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})$ *nin Fitting idealleri aşağıdaki gibidir:*

$F_0(\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})) = F_1(\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})) = F_2(\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})) = 0$

$F_3(\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})) = F_4(\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})) = 0$

$F_5(\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})) = (xy\otimes z) \subseteq F_6(\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})) = \frac{R\otimes_k S}{K}$

$pd\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K}) \leq 2$ *dir,* $rank\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K}) = 5$ *ve* $F_5(\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})) = (xy\otimes z) \neq \frac{R\otimes_k S}{K}$ *olduğu için,* $\Omega_2(\frac{R\otimes_k S}{K})$ *projektif modül değildir. Böylece* $\frac{R\otimes_k S}{K}$ *halkası regüler değildir.*

BÖLÜM 6

EVRENSEL MODÜLLERİN SİMETRİK KUVVET MODÜLLERİ

6.1 Simetrik Kuvvet Modülleri

Bu kısımda, simetrik kuvvet modülleriyle ilgili literatürde var olan çalışmalardan bahsedilmiştir. Bu kısımda [31], [2], [34] ve [19] den yararlanılmıştır.

Tanım 6.1.1. *R birimli ve değişmeli bir halka, M ve N birer R-modül olsun. $f : M^n \longrightarrow N$ multilineer dönüşümü tüm permütasyonlar altında değişmiyorsa f' ye simetrik dönüşüm denir.*

Tanım 6.1.2. *M bir R-modül olsun. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1x_2...x_n$ ile tanımlanan $f : M^n \longrightarrow S^n(M)$ simetrik dönüşümü olsun.*

$$S^n(M) = \otimes^n M/\langle x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots y \otimes z \otimes \cdots x_n - x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots z \otimes y \otimes \cdots x_n \rangle$$

modülüne M nin n. mertebeden simetrik kuvvet modülü denir. Özel olarak $S^0(M) = R$ ve $S^1(M) = M$ dir.

Örnek 6.1.3. *M bir R-modül olsun. $\forall x, y \in M$ için $S^2(M) = M \otimes_R M/\langle x \otimes y - y \otimes x \rangle$ şeklindedir.*

Önerme 6.1.4. *M rankı r olan serbest bir R-modül olsun. $S^n(M)$ rankı $\binom{r+n-1}{r-1}$ olan serbest bir R-modüldür.*

Lemma 6.1.5. *M ve N R-modüller ve $\theta : M^n \longrightarrow N$ bir multilineer dönüşüm olsun.*

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"'] & N \\
S^n(M) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan tek bir $g : S^n(M) \longrightarrow N$ R-modül homomorfizması vardır.

Önerme 6.1.6. *M bir R-modül ve T bir R-cebir olsun. Aşağıdaki R-modül izomorfizması vardır:*

$$S^n(M) \otimes_R T \cong S^n(M \otimes_R T)$$

Önerme 6.1.7. *M ve N R-modüller olsun. Aşağıdaki izomorfizma vardır:*

$$S^p(M \oplus N) \cong \oplus_{m+n=p} S^m(M) \otimes_R S^n(N)$$

Örnek 6.1.8. *M ve N R-modüller olsun. $p = 2$ için $S^2(M \oplus N)$ nin izomorf olduğu modülleri gösterelim.*

$$\begin{aligned}
S^2(M \oplus N) &\cong \oplus_{m+n=2} S^m(M) \otimes_R S^n(N) \\
&\cong S^0(M) \otimes_R S^2(N) \oplus S^1(M) \otimes_R S^1(N) \oplus S^2(M) \otimes_R S^0(N) \\
&\cong R \otimes_R S^2(N) \oplus M \otimes_R N \oplus S^2(M) \otimes_R R \\
&\cong S^2(N) \oplus M \otimes_R N \oplus S^2(M)
\end{aligned}$$

Sonuç 6.1.9. *R ve S afin k-cebirler olsun. M bir R-modül ve N bir S-modül olsun. Aşağıdaki izomorfizma vardır:*

$$S^p(M \oplus N) \cong \oplus_{m+n=p} S^m(M) \otimes_k S^n(N)$$

İspat. M bir R-modül ve R bir k-cebir olduğundan, M aynı zamanda bir k-modüldür. Benzer şekilde, N bir S-modül ve S bir k-cebir olduğundan, N bir k-modüldür. Önerme 6.1.7 den dolayı istenen izomorfizma elde edilir. □

6.2 Evrensel Türev Modüllerin İkinci Mertebeden Simetrik Kuvvet Modülleri

Bu kısımda, evrensel türev modüllerinin simetrik kuvvet modülü tanımı verilecek, sonrasında evrensel türev modüllerin ikinci mertebeden simetrik kuvvet modülleri ile ilgili çalışmalar incelenecektir [36], [34], [31], [35]. Son olarak, evrensel türev modüllerin ikinci mertebeden simetrik kuvvet modülleriyle ilgili elde ettiğimiz teorem ve sonuçlar ispatlarıyla birlikte verilecektir.

Tanım 6.2.1 ([34]). *R bir k-cebir, $R \longrightarrow \Omega_q(R)$ q. mertebeden türev operatörü, $S(\Omega_q(R))$ cebiri $\oplus_{p\geq 0} S^p(\Omega_q(R))$ tarafından üretilen $\Omega_q(R)$ üzerinde bir simetrik cebir olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $D : S(\Omega_q(R)) \longrightarrow S(\Omega_q(R))$ dönüşümüne simetrik türev operatörü denir:*

(i) $D(S^p(\Omega_q(R))) \subseteq S^{p+1}(\Omega_q(R))$

(ii) *D, q. mertebeden türev operatörüdür.*

(iii) *D nin $R = S^0(\Omega_q(R))$ ye kısıtlanışı birinci mertebeden türev operatörüdür.*

Örnek 6.2.2. *$R = k[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ boyutu r olan bir polinom cebiri olsun. $\Omega_q(R)$ tabanı $\{\delta_q(x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}) : 1 \leq i_1 + i_2 + \cdots + i_r \leq q\}$ kümesi olan serbest bir R-modüldür. Bu durumda $t = \binom{q+r}{r} - 1$ olmak üzere $S^2(\Omega_q(R))$ modülü rankı $\binom{t+1}{t-1}$ olan bir serbest bir R-modüldür. $S^2(\Omega_q(R))$ modülünün taban kümesi*

$$\left\{\delta_q(x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}) \otimes \delta_q(x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}) : 1 \leq i_1 + i_2 + \cdots + i_r \leq q\right\}$$

şeklindedir.

Örnek 6.2.3. *$R = k[x, y]$ ve $q = 2$ için $S^2(\Omega_2(R))$ kümesini inceleyelim. $S^2(\Omega_2(R))$ simetrik kuvvet modülü $\{\delta_2(x^i y^j) \otimes \delta_2(x^i y^j) : 1 \leq i + j \leq 2\}$ kümesi tarafından üretilir. Böylece $S^2(\Omega_2(R))$ simetrik kuvvet modülü* $\Big\{\delta_2(x)\otimes\delta_2(x), \delta_2(x)\otimes\delta_2(x^2), \delta_2(x)\otimes\delta_2(xy), \delta_2(x)\otimes\delta_2(y), \delta_2(x)\otimes\delta_2(y^2), \delta_2(y)\otimes\delta_2(y), \delta_2(y)\otimes \delta_2(xy), \delta_2(y)\otimes\delta_2(y^2), \delta_2(y)\otimes\delta_2(x^2), \delta_2(x^2)\otimes\delta_2(x^2), \delta_2(x^2)\otimes\delta_2(y^2), \delta_2(x^2)\otimes\delta_2(xy), \delta_2(y^2)\otimes \delta_2(y^2), \delta_2(y^2) \otimes \delta_2(xy), \delta_2(xy) \otimes \delta_2(xy)\Big\}$ *kümesi ile üretilir.*

Teorem 6.2.4 ([36]). *R bir afin k-cebir olsun.*

$$0 \longrightarrow Çek\theta \longrightarrow \Omega_2(R) \xrightarrow{\theta} \Omega_1(R) \longrightarrow 0$$

olacak şekilde bir tam dizi vardır ve $\forall r \in R$ için $\theta(\delta_2(r)) = \delta_1(r)$ dir. Bu dizide $Çek\theta$, $\forall a, b \in R$ için $\{\delta_2(ab) - a\delta_2(b) - b\delta_2(a)\}$ kümesi tarafından üretilir. $Çek\theta \cong S^2(\Omega_1(R))$ dır.

Lemma 6.2.5 ([34]). *R boyutu s olan bir afin bölge olsun. $\Omega_n(R)$ serbest bir R-modüldür ancak ve ancak $S^2(\Omega_n(R))$ serbest bir R-modüldür.*

İspat. Önerme 6.1.4 den dolayı ispatın bir tarafı açıktır. Diğer taraftan, $S^2(\Omega_n(R))$ serbest R-modül ve Q, R nin kesir cismi olsun. Önerme 6.1.6 den dolayı,

$$S^2(\Omega_n(R)) \otimes_R Q \cong S^2(\Omega_n(Q)) \cong S^2(\Omega_n(R) \otimes_R Q)$$

izomorfizması vardır. $\Omega_n(Q)$ modülünün rankı t olmak üzere $S^2(\Omega_n(Q))$ nun rankı $\binom{t+1}{t-1}$ olur. Ayrıca, m ideali R' nin bir maksimal ideali olmak üzere,

$$S^2(\Omega_n(R)) \otimes_R R/m \cong S^2(\Omega_n(R) \otimes_R R/m) \cong S^2(\frac{\Omega_n(R)}{m\Omega_n(R)})$$

olduğundan $S^2(\Omega_n(R)) \otimes_R R/m$ bir R/m vektör uzayıdır. $S^2(\frac{\Omega_n(R)}{m\Omega_n(R)})$ nin boyutu $\binom{t+1}{t-1}$ ise $\frac{\Omega_n(R)}{m\Omega_n(R)}$ nin boyutu t dir. Bu durumda Teorem 2.2.9 den $\Omega_n(R)$ evrensel türev modülü, t eleman tarafından üretilir. Böylece $rank\Omega_n(R) = \mu(\Omega_n(R))$ eşitliğinden $\Omega_n(R)$ serbest bir R-modüldür. □

Teorem 6.2.6 ([35]). *R afin yerel tamlık bölgesi olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(i) R regüler bir halkadır.

(ii) $\Omega_1(R)$ serbest R-modüldür.

(iii) $S^2(\Omega_1(R))$ serbest R-modüldür.

Lemma 6.2.7 ([34]). *R afin k-cebir ve $S(\Omega_1(R))$ üzerinde simetrik türevler var olsun. $\Omega_1(R)$ serbest R-modüldür ancak ve ancak $\Omega_2(R)$ serbest R-modüldür.*

İspat. $\Omega_1(R)$ projektif bir R-modül olsun. Teorem 3.1.24 den dolayı R regüler bir halkadır. Böylece Teorem 3.1.23 den $\Omega_2(R)$ projektif modül olmalıdır.
Tersine, Teorem 6.2.4 den aşağıdaki kısa tam dizi vardır:

$$0 \longrightarrow S^2(\Omega_1(R)) \longrightarrow \Omega_2(R) \longrightarrow \Omega_1(R) \longrightarrow 0 \qquad (6.2.0.1)$$

$\Omega_1(R)$ nin projektif olduğunu göstermek için önce bu dizinin ayrışan dizi olduğunu göstermeliyiz. Simetrik türev tanımından herhangi bir D simetrik türev dönüşümünün $D_1 : \Omega_1(R) \longrightarrow S^2(\Omega_1(R))$ ye kısıtlanışı tek şekildedir. $\delta_1 : R \longrightarrow \Omega_1(R)$ türev operatörü olmak üzere, $D_1\delta_1$ bileşkesi ikinci mertebeden bir türev dönüşümüdür. Bu durumda $\Omega_2(R)$ modülünün evrensellik özelliğinden $f\delta_2 = D_1\delta_1$ eşitliğini sağlayan tek bir $f : \Omega_2(R) \longrightarrow S^2(\Omega_1(R))$ R-modül homomorfizması vardır.

$$\begin{aligned} f(\delta_2(ab) - a\delta_2(b) - b\delta_2(a)) = & \ f\delta_2(ab) - af\delta_2(b) - bf\delta_2(a) \\ = & \ D_1\delta_1(ab) - aD_1\delta_1(b) - bD_1\delta_1(a) \\ & \ D_1(a\delta_1(b) + b\delta_1(a)) - aD_1\delta_1(b) - bD_1\delta_1(a) \\ & \ aD_1\delta_1(b) + \delta_1(a)\delta_1(b) + bD_1\delta_1(a) + \\ & \ \delta_1(b)\delta_1(a) - aD_1\delta_1(b) - bD_1\delta_1(a) \\ = & \ 2\delta_1(a)\delta_1(b) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(1/2)f$ ayrışma özelliğini sağlar. (6.2.0.1) dizisi ayrışan olduğundan $\Omega_2(R) \cong \Omega_1(R) \oplus S^2(\Omega_1(R))$ izomorfizması vardır. Böylece $\Omega_1(R)$ bir projektif R-modüldür. □

Şimdi evrensel modüllerin ikinci mertebeden simetrik kuvvet modülleriyle ilgili elde ettiğimiz sonuçları verelim:

Lemma 6.2.8. *R ve S afin yerel k-cebirler olsun. $S(\Omega_1(R))$ ve $S(\Omega_1(S))$ üzerinde simetrik türevler var olsun. Aşağıdaki izomorfizma vardır:*
$S^2(\Omega_1(R \otimes_k S) \cong R \otimes_k S \otimes_k [S^2(\Omega_1(R)) \otimes_k S \oplus S^2(\Omega_1(S)) \otimes_k R \oplus \Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)]$

İspat. Teorem 3.4.10' den $\Omega_1(R \otimes_k S) \cong \Omega_1(R) \otimes_k S \oplus R \otimes_k \Omega_1(S)$ izomorfizması vardır. Bu izomorfizmayı kullanarak $S^2(\Omega_1(R \otimes S))$ modülüne izomorf olan modülleri bulalım.

$$\begin{aligned} S^2(\Omega_1(R \otimes S)) & \cong S^2(\Omega_1(R) \otimes_k S \oplus R \otimes_k \Omega_1(S)) \\ & \cong S^0(\Omega_1(R) \otimes_k S) \otimes_k S^2(\Omega_1(S) \otimes_k R) \oplus S^1(\Omega_1(R) \otimes_k S) \\ & \otimes_k S^1(\Omega_1(S) \otimes_k R) \oplus S^2(\Omega_1(R) \otimes_k S) \otimes_k S^0(\Omega_1(S) \otimes_k R) \end{aligned}$$

$S^0(\Omega_1(R) \otimes_k S) = R \otimes_k S$, $S^0(\Omega_1(S) \otimes_k R) = R \otimes_k S$, $S^1(\Omega_1(R) = R$, $S^1(\Omega_1(S) = S$ eşitliklerini kullanalım.

$$\begin{aligned} S^2(\Omega_1(R \otimes S)) \cong & \ R \otimes_k S \otimes_k S^2(\Omega_1(S) \otimes_k R) \oplus (\Omega_1(R) \otimes_k S \otimes_k \\ & \ R \otimes_k \Omega_1(S)) \oplus R \otimes_k S \otimes_k S^2(\Omega_1(R) \otimes_k S) \end{aligned}$$

izomorfizması vardır. Diğer taraftan R, k-cebir ve $\Omega_1(S)$, k-modül olduğundan

$$S^2(\Omega_1(S) \otimes_k R) \cong S^2(\Omega_1(S)) \otimes_k R$$

S, k-cebir ve $\Omega_1(R)$, k-modül olduğundan

$$S^2(\Omega_1(R) \otimes_k S)) \cong S^2(\Omega_1(R)) \otimes_k S$$

izomorfizmaları vardır. Bu izomorfizmaları kullanarak $S^2(\Omega_1(R \otimes_k S))$ yi yeniden yazalım:

$$\begin{aligned} S^2(\Omega_1(R \otimes_k S)) \cong\ & [R \otimes_k S \otimes_k S^2(\Omega_1(S)) \otimes_k R] \oplus [R \otimes_k S \otimes_k S^2(\Omega_1(R)) \otimes_k S] \\ & \oplus [\Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S) \otimes_k R \otimes_k S] \\ \cong\ & R \otimes_k S \otimes_k [S^2(\Omega_1(R)) \otimes_k S \oplus S^2(\Omega_1(S)) \otimes_k R \oplus \Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)] \end{aligned}$$

izomorfizması elde edilir. Lemma 6.2.5' yi kullanarak $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ serbest modüller olduğundan $S^2(\Omega_1(R))$ ve $S^2(\Omega_1(S))$ serbest modüldür. Böylece $S^2(\Omega_1(R \otimes_k S))$ serbest modüllerin direkt toplamına izomorf olduğundan serbest modüldür. Yine Lemma 6.2.5 kullanılarak $\Omega_1(R \otimes_k S)$ serbest modül olur. □

Teorem 6.2.9. *R ve S afin yerel k-cebirler olsun. $S(\Omega_1(R))$ üzerinde simetrik türevler var olsun. $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ serbest modüller ise $\Omega_1(R \otimes_k S)$ serbest bir modüldür.*

İspat. Lemma 6.2.5' den $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ serbest modüller ise $S^2(\Omega_1(R))$ ve $S^2(\Omega_1(S))$ serbesttir. Böylece Lemma 6.2.8' deki izomorfizmadan $S^2(\Omega_1(R \otimes_k S))$ serbest modüllerin direkt toplamına izomorf olur. Bu durumda $S^2(\Omega_1(R \otimes_k S))$ serbest bir modüldür. Lemma 6.2.5' den $\Omega_1(R \otimes_k S)$ serbest bir $\Omega_1(R \otimes_k S$ modüldür. □

Sonuç 6.2.10. *R ve S afin k-cebirler olsun. $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ projektif modüller ise $\Omega_1(R \otimes_k S)$ projektif bir modüldür.*

Sonuç 6.2.11. *R ve S afin regüler k-cebirler ise $\Omega_1(R \otimes_k S)$ projektif bir modüldür.*

İspat. R ve S afin regüler k-cebirler ise $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ projektif modüllerdir. Bu durumda Sonuç 6.2.10 den dolayı $\Omega_1(R \otimes_k S)$ projektiftir. □

Lemma 6.2.12. *R bir afin yerel k-cebir olsun. $S(\Omega_1(R))$ ve $S(\Omega_2(R))$ üzerinde simetrik türevler var olsun. Aşağıdaki izomorfizma vardır:*

$$\begin{aligned}S^2(\Omega_2(R\otimes_k S)) \cong\ & [R\otimes_k S\otimes_k R\otimes_k S\otimes_k [R\otimes_k S^2(\Omega_2(S))\oplus S\otimes_k S^2(\Omega_2(R))\\ &\oplus\Omega_2(R)\otimes\Omega_2(S)]\oplus[S^2(\Omega_1(R)\otimes_k\Omega_1(S))\otimes_k R\otimes_k S]\oplus\\ &[\Omega_1(R)\otimes_k\Omega_1(S)\otimes_k\Omega_2(R)\otimes_k S\oplus\Omega_2(S)\otimes_k R]\end{aligned}$$

İspat. $S^2(\Omega_2(R\otimes_k S))$ modülünün izomorf olduğu modülleri bulalım. Teorem 3.4.12 dan dolayı aşağıdaki izomorfizma vardır:

$$S^2(\Omega_2(R\otimes_k S))\cong S^2[\Omega_1(R)\otimes_k\Omega_1(S)\oplus\Omega_2(R)\otimes_k S\oplus\Omega_2(S)\otimes_k R]$$

$M := \Omega_1(R)\otimes_k\Omega_1(S)$ ve $N := \Omega_2(R)\otimes_k S\oplus\Omega_2(S)\otimes_k R$ diyelim.

$S^2(\Omega_2(R\otimes_k S))\cong[R\otimes_k S\otimes_k S^2(N)]\oplus[S^2(\Omega_1(R)\otimes_k\Omega_1(S))\otimes_k R\otimes_k S]\oplus[M\otimes N]$ dir. Önce $S^2(N)$ modülünü inceleyelim.

$$\begin{aligned}S^2(N)\cong\ & [R\otimes_k S\otimes_k S^2(R\otimes_k\Omega_2(S))]\oplus[R\otimes_k S\otimes_k S^2(S\otimes_k\Omega_2(R))]\\ &\oplus[R\otimes_k S\otimes_k\Omega_2(R)\otimes\Omega_2(S)]\\ \cong\ & R\otimes_k S\otimes_k[S^2(R\otimes_k\Omega_2(S)\oplus S^2(S\otimes_k\Omega_2(R)\oplus\Omega_2(R)\otimes\Omega_2(S)]\\ \cong\ & R\otimes_k S\otimes_k[R\otimes_k S^2(\Omega_2(S))\oplus S\otimes_k S^2(\Omega_2(R))\oplus\Omega_2(R)\otimes\Omega_2(S)]\end{aligned}$$

Bu durumda aşağıdaki izomorfizma elde edilir:

$$\begin{aligned}S^2(\Omega_2(R\otimes_k S))\cong\ & [R\otimes_k S\otimes_k S^2(N)]\oplus[S^2(\Omega_1(R)\otimes_k\Omega_1(S))\otimes_k R\otimes_k S]\\ &\oplus[M\otimes N]\\ \cong\ & [R\otimes_k S\otimes_k R\otimes_k S\otimes_k[R\otimes_k S^2(\Omega_2(S))\oplus S\otimes_k S^2(\Omega_2(R))\\ &\oplus\Omega_2(R)\otimes\Omega_2(S)]\oplus[S^2(\Omega_1(R)\otimes_k\Omega_1(S))\otimes_k R\otimes_k S]\oplus\\ &[\Omega_1(R)\otimes_k\Omega_1(S)\otimes_k\Omega_2(R)\otimes_k S\oplus\Omega_2(S)\otimes_k R]\end{aligned}$$

□

Teorem 6.2.13. *R ve S afin yerel k-cebirler olsun. $S(\Omega_1(R))$ ve $S(\Omega_2(R))$ üzerinde simetrik türevler var olsun. $\Omega_2(R)$, $\Omega_2(S)$ ve $S^2(\Omega_1(R)\otimes\Omega_1(S))$ serbest modüller ise $\Omega_2(R\otimes_k S)$ serbest modüldür.*

İspat. Varsayalım ki $\Omega_2(R)$, $\Omega_2(S)$ ve $S^2(\Omega_1(R)\otimes\Omega_1(S))$ serbest modüller olsun.

Lemma 6.2.7 dan dolayı $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ serbest modüllerdir. Lemma 6.2.5 dan dolayı $S^2(\Omega_2(R))$ ve $S^2(\Omega_2(S))$ serbest modüllerdir. Böylece Lemma 6.2.12 den $S^2(\Omega_2(R\otimes_k S))$ serbest modüllerin direkt toplamına izomorf olduğundan $S^2(\Omega_2(R\otimes_k S))$ serbest bir $R\otimes_k S$-modüldür. Böylece Lemma 6.2.5 den $\Omega_2(R\otimes_k S)$ serbest bir modüldür. □

Örnek 6.2.14. *$R = k[x,y,z]$ polinomlar cebiri, $f = y^2 - xz$, $g = yz - x^3$, $h = z^2 - x^2y$ ve $S = R/\langle f,g,h\rangle$ olsun. S afin tamlık bölgesi ve boyutu 1 dir. $S^2(\Omega_1(S))$ yi inceleyelim. F, $\{d_1(x), d_1(y), d_1(z)\}$ tarafindan üretilen bir serbest S-modül ve N,*

$$\begin{aligned} d_1(f) = &\ d_1(y^2 - xz) = 2yd_1(y) - xd_1(z) - zd_1(x) \\ d_1(g) = &\ d_1(yz - x^3) = yd_1(z) - zd_1(y) - 3x^2d_1(x) \\ d_1(h) = &\ d_1(z^2 - x^2y) = 2zd_1(z) - 2xyd_1(x) - x^2d_1(y) \end{aligned}$$

elemanlarıyla üretilen F nin bir alt modülü olsun. Bu modülleri kullanarak, $S^2(\Omega_1(S))$ yi inşa edelim.

$S^2(\Omega_1(S)) \cong S^2(F)/l_N$ öyle ki, $S^2(F)$ modülü $\{d_1(x)\otimes d_1(x), d_1(x)\otimes d_1(y), d_1(x)\otimes d_1(z), d_1(y)\otimes d_1(y), d_1(y)\otimes d_1(z), d_1(z)\otimes d_1(z)\}$ kümesi ile üretilen serbest bir alt S-modül, l_N modülü $\{d_1(f)\otimes d_1(x), d_1(f)\otimes d_1(y), d_1(f)\otimes d_1(z), d_1(g)\otimes d_1(x), d_1(g)\otimes d_1(y), d_1(g)\otimes d_1(z), d_1(h)\otimes d_1(x), d_1(h)\otimes d_1(y), d_1(h)\otimes d_1(z)\}$ kümesi ile üretilen $S^2(F)$ nin bir alt modülü olsun. Burada

$d_1(f)\otimes d_1(x) = (2yd_1(y) - xd_1(z) - zd_1(x))\otimes d_1(x) = 2yd_1(y)\otimes d_1(x) - xd_1(z)\otimes d_1(x) - zd_1(x)\otimes d_1(x)$

$d_1(f)\otimes d_1(y) = (2yd_1(y) - xd_1(z) - zd_1(x))\otimes d_1(y) = 2yd_1(y)\otimes d_1(y) - xd_1(z)\otimes d_1(y) - zd_1(x)\otimes d_1(y)$

$d_1(f)\otimes d_1(z) = (2yd_1(y) - xd_1(z) - zd_1(x))\otimes d_1(z) = 2yd_1(y)\otimes d_1(z) - xd_1(z)\otimes d_1(z) - zd_1(x)\otimes d_1(z)$

$d_1(g)\otimes d_1(x) = (yd_1(z) - zd_1(y) - 3x^2d_1(x))\otimes d_1(x) = yd_1(z)\otimes d_1(x) - zd_1(y)\otimes d_1(x) - 3x^2d_1(x)\otimes d_1(x)$

$d_1(g)\otimes d_1(y) = (yd_1(z) - zd_1(y) - 3x^2d_1(x))\otimes d_1(y) = yd_1(z)\otimes d_1(y) - zd_1(y)\otimes d_1(y) - 3x^2d_1(x)\otimes d_1(y)$

$d_1(g)\otimes d_1(z) = (yd_1(z) - zd_1(y) - 3x^2d_1(x))\otimes d_1(z) = yd_1(z)\otimes d_1(z) - zd_1(y)\otimes d_1(z) - 3x^2d_1(x)\otimes d_1(z)$

$d_1(h)\otimes d_1(x) = (2zd_1(z) - 2xyd_1(x) - x^2d_1(y))\otimes d_1(x) = 2zd_1(z)\otimes d_1(x) - 2xyd_1(x)\otimes d_1(x) - x^2d_1(y)\otimes d_1(x)$

$d_1(h) \otimes d_1(y) = (2zd_1(z) - 2xyd_1(x) - x^2d_1(y)) \otimes d_1(y) = 2zd_1(z) \otimes d_1(y) - 2xyd_1(x) \otimes d_1(y) - x^2d_1(y) \otimes d_1(y)$

$d_1(h) \otimes d_1(z) = (2zd_1(z) - 2xyd_1(x) - x^2d_1(y)) \otimes d_1(z) = 2zd_1(z) \otimes d_1(z) - 2xyd_1(x) \otimes d_1(z) - x^2d_1(y) \otimes d_1(z)$

şeklindedir. $rankS^2(\Omega_1(S)) = 1$ *olduğundan* $rankI_N = rankS^2(F) - rankS^2(\Omega_1(S)) = 6 - 1 = 5$ *ise* I_N *serbest modül değildir. Örnek 4.2.11 den* S *regüler değildir, buna göre* $S^2(\Omega_1(S))$ *serbest modül değildir.*

Örnek 6.2.15. $R = k[x]$ *ve* $S = k[y, z]$ *polinom cebirleri olsun.*

$\Omega_1(R)$, $\{d_1(x)\}$ *ile üretilen rankı* 1 *olan bir serbest* R*-modüldür. Bu durumda* $S^2(\Omega_1(R))$, $\{d_1(x) \otimes d_1(x)\}$ *kümesi ile üretilen serbest bir* R*-modül olur. Benzer şekilde,* $\Omega_1(S)$ *modülü* $\{d_1(y), d_1(z)\}$ *ile üretilen rankı* 2 *olan bir serbest* S*-modül olduğundan* $S^2(\Omega_1(S))$ *simetrik kuvvet modülü* $\{d_1(y) \otimes d_1(y), d_1(y) \otimes d_1(z), d_1(z) \otimes d_1(z)\}$ *kümesi ile üretilen serbest bir* S*-modüldür.*

$$S^2(\Omega_1(R \otimes_k S)) \cong R \otimes_k S \otimes_k [S^2(\Omega_1(R)) \otimes_k S \oplus S^2(\Omega_1(S)) \otimes_k R \oplus \Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S)]$$

olduğundan $S^2(\Omega_1(R \otimes_k S))$ *serbest modüllerin direkt toplamına izomorftur. Böylece* $S^2(\Omega_1(R \otimes_k S))$ *serbest* $R \otimes_k S$*-modül olur. Teorem 6.2.9 den* $\Omega_1(R \otimes_k S)$ *serbest modüldür.*

$\Omega_2(R)$, $\{d_2(x), d_2(x^2)\}$ *ile üretilen rankı* 2 *olan bir serbest* R*-modüldür. Buna göre* $S^2(\Omega_2(R))$, $\{d_2(x) \otimes d_2(x), d_2(x) \otimes d_2(x^2), d_2(x^2) \otimes d_2(x^2)\}$ *kümesi ile üretilen serbest bir* R*-modül olur.* $\Omega_2(S)$ *ise* $\{d_2(y), d_2(y^2), d_2(yz), d_2(z), d_2(z^2)\}$ *ile üretilen rankı* 5 *olan bir* S*-modüldür. Bu durumda* $S^2(\Omega_2(S))$ *modülü*

$\left\{d_2(y) \otimes d_2(y), d_2(y) \otimes d_2(z), d_2(z) \otimes d_2(z), d_2(y) \otimes d_2(y^2), d_2(y) \otimes d_2(yz), d_2(y) \otimes d_2(z^2), d_2(y^2) \otimes d_2(y^2), d_2(y^2) \otimes d_2(yz), d_2(y^2) \otimes d_2(z), d_2(y^2) \otimes d_2(z^2), d_2(yz) \otimes d_2(yz), d_2(yz) \otimes d_2(z), d_2(yz) \otimes d_2(z^2), d_2(z) \otimes d_2(z^2), d_2(z^2) \otimes d_2(z^2)\right\}$

kümesi ile üretilen serbest bir S*-modüldür. Böylece* $S^2(\Omega_2(R \otimes_k S))$ *serbest modüllerin direkt toplamına izomorf olduğundan serbesttir. Teorem 6.2.13 den* $\Omega_2(R \otimes_k S)$ *serbest modüldür.*

BÖLÜM 7

TARTIŞMA VE SONUÇ

Fitting idealler bir halkanın regülerliği ve modülün yapısını incelemede önemli araçlardan biridir. Genellikle yapılan çalışmalarda sıfırdan farklı ilk Fitting ideal veya sıfırıncı Fitting idealler incelenmiştir. Bu ideallerin terslenebilir, maksimal veya asal olması durumuna göre modülün cebirsel yapısıyla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bir modülün Fitting ideallerini çalışmak kısmen pratik bir yöntemdir. Çünkü yapmamız gereken sonlu üretilmiş bir modülün bağıntı matrisini oluşturup bunun alt determinantlarını hesaplamaktır. Sonra alt determinantların ürettiği ideali belirleyip, literatürde var olan bilgilere göre modülün yapısını incelemektir. Örneğin bir R-modülün sıfırdan farklı ilk Fitting ideali R ise modül projektiftir. Bazen Fitting idealleri hesaplamak zor olabilir bu durumda da ApCoCoA gibi bilgisayar programları kullanılmaktadır [41].

Bu tez çalışmasında, R ve S afin k-cebirler olmak üzere, $\Omega_1(R)$ ve $\Omega_1(S)$ nin sıfırdan farklı ilk terslenebilir Fitting idealleri yardımıyla $\Omega_1(R \otimes_k S)$ nin sıfırdan farklı ilk terslenebilir Fitting ideali ifade edildi. Sonrasında evrensel modüllerin terslenebilir Fitting idealleriyle ilgili özellikler kullanılarak $\Omega_1(R \otimes_k S)$ nin projektif boyutunun bazı koşullar altında bir veya birden küçük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Benzer şekilde $\Omega_2(R \otimes_k S)$ modülünün projektif boyutunun bir veya birden küçük olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuçların elde edilmesinde, R ve S birer k-cebir olmak üzere

$$\begin{aligned} \Omega_1(R \otimes_k S) \cong\ & \Omega_1(R) \otimes_k S \oplus R \otimes_k \Omega_1(S) \\ & \text{ve} \\ \Omega_2(R \otimes_k S)) \cong\ & \Omega_1(R) \otimes_k \Omega_1(S) \oplus \Omega_2(R) \otimes_k S \oplus \Omega_2(S) \otimes_k R \end{aligned}$$

izomorfizmaları çok önemli bir yere sahiptir [28], [33].

Ayrıca evrensel türev modüllerin ikinci mertebeden simetrik kuvvet modülleri yardımıyla yine $\Omega_1(R \otimes_k S)$ ve $\Omega_2(R \otimes_k S)$ modüllerinin yapısıyla ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında evrensel modüllerin Fitting idealleri ayrıntılı olarak incelenmiş, birinci mertebeden ve ikinci mertebeden evrensel modüllerin yapısıyla ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçların Değişmeli Cebir ve Cebirsel Geometri alanındaki problemlerin çözümünde yardımcı olacağını öngörmekteyiz. Ayrıca evrensel modüllerin Fitting idealleriyle ilgili çalışmaların azlığından dolayı bu çalışma önemli bir kaynak niteliği taşımaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Barajas, P., Duarte, D. (2020). On the Module of Differentials of Order n of Hypersurfaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **224(2)**, 536-550.

[2] Bourbaki, N. (1974). *Algebra*, Hermann, Paris.

[3] Brown, W. C. (1993). *Matrices over Commutative Rings*, Pure and Applied Mathematics, Vol.169. New York: Marcel Dekker Inc.

[4] Çallıalp, F., Tekir, Ü. (2009). *Değişmeli Halkalar ve Modüller*. Birsen Yayınevi.

[5] Eisenbud, D. (1995). *Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York.

[6] Einsiedler, M., Ward, T. (2000). Fitting Ideals for Finitely Presented Algebraic Dynamical Systems. *Aequationes mathematicae*, **60(1-2)**, 57-71.

[7] Erdogan, A. (1993). Differential Operators and Their Universal Modules, *Phd. Thesis, Universty of Leeds*.

[8] Erdoğan, A. (1996). Homological Dimension of the Universal Modules for Hypersurfaces, *Comm.Algebra* **24(5)**, 1565-1573.

[9] Fitting, H. (1936). Die Determinantenideale Eines Moduls, *Jber. Deutsche Math. Verein **46***, 195-228.

[10] Grime, P. J. (2002). Fitting ideals and module structure, *PhD. Thesis, Durham University*.

[11] Hadjirezaei, S., Hedayat, S. (2013). On the First nonzero Fitting Ideal of a Module over a UFD. *Communications in Algebra*, **41(1)**, 361-366.

[12] Hadjirezaei, S., Hedayat, S. (2018). On Finitely Generated module whose First Nonzero Fitting idealis maximal, *Communications in Algebra*, Vol. **46**, No.2, 610-614.

[13] Hadjirezaei, S.,Karimzadeh, S. (2016). On Finitely Generated Modules whose First Nonzero Fitting ideals are regular, *Categories and General Algebraic Structures with Applications*.

[14] Hadjirezaei, S., Karimzadeh, S. (2018). On the Fitting ideals of a Multiplication module. *Algebra and Discrete Mathematics*, **25(1)**, 27-34.

[15] Hadjirezaei, S., Karimzadeh, S. (2018). On the First nonzero Fitting ideal of a Module over a UFD (II). *Communications in Algebra,* **46(12)**, 5427-5432.

[16] Kaplansky, I. (1970). *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, Boston.

[17] Karimzadeh, S., Hadjirezaei, S. (2015). On the Fitting ideals of a Comultiplication module. *Journal of Algebra and Related Topics*, **3(1)**, 31-39.

[18] Kunz, E. (1986). *Kähler differentials*. F. Vieweg.

[19] Lang, S. (2005). *Undergraduate algebra*. Springer Science and Business Media.

[20] Lipman, J. (1969). On the Jacobian Ideal of the Module of Differentials, *Proc. Ams.*, 422-426.

[21] Macrae, R.E. (1965). On an Application of the Fitting Invariants, *Journal of Algebra* ***2***, 153-169.

[22] Matsumura, H. (1989). *Commutative ring theory* (Vol. 8). Cambridge university press.

[23] Matsuoka, T. (1967). On the Torsion Submodule of a Module of Type (F_1), *J. Sci.Hiroshima Univ.Ser. A-I* ***31,*** *151-160*.

[24] Matsuoka, T. (1977). On Almost Complete Interchapters, *Manuscript Math.* **21**, 329-340.

[25] McConnell, J.C. and Rabson, J.C. (1987). *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience.

[26] Mott, J.L. (1963). On Invertible ideals in a Commutative Ring, *Phd. Thesis, Louisiana State University and Agricultural Mechanical College.*

[27] Nakai, Y. (1961). On The Theory of Differantials in Commutative Rings, *J. Math.Soc.Japon* **13**, 63-84.

[28] Nakai, Y. (1970). High Order Derivations, *Osaka J. Math. 7, 1-27* .

[29] Northcott, D.G. (1980). *Affine Sets and Affine Groups,* Cambridge Universitey Press, Newyork.

[30] Ohm, J. (2008). On the First nonzero Fitting Ideal of a Module. *Journal of Algebra,* **320(1)**, 417-425.

[31] Olgun, N. (2005). The Universal Differential Modules of Finitely Generated Algebras, *PhD.Thesis, Hacettepe University*.

[32] Olgun, N., Erdogan, A. (2005). Universal modules on $R \otimes_k S$. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* **34**, 33-38.

[33] Olgun, N. (2015). A Problem on Universal Modules, *Communications in Algebra* ***43:10***,4350-4358.

[34] Olgun, N. (2016). Symmetric Derivations on Kahler Modules. arXiv preprint arXiv:1602.01343.

[35] Olgun, N., Sahin, M., Ulucay, V. (2016). Tensor, Symmetric and Exterior Algebras Kähler Modules, *New Trends in Mathematical Sciences*, **4(3)**, 290.

[36] Osborn, H. (1967). Modules of Differentials I, *Math. Ann.* **170,** 221-244.

[37] Osborn, H. (1968). Modules of Differentials II, *Math. Ann.* **175**, 146-158.

[38] Sharp, R. Y. (2000). *Steps in commutative algebra.* No. 51. Cambridge university press.

[39] Sweedler, M.E. ve Heyneman, R.G. (1969). Affine Hopf Algebras, *J.Algebra* **13**, 192-241.

[40] Sweedler, M. E. (1975). *Groups of Simple Algebras*, Publ. Math. No:44.

[41] The ApCoCoA Team, ApCoCoA: Approximate Computations in Commutative Algebra, available at http://www.apcocoa.org.

[42] Wiles, A. (1990). The Iwasawa Conjecture for Totally Real Fields, *Ann. Math.* **131(3)**, 493-540.

[43] Vasconcelos, W.V. (1978). On The Homology of I/I^2, *Comm. Algebra* **6(17)**, 180-189.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGiLER

Adı Soyadı : Nurbige TURAN ZABUN

Uyruğu : TC

Doğum Yeri ve Tarihi : Bozdoğan 01.01.1986

Medeni Hali : Evli

Email : nurbigeturan@gantep.edu.tr

EĞİTİM BİLGİLERİ

Derece	**Mezun Olduğu Okul**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Gaziantep Üniversitesi	2014
Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2010
Lise	Muğla Turgut Reis Lisesi	2005

Ödüller

Tübitak 2211-A Yurtiçi Doktora Bursu (2014)

Yabancı Dil Bilgisi

Yabancı Dil	**Sınav Türü**	**Puan**
İngilizce	YÖKDİL	82.5
İngilizce	KPDS	77.5

YAYINLAR

• **Turan, N.**, Olgun, N. (2018). On Fitting Ideals of Kahler Differential Module. Symmetry, 10(9), 413.

• **Turan Zabun, N.**, Olgun, N. (2020). On the module of First and Second Order Differentials of $R \otimes_k S$. Algebra Letters, Article-ID.

Ulusal Bildiriler

• **Nurbige Turan**, Kuadratik Polinomların İndirgenemezliği Üzerine, 27. Ulusal Matematik Sempozyumu, 26-29 Ağustos 2014, Yeditepe Üniversitesi (Bildiri).

• **Nurbige Turan**, Evrensel Modüllerin Fitting İnvaryantları, 29. Ulusal Matematik Sempozyumu, 28-31 Mayıs 2016, Mersin Üniversitesi (Bildiri).

• **Nurbige Turan**, Fitting İdeallerin Tersinirliği Üzerine, 13. Ankara Matematik Günleri, 27-28 Nisan 2018, Ankara (Bildiri).

Uluslararası Bildiriler

• **Nurbige Turan**, Necati Olgun, Evrensel Diferansiyel Modüllere Bakış, ICNASE 2016, 19-20 Mart 2016, Kilis 7 Aralık Üniversitesi (Tam Bildiri).

• Necati Olgun, **Nurbige Turan**, On Invertibility of Fitting Ideal, UMTEB 2018, 21-22 Haziran 2018, Gaziantep Üniversitesi (Tam Bildiri).

• Necati Olgun, **Nurbige Turan**, Kahler Differents and Torsion Free Kahler Differents, ICMME 2017, 11-13- Mayıs 2017, Harran Üniversitesi (Bildiri).

• **Nurbige Turan Zabun**, Necati Olgun, Evrensel Modüllerin Simetrik Türev Modülleri Üzerine, Zeugma 3. Uluslararası Multidisipliner Çalışmalar Kongresi, 22-24 Kasım 2019, Gaziantep (Tam Bildiri).